Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática no Nível Fundamental.

Rafael Lameira Barros

O ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

BELÉM/PA
2021

Rafael Lameira Barros

Ensino de números irracionais por atividades experimentais

Projeto de Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática no Nível Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

BELÉM/PA
2021

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém – PA

Barros, Rafael Lameira

O ensino de números irracionais por atividade experimentais / Rafael Lameira; orientador Pedro Franco de Sá. – 2021.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

1. Números irracionais. 2.Matemática-Estudo e ensino-Ensino médio 3.Ensino de matemática por atividades. I. Sá, Pedro Franco de, orient. II. Título.

CDD. 23 ED. 512.73

Ficha catalográfica elaborada por Regina Ribeiro CRB-739

RAFAEL LAMEIRA BARROS

O ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Gaduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá

Data de aprovação: 29/06/2021

Banca examinadora

Pedro Sá _______________. Orientador
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN–RN
Universidade do Estado do Pará

Mª de Lourdes Silva Santos ___________. Examinador Interno
Profa. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos
Doutora em Educação – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro/PUC–RJ
Universidade do Estado do Pará

__________________. Examinador Externo
Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Doutor em Educaçã – Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN–RN
Universidade Federal do Pará

Belém – PA

2021

Dedicatória

Este trabalho é dedicado à maravilhosa família que Deus me deu: meus pais Antônio Jorge e Maria de Fátima, por sempre me apoiarem nas decisões mais difíceis; às minhas tias Janília e Socorro, minhas mentoras e amigas que me motivaram desde o princípio a seguir a carreira de professor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar força para conseguir concluir o desenvolvimento de meu trabalho. Em segundo lugar agradeço ao professor Pedro Sá, com o qual tive o prazer de receber sua orientação para o desenvolvimento desse trabalho. Obrigado por me ajudar a compreender a complexidade matemática referente ao assunto pesquisado em muitos aspectos.

Agradeço também a todos os professores que tive no decorrer de minha pós-graduação, em especial ao professor Miguel Chaquiam, por me ajudarem a aperfeiçoar minha escrita acadêmica durante o curso. Também a senhora Glads Serra, secretária do mestrado profissional em ensino de matemática da UEPA desde a criação do mesmo, por toda a atenção que dedicou aos assuntos da secretaria do mestrado.

Saúdo a meus colegas Everton Cardoso, Marc Peyrerol e Ederson Pereira que foram bons companheiros de turma, que se tornaram grandes amigos.

RESUMO

BARROS, Rafael Lameira. **Ensino de Números Irracionais por Atividade**. 2021. 422 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo analisar a aprendizagem gerada pela aplicação de uma Sequência Didática sobre Números Irracionais em alunos do Ensino Médio. Essa Sequência Didática foi planejada para seguir o direcionamento didático do Ensino por Atividade utilizando recursos metodológicos como Calculadora e História em Quadrinhos. A parte experimental da pesquisa foi desenvolvida com uma amostra de 6 alunos do Ensino Médio que moravam nos bairros do Jaderlândia (Ananindeua/PA) e Marambaia (Belém/PA), para isso adotou-se como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática. A análise dos resultados ocorreu pelo registro dos discentes nas atividades, pela comparação entre os resultados do pré-teste com o pós-teste e pelo Teste de Hipóteses. Os resultados apontam que houve desempenho muito satisfatório dos alunos no preenchimento das atividades; a comparação dos dados do pré-teste e pós-teste mostrou que os efeitos da Sequência Didática repercutiram de forma bastante notável na aprendizagem sobre Números Irracionais dos alunos da amostra; o teste de hipóteses comprovou que as notas do pós-teste tiveram melhora estatisticamente em relação ao pré-teste comprovando com isso, que a metodologia utilizada possibilitou alcançar resultados satisfatórios.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino de Matemática por Atividade. Ensino de Números Irracionais. Engenharia Didática.

ABSTRACT

BARROS, Rafael Lameira. **Teaching Irrational Numbers by Activity**. 2021. 422 f. Dissertation (Professional Master in Mathematics Teaching) - Pará State University, Belém, 2021.

This work presents a research, aiming to analyze the learning generated from a Didactic Sequence on Irrational Numbers in high school students. This Didactic Sequence follows the "Teaching by Activity" and uses methodological resources “Calculator” and “Comics”. The experimental part of the research was developed with a sample of 6 high school students from Jaderlândia (Ananindeua / PA) and Marambaia (Belém / PA). The research methodology was the Didactic Engineering. The analysis of the results found in the students' records, during an activity, was carried out by comparing the results of the pre-test with the post-test and was carried out using the Hypothesis Test. The results show that there was a very satisfactory performance of the students in completing the activities; the comparison of pre-test and post-test data showed that the effects of the Didactic Sequence had a quite remarkable impact on the students' learning about Irrational Numbers; the hypothesis test proved that the post-test scores had a statistically significant improvement in relation to the pre-test, it proved that the application achieved the adequate results.

Keywords: Mathematics teaching. Teaching Mathematics by Activity. Teaching Irrational Numbers. Didactic Engineering.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
ED	Engenharia Didática
HQ	História em Quadrinhos
PA	Pará
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
SISPAE	Sistema Paraense de Avaliação Educacional
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SEDUC	Secretaria da Educação do Pará
UEPA	Universidade do Estado do Pará

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A matemática é um conhecimento muito necessário para o convívio em uma sociedade, pois se apresenta em nosso cotidiano, de forma direta ou indireta, sendo ela dividida em inúmeras áreas, como a geometria, álgebra e aritmética. A matemática, em todo o seu desenvolvimento histórico, é constituída por um elemento fundamental para sua existência, o número.

Quando se cita 2, entende-se esse símbolo como numeral, que se relaciona com uma quantidade de dois, sendo essa quantidade de 2 lápis, 2 sapatos, 2 cães ou quais quer dois elementos de mesma natureza. De um modo geral a ideia de número é uma construção humana que utilizamos em nosso meio tentando ordenar e medir praticamente tudo o que se deseja conhecer, controlar, prever, e outras atividades humanas que podem estar associadas à matemática.

Este material aborda um assunto matemático que trata de um tipo específico de número, denominado de Números Irracionais, números que dimensionam medidas que não se pode medir com frações. Os números irracionais são importantes por compor a nossa compreensão numérica de forma mais completa, possibilitando um cálculo adequado aos padrões numéricos que a natureza e algumas situações nos proporcionam em meio às grandezas contínuas.

Conforme Vasconcelos (2016), os irracionais são muito importantes no estudo da matemática, de maneira que sem a existência desses números, vários problemas não poderiam ser solucionados, os quais se apresentam em inúmeras situações, sendo este um dos motivos para que esse assunto esteja citado nos currículos do ensino básico.

Embora os números irracionais sejam citados como assunto a se ensinar no Ensino Básico, existem muitos obstáculos que dificultam o aprendizado do assunto de Números irracionais, como a dificuldade de aprender seu conceito e suas propriedades em meio ao rigor do formalismo matemático deste assunto, além de muitos ouros fatores. Diante dessa problemática, percebe-se que este assunto necessita de um estudo aprofundado e divulgado, a respeito de suas possíveis potencialidades no ensino (BRASIL, 1998). Essa foi a principal motivação que direcionou a construção desse trabalho.

O estudo realizado neste trabalho se direcionou inicialmente aos Números Irracionais a partir da seguinte questão de pesquisa:

Qual o efeito da aplicação de uma Sequência Didática no ensino e aprendizagem de números irracionais?

Quanto ao *locus* da pesquisa, inicialmente havia sido planejado a aplicação da sequência didática com alunos do Ensino Fundamental em uma escola da rede pública de ensino localizada em Belém-PA, porém não se obteve sucesso devido estarem sem funcionamento diante da situação emergencial com a qual se encontravam, com os impactos da pandemia por COVID-19. Por isso, foi feito um trabalho de divulgação verbal e por redes sociais para estudantes que moravam nas proximidades do bairro da Jaderlândia (Ananindeua/PA) e do bairro da Marambaia (Belém/PA). Todos os alunos que decidiram participar se encontravam cursando o Ensino Médio, em variadas séries, na rede pública de ensino. Daí, o trabalho se ajustou para atender esses alunos, de modo presencial para alguns e virtual para outros.

Para o trabalho se ajustar a esse contexto e se direcionar a questão de pesquisa, ele assumiu, como objetivo de pesquisa, analisar a aprendizagem gerada pela aplicação de uma Sequência Didática sobre Números Irracionais em alunos do Ensino Médio.

Nesse sentido, compreende-se que para alcançar tal fim tem-se as seguintes etapas específicas ligadas a esse objetivo:

(a) Apresentar um referencial teórico que organize e oriente a apresentação e o desenvolvimento significativo do tema dos números irracionais no Ensino Básico;

(b) Compreender o conteúdo de números irracionais sobre várias perspectivas como a conceitual, a histórica, a curricular, a diagnóstica do processo de ensino e aprendizagem em pesquisas acadêmicas e científicas, a diagnóstica da aprendizagem na concepção discente e nas possibilidades didáticas de ensino;

(c) Elaborar uma Sequência Didática que auxilie no processo de ensino e aprendizagem dos conhecimentos teóricos apresentados sobre números irracionais, levando em consideração as várias perspectivas deste conteúdo no âmbito do ensino e aprendizagem;

(d) Aplicar a Sequência Didática em uma amostra de alunos e analisar a aprendizagem gerada por ela sobre Números Irracionais;

(e) Conceber um produto educacional que facilite a prática docente a respeito do ensino do assunto de números irracionais e outros conhecimentos ligados a este.

A abordagem deste trabalho foi quantitativa qualitativa, também chamada de mista. Conforme Souza e Kerbauy (2017) uma pesquisa quantitativa qualitativa busca obter dados quantitativos e apoia-los em dados qualitativos ou vice-versa. Por meio dessa abordagem, os dados qualitativos obtidos neste trabalho foram utilizados para relacionar com os dados quantitativos, para estabelecer uma análise sobre os resultados.

A metodologia adotada teve como base a Engenharia Didática de Michèle Artigue (1988), que é uma metodologia de pesquisa que tem como finalidade analisar as situações didáticas utilizadas no processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar.

Conforme Almouloud e Coutinho (2008) essa metodologia de pesquisa pode ser entendida como um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula; sendo, estas, a concepção, a realização, a observação e a análise de sessões de ensino. A Engenharia didática pode ser subdividida nas seguintes fases: Análises prévias; Concepção e Análise a Priori; Experimentação; Análise a posteriori e validação.

Para cada uma dessas fases foi escrito uma seção desse trabalho, sendo descritas organizadas sequencialmente da seguinte forma:

a) Análises Prévias: apresentam a fundamentação matemática; aspectos históricos; aspectos curriculares; tendências da educação matemática que podem contribuir para o ensino de números irracionais; obstáculos epistemológicos que podem dificultar a aprendizagem de números irracionais e os resultados de uma revisão de estudos sobre o ensino de números irracionais, assim como, e os resultados de uma pesquisa diagnóstica aplicada a 83 (oitenta e três) alunos do 1ª ano do Ensino Médio de uma escola estadual da rede pública, localizada em Belém do Pará;

b) Concepção e Análise a Priori: expõe uma proposta de ensino de números Irracionais, por meio de uma Sequência Didática direcionada à aprendizagem de Números Irracionais levando em conta as etapas de construção, propostas por Sá (2019), de atividades baseadas na tendência da Educação Matemática chamada Ensino por Atividade. Durante essa descrição de etapas de construção da sequência didática, também foi apresentado como o assunto de números irracionais se apresenta no PCN, na BNCC e em outros documentos curriculares de ensino e avalição para se estabelecer quais os objetivos de aprendizagem espera-se que sejam adquiridos pelos alunos por meio da Sequência Didática. Por fim, foi apresentada cada atividade que compõe a Sequência Didática proposta, onde estarão descritos a partir dos elementos: título, material utilizado, o procedimento a ser utilizado e o objetivo que se quer alcançar em cada atividade.

Nessa seção também foi composta do pré-teste e pós-teste que foram os instrumentos utilizados para validar o efeito da experimentação realizada pela Sequência Didática nos alunos;

c) Experimentação: nessa etapa foi descrita como ocorreu a aplicação da Sequência Didática com os alunos, descrevendo características importantes das condições da pesquisa na maior parte dos seus aspectos;

d) Análises a Posteriori e Validação: destacou as coletas e observações dos dados para validar a Sequência Didática proposta nesse trabalho. Nessa seção foi apresentada a ligação entre as informações da análise a priori com as obtidas na experimentação.

A motivação inicial para a escolha da Engenharia Didática, como metodologia ocorreu devido à mesma se caracterizar como sendo uma teoria ligada a didática da matemática que tem gerado muitos resultados notáveis em pesquisas, e também por ter a dupla função de direcionar metodologicamente pesquisas científicas ligadas ao processo de ensino e aprendizagem e também gerar aprendizagem aos estudantes levando em conta os conhecimentos prévios que eles possuem.

O texto desse trabalho está organizado em 7 seções, sendo algumas delas escritas com base nas fases da Engenharia Didática, assim como já foram explicadas. Na 1ª seção está a introdução que explica sobre como o trabalho foi organizado. Na 2ª seção tem-se um texto sobre o referencial teórico adotado no trabalho, que é a Engenharia Didática. Na 3ª seção se encontra os estudos e levantamentos correspondentes às análises prévias. Na

4ª seção foi apresentada a sequência de atividades planejadas para a experimentação e os testes de validação.

Na 5ª seção se encontra a descrição da fase de experimentação referente a aplicação das atividades que compõem a sequência didática proposta e dos pré-teste e pós-teste que validaram essa sequência didática.

Na 6ª seção se encontra a Análise a Posteriori e Validação, ou seja, a análise dos dados obtidos da fase de experimentação, a conclusão da validação proporcionada pelos pré-teste e pós-teste, e a análise dos erros obtidos no pós-teste.

Na 7ª seção foram apresentadas as considerações finais, expondo as conclusões deste texto, onde foi feito uma síntese das conclusões obtidas em cada uma das fases da Engenharia Didática aplicada nesse trabalho, bem como as conclusões alcançadas pela execução da sequência didática para o ensino de números irracionais proposta nesse trabalho.

2. ENGENHARIA DIDÁTICA

O desenvolvimento de uma pesquisa científica exigiu um direcionamento orientado por elementos vitais ao seu desenvolvimento. Tais como objetivo, justificativa, e outros, sobretudo da metodologia, a qual estabeleceu a base metodológica com a qual se desenvolveu a pesquisa.

No âmbito da pesquisa em didática da matemática, tem-se uma teoria de cunho metodológico chamado Engenharia Didática (E.D.), que vem gerando muitos conhecimentos úteis para a compreensão e aperfeiçoamento do processo de Ensino e Aprendizagem de matemática nas escolas, pois, permite destacar a importância da prática didática na sala de aula como prática de investigação (CARNEIRO, 2005).

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que tem como finalidade analisar as situações didáticas utilizadas no processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar. Conforme Almouloud e Coutinho (2008) essa metodologia de pesquisa pode ser entendida como um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula; sendo, estas, a concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino.

A Engenharia didática pode ser subdividida nas seguintes etapas, as quais serão explicadas posteriormente: Análises prévias; Concepção e Análise a priori das situações didáticas; Experimentação; Análise a posteriori e validação. Tem-se a seguir uma explicação sobre cada uma dessas etapas, conforme Almouloud e Coutinho (2008).

a) Análises prévias: esta etapa consiste nas análises preliminares, onde se apresenta considerações sobre o quadro teórico didático geral e os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto em questão. Nessa fase tem-se as seguintes vertentes: Epistemologia dos conteúdos visados pelo ensino; do ensino usual e seus efeitos; das concepções dos alunos e as dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução; das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva; a consideração dos objetivos específicos de pesquisa; o estudo de transposição didática do saber considerando o sistema educativo onde a pesquisa se insere.

De um modo geral, esta etapa permite ao pesquisador a identificação das variáveis didáticas que serão explicitadas e manipuladas nas etapas seguintes, que são “análise a priori” e a “experimentação”.

b) Concepção e Análise a Priori: é quando o pesquisador, por meio do direcionamento feito nas análises preliminares, delimita certo número de variáveis que podem afetar [relacionadas ao sistema] o ensino sobre onde ele pretende atuar. Essas variáveis, chamadas de variáveis de comando, podem ser classificadas em variáveis microdidáticas ou variáveis macrodidáticas.

Macrodidáticas: Essas variáveis também podem ser chamadas de variáveis globais, e estão relacionadas a totalidade da organização estrutural desta metodologia.

Microdidáticas: Também chamadas de variáveis locais, e são as variáveis que agem especificamente a organização de uma sessão ou de uma fase.

A análise dessas variáveis pode ocorrer em três aspectos: o epistemológico (relacionado as características do saber); o cognitivo (relacionado as dimensões cognitivas dos alunos sujeitos da aprendizagem) e o didático (relacionado às características do sistema de ensino que os sujeitos estão inseridos).

A análise a priori busca determinar como a escolha, das variáveis que se considere pertinentes, pode controlar os comportamentos dos alunos, assim como explicar seu sentido. Para isso deve-se considerar os seguintes objetivos:

• Descrever as escolhas realizadas em nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as características da situação adidática desenvolvida;

• Estabelecer as possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação.

• Prever possíveis comportamentos e tentar demonstrar como a análise feita permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem.

c) Experimentação: Nesta fase tem-se a aplicação da atividade construída para se promover o ensino e aprendizagem do conceito estabelecido previamente. Sendo ela adaptada de acordo com às variáveis locais definidas na etapa da concepção e análise a priori. Esta etapa tem como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a aplicação da atividade.

d) Análise a posteriori e validação: Nesta etapa é desenvolvido uma análise de um conjunto de dados colhidos no momento da experimentação. Para ter os dados, se faz necessário a utilização de ferramentas técnicas (material didático, vídeo, registro de observação, etc.) ou ferramentas teóricas (teoria das situações, contrato didático, etc.) e, dessa forma, é possível ter resultados, os quais serão confrontados com a análise a priori, realizando-se com isso a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação.

Para Carneiro (2005), existem duas situações que motivaram a criação da Engenharia Didática. A primeira é o de atender as relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino e o segundo é o de reservar lugares para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa. A partir dessas situações, respectivamente, temos que a E.D. designa produções para o ensino, advindas de resultados de pesquisa; e também designa uma metodologia de pesquisa específica baseada em experiências de sala de aula. A figura abaixo sintetiza essas informações acerca dos dois aspectos da E.D.

Figura 1 - Os dois aspectos da Engenharia Didática

Fonte: Carneiro (2005).

Desse modo, tal metodologia pode ser caracterizada como uma pesquisa experimental, devido a mesma ser utilizada também para estruturar o registro do modo de validação ligado a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Assim como permite visualizar os resultados de pesquisa como simplesmente uma realização ligada ao ensino.

3. ANÁLISES PRÉVIAS

Esta seção apresenta um arca bolso teórico e didático a respeito do ensino e aprendizagem de números irracionais. Ela é composta de aspectos históricos, fundamentação matemática, obstáculos epistemológicos da aprendizagem de números irracionais, aspectos curriculares, tendências da educação matemática que podem favorecer a aprendizagem de números irracionais, os resultados de uma revisão de estudos sobre o ensino e aprendizagem de números irracionais, assim como os resultados de uma pesquisa diagnóstica aplicada em alunos egressos da série em que os números irracionais são mais abordados em sala de aula (9º ano).

Este texto foi construído para se poder enxergar o conteúdo de números irracionais sobre várias perspectivas como a conceitual, a histórica, a curricular, a diagnóstica em pesquisas, a diagnóstica na aprendizagem e na perspectiva didática. A totalidade de informações do texto desta seção constitui uma base que orientou na construção da Sequência Didática, explorando as perspectivas mencionadas anteriormente para cumprir o objetivo deste trabalho.

3.1. Aspectos Históricos

Nessa subseção foi apresentado um recorte histórico sobre números irracionais, em sua descoberta, evolução de seu conhecimento e formalização. Algo que possibilita ter um vislumbre sobre como e quando a concepção de número irracional se estruturou.

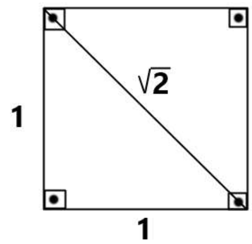
3.1.1. Os Primórdios da Concepção de Irracionais

O entendimento de que as frações não são suficientes para as atribuições de medidas foi descoberto há 2500 anos pelos Pitagóricos, uma escola grega com a qual seus componentes eram Pitágoras e seus discípulos. Eles perceberam que a diagonal de um quadrado de lado um não pode ser expresso por nenhuma fração do lado.

Um grego chamado Hipasius Metapotum (470 a.C.) foi um dos adeptos da Escola Pitagórica, que teria descoberto a existência de medidas que não eram racionais, ou seja, que não podia ser escritas como fração.

A percepção de existência desse tipo de medida se iniciou com a necessidade de se determinar a medida da diagonal de um quadrado de lado 1.

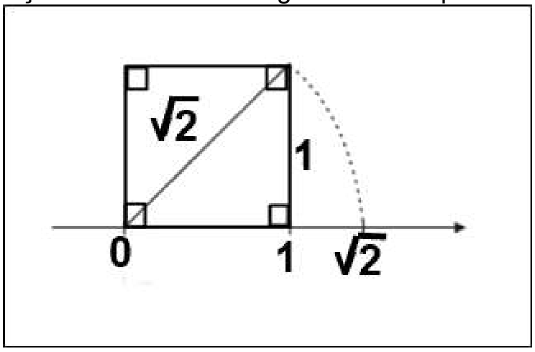
Figura 2 – Quadrado de lado 1



Fonte: Autor (2021).

Ao considerar um dos triângulos e aplicando o teorema de Pitágoras pode-se perceber que a medida da diagonal corresponde a raiz quadrada de 2. Utilizando um compasso, é fácil marcar na reta numérica horizontal um segmento de medida igual a essa diagonal.

Figura 3 – Sobreposição da medida da diagonal de um quadrado de lado 1, na reta.



Fonte: Autor (2021).

Conforme Moscibroski (2002), essa percepção representou o primeiro exemplo conhecido de um segmento dito como incomensurável.

Quando se compara as medidas de dois segmentos, pode ocorrer que a medida de um deles seja um múltiplo inteiro da medida do outro, ou seja, dados dois segmentos de reta a e b, a medida de a está contida na medida de b um número r inteiro de vezes (b = $r.a$). Entretanto, quando isto não é possível, podemos dividir o segmento a em p segmentos de medidas iguais a $\frac{a}{p}$ de modo que b = $\frac{l}{p}a$, ou seja, b seja l vezes o segmento $\frac{a}{p}$. Daí, nestes dois casos, atualmente, dizemos que as medidas dos segmentos a e b são comensuráveis (LORIN; REZENDE, 2013).

Como não ocorre nenhuma das possibilidades acima entre as medidas da diagonal e do lado de um quadrado de lado 1, provavelmente os pitagóricos se questionaram: quais relações seriam estabelecidas entre esses segmentos?

Hipasius compreendeu que a condição sobre medidas comensuráveis não era obedecida para a medida citada, assim, não era possível medir com régua e compasso o comprimento da diagonal do quadrado. Ele mostrou que não existe racional que seja a medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Essa descoberta provocou conflitos na escola pitagórica, já que se contrapôs ao paradigma pitagórico de que toda medida fosse racional, isto é, fração de números inteiros (EVES, 2004).

Não se sabe ao certo o procedimento que os pitagóricos realizaram para comprovar que a medida encontrada da diagonal do quadrado não era uma razão de dois inteiros, entretanto, conforme Lorin e Rezende (2013) a partir de alguns fragmentos deixados por alguns pitagóricos, após a morte de Pitágoras, pode-se supor algumas formas de como eles tinham conseguido demonstrar tal feito. Uma dessas possíveis demonstrações é a seguinte:

Suponhamos, por contradição, que o comprimento da hipotenusa desse triângulo seja um número racional p/q com p e $q \neq 0$ números primos entre si, isto é, eles não possuem fatores comuns. Suponhamos p e q positivos. Usando o teorema de Pitágoras, obtém-se:

$$(p/q)^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \text{ e daí } p^2 = 2q^2.$$

Isso nos diz que o número p^2 é par e assim p é par, ou seja, $p = 2k$, para algum inteiro positivo k. Donde $4k^2 = 2q^2$. Logo $q^2 = 2k^2$ e então q^2 é par, e daí q é par. Portanto, p e q são pares. Sendo p e q supostos primos entre si eles não podem ser simultaneamente pares e isso é uma contradição. Assim, o número que mede a hipotenusa, isto é o número $\sqrt{2}$, não é racional.

O problema da incomensurabilidade foi frustrante para os gregos, pois muitas demonstrações geométricas, em especial as que envolviam razão e proporção, consideravam que segmentos quaisquer sempre admitiam uma unidade de comprimento comum. Tal frustração caracterizou um episódio posteriormente conhecido como “a crise dos incomensuráveis”.

A concepção de incomensurabilidade naquela época se contrapôs a filosofia pitagórica, pois ela compreendia que todo número é inteiro ou é composto de uma relação entre inteiros. Medidas incomensuráveis eram, portanto, impossíveis de ser expressas com palavras e também inimagináveis, devido não puderem ser representadas como razão de números inteiros, sendo este, um princípio elementar para a compreensão de número conforme os pitagóricos (POMMER, 2012).

Algo bastante curioso sobre os pitagóricos era que, os quais referenciavam as medidas incomensuráveis pelo termo *alogon*, que atualmente traduz-se como “irracional”. Todavia, naquela época a palavra *alogon* tinha um duplo sentido: significava também “não deve ser falado” (MLODINOW, 2004).

Embora se tenha evidências de que os pitagóricos tinham uma breve noção de números irracionais, apesar de pouco aceitos naquela sociedade, para Kline (1972, apud Lopes; Sá, 2016), antes da “crise dos incomensuráveis” ter ocorrida na Grécia, os números irracionais já eram conhecidos na Mesopotâmia. Uma evidência desse fato está nas tábuas de potências e raízes dos babilônios, cujo registro que se tem hoje mostra que quando o valor da raiz era um inteiro se tinha um valor exato, caso contrário, o valor sexagesimal correspondente era aproximado.

A descoberta da incomensurabilidade, pelos gregos da escola pitagórica, representou uma percepção de que somente o discreto não era possível contemplar o ato de “medir”. Só depois de muito tempo, o conceito de número foi expandido para medir grandezas contínuas, possibilitando o tratamento dos incomensuráveis como número (BROETTO, 2016).

A partir da concepção de contínuo a ideia da medida se tornou mais abrangente, permitindo tratar naturais, racionais e irracionais em um único contexto, que privilegia o contínuo e coloca o discreto como uma restrição, um caso particular. Este raciocínio certamente não foi algo explorado pela concepção pitagórica de número, que até aquele momento se restringia ao discreto.

Uma tentativa de explicar a continuidade a partir do discreto foi apresentada por uma teoria denominada de “teoria das mônadas” que tomava como base a existência de segmentos indivisíveis chamados de mônadas. Esta teoria não teve sucesso, pois foi constantemente rebatida pelas escolas gregas que sucederam a dos pitagóricos, ainda mais com a contradição lógica nos argumentos da escola pitagórica encontrada por Zenão de Elea (cerca de 490/485 a.C. - 430 a.C.), discípulo de Parmênides (LORIN; REZENDE, 2013).

Zenão foi muito conhecido como um grego que mostrou aos matemáticos da época as incoerências decorrentes da tentativa de se completar grandezas contínuas com um número infinito de pequenas partículas, essas incoerências se baseiam em alguns paradoxos que atualmente chamam-se de paradoxos de Zenão, (SANTOS, 2015). Nos quais é argumentado que, se o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis, o movimento torna-se impossível.

3.1.2. Escola platônica: Eudoxo, Teodoro, Sócrates, Problemas de Régua e Compasso.

Após o contato dos pitagóricos com as ditas grandezas incomensuráveis, e terem sua filosofia numérica, que era baseada no discreto, contestada por Zenão, surgiu uma nova escola, cujo líder era Platão, que dentre seus vários trabalhos, tratou de compreender também essas medidas (LORIN; REZENDE, 2013).

Além de Patão, alguns dos integrantes dessa escola eram os matemáticos Teodoro (465 a 398 a. C.), Eudoxo (408 a 355 a. C.) e Euclides (360 a 295 a. C.), os quais se destacaram em produções matemáticas (LORIN; REZENDE, 2013).

O direcionamento da escola platônica referente aos números irracionais ou grandezas/medidas incomensuráveis, estava em desenvolver técnicas geométricas que permitissem manejar essas medidas (GODEFROY, 1997, *apud* LORIN; REZENDE, 2013). Além do mais, até essa época (408/355 a. c.) o problema da incomensurabilidade ainda era pouco explorado na matemática. Por exemplo, na área que envolvia relações de proporção, era tratado somente de grandezas comensuráveis, mas Eudoxo, integrante da escola platônica, avançou esses estudos para grandezas incomensuráveis por volta de 370 a.C. (MOSCIBROSKI, 2002).

Eudoxo de Cnido foi um matemático, astrônomo e filósofo grego que viveu entre os anos de 408/355 a.C. e era discípulo de Platão. Conforme Cerri (2006) ele resolveu de forma brilhante o problema da incomensurabilidade que impedia com que se pudesse trabalhar com grandezas dessa natureza numérica.

Conforme sua teoria, em linguagem moderna, estabelece que para conhecer um número irracional x basta conhecer os números racionais menores do que x (suas aproximações por falta) e os números racionais maiores do que x (suas aproximações por excesso). Dessa maneira, é possível obter aproximações para um número irracional com um erro tão pequeno quanto se queira (MOSCIBROSKI, 2002). Diante disso, ao comparar duas grandezas da mesma espécie, em vez de número, Eudóxio adotou o conceito de "razão entre duas grandezas”. Assim, ele construiu, de forma lógica, uma teoria sobre razões entre grandeza.

No V livro da obra “Os Elementos” escrito por Euclides, datada no século III a.C, foi encontrado um estudo desenvolvido por Eudoxo sobre a Teoria das Proporções. Esta teoria abrange tanto grandezas comensuráveis como também incomensuráveis (BOMGIOVANI *et al*, 2018).

Abaixo está um trecho encontrado em Os Elementos em que é tratado da teria de Eudoxo.

> Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondentes". (Elementos de Euclides, Livro V, definição 6).

Em linguagem moderna o que foi abordado no trecho anterior a respeito de grandezas comensuráveis e incomensuráveis, seria o seguinte:

Para quaisquer inteiros p e q dizemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (a está para b assim como c está para d) se, e somente se, alguma das situações a seguir acontecer:

1) Se $aq = bp$ então $cq = dp$. (Grandezas comensuráveis)

2) Se $aq < bp$ então $cq < dp$. (Grandezas incomensuráveis)

3) Se $aq > bp$ então $cq > dp$. (Grandezas incomensuráveis)

Diante dessa compreensão, foi possível tratar também de grandezas incomensuráveis, possibilitando a demonstração de vários fatos matemáticos como o Teorema de Tales para os casos de medidas comensuráveis e incomensuráveis (CERRI, 2006).

Conforme Bomgiovani *et al* (2018) a definição construída por Eudoxo conseguiu contornar o problema dos "incomensuráveis" simplesmente através do uso de comparações "menor", "maior" e "igual", definindo desse modo, relações de proporção, mas evitando discutir a natureza dos números irracionais. Assim, a questão de se obter um número associado a cada segmento, representando sua medida, não foi tratado de forma direta, embora Eudoxo seja conhecido, por muitos estudiosos, como o primeiro a construir uma teoria que manipulava números irracionais.

A abordagem de Eudoxio sobre grandezas incomensuráveis coincide em essência com a moderna teoria dos números irracionais dada por Richard Dedekind em 1872. Entretanto, houve uma grave deficiência no formalismo desenvolvido por Eudoxio nos Elementos de Euclides, pois não se efetuavam operações aritméticas com razões (MOSCIBROSKI, 2002).

Alguns integrantes da escola platônica fizeram estudos concentrados na produção de métodos para se resolver problemas de quadratura, ou seja, a construção de quadrados cuja área de sua superfície fosse igual à área da superfície de outra figura. Para Godefroy (1997), nesses métodos usava-se a ideia de raiz quadrada para se determinar a medida do lado do quadrado a partir de sua área. Foi nesse momento que novos números irracionais, além do $\sqrt{2}$, começaram a ser discutidos.

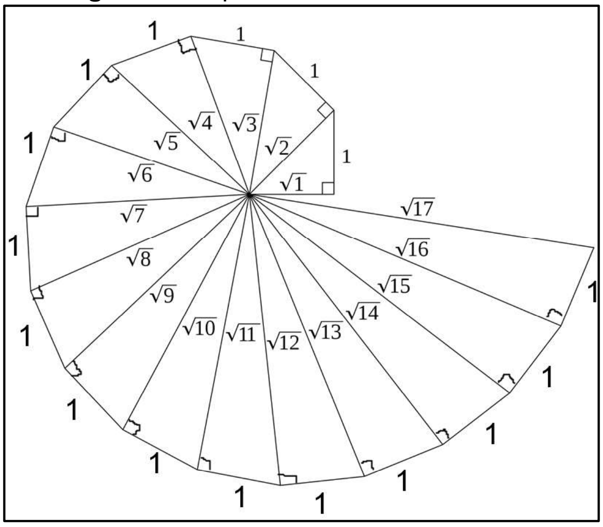
Para Moscibroski (2002), até um certo tempo $\sqrt{2}$ era o único número irracional conhecido. Com o decorrer do tempo Teodoro de Cirene (c.470 a.C.), também integrante da escola platônica, por volta de 425 a. C. mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ eram números irracionais.

De acordo com Lorin e Rezende (2013), nos *Diálogos de Platão*, é descrito um relato de uma discussão entre Teeteto e Sócrates, na qual, Teeteto, comenta que foi demonstrada a irracionalidade dos números $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$, por Teodoro. Tem-se a seguir um trecho desse diálogo:

> Teeteto - A respeito da algumas potências, Teodoro, aqui presente, mostrou que a de três pés e a de cinco, como comprimento não são comensurável com a de um pé. E assim foi estudando uma após a outra, até a de dezessete pés. Não sei por que parou aí (PLATÃO, 1988, p. 9).

Teodoro de Cirene (c.470 a.C.) foi um filósofo e matemático grego que fazia parte da academia de Platão. Ele também foi conhecido por apresentar um tipo figura de aspecto espiral, conhecida como Espiral de Teodoro ou Espiral Pitagórica (Figura 4). Essa figura é obtida de uma sequência de triângulos retângulos com um vértice comum, em que o primeiro é isóscele de catetos unitários e em cada triângulo retângulo sucessivo um cateto é a hipotenusa do triângulo anterior e o outro cateto (oposto ao vértice comum) tem comprimento unitário (EVES, 1997, apud LORENZONI; SAD, 2018). Ele fez 16 iterações na construção da espiral, mas o processo pode se estender indefinidamente.

Figura 4 - Espiral de Teodoro de Cirene



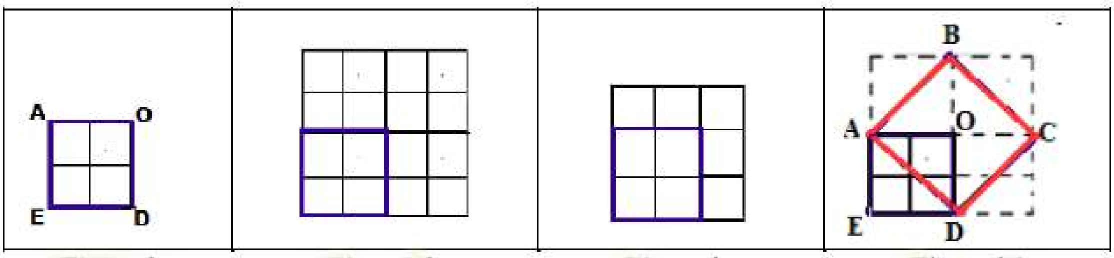
Fonte: Lorenzoni e Sad (2018).

A espiral de Teodoro, como pode ser visualizada na figura anterior, ilustra a construção de segmentos com medida irracional, partindo da construção geométrica de $\sqrt{2}$, e obtendo segmentos de comprimento $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, e assim sucessivamente, obtendo-se a construção de segmentos de comprimento $\sqrt{n}$, para qualquer n natural maior que 1. Dessa forma é perpassado por inúmeros números irracionais (LORENZONI; SAD, 2018).

Na época da escola de Platão, como já foi citado, houve um tratamento mais direto quanto ao uso dos números irracionais, os trabalhos de Eudoxo e Teodoro, citados anteriormente, comprovam este fato. Em um trecho dos Diálogos de Platão é descrito uma situação que também evidencia este entendimento, onde Sócrates desenhou um quadrado de “dois pés” de lado, conforme a figura 5a, e pede ao escravo de Menon que lhe mostre um quadrado com o dobro da área.

Figura 5 – Construção de um quadrado com o dobro da área de outro quadrado de lado 2 pés

Figura 5a **Figura 5b** **Figura 5c** **Figura 5d**



Fonte: Pommer (2012)

Conforme este relato, o escravo havia argumentado que o quadrado deveria ter lado quatro pés e Sócrates desenhou uma figura correspondente a figura 5b, o qual revelava que a área inicial havia quadruplicado. Quando notou esse entendimento percebeu que a área havia aumentado mais do que o solicitado, em uma tentativa de corrigir a resposta, indicou que o quadrado deveria ter lado três pés (figura 5c), o qual ainda não resolvia o problema inicial. Sócrates, diante do impasse do escravo, desenhou a solução do problema (figura 5d).

A narrativa de Sócrates, presente nos diálogos de Platão, ilustra a cultura típica dos gregos clássicos. Ao ser traçada a diagonal do quadrado inicial, o triângulo ADO resultante, que era retângulo e isósceles, possui metade da área do quadrado original, assim bastava agrupar quatro triângulos de mesma natureza, e área, para formar uma figura que teria o dobro da área do quadrado, sendo ela, um quadrado (POMMER, 2012).

A situação apresentada a respeito do diálogo entre Sócrates e o escravo de Menon, descrita nos Diálogos de Platão, em linguagem moderna representa a solução da equação algébrica $x^2 = 2$. Também é possível entender, desse diálogo, que quando se tem a área de um quadrado A, cuja área é o dobro de outro quadrado, a medida de seu lado é um número irracional (BEKKEN, 1994 *apud* POMMER, 2012).

O diálogo apresentado mostra um dos primeiros indícios da manipulação dos números irracionais pelos gregos, por meio de uma articulação entre a Aritmética e a Geometria, representando, com isso, uma superação superficial da tensão que estes números causaram na época dos pitagóricos com a descoberta da existência dos segmentos incomensuráveis pelos pitagóricos.

Os números irracionais na forma de raiz de um inteiro, certamente não são os únicos números irracionais. Dentre os números irracionais cuja existência foi percebida, ou simplesmente eram utilizados para o desenvolvimento de cálculos, destaca-se os números 2,7182818284590452353602874...; 3,1415926535897932384626433... e 1,618033989... sendo estas numerações citadas, aproximações de números cujas representações de suas infinitas casas são, respectivamente, simbolizadas por "e", "π" e "Φ", que são chamados por Numero de Euler, Pi e Fi. Esses números serão descritos de forma mais detalhada nas seções 3.1.5, 3.1.6 e 3.1.7.

Embora houvesse a manipulação de números irracionais por muitas civilizações e matemáticos, de acordo com Oliveira e Gomes (2009), somente no ano de 1872 é que surgiu uma teoria mais completa e satisfatória sobre os números irracionais, sendo ela, destituída de considerações geométricas, a partir da publicação de um ensaio, chamado “Continuidade e números irracionais”, pelo matemático Richard Dedekind (1831-1916). Na próxima subseção será tratado sobre a formalização dos números irracionais.

3.1.3. Formalização dos números Irracionais

No início de 1830, Bolzano tentou desenvolver uma teoria, onde os números irracionais seriam considerados como limites de sequências de números racionais. Ele deixou essa concepção em um manuscrito chamado Teoria das Quantidades que foi deixado inacabado, que nem mesmo foi reconhecido e nem publicado até 1962. Com esperança de que sua obra fosse finalizada, Bolzano a ofereceu ao seu aluno Robert Zimmermann (1824-1898), que deixou de se dedicar a Matemática e entregou a obra à Biblioteca Nacional de Viena, (BOYER, 1974, apud LOPES; SÁ, 2016).

Conforme Lopes e Sá (2016) a trajetória cronológica dos acontecimentos aponta Charles Méray (1835-1911) como o primeiro matemático a apresentar uma definição satisfatória dos números irracionais, por meio de um artigo publicado em 1869 por ele, chamado “Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir des limites à des variables données”,

De acordo com Grimberg e Roque (2012), Méray indicava em seu artigo que desejava tratar da “natureza” das quantidades incomensuráveis, de modo que, o autor argumenta que a maneira como ele define os irracionais é a mais “natural” ou a mais “consistente com a natureza das coisas”, e que, por esta razão, seria mais fácil compreendê-la.

Segundo Grimberg e Roque (2012, p. 424), no início do artigo citado, Méray enuncia dois princípios da teoria dos números incomensuráveis:

> 1º) Uma quantidade v que recebe, sucessivamente, os valores v_1, v_2, ..., v_n, ..., tende a um certo limite, se os termos estiverem sempre em ordem crescente, ou decrescente, desde que permaneçam, no

> primeiro caso inferiores ou, no segundo caso superiores a uma quantidade fixa qualquer.
>
> 2º) A variável v acima goza da mesma propriedade se a diferença $v_{n+p} - v_n$ tende a zero quando n aumenta indefinidamente, qualquer que seja a relação entre n e p.

Diante de tais princípios, Méray designa a palavra "número" ou "quantidade" apenas a inteiros e as frações. Com isso, esse número pode não existir de modo que já não seja possível afirmar que v tem um limite. Surge, em sua teoria, uma dificuldade de não considerar as quantidades incomensuráveis como números (GRIMBERG; ROQUE, 2012).

