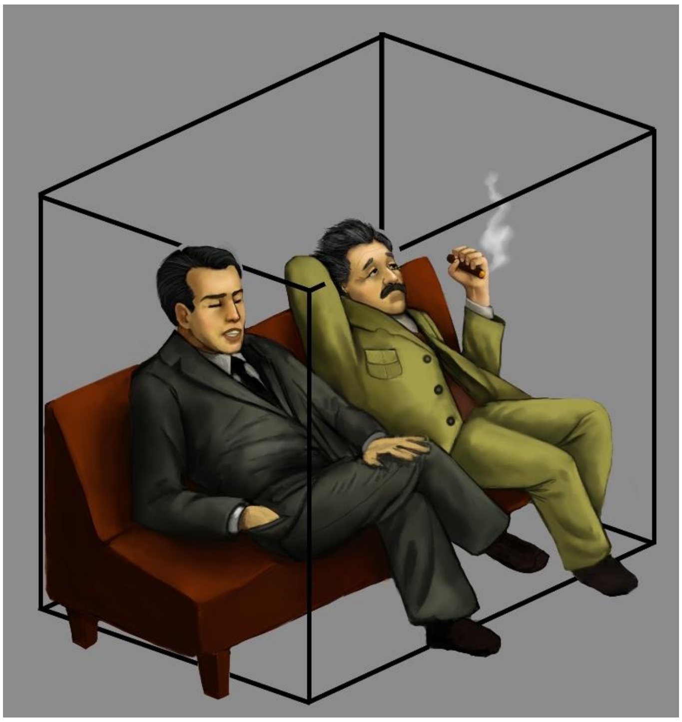
POSTULADOS DA FÍSICA QUÂNTICA



Einstein e Bohr. Arte: Khalil Canabarro.

Imagine que um feixe de elétrons esteja incidindo sobre uma placa metálica que possui duas fendas paralelas, como representado na Figura 5.1. Elétrons podem passar livremente pelas fendas, mas ficam retidos se atingirem a placa. Atrás da placa metálica está um detector, que registra um ponto luminoso sempre que é atingido por um elétron. Imaginemos que o feixe é extremamente fraco, com os elétrons bem separados no tempo, chegando ao detector, depois de passar pela placa metálica, um de cada vez. A pergunta é: depois de um longo tempo, o que veremos?

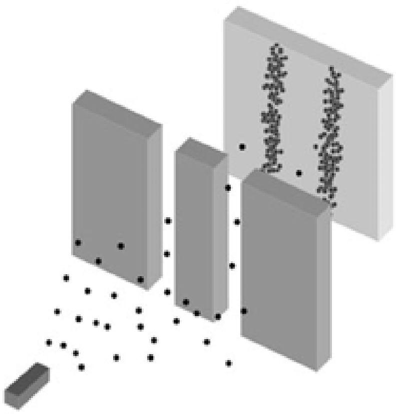


Figura 5.1 Esquema do experimento.

Se fossem objetos macroscópicos, como bolas de boliche, esperaríamos que as mesmas ficassem retidas nas regiões do anteparo atrás das fendas e, nada além fosse encontrado nas demais regiões, como na Figura 5.1. Como o experimento é realizado com quântons, o resultado é o observado na Figura 5.2.

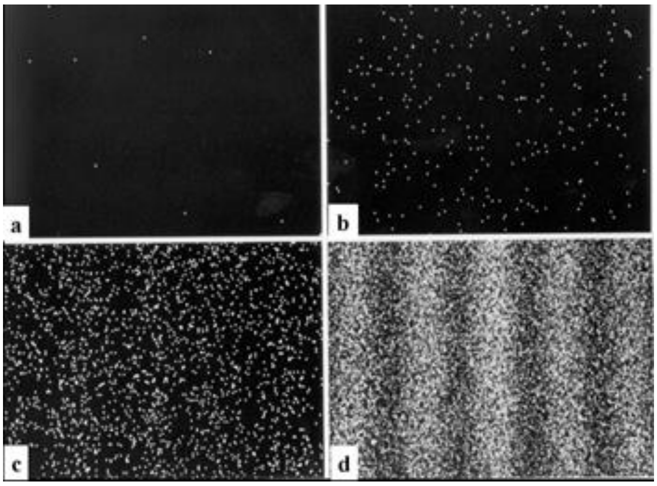


Figura 5.2: Difração de elétrons, de Hitachi et al.

Os elétrons não chegam todos ao mesmo lugar. Inicialmente, não parece existir nenhuma regularidade no registro dos pontos luminosos, Figuras 5.2a e 5.2b. Pelo contrário, eles vão surgindo ao acaso. Os elétrons são lançados numa taxa de 10 elétrons por segundo e somente depois de uns vinte minutos é que percebemos um padrão: existem regiões nas quais é mais provável que o elétron incida (faixas verticais mais brilhantes), e regiões nas quais isso é menos provável (faixas verticais mais escuras). Isto é percebido na Figura 5.2d.

