4. Entendendo a Simulação

No experimento de Stern e Gerlach, vapor de átomos de prata emanavam em forma de feixe de um forno e eram submetidos à ação de um campo magnético não-uniforme.

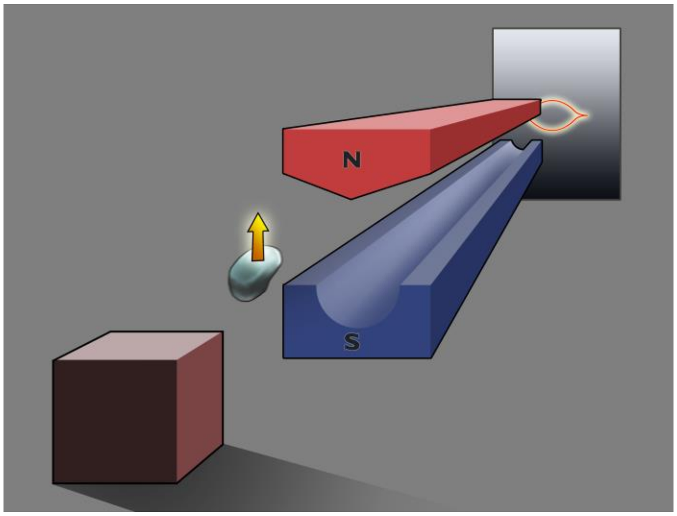


Figura 4.1: Esquema do experimento de Stern-Gerlach. Arte: Khalil Canabarro.

Um átomo de prata é um ***quânton***, um objeto quântico discreto e extenso. Ovos e batatas são objetos discretos e extensos macroscópicos enquanto o átomo, o elétron e outros objetos do mundo subatômico (as partículas elementares) são objetos quânticos caracterizados por sua massa, carga elétrica e spin. Assim como a carga elétrica possui dois sinais possíveis, a carga pode ser positiva ou negativa, o spin também só pode assumir dois valores diferentes, que por razões históricas são chamados de *para baixo* e *para cima*.

Spin do elétron	Representação	Valor
para cima	↑	$+\hbar/2$
para baixo	↓	$-\hbar/2$

Tabela 1: Estados de spin, representações e valores obtidos em uma medição. $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J s.

Uma diferença importante entre carga e spin é que todos os quântons de um mesmo tipo, elétrons por exemplo, possuem sempre a mesma carga (negativa), enquanto o spin de um elétron tanto pode ser observado para cima quanto para baixo. Representamos o spin através dos estados |↑> e |↓> para o sistema de elétrons e chamamos de estado de um sistema toda a informação existente sobre o objeto.

> O ESTADO de um sistema consiste de toda a informação disponível sobre um objeto.

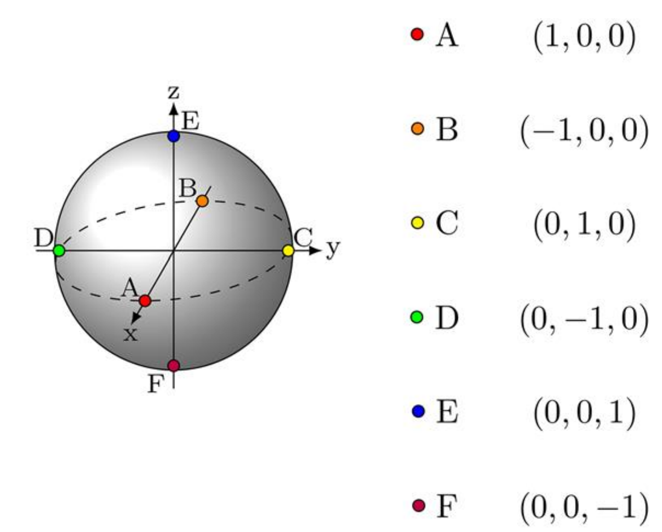
Essa descrição é bem simples, já que só existem duas possibilidades. Qualquer que seja o "estado de spin" de um elétron, uma medida da componente vertical só pode resultar em um dentre esses dois resultados. Numericamente, esses resultados são $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$. O valor de $\hbar = h/2\pi$ com $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J s.

Qual desses possíveis valores será observado? Em geral, não é possível saber. No jogo Q-bits com Dado, a tabela (Tabela 2) lista as probabilidades de observação de estados ("para cima" ↑ e "para baixo" ↓, se considerar o eixo *z*, estados E e F; "para direita" → e "para a esquerda" ←, se considerar o eixo *x*, estados A e B; e "para a frente" e "para trás" para o eixo *y*, estados C e D).

Tabela 2: Estados de spin e suas probabilidades de medição para diferentes componentes.

	Estado **S**	$P_x(+1)$	$P_y(+1)$	$P_z(+1)$
A	(1,0,0)	100 % 1-20	50 % 1-10	50 % 1-10
B	(-1,0,0)	0 % -	50 % 1-10	50 % 1-10
C	(0,1,0)	50 % 1-10	100 % 1-20	50 % 1-10
D	(0,-1,0)	50 % 1-10	0 % -	50 % 1-10
E	(0,0,1)	50 % 1-10	50 % 1-10	100 % 1-20
F	(0,0,-1)	50 % 1-10	50 % 1-10	0 % -

Figura 4.2: Representação dos estados de spin da Tabela 2 com respectivas orientações, numa esfera unitária.



Se o estado de spin for

$$a\,|\uparrow\rangle + b\,|\downarrow\rangle$$

então uma medida de spin tem probabilidade $|a|^2$ de resultar em spin para cima e probabilidade $|b|^2$ de resultar em spin para baixo. Isso porque para representar esses estados, é necessário utilizarmos números complexos.