No entanto, ele percebe que a diferença $v_{n+p} - v_n$ também converge para zero no caso em que v não tende para um número racional. Nesta situação, Méray observa que a natureza de v oferece uma extraordinária semelhança com as variáveis (sequências) realmente dotadas de limites. Desse modo a variável progressiva v é "convergente" e pode ou não ter um limite "numericamente atribuível" (GRIMBERG; ROQUE, 2012).

O raciocínio de Méray foi da seguinte forma: se a variável progressiva (sequência) é convergente, mesmo se o limite para o qual converge não é um número em si, podemos defini-lo como sendo um. Após isso, ele propôs que toda quantidade chamada de "incomensurável" corresponde a uma infinidade de "variáveis progressivas" (comensuráveis) convergentes que são equivalentes, que em linguagem atual seria: definir número irracional como o limite de uma sequência de Cauchy quando esse limite não é racional (GRIMBERG; ROQUE, 2012).

Conforme Lopes e Sá (2016), Méray considerava que uma sequência convergente determina um número racional como limite ou um "número fictício" como um "limite fictício"; de modo que esses números podem ser ordenados e são, em essência, os números irracionais. Algo que ficou um tanto vago. (BOYER, 1974, apud LOPES; SÁ, 2016).

Conforme a referência anterior, um outro teórico ao contribuir para a construção do conceito de números irracionais foi Karl Weierstrass (1815-1897), um matemático alemão, que percebeu a necessidade de elaborar uma teoria de números irracionais e, a partir dessa necessidade, tentou construir os fundamentos da análise. Foi por volta de 1863 a 1864, que ele apresentou uma construção como parte de um curso sobre a teoria geral das funções analíticas.

Segundo Boyer (1974, apud LOPES; SÁ, 2016) Weierstrass tentou separar o cálculo da geometria e baseá-lo apenas no conceito de número e, assim como Méray, percebeu a necessidade de definir um número irracional que não dependesse do conceito de limite, assim direcionou a ideia de limite de uma sequência convergente tomando a própria sequência como número ou limite.

Conforme Oliveira e Gomes (2009), foi no ano de 1872 é que surgiu uma teoria mais completa e satisfatória sobre os números irracionais, sendo ela, destituída de considerações geométricas, a partir da publicação de um ensaio, chamado “Continuidade e números irracionais”, pelo matemático Richard Dedekind (1831-1916).

Julius Wilhelm Richard Dedekind foi um matemático alemão que nasceu a 6 de outubro de 1831 em Braunschweig e faleceu a 12 de fevereiro de 1916. Ele concebeu os *Cortes de Dedekind* que garantem a existência de um corpo ordenado completo (CORRÊA, 2008).

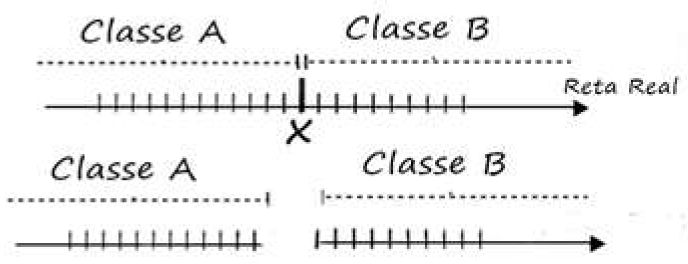
Para Roriz (2014), Dedekind concentrava suas ideias no problema dos números irracionais. Segundo ele, a concepção de limite deveria ser desenvolvida por meio da aritmética, sem depender de geometria.

Ao se questionar sobre o que existe na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais, Dedekind chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta não se deve a uma vaga propriedade de ligação mútua, mas sim, a uma propriedade exatamente oposta a característica da divisão do segmento em duas partes por um ponto dado (RORIZ, 2014).

Essa compreensão surgiu após ele estudar sobre a teoria dos incomensuráveis de Eudoxo, bem como outros assuntos, permitindo ao estudo desenvolvido por ele um avanço sobre a ideia de contínua. Dedekind desenvolveu um raciocínio muito interessante sobre o assunto que pode ser sintetizado da seguinte forma:

Cortando uma reta em duas partes é possível separar os números racionais em duas classes A e B, de modo todo número da primeira classe A é menor que todo número da classe B (ver figura 6).

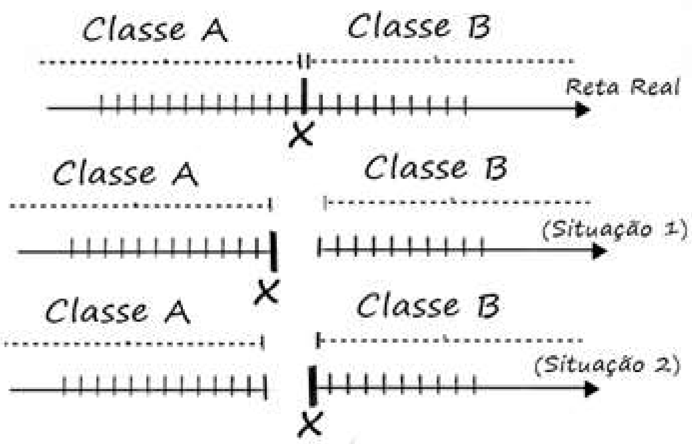
Figura 6 – Corte da reta



Fonte: Autor (2021).

Se A tiver um maior elemento (Situação 1) ou se B tiver um menor elemento (Situação 2) o corte realizado nessa reta define um número racional X, conforme ilustra a figura a seguir.

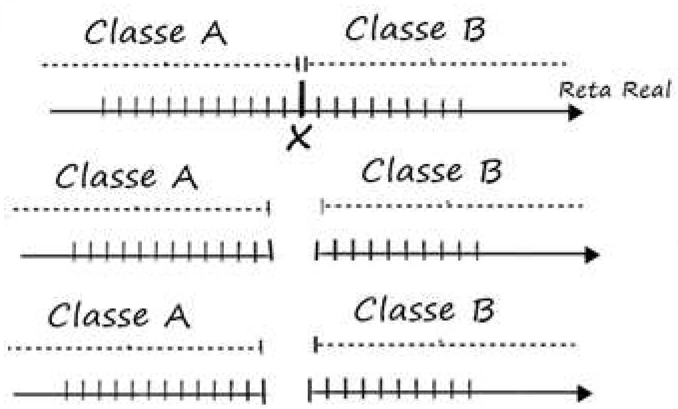
Figura 7 – Corte na reta definindo um racional.



Fonte: Autor 2021.

Por outro lado, se A não tiver um maior elemento ou se B não tiver um menor elemento, então o corte realizado nessa reta define um número real irracional, conforme ilustra a imagem da figura a seguir.

Figura 8 – Corte na reta definindo um número irracional.



Fonte: Autor (2021).

A partir dessa percepção intuitiva, Dedekind introduziu o conceito de corte que ajudou a entender a natureza de racionais e irracionais. Isso representou uma construção de um conjunto que equivale ao conjunto dos números reais, substituindo com isso a grandeza geométrica como uma das principais bases de apoio à Análise Real (RORIZ, 2014). Além de criar a necessidade de se criar um conjunto que contenha racionais e um conjunto que contenha irracionais.

De acordo com Roriz (2014), uma das percepções de Dedekind sobre a matemática era de que geralmente novos conjuntos surgem a partir das necessidades de atender as vontades do ser humano. Assim como os números inteiros positivos mostraram limitações existentes em operações básicas como subtração e divisão, motivando, dessa maneira, a necessidade de se criar os números inteiros, em sua totalidade, e os números fracionários. Essa motivação fez Dedekind construir o conjunto dos números irracionais, como uma extensão do conjunto dos racionais, concebendo, dessa forma, os números reais.

Outro matemático a fazer grandes contribuições para este assunto foi Georg Cantor (1845-1918). Cantor desenvolveu um estudo sobre a ideia de infinito. A partir da definição de conjunto infinito, já existente naquela época a partir dos estudos de Cantor, Bolzano e Dedekind, a noção de cardinalidade (quantidade de elementos) de conjuntos infinitos pôde ser aprofundada por Cantor nos estudos sobre os números reais (FERREIRA, 2014).

Ele demonstrou que os conjuntos dos naturais, inteiros e racionais tinham a mesma cardinalidade, e por isso, eram enumeráveis, isto é, podiam ser contados (bijeção com o conjunto dos naturais), porém o conjunto dos reais, embora também fosse infinito como os outros conjuntos citados anteriormente, tinha uma cardinalidade maior que eles (FERREIRA, 2014). Isso trouxe a ideia de que os Reais teriam mais elementos que os Racionais, embora ambos fossem infinito, daí devido os Racionais pertencerem ao conjunto dos números reais, então o conjunto $\mathbb{R}$ possui elementos que são racionais, assim como elementos que são não racionais, sendo estes os irracionais.

Os estudos de Dedekind e Cantor ajudaram a caracterizar os números irracionais quanto ao ponto de vista de conjunto, assim como seu pertencimento ao contínuo da reta numérica real.

3.1.4. Os Números Algébricos e Transcendentes

Sabe-se que os números reais são divididos entre os números racionais e os irracionais, mas existe outra forma de classificar os números reais. Em Algébrico e Transcendente. De acordo com Marques (2013), um número é dito algébrico se é raiz de algum polinômio não nulo com coeficientes inteiros. Por exemplo, os números 2; 0,5 e $\sqrt{6}$ são algébricos, pois

Para x = 2, temos que ele é raiz do polinômio $P(x) = x^2 - 4x + 4$

Para x = 0,5; temos que ele é raiz do polinômio $Q(x) = 2x^2 - 5x + 2$

Para x = $\sqrt{6}$; temos que ele é raiz do polinômio $R(x) = x^2 + 0x - 6$

Caso um número não possa atender a essa condição, dizemos que ele é um número transcendente. A definição de número transcendente é do século XVIII e, segundo Euler, esses números são chamados transcendentes porque “transcendem" o poder das operações algébricas (LAFETÁ; SILVA; LELIS, 2017).

Em outras palavras, os transcendentes não podem ser obtidos de operações como adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação envolvendo finitos números racionais, nem mesmo resumidos a forma de equação polinomial.

Embora tenha surgido a definição de transcendente no século XVIII, a teoria dos números transcendentes foi apresentada no século XIX com o Joseph Liouville (1809-1882), um matemático francês. Ele encontrou uma propriedade que era satisfeita por todos os números algébricos, sendo valido pra números racionais e para alguns irracionais. Desse modo um número que não satisfizesse tal propriedade deveria, necessariamente, ser classificado como transcendente (LAFETÁ; SILVA; LELIS, 2017).

Este resultado é o que chamamos hoje de Teorema de Liouville, cuja prova, embora não fosse simples, permitiu que ele construísse vários exemplos de números transcendentes (não algébricos). Um dos exemplos, conhecido como número de Liouville, é $\frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots$, cuja expansão decimal é 0,110001000000000000000000100..., de modo que sempre a sequência de dígitos zeros vai aumentando devido estar ligado ao fatorial de cada termo $\frac{1}{10^{n!}}$, $n \in \mathbb{N}$, desse número. Outro exemplo é o número 0,12345789... onde os termos são os números naturais em ordem (MOSCIBROSKI, 2002).

Um fato importante para a compreensão de números algébricos é que todo número racional é algébrico. Veja que um racional $\frac{p}{q}$, certamente é raíz do polinômio $\mathrm{P(x)} = qx - p$, (MOSCIBROSKI, 2002).

Esse desenvolvimento mostra que todos os números racionais são algébricos, pois todos eles podem ser raiz de um polinômio de coeficientes inteiros. Entretanto a recíproca não é verdadeira, pois além dos racionais, existem alguns números irracionais; como os do tipo $\sqrt{p}$, com p sendo primo; que também podem ser obtidos de polinômios com coeficientes inteiros. Tem-se o número irracional $\sqrt{2}$, por exemplo, como uma das raízes do polinômio $P(x) = x^2 + 0x - 2$.

Embora os irracionais do tipo $\sqrt{p}$, com p sendo primo, sejam algébricos, nem todos os irracionais podem ser escritos como raiz de um polinômio de coeficientes inteiros. Os números irracionais e e π são exemplos de números não algébricos e, portanto, são classificados como números transcendentes, (MOSCIBROSKI, 2002).

Como todo racional é algébrico, sendo também este atributo admitido por alguns irracionais, então todos os não algébricos (transcendentes) são todos os irracionais que não são algébricos. Em síntese, todos os transcendentes são irracionais.

De acordo com Lafetá, Silva e Lelis (2017) os números e e π são exemplos clássicos de números transcendentes. Sendo provada a transcendência de e em 1873, por Charles Hermite (1822-1901), que fez uso da série de Taylor da função e^x.

Alguns anos depois, em 1884, Lindemann (1852 - 1939) generalizou os métodos de Hermite, e provou que e^α é transcendente, para α algébrico não nulo. Isso teve grande contribuição, pois foi possível demonstrar a transcendência de números como $\ln 2$, $e^{\sqrt{2}}$ e $\cos 1$ (MARQUES, 2013).

De acordo com Lafetá, Silva e Lelis (2017) a consequência mais importante do Teorema de Lindemann é a transcendência de π. Para se chegar a tal conclusão, Lindemann usou a identidade de Euler ($e^{i\pi} + 1 = 0$). Vale enfatizar que, apesar de provada a transcendência de π e e, ainda hoje não se foi provada a transcendência de e + π ou $e\pi$, dentre outros números cuja transcendência aparenta ser facilmente dedutível.

Para Moscibroski (2002), os matemáticos gregos antigos enfrentavam problemas geométricos de construção de figuras com propriedades especificadas. Alguns deles foram resolvidos naquela época, outros não. Como por exemplo, problemas como "duplicação do cubo", a "trisecção de um ângulo" e a "quadratura do círculo" não eram resolvidos utilizando somente régua sem marcas e compasso.

Mas com o surgimento da teoria dos números algébricos e transcendentes foi possível concluir que as construções desses três problemas geométricos não podem ser efetuadas pelos métodos de construção da Geometria Euclidiana (MOSCIBROSKI, 2002). Como por exemplo, a demonstração da transcendência de π, que foi uma consequência obtida do Teorema de Lindemann, mostrou a impossibilidade de se construir um quadrado com a área de um círculo determinado (Quadratura do Círculo), (MARQUES, 2013).

3.1.5. Número π

Apresentaremos neste momento um recorte histórico sobre a concepção do número π durante a história da humanidade. Porém, de acordo com Machado (2013), é importante enfatizar que a história do π não ocorreu de maneira linear e contínua como pode indicar uma organização cronológica. O uso deste número ocorreu em diversas épocas, regiões do globo e povos distintos, em alguns casos de forma isolada e em outros apoiados em resultados anteriores, além de que em alguns momentos sua ideia era utilizada sem estabelecer a noção de número. Diante disso, o desenvolvimento histórico a se apresentar nesta seção irá apresentar a história deste número, destituído de linearidade, mas enfatizando as principais figuras de destaque que conceberam a sua ideia.

Um dos números mais famosos da história, o π, corresponde a razão entre o perímetro de um círculo e o seu diâmetro. Ele é um número irracional, cujo valor ajuda no cálculo tanto do perímetro, quanto na área de círculos.

As evidencias sobre a utilização desse número indicam que a ideia de π já era usada a cerca de 4.000 anos atrás, sendo que a existência de uma relação constante entre "a circunferência e o seu diâmetro" era percebida por muitas das civilizações antigas (OLIVEIRA; GOMES, 2009).

Embora a ideia de π tenha sido usada durante a história por muitas civilizações, assim como por muitos matemáticos na modernidade, o motivo para a escolha de π para simbolizar o número irracional tratado, se inicia na antiguidade, onde o famoso matemático grego Arquimedes, no seu tratado *Da Medida do Círculo*, refere-se ao comprimento da circunferência pela palavra grega $\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho o\varsigma$ que significava perímetro. Mais tarde, o uso do termo $\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho o\varsigma$ para indicar o perímetro de um círculo de raio R, foi adotado de modo abreviado, para π, por alguns matemáticos como William Oughtred e Isaac Barrow (CARVALHO, 2011).

Em 1706, o matemático galês William Jones (1675-1749) publicou a obra *A New Introduction to Mathematics*, na qual usa a letra π designando-a especificamente como a razão entre o perímetro do círculo e seu diâmetro, ao invés de simplesmente perímetro de um círculo. Entretanto nem todos usavam essa mesma notação. Mas foi em 1737 que este termo ganhou destaque a partir do seu uso por Leonhard Euler em sua obra sobre séries infinitas *Variae observationes circa series infinitas* (CARVALHO, 2011).

A partir da distinção simbólica de π é possível tratar agora de eventos históricos que evidenciam a manipulação de sua ideia.

Diante de várias medições, muitas civilizações e matemáticos da antiguidade notaram que a razão entre o perímetro de diferentes círculos e seus respectivos diâmetros eram sempre aproximações de um mesmo valor ou simplesmente desenvolviam cálculos que evidenciavam implicitamente uma aproximação para π. Veja no quadro seguinte a percepção de π para algumas referências matemáticas (civilizações e matemáticos) durante a história.

Quadro 1 – Algumas aproximações de **π** conforme evidências matemáticas de civilizações e matemáticos durante a história.

Origem/autor	Data	Valor
Babilônia	2000 a. C.	$3 + \frac{1}{8}$
Egito (Papiro de Ahmes)	1650 a. C.	$\left(\frac{16}{9}\right)^2$
Arquimedes	250 a. C.	$\frac{22}{7}$
Ptolomeu	150 d. C.	$\frac{377}{120}$
Liu Hui	ca. 220 d. C.	3,14159
Tsu Chung Chih	480 d. C.	$\frac{355}{113}$

Fonte: Dellajustina e Martins (2014); Machado (2013); Tadeu *et al* (2018).

Pode-se perceber no quadro apresentado que, para cada um dos referenciais matemáticos, há aproximações diferenciadas, algumas por excesso e outras por falta.

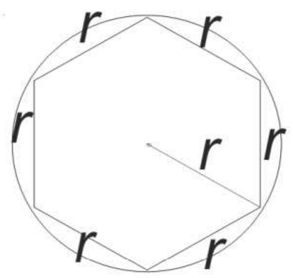
De acordo com Oliveira e Gomes (2009), embora cada uma das civilizações e matemáticos tivessem percebido a existência de π, foram os gregos que conseguiram compreender e explicar o motivo da relação geométrica que o forma, que é inerente as propriedades de figuras semelhantes. Eles compreenderam que números como π e $\sqrt{2}$ são diferentes dos números inteiros e dos números racionais utilizados na matemática deles e, mesmo eles tendo conseguido perceber a irracionalidade de $\sqrt{2}$, o mesmo não ocorreu para π.

▪ Babilônios

Considerando a civilização babilônica, existem evidencias que direcionam a uma compreensão da essência do significado do π por esse povo. Uma dessas evidências foi uma tábua de barro encontrada em 1936 na cidade de Suza, no Iran. Essa tábua traz informações de que a razão entre o perímetro de um hexágono regular e o perímetro de uma circunferência circunscrita, a ele, era de 24/25 (MACHADO, 2013).

Consideremos a situação anterior, um hexágono e uma circunferência circunscrita nele. Sendo r o raio da circunferência, temos que o lado desse hexágono também é r.

Figura 9 – Hexágono inscrito em uma circunferência



Fonte: Autor (2021).

Assim, temos que a razão entre o perímetro do hexágono (6r) e o perímetro da circunferência (c) será de $\frac{6r}{c} = \frac{6r}{2\pi r} = \frac{3}{\pi}$. Com base nessa razão, podemos iguala-la à razão $\frac{24}{25}$, referida anteriormente, por se tratar da mesma ideia. Assim $\frac{3}{\pi} = \frac{24}{25}$, onde teremos que $\pi = 3{,}125$.

Conclui-se que o valor 3,125, de fato, é uma aproximação do número π que se encontra implícito nas informações da tábua de barro babilônica a qual foi referida anteriormente. Isto mostra um pequeno indício da concepção que os babilônicos tinham de π (MACHADO, 2013). Porém de acordo com Carvalho (2011), existem evidências que apontam que o método usado por eles para calcular a área do círculo era multiplicar 3 ao quadrado do raio. Neste caso eles consideraram π valendo 3.

▪ Egípcios

Os Egípcios na antiguidade armazenavam alimentos em celeiros cilíndricos. Como a base de um cilindro circular reto é um círculo, então conhecer um método que permitisse determinar a área do círculo era uma necessidade prática. Esta situação prática representou uma das ocasiões que utilizava, mesmo que implicitamente, o número π (GASPAR; MAURO, 2004).

No Papiro de Rhind que foi escrito pelo escriba Ahmes, por volta de 1700 a.C, foi encontrado os seguinte problemas: 1-*Compare a área do círculo com a do quadrado circunscrito*. 2-*Exemplo de um corpo redondo de diâmetro 9. Qual é a área?*

Esses problemas trataram da necessidade de encontrar uma forma de calcular a área de um círculo. No mesmo documento é apresentada a seguinte solução: a área de um círculo é igual a de um quadrado cujo lado (d) é o diâmetro (2r) do círculo subtraindo-se sua nona parte (MACHADO, 2013). Ou também: Subtraia do diâmetro sua nona parte e eleve o restante ao quadrado. Esta é sua área. (GASPAR; MAURO, 2004).

Em outras palavras o escriba estaria usando a fórmula $A = (d - \frac{d}{9})^2$, onde A é área e d é o diâmetro do círculo. Sedo que ela pode ser escrita como $A = (\frac{8d}{9})^2$, $A = \frac{64d^2}{81}$ ou $A = \left(\frac{16}{9}\right)^2 .r^2$ (com r sendo o raio). Neste ultimo caso, pode-se comparar com a formula atual de calculo de área de círculo, $A = \pi.r^2$, daí percebe-se, pela similaridade que há entre $A = \left(\frac{16}{9}\right)^2 .r^2$ e $A = \pi.r^2$, que o valor de π pela formula apresentada no Papiro de Rhind é indicado como aproximadamente 3,160493 (MACHADO, 2013).

Os problemas apresentados e tantas outras situações representam evidências que indicam uma compreensão da ideia de π pela civilização Egípcia.

Outro questionamento sobre o entendimento apresentado é sobre um dos problemas do Papiro de Rhind que foi citado anteriormente sobre a possibilidade de se comparar um circulo com um quadrado circunscrito. Este problema é conhecido como "Quadratura do Círculo" e já foi citado anteriormente.

- Chineses

Na China antiga também houve o surgimento da concepção de π. O copiador de livros Liu Hui (c. 250 d.C.), oficial do reino de Wei (220-265), foi chamado a reexaminar a literatura científica clássica e coube-lhe interpretar e rescrever a obra "Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática" que era um conjunto de conhecimentos da matemática chinesa. Esta obra conhecida atualmente como algo equivalente à obra Elementos escrita por Euclides (PEREIRA, 2017).

Foi nesta obra, que Liu Hui fornece uma aproximação para π baseada no seguinte entendimento: se escrever um polígono de n lados, com n o maior número possível de lados, dentro de um círculo, então a área do círculo é igual à área do polígono. Daí, Hui conseguiu determinar à π a aproximação 3,14159.

Outro chinês que se destacou por apresentar outra aproximação para π, foi Tsu Ch'ung-chih. No final do século V este matemático chegou a um valor ainda mais próximo, sendo obtido pela razão 355/13, (GRILLI, et al. 2011).

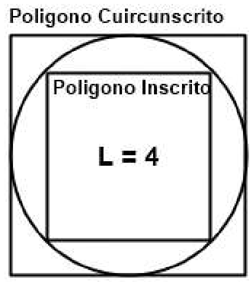
▪ Arquimedes

Existiu um matemático na cidade de Siracusa, na região da Itália, chamado Arquimedes (287 - 212 a.c.). Arquimedes era matemático, físico, engenheiro, inventor e astrônomo. Ele também tratou do significado de π, e, diga-se de passagem, tratou de maneira bastante adequada (DELLAJUSTINA; MARTINS, 2014).

Ele criou um método geométrico que o direcionou a determinar valores aproximados à π de uma maneira incrível. Tem-se a seguir uma descrição sobre este método.

Imaginemos uma circunferência e dois polígonos regulares de 4 lados (L=4), um inscrito e outro circunscrito a essa circunferência (Figura 10). Observa-se que as figuras mostram que o perímetro do polígono circunscrito (P_c) é maior que o perímetro da circunferência (C), e esta é maior que o perímetro do polígono inscrito (P_i).

Figura 10 – Passo 1 do método de Arquimedes



Fonte: Dellajustina e Martins (2014).

Aumentando para o dobro do numero de lados (L=8) para os polígonos inscrito e circunscrito teremos a figura seguinte.

Figura 11 – Passo 2 do método de Arquimedes

Fonte: Dellajustina e Martins (2014).

Neste caso ainda é verdadeira a relação $P_i < C < P_c$ a respeito dos perímetros das figuras geométricas. Mas, com uma diferença, os perímetros dos polígonos se aproximaram do perímetro da circunferência. Desse modo, se continuar a dobrar o número de lados essa aproximação vai ser ainda maior. Assim a relação que resulta no π (divisão do perímetro da circunferência por seu diâmetro) aplicado nos polígonos de modo semelhante vai determinar aproximações para π. No polígono circunscrito, surgem aproximações por excesso e no polígono inscrito, surgem aproximações por falta.

Arquimedes repetiu o processo descrito, com polígonos de até 96 lados até perceber que π está entre 3,140 e 3,143 (DELLAJUSTINA; MARTINS, 2014).

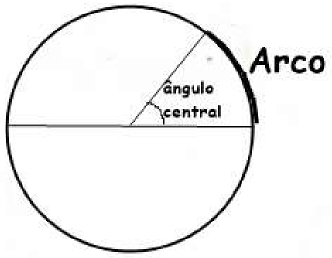
O método apresentado ganhou grande destaque, sendo conhecido como "método clássico para o cálculo do número π". O grande reconhecimento por esse trabalho de Arquimedes está no fato dele não tentar apresentar o valor exato de π, mas somente um limite inferior e um limite superior para este número. Algo que nos dias atuais pode-se comparar com a ideia de limite pela esquerda e limite pela direita (MACHADO, 2013).

▪ Ptolomeu

Claudio Ptolomeu (85 - 165 d.C.) foi um cientista astrônomo e geógrafo grego que viveu em Alexandria. Ele escreveu uma obra chamada Almagesto, considerada uma das mais importantes obras sobre a Trigonometria da antiguidade (OLIVEIRA, 2010).

Para Eves (1997 apud MACHADO, 2013), em um dos livros de obra Almagesto, Ptolomeu fez uma aproximação para π. O valor foi obtido a partir de uma tábua de arcos de uma circunferência, correspondentes aos ângulos centrais. Uma explicação do caminho feito por Ptolomeu para determinar uma aproximação para π é: Consideremos um arco determinado por um ângulo central.

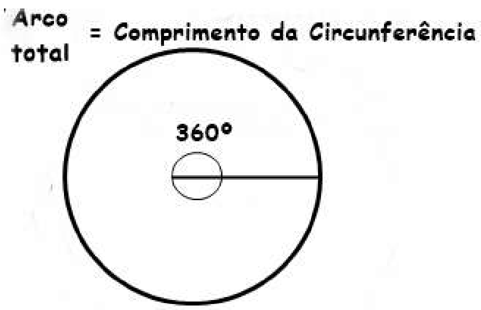
Figura 12 – Arco de um ângulo central



Fonte: Autor (2021).

Logo, podemos determinar o arco de um ângulo central de 360°, assim como se apresenta na figura seguinte:

Figura 13 – Arco de um ângulo de 360°



Fonte: Autor (2021).

A partir daí, Ptolomeu dividiu o comprimento total do arco formado, pelo diâmetro da própria circunferência, obtendo $\frac{377}{120}$. Essa fração foi encontrada porque ele dividiu a corda em 360 partes, o diâmetro em 120 partes e utilizou 377/120 como uma aproximação para o π, que nesse caso é aproximadamente 3,1416 (OLIVEIRA, J., 2010).

▪ Irracionalidade e Transcendência de π

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) foi um matemático francês, que provou, em 1761, que π é irracional. Ele chegou a essa conclusão a partir de alguns estudos sobre fração contínua (LUBECK K.; LUBECK M., 2010).

Nos estudos de Lambert, ele obtém uma expansão para a função tangente por frações contínuas e, a partir daí, ele consegue provar que se um arco x tivesse medida racional então a tangente desse arco (Tg x) teria valor irracional, assim caso a tangente de um arco x fosse racional então a medida desse arco será irracional (OLIVEIRA, F. N., 2018). Assim teremos o seguinte:

Como $Tg\,(\frac{\pi}{4})$ = 1 é número racional então o arco $\frac{\pi}{4}$ é irracional. Daí, percebe-se que π é irracional. Assim, Lamber demonstrou que π é um número irracional.

Após a prova matemática apresentada por Lambert, surgiram muitas outras demonstrações sobre a irracionalidade de π. Mas apesar de ter sido demonstrado pela primeira vez em 1761, o π ainda guardava um problema ainda não solucionado, o problema da quadratura do círculo. Problema esse que pôde ser solucionado a partir de uma demonstração feita por Lindemann, onde provou em 1882 que π é transcendente (MACHADO, 2013).

Ferdinand von Lindemann (1852-1939) foi um matemático que provou que π é irracional transcendente. Para isso, ele considerou dois fatos já demonstrados, o de que o número irracional e é transcendente e que $e^{i\pi}$ + 1 = 0 (Identidade de Euler) (LUBECK K.; LUBECK M., 2010).

Lindemann usou o seguinte raciocínio: $e^{i\pi}$ é algébrico, pois -1, obviamente, o é, já que $e^{i\pi}$ + 1 = 0 e, com isso, $e^{i\pi}$ = -1. Portanto $i\pi$ só pode ser transcendente, pois e elevado a um número algébrico continuaria a ser transcendente. Se $i\pi$ e transcendente, sendo i algébrico, por ser solução da equação $x^2 + 1 = 0$, então π só pode ser transcendente (GARBI, 1997).

O impacto da demonstração de Lindemann foi muito importante, pois provava que o clássico problema da quadratura do círculo não tem solução, pois se fosse possível, $\sqrt{\pi}$ seria um número algébrico e, diante isso, π também seria algébrico, o que é uma contradição (LUBECK K.; LUBECK M., 2010). Portanto a área πr^2 de uma circunferência não pode ser redefinida para a área de um quadrado, utilizando régua e compasso.

3.1.6. Número e

Conhecido como Número de Euler, o e é um número irracional muito conhecido na matemática, assim como em outras áreas, devido seu uso frequente em problemas, especialmente em logaritmos. Algumas vezes se pergunta: Por que se usa logaritmos na base e? Afinal o que torna o número irracional e especial a ponto de ser mais usado em cálculos matemáticos, se comparado a outros número como 2; 10; 0,9999999 e π?

O uso frequente do número e em muitas situações matemáticas certamente gera a necessidade de compreender a construção histórica que desenvolveu a ideia que se tem hoje sobre esse número irracional. Diante disso, essa subseção busca apresentar um recorte histórico sobre o Número de Euler (e) expondo de modo claro e detalhado desde a noção intuitiva de e ligada à área financeira até a prova da transcendência desse número.

▪ Surgimento

Conforme Precioso e Pedroso (2013) o número e, embora tenha surgido cem anos após a criação do cálculo diferencial e integral, deve sua existência, praticamente, aos bons resultados conseguidos com os novos métodos e novas técnicas do Cálculo. Sabe-se que muitos problemas de diversas áreas, como a mecânica, foram solucionados no final do século XVII e no decorrer do século XVIII. Porém isso só ocorreu porque as soluções desses problemas dependiam exclusivamente da resolução de equações diferenciais, as quais manipulam frequentemente o número e, sobretudo como base das exponenciais que constituem as chamadas funções hiperbólicas.

Conforme estudos, a primeira vez que o número e apareceu na matemática como número foi no início do século XVII em problemas sobre juros compostos, por meio de um estudo feito por Jacob Bernoulli (1654-1705) sobre uma situação típica de acumulação capitalista, de modo que tal estudo gerou resultados importantíssimos para as ciências exatas ao se relacionar com a solução de vários problemas.

Jacob Bernoulli nasceu em Basileia, Suíça, a 27 de Dezembro de 1654. Ele foi o primeiro de uma famosa dinastia de cientistas, o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal para além do que fora feito por Newton e Leibniz, aplicando-o a novos problemas.

Jacob Bernoulli também ficou conhecido por desenvolver trabalhos na área de matemática financeira, nos quais, tiveram a primeira indicação de e como número, propriamente dito. Sendo esta indicação ocorrida em 1683, quando Bernoulli estudava o problema da capitalização contínua, em que buscava encontrar um valor para o seguinte limite: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, por meio do qual foi obtida uma aproximação para e (LAFETÁ; SILVA; LELIS, 2017).

Apesar do aparecimento do e na segunda metade do século XVII com os trabalhos de Jacob Bernoulli, foi numa carta de Leibniz (1646-1716) endereçada a Huygens que se usou pela primeira vez, em 1690, uma notação para este número, sendo representado pelo símbolo b, revelando que já no final do século XVII o número e já era claramente reconhecido (FIGUEIRA, 2017).

Sabe-se que a origem real desse número não é tão bem definida, pois existem evidências do seu possível aparecimento, mesmo que implícito, em trabalhos de povos da Mesopotâmia.

Em um tablete de argila da Mesopotâmia, hoje localizado no museu do Louvre, datado de 1700 a.C., é encontrado um exemplo de situação matemática que propõe o seguinte problema: Quanto tempo levaria uma quantia em dinheiro para dobrar, a 20% ao ano? (COSTA; OLIVEIRA; LOPES, 2017).

A resposta é dada, na base 60, ou seja, $3;47{,}13{,}20 = 3 + \frac{47}{60} + \frac{13}{60^2} + \frac{20}{60^3} = 3{,}7870$ que encontra-se próxima do valor correto que é 3,8018, isto é, cerca de 3 anos, 9 meses e 18 dias (PRECIOSO; PEDROSO, 2013). Analisando o resultado e comparando com a fórmula para juros compostos, é provável que o escriba tenha usado interpolação linear entre os valores $(1{,}2)^3$ e $(1{,}2)^4$, de uma tabela de potências de $1{,}2$. Assim, fazendo $C_t = 2C_0$ em $C_t = C_0(1 + r)^t$, em que r = 20% e C_0 é a quantia inicial colocada a juros, tem-se $2C_0 = C_0(1{,}2)^t$, ou seja, $2 = (1{,}2)^t$.

Este entendimento é de certa forma uma evidência de que o conhecimento dos mesopotâmios compreendia a área da matemática financeira capaz de indicar a presença do número e. Precioso e Pedroso (2013) ressaltam que já eram utilizadas na Mesopotâmia, para resolver vários problemas, tabelas de potências sucessivas de um dado número, semelhantes às atuais de logaritmos que resolvem a equação (1). Observa-se também sobre o resultado acima abordado que não depende do valor inicial colocado a juros.

A fórmula de capitalização $C_t = C_0\ (1 + r)^t$, com a qual já foi citada, pode ser ajustada para a representação $M = C(1 + i)^t$, onde M é o montante, C é o capital inicial, i é a taxa de juros e t é o total de tempo de capitalização. Por meio dessa relação podemos calcular o montante de um investimento, de uma dívida, e muitas outras situações financeiras, por exemplo, determinar o montante gerado a partir de um investimento de $C =$ R$ 100,00 (capital inicial) capitalizada anualmente com a taxa de 10% ($i = 10\%$) de juros compostos para um determinado tempo de capitalização de 3 anos ($t = 3$). No final de 3 anos teremos

$$M = 100(1 + 10\%)^3$$
$$M = 100(1 + 0{,}1)^3$$
$$M = 100(1{,}01)^3$$
$$M = 133{,}10.$$

Logo, o montante será de R$ 133,10.

Na situação anterior, há o cálculo do montante, sendo que a taxa e o tempo estão na mesma unidade de tempo, que é ano, agora supondo que uma taxa anual i é capitalizada "semestralmente" em t anos, em uma operação financeira, sendo que neste tipo de caso, a taxa geralmente é chamada de taxa de juros nominal (JUNIOR, 2013). Nessa situação, a taxa de juros realmente usada (taxa efetiva) no cálculo do montante será diferente de i, por exemplo, uma empréstimo com taxa de juros 20% a.a., capitalizado semestralmente durante t anos, possui a necessidade de ajuste na taxa e no tempo para poder determinar o montante gerado pelo empréstimo, portanto deve-se ajustar o tempo t anos para $2t$ semestres e também dividir a taxa anual de 20% para dois semestres (10% à cada semestre), desse modo, podemos usar a fórmula de capitalização para tentar acumular a taxa de juros nesses semestres para determinar a taxa correta nos t anos citados no problema inicial. Assim, teremos o seguinte desenvolvimento:

$$M = C(1 + \frac{20\%}{2})^{2t}$$
$$M = C(1 + 10\%)^{2t}$$
$$M = C[(1 + 0{,}1)^2]^t$$
$$M = C[(1{,}1)^2]^t$$
$$M = C(1{,}21)^t$$

$$M = C(1 + 0{,}21)^t$$
$$M = C(1 + 21\%)^t$$

Assim, comparando $M = C(1 + 21\%)^t$ com a fórmula $M = C(1 + i)^t$, percebemos que a taxa realmente aplicável em t anos deve ser de 21% a.a. ao invés da taxa nominal de 20% a.a.. Essa ideia mostra que quando aumentamos o período em que é aplicada a taxa nominal i como, por exemplo, de ano para semestre, semestre para trimestre, trimestre para bimestre, etc; direcionamo-nos ao uso de uma taxa proporcional a ela, digamos $\frac{i}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, cuja composição nos n períodos produz um reajuste em i, que é própria taxa efetiva.

Conforme Junior (2013), tanto para mudanças no regime de capitalização para semestral, trimestral, semanal, mensal, etc, quanto para cada tipo de aumento do período de incidência da taxa, faz-se o mesmo procedimento anterior para determinar a taxa efetiva, que é dividir a taxa de juros nominal por n, obtendo a razão $\frac{i}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Com isso, devido t conter nt períodos, um capital inicial C, após o tempo t acumulará

$$M = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$
$$\boldsymbol{M = C\left[\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n}\right]^{t}} \qquad (1)$$

Onde $\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, seria a taxa efetiva em formato decimal.

Segundo o autor anterior, esses conhecimentos tiveram surgimento durante o século XVII em meio a um grande crescimento do comércio internacional, onde foram realizadas muitas transações comerciais, o que motivou uma grande atenção sobre a lei de juros compostos, cujo conhecimento é muito aplicado atualmente.

Agora considerando um caso especial da equação em (1), em que $i = 1$ (100%) a.a.; $C =$ R\$ 1,00; $t = 1$ ano e a capitalização ocorra em n períodos, ou seja, $M = \left[1(1 + \frac{1}{n})^n\right]^1$, no qual obtemos $M = (1 + \frac{1}{n})^n$. Dispondo desta relação é possível investigar o comportamento para valores de n cada vez maiores. Tem-se a seguir um quadro expondo esses resultados.

Quadro 2 – Capitalização em função de $\boldsymbol{n}$.

n	$(1+1/n)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,71828

Fonte: Precioso e Pedroso (2013).

Ao observar a quadro 2, nota-se que o capital inicial de R$ 1,00, a cada aumento da periodicidade em n (de ano para semestre, de semestre para trimestre, etc.), foi capitalizado a um montante de aproximadamente R$ 2,72, em outras palavras, a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge para e. Algo que foi tratado por Jacob Bernoulli ao determinar uma aproximação para e, a partir do limite $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, (LAFETÁ; SILVA; LELIS, 2017). Mas, sabe-se que este resultado ficou mais definido com os trabalhos de Euler.

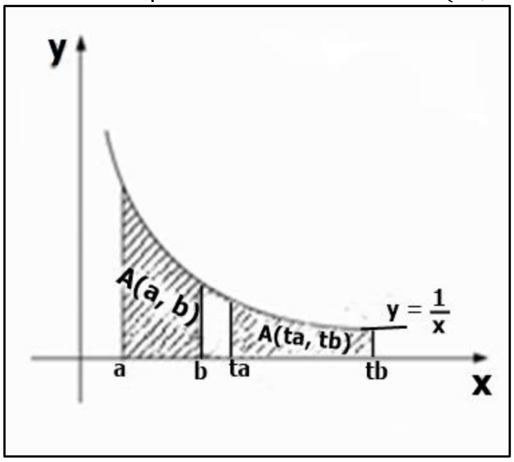
Para o entendimento mais profundo sobre as bases que construíram a percepção deste número, assim como o que pode ter levado Euler ao estudo dele, devemos tratar de um problema matemático incomum e bastante famoso no século XVII, chamado de “quadratura da hipérbole”.

Ao lidar com problemas de quadratura no início do século XVII, Pierre de Fermat (1601 − 1665) e outros matemáticos utilizavam vários métodos para esta finalidade. Fermat foi um matemático que desenvolveu métodos para se determinar a área sob as curvas “parábolas generalizadas” definidas por ele como $y = x^n$, de 0 até $a > 0$ para n inteiro ou fracionário, cujo método de obtenção da área é descrito em linguagem atual como $\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ (PRECIOSO; PEDROSO, 2013).

Além de quadrar parábolas, Fermat quadrou hipérboles superiores da forma $y = \frac{a}{x^n}$, para $n \neq 1$. Porém o método criado por ele não contemplava a quadratura em curvas de hipérboles como $y = \frac{1}{x}$, já que $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ e, com isso, a quadratura seria $\frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{1}{0}$, o qual é indefinido. Algo que foi resolvido com o jesuíta Saint-Vincent (1584-1667) (CALHEIROS, 2016).

O jesuíta belga Saint-Vincent resolveu esse caso particular em 1647, quando ele demonstrou pelo método dos infinitésimos de Cavalieri, em seu *Opus Geometricum*, que a área $A(a, b)$ compreendida entre a hipérbole $y = \frac{1}{x}$, o eixo dos x e as verticais $x = a$ e $x = b$ (a e b positivos) tem a propriedade de que a medida da área delimitada por $x = a$, $x = b$ na curva da hipérbole e no eixo das abscissas será igual à medida da área delimitada pelos $x = ta$, $x = tb$ para qualquer real $t > 0$. O gráfico a seguir ilustra essa ideia (PRECIOSO; PEDROSO, 2013).