Esse é um **padrão *estatístico***, ou seja, a incidência de um único elétron não nos diz nada, apenas o comportamento de todos eles juntos ao longo do tempo é que revela o padrão. Isso você já sabia, no experimento de Stern e Gerlach, não era o spin de um elétron, mas a propriedade “spin do elétron” que era relevante para a descrição do sistema físico.

Uma teoria física é formalizada em termos de postulados. Os postulados da Física Quântica são:

I. A cada estado de um sistema físico associamos uma matriz, definida no conjunto dos números complexos, chamada "autoestado" do sistema. Esse autoestado contém todas as informações que podemos saber sobre o sistema.

II. Um observável físico é descrito matematicamente por um operador hermitiano.

III. Os valores possíveis da medida de um observável físico são os autovalores correspondentes ao operador associado ao observável em questão.

IV. Os autoestados formam uma base do espaço vetorial.

V. Medidas têm caráter probabilístico. A probabilidade de que uma medida de uma certa quantidade A obtenha um autovalor a com autoestado $|a\rangle$ em um estado genérico $|s\rangle$ é dada por $P_a = |\langle a|s\rangle|^2$

Vamos entender cada um desses postulados à luz do que já estudamos. No sistema de átomos de prata, a propriedade que era relevante era o spin do 47º elétron, que poderia ser "para cima" e "para baixo". Os autoestados eram $|\uparrow\rangle$ e$|\downarrow\rangle$ e as matrizes tinham duas linhas. No problema da difração dos elétrons, o elétron tem a possibilidade de passar pela fenda 1, que vamos chamar de $|1\rangle$, e pela fenda 2, $|2\rangle$. Lembre que tanto $|1\rangle$ quanto $|2\rangle$ são matrizes coluna. Isso é aplicar na prática o que os postulados I e IV afirmam de uma maneira formal.

Figura 5.3: Ilustração do experimento pensado Gato de Schrödinger. Arte: Khalil Canabarro.

Um outro experimento pensado muito famoso é o do Gato de Schrödinger: suponha que um gato está trancado dentro de uma caixa. Dentro da caixa está também um frasco de veneno ligado a um átomo radioativo. Ao longo de uma hora, o átomo pode decair e liberar o veneno, matando o gato, mas também pode ser que isso não aconteça. Se as duas possibilidades tiverem igual probabilidade de ocorrência, o autestado do sistema "gato+átomo" será:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|vivo, não\ decaiu\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|morto, decaiu\rangle$$

Este estado de superposição é muito importante para os *q-bits,* como você viu na primeira aula, e que deve revolucionar a computação nas próximas décadas, mesmo que não tenhamos um computador quântico em nossas casas. Observações em destaque:

- Dados dois estados admissíveis de um sistema quântico, então, a **combinação linear** desses dois estados também é um estado admissível do sistema;
- Estados de superposição **nunca** são observados no mundo macroscópico, pois está fora do limite de validade da teoria.

No primeiro postulado afirmamos ainda que o autoestado está associado a uma matriz definida no conjunto dos números complexos. Os números complexos **C** englobam o conjunto dos números reais: todos os números positivos e o zero (naturais **N**), negativos (inteiros **Z**), decimais (racionais **Q**), e raízes (irracionais, **I**), acrescidos das raízes dos números negativos,

$$i = \sqrt{-1}$$

Esses números são escritos como:

$$z=a+bi$$

Sendo a chamado a parte real do número complexo z e b a parte imaginária. A quantidade:

$$z^* = a - bi$$

é denominada complexo conjugado do número z, e, na prática, significa trocar i por $-i$. Calcular o quadrado de um número complexo é multiplicá-lo por seu complexo conjugado. Propriedades de adição e multiplicação foram mencionadas na última aula.

Vamos ao Postulado II: Um observável físico é descrito matematicamente por um operador hermitiano.

Um operador Hermitiano é uma matriz cujos elementos da diagonal apresentam números reais e os demais apresentam a seguinte relação:

$$a_{12} = a_{21}^*$$

$$a_{13} = a_{31}^*$$

...

Ou seja, a se você trocar as linhas e as colunas da matriz **A** (que significa obter a matriz transposta da matriz **A**) você obtém o complexo conjugado de cada elemento. Isso é uma verdade matemática para cada matriz **S**:

$$\boldsymbol{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que se você somar os elementos da diagonal de cada uma das matrizes, o nome dessa operação é calcular o traço da matriz, você obterá zero.

