FUNÇÃO EXPONENCIAL:

Construindo o conceito mediante o jogo da Torre de Hanói

Fernanda Marchiori Grave
Jocinéia Medeiros
Ricardo da Cruz Monsores
Clodis Boscarioli

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esse *e-book*, tido como um objeto de aprendizagem, é fruto da disciplina Tendências em Educação Matemática II: Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática, ofertada no ano letivo de 2020 no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (PPGECEM/Unioeste), que revisado, é lançado e disponibilizado à comunidade em 2021.

É um documento .PDF interativo e autodidático que apresenta uma revisão da função exponencial a partir do jogo pedagógico Torre de Hanói, idealizado tanto para estudantes a partir do 2° ano do Ensino Médio – para revisar seu conhecimento sobre a função exponencial e mostrar sua relação com o jogo da Torre de Hanói, bem como, para os professores que podem utilizá-lo como um material auxiliar em sua aula tanto em uma abordagem de aula invertida, material complementar, ou para revisão do conteúdo.

Para acessar *links*, vídeos, outros recursos disponíveis, faz-se necessário um dispositivo conectado com a Internet. Apesar de ser um material de revisão, é necessário que o usuário possua conhecimento e domínio sobre os conteúdos de potenciação e fatoração. Estimamos serem necessárias 4 horas-aula para uma boa interação com esse material.

Esperamos que esse material seja útil em processos de ensino e aprendizagem do conteúdo abordado e, que sirva de inspiração à criação de outros recursos que abarquem diferentes mídias.

Os autores

Como citar este *e-book*:

GRAVE, F. M., MEDEIROS, J., MONSORES, R. C., BOSCARIOLI, C. **FUNÇÃO EXPONENCIAL: Construindo o conceito mediante o jogo da Torre de Hanói**, 2021. E-book (23 p). Disponível em: <https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/602714>. Acesso em: DD mês. AAAA.

TORRE DE HANÓI

Como surgiu?

A ***Torre de Hanói*** é um dos mais famosos jogos de Matemática, que consiste de uma base contendo três pilares (hastes), em um dos quais está disposta uma torre formada por alguns discos colocados uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O número de discos pode variar. Observe a disposição inicial de um jogo com sete discos.

O inventor do jogo Torre de Hanói foi o matemático francês ***Édouard Lucas*** (1842-1891), que elaborou a seguinte lenda "No começo dos tempos, Deus criou a Torre de *Brahma*, que contém três hastes de diamante, e colocou na primeira haste 64 discos de ouro maciço. Deus chamou seus sacerdotes e ordenou-lhes que transferissem todos os discos para a terceira haste, seguindo as regras acima descritas. Os sacerdotes, então, obedeceram e começaram o trabalho de remoção dos discos, dia e noite. Segundo Deus, quando eles terminarem o trabalho, a Torre de *Brahma* irá ruir e o mundo acabará…":

O JOGO

Esse jogo tem como objetivo deslocar todos os discos de um pilar para outro qualquer, obedecendo a duas regras:

- **Mover apenas um disco por vez.,**
- **Um disco com diâmetro maior nunca pode ficar sobre um disco com diâmetro menor.**

Constitui-se em uma base com três pinos, na posição vertical em relação à base. No pino de uma das extremidades, há uma sequência de discos de ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O objetivo do jogo é passar todos os discos para o terceiro pino, conseguindo completar a transferência com o número mínimo possível de movimentos, com o detalhe de que no momento da passagem, os discos que possuem maior diâmetro, nunca fiquem sobre os de menor diâmetro. Normalmente, esse jogo encontra-se contendo três discos, mas a quantidade pode aumentar, tornando o grau de dificuldade mais elevado de acordo com o número de discos utilizados. Para completar tal desafio, é preciso tanto do pino que está sendo ocupado pela torre inicial, quanto dos que não estão.