Gráfico 1 – Equivalência entre áreas $\boldsymbol{A(ta, tb)}$.



Fonte: Precioso e Pedroso (2013).

Saint-Vicent percebeu que quando se constrói retângulos ao entorno da curva, semelhantes aos usados por Fermat nas "parábolas generalizadas", esses retângulos possuiriam áreas iguais. Este entendimento representou o começo do desenvolvimento da noção de função logarítmica, a partir da necessidade de quadrar a hipérbole, mas embora a ideia de logaritmo não tenha sido exatamente o foco de Saint-Vincent, seus estudos foram analisados por um de seus discípulos, chamado Alfonso de Sarasa (1618-1667), que observou que a propriedade descoberta pelo mestre estava relacionada com uma aditividade peculiar, que para (REIS; SILVA, 2015), o direcionou a propor que no processo de obtenção da área da hipérbole, em um determinado intervalo, resulta em uma função $L(x)$ que obedecesse a seguinte condição: $L(a.b) = L(a) + L(b)$, ou seja, uma função que transforma produto em soma.

Assim percebe-se que a função f resultante da integral da hipérbole (ou a função f cuja derivada é a hipérbole) só pode ser uma função que transforma produto em soma $f(xy) = f(x) + f(y)$. Esse entendimento já diz muito a respeito sobre qual o tipo de função se está referindo. Conforme Reis e Silva (2015), os estudos de Alfonso mostraram um nível de significância que pode ser entendida como a primeira descrição do uso do logaritmo como função, pois até então os logaritmos só eram utilizados como ferramentas de cálculo.

Mas afinal somente os atributos já mencionados anteriormente sobre função logarítmica a qualifica como sendo integral da hipérbole $f(x) = \frac{1}{x}$? Será que em qualquer base b em $\log_b x$ serve para compor a $f(x) = \log_b x$, tal que seja a integral da hipérbole?

Esse assunto foi completamente esclarecido somente no século XVIII com os trabalhos de Euler, que indicaram que a base b que atende a condição citada anteriormente é número irracional e. Segundo Boyer (2010), em uma exposição manuscrita de resultados de experiências sobre disparo de canhões em 1727 ou 1728, Euler utilizou a letra e inúmeras vezes para representar a base do sistema de logaritmos. O uso do e como base de logaritmo, por Euler, ocorreu porque, se a derivada da função logarítmica L fosse igual à curva da hipérbole então sua base deveria ser e, ou seja, se $\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x}$, então $b = e$. Com isso define-se $\log_e x = ln\, x$.

Dessa forma, compreende-se que a função L resultante da integral da hipérbole (ou a função L cuja derivada é a hipérbole) só pode ser a função logarítmica de base e. Uma observação histórica muito interessante sobre a função logarítmica de base e, é que foi a partir de sua concepção, que foi definida, logo depois, a ideia de função exponencial, como sendo a inversa da função logarítmica. Euler fez um importante estudo sobre esse entendimento, inclusive admitindo também o número e como base da função exponencial (PRECIOSO; PEDROSO, 2013).

Resumindo o que foi apresentado anteriormente sobre o que direcionou Euler ao usar o número em questão, tem-se inicialmente a existência do problema da "quadratura da hipérbole" que direcionou a sua resolução parcial por Saint-Vincent, sendo esta, melhorada por Alfonso de Sarasa, construindo então uma ideia superficial de função logarítmica em uma base definida. Mas esta solução só foi finalizada com Euler, que mostrou que a base dessa função logarítmica é o número e.

▪ A irracionalidade de e e sua manipulação por Euler

Leonhard Euler (1707-1783) foi um matemático suíço que nasceu na cidade de Brasileia. Estudou Filosofia na Universidade de Brasiléia, onde foi aluno de Johann Bernoulli (1667-1748). Desenvolveu um vasto trabalho que beneficiou áreas como Teoria de Números, Análise Matemática, Mecânica, Música, etc (SANTOS; NETO; SILVA, 2007).

Euler surpreendeu o mundo matemático com o uso que fazia de somas infinitas, tal como seus sucessos em resolver vários problemas, como das Pontes de Königsberg[1] e o Problema de Brasileia[2]. Foi ele que demonstrou que o número e é irracional e que o indicou com este símbolo, motivo pelo qual esse número foi chamado de Número de Euler. Foi em uma obra intitulada *Mechanica* de 1736, que o e apareceu impresso pela primeira vez (BOYER, 2010).

Euler utilizou a notação e em vários de seus textos, especialmente para representar a base de logaritmos ($\log_e x$), sendo estes, definidos por ele como logaritmos hiperbólicos, devido estarem relacionados com a integral da hipérbole (SOARES, 2017). Atualmente estes logaritmos são conhecidos como logaritmos naturais. Além disso, em uma carta endereçada a Golbach em 1731, ele se referiu ao e como o número cujo logaritmo hiperbólico é 1 (FIGUEIRA, 2017).

Na obra *Introductio in na alysin infinitorum* publicada em 1748, o mais influente entre os numerosos trabalhos de Euler, ele resumiu suas numerosas descobertas sobre séries infinitas, produtos infinitos e frações contínuas e também utilizou a notação e para o número em questão. Nesta obra foi apresentada uma aproximação de 23 casas decimais para ele, a saber, $e =$ 2,71828182845904523536028, a qual foi obtida por meio da série $\sum \frac{1}{n!}$ (FIGUEIRA, 2017). Embora tenha sido usada por Euler em seu livro, esta série

---

[1] LOPES, F. J. A.; TÁBOAS, P. Z. Euler e as Pontes de Königsberg. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [S.L.], v.15, n.30, p. 23-32, 2015.

[2] GAYO, Jairo; WILHELM, Roy. O problema que tornou Euler famoso. **Ciência e Natura**, v.37, n. esp., p.342-355, 2015.

que pode ser escrita como $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}, (n \in \mathbb{N})$ foi descoberta por Isaac Newton (1642 - 1727), em 1665, e pode ser obtida da expansão binomial de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$(PRECIOSO; PEDROSO, 2013).

Ainda nos referindo à obra *Introductio in na alysin infinitorum* de Euler, foi neste mesmo trabalho que Euler, pela primeira vez, chamou a atenção para o papel central do número e ao dizer: "Para o número cujo logaritmo é a unidade, anotemos e que é 2,718281 [...]" (PRECIOSO; PEDROSO, 2013).

Conforme Maor (2006 apud Ramos, 2015), até a época de Euler, a função exponencial era considerada simplesmente como o inverso da função logarítmica. Euler fez uma nova interpretação ao log na base e, semelhante ao que ele especificou na função $f(x) = e^x$. Ele ajustou as duas funções em uma base igual, dando-lhes definições de maneira independente e comparativa, da seguinte forma:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad \ln x = \lim_{n \to \infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$$

algo que certamente foi definido com a interpretação via sequências.

Ainda no âmbito de Sequência e Séries, Euler desenvolveu vários raciocínios muito importantes envolvendo séries, como por exemplo, as séries seguintes:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, (n \in \mathbb{N}^*)$$

A partir das quais, ao fazer varias manipulações algébricas ele concluiu a seguinte igualdade $e^{ix} = \cos(x) + i.\sin(x)$. Esta igualdade teve importante contribuição para a teoria dos números irracionais assim como dos números transcendentes, pois foi a partir dela que o próprio Euler provou a relação $e^{i\pi} + 1 = 0$. Uma relação incrível que combina importantes números da matemática $(\pi, e, i, 1)$, a qual contribuiu depois com a prova da transcendência de π, feita por Lindemann (SANTOS; NETO; SILVA, 2007) .

O que foi apresentado explica um pouco sobre a abordagem do número e nos trabalhos de Euler. Mas outro, e não menos importante, estudo feito por ele foi a própria prova da irracionalidade de e. Essa prova, embora pouco elegante, está ligada ao assunto de Frações Contínuas, dentre outros assuntos.

Para entender a abordagem de Euler para encontrar tal prova, consideremos o seguinte fato: a representação numérica de uma fração contínua infinita é sempre de um número irracional. Portanto basta demonstrar que uma fração contínua de um número é infinita para provar que ele é irracional (MOREIRA, 2011). A partir deste entendimento segue adiante uma explicação superficial sobre como Euler aborda a prova da irracionalidade de e.

Conforme Sandifer (2006), no livro *Introductio in na alysin infinitorum* de Euler tem-se, por exemplo, o número $\frac{e-1}{2}$ cuja prova de sua irracionalidade é tratado com a observação do seguinte fato:

$$\frac{e-1}{2} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + etc}}}}}$$
$$\vdots$$

A partir desse exemplo ele percebeu que os denominadores (0, 1, 6, 10, 14, 18, ...) formam uma sequência aritmética a partir do 6. Sendo deduzido que tal construção iria continuar indefinidamente e, desse modo, caracterizando $\frac{e-1}{2}$ como número irracional e, por consequência o e também. Mas também o próprio e foi tratado de modo semelhante:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + etc}}}}}}}}}$$
$$\vdots$$

- Transcendência de e

O número e se estabeleceu com maior ênfase nos estudos de Euler, já que foi ele que provou a irracionalidade de e, mas a prova de sua transcendência foi feita por Hermite em 1873.

Charles Hermite (1822-1901) foi um matemático francês que nasceu em Dieuze, em 24 de dezembro de 1822. Em sua trajetória no campo científico, ele desenvolveu diversos trabalhos que contribuíram para desenvolvimento da ciência, não só no ramo da matemática, mas também nas teorias físicas originarias da primeira metade do século XX (FURTADO, 1996).

Hermite desenvolveu estudos sobre teoria dos números transcendentes, o qual foi apontado pelos historiadores como o principal trabalho dele. Em 1873, esses estudos o direcionaram a provar a transcendência do número e, quando ele estava trabalhando com funções contínuas algébricas (FURTADO, 1996).

O método de Hermite para provar a transcendência do e foi muito significante na área da matemática em sua época devido à grande dificuldade de se mostrar que um número é transcendente (FURTADO, 1996). Seu método foi estendido por Lindemann em 1882, para demonstrar a transcendência de e^x, sempre que x for algébrico não nulo, sendo que esta conclusão repercutiu posteriormente na prova da transcendência de π (LEFETÁ; SILVA; LELIS, 2016).

Ferdinand von Lindemann (1852-1939) foi um matemático que provou que π é irracional transcendente. Para isso, ele considerou dois fatos já demonstrados, o de que o número irracional e é transcendente e que $e^{i\pi} + 1 = 0$ (Identidade de Euler) (LUBECK K.; LUBECK M., 2010).

Lindemann usou o seguinte raciocínio: $e^{i\pi}$ é algébrico, pois -1, obviamente, o é, já que $e^{i\pi} + 1 = 0$ e, com isso, $e^{i\pi} = -1$. Portanto $i\pi$ só pode ser transcendente, pois e elevado a um número algébrico continuaria a ser transcendente. Se $i\pi$ é transcendente, sendo i algébrico, por ser solução da equação $x^2 + 1 = 0$, então π só pode ser transcendente (GARBI, 1997).

Nota-se a partir do que foi apresentado anteriormente que inicialmente a prova da transcendência de π dependeu de conhecimentos muito importantes ligados ao próprio Número de Euler, os quais são $e^{i\pi} + 1 = 0$ e a transcendência de e^x, com x algébrico não nulo, realçando mais ainda os impactos notáveis do e no desenvolvimento histórico da matemática.

3.1.7. Número Φ

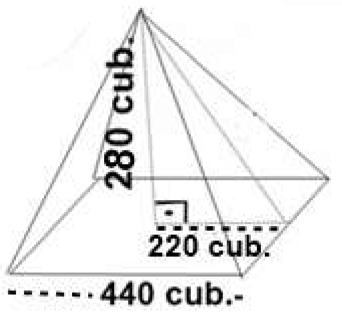
Outro número irracional muito famoso durante a história é o número 1,618033989..., assim como já foi citado, ele é comumente simbolizado pela letra grega Φ (phi). Ele recebe outros nomes como proporção áurea, número de ouro, número divino, dentre outros. Muitos acreditavam que o Φ é um número místico que está ligado a ideia de perfeição (SOUSA; SOUZA; MONTE, 2015).

Os gregos e os egípcios sempre buscavam uma proporção ideal em suas artes e construções, algo que resultou no desenvolvimento do que se conhece hoje por retângulo de ouro, o qual, possui uma relação entre o comprimento e a largura, onde a razão entre eles é de aproximadamente 1,618. O papiro de Rhind ou Ahmes (egípcio) datado de cerca de 1650 a.C. é um exemplo da proporção áurea na antiguidade medindo 5,5 metros de comprimento por 0,32 de largura, traz em suas inscrições referências a uma "razão sagrada" (SOUSA; SOUZA; MONTE, 2015).

De acordo com Sousa, Souza e Monte (2015), as aplicações do número de ouro são muitas, ele está presente em flores, nas plantas, em triângulos e retângulos, na anatomia humana, além de serem aplicados em inúmeras construções e em obras de arte. Assim, percebe-se que ele está presente em muitas áreas, algumas vezes é até utilizado por nós de maneira intuitiva. Até hoje se desconhecem todos os seus mistérios, surgindo dessa maneira, a característica de ser um número divino.

Uma das construções mais famosas, cujas mensurações tem relação com o Φ é a Pirâmide de Quéops construída entre 2551 e 2528 a.C. pelos egípcios apresenta uma relação matemática peculiar. Após ser construída, sua altura media aproximadamente 280 cúbitos e o lado da sua base quadrada 440 cúbitos (EVES, 2011). Consequentemente, a apótema da base é aproximadamente 220 cúbitos.

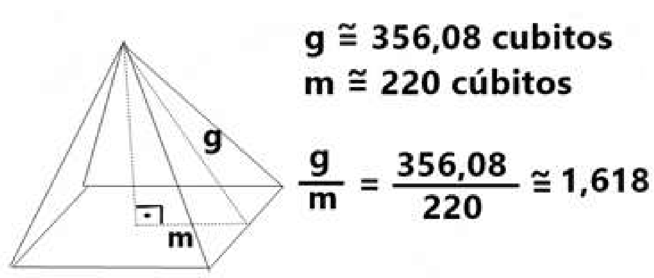
Figura 14 – Estrutura da Pirâmide de Quéops



Fonte: Queiroz (2007).

Diante disso, ao aplicar o teorema de Pitágoras para calcular a medida do apótema da pirâmide, obtemos aproximadamente 356,08 cubitos. Tomando esse valor como g e a apótema da base (220 cubitos) como m, percebe-se que a razão entre elas equivale a aproximadamente 1,618, o qual representa uma aproximação para Φ (QUEIROZ, 2007). A imagem a seguir ilustra essa relação:

Figura 15 – Surgimento de uma aproximação de Φ na pirâmide de Quéops



Fonte: Queiroz (2007)

Assim, percebe-se nas construções dos antigos egípcios a presença do número Φ. Entretanto uma outra civilização que se destacou na utilização desse número foram os gregos. O Partenon, por exemplo, que é um templo grego que foi construído por volta de 447 a 433 a.C., apresenta relações nas medidas de sua estrutura que tem relação com o Φ (SOUZA, 2013).

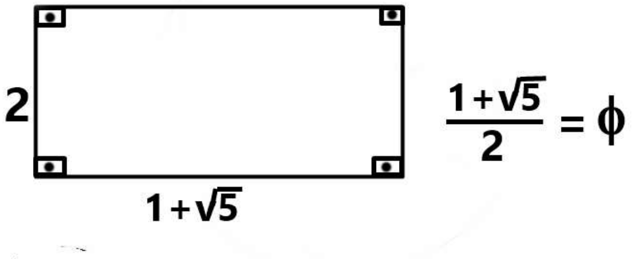
Figura 16 - Partenon

Fonte: Curran (1957).

A relação entre essa obra e o número em questão está ligada a uma definição muito importante que envolve a geometria, que é a definição de retângulo de ouro, que forma simplificada pode ser entendida como: todo retângulo que obedecer à relação, onde a razão entre a medida do seu comprimento pela medida de sua largura resultar em Φ (≅1,618), sendo que os retângulos que atendem essa relação são aqueles que se retirarmos um quadrado, o restante será um retângulo semelhante ao original (LEOPOLDINO, 2016).

Um exemplo desse tipo de figura geométrica é o retângulo de comprimento medindo 1+$\sqrt{5}$ u.c. e largura medindo 2 u.c., onde a razão entre essas medidas, nessa mesma ordem, equivale ao Φ (≅1,618), conforme ilustra a figura seguinte.

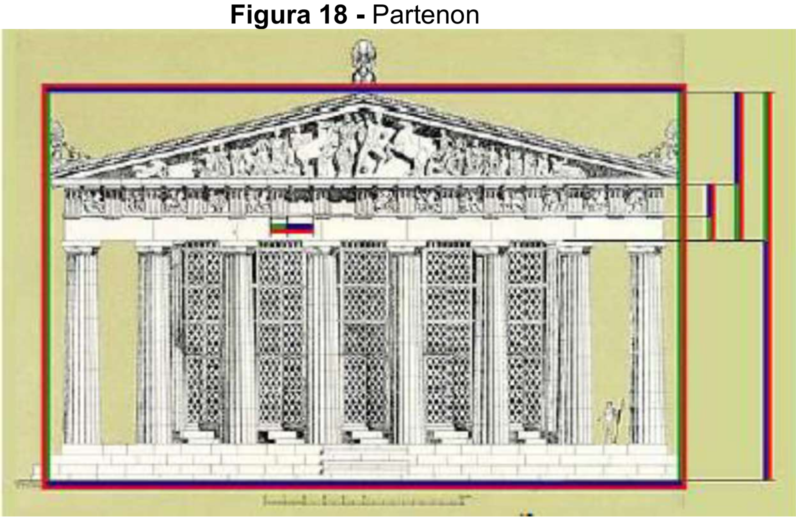
Figura 17 – Exemplo de Retângulo Áureo



Fonte: Autor (2021).

A partir dessa noção, é possível perceber que o Partenon é composto de vários retângulos de ouro (SOUZA, 2013). A imagem a seguir indica alguns retângulos desse tipo, que se apresentam no Partenon.

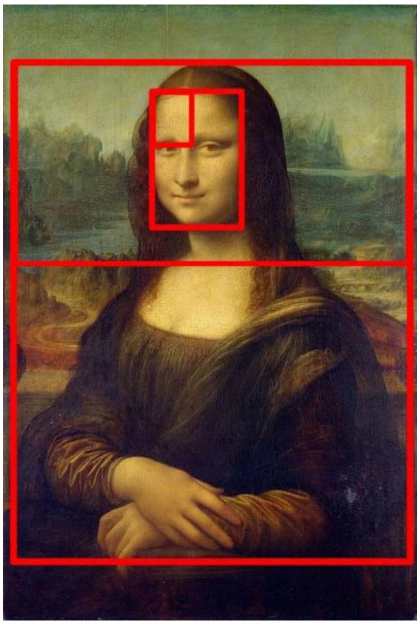
Figura 18 - Partenon



Fonte: Câmara e Rodrigues (2008).

Muitos pintores do renascimento, na época do século XV, se inspiraram na Antiguidade Clássica e, com isso, suas obras destacavam o corpo humano em esculturas e pinturas. Muitos deles uniam a proporção áurea e a anatomia do corpo humano, algo que se pode perceber na pintura da Mona Lisa de Leonardo da Vinci, o qual foi apresentada a baixo.

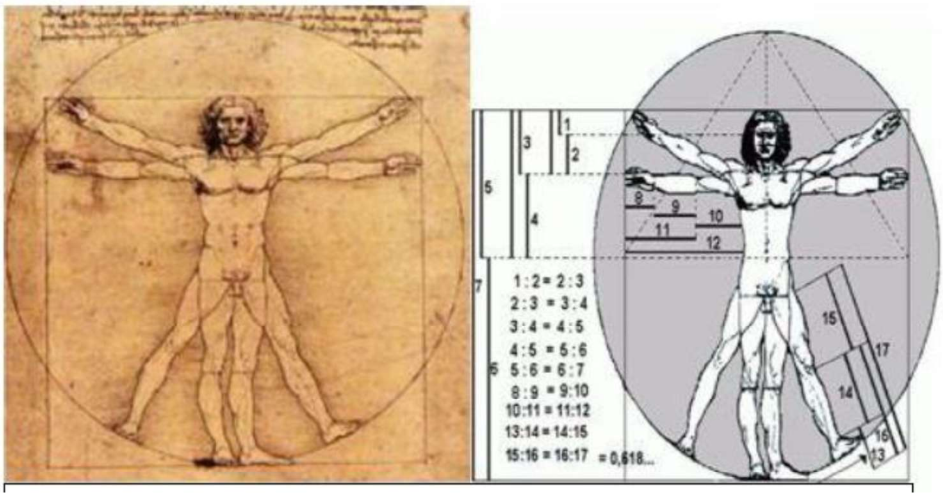
Figura 19 – Mona Lisa de Leonardo da Vinci



Fonte: Câmara e Rodrigues (2008).

No quadro que apresenta a pintura Mona Lisa é possível encontrar várias mensurações que se encaixam dentro de retângulos de ouro, do alto da cabeça até o final do pescoço, do topo da cabeça até as mãos, no rosto e outros (SOUSA; SOUZA; MONTE, 2015). Além da Mona Lisa, uma outra pintura que apresenta implicitamente o número Φ é “O Homem Vitruviano” também feita por Leonardo da Vinci, e que se encontra na figura a seguir.

Figura 20 – O Homem Vitruviano de Leonardo da Vinci

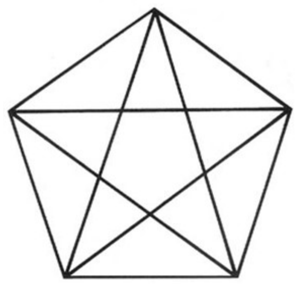


Fonte: Sousa, Souza e Monte (2015).

Essa pintura representa o corpo humano inserido na forma ideal do círculo e nas perfeitas proporções do quadrado, ou seja, possui proporção e simetria aplicadas à concepção da beleza humana (CÂMARA; RODRIGUES, 2008). A ideia passada na imagem anterior está ligada a uma visão estética onde a beleza do corpo aumenta quando se obtém valores próximos de Φ quando se realizam razões entre: a medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax; a altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão, e muitas outras razões.

Uma figura que se relaciona com o Φ é o pentagrama. O pentagrama é uma figura geométrica com formato de uma estrela que pode surgir dentro de um pentágono regular, conforme a figura seguinte.

Figura 21 - Pentagrama



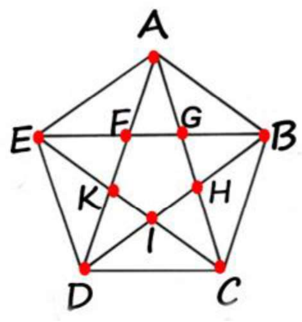
Fonte: Queiroz (2007).

Conforme Câmara e Rodrigues (2008) o pentagrama é um dos símbolos mais antigos da humanidade, ele foi muito usado pelos pitagóricos para se identificar em suas seitas que muitas vezes eram secretas. Para eles, trazia o pentagrama tinha o significado de “boa saúde” e também considerado como símbolo na astrologia.

Segundo Queiroz (2007), o último sólido convexo regular descoberto pelos pitagóricos foi o dodecaedro, o qual tem faces pentagonais. Isso pode ter sido a motivação que justificou o fato dos pitagóricos reverenciarem o pentágono regular, bem como o pentagrama e o número Φ que dele pode surgir.

Supondo um pentagrama ABCDE, o qual surge de um pentágono regular ABCDE, tem os seus pontos A, B, C, D e E correspondentes aos vértices desse mesmo pentágono, e tem os pontos F, G, H, I e K internos a esse pentágono.

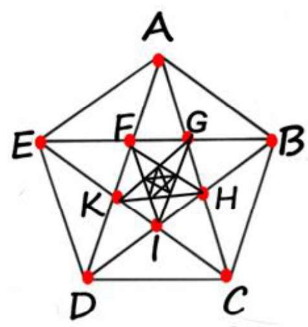
Figura 22 – Vértices do Pentagrama



Fonte: Queiroz (2007).

Diante disso, é possível afirmar que $\frac{\overline{AD}}{\overline{DF}}$ = Φ, $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$ = Φ, $\frac{\overline{EB}}{\overline{BF}}$ = Φ, $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$ = Φ, etc. Além disso, devido a parte mais interna do pentagrama ser um pentágono regular, é possível construir um outro pentagrama nessa figura, que também possui em sua parte interna um pentágono regular, e assim em diante.

Figura 23 – Pentagrama dentro de um pentagrama dentro de outro pentagrama



Fonte: Queiroz (2007).

Desse modo, podem surgir infinitas outras razões que resultam em Φ.

Além do pentagrama, uma outra compreensão matemática em que surge o número Φ é na Sequência de Fibonacci. A sequência de Fibonacci.

Fibonacci, cujo nome era Leonardo de Pisa, foi um matemático que nasceu em Pisa na Toscânia por volta de 1170. Em um de seus livros, chamado "Liber Abaci" de 1202, ele introduziu o uso dos numerais indo-arábicos, voltados para a vida comercial. Outra compreensão muito importante que ele também apresentou nesse livro foi uma sucessão numérica que herdou o nome sequência de Fibonacci, na qual cada termo, exceto o primeiro, resulta da adição dos dois termos anteriores originando assim os números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., daí segue em diante, (CÂMARA; RODRIGUES, 2008).

A sequência de Fibonacci possui muitas características e propriedades, dentre elas, conforme Queiroz (2007), existe uma relação com o número Φ muito intrigante que pode ser descrita como: Se tomarmos as razões de cada termo pelo seu antecessor obteremos outra sequência numérica que converge para Φ. Tem-se a seguir a construção dessa sequência:

1/1=1, 2/1=2, 3/2=1,5, 5/3=1,666...8/5=1,6, 13/8=1,625, 21/13=1,6153846..., 34/21=1,6190476..., 55/34=1,617647..., 89/55=1,61818...144/89= 1,6179775..., 233/144=1,6180555..., 6765/4181=1,6180339..., 10946/6765 = 1,6180339...

O que se percebe sobre a sequência 1; 2; 1,5; 1,666...; 1,6; 1,625; 1,6153846...; 1,6180339...; 1,6180339... é que cada vez mais seus termos vão se aproximando de Φ (≅1,618).

Esta subseção apresentou aspectos históricos do conhecimento sobre números irracionais, perpassando pela sua concepção intuitiva na Grécia antiga, pela sua formalização com os trabalhos de Dedekind, Méray e outros matemáticos, pela concepção de números algébricos e transcendentes e finalizando com alguns números irracionais famosos como o π, Φ e e. Na próxima subseção foi desenvolvida uma continuidade a respeito da conceituação e caracterização dos números irracionais no seu aspecto formalizado, agora sem viés histórico.

3.2. Fundamentação Matemática

Nesta subseção é apresentado o conhecimento formalizado sobre o conhecimento de números irracionais e o desenvolvimento teórico que estrutura sua totalidade. Este conhecimento foi apresentado para se compreender os números irracionais sobre moldes formais e, desse modo, entender o que se precisa alcançar de conhecimento na Sequência Didática que foi apresentada na seção 4.

3.2.1. Noções Preliminares de Números Irracionais

Essa subseção apresenta algumas compreensões introdutórias acerca do que foi apresentado na subseção posterior. Nela se encontra alguns entendimentos conceituais de números irracionais e base numérica decimal.

- Base Numérica Decimal

Com base em Sant' Anna (2013), Miyaschita (2002) e Barros (2019) a base numérica, com a qual estrutura o sistema de numeração atualmente baseia-se de numeração decimal, a qual, trata da base 10. O numeral 327, por exemplo, pode ser representado por um número que possui 7 unidades, 2 dezenas e 3 centenas, assim, pode ser escrito como $4\cdot10^2 + 5\cdot10 + 2$, que trata da decomposição de ordens do 452. De forma genérica, então, pode-se dizer que um qualquer número natural de n algarismos pode ser escrito como $b_{n-1}... b_2b_1b_0$, cuja expansão decimal, isto é, decomposição de ordens é $b_{n-1}\cdot10^{n-1} + \ldots + b_2\cdot10^2 + b_1\cdot10 + b_0$.

Segundo Corrêa (2008), quando se efetua as divisões expressas em um racional na forma fracionária, encontra-se outra maneira de representar números racionais, chamada de "representação decimal". A partir disso, o sistema de representação decimal posicional permite expressar os números racionais usando somente dez inteiros os quais são chamados dígitos, ou seja, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. A composição de racionais por meio de dígitos, ou algarismos, na verdade, ocorre para todos os números reais positivos. Assim, se a_N, a_{N-1},..., a_0, a_{-1},... são algarismos quaisquer desse conjunto, um número real positivo é representado no sistema decimal com o formato $a_na_{n-1}...a_0,\ a_{-1}\ a_{-2}...$ onde $a_n \geq 0$. Nesta ultima estrutura, à esquerda da vírgula temos sempre um número finito de algarismos, porém à direita podemos ter uma infinidade de algarismos. Um exemplo disso são os números 2324,1231; 10,5; 0,1; etc.

A partir do que foi apresentado anteriormente sobre decomposição decimal, a expansão decimal de um número racional $a_na_{n-1}...a_0,\ a_{-1}\ a_{-2}...$ será $a_n .10^n + a_{n-1} . 10^{n-1} + ...+ a_0. 10^0, a_{-1}.10^{-1} + a_{-2}.10^{-2} + ...$ seja ele exato (quantidade finita de dígitos) ou não exato (quantidade infinita de dígitos). Por exemplo, o racional exato 6142,5231 representa o número obtido como resultado da expressão

$$\mathbf{6 . 10^4 + 1. 10^3 + 4. 10^2 + 2. 10^1 + 5. 10^{-1} + 2 . 10^{-2} + 3. 10^{-3} + 1. 10^{-4}} \qquad (2)$$

Quando o racional $a_na_{n-1}...a_0,\ a_{-1}\ a_{-2}...$ é não exato ele assume uma característica peculiar, a repetição periódica e infinita de alguns de seus dígitos, podendo ser chamado de dízima periódica, digamos

$a_m \dots a_1 a_0, \overline{b_1 b_2 \dots b_n}$, onde a parte $b_1 b_2 \dots b_n$ se repete infinitamente. Nesse caso é impossível escrever toda a expansão decimal, mas é importante entender que ao ter a expansão decimal:

$$a_m .10^m + \dots + a_1 . 10^1 + a_0 . 10^0, b_1.10^{-1} + b_2.10^{-2} + \dots b_n 10^{-n} + b_1.10^{-n-1} + b_2.10^{-n-2} + \dots b_n.10^{-2n} \dots$$

podemos afirmar que os dígitos $b_1, b_2, \dots$ e $b_n$vão se repetindo infinitamente a cada n dígitos, sendo essa repetição de periodicidade da dízima ou simplesmente dizer que $b_1 b_2 \dots b_n$ repete-se periodicamente.

Conforme Corrêa (2008), todo número racional, possui uma representação decimal que é finita ou é uma dízima periódica. A recíproca desse fato também é válida: todo número com representação decimal finita ou representação de dízima periódica pode ser representado por uma fração e, portanto, é um número racional. Portanto, números na forma decimal finita são números racionais, entretanto, caso não estejam, não podemos executar a expansão decimal acima com todos os seus dígitos.

Diante da compreensão apresentada sobre base decimal, pode-se estabelecer uma maior compreensão sobre os racionais, sejam eles exatos ou não exatos. Quanto aos racionais que são não exatos, os quais são as dízimas periódicas, são mais bem explicados no próximo tópico.

- Dízimas Periódicas

O conjunto dos números racionais é composto de decimais exatos e de decimais não exatos, assim como foi referido anteriormente. Quanto aos racionais que são decimais não exatos, costumam ser chamados de dízimas periódicas, pois possuem uma característica muito peculiar, a repetição periódica infinita.

Para entender melhor sobre a origem desse conceito vejamos sua etimologia. Referente à etimologia da palavra dízima, no site Origem da Palavra, o autor Soares (2013) descreve que "Dízimo" vem do latim "*decimus*", que significa a décima parte de *Decem* (dez). A partir dessa denominação vem o verbo dizimar originária da civilização romana, onde havia épocas do exército romano, quando uma legião era considerada culpada de covardia ou algum outro ato considerado reprovável, ela era “dizimada”, o qual significava que um em cada dez soldados era escolhido para morrer.

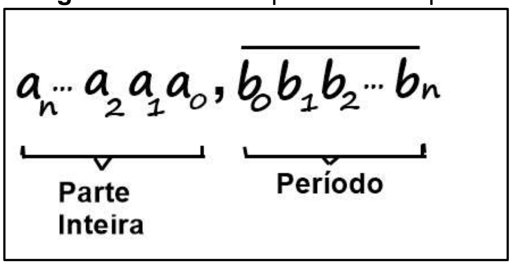
Conforme o site Infopédia (2003-2020), a palavra Dízima refere-se originalmente a um imposto instituído pelos romanos que era cobrado sobre a décima parte do valor dos bens de importação ou exportação. Para essa mesma fonte, esse termo também foi usado pelos portugueses no reinado de D. João I que determinou em 1410 a taxação de produtos da alfândega do Porto por meio do imposto do ‘dízimo’.

Agora referente ao termo Dízima Periódica, no campo da matemática, ele descreve racionais não exatos que na forma decimal possuem repetição periódica infinita como 123,5444...; 0,313131...; 23,63512512512..., os quais podem ser resumidos ao formato $123{,}5\overline{4}$; $0{,}\overline{31}$ e $23{,}63\overline{512}$; onde há um traço na parte superior no número que se repete, para indicar o dígito que se repete periodicamente com um traço na parte superior.

Conforme Matos (2017) as dízimas periódicas podem ser classificadas em dois tipos:

Dizima periódica simples, quando é formada apenas pela parte inteira (número antes da vírgula) e o período (número após a vírgula que se repete periodicamente).

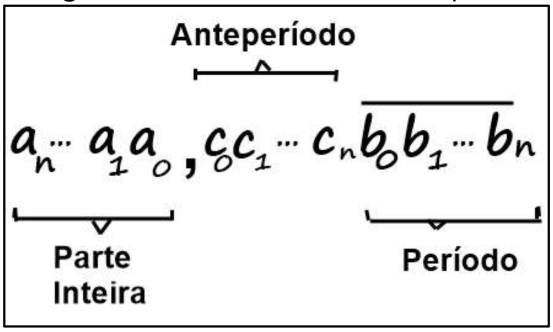
Figura 24 – Dízima periódica simples



Fonte: Matos (2017).

Dízima periódica composta se possui uma parte numérica que não se repete entre a parte inteira e o período, sendo esta parte conhecida como antiperíodo.

Figura 25 – Dízima Periódica Composta



Fonte: Matos (2017).

Tem-se a seguir exemplos:

a) $0,\overline{6}$ é uma dízima simples, com parte inteira 0 e período 6.

b) $0,23\overline{6}$ é uma dízima composta com parte inteira 0, antiperíodo 23 e período 6 que se repete infinitamente.

Além de serem decimais infinitos e periódicos, as dízimas periódicas também são números racionais, devido poderem ser escritas na forma de fração, sendo essa fração chamada de fração geratriz da dízima periódica (CRUZ, SOARES, 2011). Para entender melhor sobre isso, deve-se entender que as frações que podem gerar dízimas periódicas possuem uma característica específica, sendo elas irredutíveis, seus denominadores na forma fatorada não são formados por um conjunto de 2, ou de 5 ou por 2 e 5 simultaneamente. A proposição estrutura melhor essa compreensão.

Proposição: Toda fração (irredutível) cujo denominador não é formado por um conjunto de fatores de 2 e/ou 5 vai formar dízima periódica.

Demonstração: Considere $p < q$, números primos entre si, logo $\frac{p}{q}$ = $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \overline{b_1 b_2 \dots b_j}$, onde $a_1 a_2 a_3 \dots a_k$ é o antiperíodo que pertence a parte finita do decimal e $\overline{b_1 b_2 \dots b_j}$ é o período que representa a parte infinita do decimal. Se multiplicarmos membro a membro por 10^k da igualdade anterior, obteremos a seguinte igualdade $10^k \frac{p}{q}$ = $a_1 a_2 a_3 \dots a_k, \overline{b_1 b_2 \dots b_j}$ que podemos escrever como

$$10^k \frac{p}{q} = a_1 a_2 a_3 \dots a_k + 0,\overline{b_1 b_2 \dots b_j}, \qquad (3)$$

No decimal periódico $0,\overline{b_1 b_2 \dots b_j}$, podemos fazer o seguinte desenvolvimento

$0,\overline{b_1 b_2 \dots b_j} = \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j} + \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^{2j}} + \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^{3j}} + \cdots = \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j}\left(1 + \frac{1}{10^j} + \frac{1}{10^{2j}} + \cdots\right) =$ $\frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j}\left(1 + \frac{1}{10^j} + \frac{1}{10^{2j}} + \cdots\right)$, onde $\left(1 + \frac{1}{10^j} + \frac{1}{10^{2j}} + \cdots\right)$ representa uma série de termos de uma sequência geométrica (PG) infinita, logo podemos calcular essa soma da seguinte forma $\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10^j}}\right)$, assim $\frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10^j}}\right) =$ $\frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j}\left(\frac{10^j}{10^j - 1}\right) = \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j - 1}$. Agora substituindo na igualdade (3), teremos

$$10^k \frac{p}{q} = a_1 a_2 a_3 \dots a_k + \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j - 1}$$

Multiplicando os dois membros por $10^j - 1$ teremos

$$(10^j - 1)10^k \frac{p}{q} = (10^j - 1)(a_1 a_2 a_3 \dots a_k) + b_1 b_2 \dots b_j$$

Multiplicando os dois membros por q teremos

$$(10^j - 1)10^k p = q\left[(10^j - 1)(a_1 a_2 a_3 \dots a_k) + b_1 b_2 \dots b_j\right] \quad (4)$$

devido $b_1 b_2 \dots b_j$ ser o período da parte infinita $\overline{b_1 b_2 \dots b_j}$, então se essa parte infinita não existisse então teríamos a igualdade (5) ao invés da (4).

$$10^k p = q(a_1 a_2 a_3 \dots a_k) \quad (5)$$

daí poderíamos afirmar que q divide 10^k, ou que q é divisor de 10^k, logo q possui em sua fatoração potências de números primos comuns à 10^k. Como 10^k tem decomposição $(2.5)^k$ ou $2^k 5^k$, então q deve ser uma potência de 2, ou uma potência de 5, ou um produto de potências de 2 e 5, para poder dividir 10^k. Por outro lado se a parte infinita $\overline{b_1 b_2 \dots b_j}$ do decimal obtido por $\frac{p}{q}$, existisse a igualdade (4) seria válida ao invés de (5), e com isso q não dividiria 10^k.

Isso significa que a infinitude periódica de um decimal possui uma relação de equivalência sobre o fato de q possuir ou não potências de 2 e 5 ou 2 ou 5. Assim, se q realmente possuir somente estes fatores, o decimal obtido de $\frac{p}{q}$ será finito, caso não, o decimal obtido de $\frac{p}{q}$ será infinito e periódico (dízima periódica).

Exemplo:

A fração $\frac{1}{6}$ pode ser escrita como $\frac{1}{2.3}$ e possui representação decimal 0,1666...

A fração $\frac{4}{9}$ pode ser escrita como $\frac{4}{3.3}$ e possui representação decimal 0,444...

A fração $\frac{4}{30}$ pode ser escrita como $\frac{7}{2.5.3}$ e possui representação decimal 0,2333...

Uma observação sobre este fato é que se a dízima periódica simples $0,\overline{b_1 b_2 \dots b_j}$ devido não ter o antiperíodo $(a_1 a_2 a_3 \dots a_k)$, mencionado anteriormente, sobre os moldes da igualdade (1) direciona a igualdade onde $\frac{p}{q}$ = $0,\overline{b_1 b_2 \dots b_j}$ e de modo análogo ao desenvolvimento anterior, obteremos

$$\frac{p}{q} = \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j - 1} \qquad (6)$$

onde $b_1 b_2 \dots b_j$ e $10^j - 1$ são inteiros positivos.

A igualdade presente em (6) indica que qualquer dízima periódica $0,\overline{b_1 b_2 \dots b_j}$ com período $b_1 b_2 \dots b_j$ de j dígitos pode ser escrita como fração da seguinte maneira $\frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j - 1}$. Daí explica-se o método de escrever dízimas periódicas simples, onde o numerador é o período e o denominador é uma quantidade de 9's correspondente ao numero de dígitos do período, até porque $10^j - 1$ é um número no formato 99...99 com quantidade j de 9's.

Quando se tem dízimas periódicas compostas, ou seja, com k antiperíodos, digamos $0,00 \dots 0\overline{b_1 b_2 \dots b_j}$, é necessário multiplicar por 10^k para enxergar uma dízima periódica simples, assim a escrita na forma de fração correspondente é

$$\frac{b_1 b_2 \dots b_j}{(10^j - 1)10^k}$$

Quando a dízima periódica tiver dígitos diferentes de 0 compondo o antiperíodo e a parte inteira, por exemplo $c, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \overline{b_1 b_2 \dots b_j}$, é possível determinar também um método para determinar a fração correspondente. Para isso vamos decompor $c, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \overline{b_1 b_2 \dots b_j}$ para separa-lo a parte finita da parte infinita, assim teremos

$$c, a_1 a_2 a_3 \dots a_k + 0,0 \dots 0\overline{b_1 b_2 \dots b_j}$$

Após isso, pode-se converter os dois fatores para fração para depois somar essas frações, segue o desenvolvimento abaixo.

$$c, a_1 a_2 a_3 \dots a_k + 0,0 \dots 0\overline{b_1 b_2 \dots b_j}$$

$$\frac{c a_1 a_2 a_3 \dots a_k}{10^k} + \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{(10^j - 1)10^k}$$

$$\frac{(ca_1a_2a_3\ldots a_k)(10^j-1)+(b_1b_2\ldots b_j)}{(10^j-1)10^k}$$

$$\frac{(ca_1a_2a_3\ldots a_k)10^j-(ca_1a_2a_3\ldots a_k)+(b_1b_2\ldots b_j)}{(10^j-1)10^k}$$

$$\frac{(ca_1a_2a_3\ldots a_k)10^j+(b_1b_2\ldots b_j)-(ca_1a_2a_3\ldots a_k)}{(10^j-1)10^k}$$

$$\frac{(ca_1a_2a_3\ldots a_kb_1b_2\ldots b_j)-(ca_1a_2a_3\ldots a_k)}{(10^j-1)10^k}$$

desse modo, tem-se a seguinte igualdade

$$c,a_1a_2a_3\ldots a_k\overline{b_1b_2\ldots b_j}=\frac{(ca_1a_2a_3\ldots a_kb_1b_2\ldots b_j)-(ca_1a_2a_3\ldots a_k)}{(10^j-1)10^k} \quad (7)$$

Esta igualdade mostra a representação fracionária pera uma dízima periódica composta que possui parte inteira e antiperíodo não nulos, além de ser um importante método para se converter qualquer dízima periódica para a forma de fração. Tem-se a seguir um quadro descrevendo o que o numerador e denominador significam na igualdade (7).