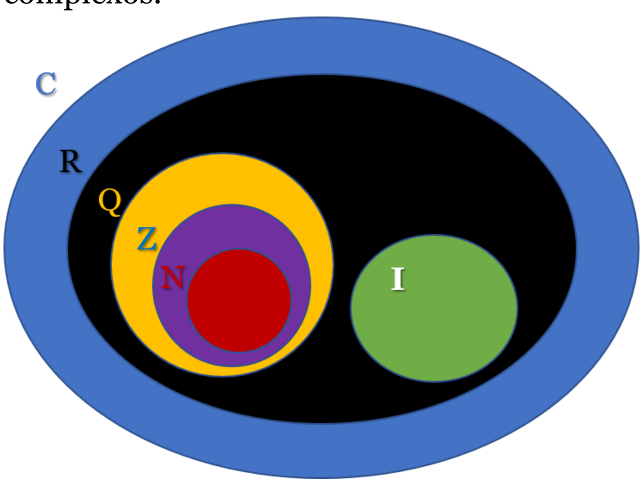


Figura 4.3: Representação dos conjuntos numéricos. **N** representa os números naturais, **Z** os números inteiros, **Q** os números racionais, **I** os irracionais, **R** os reais e **C** os números complexos.

Os números complexos **C** englobam o conjunto dos números reais: todos os números positivos e o zero (naturais **N**), negativos (inteiros **Z**), decimais (racionais **Q**), e raízes (irracionais, **I**), acrescidos das raízes dos números negativos,

$$i = \sqrt{-1}$$

Esses números são escritos como:

$$z = a + bi$$

Sendo a chamado a parte real do número complexo z e b a parte imaginária. A quantidade:

$$z^* = a - bi$$

é denominada complexo conjugado do número z, e, na prática, significa trocar i por $-i$. Calcular o quadrado de um número complexo é multiplicá-lo por seu complexo conjugado.

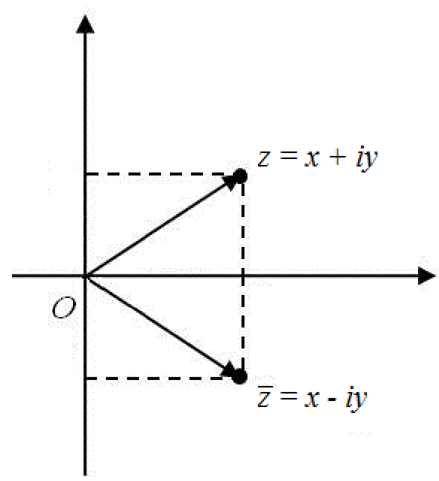


Figura 4.4: Representação de um número complexo e seu complexo conjugado (representado por uma barra sobre o z). O eixo das abcissas representa a parte real e o eixo das ordenadas a parte imaginária do número complexo. O módulo do número pode ser obtido pelo teorema de Pitágoras. Por isso as probabilidades são os módulos das partes real e imaginária ao quadrado.

Antes de realizar uma medida não sabemos o estado em que o elétron está. Vamos utilizar os Princípios da Física Quântica para descrever o sistema. No caso da simulação que foi realizada, os dois aparatos estão desalinhados, ortogonais: um experimento projetado para medir o observável “componente vertical do spin”, digamos S_Z, e outro projetado para medir o observável "componente horizontal do spin", digamos S_x, acessaremos estados em que o princípio da superposição é fundamental para a descrição dos mesmos. Suponhamos que a primeira medida revela que o spin está para cima. Portanto, o estado passa a ser $|\uparrow>$. Em seguida, vamos medir S_x

Precisamos escrever o estado anterior à medição como combinação linear dos autoestados do observável a ser medido. Acontece que o spin para cima é uma soma de spins para a esquerda e para a direita,

> Fazer uma combinação linear é exatamente multiplicar cada estado por uma constante, *a* e *b* no nosso caso, e somá-los.

Este é o enunciado do **Princípio da Superposição**, que você viu também nos sistemas de 0 e 1 do q-bits. Caso a medida dê $+h/2$, o estado de spin do elétron passa automaticamente a ser $|\uparrow>$; analogamente, se a medida der $-h/2$, o estado passa a ser $|\downarrow>$.

Vamos supor a base dada pelos estados $\{|\uparrow>, |\downarrow>\}$. Uma base de um espaço é um conjunto de vetores linearmente independentes. No nosso caso, o espaço é bidimensional, o conjunto mais simples conterá dois vetores, e, ser linearmente independente significa ser ortogonal, isto é, haver um ângulo de 90º entre eles. Nessa base, podemos escrever os estados como:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como só há duas possibilidades, as matrizes só têm duas linhas. Se fossem três possibilidades seriam três linhas e assim por diante. Os valores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$ são autovalores da componente vertical do spin:

$$\hat{S}_z |\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle \qquad \hat{S}_z |\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle$$

> Uma medida realizada num sistema físico é matematicamente representada pela aplicação de um operador a um autoestado desse sistema. Essa operação resulta num autovalor e no próprio autoestado.

Quando o imã está alinhado com o eixo *z*, o operador que melhor o representa é:

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

E quando giramos o imã

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercícios:

1) Mostre que $|\rightarrow> = a\,|\uparrow> + b\,|\downarrow>$. Calcule *a* e *b*.
2) Mostre que $|\leftarrow> = a'\,|\uparrow> + b'\,|\downarrow>$. Calcule *a'* e *b'*.
3) Calcule o produto entre as matrizes S_z e S_x
4) Esse produto apresenta a propriedade comutativa $ab = ba$?
5) Calcule os autovalores de S_x.
6) Como o estado $|\downarrow>$ surgiu quando inserimos o terceiro imã desalinhado?