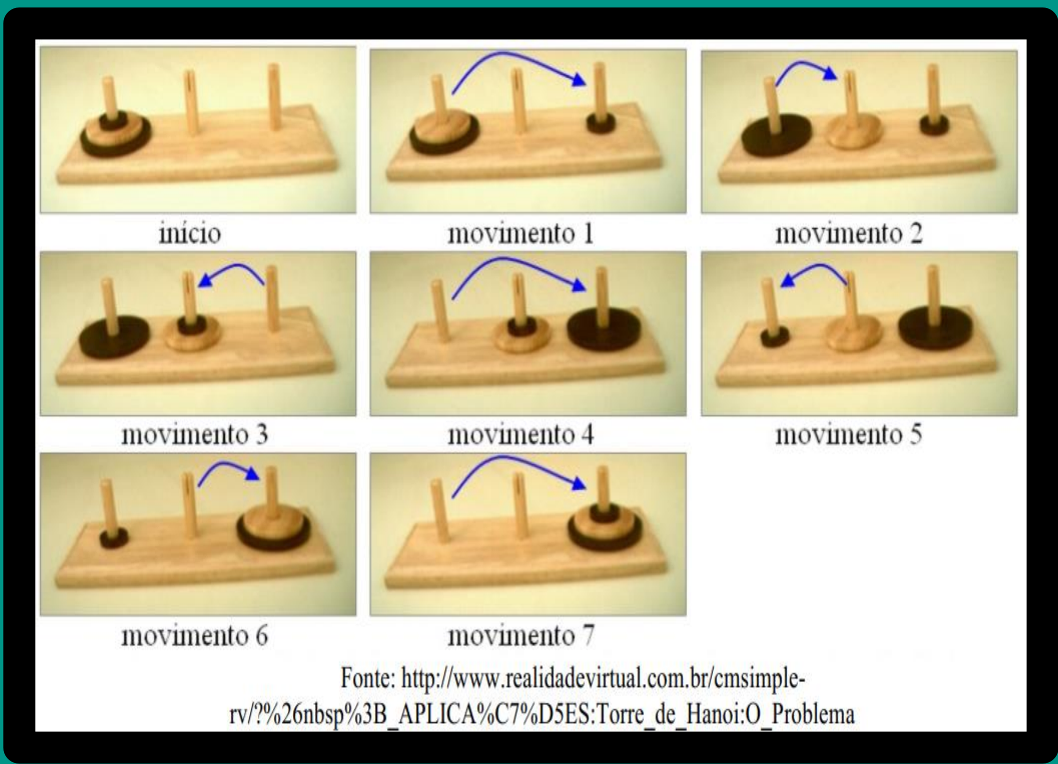
A partir das informações dadas, temos o seguinte questionamento: Qual o número mínimo de movimentos que precisaremos fazer para alcançar o objetivo? Se o jogo fosse composto por apenas um disco, seria fácil movê-lo, de acordo com as regras, para isso precisaríamos de apenas um movimento. Se fossem dois discos, claramente seriam necessários 3 movimentos. O que queremos, de fato, é o menor número de movimentos necessários para solucionar uma Torre de Hanói com n discos. O áudio a seguir apresenta uma possibilidade para os 7 movimentos necessários para resolver o jogo para n=3:

ATENÇÃO!

OUÇA O ÁUDIO AO LADO CLICANDO NO ALTO FALANTE

Brincando com n = 3 discos - Transferência dos discos da torre real do pino da esquerda para o pino da direita.

Observe na imagem as jogadas necessárias para deslocar 3 discos, e em seguida, clique na imagem para assistir a um video que demonstra as movimentações dos discos.