Quadro 3 – Direcionamento à Fração Geratriz de qualquer Dízima Periódica

Representação	Descrição
$(ca_1a_2a_3\ldots a_kb_1b_2\ldots b_j)$- $(ca_1a_2a_3\ldots a_k)$	Parte inteira seguido de Antiperíodo e Período subtraído da Parte inteira seguida do Antiperíodo
$(10^j-1)10^k$	Números de 9's correspondente ao número elementos do Período seguido da quantidade de 0's correspondente ao número de dígitos do Antiperíodo
$\frac{(ca_1a_2a_3\ldots a_kb_1b_2\ldots b_j)-(ca_1a_2a_3\ldots a_k)}{(10^j-1)10^k}$	Fração geratriz da dízima periódica $c,a_1a_2a_3\ldots a_k\overline{b_1b_2\ldots b_j}$

Fonte: Cruz e Soares (2011).

Exemplos:

12,3444... = $\frac{1234-123}{90}=\frac{1111}{90}$

0,419232323... = $\frac{41923-419}{99000}=\frac{41504}{99000}$

34,555... = $\frac{345-34}{9}=\frac{311}{9}$

0,325325325... = $\frac{325-0}{999}=\frac{325}{999}$

Existem vários outros métodos para converter uma dízima periódica para fração, um desses métodos é o que se apresenta a seguir com a dízima periódica 0,333...

Consideremos $x = 0{,}333\ldots$ (I) se multiplicar os dois membros dessa igualdade teremos $10x = 3{,}333\ldots$ (II). Se subtrairmos (II) e (I) teremos:

$$10x - x = 3{,}333\ldots - 0{,}333\ldots \text{ (II) - (I)}$$

$$9x = 3$$

$$x = \frac{3}{9}$$

Portanto $0{,}333\ldots = \frac{3}{9}$. Este método de determinar uma fração que represente a dízima anterior foi possível aplicar em um decimal com casas decimais infinitas porque $3{,}333\ldots - 0{,}333\ldots$ resultou em um decimal finito. Um outro método seria perceber que sempre quando se tiver uma dizima periódica simples do tipo $0,\overline{b_1 b_2 \ldots b_n}$, basta escrever a fração onde o numerador é o próprio período e o denominador é uma quantidade de 9's igual a quantidade de dígitos do período $\frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{99\ldots 9}$. Assim, é possível perceber que a fração geratriz da dízima $0{,}333\ldots$ é $\frac{3}{9}$.

▪ Compreensões Conceituais de Número Irracional

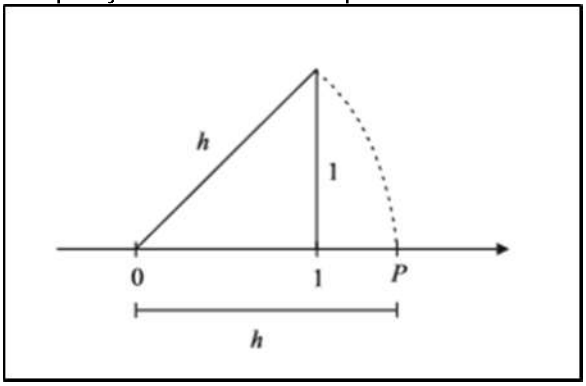
Este tópico busca conceituar número irracional, com base nos conhecimentos abordados anteriormente, e também em autores como Corrêa (2008), Mosca (2013) e Jesus (2017).

Assim como foi tratado anteriormente, em toda dízima periódica é possível determinar sua fração geratriz, basta conhecer seus elementos, ou seja, parte inteira; antiperíodo, se tiver, e período. Porém quando se tem decimais de casas decimais infinitas que não se repetem periodicamente (dízimas não periódicas), como 0,1234567..., é impossível aplicar quaisquer métodos para se determinar a fração correspondente. Os números que possuem essa qualidade (não poder ser escrito como fração) são conhecidos como números não racionais, ou simplesmente irracionais.

Um fato que deve ser enfatizado é que a cada número racional p/q corresponde um único ponto sobre a reta numérica. No entanto, sua recíproca não é verdadeira, ou seja, não é verdade que a cada ponto da reta esteja associado um número racional, pois existem aqueles que não possuem representação fracionária (irracionais). Isso já era conhecido na Grécia Antiga e, conforme já foi comentada, a descoberta desse fato teria causado grande impacto nas estruturas da Matemática Pitagórica.

Uma forma de perceber que existem números não racionais correspondentes a pontos da reta, isto é, números que não podem ser representados por uma fração de números inteiros com denominador não nulo. Consideremos a figura 26, na qual temos um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 1. Usando esse triângulo e um compasso, é fácil marcar na reta numérica um segmento cujo comprimento é representado por um número não-racional que é o conhecido $\sqrt{2}$.

Figura 26 – Transposição da medida da hipotenusa na reta racional.



Fonte: Corrêa (2008).

Suponhamos, por contradição, que o comprimento da hipotenusa desse triângulo seja um número racional p/q com p e q ≠ 0 números primos entre si, isto é, eles não possuem fatores comuns. Suponhamos p e q positivos. Usando o teorema de Pitágoras, obtém-se

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \quad \text{e daí} \quad p^2 = 2q^2.$$

Isso nos diz que o número p^2 é par e assim p é par, ou seja, p = 2k, para algum inteiro positivo k. Donde $4k^2 = 2q^2$. Logo $q^2 = 2k^2$ e então q^2 é par, e daí q é par. Portanto, p e q são pares. Sendo p e q supostos primos entre si eles não podem ser simultaneamente pares e isso é uma contradição. Assim, o número que mede a hipotenusa do triângulo representado na figura anterior, associado ao ponto P da reta, não é racional. Esse número é a raiz quadrada de 2, sendo indicada por $\sqrt{2}$.

O número que mede a hipotenusa do triângulo representado na figura anterior, associado ao ponto P da reta, não é racional. Esse número é a raiz quadrada de 2, sendo indicada por $\sqrt{2}$.

Isso mostra que existem outros números além dos racionais, pois nenhum racional atende a condição de ser raiz de 2, isto é, um número positivo cujo quadrado seja igual a 2. Eles são os chamados números irracionais. Existem outros números irracionais como, por exemplo, $\sqrt[3]{2}$. Esse é o número positivo x tal que $x^3 = 2$. Na verdade, pode-se provar que, se m e n forem números naturais e x^m = n não possuir soluções inteiras, então $\sqrt[m]{n}$ é irracional.

Quanto à representação decimal, deve-se observar que os números irracionais possuem representações decimais infinitas sem que haja repetição em sequência, como as dizimas periódicas. Por exemplo, números como 0,1213141516..., 2,112123123412345... são representações decimais de números irracionais, tendo em vista que não há repetição periódica e que possuem casas decimais infinitas, esta ideia foi simbolizada pela reticência (...) no final de cada número.

Em vista do fato de que nem todo ponto da reta representa um número racional, torna-se necessário construir um conjunto cujos elementos complete os pontos dessa reta e, desse modo, juntar-se, aos racionais para então estar em correspondência biunívoca com a reta.

Um fato já citado é que números irracionais tem infinitas casas decimais que não se repetem periodicamente. Entretanto é comum encontrar em muitos livros e artigos a representação de números irracionais indicando alguns dígitos desse número e após um determinado limite escrever uma reticência no final indicando que são infinitos números, entretanto este hábito gera controvérsias.

As controvérsias acerca da utilização da reticência na representação decimal de um número irracional acontecem porque esta pontuação é usada para indicar continuidade, que se queira omitir, de algo, portanto quando adicionada ao final de um número, como por exemplo 0,123..., traz a ideia de que este número tem outros dígitos omitidos, que em um determinado momento podem acabar ou não e também traz a ideia de que os dígitos 123 podem estar se repetindo periodicamente ou não.

Os vários sentidos que a reticência pode trazer para indicar as infinitas casas decimais sem repetição periódica de um número irracional torna inadequado o seu uso para tal representação. Assim, a representação de um número irracional em sua forma decimal fica limitada no campo das ideias ou a uma outra representação que sintetize a forma decimal de número irracional quando for possível, como por exemplo $\sqrt{2}$.

Diante da dificuldade referente a notação quanto ao uso inadequado da reticência para indicar a continuidade de um número irracional, no desenvolvimento deste trabalho foi utilizada algumas vezes a reticência precedida de alguma informação quanto a natureza do número no qual se use esta pontuação.

3.2.2. Números Irracionais

O entendimento de números irracionais perpassa por um estudo formal bastante profundo sobre o campo da álgebra e da aritmética. Esta subseção apresenta um estudo sobre estes números, com a finalidade de oferecer um entendimento maior sobre seu conceito. Para esta finalidade, alguns conhecimentos da subseção anterior foram retomados e tratados com maior profundidade. Tomou-se como base Oliveira e Gomes (2009), Niven (1984) e Santos (2017).

Como já foi dito anteriormente, ao juntarmos o conjunto dos números racionais com o dos irracionais obtemos o conjunto dos números reais. Desse modo, pode-se entender o conjunto dos números reais como aquele que contém todos os decimais, sejam eles de quantidade finita ou infinita de dígitos. Tem-se a seguir a definição de racional.

Definição 1: um número real é dito racional se pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Simbolicamente temos como notação do conjunto dos números racionais como: $\mathbb{Q} = \{ x \in \mathbb{Z}; x = \frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*\}$.

Diante da definição 1, iremos considerar a conversão de frações ordinárias em decimais, visando entender quando a representação decimal resulta ser finita ou periódica. Nesse entendimento, tem-se a conversão de uma fração ordinária em número decimal se faz dividindo o numerador pelo denominador. Assim, podemos estabelecer a seguinte proposição.

Proposição 1: Toda fração irredutível representa um decimal finito ou periódico.

Demonstração: Seja $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível. Pelo algoritmo de Euclides existem a_0 e $r_0 \in \mathbb{Z}$, tais que $a = ba_0 + r_0 \Longrightarrow \frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_0}{b}$, com $0 \leq r_0 < b$.

Podemos expandir essa divisão da seguinte forma:

$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{10}\left(\frac{10r_0}{b}\right) = a_0 + \frac{1}{10}\left(a_1 + \frac{r_1}{b}\right) = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{r_1}{b}$, com $10r_0 = br_1 + r_1$ e $0 \leq r_1 < b$. Com o mesmo raciocínio teremos, $\frac{a}{b} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10^2}\left(\frac{10r_1}{b}\right) = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10^2}\left(a_2 + \frac{r_2}{b}\right) = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{r_2}{b}$, com $10r_1 = ba_2 + r_2$ e $0 \leq r_2 < b$. Continuando com o mesmo raciocínio, encontraremos r_3, r_4, ..., r_i, com $0 \leq r_i < b$, para todo inteiro positivo i. Sabe-se que os possíveis restos da divisão por b só pode ser 0, 1, 2,..., $b - 1$. Diante disso, teremos duas possibilidades:

i) Se o r_i for 0, para algum inteiro positivo i.

Neste caso a expansão de $\frac{a}{b}$ será

$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^i} \cdot \frac{r_i}{b} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_i}{10^i} = a_0, a_1 a_2 \ldots a_i$ que representa um decimal finito.

ii) Se r_i for diferente de 0, para qualquer inteiro positivo i.

Neste caso, como as classes de restos módulo b são finitas, em algum momento teremos $j > i$ tal que $r_{i+j} = r_i$. Desse modo, a partir do momento em que isso ocorrer, os algarismos do quociente voltarão a se repetir. Dessa forma, teremos: $\frac{a}{b} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^i} \cdot \frac{r_i}{b} + \cdots + \frac{a_j}{10^j} + \frac{1}{10^j} \cdot \frac{r_j}{b}$ com $a_{i+1} = a_{j+1}$, $a_{i+2} = a_{j+2}$,... que resultará em $\frac{a}{b} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_i}{10^i} + \frac{a_{i+1}}{10^{i+1}} + \cdots + \frac{a_j}{10^j} = a_0, a_1 a_2 \ldots a_i \overline{a_{i+1} a_{i+2} \ldots a_j}$ o qual representará um decimal periódico. Sendo a barra traçada na área superior indicando os números que se repetem infinitamente.

Exemplos: $\frac{1}{2}$ = 0,5 (finito); $\frac{2}{3}$ = 0,666...(periódico); $\frac{3}{4}$ = 0,75 (finito); $\frac{4}{9}$ = 0,444...(periódico).

Proposição 2: Todo decimal finito ou periódico é racional.

Demonstração: Se x é decimal finito, então x = $a_0, a_1 a_2 \dots a_r$, com 0 $\leq$ $a_i \leq 9(i = 1,\ 2, \dots r)$ e $a_0 \in \mathbb{Z}^*$.

Multiplicando ambos os membros da igualdade por 10^r, obtemos:

$$10^r x = a_0 a_1 a_2 \dots a_r \implies x = \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_r}{10} \text{ que é racional.}$$

Considerando x um número decimal periódico, temos que $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_r \overline{b_1 b_2 \dots b_s}$ com 0 $\leq$ $a_i \leq 9$; 0 $\leq$ $b_j \leq 9$; i = 1, 2, 3, ... r; j = 1, 2, 3, ... s e $a_0 \in \mathbb{Z}^*$. Multiplicando os dois membros da igualdade por 10^r e 10^{r+1} respectivamente, obtemos:

m: $10^r x = a_0, a_1 a_2 \dots a_r \overline{b_1 b_2 \dots b_s}$.

n: $10^{r+s} x = a_0, a_1 a_2 \dots a_r b_1 b_2 \dots b_s \overline{b_1 b_2 \dots b_s}$.

Considerando $a = a_0 a_1 a_2 \dots a_r$ e $b = a_0, a_1 a_2 \dots a_r b_1 b_2 \dots b_s$ e subtrairmos m de n, obtemos: $10^{r+s}x - 10^r x$ = $b - a \implies x = \frac{b-a}{10^{r+s} - 10^r}$ que é racional.

Exemplos: 0,5 = $\frac{1}{2}$; 25,5 = $\frac{255}{10}$; 0,333... = $\frac{1}{3}$; etc.

Uma característica importante das frações irredutíveis se refere à decomposição do denominador em fatores primos, como veremos agora.

Proposição 3: Se uma fração irredutível contém somente fatores primos 2 e/ou 5 no denominador, então representará um decimal finito.

Demonstração: seja $x = \frac{a}{b}$ uma fração irredutível com a decomposição do denominador somente em fatores primos 2 e/ou 5. Então $\frac{a}{b}$ será da forma $\frac{a}{2^r.5^s}$ com r e s pertencentes a $\mathbb{Z}^*$.

Se r = s, então $\frac{a}{2^r.5^r}$ = $\frac{a}{10^r}$ e x é decimal finito. Se $r \neq s$, tomemos n = min(r, s) e m = max(r, s) e, assim podemos introduzir fatores 2 e/ou 5 no denominador em número suficiente para torna-lo potência de 10 e, dessa forma, teremos $x = \frac{a}{2^r.5^s}$ = $\frac{aq^{|r-s|}}{10^m}$, com q = 2 se n = r ou q = 5 se $n = s$, e dessa forma teremos novamente que x é decimal finito.

Exemplos:

$\frac{1}{2}$ corresponde ao decimal finito 0,5;

$\frac{20}{4}$ que representa $\frac{20}{2^2}$ corresponde ao decimal finito 5,0;

$\frac{4}{5}$ corresponde ao decimal finito 0,8;

$\frac{30}{25}$ que representa $\frac{30}{5^2}$ corresponde ao decimal finito 1,2;

$\frac{1}{20}$ que representa $\frac{1}{2^2 5}$ corresponde ao decimal finito 0,05;

A definição a seguir irá tratar de decimais de representação decimal que não é finita e sem repetição periódica. Os números com essa característica são chamados de não racionais ou irracionais.

Definição 2: Todo número decimal que não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ é irracional.

A característica decimal dos números irracionais é diferente dos racionais, pois embora tenham uma quantidade infinita de casas decimais como as dizimas periódicas, eles não possuem período, isto é, casas decimais que se repetem infinitamente de forma periódica. Com isso, pode-se notar que os números irracionais são decimais não periódicos e não exatos.

Existem vários exemplos de números irracionais. Para classificar um número real como irracional, algumas vezes é importante provar que não são racionais, ou seja, provar sua irracionalidade, para, então, afirmar que são irracionais. Tem-se a seguir a demonstração da irracionalidade de alguns números, dentre eles o número $\sqrt{2}$, que possui um vínculo muito importante na história do desenvolvimento dos números irracionais, que já foi citado.

A irracionalidade de $\sqrt{2}$

Suponhamos, por contradição, que $\sqrt{2}$ seja um número racional, então $\sqrt{2}$ = p/q com p e q diferentes de zero e sendo eles números primos entre si, isto é, eles não possuem fatores comuns. Suponhamos p e q positivos. Se $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, então $(\frac{p}{q})^2 = (\sqrt{2})^2$, o qual equivale a $\frac{p^2}{q^2} = 2$ e com isso $p^2 = 2q^2$, diante disso o número p^2 é par e, com isso, p é par, logo p = 2k, para algum inteiro positivo k. Donde $p^2 = 2q^2$ equivale a $4k^2 = 2q^2$, logo $q^2 = 2k^2$ e então q^2 é par, e daí q é par. Portanto, p e q são pares. Sendo p e q primos entre si, por hipótese, então eles não podem ser simultaneamente pares e isso é uma contradição. Portanto, $\sqrt{2}$ não é racional.

A irracionalidade de $\sqrt{3}$

Supondo que $\sqrt{3}$ seja racional, de modo que $\frac{r}{s} = \sqrt{3}$, com r e s inteiros positivos diferentes de zero e também números primos entre si, então $(\frac{r}{s})^2 = (\sqrt{3})^2$, o qual equivale a $\frac{r^2}{s^2} = 3$ e com isso $r^2 = 3s^2$, diante disso o número r^2 é divisível por 3, logo, r será divisível por 3 e, com isso, teremos $r = 3k$, para algum inteiro positivo k. De modo que $r^2 = 3s^2$ equivale a $9k^2 = 3s^2$, logo s^2 é igual a $3k^2$, isto é, s^2 é divisível por 3 e consequentemente s também será. Portanto, r e s são divisíveis por 3, o qual é uma contradição, pois r e s são primos entre si. Conclui-se então que a hipótese $\frac{r}{s} = \sqrt{3}$ é falsa. Assim, $\sqrt{3}$ não é racional.

A irracionalidade de $\sqrt{6}$

Suponhamos, por contradição, que $\sqrt{6}$ seja um número racional, então $\sqrt{6} = t/u$, tal que t e u sejam inteiros diferentes de zero e números primos entre si. Suponhamos t e u positivos. Se $\frac{t}{u} = \sqrt{6}$, então $(\frac{t}{u})^2 = (\sqrt{6})^2$, o qual equivale a $\frac{t^2}{u^2} = 6$ e, com isso, temos $t^2 = 6u^2$, que equivale a $t^2 = 2(3u^2)$, logo t^2 é par e, com isso, t também é par, então t = 2k, sendo k um inteiro positivo. Tem-se que $t^2 = 6u^2$ equivale a $4k^2 = 6u^2$, logo $2k^2 = 3u^2$ e então $3u^2$ é par, tal como u^2 e consequentemente u também. Portanto, t e u são pares, o qual é uma contradição com a hipótese, pois são primos entre si. Logo a hipótese de que $\sqrt{6}$ é racional é falsa.

A irracionalidade de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Supondo que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ seja igual ao racional y, então $\sqrt{2}+\sqrt{3} = y$, logo, ao elevarmos os dois membros por 2 teremos $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = y^2$ o qual equivale a $2 + 2\sqrt{6} + 3 = y^2$, então terremos que $\sqrt{6} = \frac{y^2-5}{2}$. Como os números racionais possuem a propriedade do fechamento para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero), então $\frac{y^2-5}{2}$ é racional, embora $\sqrt{6}$ seja irracional, portanto chegamos a uma contradição na igualdade anterior. Logo a hipótese de que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ seja racional é falsa, então essa soma será irracional.

A partir da demonstração acima pode-se provar que dado um inteiro $n = a.b$, de modo que $\sqrt{n} = \sqrt{a.b}$ é irracional, então podemos provar que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ será irracional.

Teorema 1: Seja um inteiro $n = a.b$, com $a \neq b$, de modo que $\sqrt{n} = \sqrt{a.b}$ é irracional, então $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ será irracional.

Demonstração: De fato, se supormos que $r = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ é racional, teremos:

$$r = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$r^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$r^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$$

$$r^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$$

$$\sqrt{ab} = \frac{r^2-a-b}{2}$$

Mas como os racionais são fechados em relação a adição, subtração, multiplicação e divisão e como r, a, b e 2 são racionais então $\frac{r^2-a-b}{2}$ será racional, o qual é uma contradição, pois $\sqrt{ab}$ não é.

Exemplo: Sabe-se que $\sqrt{10} = \sqrt{5.2}$ é irracional, logo a soma $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ também é irracional.

Uma distinção importante a se fazer entre irracionais e os racionais é que os números racionais podem assumir mais de um tipo de representação decimal, com exceção das dízimas, como por exemplo o racional 1/5 pode ser representado como 0,2 ou 0,1999... (dízima periódica de período 9) assim como tantos outros racionais exatos. Os irracionais, no entanto, só podem assumir uma única representação decimal. Este fato demonstrado na proposição seguinte.

Proposição 4: Todo irracional possui uma representação decimal única como dízima não periódica.

Demonstração: Considere um número irracional x, tal que x $= 0, a_{-1}a_{-2}a_{-3} \dots$ (p1) e que também x $= 0, b_{-1}b_{-2}b_{-3} \dots$ (p2). Se essas representações são distintas certamente existe um $p \in \mathbb{N}$, tal que $a_{-k} = b_{-k}$, para $k = 0, \dots, p-1$ e $a_{-p} \neq b_{-p}$. Para fixar esta ideia vamos assumir que $a_{-p} \geq b_{-p} + (1 \cdot 10^{-p})$ e por (p1) e (p2) temos que x $\leq 0, a_{-1}a_{-2} \dots a_{-p}$ (p3) então x $\leq 0, a_{-1}a_{-2} \dots b_{-p}999 \dots =$ $0, a_{-1}a_{-2} \dots (b_{-p} + 1)$ (p4). Devido $b_{-k} = a_{-k}$ se $k = 0, \dots, p-1$ e b_{-k} é sempre menor ou igual a 9. Mas (p3) e (p4) implicam que $b_{-p} = a_{-p} + 1$ e $x = 0, a_{-1}a_{-2} \dots a_{-p}$. Porém nesse caso x é racional, o qual é um absurdo. Portanto a hipótese, de que as representações $0, a_{-1}a_{-2}a_{-3} \dots$ e $0, b_{-1}b_{-2}b_{-3} \dots$ para o número irracional x são distintas, é falsa. Logo todo irracional possui uma representação decimal única como dízima não periódica.

Outra característica muito importante, sendo esta pouco comentada em livros, diz respeito aos irracionais na forma de raízes. Essa característica garante que a raiz n-ézima de um inteiro x ($\sqrt[n]{x}$) será inteira, mas quando não for, certamente será irracional, ou seja, não há como resultar em um decimal não inteiro. Tem-se a seguir o teorema 2 que especifica e demonstra, com base em Fiqueiredo (2002) com ajuste de Autor (2021), esse fato.

Teorema 2: a raiz de um número inteiro sempre será inteiro ou irracional

Demonstração: Toda raíz $\sqrt[n]{a}$ é solução de uma equação polinomial

$$x^n - a = 0 \ (a \in \mathbb{Z}^*) \quad (1).$$

Repare que o coeficiente que acompanha o x^n é 1. Agora imaginemos por absurdo que $\sqrt[n]{a}$ seja racional não inteiro, ou seja possui uma represenção decimal $d, c_1c_2 \dots c_t$ $(t \in \mathbb{N}^*)$ que pode ser convertido para fração da seguinte forma $\frac{dc_1c_2 \dots c_t}{10^t}$ então podemos verificar se a equação polinomial que o tem como raíz é semelhante a equação (1).

Igualamos essa fração a x

$$\frac{dc_1c_2 \dots c_t}{10^t} = x$$

Elevamos por n os dois membros

$$\left(\frac{dc_1c_2 \dots c_t}{10^t}\right)^n = x^n$$

$$\frac{(dc_1c_2 \dots c_t)^n}{10^{nt}} = x^n$$

Resulta na equação

$$0 = 10^{nt}x^n - (dc_1c_2 \dots c_t)^n.$$

Repare agora que esta equação difere da equação polinomial (1) devido o coeficiente que acompanha x^n ser diferente de 1, mesmo que simplifiquemos por 10^{nt} para aparecer esse coeficiente obteriamos a equação $0 = x^n - \frac{(dc_1c_2 \dots c_t)^n}{10^{nt}}$ que difere da equação (1) devido o termo $\frac{(dc_1c_2 \dots c_t)^n}{10^{nt}}$ não ser inteiro. Logo a hipótese de que $\sqrt[n]{a}$ é um número raconal não inteiro é um absurdo. Assim, $\sqrt[n]{a}$ só pode ser um inteiro ou irracional.

3.2.3. Propriedades do Fechamento

A propriedade do fechamento determina que dados dois elementos *b* e *c* quaisquer de um determinado conjunto A, tal que se aplicarmos, neles, uma operação (*), encontraremos um elemento (*b* * *c*) pertencente a A, portanto este conjunto será fechado em relação a operação *.

Diante disso, será que as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão utilizadas entre dois irracionais gera números irracionais? Se isso for verdade então estará garantido a propriedade do fechamento para os números irracionais. A resposta é não. Conforme Moscibroski (2002), contrariamente aos racionais, o conjunto de dos números irracionais não obedece a propriedade do fechamento para todos os seus elementos, quanto as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Diante do entendimento a respeito da não ocorrência da propriedade do fechamento com os números irracionais, algo perceptivo é que se desenvolver as mesmas operações citadas com um número irracional qualquer e um racional qualquer, sempre resultará em um número irracional. Tem-se a seguir um teorema importante que comprova tal fato. Para facilitar as citações futuras a ele, chamaremos de “pertinência irracional em operações entre racional e irracional”.

Teorema 3 (Pertinência Irracional em Operações entre Racional e Irracional): Seja y um número irracional qualquer e r um número racional diferente de zero. Então a adição, subtração, multiplicação e divisão de r e y resultarão em números irracionais. Também y e y^{-1} são irracionais.

Demonstração: Seja y um número irracional, vamos supor que inicialmente que $-y$ fosse racional, digamos $-y$ = r', onde r' é um número racional, teríamos então que a y = – r', onde $-r$' também é um racional, o qual é uma contradição pois y é irracional.

Como y^{-1} = $\frac{1}{y}$, podemos interpretar isso como uma divisão de racional por irracional isto é $\frac{r}{y}$, com r sendo racional. Portanto a demonstração de que y^{-1} é irracional decorre da prova que o quociente da divisão de racional por irracional é irracional. Provaremos a seguir essa operação, assim como as outras apresentadas pelo teorema.

Supondo que $y+r$, $y-r$, $r-y$, $yr, y/r$ e r/y sejam racionais então teremos as seguintes equações:

$$y+r = r_1; \quad y-r = r_2; \quad r-y = r_3; \quad yr = r_4; \quad \frac{y}{r} = r_5; \quad \frac{r}{y} = r_6. \qquad (8)$$

De modo que r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 sejam números racionais. Resolvendo tais equações em y, obteríamos

$$y = r_1 - r; \quad y = r_2 + r; \quad y = r - r_3; \quad yr = \frac{r_4}{r}; \quad y = rr_5; \quad y = \frac{r}{r_6} \qquad (9)$$

Pode-se concluir que os segundos membros de cada equação são todos números racionais mediante a propriedade do fechamento dos racionais. Sendo tal conclusão um absurdo, pois nenhuma das igualdades referidas em (b) são verdadeiras devido y ser irracional. Portanto a hipótese presente de que $y+r$, $y-r$, $r-y$, $yr, y/r$ e r/y sejam racionais é falsa. Logo, só podem ser números irracionais.

Exemplo: Seja a = $\sqrt{12}$ e r = $\frac{3}{2}$, então: A soma $\sqrt{12}$ + $\frac{3}{2}$ é irracional devido equivaler a $\frac{2\sqrt{12}+3}{2}$, $\sqrt{12}$ - $\frac{3}{2}$ é irracional, pois resulta em $\frac{2\sqrt{12}-3}{2}$, $\frac{3}{2}$ - $\sqrt{12}$ é irracional, devido equivaler a $\frac{3-2\sqrt{12}}{2}$, $\frac{3}{2}$. $\sqrt{12}$ é irracional, pois é igual a $\frac{3\sqrt{12}}{2}$; $\frac{3}{2}$: $\sqrt{12}$ é irracional devido ser igual a $\frac{3}{2\sqrt{12}}$; $-\sqrt{12}$ é irracional; $\frac{1}{\sqrt{12}}$ é irracional, pois é equivalente a $\frac{\sqrt{12}}{12}$.

O teorema 3 permite construir uma grande classe de números irracionais a partir de um irracional determinado, por exemplo, os números $-\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$ + 2, 3 - $\sqrt{2}$, - 4$\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{5}$, $\frac{6}{\sqrt{2}}$ são todos irracionais. Como se pode gerar uma infinidade de números irracionais utilizando um irracional qualquer pera cada uma das operações, conforme o teorema 3, fica claro que podemos produzir uma infinidade de números irracionais, de modo que, cada número novo, como por exemplo a soma $\sqrt{2}$ + 1, pode ser aplicado novamente no teorema 3 e gerar uma nova infinidade de números irracionais. Tem-se como exemplo os números

$$-\sqrt{2} - 1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}+1}, \quad \sqrt{2} + 3, \quad 3 - \sqrt{2}, \quad 4\sqrt{2} + 4, \quad \frac{\sqrt{2}+1}{5}, \quad \frac{6}{\sqrt{2}+1}, \text{ etc,}$$

os quais podem ser gerados a partir do número irracional $\sqrt{2}$ + 1.

3.2.4. Conjunto dos números irracionais

Nesta subseção o conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$) foi caracterizado quanto à enumerabilidade, densidade e subdivisões. Estes são aspectos muito importantes para entender este conjunto, que fazem parte do objeto de ensino que foi abordado na Sequência Didática construída e apresentada neste trabalho na subseção 4.2. O texto desta subseção foi construído com base em Oliveira e Gomes (2009), Fiqueiredo (2002), Santos (2017).

O conjunto que contém todos os números irracionais é simbolizado pela letra $\mathbb{I}$. Uma qualidade importante deste conjunto é que ele não é enumerável, ou seja, não possui a mesma cardinalidade dos naturais, o que significa que seus elementos não podem ser contados. Um conjunto enumerável pode ser definido da seguinte forma:

Definição: Um conjunto diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f: \mathbb{N}^* \to X$. Nesse caso, chama-se o conjunto X de infinito e enumerável.

O conjunto dos números racionais é caracterizável como enumerável, pois é possível estabelecer uma bijeção para com os números naturais, sem o zero, entretanto os irracionais não o são. Diante disso, foi mostrado na proposição 5 que os irracionais formam um conjunto não enumerável, ou seja, possui cardinalidade diferente dos naturais.

Proposição 5: O conjunto dos números irracionais não é enumerável.

Para a demonstração dessa proposição primeiramente vamos provar que o conjunto dos Reais não é enumerável.

Provaremos que o conjunto T =] 0, 1 [não é enumerável, e a partir dessa ideia iremos generalizar para o conjunto dos Reais, o qual o contém.

Supondo um conjunto T, tal que o mesmo esteja contido no conjunto dos Reais, de modo que T =] 0, 1[.

Sabendo que o conjunto T é igual ao intervalo aberto entre 0 e 1, isto é, T=] 0, 1 [, e também que a expansão decimal de todos os números x entre 0 e 1 tem a forma $0, x_{11}x_{12}x_{13}$ .... Inicialmente vamos supor por absurdo que exista uma bijeção $\phi: T \to \mathbb{N}$. Assim podemos ordenar os elementos de T da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\phi(1) &= 0, a_{11}a_{12}a_{13} \ldots \\
\phi(2) &= 0, a_{21}a_{22}a_{23} \ldots \\
\phi(3) &= 0, a_{31}a_{32}a_{33} \ldots \\
&\vdots \\
\phi(j) &= 0, a_{j1}a_{j2}a_{j3} \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

onde cada $a_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Podemos construir um número z, que não pode ser encontrado na lista acima. Seja z = 0,$z_1 z_2 z_3$ ... definido por $z_j = 3$ se $a_{jj} \neq 3$ e $z_j = 1$ se $a_{jj} = 3$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Temos que o número z está claramente entre 0 e 1, mas $z \neq \phi(n)$, pois $z_n \neq a_{nn}$, para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, ϕ não pode ser sobrejetora o que é uma contradição. Portanto T, que é o conjunto dos elementos do intervalo]0, 1[não é enumerável.

Como o conjunto T está contido em $\mathbb{R}$ (Reais), então este conjunto dos Reais não é enumerável. Além disso, devido $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ e sabendo que $\mathbb{Q}$ é enumerável, então, se $\mathbb{I}$ fosse enumerável então $\mathbb{R}$ também seria, pois, conforme Fiqueiredo (2002), a união de conjuntos enumeráveis é enumerável, o qual é um absurdo, pois o conjunto dos reais não é enumerável. Portanto o conjunto $\mathbb{I}$ (irracionais) não pode ser enumerável.

O entendimento explicitado nesta proposição é uma das principais características do conjunto dos números irracionais. Ele demonstra que os irracionais não podem ser contados, de modo que para cada espécie de contagem de modo ordenado sempre vai haver números irracionais não contados. Outro atributo muito importante do conjunto dos números irracionais é a densidade que ajuda a compreender a infinidade dos números irracionais na reta real.

Conforme Caraça (1989 apud Santos, 2017) um conjunto é denso se em um intervalo entre dois de seus elementos exte uma infinidade de outros elementos do mesmo conjunto. Entretanto basta existir pelo menos 1 elemento entre quaisquer outros elementos diferentes entre si e pertencentes a um conjunto para afirmar que ele é denso. A proposição a seguir desenvolve a demonstração que o conjunto $\mathbb{I}$ é denso.

Proposição 6: Um intervalo $]a, b[$ qualquer em $\mathbb{R}$, onde $a, b \in \mathbb{I}$, temos $\{\exists x \in]a, b[, x \in \mathbb{I} \mid a < x < b\}$.

Demonstração: Para se obter um irracional no intervalo (a, b) com $a, b \in \mathbb{I}$ e $b - a > \sqrt{2}$, deve-se compreender que para todo $p \in \mathbb{N}^*$ teremos que $1 < \frac{b-a}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 < \frac{1}{p} < \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$, assim teremos $\frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$.

Se a reta $\mathbb{R}$ for dividida em intervalos de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{p}$ então devido $\frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$, pelo menos um $\frac{m\sqrt{2}}{p}$ $(m \in \mathbb{Z}^*) \in (a, b)$. Assim

$$A = \{m \in \mathbb{Z}^*; \frac{m\sqrt{2}}{p} \geq b\}$$

A é um conjunto limitado inferiormente por $\frac{bp}{\sqrt{2}}$ e como $\mathbb{R}$ é arquimediano, A é um conjunto não vazio de números inteiros . Seja $m_0 \in A$ o menor elemento de A. Então:

$$m \in \mathbb{N};\ \frac{m\sqrt{2}}{p} > b$$

Com base em $\frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ que significa que $b - a$ é maior que 1 e também m_0 ser o mínimo elemento do conjunto A, Então se subtrairmos 1 de m_0 teremos

$$\frac{m_0\sqrt{2}}{p} > b \ \Rightarrow \frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p} < b$$

Portanto poderíamos fazer dois tipos de afirmação

a) o número $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p}$ está entre a e b, logo $a < \frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p} < b$. A partir desta afirmação, prova-se que dados quaisquer $a, b \in \mathbb{I}$ $(b > a)$, sempre existirá um número irracional $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p}$ entre a e b.

b) o número $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p}$ antecede o intervalo entre a e b, ou seja

$$\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p} \leq a < b \leq \frac{m_0\sqrt{2}}{p}$$

$$\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p} \leq a \quad \text{e} \quad b \leq \frac{m_0\sqrt{2}}{p}$$

$$-a \leq \frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p} \text{ e } b \leq \frac{m_0\sqrt{2}}{p}$$

$$b - a \leq \frac{m_0\sqrt{2}}{p} - \frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p} = \frac{\sqrt{2}}{p}$$

$$b - a \leq \frac{\sqrt{2}}{p}$$

que representa uma contradição devido $\frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$. Logo o número irracional $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p} \in (a, b)$.

Conclui a demonstração indicando que a afirmação (a) é correta e a afirmação (b) é incorreta. Assim o conjunto $\mathbb{I}$ é denso.

A proposição explicada anteriormente tratou sobre a densidade do conjunto dos irracionais, sendo esta uma propriedade muito importante para compreender a infinidade dos números irracionais na reta real, onde em qualquer intervalo entre dois números irracionais sempre haverá números irracionais.

Outra característica também muito importante sobre o conjunto dos números irracionais é a possibilidade de dividi-lo em números irracionais algébricos e números irracionais transcendentes. Esses tipos de números recebem tal classificação ao obedecer, ou não, a definição onde qualquer solução de uma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

onde os coeficientes a_i's são inteiros, é chamada de número algébrico. Quando um número não atender a essa condição é classificado como transcendente.

Alguns dos exemplos de números algébricos são todos os números naturais, todos os números racionais e também alguns números irracionais. Assim o conjunto dos números irracionais é constituído por números irracionais algébricos e números irracionais transcendentes.

A partir de informações expostas anteriormente sobre irracionais e algumas outras não mencionadas neste trabalho referente aos racionais, tem-se o quadro 4 a seguir, expondo uma síntese de alguns atributos importantes que caracterizam e diferenciam o conjunto dos racionais ($\mathbb{Q}$) e dos irracionais ($\mathbb{I}$).

Quadro 4 – Características de Números Racionais e Irracionais

Números / Característica	Números Racionais ($\mathbb{Q}$)		Números Irracionais ($\mathbb{I}$)
	Decimais exatos	Dizimas periódicas	
Enumerabilidade	Enumerável		Não Enumerável
Densidade	Denso		Denso
Contém algébricos e/ou transcendentes.	Contém somente Algébricos		É composto de Algébricos e de Transcendentes

Fonte: Autor (2021).

Nessa subseção foi abordada a fundamentação matemática de números irracionais. O conhecimento bibliográfico levantado ajudou a compreender o que se precisa alcançar de aprendizagem na Sequência Didática, a partir de noções sobre os números irracionais como: conceito, enumerabilidade, cardinalidade, densidade, dentre outros.

Na próxima subseção inicia-se uma abordagem aos números irracionais sob um aspecto educacional, onde será tratado sobre como algumas noções matemáticas, quando mal compreendidas, podem prejudicar a aprendizagem de números irracionais, principalmente quando essas 'noções que prejudicam' são do próprio assunto de números irracionais.

3.3. Obstáculos Epstemológicos que envolvem Números Irracionais

Neste momento, foi tratado sobre um tema muito discutido na área da Educação Matemática, e que pode afeta o processo de ensino e aprendizagem do assunto de Números Irracionais que é são os Obstáculos Epistemológicos.

Este conceito foi desenvolvido inicialmente pelo filósofo francês Gaston Bachelard em 1938, buscando tratar sobre concepções que resistiam ao conhecimento científico, ao invés de ficarem restritas somente ao passado. Bachelard usou o nome Obstáculo Epistemológico para se referir a esse tipo de conhecimento, o qual possui o atributo de server como obstáculo para a aquisição de novos conhecimento, impedindo com isso o progresso científico (LOPES, 2007).

Diante da percepção deste conceito, foi introduzida na Didática da Matemática a noção de Obstáculo Epistemológico por Brousseau em 1976, inspirado nas ideias de Bachelard (IGLIORI, 2002). Para Brousseau (1983, apud Duarte, 2017) este obstáculo é da mesma natureza do conhecimento, ou seja, se apresenta na forma de objetos, relações, métodos de entendimento, previsões, com evidência, consequências esquecidas, ramificações inesperadas, etc. Resistindo, com isso, a saberes mal adaptados.

Nesse sentido, Brousseau vê esse tipo de conhecimento como um meio de interpretar alguns dos erros recorrentes e não aleatórios cometidos pelos estudantes, quando lhes são ensinados alguns tópicos de Matemática (IGLIORI, 2002). Daí, ao conhecer esses obstáculos, o professor tem a possibilidade de planejar seu ensino de modo a procurar, ao máximo, convencer o aluno a evitar a interferência desses conhecimentos (obstáculos epistemológicos) na aquisição de novos conhecimentos, pois o erro não provém somente da ignorância, mas também do efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso ou simplesmente mal adaptado (BROUSSEAU, 1976, apud IGLIORI, 2002).

Duarte (2017) ressalta que a superação de um obstáculo exige trabalho equivalente ao da aplicação do conhecimento, isto é, a interação repetida, a dialética entre o aluno e o objeto de seu conhecimento. Além disso, é preciso atenção e planejamento do professor para evitar que o próprio processo de ensino e aprendizagem, que ele rege, não crie outros obstáculos de conhecimento que prejudiquem o aprendizado de conhecimentos futuros.