Na aula passada calculamos o produto:

$$\boldsymbol{S}_x\boldsymbol{S}_y - \boldsymbol{S}_y\boldsymbol{S}_x = i\hbar\boldsymbol{S}_z$$

Esse é um resultado típico de matrizes que já havíamos obtido anteriormente **AB≠BA**. O significado físico disso é profundo: as componentes x e y de $\boldsymbol{S}$ não podem ser conhecidas **simultaneamente** com precisão. Esse é o Princípio da Incompatibilidade dos Observáveis, ou seja, se conhecemos bem uma componente do spin, não temos informações precisas sobre a outra. Na simulação do experimento de Stern e Gerlach, o segundo imã posicionado transversalmente, destruía a informação conhecida do primeiro imã, e isso podia ser percebido com a detecção de estados $|\downarrow\rangle$ no terceiro imã, os quais haviam sido bloqueados no primeiro imã.

Se duas grandezas são representadas por operadores que não comutam, as mesmas não podem ser conhecidas **simultaneamente** com precisão.

No caso do experimento de fenda dupla, se introduzirmos um detector que permita inferir por qual fenda o elétron passa, o padrão não-localizado é destruído, isto é, obteremos as regiões brilhantes só após as fendas como na Figura 5.1.

E o que era o padrão não-localizado da Figura 5.2?

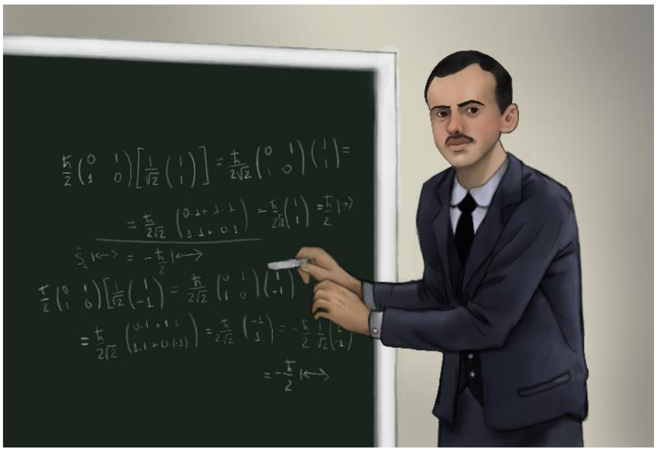
Relembrando, elétrons, fótons, átomos, etc. são quântons: discretos, mas extensos. O que determina a extensão do quânton é o comprimento de de Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$. As grandezas x e p são incompatíveis. Em outras palavras, se eu conheço bem a posição do quânton, terei informações incipientes sobre a velocidade ou momento dele e vice-versa.

Se o quânton encontra um obstáculo cujas dimensões são da mesma ordem que sua extensão, padrões não-localizados (também conhecido como interferência) poderão ser observados:

$$(|1\rangle + |2\rangle)^2 = (\langle 1| + \langle 2|)\,(|1\rangle + |2\rangle) =$$

$$= \langle 1|1\rangle + \langle 1|2\rangle + \langle 2|1\rangle + \langle 2|2\rangle$$

Os termos $\langle 1|2\rangle + \langle 2|1\rangle$ são responsáveis pela interferência. Em determinadas regiões a probabilidade de detecção vai a zero! É como se as possibilidades de o objeto ter chegado àquele ponto pela esquerda ou pela direita, em vez de se reforçarem, se cancelam mutuamente. Esse efeito é chamado de *interferência destrutiva*. Ele se origina do fato de que precisamos somar todos os autoestados e estes são números complexos, o resultado não precisa ser maior do que cada parte. Por outro lado, nos pontos nos quais os autoestados se somam e se reforçam, dizemos que há interferência construtiva, correspondem aos pontos brilhantes na imagem. O cálculo realizado acima está de acordo com o Postulado V.



Paul Dirac, responsável pela primeira grande síntese da Física Quântica. Arte: Khalil Canabarro.

EXERCÍCIOS

1. Vamos encontrar os autoestados de $\boldsymbol{S}_y$ resolvendo:

   i) $\boldsymbol{S}_y|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle$

   $$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

   ii) $\boldsymbol{S}_y|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle$

   $$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

2. Considerando cada dois vetores complexos no espaço tridimensional:

   a. $|A\rangle = \begin{pmatrix} 3i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $|B\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ -2i \\ 4 \end{pmatrix}$,

   b. $|A\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 4i \end{pmatrix}$ e $|B\rangle = \begin{pmatrix} -2i \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

   c. $|A\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ e $|B\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

Determine $\langle A|A\rangle, \langle B|B\rangle, \langle A|B\rangle$ e $\langle B|A\rangle$.

3. Se $|A\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -3i \\ 1 \end{pmatrix}$ e $|B\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, determine:

   a. $|A\rangle + |B\rangle$ e seu complexo conjugado.
   b. $\langle A|B\rangle$
   c. $a|A\rangle + a|B\rangle$, com $a = 4\,i$
   d. $a\langle A| + a\langle B|$, com $a = -\,4\,i$