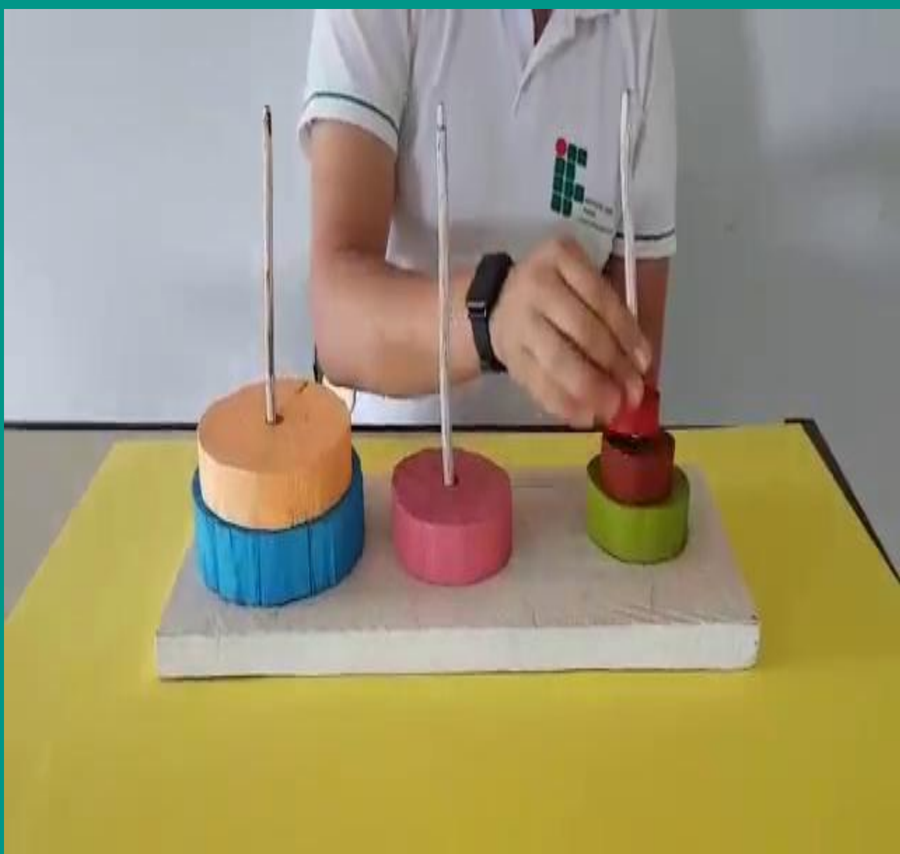


Fonte: http://www.realidadevirtual.com.br/cmsimple-rv/?%26nbsp%3B_APLICA%C7%D5ES:Torre_de_Hanoi:O_Problema

Observamos que foram necessários 7 movimentos para deslocar 3 discos da torre da esquerda para a torre da direita. Para não ter dúvidas sobre o jogo e o objetivo de se quantificar o número mínimo de movimentos necessários para atingi-lo, veja o vídeo da página seguinte.

Dica: Para não ter problemas com acesso aos *links*, você deverá abrir esse documento em um leitor de .PDF, ao invés de em seu navegador de internet.

No vídeo abaixo, temos um estudante do curso Técnico Integrado em Administração, do IFPR Campus Avançado Barracão, demonstrando como se realiza os movimentos na sua Torre de Hanói (com 5 pinos). Ele realiza, em movimento lentos, seguindo as regras do jogo e fazendo o número mínimo de movimentos possíveis.



Agora, podemos treinar, através da manipulação visual *online*, com **4, 5, 6, 7, 8, 9 , 10 ... discos** e, para isso iremos acessar o site clicando na imagem ao lado, observando o número de discos e as regras do jogo já conhecidas.

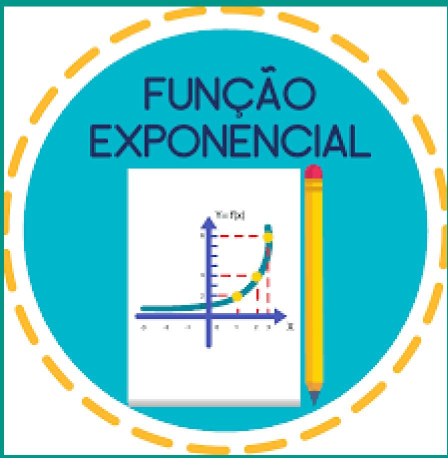
É necessário relacionar e anotar quantos “movimentos” foram necessários para se atingir o objetivo final com o respectivo número de discos, que é saber o número mínimo de jogadas.

Diante disso, vamos quantificar o número mínimo de "movimentos" para conseguir transferir todos os discos do primeiro pino para o terceiro e, montarmos a tabela abaixo:

NÚMERO DE DISCOS	QUANTIDADE MÍNIMA DE JOGADAS
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	?
9	?
10	?

Clique na imagem para acessar

FUNÇÃO EXPONENCIAL



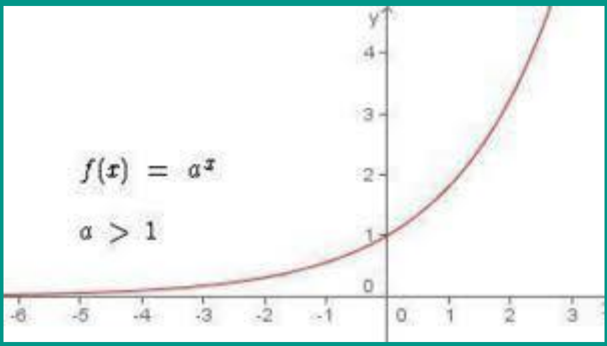
DEFINIÇÃO:

Dado um número real a (a>0 e **a≠1)**, denomina-se **função exponencial de base a** a uma função **f** de **IR** em **IR^*_+** definida por **$f(x) = a^x$** ou **$y = a^x$**.

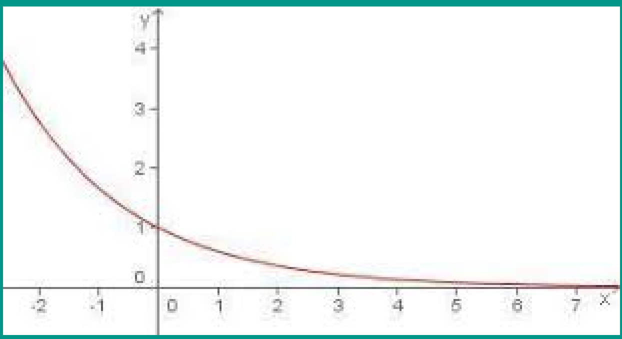
As restrições a>0 e a≠1 dadas na definição são necessárias, pois:

Para a=0 e x sendo negativo, não existiria a^x, não teria uma função definida em IR.
Para a<0 e x=½, por exemplo, não haveria a^x, não teria uma função definida em IR.
Para a=1 e x qualquer número real, $a^x=1$, não teria uma função exponencial e sim uma função constante.