Diante disso, houve a necessidade de compreender quais obstáculos epistemológicos agem no processo de ensino e aprendizagem de números irracionais, para que se pudesse evita-los na etapa de experimentação. Os próximos tópicos apresentam alguns aspectos matemáticos que podem representar obstáculos epistemológicos para a aprendizagem do assunto de Números Irracionais, bem como de outros assuntos ligados a este.

3.3.1. O Uso do Símbolo “...” como Representação da Infinitude de Irracionais

Quando tratamos de representação de uma dízima periódica é comum indicar a parte inteira, o anti-período, o período (com algumas repetições) e reticência para simbolizar repetição indefinida do período, como por exemplo 1,2333... Entretanto, existe uma problemática quanto ao uso inadequado desta notação, que é a utilização das reticências no final da aproximação de números irracionais para designar que são decimais infinitos, por exemplo o número 0,123456... é uma representações decimal que sugere a ideia de número irracional, devido não haver repetição periódica observável e que possuem casas decimais infinitas, esta ideia foi simbolizada pela reticência (...) no final do número.

Embora essa utilização seja errada, é possível encontrar em alguns trabalhos, bem como no conhecimento dos alunos, evidências desse tipo de notação conferida aos irracionais. Em um trabalho desenvolvido por Santos (2007, apud Jesus, 2017) sobre o ensino de números reais na Educação

Básica é discutido sobre alguns problemas na construção do conceito de número irracional, um desses problemas é o uso de representação numérica decimal para números irracionais, como 3,1416... sendo o número π (pi) e também 2,7182... sendo e (número de Euler). Estas situações usam a aproximação de números irracionais junto com a notação "..." para indicar o próprio número irracional.

As controvérsias acerca da utilização da reticência na representação decimal de um número irracional acontecem porque esta pontuação é usada para indicar a omissão das repetições infinitas dos dígitos do período de dízimas periódicas, portanto quando adicionada ao final de um número irracional como 3,141592..., pode trazer a ideia de que se trata de uma dízima periódica onde o período é 141592, por exemplo, cujas repetições são omitidas com o uso de "...". O que representa um erro, além de que não é possível a representação de um número irracional em sua forma decimal, pois ela é limitada ao campo das ideias ou a uma outra representação que sintetize a forma decimal de número irracional quando for possível, como por exemplo o irracional que representa a diagonal de um quadrado de lado 1, o qual pode ser simbolizado pela raiz $\sqrt{2}$, embora seja manipulado algumas vezes nessa mesma representação, por questões de cálculo com decimais pode-se usar algumas de suas aproximações decimais como 1,4; 1,41; 1,4142; 1,414213 etc, devido este tipo de número não ter um valor numérico exato, mas nunca usar a representação "1,414213..." devido ser um modelo material da totalidade decimal de um número irracional. Entretanto, a própria falta dessa ideia de totalidade constitui um possível obstáculo que pode dificultar a aprendizagem de números irracionais.

Conforme o PCN, a inexistência de modelos materiais que exemplifiquem os irracionais pode contribuir para as dificuldades na aprendizagem deste mesmo assunto, já que os alunos tendem a querer compreender numericamente os irracionais, sem que este tenha representação numérica exata. O que pode explicar a utilização de representações como 1,414213... para indicar a mensuração do irracional $\sqrt{2}$, (BRASIL, 1998).

3.3.2. Representação Decimal de Raízes Não Exatas na Calculadora

Quando se calcula o valor de números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ a calculadora determina uma quantidade de dígitos de acordo com o que a capacidade de dígitos que a memória da calculadora consegue guardar. O que pode indicar um problema que pode dificultar o uso de calculadoras em sala de aula, ao se trabalhar com números irracionais obtidos de raízes, já que a infinitude desses números é omitida pela calculadora, algo justificado pela limitação da memória das calculadoras e também pela própria natureza dos irracionais de serem infinitos e não periódicos.

O próprio PCN, como foi dito anteriormente, cita a problemática de não existir modelos materiais que exemplifiquem os irracionais como algo que pode contribuir para as dificuldades na aprendizagem deste mesmo assunto. Bem como de outros assuntos. Assim o resultado 'irracional' do calculo de raízes fica limitado a uma aproximação, que pode trazer questionamentos como: se $\sqrt{2}$ é irracional então como pode o resultado, desta raiz determinado na calculadora, terminar? Assim o aprendizado de que a representação desse tipo de número como sendo infinito e não periódico acaba sendo confrontado com o resultado obtido na calculadora, gerando com isso, um possível obstáculo epistemológico.

Mesmo com as limitações do uso da calculadora para calcular o valor numérico de raízes quando são irracionais, não há um identificador neste instrumento que indique que o valor obtido é um irracional. Na verdade há um identificador, mas que não é da calculadora, é uma concepção matemática que diz que raiz de um inteiro só pode ser inteiro ou irracional. Assim nesse caso nunca resultará em racionais não inteiros como 0,5; 0,25; 0,12345; e outros decimais, mas caso apareçam esses tipos de decimais, certamente não são racionais, mas sim aproximações racionais de um número irracional.

Em outras palavras, quando calculamos o valor de $\sqrt[n]{a}$ na calculadora, sendo $a \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, então o resultado poderá ser inteiro, caso não seja, certamente aparecerá no visor da calculadora um número do tipo $b, a_1 a_2 a_3 \dots a_t$ (com $t \in \mathbb{N}^*$) que é uma aproximação dada pela própria calculadora de um número irracional correspondente à raiz $\sqrt[n]{a}$. A demonstração desse fato se encontra no Teorema 2 localizado na subseção 3.2.2.

Embora essa concepção ajude identificar os irracionais obtidos de raízes não exatas como $\sqrt{2}$, se ela não for aprendida pelos alunos, então a calculadora pode dificultar a aprendizagem dos alunos, pois estes vão ver os resultados com finita quantidade de dígitos e acreditar que a representação decimal de irracionais pode terminar. Além de diminuir a confiança nas calculadoras, pois, conforme Garcia, Soares e Fronza (2005), quando se desenvolve o calculo da raiz quadrada de 2 e depois multiplica-se o resultado no visor por si mesmo, o valor obtido na calculadora não é o verdadeiro valor de $\sqrt{2}$, mas sim uma aproximação (dependendo da calculadora).

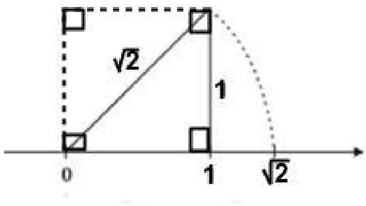
A calculadora não fornece o resultado verdadeiro (exato) e nem mesmo fornece informação suficiente para distinguir os resultados em números racionais dos irracionais. O que pode caracterizar um problema que pode ser um obstáculo para o aprendizado de números irracionais, bem como de outros. Necessitando com isso, que o professor explique esse entendimento para que não tenham concepção errada sobre números irracionais.

3.3.3. Densidade dos Racionais Direcionando à Noção de Completude da Reta Real

Conforme o PCN, quando os alunos estudam densidade do conjunto dos números racionais referente ao posicionamento deles na reta numérica, podem criar a falsa ideia que na reta numérica não há espaço para outros números. Entretanto quando se ensina sobre os números irracionais é explicado a existência de números não racionais correspondentes a pontos da reta, isto é, números que não podem ser representados por uma fração de números inteiros com denominador não nulo (BRASIL, 1998).

Consideremos a figura 27, na qual temos um quadrado de lado 1, cuja diagonal mede $\sqrt{2}$ que é um número irracional. Diante disso é possível projetar, com um compasso, essa diagonal na reta numérica.

Figura 27 – Projeção da medida da hipotenusa na reta racional.



Fonte: Autor (2021).

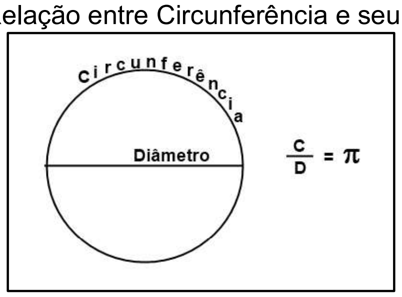
Isso mostra que existem outros números além dos racionais na reta numérica, pois nenhum racional atende a condição de ser raiz de 2.

Daí, como afirma o PCN, pode haver pouca aceitação dessa compreensão apresentada, se o aluno acreditar na completude dessa reta com os números racionais. O que certamente é dificultado pelo fato dos irracionais não possuírem representação fracionária que ajude ter uma exata noção numérica de sua posição.

3.3.4. Achar que π pode ser obtido de fração

O número π é um irracional cuja concepção parte de uma constante obtida pela razão entre o comprimento de qualquer circunferência (C) e seu diâmetro (d), cuja razão $\frac{C}{d}$ é igual a π sendo descrito muitas vezes pelas suas aproximações como 3; ou 3,14; ou 3,1415; etc..

Figura 28 – Relação entre Circunferência e seu diâmetro e $\boldsymbol{\pi}$.



C: comprimento da Circunferência; D: comprimento do diâmetro
Fonte: Autor (2021).

Entretanto o conhecimento ensinado de π pode causar alguns questionamentos na aprendizagem de seu próprio conceito, como por exemplo:

Se o número π é razão entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu próprio diâmetro então por que ele é irracional (não pode ser escrito como fração)?

Esse questionamento pode ser gerado pela mistura dos conceitos de fração e razão, já que ambas possuem a mesma notação que é ligada com a ideia de divisão, mas é importante estabelecer essa diferença para os alunos. A ideia de fração está ligada a números inteiros e utilizando elementos de mesma natureza a partir da relação parte/todo, já a ideia de razão compreende relacionar elementos (grandezas) de natureza diferente ou igual sendo que esses elementos podem ser inteiros, racionais, irracionais e reais.

Quando os alunos não sabem diferenciar estes conceitos, surge a possibilidade de misturar fração e razão, e com isso, compreenderem π como irracional que é gerado de uma fração. Essa situação caracteriza-se como um problema que pode dificultar a aprendizagem de números irracionais bem como de muitos outros conhecimentos.

Conforme o PCN deve-se estar atento para o fato de que o trabalho com medições pode se tornar um obstáculo para o aluno aceitar a irracionalidade do quociente entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, uma vez que ele já sabe que as medições envolvem apenas números racionais (BRASIL, 2020).

Quando essa dificuldade em aceitar a irracionalidade de π surge, é importante o professor primeiramente diferenciar os conceitos de razão e fração e depois explicar que este número é obtido de uma razão ($\frac{C}{d}$), ou seja, não há obrigatoriedade de seus elementos serem números inteiros, logo se π é um irracional obtido de uma razão então pelo menos um dos elementos dessa mesma razão também é irracional. Fato este que é garantido pelo teorema 3 apresentado na subseção 3.2.3 (Teorema da Pertinência Irracional em Operações entre Racional e Irracional). Este teorema indica que se definirmos dois números, onde um deles é irracional e o outro racional, então a razão será irracional, sendo a reciproca verdadeira. Assim, se π é um irracional obtido de uma razão então pelo menos um dos elementos dessa mesma razão também é irracional.

3.3.5. Conhecer Somente os Irracionais na Forma de Raízes

Diante da inexistência de valor numérico exato que meça números irracionais, é costume no ensino deste assunto a exemplificação de muitos irracionais com a utilização de radicais, pois os únicos números irracionais que se pode ter um modelo numérico similar aos alunos são aqueles que podem ser escritos na forma de raiz. Entretanto, conforme o PCN, não é recomendado limitar o ensino deste assunto exclusivamente, ou quase, com manipulação de radicais, por não contribuir muito para o desenvolvimento do conceito de números irracionais (BRASIL, 1998).

Um dos efeitos na aprendizagem desta problemática é evidenciado em um estudo diagnóstico desenvolvido por Costa (2009) em que foi percebido que, dentre os estudantes do 8º e 9º anos de uma amostra, alguns utilizavam a designação “números com raízes” para se referir a números irracionais. Essa concepção errada sobre números irracionais engloba as raízes exatas e não exatas e deixa de envolver números irracionais que não são obtidos de raízes, como π.

Mostrando com isso, que se o ensino se pautar no direcionamento que foi comentado neste tópico, certamente pode gerar no aluno uma aprendizagem falha, que, ao ser fragilizada por fatores como o esquecimento do que foi ensinado pelo professor, pode dificultar a própria concepção do conceito de Número Irracional.

3.3.6. Confundir Raízes Não Exatas com Raízes sem Solução

No 9º ano do Ensino Fundamental, quando os alunos lidam com equações polinomiais do 2º grau, algumas vezes as soluções são racionais, outras vezes não são racionais. Conforme Garcia, Soares e Fronza (2005), é nesse contexto que os alunos muitas vezes julgam os números irracionais como sendo todo número não racional que for obtido na solução, ou seja, achar que todo número na forma de raiz que ele não consegue obter resultado são irracionais, como $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, inclusive números como $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-5}$.

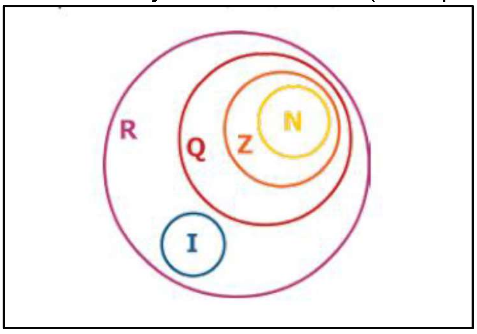
A partir desse entendimento, o aluno estaria considerando os números complexos como irracionais. Um equívoco certamente provável de acontecer quando o aluno aprende sobre números irracionais na forma de raízes e com esses conhecimentos acaba classificando números complexos como sendo também irracionais. Algo que acontece quando o aluno não verifica a possibilidade de determinar aproximações racionais para os irracionais na forma de raiz, bem como a impossibilidade dessa ação, para raízes complexas não racionais.

Daí percebe-se a possibilidade dos conhecimentos de números irracionais interferirem para a aquisição inadequada de outros conhecimentos. Algo que pode ser minimizado com intervenções do professor quando se ensina números irracionais, e talvez até haja a necessidade de ter que falar sobre números complexos.

3.3.7. Minorização Simbólica do Conjunto dos Irracionais em Relação aos Racionais

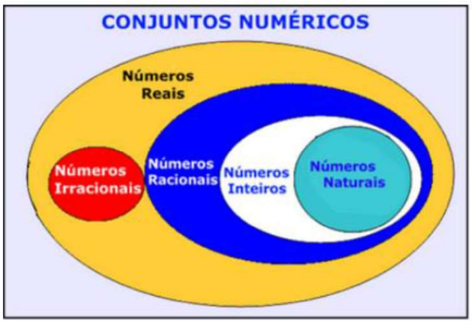
Em vários materiais didáticos, é comum a simbolização dos conjuntos numéricos dos Naturais ($\mathbb{N}$), Inteiros ($\mathbb{Z}$), Racionais ($\mathbb{Q}$), Irracionais ($\mathbb{I}$) e Reais ($\mathbb{R}$), onde são organizados na forma de figuras de aspecto circular ou retangulares cuja relação de contido ou de contém interfere no posicionamento de cada figura dentro da outra. As figuras a seguir são exemplos desse tipo de simbolismo.

Figura 29 – Conjuntos Numéricos (exemplo1)



Fonte: Jordão (2015, p. 28)

Figura 30 – Conjuntos Numéricos (exemplo2)



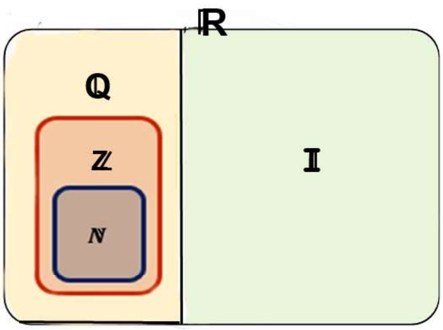
Fonte: Duarte (2013, p. 2)

Apesar de ser um simbolismo que ajuda a sintetizar informações, nota-se algumas problemáticas. Conforme Duarte (2013), uma dessas problemáticas está no fato que induz o aluno a acreditar que os números racionais são a maioria, se comparado aos irracionais. Isso representa uma concepção errada, pois segundo Oliveira e Gomes (2009), uma qualidade importante do conjunto dos Irracionais é que ele possui quantidade de elementos (cardinalidade) maior que os Naturais, ao passo que Inteiros e Racionais possuem a mesma cardinalidade que os Naturais.

Além disso, Duarte (2013) alerta sobre um outro problema, onde as imagens induzem também ao aluno pensar que há números reais que não são racionais, nem irracionais.

Desse modo, esse simbolismo pode direcionar os alunos a terem percepções erradas sobre o conjunto dos irracionais, o que caracteriza um obstáculo para a aquisição adequada de conhecimentos sobre esse assunto pelos alunos. Uma provável solução para esses problemas é a correção das imagens, a imagem a seguir apresenta uma organização mais adequada.

Figura 31 – Desenho corrigido dos Conjuntos Numéricos



Fonte: Autor (2021).

3.3.8. Síntese das Informações

Anteriormente foram apresentados aspectos matemáticos que podem representar obstáculos epistemológicos para a aprendizagem de Números Irracionais, bem como de outros assuntos ligados a este.

Com o objetivo de sintetizar as informações acerca dos tipos de obstáculos epistemológicos destacamos, a seguir, uma forma de classificar os obstáculos epistemológicos que se relacionam com o conhecimento ensinado de Números Irracionais no Ensino Básico:

. Aspectos mal compreendidos de conhecimentos anteriores que podem dificultar a aprendizagem de Números Irracionais;

. Aspectos mal compreendidos do conhecimento ensinado de Números Irracionais que podem dificultar a aprendizagem deste mesmo conhecimento;

. Aspectos mal compreendidos do conhecimento ensinado de Números Irracionais que podem dificultar conhecimentos que serão ensinados futuramente.

A partir destes atributos, tem-se a seguir um quadro sintetizando e classificando cada um dos obstáculos epistemológicos de Número Irracionais apresentados nas subseções anteriores.

Quadro 5 – Obstáculos epistemológicos de Números Irracionais

Classificação Obstáculos Epistemológicos	Obstáculos Epistemológicos de Número Irracionais
. Aspectos mal compreendidos de conhecimentos anteriores que podem dificultar a aprendizagem de Números Irracionais	● Quando os alunos estudam densidade do conjunto dos números racionais referente ao posicionamento deles na reta numérica, podem criar a falsa ideia que na reta numérica não há espaço para outros números, como os irracionais, dificultado a aceitação destes na reta real. ● Quando os alunos confundem fração com razão, então a noção de que o número irracional π pode ser obtido de uma razão é prejudicada, pois alguns alunos podem o confundir como um irracional que é obtido de uma fração. Isso pode indicar um falso contra exemplo que pode prejudicar a aprendizagem do conceito de número irracional.
Aspectos mal compreendidos do conhecimento ensinado de Números Irracionais que podem dificultar a aprendizagem deste mesmo conhecimento;	● O uso da terminação “...” para a representação da infinitude de números irracionais ao se relacionar com o uso dessa mesma notação para representar a infinitude periódica de dizimas periódicas pode dar a falsa interpretação de que irracionais são números com infinitude periódica de dígitos. ● A calculadora fornece resultados com representação finita de dígitos quando se calcula raízes não exatas, podendo fornecer compreensões erradas sobre números irracionais. ● Representação de conjuntos numéricos e a minorização simbólica do conjunto dos irracionais em relação ao conjunto dos racionais, indicando uma falsa ideia que pode prejudicar a os conhecimentos sobre o Conjunto dos Números Irracionais. ● Diante do aprendizado, onde o aluno tem muito contato com números irracionais que podem ser escritos na forma de raiz, alguns alunos podem achar que existem somente esses tipos de irracionais.
Aspectos mal compreendidos do conhecimento ensinado de Números Irracionais que podem dificultar conhecimentos que serão ensinados futuramente.	● Após o estudo de números irracionais, o aluno pode achar que todos os números na forma de raiz que ele não consegue obter o valor são irracionais, daí podem confundir números complexos como $\sqrt{-4}$ com números irracionais.

Fonte: Autor (2021).

Com isso, é muito importante levar em consideração os aspectos apresentados anteriormente quando se ensina o assunto de Números Irracionais, pois, se evitados, o aprendizagem deste assunto pode-se tornar mais adequada. Foi com essa finalidade que foram levantadas as informações dessa seção, pois são compreensões que auxiliaram na construção da sequência didática proposta nesse trabalho, na seção 4 e ajudaram a reduzir possíveis problemas na etapa de experimentação.

3.4. Aspectos Curriculares

Nesta subseção é apresentado um texto que trata sobre aspectos curriculares do assunto de Números Irracionais referente ao processo de ensino e aprendizagem. Nele, foi explicado como este conteúdo é abordado no currículo do Ensino Básico e sobre questionamentos e potencialidades no processo de ensino e aprendizagem de números irracionais, as quais foram utilizadas para estruturar a Sequência Didática que foi proposta neste trabalho.

O tratamento, regulação e sistematização do conjunto dos números reais e, por consequência, os números irracionais no campo do saber matemático se consolidou há pouco mais de 100 anos, entretanto, no ensino básico este conhecimento não teve uma receptividade boa diante do rigor matemático, o que motivou a transposição didática da concepção de números irracionais, (POMMER, 2012).

Diante do rigor matemático que o assunto tratado possui, algo que motivou a transposição didática do mesmo no ensino básico, faz-se uma pergunta mais geral: Por que ensinar números irracionais? Certamente o motivo está na noção de número e na importância de seu uso, mas Broetto (2016) apresenta melhor essa resposta.

Conforme Broetto (2016), o surgimento da concepção de número ocorreu por meio da contagem de objetos discretos. Mas depois de muito tempo, durante a história, essa concepção foi expandida para medir grandezas contínuas. Daí tem-se, por exemplo, a ideia de medida, que permite tratar naturais, racionais e irracionais em um único contexto, que privilegia o contínuo e coloca o discreto como uma exceção, ou simplesmente um caso particular. Vale esclarecer que dentro do contínuo numérico existem, em sua maioria, mais números irracionais do que racionais. Desse modo, ensinar sobre números irracionais é nada menos que expandir a ideia de número para algo mais geral, onde ele se conecta a noção de medida dentro do contínuo.

O ensino de números irracionais é, segundo Pommer (2012), algo muito importante no âmbito da educação básica, não somente pela compreensão proporcionada desse assunto, como também pelo fato dele estar envolvido pela ideia fundamental de infinito e de aproximação.

Os números irracionais são pouco explorados em sala de aula quanto a sua extensão, devido o rigor matemático que constitui esse assunto. Estando no âmbito do Ensino Fundamental, este assunto ocupa uma posição notável no currículo definido pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2017), no 9º ano do ensino fundamental, onde, as habilidades que tratam diretamente desse assunto são:

> (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade)
> (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica (BRASIL, 2017, p. 316).

As habilidades desse assunto são fundamentais para alunos que ingressam no ensino médio, pois muitos assuntos demandam do uso de números irracionais para realização de cálculos. Segundo Brasil (1998), é no ensino médio que a noção/ideia de números irracionais vai se consolidar.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), apesar de esse assunto ocupar um razoável espaço no currículo do quarto ciclo, o ensino de números irracionais tem contribuído pouco, para que os alunos desenvolvam seu conceito (BRASIL, 1998). O motivo dessa situação pode estar relacionado a vários fatores que, segundo esse mesmo documento, acontece devido

- A inexistência de modelos materiais que exemplifiquem os irracionais.
- Quando se estuda a reta numérica racional e se constrói a ideia de densidade dos números racionais, isto é, entre dois racionais há infinitos racionais, faz com que o aluno tenha a falsa impressão que não há mais lugar na reta numérica para nenhum outro tipo de número além dos racionais.

Além dos questionamentos anteriores, há algumas atitudes não adequadas para o ensino desse assunto que, segundo o PCN, são:

• As formas de abordagem utilizadas no ensino de números irracionais têm se limitado quase que exclusivamente ao ensino do cálculo com radicais.

• O tratamento formal do conceito de número irracional é inadequado no âmbito do quarto ciclo.

• Quando se trabalha a ideia de π, pode se tornar um obstáculo para o aluno aceitar a irracionalidade do quociente entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, uma vez que ele interpreta que esse quociente é racional.

Nesse sentido, percebe-se que ao ensinar tal assunto, deve-se ter muito cuidado. Pois o direcionamento do ensino pode gerar uma aprendizagem falha. Alguns estudos de cunho diagnóstico que estão apresentados na revisão de estudos, deste trabalho, apontam resultados ruins sobre a aprendizagem de números irracionais de estudantes do Ensino Fundamental, do Ensino Médio, e até mesmo do Ensino Superior (Licenciatura em Matemática).

Para Cardoso (2018), as pesquisas na área de Educação Matemática que discutem ensino e aprendizagem dos números irracionais mostram que muitos alunos passam por várias etapas de escolarização e ainda não conseguem compreender de maneira adequada este conceito. Tem-se então uma visão do ciclo de escolaridade dos alunos da educação básica, que é preocupante, pois a medida que se formam, carregam falhas de aprendizagem que podem se refletir em obstáculos de aprendizagem na educação superior.

São varias as dificuldades na aprendizagem de números irracionais, segundo Jesus e Oliveira (2018), elas iniciam-se no ensino, pois, algumas vezes os números irracionais são apresentados aos alunos como os números não racionais ou números que não podem ser escritos como a razão de dois números inteiros, porém se o universo numérico dos alunos ainda é o conjunto dos racionais, nenhuma dessas duas caracterizações tem qualquer significado.

Diante da situação com a qual se apresenta a aprendizagem de números irracionais, é importante refletir sobre o conhecimento em si, deste assunto, para perceber de que forma se pode ensina-lo de modo a efetivar uma aprendizagem de qualidade. O autor Pommer (2012), por exemplo, apresenta um entendimento bastante conceitual sobre o assunto tratado.

Conforme ele, nas mutuas conexões presentes na epistemologia de irracionais e racionais ocorre o surgimento de conceitos elementares como os pares: discreto/continuo; exato/aproximado; finito/infinito. Tais conceitos são essenciais para aumentar a possibilidade de abordar de modo significativo os números irracionais no ensino básico.

A partir desses pares de significados, a introdução e tratamento dos números irracionais requer um modo de ensino investigativo que abranja uma reflexão sobre como ensinar e como ensinar a ensinar números reais.

Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018) defendem a ideia de que para o conhecimento de números irracionais ser abordado no ensino, ele deve perpassar pela integração de três componentes na atividade matemática, a fim de desenvolver no estudante um raciocínio matemático eficaz. São eles: componente formal, componente algorítmico e componente intuitivo.

O componente formal diz respeito aos conhecimentos relativos às definições, axiomas, teoremas e provas, que devem ser aprendidos, organizados e aplicados pelo aluno. Vale enfatizar que o rigor em Matemática não é adquirido espontaneamente pelo estudante.

O componente algorítmico refere-se às habilidades relativas à aplicação de técnicas e procedimentos padronizados de resolução, cujo desenvolvimento também requer uma formação meticulosa. Esse componente tem uma forte relação com o formal, pois comprovam a existência de um raciocínio matemático eficiente.

A disposição única de componentes formais não garante o necessário para se enfrentar problemas e, da mesma forma, a disposição única de componentes algorítmicos por meio do domínio de técnicas, isento do conhecimento formal de argumentos que justificam essas técnicas, pode não ser suficiente para a resolução de problemas que fogem ao padrão.

O componente intuitivo está ligado à percepção que o indivíduo considera autoevidente, fazendo-o aceitar uma ideia sem questionar a necessidade de uma justificativa que formalize essa ideia. Em outras palavras, seria a aceitação de um conceito com base apenas na intuição.

Dispondo desses componentes, o professor pode adquirir uma orientação maior quanto ao ensino de números irracionais, porém, para Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018), essa proposta não direciona que esses componentes sejam explorados, necessariamente, num mesmo momento do processo de instrução. Assim, cabe ao professor adequar esses componentes à situação que está sendo trabalhada em aula, e aos alunos, de acordo com a fase escolar em que se encontram.

Quanto aos caminhos para se desenvolver o ensino de números irracionais, autores como Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018), destacam que uma possibilidade está na exploração do conceito de densidade de números reais que possibilita ao aluno um grau de liberdade para sugerir números aleatórios e, daí, é possível introduzir a noção de números irracionais.

Jesus e Oliveira (2018) defendem a ideia de que a abordagem dos irracionais pode ser por meio da representação geométrica deles, pois com a construção por régua e compasso de retângulos e o posterior calculo da medida da diagonal dessas figuras, tal como o tratamento algébrico nesse processo, constituem meios adequados para se desenvolver o ensino deste assunto.

De acordo com o PCN, o estudo desses números pode ser introduzido por meio de situações-problema que evidenciem a necessidade de outros números além dos racionais. Assim, os estantes podem encontrar números que tenham representação decimal infinita, e não periódica. Outra possibilidade está no problema clássico de encontrar o comprimento da diagonal de um quadrado, tomando o lado como unidade, que conduz ao número $\sqrt{2}$ (BRASIL, 1998).

Quando se trabalha com o problema clássico de se determinar a medida da diagonal de um quadrado, pode-se informar (ou indicar a prova) da irracionalidade de 2, por não ser uma razão de inteiros. Mas deve-se ter cuidado, pois ancorar o estudo dos irracionais no âmbito do formalismo matemático pode não garantir a aprendizagem como se espera (BRASIL, 1998).

Nessa subseção foi possível conhecer como o assunto de Números Irracionais é abordado no currículo do Ensino Básico, além de questionamentos e potencialidades no processo de ensino e aprendizagem deste assunto, como, por exemplo, a não adequação em aborda-lo no Ensino Fundamental em seu aspecto formal, além da importância de ensina-lo para explorar concepções como discreto, contínuo, exato, aproximado, finito e infinito. O conjunto de informações desse tópico ajudou a compreender os aspectos curriculares necessários para estruturar a Sequência Didática proposta.

3.5. Revisão de Estudos sobre o Ensino de Números Irracionais

Nesta subseção foi apresentada uma revisão de estudos que tratam do ensino e aprendizagem de Números Irracionais sobre diferentes aspectos como no aspecto teórico, no aspecto material em que este assunto se apresenta em livros didáticos e outros.

A revisão de estudos que se apresenta neste texto foi construída para se conhecer o que se tem discutido na literatura acadêmica e científica sobre o processo de ensino e aprendizagem do assunto referido, para saber o que se pode aproveitar e aperfeiçoar na Sequência Didática apresentada na seção 4 para promover a aprendizagem de Números Irracionais.

3.5.1. Metodologia de Revisão de Estudos

Para a construção dessa revisão de estudos foi feito um levantamento de trabalhos sobre números irracionais, com isso, buscou-se por trabalhos que tratam do ensino e/ou aprendizagem de números irracionais, por meio de uma busca no banco de dados do Google Acadêmico, banco de teses e dissertações da CAPES, PROFMAT, banco de artigos em eventos nacionais, locais e regionais de matemática, e outros, de modo que se utilizaram as seguintes palavras-chave:

“Números irracionais”;

“Ensino de números irracionais”;

“Aprendizagem de números irracionais”;

“Irracionais Matemática”.

O critério de escolha de trabalhos para compor a revisão de estudos priorizou trabalhos de dissertações, teses e artigos que tinham relação com as categorias: Estudos teóricos, estudos diagnósticos, estudos de análise de livro didático e estudos experimentais. Essas categorias forão descritas posteriormente. Os trabalhos encontrados tinham sido publicados entre os anos de 1999 a 2019.

Para a análise do levantamento teórico do assunto em questão, utilizou-se periódicos, artigos, dissertações e teses. Escolhemos trabalhos que tratam do ensino e/ou aprendizagem de Números Irracionais.

A realização dessa revisão de estudos auxiliou na compreensão de números irracionais de forma mais ampla, quanto ao seu processo de ensino e aprendizagem no âmbito do ensino básico, em especial no ensino fundamental, assim como as dificuldades relacionadas a esse processo, ajudando, de certa forma, a construção e a análise da área experimental dessa dissertação sobre o ensino de números irracionais, constituída por uma Sequência Didática.

Essa revisão foi dividida em três partes, as quais são:

1) Estudos Teóricos: Esses trabalhos são aqueles que propuseram conceitos e/ou ideias sobre o ensino de números irracionais. Também inclui aqueles que fazem reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem deste assunto.

2) Estudos Diagnósticos: Esses estudos irão permitir o entendimento das principais dificuldades dos alunos e dos professores no ensino e na aprendizagem de Números Irracionais.

3) Análise de livros didáticos: Os referenciais utilizados, serão apresentados como base para se perceber se e como são introduzidos e descritos, nos livros didáticos, em termos didáticos e epistemológicos, alguns temas essenciais envolvendo os números irracionais.

4) Estudos Experimentais: Os trabalhos descritos nessa categoria realizaram atividades que não seguem a ordem expositiva em: definição, exemplos e exercícios. Buscando, dessa maneira, realizar um ensino mais eficaz sobre números irracionais no ensino fundamental ou ensino médio.

O quadro 6 apresenta os trabalhos que utilizamos, os quais estão classificados a partir das categorias definidas anteriormente. Nele, estão os autores, os anos e os títulos de cada trabalho. Em seguida foi desenvolvida uma análise e observações mais detalhadas em relação a cada referencial citado no quadro a seguir.

Quadro 6 - Trabalhos Analisados

Categoria	Trabalhos Analisados	Tipo	Autor	Ano
Estudos Teóricos	Frações Contínuas e os Números Irracionais	Artigo	Pommer	2012

	No Ensino Básico.			
	Números Irracionais: Uma Abordagem Para o Ensino Básico	Dissertação	Vasconcelos	2016
	A Interação Entre os Componentes Intuitivo, Algorítmico e Formal no Ensino dos Números Irracionais na Educação Básica	Artigo	Corbo, Pietropaolo e Amorim	2018
	O Ensino de Números Irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso?	Artigo	Broetto e Wagner	2019
Estudos Diagnósticos	Algumas Concepções de Licenciandos em Matemática sobre o Sistema Dos Números Reais	Artigo	Moreira, Soares e Ferreira	1999
	Números Reais no Ensino Fundamental: Alguns Obstáculos Epistemológicos	Dissertação	Costa	2009
	A Densidade dos Números Reais: Concepções de Professores da Educação Básica	Artigo	Silva e Penteado	2010
	Os Números Irracionais e seu ensino delineando a imagem conceitual de um grupo de professores.	Artigo	Pietropaolo, Corbo e Campos	2013
	A Teoria dos Campos Conceituais no Ensino de Números Irracio-nais: Implicações da Teoria Piagetiana no Ensino de Matemática	Artigo	Nogueira e Rezende	2014
	Números Irracionais na Educação Básica: Documentos Curriculares e Conhecimentos de Alunos Brasileiros e Franceses	Artigo	Rezende e Nogueira	2015
	O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática	Tese	Broetto	2016

	Concepções de Professores acerca de Conhecimentos de Estudantes sobre Números Irracionais	Artigo	Machado e Rezende	2017
	Números Irracionais: Investigando o conceito de incomensurabilidade.	Artigo	Rocha	2017
Abordagem nos livros didáticos	Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica	Dissertação	Souto	2010
	A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais.	Tese	Pommer	2012
	Números Irracionais: Uma Análise de Livros Didáticos dos Ensinos Fundamental II e Médio	Trabalho de Conclusão de Curso	Jesus	2017
	Estudo de Abordagens dos Números Irracionais nos Anos Finais do Ensino Fundamental	Dissertação	Felix	2018
	Números Irracionais Na Escolaridade Básica: As Contribuições Didático-Epistemológicas Advindas Da História Da Matemática.	Artigo	Pommer	2018
Estudos experimentais	Números Irracionais e sua Compreensão pela Experiência	Artigo	Jover	2013
	A Construção dos Números Reais	Dissertação	Roriz	2014
	Aplicações de números irracionais: um número famoso, outro instigante	Artigo	Serra	2015
	Uma Sequência De Atividades Investigativas Utilizando Uma Abordagem Histórica Sobre Os Números	Artigo	Matos e Barros	2016

	Irracionais.			
	O Enigmático Número Irracional	Artigo	Schembergue e Pereira	2016
	Sobre possibilidades de ensino e aprendizagem dos números irracionais no 8º ano do Ensino Fundamental	Dissertação	Nobre	2017
	Sensibilização Para Existência E Dos Números Irracionais	Dissertação	Rocha	2018

Fonte: Autor (2021)

Com base na descrição metodológica feita, as próximas subseções da Revisão de Estudos apresentam os trabalhos revisados conforme foram classificados no quadro anterior.

3.5.2. Estudos Teóricos

Nessa primeira categoria da revisão de estudos, estão apresentadas algumas compreensões teóricas a respeito de Números Irracionais. Nesse sentido, destaca-se, por exemplo, a análises de como ocorre a compreensão desse assunto, assim como as orientações de como se deve ser ensinado e outras reflexões.

Na pesquisa de Pommer (2012) foi tratado sobre frações contínuas e os números irracionais no ensino básico, com o objetivo de destacar alguns aspectos curriculares, epistemológicos e didáticos que possibilitam delimitar algumas contribuições que o tema das Frações Contínuas possibilita dentro da problemática do ensino dos números irracionais no ciclo básico.

O autor desenvolveu uma pesquisa bibliográfica, a qual desenvolve uma reflexão envolvendo aspectos curriculares, epistemológicos e didáticos para a discussão da temática das Frações Contínuas dentro do âmbito do ensino secundário. Essa pesquisa justificou-se no fato de que números irracionais são encontrados em poucas pesquisas ligadas a escolaridade básica, de modo que, quando são abordados, são geralmente apresentados privilegiando mais aspectos operatórios, finitos e exatos, o que limita a abordagem e o entendimento deste tema no ensino da Matemática.

Conforme o autor é muito importante a aproximação dos irracionais para os números racionais, pois permite delimitar e significar ambos os campos numéricos, bem como auxiliar no entendimento de vários eixos caracterizadores dos Números Reais, possibilitando compreensões dos pares discreto/contínuo, finito/infinito e exato/aproximado.

Um recurso importante definido por Machado (1995), o qual o texto faz referência, é a chamada ‘rede de significados’ que a respeito de Frações Contínuas, pode ser contextuado a situações de ensino presentes em vários ramos científicos, possibilitando até mesmo a revalorização de alguns tópicos da Teoria dos Números, ligados ao tratamento algébrico, e que pode ser entendido como uma alternativa para atualizar o currículo, numa perspectiva temática.

O texto revelou a possibilidade de abordagem das Frações Contínuas Simples no Ensino Básico, considerando-a como uma oportunidade de atualização do currículo de Matemática, a partir do trabalho com o tema das aproximações, revelando uma conexão entre os conjuntos dos Números Racionais e o conjunto dos Números Irracionais. Este assunto permite esclarecer e ampliar o próprio conceito de fração, assim como promover um maior entendimento envolvendo os números irracionais, possibilitando um contato do estudante para com a natureza discreta e finita, em contrapartida da natureza contínua e infinita dos números reais.

Como resultados, foi apontada a possibilidade de uso das Frações Contínuas como um assunto que pode ser explorado para significar os números irracionais, além de articular conhecimentos matemáticos presentes no currículo de Matemática, interligando-os numa rede de significados.

A respeito ao aspecto epistemológico, foi evidenciada a importância da aproximação dos irracionais com os números racionais, devido permitir delimitar e significar ambos os campos numéricos, além de explorar de modo propício os pares discreto/contínuo, finito/infinito e exato/aproximado. Ligado ao aspecto epistemológico, Pommer (2012) sugeriu a possibilidade de explorar diversas estratégias de resolução de problemas no ensino, por se tratar um valioso recurso didático.

Do ponto de vista curricular a rede de significados ligada às Frações Contínuas pode ser uma boa proposta para se atualizar o currículo, pois permite realçar as conexões internas e externas aos próprios conhecimentos matemáticos.

O trabalho de Vasconcelos (2016) teve como objetivo, o de apresentar algumas discussões relacionadas ao ensino dos números irracionais no ensino básico com algumas propostas de aplicações em sala de aula utilizando o *Geogebra* como ferramenta auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

Esse trabalho trata de uma pesquisa bibliográfica. Nele, é abordado sobre algumas propriedades importantes dos números irracionais e aplicações do uso desses números no cotidiano. Nesse momento também é tratado sobre propriedades e aplicações dos números irracionais transcendentes conhecidos π (pi), Θ (phi) e o número de Euler, e. Após esse momento foi apresentado sobre com que o PCN e o CBC (Conteúdos Básicos Comuns de Minas Gerais) abordam sobre conjunto dos irracionais, com suas propriedades, no ensino fundamental e médio e logo depois é exibido um panorama sobre como alguns livros do ensino básico abordam o tema.

Conforme o autor o ensino dos números irracionais deve ser significativo desde o primeiro contato do aluno com o assunto. Pois pode expressar pouco sentido somar, multiplicar, racionalizar e resolver equações envolvendo números irracionais sem que o estudante tenha conhecimento da utilidade e o propósito de se operar com estes números.

O autor analisou os PCN o CBC e também três livros de matemática do ensino fundamental que, na época desta pesquisa, eram utilizados na rede pública de educação de Minas Gerais, que eram: “Praticando Matemática” dos autores Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos da Editora do Brasil, “A conquista da matemática” de José Ruy Giovanni Jr. e Benedicto Castrucci da editora FTD e “Tudo é matemática” do autor Dante que foi impresso pela editora ática. Após isso, ele descreveu o tratamento de como os números irracionais são abordados no ensino fundamental, com base na análise feita, que segundo ele é:

i) No sexto ano, ocorre o início da compreensão de radiciação, de modo que é apresentado um método para se calcular a raiz de números naturais que são quadrados perfeitos. Dessa forma, é explícito a informação que a raiz quadrada de muitos números naturais não é um número natural, entretanto não traz no texto nenhuma definição para número irracional.

ii) No sétimo ano, são trabalhadas as raízes quadradas, mesmo aquelas de números não quadrados perfeitos, sem que seja exposto inicialmente algum conceito sobre números irracionais.