$f(x)= a^x$ é crescente quando $a>1$.



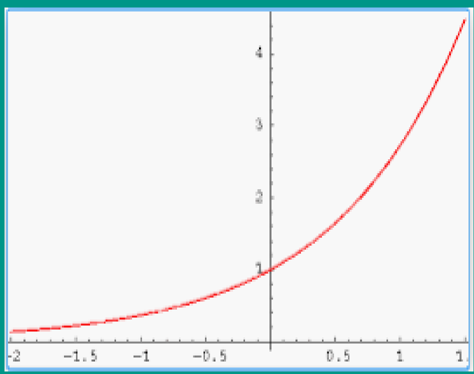
$f(x)=a^x$ é decrescente quando $0<a<1$.



A função exponencial é uma função que cresce rapidamente, por isso ouve-se muito expressões como “cresceu exponencialmente”.

O próximo passo vai requerer o máximo de atenção, de você estudante, com a explicação proposta da associação da tabela anteriormente apresentada com as jogadas da **Torre de Hanói** com as ideias da **Função Exponencial.**

OBSERVAÇÃO: como esse e-book tem objetivo de revisão, partimos do princípio que vocês estudantes já tenham estudado a Função Exponencial ou pelo menos tenham se familiarizados com os seus principais conceitos e a sua forma gráfica. A título de exposição, a imagem ao lado é um exemplo do formato da referida função.

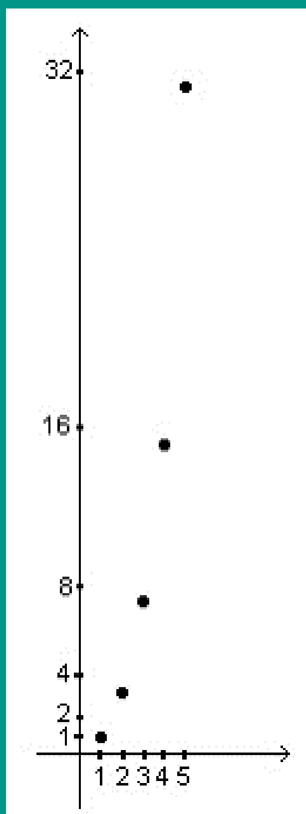


Agora, temos que achar a função matemática de acordo com a tabela apresentada anteriormente, cujos valores foram achados conforme o número de discos e a quantidade de movimentos mínimos do Jogo da Torre de Hanói.

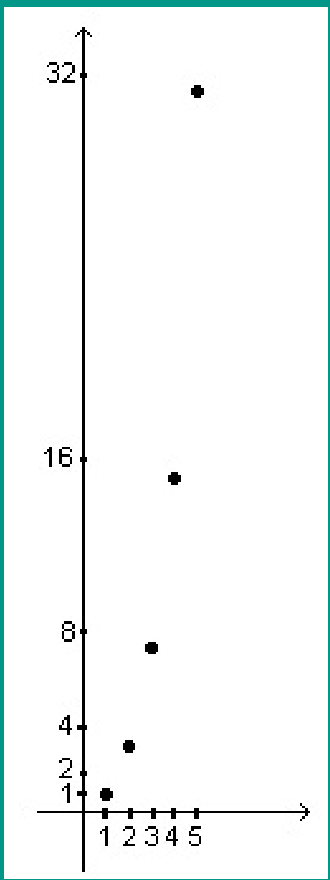
Para facilitarmos o nosso estudo e podermos ter uma melhor visualização da possível função que contempla a tabela, vamos repeti-la, porém até o cálculo da quantidade mínima de jogadas referente a 5 discos.

NÚMERO DE DISCOS	QUANTIDADE MÍNIMA DE JOGADAS
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

Por meio dos conceitos de função, vamos adotar o número de discos como sendo o eixo "X", eixo das abscissas, e a quantidade mínima de jogadas sendo parte do eixo "Y", eixo das ordenadas. Pronto, já podemos montar os pontos da função conforme o gráfico abaixo.