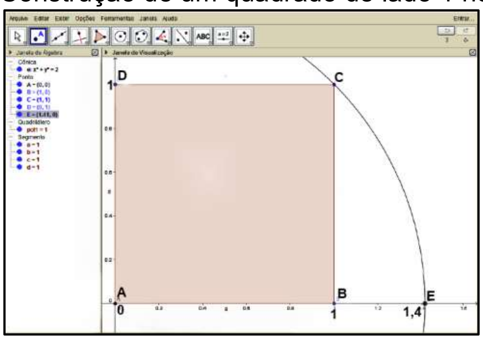
iii) No oitavo ano é apresentado um algoritmo para se estimar raiz quadrada de números que não são quadrados perfeitos, assim como a soma de radicais de mesmo índice e mesmo radicando e, mesmo com tudo isso, não é exibida uma definição clara e especifica de número irracional.

iv) No nono ano são trabalhadas as equações do segundo grau com raízes irracionais, assim como equações irracionais, transformação de dois radicais a um mesmo índice, potenciação de números irracionais e mesmo depois ainda não é exposto o conceito de número irracional.

O autor enfatizou a importância de se vincular o ensino de números irracionais com a utilização de tecnologias virtuais, em especial, o geogebra, um software livre que pode auxiliar o ensino e aprendizagem em matemática pois reúne geometria e álgebra em um mesmo ambiente, o qual se apresenta como um sistema de geometria dinâmica, por permitir realizar construções de pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas e muitas outras.

Vasconcelos (2016) também aponta o geogebra permite o desenvolvimento de atividades básicas que podem dar um real significado a conceitos relacionados aos números irracionais. Por exemplo, com o uso do geogebra cria-se um quadrado ABCD de lado 1 com o vértice A na origem e lado AD sobreposto ao eixo x e em seguida cria-se uma circunferência com centro em A e raio AC. Dessa forma a interseção da circunferência com o eixo x é o ponto E, assim como pode ser visto na figura abaixo.

Figura 32 - Construção de um quadrado de lado 1 no Geogebra.



Fonte: Vasconcelos (2016).

Percebe-se que o ponto E localiza-se aproximadamente no ponto (1,4; 0) e que pode ser aproximado ainda mais até quanto se queira do pono que nesse caso representa ($\sqrt{2}$; 0). Percebe-se que $\overline{AE}$, que é raio da circunferência formada, mede $\sqrt{2}$, da mesma forma que $\overline{AC}$ que é diagonal do quadrado ABCD. Desse modo, números irracionais podem ser apresentados em situações, utilizando o Geogebra, para se trabalhar com o aluno.

As sugestões feitas pelo autor é introduzir o assunto no oitavo ano do ensino fundamental, de modo que seja fornecida ao aluno a informação de que as raízes quadradas de números que não são quadrados perfeitos são números irracionais, introduzindo a definição de números irracionais e aproveitando este momento para falar um pouco mais sobre o surgimento desses números.

Quando o aluno esteja aprendendo a calcular a área e comprimento da circunferência utilizando o π, é o momento adequado para se aprofundar um pouco mais no assunto falando sobre a irracionalidade deste número, sendo esse momento importante para se fazer uso da história da matemática para dar sentido ao que motivou os estudos sobre os números irracionais.

No nono ano, a construção da reta numérica é um tópico importante de ser explorado para se ordenar os números irracionais e estimar uma aproximação decimal para um número irracional. Além disso, existem tópicos que são pertencentes a este ano escolar que podem servir de apoio na construção do conhecimento:

- As raízes irracionais de uma equação do segundo grau;
- Teorema de Pitágoras;
- Equações irracionais;
- Comparação entre dizimas periódicas e números irracionais.

No artigo de Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018), foi direciondo a tratar sobre os componentes intuitivo, algorítmico e formal no ensino dos números irracionais na Educação Básica. Nesse trabalho, os autores tiveram o objetivo de contribuir para uma reflexão sobre o estudo dos números irracionais na Educação Básica. Nesse sentido, eles procuraram interpretar possíveis estratégias de enfrentamento de situações que envolvem esse tema, identificando aspectos, nos quais, essas abordagens favorecem a exploração e a articulação desses três componentes.

Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018) destacam a existência de três componentes muito importantes no processo de ensino e aprendizagem. Cabendo ao professor adequar esses componentes à situação que está sendo trabalhada em aula, e aos alunos, de acordo com a fase escolar em que se encontram. Esses componentes são:

- O componente formal diz respeito aos conhecimentos relativos às definições, axiomas, teoremas e provas, que devem ser aprendidos, organizados e aplicados pelo aluno.
- O algorítmico, por sua vez, concerne às habilidades relativas à aplicação de técnicas e procedimentos padronizados de resolução, cujo desenvolvimento também requer uma formação meticulosa, pois constitui-se em condição básica para o desenvolvimento de um raciocínio matemático eficiente.
- O componente intuitivo se refere a uma compreensão que o indivíduo considera auto evidente, que o faz aceitar uma ideia sem questionar a necessidade de uma justificativa que legitime essa ideia.

Diante dos componentes citados pelos autores desse trabalho, eles sugerem que seja explorado os distintos significados dos números racionais, por meio de atividades que favoreçam a percepção da equivalência entre suas representações fracionária e decimal, cuja compreensão é indispensável para a posterior introdução e definição dos números irracionais. Sugere-se que essa iniciação parta de uma área particular dos números racionais, as dízimas periódicas.

Os autores indicam que a construção da fração geratriz de uma dízima periódica é conteúdo prescrito para os dois últimos anos do Ensino Fundamental 1 e antecede a introdução do conjunto dos números reais como reunião dos conjuntos dos racionais e irracionais. Entretanto, as justificativas e os argumentos utilizados pelo professor nessa abordagem, devem se assentar sobre concepções inerentes ao conjunto dos números reais, assegurando a possibilidade de escrever por exemplo $0,\overline{2}$ = a/b, com a e b inteiros e b não nulo e também garantindo a conservação da igualdade, quando multiplicamos os dois membros por um mesmo número real distinto de zero.

Para o aprendizado de números irracionais, segue, após a ideia anterior, o entendimento de densidade dos racionais. Uma abordagem que explore a densidade do conjunto $\mathbb{Q}$, favorece a compreensão de que, em qualquer intervalo da reta, por menor que seja, existem infinitos números racionais. Diante disso os autores apontam que uma possibilidade boa para o ensino da ideia de densidade é a percepção advinda do cálculo da média aritmética de dois números.

Essa mesma questão, analisada sob o aspecto algorítmico, consiste em cálculos que, de certa forma, transmite um conhecimento intuitivo ao aluno sobre densidade de números racionais.

Para uma abordagem mais direta aos números irracionais, os autores acreditam que deve haver uma interdependência entre as técnicas (componente algorítmico) e os argumentos que fundamentam essas técnicas (componente formal) para que se forneça a percepção da possibilidade de construção de infinitos segmentos de medida irracional. Para isso, uma possibilidade é a construção de figuras em que se desenvolva o teorema de Pitágoras ou ideia de média geométrica para, com isso, resultar em medidas de valor irracional.

Após estabelecer um segmento de medida irracional, o transporte de sua medida para a reta numérica pode acrescentar a percepção da existência de pontos na reta que não correspondem a números racionais, muito embora seja denso, na reta, o conjunto dos racionais.

Algo muito importante nesse processo é a ocorrência de uma abordagem que trabalhe a característica numérica e geométrica, os quais complementam o processo de construção do conceito de número irracional, pois os exemplos de números que poderiam ser criados pelos alunos, representados na forma decimal, e aqueles construídos com régua e compasso colocam em cena os números irracionais sob duas representações: a forma decimal e a forma de radical.

Outro ponto discutido no trabalho de Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018) é sobre a importância da prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$, por redução ao absurdo, algo que que no aspecto formal se caracteriza de forma pesada, pouco agradável esteticamente, embora seja importante. Assim, cabe ao professor a escolha do tipo de prova que torne a compreensão – de que números irracionais não podem ser escritos na forma de fração – algo mais significativo ao estudante. Os autores sugerem a demonstração via Princípio Fundamental da Aritmética mais compreensiva.

A utilização da calculadora, conforme os autores, pode beneficiar aspectos formais acerca da representação de números racionais e irracionais e prova da irracionalidade de um número com a ideia de aproximação por racionais.

Após o entendimento sobre o que é um número irracional, surge o caráter algorítmico presente no estudo das operações com números racionais e irracionais, integrado à exploração das propriedades válidas para essas operações, pode favorecer a percepção da importância dos argumentos formais, no trabalho com os números irracionais, o estabelecimento de relações entre os racionais e os irracionais e, igualmente, a percepção da possibilidade de construir infinitos números irracionais a partir de um único número cuja irracionalidade já foi aceita.

No entendimento das propriedades das operações entre números reais, por exemplo, o professor pode auxiliar na distinção entre proposições cuja avaliação, como verdadeiras ou falsas, exige o desenvolvimento de uma prova formal e proposições para as quais bastaria um contraexemplo, como em “a soma de dois números racionais é sempre racional” e “a soma de dois números irracionais é sempre irracional”.

Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018) também estabelecem conforme a análise da literatura de alguns teóricos, que é importante também que ocorra o ensino da relação entre números reais e pontos da reta, levando em conta a densidade dos racionais na reta numérica. Nesse processo, eventualmente algum aluno poderia levantar dúvidas sobre a possibilidade de localizar um número irracional sobre a reta real, e se esse ponto pode coincidir com outro, racional. Os autores indicaram que nessa etapa escolar, a ideia de correspondência bijetiva entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos pontos da reta pode receber uma abordagem intuitiva. Embora os estudantes não tenham aprendido o conhecimento formal de bijeção, ou até mesmo de função.

As situações apontadas no texto de Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018) são exemplos tomados como pontos de partida para a reflexão sobre a possibilidade e importância de articular os componentes algorítmico, intuitivo e formal, no estudo dos números irracionais.

A introdução de determinados temas, pode ser adequado pelo professor sob os componentes citados anteriormente, desse modo, a utilização de argumentos formais para justificar verdades matemáticas relativas aos temas, pode ser articulada conforme o professor achar necessário para se trabalhar números irracionais, cabendo a ele algumas vezes incluir concepções mais intuitivas do que formais. Isso vai depender do nível de compreensão de seus alunos.

Para os autores essas discussões são imprescindíveis no processo de construção de conhecimentos relativos aos números, para que os estudantes não apenas percebam a necessidade de ampliação dos campos numéricos, mas, sobretudo, iniciem uma reflexão que resulte na valorização da Matemática, como ciência logicamente estruturada, organizada e de possível compreensão.

Em um artigo publicado por Broetto e Wagner (2019), foi desenvolvido uma pesquisa bibliográfica que teve o objetivo de refletir sobre a falta de articulação entre o ensino dos números irracionais na Educação Básica e a formação inicial de professores de Matemática.

Conforme os autores, na Educação Básica esse assunto é tratado com superficialidade e pouco aprofundamento conceitual, basicamente por meio de exemplos, enquanto, na formação inicial do professor de Matemática, ainda prevalece uma abordagem formalista desse tema, o que não capacita o futuro professor para ensinar números irracionais na Educação Básica.

O descompasso entre a licenciatura e a Educação Básica pode provocar uma dupla descontinuidade no ensino. No caso dos números irracionais, mais especificamente, esse descompasso pode provocar a formação de um círculo vicioso: o professor sai da universidade sem uma formação adequada para abordar o assunto na Educação Básica, fazendo com que seus alunos cheguem até a universidade sem uma imagem adequada de número irracional, e o ciclo se repete.

Diante da análise da literatura pesquisada neste trabalho, Broetto e Wagner (2019) indicam que no Ensino Superior, o excesso de formalismo também não capacita o futuro professor de Matemática para ensinar números irracionais na Educação Básica, o que vai refletir na manutenção das dificuldades dos alunos da Educação Básica, fechando um círculo vicioso.

Diante de todos os argumentos que foram apresentados nesse artigo, os autores sugerem, nele, que as peculiaridades da Matemática escolar precisam fazer parte do currículo da licenciatura em Matemática, principalmente no que se refere ao ensino dos números reais/irracionais na Educação Básica.

Os trabalhos revisados nessa subseção possuem conhecimentos importantes acerca do ensino e aprendizagem de números irracionais sob o aspecto teórico. Diante disso, no quadro 7 foram sintetizadas as principais informações dos trabalhos revisados.

Quadro 7 – Síntese dos dados dos estudos teóricos

Trabalhos Analisados	Objetivo	Conclusões / Sugestões
Pommer (2012)	Destacar alguns aspectos curriculares, epistemológicos e didáticos que possibilitam delimitar algumas contribuições que o tema das Frações Contínuas possibilita dentro da problemática do ensino dos números irracionais no ciclo básico.	Como resultados, foi apontada a possibilidade de uso das Frações Contínuas como um assunto que pode ser explorado para significar os números irracionais, além de articular conhecimentos matemáticos presentes no currículo de Matemática, interligando-os numa rede de significados. A respeito ao aspecto epistemológico, foi evidenciada a importância da aproximação dos irracionais com os números racionais, devido permitir delimitar e significar ambos os campos numéricos, além de explorar de modo propício os pares discreto/contínuo, finito/infinito e exato/aproximado. Ligado ao aspecto epistemológico, Pommer (2012) sugeriu a possibilidade de explorar diversas estratégias de resolução de problemas no ensino, por se tratar um valioso recurso didático. Do ponto de vista curricular a rede de significados ligada às Frações Contínuas pode ser uma boa proposta para se atualizar o currículo, pois permite realçar as conexões internas e externas aos próprios conhecimentos matemáticos.
Vasconcelos (2016)	Apresentar algumas discussões relacionadas ao ensino dos números irracionais no ensino básico com algumas propostas de aplicações em sala de aula utilizando	Este autor fez um panorama de tópicos, sua organização e como podem ser tratados no ensino básico. Dentre as sugestões por ele feitas ▪ Ao se trabalhar com radicais no oitavo ano do ensino fundamental, deve ser definido o que é um número irracional e aproveitar este momento para falar um pouco mais sobre o surgimento desses

	o geogebra como ferramenta auxiliar no processo de ensino\aprendizagem.	números. ▪ No nono ano, a construção da reta numérica é um tópico importante de ser explorado para se ordenar os números irracionais e estimar uma aproximação decimal para um número irracional. ▪ O uso do Geogebra é um recurso muito útil no ensino de números irracionais, pois permite o desenvolvimento de atividades básicas que podem dar um real significado a conceitos relacionados aos números irracionais. Nele, há a possibilidade de construir, por exemplo, quadrados e determinar suas diagonais.
Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018)	Contribuir para uma reflexão sobre o estudo dos números irracionais na Educação Básica.	A introdução de números irracionais pode ser modulada pelo professor sob os componentes formal, algoritmo e intuitivo, assim, ele pode utilizar os argumentos formais para justificar verdades matemáticas e algumas vezes incluir concepções mais intuitivas do que formais. Isso vai depender do nível de compreensão de seus alunos.
Broetto e Wagner (2019)	Refletir sobre a falta de articulação entre o ensino dos números irracionais na Educação Básica e a formação inicial de professores de Matemática.	O excesso de formalismo sobre números reais, quando este é abordado no Ensino Superior, não capacita de maneira eficiente o futuro professor de Matemática para ensinar números irracionais na Educação Básica, o que vai refletir na manutenção das dificuldades dos alunos da Educação Básica, fechando um círculo vicioso. Diante disso, as peculiaridades da Matemática escolar precisam fazer parte do currículo da licenciatura em Matemática, principalmente no que se refere ao ensino dos números reais/irracionais na Educação Básica

Fonte: Pommer (2012); Vasconcelos (2016); Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018); Broetto e Wagner (2019).

3.5.3. Estudos Diagnósticos

Nessa categoria da revisão de estudos, mostramos algumas compreensões obtidas dos trabalhos classificados como estudos diagnósticos, onde foram apresentados estudos de cunho diagnóstico realizados por alguns referenciais teóricos a respeito do ensino/aprendizagem de números irracionais.

O trabalho feito por Moreira, Soares e Ferreira (1999), teve o objetivo de conhecer as pré-concepções e imagens que pudessem obstaculizar a aprendizagem dos conceitos relativos aos números reais na Licenciatura.

Para conhecer melhor as “imagens conceituais” dos alunos sobre números irracionais, aplicou-se um questionário a 84 alunos dos cursos de

Matemática da UFMG e da UFSC sendo 34 do 2º período, 38 do 4º, e 12 do 7º. Os pesquisadores dividiram as questões em dois grupos A e B, cada um deles com 11 perguntas, sendo as 6 primeiras comuns aos dois grupos. Esta divisão foi feita para que o questionário não ficasse muito extenso. O grupo A foi respondido por 36 alunos e o B por 48 alunos.

A aplicação do questionário ocorreu em condições normais de sala de aula, com duração de 100 minutos, com respostas individuais e sem identificação dos alunos. Sendo que as questões presentes no questionário, eram abertas e algumas direcionaram aos participantes apresentarem respostas numa linguagem mais espontânea.

Alguns resultados encontrados foram:

▪ Mais do que um em cada três estudantes não reconhece claramente quando um determinado subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ possui elemento máximo ou elemento mínimo. Para os autores, essa "imagem" de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{R}$ como conjuntos cujos subconjuntos limitados devem possuir elemento mínimo (e/ou máximo) pode criar obstáculos à compreensão da noção de irracionalidade e da própria natureza do contínuo numérico.

▪ Quase 50% dos estudantes da pesquisa associam, às vezes de maneira bem explícita, os irracionais com tudo aquilo que não é familiar ou bem compreendido. Conforme os autores, isto traz um ar de mistério que cerca os irracionais mesmo para alunos que optaram pelo curso de Matemática no 3.º grau. Eis algumas das respostas apresentadas.

Diante dos resultados citados e alguns outros, os autores destacaram em, dois pontos que podem ser deduzidos da análise dos resultados:

1) O contraste da racionalidade e a irracionalidade parece ser percebido como pura formalidade, na medida em que a distinção é apenas na forma de representação fração e não fração, ou melhor, decimal finito ou periódico e decimal infinito não periódico.

2) Se não se compreende o sentido e a razão de ser dos irracionais, é difícil superar as dificuldades na compreensão de vários conceitos ligados à estrutura dos reais. Por exemplo, o que significa $2^{\sqrt{2}}$? Qual o sentido da forma decimal infinita? Os irracionais são densos em $\mathbb{R}$?

Moreira, Soares e Ferreira (1999) também indicam que estudo dos sistemas numéricos é de fundamental importância na formação matemática do futuro professor. Mas os resultados deste questionário indicam que uma abordagem do tema, especificamente voltada para a formação do futuro professor, deve ser construída na Licenciatura.

No trabalho desenvolvido por Costa (2009), teve o objetivo de identificar alguns exemplos de obstáculos epistemológicos matemáticos nas salas de aula do Ensino Fundamental no ensino/aprendizagem de números reais a fim de ampliar a discussão visando a concepção dos números reais.

Esse trabalho justificou-se na deficiência no ensino/aprendizagem de matemática no ensino básico, comprovada pelos resultados insatisfatórios de avaliações nacionais, como Prova Brasil e Saeb. Com base nessa questão, foi desenvolvida uma pesquisa diagnóstica, pautada em identificar obstáculos epistemológicos no ensino de matemática por meio de questionários aplicados a alunos de 5º ano ao 9º ano do Ensino Fundamental.

Inicialmente foi realizado uma pesquisa bibliográfica para se compreender a noção de obstáculo epistemológico de Bachelard (1999) e o estudo realizado por Brousseau na área da Didática Francesa na Educação Matemática. Após isso foi aplicado questionários "semi-estruturados", baseados em um estudo de metodologias de pesquisas educacionais, com 121 alunos de uma escola particular localizada em São Vicente-SP. O questionário sobre números naturais foi direcionado aos alunos do 5º ano, o questionário de números racionais foi direcionado os alunos do 6º ano, o de inteiros para o 7º ano, o de irracionais para os alunos do 8º ano e reais para o 9 ano.

Quanto aos resultados obtidos, tem-se por exemplo o resultado de uma questão que requeria que os alunos explicassem com suas palavras o que é um número irracional. Essa questão foi apresentada nos questionários aplicados aos alunos do 8º ano e 9º ano. Os alunos do 8º ano demonstraram não ter nenhuma ideia se quer do que seria um número irracional, de modo que nenhuma resposta, por mais errada que fosse, tenha se aproximado da resposta correta. Em contrapartida, as respostas dadas pelos alunos do 9º ano, mostraram indícios que esse assunto foi tratado, restando algumas lembranças.

Na pesquisa realizada foi observado, de maneira geral, pelo autor, que muitos estudantes têm apenas vagas lembranças das "regras" da Matemática. De modo que, alguns até tentam reproduzi-las e quando não conseguem, criam outras respostas baseadas em suas lembranças, a fim de encontrar uma resposta compatível com a resposta requerida. As regras, cujo significado não expressam significado aos alunos acabam se constituindo em grande dificuldade na construção do conhecimento dos alunos.

Dentre os resultados obtidos, o autor apresentou o quadro abaixo como uma forma de sintetizar os resultados obtidos.

Quadro 8 - Síntese dos resultados obtidos.

	Números Reais	
	Especificação	Obstáculos
Números Naturais	Sobre o reconhecimento e a utilização das características do sistema de numeração decimal e sobre o princípio do valor posicional e da decomposição de números naturais nas suas diversas ordens	A idéia de que o zero não possui valor pode interferir na sua interpretação como algarismo utilizado para indicar a ausência de uma ordem inteira no número e se constituir um obstáculo epistemológico para a escrita de números cuja decomposição apresenta ausência de alguma ordem.
Números Inteiros	Sobre a localização de números inteiros na reta numérica e sobre o reconhecimento e a utilização de algumas características do conjunto dos números inteiros.	A idéia de que o antecessor e o sucessor de um número natural sempre apresenta uma unidade a menos e a mais, respectivamente, pode se constituir um obstáculo epistemológico na identificação de antecessor e sucessor de números inteiros negativos.
Números Racionais	Sobre o reconhecimento das representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal	O fato dos conjuntos dos números naturais e dos números inteiros serem conjuntos discretos pode aparecer como obstáculo epistemológico para a compreensão de que entre quaisquer dois números racionais existem infinitos números racionais. As ideias de sucessor e antecessor no conjunto dos números naturais (e inteiros) podem aparecer como obstáculo epistemológico na concepção dos números racionais, e futuramente nos reais, no que diz respeito à impossibilidade de definir o número racional ou real que vem "logo a seguir" de outro número.

	Sobre a identificação de diferentes representações de um mesmo número racional	O fato do número natural (e de um inteiro) se apresentarem "prontos" pode ser um obstáculo epistemológico na apropriação de números que possuem símbolo em sua representação, como no caso a divisão em uma fração.
	Sobre a identificação da localização de números racionais na reta numérica.	O fato de um natural (e um inteiro) normalmente, utilizando apenas algarismos, ser escrito de uma única maneira pode ser um obstáculo epistemológico para a aceitação de que um número racional pode admitir mais de uma representação.
	Sobre a comparação de números racionais.	A ideia de que podemos comparar dois números naturais pela quantidade de algarismos que eles possuem pode se constituir um obstáculo epistemológico na comparação de números racionais escritos na forma decimal que apresente diferentes algarismos após a vírgula. A ideia de que a comparação entre números naturais é realizada levando-se em consideração apenas o seu valor absoluto pode se constituir em um obstáculo epistemológico na comparação entre frações que apresentam o mesmo numerador e denominadores diferentes.
Irracionais	Sobre a concepção dos números irracionais.	O fato de um número inteiro se apresentar "pronto" pode ser um obstáculo epistemológico na apropriação de números que possuem algum símbolo em sua representação, como no caso dos irracionais obtidos por raízes quadradas.

Fonte: Costa (2009).

Como conclusão do trabalho de Costa (2009), ela afirma que, infelizmente, muitos alunos têm apenas vagas lembranças das "regras" da Matemática, sendo que muitos deles até tentam reproduzi-las e em seus esforços frustrados, acabam mesmo criando outras regras semelhantes as que lhes foram apresentadas, com a finalidade de encontrar uma resposta. Entretanto, depois essas mesmas regras distorcidas, cujo significado provavelmente tenha ficado "escondido" acabam se desenvolvendo em grande dificuldade na construção do conhecimento.

Em um trabalho realizado por Silva e Penteado (2010) que tratou sobre as concepções de professores sobre o estudo de números reais e densidade no ensino médio, teve como objetivo investigar quais os saberes mobilizados por professores do ensino médio, ao analisarem questões envolvendo a categorização dos números reais em racionais e irracionais.

Este trabalho justificou-se nas dificuldades encontradas durante o ensino em sala de aula, onde muitos estudantes possuíam dificuldades na aprendizagem de limite e continuidade de funções, dificuldades essas que, de acordo com os autores, são decorrentes da falta de compreensão de propriedades do conjunto dos números reais.

A partir do direcionamento adotado, este trabalho investigou, num primeiro momento, as reações explicitadas por professores do Ensino Médio frente a dois tipos de procedimentos distintos para o início de discussões a respeito da densidade dos números reais: primeiro, a obtenção de números racionais entre dois racionais determinados, por meio da média aritmética deles; segundo, a obtenção de números irracionais entre dois reais dados, a partir da troca de um ou mais algarismos, da representação decimal de um deles. Após isso, foi explicado aos professores sobre a viabilidade da aplicação dessas atividades ou assemelhadas a seus alunos.

O público alvo foi um grupo de professores participantes do PEC – Projeto de Educação Continuada, que visa capacitar os professores da rede pública por meio de palestras, aulas e oficinas totalizando 80 horas. A sequência de ensino foi aplicada a onze professores do Ensino Médio, como oficinas pertencentes a este projeto, numa Instituição de Ensino na grande São Paulo. As atividades foram discutidas primeiramente em duplas e por fim no grupo todo, tendo sempre presente a preocupação de justificar todas as respostas apresentadas.

O procedimento de se determinar um número racional entre dois outros, calculando-se a média aritmética deles, conforme o autor, se revelou bastante eficaz e não trouxe qualquer dificuldade aos participantes. O procedimento inspirado na diagonalização de Cantor para a obtenção de um número irracional entre dois irracionais ou um irracional e um racional também se revelou adequado, apesar de não ser usual sua utilização na Educação Básica. Outra conclusão apresentada pelo autor, foi sobre a questão específica da densidade dos números reais, onde parece que os professores se apropriaram desta propriedade, como podem sugerir os comentários:

“Sim, entre dois números racionais existem infinitos racionais”.

“As sucessivas médias vão se aproximar cada vez mais de um número, o espaço entre eles sempre vai existir, mas vai diminuir”.

“Existem infinitos números irracionais, pois entre dois irracionais existem infinitos irracionais”.

Quanto ao registro de representação decimal infinito, percebeu-se que alguns professores relacionaram corretamente este registro, quando periódico, a um número racional e, em outros momentos, associaram a representação infinita a um número irracional.

De modo geral os procedimentos sugeridos, não encarados como um modelo pronto e acabado a ser seguido, foram muito bem aceitos pelos professores o que se revelou, com a observação dos autores, que a maioria dos sujeitos ao responder questões, recorria às suas respostas anteriores, podendo isso indicar que, possivelmente houve uma tentativa de reprodução do procedimento sugerido em atividades anteriores.

Os autores Pietropaolo, Corbo e Campos (2013) desenvolveram uma pesquisa, cujo objetivo era delinear a imagem conceitual constituída pelos professores, da amostra escolhida, com relação aos números irracionais, assim como também aos conhecimentos pedagógicos sobre esse assunto.

Essa pesquisa direcionou-se à investigação da imagem conceitual relativa aos números irracionais, constituída por um grupo de 23 professores da rede pública da cidade de São Paulo. Ela trata de uma pesquisa diagnóstica de abordagem qualitativa, e que, contou com o apoio do Observatório da Educação do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante Anhanguera, com financiamento da CAPES.

Foram aplicados questionários, com base nas categorias de conhecimentos necessários ao professor de Matemática, estabelecidas por Ball et al (2008), as quais são: o conhecimento do conteúdo (comum/especializado), o conhecimento do conteúdo e do estudante, o conhecimento do conteúdo e do ensino e o conhecimento curricular do conteúdo.

A partir da aplicação do questionário, foi examinado as respostas dos professores, e dessa forma, pôde-se compreender a imagem conceitual relativa aos números irracionais em sua construção a partir de: definições, representações, propriedades, operações, estratégias diferenciadas de abordagem, o tratamento formal necessário à compreensão dos irracionais, as relações que podem ser estabelecidas entre esses números e outros conjuntos numéricos, as relações que podem ser estabelecidas entre esses números e outros conteúdos da Matemática ou de outras áreas do conhecimento, as orientações curriculares relativas a esse tema e as dificuldades inerentes ao processo de construção desse conhecimento.

A partir dos resultados obtidos, tem-se três tipos de análise apresentadas pelos autores, as quais são:

i) Quanto as definições, representações e campos numéricos, a análise das definições apresentadas pelo grupo revelou falhas em conhecimentos elementares. Como por exemplo, dentre as respostas dadas pela pergunta "Como você define (ou definiria), em suas aulas, os conceitos de número racional, número irracional e número real?" algumas respostas de professores foram:

"Real – é o conjunto formado por todos os números racionais".

"Números racionais são todos os números inteiros (somente) e positivos".

"Número irracional é todo número representado em forma de fração ou de decimal; e está representado dentro dos números reais".

Conforme os autores, tais afirmações trazem à tona concepções inconsistentes relacionadas as características de cada conjunto numérico e às relações que se estabelecem entre esses conjuntos. Os resultados evidenciaram falhas nos conhecimentos deste grupo, a respeito das definições, representações e até mesmo classificação de números racionais, irracionais e reais, sendo essas falhas algo que pode prejudicar qualquer abordagem, mesmo introdutória, em meio a discussão sobre a ampliação dos campos numéricos a alunos da Educação Básica.

ii) Quanto às estratégias de abordagem dos números irracionais – o qual necessita, da seleção de representações, ilustrações e exemplos adequados e, assim como da escolha de justificativas convincentes que poderiam facilitar a compreensão desse conteúdo pelos estudantes, dentre 23 professores, apenas 9 sugeriram atividades empíricas envolvendo a medição de segmentos, ou do comprimento e do diâmetro de circunferências, para a apresentação do número π, sem mencionar sobre a obtenção de valores aproximados ou sobre a insuficiência dessa abordagem, para a caracterização dos números irracionais.

Os outros professores sugeriram outras formas de abordagem, entretanto, nenhum deles mencionou a possibilidade de introduzir os números irracionais por uma abordagem geométrica que envolva, por exemplo, a aplicação do Teorema de Pitágoras e as construções com régua e compasso, visando explorar a ideia de irracionais a partir da percepção da existência de pontos na reta que não correspondem a números racionais.

Para o autor, a ausência de conhecimentos sobre a interpretação geométrica dos números irracionais pode significar desconhecimento das necessidades que resultaram na criação desse conjunto numérico e, assim sendo, implica a falta de argumentos convincentes sobre a importância de estudar esse conteúdo no Ensino Fundamental ou em outra fase escolar.

iii) Quanto a aprendizagem, as dificuldades do processo de aprendizagem do conceito de número irracional, foram mencionadas pelos professores aquelas relacionadas à compreensão da ideia de grandeza, à imaginação de grandezas incomensuráveis, à aceitação e compreensão de “números infinitos”, “muito grandes ou muito pequenos”, e a localização de números irracionais na reta numérica.

A partir da análise dos resultados obtidos, foi concluído que a imagem conceitual construída pela maioria dos participantes de estudo realizado, referente aos números irracionais, era prevalentemente constituída por noções que pertencem ao campo numérico, contendo, em alguns casos, concepções incorretas sobre representações e classificação desses números.

Para os autores, a interpretação geométrica dos números irracionais, tendo como pauta a incomensurabilidade de grandezas não costumava fazer parte do repertório de conhecimentos dos professores, indicando lacunas também nos conhecimentos pedagógicos necessários à apresentação desse conteúdo aos alunos.

Nogueira e Rezende (2014) construíram um artigo teve como objetivo, evidenciar implicações da teoria piagetiana para a Educação Matemática, mediante a teoria dos campos conceituais, focalizando, particularmente, o ensino dos números irracionais.

Para o cumprimento do objetivo, as autoras realizaram uma metanálise das informações coletadas em uma pesquisa mais ampla, fundamentada na teoria dos campos conceituais, desenvolvida com vistas a analisar os conhecimentos sobre números irracionais, mobilizados por alunos brasileiros, concluintes do Ensino Fundamental, Médio e Licenciatura em Matemática, e alunos franceses, concluintes de níveis de ensino correspondentes (Collège, Lycée e Licenciatura em Matemática), relacionados aos números irracionais.

Foi destacado neste trabalho fragmentos de diálogos de uma entrevista entre uma das pesquisadoras desse estudo e uma aluna brasileira de curso de Licenciatura em Matemática.

Quanto aos procedimentos metodológicos, para exemplificar como a teoria dos campos conceituais pode colaborar para se compreender o processo de conceitualização de alunos em situações matemáticas, Nogueira e Rezende (2014) apresentaram parte das análises dos fragmentos de diálogo de uma aluna, dentre os quarenta e dois (42) participantes investigados em uma pesquisa que elas realizaram com estudantes em fase de finalização do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Licenciatura em Matemática.

A coleta de dados ocorreu por meio de entrevistas individuais, contendo oito atividades matemáticas previamente elaboradas para os alunos resolverem. As entrevistas foram filmadas e os alunos ficavam livres para escrever ou expressar suas respostas oralmente.

As atividades foram elaboradas fundamentadas em Vergnaud (1990), considerando algumas das diversas situações presentes no campo conceitual dos números irracionais, diferentes conceitos, símbolos e representações desses números. Sendo que, algumas atividades foram inseridas com o propósito de desestabilizar conhecimentos falsos, possíveis de serem mobilizados pelos alunos no decorrer da entrevista, proporcionando, portanto, momentos de aprendizagens, conforme mostramos a seguir.

Nogueira e Rezende (2014) optaram por apresentar a análise das respostas da aluna chamada Kar do último semestre do Curso de Licenciatura em Matemática, a partir da atividade 5 do instrumento de pesquisa, que tratava da existência de um quadrado de medida de área 13 cm^2.

A escolha pela análise das respostas da aluna Kar decorre do fato das autoras desejarem apresentar análises de um sujeito adulto, com a intenção de mostrar, conforme prevê Vergnaud, a desestabilização de invariantes operatórios falsos e, portanto, indicar momentos de aprendizagens de sujeitos adultos mediante atividades matemáticas elaboradas previamente.

A respeito dos resultados, Nogueira e Rezende (2014) notaram momentos de aprendizagens vivenciados pela aluna Kar em relação a segmentos de medidas irracionais. Tais momentos de aprendizagens são decorrentes das atividades elaboradas com vistas a desestabilizar, pelo menos localmente, teoremas em ação falsos mobilizados pelos alunos, alterando, portanto, seus esquemas inicialmente falsos, que não lhes permitiam compreender segmentos de medidas irracionais como medida do lado de um quadrado, para esquemas verdadeiros.

Da análise dos fragmentos de diálogos entre aluna e pesquisadora, notou-se que as atividades favoreceram a vivenciar momentos de desequilíbrios, de solução de conflitos, logo de acomodação/assimilação em relação a seus conhecimentos prévios sobre os números irracionais.

As análises apresentadas pelas autoras dessa pesquisa apontam que a interação dos esquemas de Kar com as situações didáticas apresentadas favoreceram a desestabilização de invariantes operatórios falsos mobilizados pela aluna, modelados na forma de teoremas em ação. Assim os esquemas de Kar foram reelaborados em cada nova situação enfrentada, exemplificando, como se passa de um patamar inferior de conhecimento para outro superior, retirando características dos conhecimentos anteriores e favorecendo a aprendizagem em sentido estrito, realizada em sala de aula.

Rezende e Nogueira (2015) fizeram uma pesquisa, onde analisou-se os conhecimentos relacionados aos números irracionais de alunos brasileiros e franceses que finalizavam os três níveis de ensino, Fundamental, Médio e Superior. Diante disso buscaram cumprir o objetivo de analisar conhecimentos relacionados aos números irracionais mobilizados por alunos brasileiros do Ensino Fundamental, Ensino Médio e níveis correspondentes franceses, respectivamente, Collège e Lycée.

Nos procedimentos metodológicos, foi realizado entrevistas individuais, que foram filmadas e envolveram resolução nove atividades matemáticas. Cada atividade do instrumento de pesquisa estava associada a pelo menos uma das ideias base de número irracional e foram elaboradas de modo que, a cada atividade, o grau de complexidade aumentava, no sentido de ampliar conceitos, representações simbólicas e propriedades envolvidas.

Os estudantes entrevistados, cujas informações se destacavam foram nomeados com códigos. No seguinte quadro é apresentado essa nomenclatura.

Quadro 9 - Siglas dos sujeitos colaboradores da pesquisa.

Níveis do Sistema de Ensino Brasileiro	Nível	**Sigla**
	Ensino Fundamental	F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7
	Ensino Médio	M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7
Níveis do Sistema de Ensino Francês	Collège	C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7
	Terminale Economique et Social (TES)	ES1, ES2, ES3, ES4
	Terminale Scientifique (TS)	S1, S2, S3, S4, S5

Fonte: Rezende e Nogueira (2015).

A pesquisa foi fundamentada na teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud, o qual é uma corrente teórica de desenvolvimento cognitivo que acredita no pressuposto de que o conhecimento se adapta e se desenvolve com o tempo e em função das situações que o sujeito vivencia, sendo reelaborada a cada nova situação enfrentada. A partir dessa ideia, o estudo realizado refere-se ao campo conceitual dos números irracionais, considerando Campo Conceitual como um conjunto de situações, conceitos, representações simbólicas, propriedades e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas.

O quadro a seguir apresenta uma organização curricular da abordagem do conteúdo em questão no Brasil e na França, conforme seus respectivos currículos. Os autores apresentaram-no como algo que permite fazer uma análise curricular sobre a abordagem de números irracionais das duas nacionalidades indicadas.

Quadro 10 – Síntese da presença ou não dos números irracionais nos currículos brasileiro e francês.

Nível	Brasil	França
Ensino Fundamental	**Presença** do conceito de números irracionais no currículo oficial de Matemática. Por consequência: • Números irracionais são explicitados nos livros didáticos de 8º e 9º ano.	**Ausência** do conceito de números irracionais no currículo oficial de Matemática. Por consequência: • Na 4^{e}(corresponde ao 8º ano brasileiro) durante do estudo do teorema de Pitágoras e aplicações, nota-se a presença dos números irracionais algébricos sem explicitá-los e sem nomeá-los. • Na 3^{e} (corresponde ao 9º ano brasileiro) existe a presença dos números irracionais algébricos no estudo das raízes quadradas e do número π no

		estudo de figuras planas e sólidos geométricos. Porém, a explicitação ou não desse conceito fica a cargo dos autores de livros didáticos e professores de Matemática.
Ensino Médio	**Presença** do conceito de números irracionais no currículo oficial de Matemática. Por consequência: • Números irracionais são explicitados nos livros didáticos do 1º ano no decorrer do estudo dos conjuntos numéricos.	**Ausência** do conceito de números irracionais no currículo oficial de Matemática. Por consequência: • Até o ano letivo de 2009, os números irracionais eram mencionados nos livros didáticos na seção destinada ao estudo dos conjuntos numéricos. A partir de 2010, a explicitação desses números está ausente dos livros didáticos.

Fonte: Rezende e Nogueira (2015).

Conforme os autores, com base nos dados do quadro anterior, embora exista diferença no que se refere à presença explícita e formal do conteúdo números irracionais nos documentos curriculares desses dois países, é possível identificar que em ambos os alunos vivenciam situações relacionadas a esse conceito no decorrer do processo escolar, mobilizando conhecimentos similares, conforme os resultados obtidos na investigação realizada que são descritos a seguir.

Os resultados encontrados na investigação feita por Rezende e Nogueira (2015) indicam que, embora os documentos curriculares e livros didáticos brasileiros explicitem os números irracionais, sendo que os livros didáticos de 8º ou 9º ano apresentam pelo menos um capítulo para o estudo dos conjuntos numéricos, e que no currículo e nos livros didáticos franceses a expressão números irracionais não é mencionada, os alunos brasileiros do Ensino Fundamental e os alunos franceses do Collège, colaboradores desta pesquisa, não apresentaram diferenças significativas em suas respostas, e mobilizaram conhecimentos equivocados ou adequados de forma equivalente. Em relação aos alunos do Ensino Médio e Lycée (TES e TS) foram identificadas semelhanças e diferenças em seus desempenhos, com os alunos de TS, apresentando respostas mais precisas, menor frequência de erros e maior indicativo de desestabilização, ou pelo menos de perturbação local, de conhecimentos equivocados.

Ao comparar o desempenho dos alunos entrevistados de Ensino Médio, TES e TS, as autoras perceberam que existe avanço no desempenho dos alunos de TS, diante de situações do Campo Conceitual dos números irracionais contempladas nesta pesquisa. Esse fato causa sensação de surpresa, pois, conforme as autoras, os alunos de TS são preparados para ingressar em cursos universitários de Ciências Exatas, recebendo, portanto, maior ênfase nas disciplinas de Matemática, com carga horária desta disciplina mais ampla do que os alunos dos demais Lycée e do Ensino Médio brasileiro.

Essa pesquisa mostra que, independente do assunto de números irracionais estar explícito ou não nos currículos e livros didáticos, de apresentar ou não a definição dos números irracionais aos alunos, de se inserir ou não um capítulo nos livros didáticos para se estudar a natureza dos números – racionais, irracionais, reais – esses fatores não interferem na aprendizagem dos alunos em relação à natureza dos números.

Os resultados da investigação em questão apontam que é a experiência escolar, a diversidade de situações matemáticas vivenciadas pelos alunos, e a disponibilidade do professor em apresentar a seus alunos diferentes atividades que favoreçam a desestabilização de conhecimentos errôneos; que vai favorecer a apropriação do conceito de números irracionais.

Em um trabalho feito por Broetto (2016), abordou-se o ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática. O objetivo deste trabalho foi diagnosticar as imagens conceituais de números racionais e irracionais trazidas por licenciandos ingressantes na matemática, bem como analisar as movimentações dessas imagens ao longo da pesquisa.

A pesquisa em questão se fundamentou na teoria da imagem do conceito de Tall e Vinner (1981) e compreensão instrumental e relacional de Skemp (1976), exemplos protótipos e associações com atributos relevantes e irrelevantes de Hershkowitz, (1994).