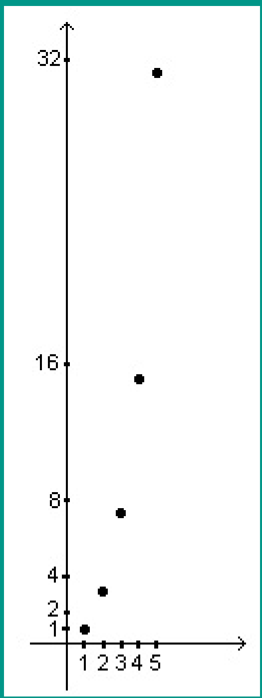
Percebemos intuitivamente através dos pontos da tabela anterior definidos através dos eixos do plano cartesiano “X e Y”, que já podemos ter uma ideia de que as jogadas da Torre de Hanói proporcionam o formato gráfico da função exponencial. No entanto, precisamos ainda achar a função F(x) que sempre irá funcionar para o jogo.



Se você estiver atento estudante, você vai perceber que não foram marcados os pontos da tabela equivalente no eixo “Y”, que são as jogadas mínimas, com exceção do “1”, foram marcados no eixo “Y” o resultado das jogadas somados a “1” - (**1, 2, 4, 8, 16 e 32**).

Mas, porque isto? não seria mais fácil colocar os pontos corretos no eixo “Y” e desenharmos a curva da função? vocês devem estar fazendo essas perguntas ou coisas parecidas.

Respondendo a essas perguntas, sim nada impede de vocês colocarem os pontos e desenharem a função, mas o principal objetivo nesse momento é achar a lei da função F(x) que sempre irá funcionar para o jogo.



Olhando o gráfico ao lado percebemos que essa função exponencial é crescente. Se ela é crescente então ela é do tipo F(x) = $\mathbf{a}^{X}$, onde **a** é um número maior que 0, ou seja, (**a**>0).

A função exponencial tem as mesmas propriedades do cálculo de potências. Você estudante, também, já sabe calcular as potências, não é?

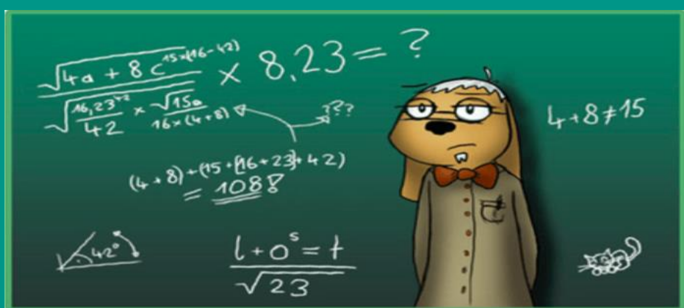
Então, olhando para o eixo “Y”, temos, a partir do número 2, o seguinte:

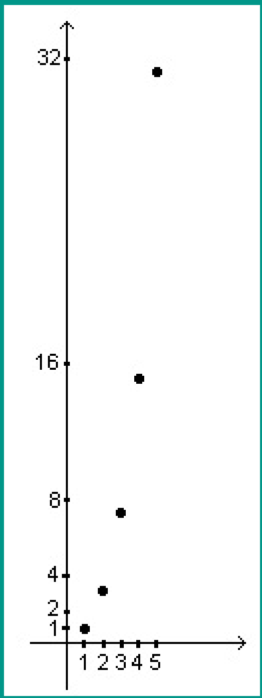
$2^{(2)} = 4$, $2^{(3)} = 8$, $2^{(4)} = 16$, $2^{(5)} = 32$ e, assim por diante.

Opa … estão percebendo algo …

Agora, olhe para o cálculo das potências acima. Perceberam o que? Pensem… Pois bem, vamos ajudar vocês. Assim, se temos uma base par, qualquer seja o seu expoente par ou ímpar, o seu resultado será par. Intuitivamente, percebemos que a nossa função exponencial que estamos procurando é pelo menos do tipo **F(x) = $2^{(X)}$** .

Estamos no caminho certo, porém, ainda não é a lei que buscamos para representar a quantidade mínima de movimentos do jogo da Torre de Hanói. Ufa! Mas ainda está faltando algo sutil...vejamos a próxima página ...





NÚMERO DE DISCOS	QUANTIDADE MÍNIMA DE JOGADAS
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

Agora, vamos fazer uma comparação:

Olhando para o eixo “Y”, temos, a partir do número 2, o seguinte:

$2^{(2)} = 4$, $2^{(3)} = 8$, $2^{(4)} = 16$, $2^{(5)} = 32$

Olhando a tabela e a coluna da quantidade mínima de jogadas, temos, a partir do disco 2: **(3, 7, 15, 31).**

Sabemos que a nossa função é do tipo **$F(x) = 2^{(X)}$** , que resulta nos valores calculados das potências **$2^{(2)} = 4$, $2^{(3)} = 8$, $2^{(4)} = 16$, $2^{(5)} = 32$.**

Então, para se chegar ao conjunto de números **(3, 7, 15, 31),** <u>temos que subtrair o **número 1**</u>, ou seja, temos o seguinte:

$F(x) = 2^{(X)} - 1$, pois { 4-1 =**3,** 8-1 =**7,** 16-1 =**15** e 32-1 =**31}.** Percebemos que essa função exponencial satisfaz a quantidade mínima de movimentos do jogo da Torre de Hanói, para “**X**” discos.