Diante do viés teórico, o qual fundamentou essa pesquisa. A mesma se caracterizou por uma natureza qualitativa. Para isso, inicialmente realizou-se um diagnóstico das imagens conceituais trazidas pelos licenciandos. Os dados desse diagnóstico foram coletados em uma turma de ingressantes na licenciatura em matemática do Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes – Campus Vitória, durante o ano de 2014. Em seguida analisou-se as movimentações nas imagens conceituais dos participantes da pesquisa.

Avaliou-se o reconhecimento de frações, representações fracionárias com raiz quadrada ou π no numerador, dízimas periódicas, dízimas não-periódicas e outras.

Em relação às frações presentes nos Questionários Q1 e Q2, os resultados majoritários foram: 15 sujeitos (62,5%) não consideraram −3/14 como um número racional, 18 sujeitos (75%) consideraram 22/7 um número racional e 10 sujeitos (43%) consideraram 13/23 um número irracional (empatado com o número de sujeitos que consideraram essa fração um número racional).

Em relação às quatro representações fracionárias com raiz quadrada ou π no numerador presentes nos Questionários Q1 e Q2, a maioria da turma classificou-as corretamente. Entretanto, uma quantidade expressiva de alunos cometeu erros que consideramos graves: 8 sujeitos (33%) consideraram $\sqrt{3}/2$ um número racional; 9 sujeitos (38%) consideraram $4\pi/3$ como um número racional; 8 sujeitos (33%) não consideraram $3\pi/4$ um número irracional ou deixaram em branco; 8 sujeitos (33%) não consideraram $\sqrt{5}/2$ um número irracional ou deixaram em branco.

Quanto a dízimas periódicas e não-periódicas, 10 sujeitos (43%) não consideraram 1,1212212221.... um número irracional. 9 sujeitos (38%) consideram o número 1,010010001 … como sendo racional.

A respeito da definição de número irracional, conforme a opinião dos discentes 11 (46%), definiram como números que podem ser escritos/representados/obtidos por uma fração ou razão entre dois números (inteiros); 6 (25%) definiram como números que podem ser escritos ou representados ou obtidos por uma divisão; 4 (17%) definiram-nos como números ou divisões ou frações que podem representados ou resultar em uma dízima periódica; 3 (13%) números que apresentam regularidade, padrão ou previsibilidade.

Em relação à definição de número racional, de acordo com o autor, a maioria da turma apresentou aquelas que são as definições mais frequentemente encontradas em livros didáticos de matemática, que caracterizam esses números como aqueles que podem ser escritos em forma de fração ou que são representados por dízimas periódicas.

Em relação à propriedade de densidade, foi detectado a existência de diversas dificuldades, tanto em relação aos racionais quanto em relação aos irracionais. A maioria da turma mostrou-se insegura com essa propriedade, fato demonstrado principalmente pelas dificuldades para justificar a existência de um racional/irracional entre dois racionais/irracionais.

Dificuldades com relação ao reconhecimento e a representação de números irracionais também influenciaram no baixo desempenho da turma nas atividades relacionadas à propriedade de densidade. No que diz respeito a uma justificativa para a existência dos irracionais, a turma apresentou uma variedade de respostas que refletem ideias truncadas ou vazias que precisam ser revistas ou completamente abandonadas. Justificativas como 'para expressar a inexatidão' e 'para preencher lacunas' expõem a falta de aprofundamento conceitual, enquanto 'existem porque a matemática me diz que existem' reflete um total vazio conceitual e uma aceitação pela suposta autoridade da matemática ou do professor de matemática.

O conhecimento que os sujeitos apresentaram no início da pesquisa, para o autor dessa pesquisa, parece ser um reflexo de negligência de processos pedagógicos relacionados aos números irracionais da educação básica, pois verificou-se que alguns sujeitos 'sabiam' alguma coisa a respeito de número irracional, como, por exemplo, que são representados por dízimas não-periódicas. Porém, em muitos casos, percebeu-se que esse conhecimento não ia além disso; diante do fato que o mesmo sujeito considerava possível que uma fração de inteiros pudesse gerar um número irracional.

De um modo geral, a análise dos dados apontou à precariedade dos conhecimentos relacionados a números irracionais dos alunos ingressantes no curso de licenciatura em matemática, com predominância de exemplos protótipos e de uma compreensão instrumental do assunto.

O autor apresenta como sugestão, que se faça um estudo que se proponha a estudar mais profundamente não apenas em relação aos números racionais e irracionais, mas também em relação ao conceito de número em sua concepção mais ampla.

Machado e Rezende (2017) construíram um artigo que apresenta alguns resultados, monográficos, referentes a uma pesquisa sobre as concepções de professores acerca de conhecimentos de seus alunos sobre números Irracionais. Este trabalho teve como objetivo compreender o que pensam professores de Matemática acerca dos saberes de seus alunos a respeito dos números irracionais.

Para o desenvolvimento da pesquisa, as autoras utilizaram uma abordagem qualitativa de pesquisas a partir da análise minuciosa dos dados, provenientes de observações e de entrevistas baseadas nos instrumentos de pesquisa. Os sujeitos da pesquisa foram seis (06) professores de Matemática regentes de turmas do Ensino Fundamental e Médio, de escolas públicas do interior do Paraná.

A coleta dos dados ocorreu por meio de entrevistas. As entrevistas, foram gravadas em áudio, na qual, foram levadas em consideração a conduta dos sujeitos, sua formação e seus conhecimentos prévios. A priori, pediu-se a autorização dos sujeitos e explicado o motivo da investigação. A posteriori, as entrevistas ocorreram na instituição escolar na qual os professores lecionam, aonde as pesquisadoras levaram a eles, a folha com o questionamento impresso, lápis, borracha e uma calculadora.

Dentre as tarefas analisadas nesse trabalho, as autoras destacaram sobre este artigo uma das tarefas que dizia a respeito da existência ou não de um quadrado cuja medida de área é 13 cm^2. A partir dela, analisou-se as respostas dos sujeitos entrevistados.

Machado e Rezende (2017) buscaram ao longo da análise, agrupar as respostas semelhantes dadas pelos sujeitos, referente aos conceitos matemáticos. Nas considerações acerca da composição das respostas considerou-se a Teoria dos Campos Conceituais e os possíveis Teoremas em Ação de Vergneud (2009).

Ao se apresentar uma situação envolvendo geometria, foi perguntado aos professores se eles acreditavam que seus alunos seriam capazes de resolver aquela situação proposta. A situação envolvia conhecimentos sobre área de quadrado, o Teorema de Pitágoras, manipulação de números irracionais.

Quanto aos resultados encontrados, destaca-se a resposta de um professor que afirma que para os alunos resolverem tal questionamento teriam que estar no nono ano do Ensino Fundamental. No entanto, em geral, ficou implícita nas falas e gestos, a insegurança dos professores frente à existência de um quadrado cuja medida de área é 13 cm² e medida de lado raiz quadrada de 13, o que matematicamente se comprova a existência.

Alguns professores disseram não; outros disseram que sim, mas só se fosse acompanhado de uma sequência de atividades ligadas a essa mesma situação. Outros ainda acreditavam sim, devido já terem ensinado o Teorema de Pitágoras e o cálculo da área de um quadrado. Mas algo importante a respeito da situação geométrica apresentada a eles envolvia conhecimentos ligados a números irracionais também.

Pela investigação, verificou-se que muitos conceitos têm passado despercebidos pelos aprendizes, mesmo os professores consentindo com essa situação, talvez, pela ausência de compreensão deles, ou, como foi evidenciado nas entrevistas, pode acontecer pela falta de aplicação de atividades capazes de mobilizar, por exemplo, que a situação geométrica apresentada aos professores seja exercitada com os estudantes.

Rocha (2017) desenvolveu uma pesquisa, cujo objetivo era de propor, durante a formação inicial de professores, situações didáticas de cunho investigativo para construção do conceito de incomensurabilidade.

Para a concretização do objetivo, foi aplicado tarefas com questões abertas ou exploratórias com o intuito de promover novas ferramentas didáticas a serem propostas em salas de aula do Ensino Básico. Sendo aplicadas essas tarefas com estudantes do Curso noturno de licenciatura em Matemática regularmente inscritos na disciplina Ensino de Matemática de uma universidade pública da Baixada Fluminense.

Em seus procedimentos metodológicos, esta pesquisa desenvolveu inicialmente a organização da turma em pequenos grupos, de no máximo 4 integrantes. Logo depois, houve a entrega da ficha de atividade para cada integrante do grupo, para eles discutirem entre si sobre as estratégias de solução, mas o registro escrito foi feito individual. Para coletar os dados, utilizou-se o material base da coleta de dados da pesquisa e a gravação em áudio das discussões do grupo.

Com a análise das respostas das tarefas, Rocha (2017) identificou que: os estudantes não possuem familiaridade em encontrar medidas incomensuráveis; se sentem desconfortáveis ao não encontrarem valores exatos. Além disso, foi possível identificar o surgimento do processo de construção do conceito de incomensurabilidade analisando a discussão dos grupos. Conforme a autora, os conceitos de incomensurabilidade e de interpretação geométrica dos números irracionais permearam as dúvidas apresentadas pelos licenciandos sempre que encontravam barreiras ao utilizar as unidades ofertadas para a medição da diagonal do quadrado.

Além do conhecimento trazido com a análise dos dados a respeito do diagnóstico apresentado nesta pesquisa, destaca-se que as tarefas geraram benefícios para imagem conceitual dos números irracionais, sua representação geométrica e percepção histórica.

Para a autora, as tarefas possuem valor para a realização de explorações que visem à identificação da incomensurabilidade de segmentos, assim como é possível identificar outros valores além dos convencionais apresentados em sala de aula. Além do mais, esta pesquisa apresenta potencial para aplicação na educação básica, tanto nos anos finais do ensino fundamental como no início do Ensino Médio, com o intuito de diagnosticar a apresentação de números irracionais e da construção do conjunto dos números reais.

Os trabalhos revisados nessa subseção possuem conhecimentos importantes acerca do ensino e aprendizagem de números irracionais sob o aspecto diagnóstico. Diante disso, no quadro 11 foram sintetizadas as principais informações dos trabalhos revisados.

Quadro 11 – Síntese dos dados dos estudos diagnósticos

Trabalhos Analisados	Objetivo	Conclusões / Sugestões
Moreira, Soares e Ferreira (1999)	Conhecer as pré-concepções e imagens que pudessem obstaculizar a aprendizagem dos conceitos relativos aos números reais na Licenciatura.	Mais do que um em cada três alunos não reconhece claramente quando um determinado subconjunto limitado de R possui elemento máximo ou elemento mínimo. Para os autores, essa “imagem” de Q e de R como conjuntos cujos subconjuntos limitados devem possuir elemento mínimo (e/ou máximo) pode criar obstáculos à compreensão da noção de irracionalidade e da própria natureza do contínuo numérico. Diante disso, se não se compreende o sentido e a razão de ser dos irracionais, é difícil superar as dificuldades na compreensão de vários conceitos ligados à estrutura dos reais. Moreira, Soares e Ferreira (1999) também indicam que estudo dos sistemas numéricos é de

		fundamental importância na formação matemática do futuro professor. Mas os resultados deste trabalho, assim como de outros estudos, indicam que uma abordagem do tema, especificamente voltada para a formação do futuro professor, deve ser construída na Licenciatura.
Costa (2009)	Identificar alguns exemplos de obstáculos epistemológicos matemáticos nas salas de aula do Ensino Fundamental no ensino/aprendizagem de números reais a fim de ampliar a discussão visando a concepção dos números reais.	Muitos estudantes têm apenas vagas lembranças das “regras” da Matemática. De modo que, alguns até tentam reproduzi-las e quando não conseguem, criam outras respostas baseadas em suas lembranças, a fim de encontrar uma resposta compatível com a resposta requerida. As regras que não expressam significado aos alunos acabam se constituindo em grande dificuldade na construção do conhecimento dos alunos. O fato de um número inteiro se apresentar “pronto” pode ser um obstáculo epistemológico na apropriação de números que possuem algum símbolo em sua representação, como no caso dos irracionais obtidos por raízes quadradas.
Silva e Penteado (2010)	Investigar quais os saberes mobilizados por professores do ensino médio, ao analisarem questões envolvendo a categorização dos números reais em racionais e irracionais.	O procedimento de se determinar um número racional entre dois outros, calculando-se a média aritmética deles, conforme o autor, se revelou bastante eficaz e não trouxe qualquer dificuldade aos participantes. O procedimento inspirado na diagonalização de Cantor para a obtenção de um número irracional entre dois irracionais ou um irracional e um racional também se revelou adequado, apesar de não ser usual sua utilização na Educação Básica. Quanto ao registro de representação decimal infinito, percebeu-se que alguns professores relacionaram corretamente este registro, quando periódico, a um número racional e, em outros momentos, associaram a representação infinita a um número irracional. De modo geral os procedimentos sugeridos, não encarados como um modelo pronto e acabado a ser seguido, foram muito bem aceitos pelos professores o que se revelou, com a observação dos autores, que a maioria dos sujeitos ao responder questões, recorria às suas respostas anteriores, podendo isso indicar que, possivelmente houve uma tentativa de reprodução do procedimento sugerido em atividades anteriores.
Pietropaolo, Corbo e Campos (2013)	Delinear a imagem conceitual constituída pelos professores, da amostra escolhida, com relação aos números irracionais, assim como, com relação aos conhecimentos pedagógicos também concernentes a esse mesmo tema.	A imagem conceitual construída pela maioria dos participantes de estudo realizado, referente aos números irracionais, era prevalentemente constituída por noções que pertencem ao campo numérico, contendo, em alguns casos, concepções incorretas sobre representações e classificação desses números. A interpretação geométrica dos números irracionais, tendo como pauta a incomensurabilidade de grandezas não costumava fazer parte do repertório de

		conhecimentos dos professores, indicando lacunas também nos conhecimentos pedagógicos necessários à apresentação desse conteúdo aos alunos.
Nogueira e Rezende (2014)	Evidenciar implicações da teoria piagetiana para a Educação Matemática, mediante a teoria dos campos conceituais, focalizando, particularmente, o ensino dos números irracionais	As análises apresentadas pelas autoras dessa pesquisa apontam que a interação dos esquemas de Kar com as situações didáticas apresentadas favoreceram a desestabilização de invariantes operatórios falsos mobilizados pela aluna, modelados na forma de teoremas em ação. Assim os esquemas de Kar foram reelaborados em cada nova situação enfrentada, exemplificando, como se passa de um patamar inferior de conhecimento para outro superior, retirando características dos conhecimentos anteriores e favorecendo a aprendizagem em sentido estrito, realizada em sala de aula.
Rezende e Nogueira (2015)	Analisar conhecimentos relacionados aos números irracionais mobilizados por alunos brasileiros do Ensino Fundamental, Ensino Médio e níveis correspondentes franceses, respectivamente, Collège e Lycée.	Independente do assunto de números irracionais estar explícito ou não nos currículos e livros didáticos, de apresentar ou não a definição dos números irracionais aos alunos, de se inserir ou não um capítulo nos livros didáticos para se estudar a natureza dos números – racionais, irracionais, reais – esses fatores não interferem na aprendizagem dos alunos em relação à natureza dos números. Este fato foi comprovado pelo fato dos números irracionais não estarem presentes no currículo dos alunos da escola francesa, em contrapartida a escola brasileira que, embora tenha em seu currículo a exigência do ensino de números irracionais, teve menor rendimento nos conhecimentos sobre números irracionais. Os resultados da investigação em questão apontam que é a experiência escolar, a diversidade de situações matemáticas vivenciadas pelos alunos, e a disponibilidade do professor em apresentar a seus alunos diferentes atividades que favoreçam a desestabilização de conhecimentos errôneos; que vai favorecer a apropriação do conceito de números irracionais.
Broetto (2016)	Diagnosticar as imagens conceituais de números racionais e irracionais trazidas por licenciandos ingressantes na matemática, bem como analisar as movimentações dessas imagens ao longo da pesquisa.	O conhecimento que os sujeitos apresentaram no início da pesquisa, parece ser um reflexo de negligência de processos pedagógicos relacionados aos números irracionais da educação básica, pois verificou-se que alguns sujeitos 'sabiam' alguma coisa a respeito de número irracional, como, por exemplo, que são representados por dízimas não-periódicas. Porém, em muitos casos, percebeu-se que esse conhecimento não ia além disso; diante do fato que o mesmo sujeito considerava possível que uma fração de inteiros pudesse gerar um número irracional. De um modo geral, a análise dos dados apontou à precariedade dos conhecimentos relacionados a números irracionais dos alunos ingressantes no curso de licenciatura em matemática, com predominância de exemplos protótipos e de uma compreensão instrumental do assunto.

		O autor apresenta como sugestão, que se faça um estudo que se proponha a estudar mais profundamente não apenas em relação aos números racionais e irracionais, mas também em relação ao conceito de número em sua concepção mais ampla.
Machado e Rezende (2017)	Compreender o que pensam professores de Matemática acerca dos saberes de seus alunos a respeito dos números irracionais.	Verificou-se que muitos conceitos têm passado despercebidos pelos aprendizes, mesmo os professores consentindo com essa situação, talvez, pela ausência de compreensão deles, ou, como foi evidenciado nas entrevistas, pode acontecer pela falta de aplicação de atividades capazes de mobilizar, por exemplo, que a situação geométrica apresentada aos professores seja exercitada com os estudantes.
Rocha (2017)	Propor, durante a formação inicial de professores, situações didáticas de cunho investigativo para construção do conceito de incomensurabilidade.	Os estudantes da amostra não possuem familiaridade em encontrar medidas incomensuráveis; eles se sentem desconfortáveis ao não encontrarem valores exatos. Além disso, foi possível identificar o surgimento do processo de construção do conceito de incomensurabilidade quadrado. Além do conhecimento trazido com a análise dos dados a respeito do diagnóstico apresentado nesta pesquisa, destaca-se analisando a discussão dos grupos. Conforme a autora, os conceitos de incomensurabilidade e de interpretação geométrica dos números irracionais permearam as dúvidas apresentadas pelos licenciandos sempre que encontravam barreiras ao utilizar as unidades ofertadas para a medição da diagonal do que as tarefas geraram benefícios para imagem conceitual dos números irracionais, sua representação geométrica e percepção histórica.

Fonte: Moreira, Soares e Ferreira (1999); Costa (2009); Silva e Penteado (2010); Pietropaolo, Corbo e Campos (2013); Nogueira e Rezende (2014); Rezende e Nogueira (2015); Broetto (2016); Machado e Rezende (2017); Rocha (2017).

3.5.4. Análise de Livros Didáticos

Nessa terceira categoria da revisão de estudos, foi apresentado alguns entendimentos obtidos a partir da análise de alguns referenciais teóricos a respeito da abordagem de Números Irracionais nos livros didáticos.

Souto (2010) desenvolveu um trabalho onde, teve o objetivo de descrever como o conceito número real é apresentado nos livros didáticos brasileiros. Tal objetivo orientou-se pelas seguintes questões de pesquisa: Como o conceito número irracional / real é organizado nos Livros Didáticos da Educação Básica, no Brasil? Que registros de representação são empregados?

E estes como são empregados? Como essa organização se propõe a promover a aquisição do conhecimento número irracional?

Este trabalho foi fundamentado na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2003) e na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999). Dispondo dessas teorias, nos procedimentos metodológicos, os critérios de análise dos livros didáticos foram: definições, representações, tarefas e abordagem histórica.

As coleções de livros selecionadas por esta pesquisa foram aprovados pelo ministério da educação, no âmbito dos programas PNLD – Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2007a) e PNLEM - Programa Nacional do livro Didático para o Ensino Médio (BRASIL, 2007b). São elas:

F05 - Novo Praticando Matemática – Autores: Andrini, Á. e Zampirolo, M. Editora: Editora do Brasil.

M23 - Matemática – Autores: Yossef, A., Soares E. e Fernandez, V. Editora: scipione.

Com base nos exemplos, definições e propriedades encontradas nos 14 livros analisados. Foi observado que cinco livros do ensino fundamental e todos os livros observados do ensino médio analisados utilizaram exercícios resolvidos como estratégia de ensino. Além disso, os exemplos apresentados de números irracionais são usados principalmente para ilustrar definições e propriedades.

Dos quatorze livros analisados sobre o uso de exemplos, nove se utilizaram de exemplos de números que não são racionais para introduzir a conceituação de número irracional, ilustrando a existência de outro tipo de número que não seja racional. Dois livros apresentaram $\sqrt{2}$ como primeiro exemplo de número não racional, três utilizaram números com representação decimal infinita e não periódica e três utilizaram a medida da diagonal do quadrado com lado medindo uma unidade.

Embora algumas coleções introduzam os conteúdos por meio de um exemplo contextualizado, nenhuma delas utiliza esse exemplo como situação problema para que o aluno resolva inicialmente e construa por si mesmo seu conhecimento a respeito do conteúdo.

Verificou-se também os casos de exemplos mais comuns de número irracional apresentados nos livros didáticos: 2, 3 e π.

As definições apresentadas para os números irracionais foram: “irracional é o número que não pode ser escrito em forma de fração” (DA) e “dentre os números representados na forma decimal existem as dízimas não-periódicas, chamados de irracionais” (DB). Sendo que cinco livros adotam a definição DA, oito a definição DB e um único livro, que não havendo apresentado qualquer definição de número irracional, utilizou apenas problemas para introduzir o conceito.

Todos os livros observados definiram número real da seguinte forma: “qualquer número racional ou irracional é um número real” (DC). Algo importante de perceber é que tanto DA como DB pressupõem a existência de outro tipo de número que não seja racional e a possibilidade de decidir se estes números podem ou não ser escritos em forma de fração de inteiros. Assim, as definições são logicamente recursivas e, do ponto de vista matemático, não podem nem mesmo ser consideradas definições. Além disso, a definição DB se baseia na suposição de que todo número real admite representação decimal, o que é uma propriedade consideravelmente não trivial, cuja verificação depende da familiaridade com alguma noção de convergência.

Outro problema é a falta de caracterização em relação à natureza do numerador e do denominador de frações, o que pode acarretar em uma confusão do conceito de fração com o conceito mais geral de razão (que não corresponde necessariamente a números racionais). Além disso, sabemos que os números complexos não reais, não podem ser escritos em forma de fração de inteiros, mas nem por isso são classificados como irracionais.

Quanto às propriedades destacadas encontradas nos Livros didáticos envolvem fundamentalmente as operações (fechamento e relações de operações entre racionais e irracionais) e a localização de pontos na reta. Também foi utilizado exemplos para ilustrar as propriedades, sendo elas não demonstradas formalmente. A propriedade de completude apareceu nos livros analisados na forma de bijeção entre o conjunto dos números reais e os pontos de uma reta, dez livros analisados apresentaram a seguinte afirmação: para cada número real, há um ponto correspondente na reta; e nove livros apresentaram a afirmação: para cada número real, há um ponto correspondente na reta.

A propriedade da densidade dos reais foi observada em apenas dois livros didáticos analisados.

Os Livros didáticos analisados apresentaram registros figurais, simbólico-numéricos, simbólico-algébricos e de linguagem natural, privilegiando o registro numérico. Os livros do ensino fundamental e do ensino médio utilizaram os registros figurais na forma de diagonal do quadrado, circunferência para determinação da razão entre comprimento e diâmetro, diagrama de Venn e representação de intervalos numéricos na reta. Estas duas últimas formas apresentam-se em sua maioria no ensino médio para estabelecer uma representatividade para a inclusão dos conjuntos numéricos e para dar a ideia geométrica de intervalos. Em relação ao registro simbólico numérico, destaca-se tanto para o ensino fundamental e quanto para o médio o uso em sua maioria da forma decimal.

Na comparação ensino fundamental com ensino médio percebe-se que no ensino fundamental privilegia-se a forma fracionária mais do que o médio e no médio privilegia-se mais as raízes do que o fundamental. Algo que, de acordo com o autor, talvez ocorra pelo fato das operações entre raízes serem definidas no final do ensino fundamental e as frações serem estudas desde início do ensino fundamental.

Outro atributo observado em seis dos livros analisados, é que eram desprovidos de abordagem histórica, já outros oito livros continham, sendo todas relacionadas a informações adicionais dispostas no decorrer ou fim do texto. Estes textos enfocam a descoberta de números não racionais pelos gregos, citação do comprimento da circunferência na Bíblia, escola pitagórica, incomensurabilidade, criação dos Reais e utilização de valores aproximados de π por algumas civilizações.

Quanto a representação simbólica, o autor descreve que os Livros didáticos analisados apresentaram registros figurais, simbólico-numéricos, simbólico-algébricos e de linguagem natural, privilegiando o registro numérico. Além disso, os livros do ensino fundamental e do ensino médio utilizaram os registros figurais na forma de diagonal do quadrado, circunferência para determinação da razão entre comprimento e diâmetro, diagrama de Venn e representação de intervalos numéricos na reta. Sendo que, estas duas últimas formas apresentam-se em sua maioria no ensino médio representando a inclusão de conjuntos numéricos e para dar a ideia geométrica de intervalos.

Em relação ao registro simbólico numérico, o autor destaca que em comparação do ensino fundamental com ensino médio, percebe-se que no ensino fundamental privilegia-se a forma fracionária mais do que o médio e no médio privilegia-se mais as raízes do que o fundamental. Algo que o autor acredita ocorrer pelo fato das operações entre raízes serem definidas no final do ensino fundamental e as frações serem estudas desde início do ensino fundamental. Para o registro simbólico algébrico foi destacado seu uso com mais frequência no ensino médio. Este fato, conforme o autor, pode indicar uma matemática mais algébrica, mais simbólica sendo ensinada nesse nível.

De forma geral, a análise dos livros didáticos sugere que que eles privilegiam: definições baseadas na representação decimal; tarefas envolvendo procedimentos como classificação como racional e irracional e determinação de frações geratrizes; registros de representação simbólico-algébricos; notas históricas enfocando nomes e datas. Entretanto, tais atividades são tratadas de forma mecânica e com pouco ou nenhum aprofundamento conceitual.

O autor Pommer (2012) realizou uma pesquisa intitulada “A construção de significados dos números irracionais no ensino básico: Uma Proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números reais”, cujo objetivo era mapear a apresentação de números irracionais no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio.

Essa pesquisa foi investigativa, cujo estudo é de abordagem qualitativo e pautado de acordo a questão ‘Como são abordados os números irracionais no ensino básico, considerando-se como fonte o livro didático de Matemática?’.

A metodologia adotada se fundamentou nos núcleos de significação, descritos em Aguiar & Ozella (2006), que busca apreender os sentidos que constituem o conteúdo do discurso expresso nos textos dos livros didaticos.

Inicialmente foi analisado duas coleções de Ensino Fundamental II e duas coleções de Ensino Médio indicados pelo PNLD e PNLEM (Amostra), para verificar como é abordado os números irracionais, do ponto de vista do conhecimento matemático.

A forma de sistematizar as informações escolhida para analisar dos livros da coleção A, B e C e D ocorreu mediante os seguintes temas: O surgimento das raízes enésimas irracionais, O número PI, o número de Euler e o número de ouro. A partir desses temas, relacionados a números irracionais, os livros eram classificados de acordo com a forma com que os abordavam, forma empírico ou pela definição formal.

Para a análise dos livros das coleções abordadas foram constituídos ‘núcleos de significação’, que é um modo de investigação pautado em uma pesquisa qualitativa, usada na área da psicologia, que é voltada para a análise dos modos de manifestação dos sujeitos. Os “núcleos de significação” são os modos de apreender os temas, conteúdos ou questões centrais expressas pelas falas e manifestação do discurso do sujeito.

O “percurso dos núcleos de significação” confirmou que, nos livros didáticos analisados pelo autor, a apresentação dos números irracionais ocorre de modo polarizado: alguns optam por um viés empírico e outros pela definição formal.

O caminho epistemológico trilhado viabilizou uma abertura para ampliar o quadro de significados em relação a outros tópicos presentes na Matemática Elementar, considerando-se como suporte a potencialidade presente nos eixos discreto/continuo; exato/aproximado; finito/infinito, assim como no par determinístico/aleatório.

Em um trabalho feito por Jesus (2017) sobre números irracionais, ela tratou do desenvolvimento de uma análise de livros didáticos dos Ensinos Fundamental II e Médio**.** Tendo, como objetivo, o de descrever e discutir como os Números Irracionais são abordados em alguns livros didáticos da Matemática da Educação Básica.

Os livros escolhidos para análise foram das duas coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e que poderão ser utilizadas por escolas de todo o Brasil a partir do ano de 2018. São as coleções Matemática Bianchini e #Contato Matemática, destinadas para o Ensino Fundamental II e Médio, respectivamente.

A partir do estudo desenvolvido, a autora desenvolveu uma análise crítica e reflexiva sobre a abordagem dos Números Irracionais nestas coleções.

A obra Matemática Bianchini, de Edwaldo Bianchini, é uma coleção de livros do Ensino Fundamental que caracteriza-se por discutir os conceitos com base em um ou em poucos exemplos, seguidos de alguma sistematização e de atividades de aplicação. Conforme a autora, os volumes da coleção são organizados em capítulos; cada um deles aborda algum campo da matemática escolar. Segundo o guia da obra, ao final do Manual do os autores, encontra-se “Suplemento com orientações para o professor”, seção destinada ao professor com algumas sugestões e detalhamento de alguns itens do livro.

O conteúdo de Números Irracionais é classificado como conteúdo complementar pelo documento. Sendo ele estabelecido a partir das habilidades:

i) Reconhecer a necessidade da ampliação do conjunto dos números racionais através de situações contextualizadas e da resolução de problemas.

ii) Identificar números racionais com as dízimas periódicas.

iii) Identificar as dízimas não periódicas com os números irracionais.

iv) Usar geometria para construir alguns segmentos de comprimento irracional.

Quanto ao livro dos do 6º e 7º anos, não foram encontradas referências aos Números Irracionais. Embora no livro do 7º ano tenha sugerido uma atividade sobre números racionais, se referindo as dízimas periódicas. Esta atividade permite que os alunos compreendam a definição de período e trabalhem com a ideia de aproximação

No livro do 8º ano é onde se inicia uma abordagem com os Números Irracionais. Bianchini começa a desenvolver esta ideia de abstração no livro didático através da raiz quadrada aproximada com números inteiros e, posteriormente, com números racionais. Desenvolve também uma noção de infinito e continuidade através de um “número não racional”.

Para definir o conjunto dos números reais, Bianchini utiliza a reta real. Em seu trabalho, no qual discute o ensino dos Números Irracionais e reais, O autor do livro destaca que este conceito está diretamente ligado ao ensino de números reais, entretanto não é feita uma discussão com os alunos sobre o que realmente representa a reta real e o "porquê" de seu uso.

No livro do 9º ano, foi possível identificar um caráter operacional no tratamento dos Números Irracionais, devido a abordagem de radiciação. Ali trabalha-se com os alunos adição, subtração, multiplicação e divisão com radicais. Sobre esta abordagem, nota-se determinada preocupação com os cálculos deixando de lado o significado de Números Irracionais.

No 9º ano também é abordada a representação geométrica dos Números Irracionais expressos por radicais. Essa representação geométrica parte inicialmente de uma abordagem a respeito do Teorema de Pitágoras. Entretanto, não se faz relação entre as questões geométricas que originaram a criação dos irracionais com este conteúdo. Inverte-se a ordem, colocando-se a Geometria depois dos Irracionais.

No Manual do Professor, no "Suplemento com orientações para o professor", encontra-se uma sugestão de leitura para o professor que conta a história do número π. Essa mostra a História da Matemática sendo utilizada para ampliação de conhecimentos do docente.

De um modo geral, quanto aos livros do EF, a autora observou que a abordagem inicial do ensino dos irracionais enfatiza a ideia de irracionalidade, através da discussão de sobre os temas: infinito e aproximação. No entanto, a partir da abordagem operacional com os irracionais essas ideias acabam sendo omitidas e o conceito de irracionalidade é posto de lado.

A obra #Contato Matemática, de Joamir Souza e Jacqueline Garcia, é uma coleção de livros do Ensino médio que tem como principais características a relação dos conteúdos matemáticos com outras áreas de conhecimento; atividades para fixação e aprofundamento dos conteúdos; aplicação do conteúdo através de softwares gratuitos e, por fim, sugere livros e sites para a ampliação de conhecimentos. Apresenta também o manual para o professor com o intuito de auxiliar o trabalho do mesmo. Neste, destaca pontos que são considerados importantes através de comentários e sugere recursos didáticos e leituras complementares para um melhor uso da obra.

Neste livro a autora verificou que os conceitos sobre Números Irracionais são trabalhados com os alunos no 1º ano do Ensino Médio de forma mais específica a partir das habilidades:

1. Números racionais e dízimas periódicas

1.1. Associar a uma fração sua representação decimal e vice-versa.

1.2. Reconhecer uma dízima periódica como uma representação de um número racional.

2. Conjunto dos números reais

2.1. Reconhecer uma dízima não periódica como uma representação de um número irracional.

2.2. Utilizar números racionais para obter aproximações de números irracionais.

No livro tinha informações históricas em um texto, abordando de forma breve a apresentação histórica sobre os Números Irracionais e depois tem-se exemplos numéricos e geométricos sobre este tipo de número. Após isso, os autores definem o conjunto dos Números Irracionais a partir do exemplo geométrico que obtém $\sqrt{2}$ como lado de um quadrado de área 2. Após a definição, é dada uma aproximação de 29 casas decimais do número $\sqrt{2}$ fornecida pela calculadora.

Também se encontra no livro tratamento sobre a representação dos Números Irracionais na reta numérica. Entretanto, nota-se que a abordagem dada pelos autores não é muito explorada no ensino de Matemática; geralmente, as abordagens de representações de números na reta real se limitam apenas aos conjuntos dos inteiros e dos racionais. Desse modo fez-se necessário deixar explícito para o aluno ou então orientar o professor a informar que esta representação na reta numérica é uma aproximação.

Tem-se no livro uma abordagem quanto ao significado de π. Mas, conforme a autora, é importante sempre deixar claro que π é irracional (não pode ser escrito na forma de fração), embora seja obtido de uma razão. Algo que não foi explicado no livro diante da explicação de tal fato, onde a razão de dois números resulta em um número irracional porque um dos números é irracional.

Analisando a seção de atividades, observam-se exercícios com caráter diversificado para o ensino-aprendizagem de Números Irracionais. Sendo que a atividade privilegia operações e propriedades com radicais, não dando atenção para outros aspectos dos números irracionais como a ideia de que as medidas irracionais apresentadas nas ilustrações são aproximações.

Em uma das páginas é sugerido que os alunos utilizassem a calculadora para comparar o resultado aproximado da mesma com o valor encontrado calculado à mão, pelo método de Herão.

No geral, conforme a autora, o livro didático apresenta grande parte do que é sugerido para o ensino de Matemática nos PCN. Porém, algumas questões, consideradas significativas pela autora, para o ensino dos Números Irracionais não foram destacadas no livro.

Uma conclusão geral sobre a análise dos dois livros de acordo coma autora, é que, apesar dos livros didáticos apresentarem grande parte do que é sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, algumas considerações relevantes sobre esses números, tais como as ideias de aproximação e de infinito, não são realizadas ou enfatizadas nos livros didáticos.

A autora ressalta a importância da criticidade do professor ao utilizar determinado livro didático, avaliando-o nas suas proposições e, quando achar conveniente, alterar ou complementar o tratamento que ele apresenta para certos conteúdos.

O autor Felix (2018) realizou uma pesquisa intitulada “Estudo de Abordagens dos Números Irracionais nos Anos Finais do Ensino Fundamental”, cujo objetivo era realizar uma investigação nas abordagens desenvolvidas sobre o conjunto dos números irracionais nos anos finais do ensino fundamental.

A metodologia de pesquisa é de natureza qualitativa e técnica de análise documental.

Inicialmente foi desenvolvido uma pesquisa teórica para se compreender sobre os modos de abordagens dos números irracionais nos anos finais do Ensino Fundamental. Essa pesquisa foi direcionada a analisar duas obras nomeadas pelo autor de “coleção A” e “coleção B” cuja orientação teórica contou com algumas referências como Pommer (2011) e Ripoll (2001).

No desenvolvimento do trabalho foi inicialmente caracterizado os números racionais e os irracionais, onde foi apresentados alguns conceitos importantes como número racional, dizima periódica, fração contínua e outros. Após isso o autor apresentou alguns argumentos, com base em Pommer (2011) e Ripoll (2001), para descrever a abordagem dos números irracionais nos anos finais do ensino fundamental mediante a análise da “coleção A” e “coleção B”. O autor observou regularidades comuns na análise das obras descritas com base em análises dos referencias.

Diante dos resultados obtidos com essa pesquisa, as análises das duas coleções didáticas escolhidas, as quais são utilizadas na rede pública, validaram os relatos de obras consultadas a respeito do assunto. Nas coleções A e B, a abordagem de se iniciar do conceito de irracionais unicamente por geometria continua a ser propagada, sendo não observado termos como comensurabilidade e fração contínua. Assim percebe-se que os métodos de introdução dos irracionais continuam abordados como na década passada.

Conforme o autor, a principal contribuição da pesquisa é apresentar a real abordagem no ensino fundamental do ensino dos números irracionais. Sendo essa abordagem inalterada durante uma década que se passou até o desenvolvimento de tal pesquisa, mesmo os livros didáticos sejam referenciados ideais pelo Ministério da Educação. Considera-se também como contribuição dessa pesquisa uma sequência de procedimentos empíricos a serem aplicados, pelo professor, no ensino fundamental para melhorias na significação de números irracionais, sendo alguns desses procedimentos citados abaixo:

- Buscar e tornar hábito o uso de exposições de situações da história da matemática como meio de estímulo à problematização do conteúdo.
- Explorar o uso da reta numérica com racionais fracionários e irracionais por aproximação, denotando sempre a aproximação destes irracionais, sempre que possível feitas por frações contínuas, devido a sua precisão nas aproximações
- Trabalhar com a comensurabilidade de segmentos nos números racionais. Exibir modelos de frações e seus segmentos, expondo método de resolução e não modelo fixo de reprodução matemática. Desta maneira, abrindo a ideia de que possa vir surgir segmentos que não são comensuráveis.
- Evidenciar com frações contínuas e finitas a identificação de números racionais.

- Trabalhar, sempre que possível, com uma maior gama de números irracionais distintos dos exemplos triviais: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π nos demais conteúdos da matemática.

Trabalhar e exibir subconjuntos formados por números irracionais algébricos, usando equações do segundo grau como geradoras de subconjuntos.

A apresentação e desenvolvimento dos números irracionais sofreram um processo de transposição didática muito simplificado e polarizado entre o pragmático e o teórico. A partir desse entendimento, Pommer (2018) desenvolveu um trabalho que objetivou analisar os contextos e contribuições histórico-epistemológicos dos números irracionais, de modo a situar como se apresentam os aspectos pragmáticos e teóricos surgidos ao longo do desenvolvimento do referido tema em livros de referência onde se encontram os ‘saberes acadêmicos universitários’.

Realizou-se uma busca em dois livros de referência: ‘As Idéias Fundamentaes da Mathemática’, edição de 1981 (1ª edição de 1929), de Manuel Amoroso Costa e ‘Conceitos Fundamentais da Matemática’, edição de 1970, Lisboa, de autoria de Bento de Jesus Caraça (1ª edição de 1941).

Conforme o autor, a escolha para situar e analisar as contribuições presentes nos dois livros, envolveu aspectos históricos e epistemológicos com relação aos números irracionais para o ensino básico. Para a análise, levou-se em conta a forma com que a Transposição Didática foi aplicada nos livros, especificamente a maneira como os números irracionais eram introduzidos.

A abordagem delineada destes dois livros, onde se situam os ‘saberes acadêmicos universitários’, pode favorecer uma transposição didática em um contexto associado à língua materna – as narrativas – em uma conexão interdisciplinar, opção pouco explorada nos manuais escolares voltados ao ‘saber a ser ensinado’, na escolaridade básica.

Nos dois livros em questão, é apresentado uma forma de exposição do percurso histórico que permite a compreensão do surgimento dos números, em diversos povos, ligado às necessidades cotidianas e pragmáticas em relação à contagem de objetos, de mensuração de terra, de operações numéricas ligadas ao comércio, às questões tributárias e a partilha de bens.

A análise do livro ‘As Idéias Fundamentaes da Mathemática’ aponta para o desenvolvimento dos números irracionais por meio da reta real, questão que remonta a ideia de continuidade e ao corte de Dedekind.

De modo geral, este livro introduz uma possibilidade de narrativa baseada em argumentação e dedução simples e direta, implicando que a Matemática é uma área passível de ser acessível por meios qualitativos. Este tipo de abordagem dos livros de referência dos ‘saberes acadêmicos universitários’ se constitui uma ideia essencial para se efetivar uma transposição didática para o saber a ser ensinado, algo geralmente evitado nos livros didáticos de Matemática da escolaridade básica

O livro ‘Conceitos Fundamentais da Matemática’ introduz números irracionais a partir da problematização que surgiu com ‘crise dos incomensuráveis’ diante da impossibilidade de medir segmentos incomensuráveis. A partir disso é indicado a possibilidade de se desenvolver o ‘Problema da Medida’, onde é possível se apresentar os segmentos comensuráveis e os segmentos incomensuráveis.

Conforme o autor, as narrativas presentes nos dois livros são boas e podem contribuir para uma transposição didática com relação aos números irracionais.

A análise dos dois livros, pelo autor, permite perceber que eles apresentaram meios diferenciados para uma abordagem didática de números irracionais na escolaridade básica. Além de que é eles vão ao encontro a dois aspectos essenciais da área da História da Matemática: retomar a reflexão que permeou o intrincado desenvolvimento histórico dos números irracionais, que atravessou cerca de vinte séculos, e ainda semear a essência dos livros, que é proporcionar modos ou momentos para o leitor acessar e movimentar o pensar.

Assim, o autor concluiu que a análise dos livros ajudou a compreensão inicial do embate entre o pragmático e o teórico, questão crucial ligada ao entendimento da natureza dos números irracionais, possibilitando uma ponderação inicial para um tratamento didático mais adequado.