Observemos, agora, ao contrário o raciocínio exposto anteriormente: (o número de jogadas mínimas + 1) é um número do tipo 2^x.

Podemos, então, concluir que o número de jogadas mínimas = **F(n) é igual a 2^n - 1**.

Assim sendo, podemos calcular o número de jogadas necessárias para uma quantidade qualquer de peças, através da lei da função exponencial , onde **n ∈ IN.**

Através do raciocínio utilizado acima, podemos nos convencer da lei de função que relaciona o número de peças com o número de jogadas.

Matematicamente porém, nada podemos afirmar a este respeito. É preciso que provemos que esta 'lei' vale sempre, como de fato ocorre.

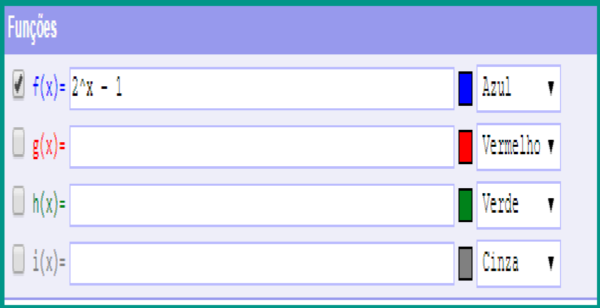
Para isto podemos fazer uso de uma ferramenta muito útil de demonstração matemática: o Princípio da Indução, porém não é o objetivo deste *e-book* realizar essa prova, que cabe a séries mais avançadas.

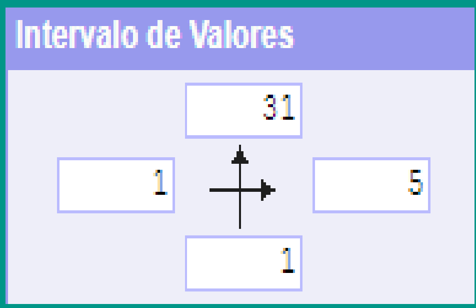
Ficou fácil agora com a lei da função exponencial, **F(n)=2^n - 1,** calcularmos o número de jogadas mínimas para um certo número de discos, olhem a seguinte tabela:

Número de peças n	Número de jogadas J	+1
3	15	16 = 2^3
4	31	32 = 2^4
5	63	64 = 2^5
6	127	128 = 2^6
7	255	256 = 2^7
8	511	512 = 2^8
n		2^n

Então, a fim de praticarmos e visualizarmos os desenhos das funções, podemos utilizar a plataforma de desenhos gráficos *online*, o **MAFA *Plotter***, que faz gráficos de funções matemáticas, disponível no *link:* https://www.mathe-fa.de/pt.

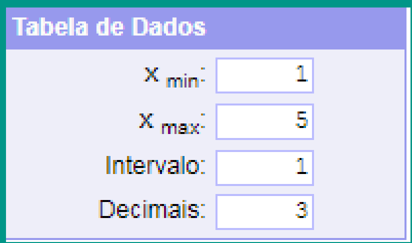
Nesta plataforma temos que inserir a nossa função **$F(x)=2^n - 1$** no próprio indicador da função f(x), no entanto, temos que digitar em linguagem computacional **2^x - 1** e, ainda, limitarmos no intervalo de valores o valores de **X = { 1 a 5 }** e de **Y = { 1 a 31 }**, conforme já calculados anteriormente, e que pode ser visualizado, como exemplo no recorte abaixo, a função **F(x)** e os intervalos **{ 1 a 5 } e { 1 a 31 }.**

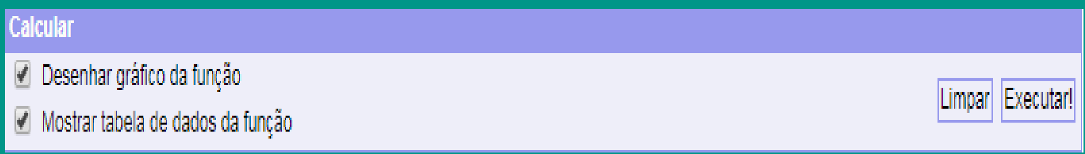




Além disso, pode-se configurar a tabela de dados com **X mínimo e máximo,** por exemplo: **X = { 1 a 5 },** conforme ao lado:

Após essas inserções de dados, marque as caixas de execução abaixo (CALCULAR) e clique em **Executar** !!!!!

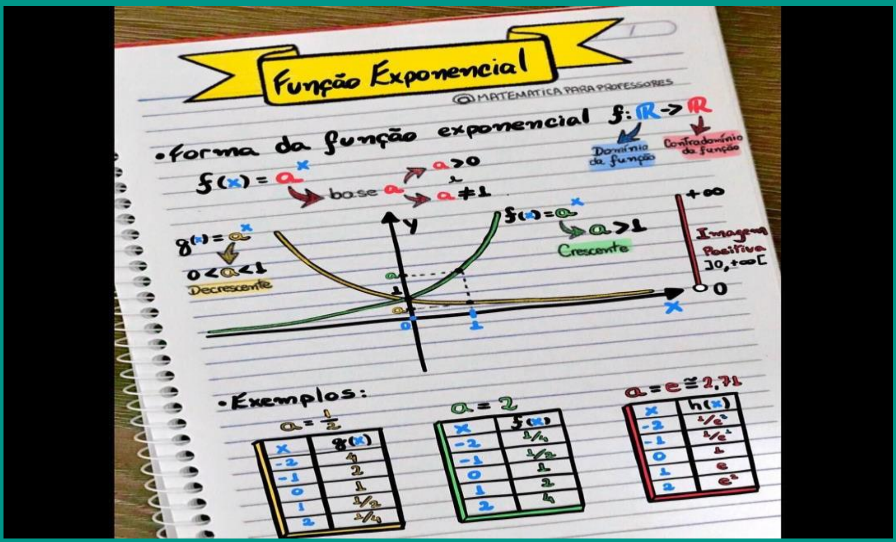




Caso você aluno tenha ainda alguma dúvida de como realizar atividades no **MAFA**, clique em **INFORMAÇÕES ADICIONAIS**, no menu **AJUDA**, do Programa, tire as suas dúvidas e, mãos na massa!!!!.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

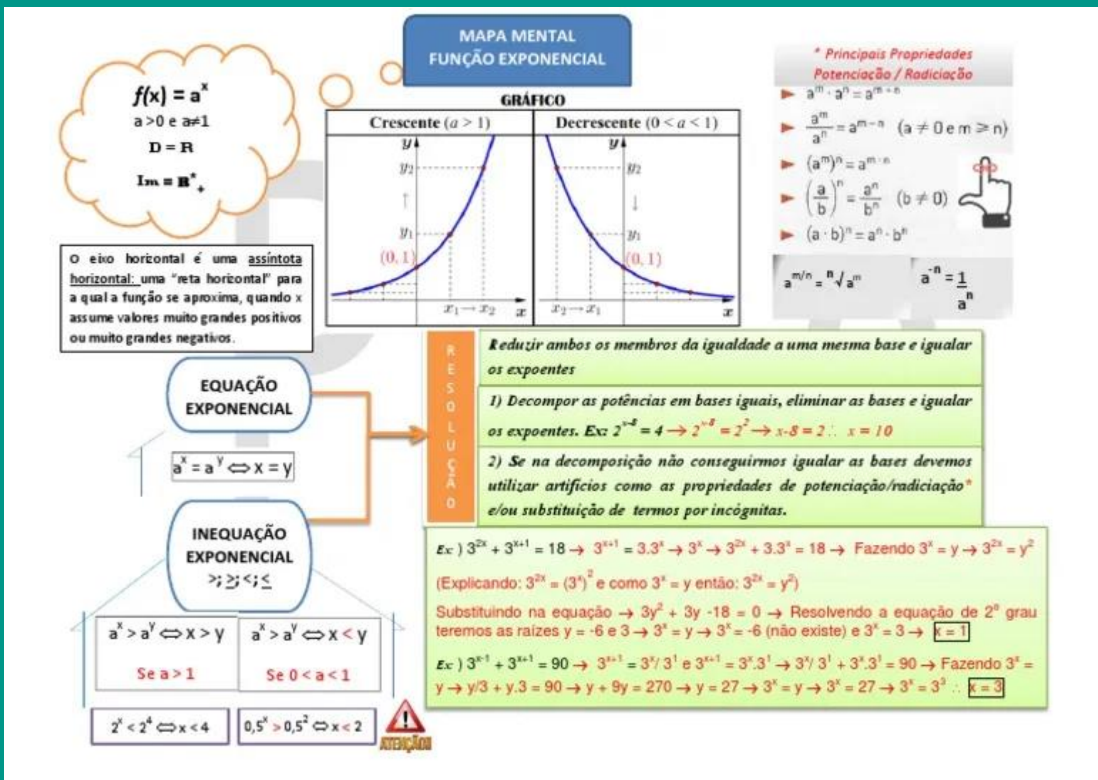
Bakhtin define que tudo é resultado do lugar de onde se fala. Na produção deste *e-book* não foi diferente. Não há discurso sem ideologia, ou sem ponto de vista. Diante disso, esse produto é uma construção coletiva, resultado de uma relação dinâmica entre os sujeitos autores, que se dedicaram por um período, a pensar em um modelo que pudesse fugir do tradicional no momento de abordar Função Exponencial no Ensino Médio. Sendo assim, acreditamos que essa produção possa ser utilizada como potencializadora no desenvolvimento das competências já vistas como essenciais ao sujeito educando, quando se trata de Ensino da Matemática.



Para finalizar, vamos sugerir o uso de mapas mentais para sistematização e síntese das ideias sobre conteúdos estudados. Desenvolvido pelo britânico Tony Buzan, o método tem como maior diferencial o fato de organizar as informações de maneira harmônica com os processos cognitivos, ou seja, é muito mais fácil memorizar e compreender dessa forma. Um mapa mental é uma ferramenta utilizada para organizar, memorizar ou analisar um conteúdo em específico. Sua estrutura foi pensada especialmente para facilitar o aprendizado e administração da informação. Hoje, ele é também muito utilizado para ajudar nos processos de tomada de decisão.

Um mapa mental pode conter vários recursos, como cores, símbolos e, principalmente, sua estrutura baseada em ramificações. Associando uma informação a outras, podemos recordá-las com mais facilidade.

Apresentamos, a seguir, duas possibilidades de mapa mental sobre o tema estudado, como forma de revisão. Sugerimos também, que você possa criar o seu próprio mapa. Há várias ferramentas disponíveis para isso na Internet. Pesquise sobre!




BORA
PRATICAR?

1) (ENEM) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1 800,00, propondo um aumento percentual fixo por ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1\,800.(1{,}03)^t$. De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais:

a) 7 416,00
b) 3 819,24
c) 3 709,62
d) 3 708,00
e) 1 909,62.

2) (PEIES) Uma cultura de bactéria se inicia com uma bactéria no tempo t = 0. Seja N(t) = 2t/6, o número de bactérias dessa cultura, no tempo t, medido em horas. Assim, assinale V nas afirmações verdadeiras e F nas falsas.

( ) O número de bactérias dessa duplica a cada 6 horas, contada a partir da hora zero.

( ) Após dois dias, contados a partir da hora zero, o número de bactérias é 256.

( ) O tempo mínimo necessário, para que a cultura atinja a quantidade de 4096 = $\mathbf{2^{12}}$ bactérias, é de 3 dias.

A sequência correta é:

a) F – F – V
b) F – V – F
c) V – V – F
d) V – V – V
e) V – F – F

3) (PUC-RS) A desintegração de uma substância radioativa é um fenômeno químico modelado pela fórmula $q = 10.\mathbf{2^{k.t}}$, onde q representa a quantidade de substância radioativa (em gramas) existente no instante t (em horas). Quando o tempo t é igual a 3,3 horas, a quantidade existente q vale 5. Então, o valor da constante k é:

a) – 35/5 b) – 33/10 c) – 5/33 d) – 10/33 e) – 100/33

GABARITO

REFERÊNCIAS

COMO FAZER A TORRE DE HANÓI. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=kMgSsUdnxoI&feature=emb_rel_err%20ou%20https://www.youtube.com/watch?v=egDMknOIK7g&t=110s> Acessado em: 19 fev. 2020.

DANTE, L. R. Matemática: volume único. 1. ed. São Paulo: Àtica, 2005.

FATORAÇÃO. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/fatoracao/> Acessado em: 30 abr. 2020.

REVISÃO DAS PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-exponents-radicals/pre-algebra-exponent-properties/a/exponent-properties-review> Acessado em 19 mar 2020.

TORRE DE HANÓI. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/jogos/hanoi>/ Acessado em: 19 fev. 2020.

TORRE DE HANÓI E FUNÇÃO MATEMÁTICA. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=egDMknOIK7g> Acessado em 19 fev. 2020.

Sobre os Autores

Fernanda Marchiori Grave

Doutoranda em Educação em Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Paraná. Licenciada em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. É professora (DE) do Instituto Federal do Paraná - IFPR, Campus Avançado Barracão.

Jocinéia Medeiros

Mestre em Ensino pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Tecnóloga em Gestão Pública pelo Instituto Federal de Santa Catarina. Servidora pública federal na Universidade Federal da Integração Latino-Americana.

Ricardo da Cruz Monsores

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. É Agente de Polícia Federal - Departamento de Polícia Federal.

Clodis Boscarioli

Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade de São Paulo, Mestre em Informática pela Universidade Federal do Paraná e Bacharel em Informática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa. É professor associado na Universidade Estadual do Oeste do Paraná, no campus de Cascavel.