Os trabalhos revisados nessa subseção possuem conhecimentos importantes sobre como os números irracionais se apresentam nos livros didáticos. Diante disso, no quadro 12 foram sintetizadas as principais informações dos trabalhos revisados.

Quadro 12 - Síntese dos dados dos estudos sobre análise de livros didáticos.

Trabalhos Analisados	Objetivo	Conclusões / Sugestões
Souto (2010)	Descrever como o conceito número real é apresentado nos livros didáticos brasileiros.	A análise dos livros didáticos sugere que eles privilegiam: definições baseadas na representação decimal; tarefas envolvendo procedimentos como classificação como racional e irracional e determinação de frações geratrizes; registros de representação simbólico-algébricos; notas históricas enfocando nomes e datas. Entretanto, tais atividades são tratadas de forma mecânica e com pouco ou nenhum aprofundamento conceitual.
Pommer (2012)	Mapear a apresentação de números irracionais no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio	Nos livros didáticos analisados, a apresentação dos números irracionais ocorre de modo polarizado: alguns optam por um viés empírico e outros pela definição formal. A percepção que se concluiu sobre os livros analisados conduz a possibilidade de ampliar o quadro de significados em relação a outros tópicos presentes na Matemática Elementar, considerando-se como suporte a potencialidade presente nos eixos discreto/continuo; exato/aproximado; finito/infinito, assim como no par determinístico/aleatório.
Jesus (2017)	Descrever e discutir como os Números irracionais são abordados em alguns livros didáticos da Matemática da Educação Básica.	No geral, conforme a autora, o livro didático apresenta grande parte do que é sugerido para o ensino de Matemática nos PCN. Porém, algumas questões, consideradas significativas pelo o ensino dos Números Irracionais não foram destacadas no livro. Uma conclusão geral sobre a análise dos dois livros é que, apesar dos livros didáticos apresentarem grande parte do que é sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, algumas considerações relevantes sobre esses números, tais como as ideias de aproximação e de infinito, não são realizadas ou enfatizadas nos livros didáticos. A autora ressalta a importância da criticidade do professor ao utilizar determinado livro didático, avaliando-o nas suas proposições e, quando achar conveniente, alterar ou complementar o tratamento que ele apresenta para certos conteúdos.
Felix (2018)	Realizar uma investigação nas abordagens desenvolvidas sobre o conjunto dos números irracionais nos anos finais do ensino fundamental.	Nas coleções analisadas a abordagem de se iniciar do conceito de irracionais unicamente por geometria continua a ser propagada, sendo não observado termos como comensurabilidade e fração contínua. Assim percebe-se que os métodos de introdução dos irracionais continuam abordados como na década passada. A real abordagem no ensino fundamental do ensino dos números irracionais estava inalterada durante uma década que se passou até o desenvolvimento de tal pesquisa, mesmo os livros didáticos sejam referenciados ideais pelo

		Ministério da Educação. Considera-se também como contribuição dessa pesquisa algumas sugestões ao professor, no ensino fundamental para melhorias na significação de números irracionais. Alguns delas são: ▪ Explorar situações da história da matemática como meio de estímulo à problematização do conteúdo. ▪ Explorar o uso da reta numérica com racionais fracionários e irracionais por aproximação, denotando sempre a aproximação destes irracionais. ▪ Trabalhar com a comensurabilidade de segmentos nos números racionais. Assim como abrir a ideia de que possa vir surgir segmentos que não são comensuráveis. ▪ Trabalhar, sempre que possível, com uma maior gama de números irracionais distintos dos exemplos triviais: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π nos demais conteúdos da matemática.
Pommer (2018)	Artigo analisar os contextos e Contribuições histórico-epistemológicos dos números irracionais, de modo a situar como se apresentam os aspectos pragmáticos e teóricos surgidos ao longo do desenvolvimento do referido tema em livros de referência onde se encontram os ‘saberes acadêmicos universitários’	Conforme o autor, o tratamento didático nos dois livros é bom e podem contribuir para uma transposição didática com relação aos números irracionais. A análise dos dois livros, pelo autor, permite entender que eles apresentam meios diferenciados para uma abordagem didática de números irracionais na escolaridade básica. Além de que é eles vão ao encontro a dois aspectos essenciais da área da História da Matemática: retomar a reflexão histórica sobre os números irracionais, e ainda semear a essência dos livros, que é proporcionar modos ou momentos para o leitor acessar e movimentar o pensar. O autor concluiu que a análise dos livros ajudou a compreensão inicial do embate entre o pragmático e o teórico, questão crucial ligada ao entendimento da natureza dos números irracionais, possibilitando uma ponderação inicial para um tratamento didático mais adequado.

Fonte: Souto (2010); Pommer (2012); Jesus (2017); Felix (2018); Pommer (2018).

3.5.5. Estudos Experimentais

Esta categoria apresenta a revisão de estudos de alguns trabalhos a respeito da abordagem experimental.

Em um artigo feito por Jover (2013), é apresentado uma experimentação em sala de aula, que teve, como objetivo, aprimorar para o ensino-aprendizagem de números irracionais em uma turma do 9ª ano do Ensino Fundamental da Rede Pública do Estado.

A abordagem dessa pesquisa foi qualitativa e adotou a informática como o recurso metodológico de ensino, que contribuiu para o desenvolvimento dos procedimentos da experimentação.

Nos procedimentos metodológicos dessa experimentação, realizou-se uma experiência, que constou de uma oficina com quatro atividades programadas e executadas no Laboratório de Informática, o software Geogebra foi um recurso importante no desenvolvimento dessa experimentação. A oficina foi realizada em quatro encontros, com atividades de uma hora de duração, equivalente a cinco períodos de aula, com a participação ativa dos alunos.

Considerando a disponibilidade do Laboratório de Informática da Escola, o experimento consistiu em uma oficina constituída de três atividades. O objetivo destas atividades foram o ensino-aprendizagem de números irracionais, numa abordagem visual.

As atividades trataram da construção pelo Geogebra, de medidas de valor numérico irracional, algo que era feito a partir da construção de quadrados no Geogebra e o cálculo de sua diagonal. Também foi tratado da comparação de números irracionais.

Foi observado pelo autor dessa pesquisa que os alunos aprenderam que os números irracionais podem representar medidas de segmentos assim como, mesmo na impossibilidade de se determinar um valor exato para essas medidas, é possível comparar segmentos de comprimento representado por irracionais. Dentre quatorze alunos que participaram, onze foram capazes de concluir que os números irracionais efetivamente existem e que estão situados entre dois números inteiros.

Em relação a esta pesquisa, foi possível constatar que a experiência proporcionada com o uso do Geogebra facilitou a compreensão dos números irracionais por parte dos alunos.

Roriz (2014) desenvolveu um trabalho com objetivo de constatar a eficácia de uma proposta de Sequência Didática com alunos do Ensino Médio. Nesse sentido, o autor construiu uma sequência de aulas para os alunos do ensino médio. A ideia é que o aluno tenha boas condições de construir um conhecimento adequado sobre os números reais.

A sequência de aulas tinha como público alvo alunos do 3º ano do ensino médio e formaram um total de 5 aulas, que ao todo foram realizadas num tempo de 250 minutos. Os recursos necessários foram lousa e giz. As aulas foram organizadas da seguinte forma:

1ª aula - História da criação dos números; o conjunto dos números naturais; representação simbólica; sucessor e antecessor; o conjunto dos números inteiros; a necessidade da criação dos números negativos; representação simbólica de $\mathbb{Z}$; operações com números inteiros.

2ª aula - O conjunto dos números racionais; a necessidades da criação dos números fracionários; a forma de fração para representar qualquer número racional; os decimais exatos; as dízimas periódicas; representação simbólica de $\mathbb{Q}$; operações em $\mathbb{Q}$.

3ª aula - Ênfase para a incompletude dos números racionais; mostrar que a reta real é mais rica em pontos do que o conjunto dos números racionais em elementos; segmentos comensuráveis e incomensuráveis.

4ª aula - A criação dos números irracionais (comentar sobre o corte de Dedekind e o método das expressões decimais) decimais não exatos e não periódicos; o conjunto dos números reais; subconjuntos importantes de $\mathbb{R}$.

5ª aula - Aula de exercícios sobre os assuntos.

Com a finalidade de avaliar o aprendizado e a compreensão dos estudantes pelos assuntos que foram ensinados na sequência de aulas citadas anteriormente, foi aplicado um questionário sobre o assunto tratado nas aulas.

Em algumas turmas o questionário foi aplicado com alunos que participaram da aula proposta neste trabalho e alunos que não participaram.

Participaram da experiência um total de 210 alunos, divididos em seis turmas do 3º ano. Três dessas turmas responderam ao questionário sem a exposição da aula teórica sugerida e as outras três com a exposição prévia da aula.

O quadro abaixo mostra a porcentagem de acerto de cada questão proposta nas turmas avaliadas. No caso da primeira questão a porcentagem representa o número de alunos que acertaram pelo menos 5 itens.

Quadro 13 – Porcentagem de acertos de questões nas turmas selecionadas

Questão		Turmas sem aula teórica	Turmas com a aula sugerida
1		$\frac{22}{106} \approx 20\%$	$\frac{81}{104} \approx 78\%$
2	a	$\frac{11}{106} \approx 10\%$	$\frac{94}{104} \approx 90\%$
	b	$\frac{4}{106} \approx 4\%$	$\frac{65}{104} \approx 62\%$
	c	$\frac{1}{106} = 1\%$	$\frac{42}{104} \approx 40\%$
3		$\frac{15}{106} \approx 14\%$	$\frac{91}{104} \approx 88\%$
4		$\frac{6}{106} \approx 6\%$	$\frac{73}{104} \approx 70\%$
5		$\frac{10}{106} \approx 9\%$	$\frac{75}{104} \approx 72\%$
6		$\frac{4}{106} \approx 4\%$	$\frac{62}{104} \approx 60\%$

Fonte: Roriz (2014)

O autor percebeu uma melhora significativa no índice de acertos e na facilidade com que as perguntas foram respondidas pelos alunos que participaram da aula teórica sugerida.

Destacou-se também o índice de erro dos alunos que não assistiram à aula. Este fato comprova que uma grande parte dos alunos do 3º ano não possuem os conhecimentos esperados sobre os conjuntos numéricos, em especial o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais.

Em um artigo feito por Serra (2015), buscou-se demonstrar aplicações e significados do número ϕ e sua possibilidade de ensino em uma turma de primeiro ano do ensino técnico integrado em Mecatrônica. Utilizou-se o software Geogebra, a fim de promover o interesse dos alunos, pois ele permite alterações instantâneas nas figuras, além de conclusões diretas sobre as modificações.

No desenvolvimento da atividade, inicialmente, apresentou-se e discutiu-se os conjuntos numéricos: naturais, inteiros e racionais. Posteriormente, quando se iniciou o estudo dos números irracionais, observou-se uma dificuldade dos alunos em perceber as características e seus elementos. Diante disso foi explicado sobre as raízes não exatas, como primeiros exemplos de números irracionais, tais como: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ... Também destacou-se que as raízes $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, ... não pertencem a esse grupo, pois são raízes ditas exatas, sendo elas, números racionais.

Após o primeiro momento, o pesquisador perguntou aos alunos, se somente há números irracionais que sejam raízes ditas “não exatas”. Neste momento alguns deles lembraram do número Pi (π) que é muito utilizado, inclusive no ensino fundamental, quando se estuda geometria. Notou-se que poucos sabiam o porquê do valor de π = 3,14159... A partir de então, observou-se que seria interessante a utilização do software Geogebra, por ser de fácil manuseio e de rápida visualização das formas e cálculos.

Construiu-se uma circunferência qualquer e um segmento de reta que ligava dois pontos sobre a circunferência, passando pelo centro da mesma, ou seja, o seu diâmetro. A partir daí, utilizou-se a planilha eletrônica do *Geogebra* e criou-se a razão entre o comprimento da circunferência e o segmento de reta construído, anteriormente, o diâmetro, verificando que o seu valor era 3,1415926535 (destacando, aqui, que o valor é aproximadamente Pi, pois se mostra um número finito de casas decimais).

Na aula seguinte, foram retomados os conceitos e aplicações anteriores. Os pesquisadores questionaram os alunos, se só existiam esses tipos de números irracionais. A resposta foi o silêncio, mas, ao mesmo tempo, uma grande vontade de conhecer outros números, do mesmo tipo que o Pi (π).

Iniciou-se a procura desse número com o aplicativo *Geogebra*, dizendo aos alunos que o objetivo era encontrar um número que era “mágico”: que estava presente em muitos objetos e possuía muitas aplicações na natureza, na arte e na arquitetura. Desse modo, foi construído com os alunos, no laboratório de informática, um quadrado de qualquer medida de segmento que formam os seus lados (importante que cada dupla de alunos criasse um quadrado, com medidas diversas).

Depois, foi construído um segmento (e) de reta que ligava o ponto médio (ponto E) de um dos segmentos do quadrado até um de seus vértices, no segmento oposto do ponto E. Em seguida, realizou-se uma rotação desse segmento, com ponto fixo no ponto E, com auxílio de circunferência, pois esse segmento (g) seria o raio dessa circunferência. Depois disso os alunos foram orientados a seguir várias instruções de construção de figuras no Geogebra de modo que os alunos afirmaram que encontraram um valor muito próximo de 1,6 e foi obtido por uma razão entre segmentos da figura construída. Surgindo, dessa maneira, sobre o significado do número 1,6, seria ele um número racional?

Pediu-se aos alunos que realizassem alguns cálculos na planilha disponível no próprio Geogebra, pois assim não fariam arredondamentos que influenciaria no resultado final. Eles verificaram que esse número possuía muitas casas após a vírgula, sem período de repetição, logo, seria esse um número irracional.

Após as conclusões, o professor-pesquisador voltou à figura construída por ele e começou a realizar alterações nos mesmos, mostrando na planilha que o resultado era sempre o mesmo 1,6180..., o número de ouro, chamado de Phi(ϕ). A partir dessa percepção foi mostrado, aos alunos, as aplicações matemáticas e curiosidades do número de ouro, como nas obras de Leonardo da Vinci (Mona Lisa e o Homem Vitruviano), no Parthenon em Atenas e na Sequência de Fibonacci.

Constatou-se que os alunos se sentiram desafiados a procurar mais aplicações sobre esse número, comprovando como a matemática possui muitas utilizações computacionais. Consequentemente, os alunos ficaram interessados pelo uso da informática.

A partir das observações obtidas, durante a aplicação dessas atividades, verificou-se que o objetivo principal foi atingido. Com o uso de softwares computacionais, os alunos participaram de forma ativa no processo de ensino e aprendizagem.

Notou-se que a utilização da informática no processo de ensino, como um meio apoio à aprendizagem, cativou os alunos e despertou o interesse em descobrir novas aplicações. Demonstrou-se, então, que a utilização de software no ensino pode auxiliar nas ações e reflexões dos alunos, tornando-as mais rápidas e intuitivas.

O trabalho de Matos e Barros (2016) descreve a aplicação de uma sequência de atividades investigativas que utilizou uma abordagem histórica sobre o processo de construção dos números irracionais, de forma a mostrar, demonstrar, discutir e trabalhar intuitivamente esses números.

O objetivo foi apresentar uma sequência de atividades investigativas envolvendo os números irracionais e relatar a aplicação e os resultados da aplicação dessa atividade.

Para o cumprimento do objetivo, adotou-se como metodologia de ensino uma Sequência Didática. Essa sequência tratou de um conjunto de atividades investigativas que buscasse auxiliar os alunos a superar os obstáculos epistemológicos presentes no entendimento de números irracionais, além de possibilitar a compreensão intuitiva da completude da reta. Usou-se a história da matemática na elaboração dessas atividades investigativas.

A aplicação dessa sequência foi feita em alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola federal. Durante a aplicação das atividades, os resultados foram obtidos por meio da observação do desempenho dos alunos, registrado em diário de aplicação.

Na primeira atividade, foram trabalhados alguns pré-requisitos necessários, ligados aos conceitos de números pares e números ímpares, necessários ao entendimento das atividades seguintes. Iniciou-se com uma atividade investigativa que discute os conceitos de números pares e impares e suas caracterizações. Além disso, foi realizada também uma atividade de demonstração que auxiliou os alunos a provar a irracionalidade da $\sqrt{2}$.

Na segunda atividade, houve a explanação da história do surgimento dos números naturais, perpassa pelo surgimento dos inteiros e racionais até a chegar aos dilemas encontrados pela escola pitagórica ao se deparar com os problemas da diagonal do quadrado de lado um. Após isso, foi aplicada uma atividade investigativa, aos alunos, que os levou a reproduzir os passos de Pitágoras no caminho da descoberta da existência de números não racionais.

Com a nova compreensão de um número irracional, iniciou-se uma discussão mais profunda sobre o conjunto numérico dos Irracionais, a partir do objetivo de mostrar a existência de infinitos números irracionais e propiciar a compreensão intuitiva da completude da reta numérica. Esta última atividade é referente ao teorema da densidade, que garante a completude da reta numérica, ou seja, que entre dois números racionais sempre existe um número irracional, partindo do intervalo 0 e 1 e utilizando as propriedades dos números irracionais. Após isso, foi discutido com os alunos sobre a completude da reta numérica.

Os alunos entenderam que não seria possível escrever raiz de dois na forma de fração. Diante disso, perceberam a existência de números não racionais, isto é, números irracionais.

Mesmo não conseguindo elaborar uma demonstração algébrica, os alunos conseguiram observar, de forma intuitiva, que sempre seria possível criar um número irracional entre quaisquer números reais. Os autores notaram também que eles conseguiram utilizar conhecimentos adquiridos ao longo das atividades anteriores para estabelecer novas conjecturas e validá-las, levando a concluir que as atividades alcançaram bons resultados.

Conforme os autores essa sequência de atividades investigativas se mostrou uma alternativa eficiente para a superação de muitos obstáculos epistemológicos ligados a números irracionais. Através da aplicação das atividades e das observações feitas, os alunos evoluíram em sua compreensão do tema, resultado confirmado na avaliação da disciplina.

Através da realização de avaliações antes e depois da atividade, os autores constataram que a sequência cumpriu seu papel de minimizar as dificuldades identificadas. Sendo assim, acredita-se que essa sequência pode ser uma alternativa para o ensino de números irracionais.

Schembergue e Pereira (2016) desenvolveram um trabalho de experimentação onde tiveram como objetivo proporcionar estratégicas metodológicas para o ensino de matemática no que se refere à aprendizagem dos números irracionais, a fim de viabilizar uma melhor compreensão do seu significado.

Para cumprir o objetivo esperado, os autores construíram uma sequência de atividades para a aprendizagem de números irracionais. Elas foram aplicadas no Colégio Estadual Dr. Epaminondas Novaes Ribas e contou com a participação dos alunos do Ensino Fundamental II do oitavo ano.

Essas atividades trabalharam investigações metodológicas por meio da Educação Matemática e da História da Matemática. Elas foram desenvolvidas a partir de um cronograma com 9 ações para aplicação do projeto de intervenção pedagógica.

1ª Ação: Na atividade foi proposta o uso de vídeo para potencializar e ampliar o conhecimento, trazendo para a sala de aula realidades distantes dos alunos.

2ª Ação: Foi apresentado um texto sobre a história dos números.

3ª Ação: Neste momento, os estudantes foram orientados a criar uma história em quadrinhos sobre número irracional. Desse modo, eles tentaram reproduzir a história do número irracional, com o auxílio dos vídeos que assistiram e do texto que leram.

4ª Ação: Os estudantes foram direcionados a fazer atividades como a construção do quadrado e da diagonal com o auxílio de materiais de desenho geométrico, assim como o cálculo do valor da diagonal. Com isso, eles perceberam a existência de um número desconhecido, isso possibilitou uma discutição sobre a necessidade da "ampliação" ou "completamento" dos números racionais, pela sua insuficiência para tratar com os problemas da geometria euclidiana.

5ª Ação: Nesta ação foi feita uma atividade com a escala cuisenaire. As peças foram separadas por escala, da maior para a menor, para que o aluno fosse colocando em cima da diagonal do quadrado, já desenhado no caderno na atividade anterior (4ª Ação). Ao realizar a atividade, foram comprovando que nenhuma escala "caberia" exatamente um número inteiro de vezes naquela diagonal, ora faltava ora sobrava. Isto fez com que o aluno compreendesse o conceito de número irracional.

6ª Ação: Na atividade proposta de descobrir o valor aproximado do número irracional $\sqrt{2}$ com o auxílio da calculadora, fazendo os cálculos para verificar a representação decimal infinita e não periódica do número. A importância do cálculo numérico na atividade percebendo a necessidade de continuar para aproximar do número irracional escolhido. A persistência nos cálculos se efetivou quando os alunos entenderam o significado dos números irracionais, que é um número real que não pode ser expresso como $a\ b$ de dois inteiros e $b \neq 0$, ou seja quando sua representação decimal for infinita e não periódica.

7ª Ação: Nesta atividade os alunos tentavam localizar o número irracional na reta numérica. Eles tiveram dificuldade em desenhar à régua, por não entenderem as divisões de milímetros e decímetros. Assim, foram realizando a atividade com atendimento individual.

8ª Ação: nesta ação foi explicado sobre a demonstração da irracionalidade do número √2. Algo que foi difícil deles entenderem, diante do raciocinando por absurdo.

9ª Ação: Na atividade trabalhada neste momento, foi construído um varal numérico de alguns números irracionais. Eles jogavam um dado quantas vezes quisessem para formar números que ficariam no varal, com isso eles perceberam que a chance dos dígitos se repetirem infinitamente é bem pequena. Portanto a chance de se obter um número irracional é muito maior do que a de obter um número racional.

As ações citadas anteriormente, foram sintetizadas no quadro abaixo:

Quadro 14 – Síntese da organização e resultados das ações

AÇÃO	DESENVOLVIMENTO	RESULTADOS
1ª) Vídeo sobre a história dos números.	Assistir e em seguida uma discussão dos vídeos.	Nesta ação os alunos expressaram atenção e interesse, alguns comentários como a não utilização do recurso do vídeo nas aulas de matemática.
2ª) Texto sobre a história dos números.	Leitura e interpretação.	A falta de interesse de alguns alunos na leitura foi um elemento desafiador, na efetivação da ação.
3ª) História em quadrinhos.	Através do software Pixton construir a história do número irracional.	A participação dos alunos foi valiosa na atividade, mas contratempos com e-mails esquecidos pelos alunos, foi um ponto negativo.
4ª) Construção do quadrado e da diagonal.	Através de materiais geométricos o desenho geométrico da diagonal do quadrado.	A atividade foi positiva, mas os alunos apresentaram dificuldades com o manuseio dos materiais geométricos.
5ª) Material cuisenaire no cálculo da diagonal.	Através da escala cuisenaire os alunos calcularam a diagonal do quadrado.	O objetivo da atividade foi alcançado, porque os alunos ao colocarem as escalas na diagonal do quadrado puderam descobrir que nenhuma escala inteira caberia na diagonal.
6ª) Descobrir o valor aproximado do número irracional √2.	Atividade de aproximação de números irracionais no caderno e com a calculadora.	A atividade teve o envolvimento dos alunos nos cálculos com decimais.
7ª) Localização na reta numérica do número irracional.	Atividade de graduar a régua numérica para localizar o número	Levar o aluno a entender que a régua numérica está graduada milimetricamente foi difícil e

	irracional √2.	trabalhosa.
8ª) Demonstrar algebricamente o número irracional.	Atividade de demonstração algebricamente de número irracional.	Os alunos verificaram na demonstração a comprovação do número irracional.
9ª) Verificar a "quantidade" de números irracionais.	Ao jogar o dado, eles formavam um número irracional, construímos um varal numérico.	Os alunos se envolveram com a atividade e na construção do varal com números irracionais.

Fonte: Schembergue e Pereira (2016).

As estratégias de ensino sugeridas e propostas durante o processo de desenvolvimento ofereceram oportunidade de visualizar e compreender o que é um número irracional. Com o auxílio do *software Pixton*, os alunos puderam escrever a história desses números. Sob um ponto de vista mais concreto, fizeram a localização dos números irracionais na reta numérica, usaram a escala cuisenaire para medir a diagonal do quadrado e confeccionaram o varal numérico. Desta forma, os alunos puderam ter uma ideia da "quantidade" (infinidade) de números irracionais. Por outro lado, mais abstrato, trabalharam as demonstrações e argumentos para a construção desses números.

Com a pesquisa realizada por Schembergue e Pereira (2016) pôde-se constatar que as estratégias metodológicas, como o ensino por atividade, para o ensino e aprendizagem dos números irracionais favoreceram a aprendizagem significativa, contribuindo para a construção do conhecimento escolar.

Em um trabalho de dissertação feito por Nobre (2017), é apresentado um experimento didático desenvolvido com turmas de 8º ano do Ensino Fundamental. Seu objetivo é de introduzir sobre o conjunto dos números irracionais, de modo significativo e motivador para os estudantes, e envolvendo a participação efetiva dos mesmos na construção desse novo e importante conhecimento.

As questões de pesquisa que direcionaram este trabalho foram as seguintes:

i) Uma metodologia de ensino/aprendizagem baseada em investigações matemáticas pode despertar em estudantes de 8º ano do Ensino Fundamental uma atitude de protagonismo e maior envolvimento relativamente à sua própria aprendizagem de Matemática?

ii) Que tipos de atividades investigativas podem ser propostas a estudantes de 8º ano do Ensino Fundamental, a fim de desenvolver e aprofundar o estudo dos números irracionais, minimizando as mais frequentes dificuldades referentes ao aprendizado desse conteúdo?

iii) Como discutir a problemática dos conceitos complexos envolvidos no estudo dos irracionais para obter abordagens significativas e acessíveis para a introdução dessa temática com estudantes do Ensino Fundamental II? Em particular, como fazer com que estudantes de oitavo ano percebam que os números racionais não são suficientes para medir todos os segmentos de reta concebíveis?

Para elaborar, aplicar e analisar as atividades didáticas foram utilizados como embasamentos teóricos principais: a tese de doutorado de Olga Corbo (CORBO, O., 2012) sobre os conhecimentos necessários para a exploração de noções relativas aos números irracionais na Educação Básica e textos sobre investigações matemáticas de pesquisadores portugueses, sob a coordenação de João Pedro da Ponte (PONTE, J. P., et al., 1998 e ABRANTES, P. et al., 1999). O embasamento teórico permitiu o autor deste trabalho analisar qualitativamente os resultados obtidos com a aplicação das sequências didáticas à luz das questões norteadoras e da fundamentação teórica adotada.

A abordagem metodológica de ensino utilizada no desenvolvimento do experimento foi as atividades de exploração e investigação, que conforme o autor, trata de atividades matemáticas que fornecem o aprendizado matemático por meio da construção do próprio saber matemático.

As atividades didáticas realizadas foram propostas e desenvolvidas em turmas de oitavo ano do Ensino Fundamental, em três momentos distintos: primeiro semestre de 2016 (por meio de trabalhos de pesquisa), segundo semestre de 2016 (com atividades investigativas) e primeiro semestre de 2017 (novamente por meio de atividades investigativas).

As atividades foram planejadas visando abordagens dos conteúdos ricas em significados e acessíveis à faixa etária alvo. Estudantes de 8º ano, em 2016, realizaram pesquisas e apresentações em grupos sobre o número de ouro e atividades investigativas para explorar propriedades características dos números racionais e irracionais: representação decimal, associação à medida de segmentos de reta, localização na reta numerada, infinidade e densidade nesta reta. Em 2017, as turmas do 8º ano escolhidas desenvolveram atividades investigativas ampliando os objetivos para incluir a noção de comensurabilidade de segmentos de forma a viabilizar um debate participativo sobre a demonstração da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado elaborada na Grécia antiga.

Ao observar os dados do material de coleta dos dados, os quais tratavam do preenchimento individual dos estudantes, mesmo estando em equipes, o autor percebeu que, relativamente à questão sobre a infinidade e densidade de racionais e irracionais na reta numerada, a concepção dos estudantes foi adequadamente ampliada. O que comprova que é possível evitar a concepção usual, de grande parte dos egressos do Ensino Médio, sobre a existência de uns poucos números irracionais, notadamente $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π e e.

Uma observação de uma das atividades apresentado pelo autor, foi que a comprovação da irracionalidade de $\sqrt{2}$ ajudou muito para que os alunos tivessem maior aceitação da irracionalidade de muitos outros números citados, mesmo sem prova específica para cada um. De acordo com o pesquisador, a percepção da complexidade da prova efetivamente discutida parece ter deixado claro que se pode provar a irracionalidade de outros como $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, etc.

Nobre (2017) destaca também que houveram questionamentos de alguns estudantes que conduziram a uma discussão entre todos os alunos da turma sobre, por exemplo, a possibilidade de determinar uma infinidade de números irracionais estipulando regras não periódicas para a determinação de representações decimais para números com infinitas casas depois da vírgula. Alguns chegaram até a intuir sobre haver um infinito ainda maior de irracionais para os quais não seja possível determinar uma lei de formação para a parte decimal após a vírgula desses números.

Conforme o autor, diferentes interações ocorridas no interior dos grupos, como divisão de tarefas, divisão de temas, escolha do tipo de apresentação (se por meio de vídeo ou de forma presencial, etc.), o trabalho em conjunto, os debates e a organização de dias e horários para eventuais ensaios configuram, apesar das inúmeras discussões e desavenças que pudera ocorrer, uma rica experiência de aprendizagem.

De um modo geral, constatou-se neste trabalho o importante valor das aulas investigativas na ampliação de horizontes que se pode explorar a respeito dos números irracionais; na abertura de espaço para que o assunto dos irracionais possa ser posteriormente abordado no Ensino Médio de forma mais aprofundada e mais completa com efetiva atribuição de significados pelos estudantes desta pesquisa; e por ter possibilitado uma maior compreensão do que seja um número real.

O autor deste trabalho declarou que na busca de conseguir propor situações didáticas que favorecessem a ampliação da construção de significados, por parte dos estudantes, sobre as propriedades específicas dos números irracionais e sua diferenciação relativamente aos racionais, acabou ajudando os estudantes da pesquisa a superar aquilo que seria a expectativa inicial dele.

Nobre (2017) percebeu que o sucesso da prática desenvolvida por meio de atividades de exploração e investigação constatou que no oitavo ano do Ensino Fundamental é de fato possível aos estudantes perceberem e se familiarizem com noções básicas, complexas e muito abstratas, sobre números irracionais, se mantiver o foco nas ideias matemáticas fundamentais, sem abusar de formalismos ainda não dominados nesta faixa etária.

Um trabalho feito por Rocha (2018) que pautou-se na elaboração, implementação e análise de tarefas sobre a aprendizagem de números irracionais. A partir disso, teve o objetivo de contribuir com a prática pedagógica de graduandos de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública da Baixada Fluminense e estimulá-los a perceber a relevância do estudo do tema.

A metodologia de pesquisa utilizada foi a DBR (Design Based Research) partindo do levantamento através de questionários e aplicação de atividades em formato interativo sobre o conceito de conjunto dos números irracionais, suas respectivas estruturas e aplicações.

A DBR é uma metodologia de pesquisa que desenvolve a avaliação de seus resultados e desenvolvimento, durante o processo de investigação, ou ainda formativamente. Ela começa com a identificação de uma situação que necessita de intervenção e de um resultado de desenvolvimento prático, somente possível de obter a partir de uma investigação científica de natureza aplicada. Uma pesquisa que utiliza DBR, se aproxima de ser uma pesquisa-ação devido à necessidade de considerar todos os envolvidos como autores, pesquisadores e parte da equipe de pesquisa, que constroem o resultado coletivamente, mas se diferencia pela sua explícita objetivação em resultados e melhorias concretas e perceptíveis (ROCHA, 2018).

Os instrumentos de coletas de dados utilizados pelo autor foram: diário de campo, questionário, folhas de atividades e áudio gravado dos trabalhos em grupo. A análise se orientou sob a construção do conceito de números irracionais, considerando a percepção de que estes números necessitam de vivência sobre medição, aproximações e diferentes representações.

A pesquisa se dividiu em dois grandes momentos. O primeiro buscou compreender o perfil dos graduandos e a elaboração do material para uso em sala de aula e o segundo buscou a análise da proposta ao término da implementação de cada tarefa e ao final do processo.

Quanto aos dados coletados, eles apontam a falta de familiaridade dos graduandos em usar materiais manipuláveis e com a ideia de incomensurabilidade. Dessa forma, destaca-se a necessidade de verificação sobre a adequabilidade das tarefas aplicadas a estudantes do Ensino Fundamental II, de novas abordagens teóricas e de desenvolvimento de outras situações problemas envolvendo os números irracionais.

Dentro das ideias observadas durante o processo de pesquisa, notou-se algumas dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos matemáticos em nível de graduação (limites, continuidade, teoria dos números), sendo essas dificuldades ligadas a falta de compreensão de propriedades do conjunto dos números reais.

Mediante ao diagnóstico observado com os dados, foi percebido que as tarefas realizadas pelos estudantes podem representar um produto educacional para auxiliar na aprendizagem do tema por esses estudantes. Diante disso foi gerado uma proposta de curso de extensão para professores.

Conforme o autor, a partir das tarefas e do produto produzido a partir delas, é possível buscar por resultados visíveis em outras etapas de ensino. É, por exemplo, bem possível que haja alunos do Ensino Fundamental e Médio apresentem reações e conflitos diferenciados dos licenciandos envolvidos nesta pesquisa.

Acredita-se, para o autor, que seja viável investigar relações de outras relações ao conceito de número irracional como, por exemplo, a transcendência e suas relações com o ensino de álgebra.

Os trabalhos revisados nessa subseção possuem conhecimentos importantes acerca do ensino e aprendizagem de números irracionais sob o aspecto experimental. Diante disso, no quadro 15 foram sintetizadas as principais informações dos trabalhos revisados.

Quadro 15 - Síntese dos dados dos estudos experimentais.

Trabalhos Analisados	Objetivo	Conclusões / Sugestões
Jover (2013)	Aprimorar para o ensino-aprendizagem de números irracionais em uma turma do 9ª ano do Ensino Fundamental da Rede Pública do Estado.	Foi observado que os alunos aprenderam sobre os números irracionais poderem representar medidas de segmentos assim como, mesmo na impossibilidade de se determinar um valor exato para essas medidas, é possível comparar segmentos de comprimento representado por irracionais. Dentre quatorze alunos que participaram, onze foram capazes de concluir que os números irracionais efetivamente existem e que estão situados entre dois números inteiros. Em relação a esta pesquisa, foi possível constatar que a experiência proporcionada com o uso do Geogebra facilitou a compreensão dos números irracionais por parte dos alunos.
Roriz (2014)	Constatar a eficácia de uma proposta de Sequência Didática com alunos do Ensino Médio	O autor percebeu uma melhora significativa no índice de acertos e na facilidade com que as perguntas foram respondidas pelos alunos que participaram da aula teórica sugerida. Entretanto, destacou-se também o índice de erro dos alunos que não assistiram à aula. Este fato comprova que uma grande parte dos alunos do 3º ano não possuem os conhecimentos esperados sobre os conjuntos numéricos, em especial o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais.
Serra (2015)	Demonstrar aplicações e significados do número ϕ e sua possibilidade de ensino em uma turma de primeiro ano do ensino técnico integrado em Mecatrônica.	Notou-se que a utilização da informática no processo de ensino, como um meio apoio à aprendizagem, cativou os alunos e despertou o interesse em descobrir novas aplicações. Demonstrou-se, então, que a utilização de software no ensino pode auxiliar nas ações e reflexões dos alunos, tornando-as mais rápidas e intuitivas.
Matos e Barros (2016)	Apresentar uma sequência de atividades investigativas envolvendo os números irracionais e relatar a aplicação e os resultados da aplicação dessa atividade.	Mesmo não conseguindo elaborar demonstrações algébricas, os alunos conseguiram observar, de forma intuitiva, que sempre seria possível criar um número irracional entre quaisquer números reais. Os estudantes, até conseguiram utilizar conhecimentos adquiridos ao longo das atividades anteriores para estabelecer novas conjecturas e validá-las, levando a concluir que as atividades alcançaram bons resultados.

		Conforme os autores essa sequência de atividades investigativas se mostrou uma alternativa eficiente para a superação de muitos obstáculos epistemológicos ligados a números irracionais. Através da aplicação das atividades e das observações feitas, os alunos evoluíram em sua compreensão do tema, resultado confirmado na avaliação da disciplina.
Schembergue e Pereira (2016)	Proporcionar estratégicas metodológicas para o ensino de matemática no que se refere à aprendizagem dos números irracionais, a fim de viabilizar uma melhor compreensão do seu significado.	As estratégias de ensino sugeridas e propostas durante o processo de desenvolvimento ofereceram oportunidade de visualizar e compreender o que é um número irracional. Com a pesquisa realizada, pôde-se constatar que as estratégias metodológicas, como o ensino por atividade, para o ensino e aprendizagem dos números irracionais favoreceram a aprendizagem de modo significativo, contribuindo para a construção do conhecimento escolar.
Nobre (2017)	Introduzir sobre o conjunto dos números irracionais, de modo significativo e motivador para os estudantes, e envolvendo a participação efetiva dos mesmos na construção desse novo e importante conhecimento.	O sucesso da prática desenvolvida por meio de atividades de exploração e investigação constatou que no oitavo ano do Ensino Fundamental é de fato possível aos estudantes perceberem e se familiarizem com noções básicas, complexas e muito abstratas, sobre números irracionais, se mantiver o foco nas ideias matemáticas fundamentais, sem abusar de formalismos ainda não dominados nesta faixa etária.
Rocha (2018)	Contribuir com a prática pedagógica de graduandos de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública da Baixada Fluminense e estimulá-los a perceber a relevância do estudo de números irracionais.	Uma sequência de tarefas (atividades) que seja bem planejada e seja aplicada a partir de um prévio conhecimento de como se apresenta o conhecimento dos estudantes; caracteriza uma metodologia de ensino eficaz no aprendizado de números irracionais. Dentro das ideias observadas durante o processo de pesquisa, notou-se algumas dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos matemáticos em nível de graduação (limites, continuidade, teoria dos números), sendo essas dificuldades ligadas a falta de compreensão de propriedades do conjunto dos números reais. As tarefas (atividades) realizadas pelos estudantes podem representar um produto educacional para auxiliar na aprendizagem do tema por esses estudantes. Diante disso foi gerado uma proposta de curso de extensão para professores

Fonte: Jover (2013); Roriz (2014); Serra (2015); Matos e Barros (2016); Schembergue e Pereira (2016); Nobre (2017); Rocha (2018).

3.5.6. Síntese dos Resultados

Os trabalhos revisados possuem conhecimentos importantes acerca do ensino e aprendizagem de números irracionais. Conhecimentos ligados as suas potencialidades no ensino, ao diagnóstico dos agentes que se envolvem com este assunto em sala de aula, as suas abordagens instrutivas em livros didáticos, assim como a reflexões conceituais.

Diante de todo esse conhecimento e com base na necessidade de desenvolver uma boa análise a respeito dessa revisão de estudos, construiu-se o quadro 16 que sintetiza as principais informações pelos trabalhos revisados, de acordo com cada categoria.

Quadro 16 – Síntese dos resultados mais importantes por categoria

Categoria	Síntese dos resultados
Estudos Teóricos	Frações Contínuas podem ser um assunto que pode ser explorado para significar os números irracionais, além de articular conhecimentos matemáticos presentes no currículo de Matemática, interligando-os numa rede de significados. Quanto ao ensino de números irracionais é sugerido que ▪ Ao se trabalhar com radicais no oitavo ano do ensino fundamental, deve ser definido o que é um número irracional e aproveitar este momento para falar um pouco mais sobre o surgimento desses números. ▪ No nono ano, a construção da reta numérica é um tópico importante de ser explorado para se ordenar os números irracionais e estimar uma aproximação decimal para um número irracional. A introdução de números irracionais pode ser modulada pelo professor sob os componentes formal, algoritmo e intuitivo, assim, ele pode utilizar os argumentos formais para justificar verdades matemáticas e algumas vezes incluir concepções mais intuitivas do que formais. Isso vai depender do nível de compreensão de seus alunos. O excesso de formalismo sobre números reais, quando este é abordado no Ensino Superior, não capacita de maneira eficiente o futuro professor de Matemática para ensinar números irracionais na Educação Básica, o que vai refletir na manutenção das dificuldades dos alunos da Educação Básica, fechando um círculo vicioso. Em meio a isso peculiaridades da Matemática escolar precisam fazer parte do currículo da licenciatura em Matemática, principalmente no que se refere ao ensino dos números reais/irracionais na Educação Básica.
Estudos Diagnósticos	Mais do que um em cada três alunos não reconhece claramente quando um determinado subconjunto limitado de R possui elemento máximo ou elemento mínimo. Para os autores, essa “imagem” de Q e de R como conjuntos cujos subconjuntos limitados devem possuir elemento mínimo (e/ou máximo) pode criar obstáculos à compreensão da noção de irracionalidade e da própria natureza do contínuo numérico. Diante disso, se não se compreende o sentido e a razão de ser dos irracionais, é difícil superar as dificuldades na compreensão de vários conceitos ligados à estrutura dos reais. Muitos estudantes têm apenas vagas lembranças das “regras” da Matemática. De modo que, alguns até tentam reproduzi-las e

	quando não conseguem, criam outras respostas baseadas em suas lembranças, a fim de encontrar uma resposta compatível com a resposta requerida. As regras que não expressam significado aos alunos acabam se constituindo em grande dificuldade na construção do conhecimento dos alunos. A interpretação geométrica dos números irracionais, tendo como pauta a incomensurabilidade de grandezas não costumava fazer parte do repertório de conhecimentos dos professores de uma amostra, indicando lacunas também nos conhecimentos pedagógicos necessários à apresentação desse conteúdo aos alunos. Os resultados de uma investigação apontaram que é a experiência escolar, a diversidade de situações matemáticas vivenciadas pelos alunos, e a disponibilidade do professor em apresentar a seus alunos diferentes atividades que favoreçam a desestabilização de conhecimentos errôneos; que vai favorecer a apropriação do conceito de números irracionais. Assim, a análise dos dados de uma amostra de alunos ingressantes no curso de licenciatura em matemática apontou à precariedade dos conhecimentos relacionados a números irracionais, com predominância de exemplos protótipos e de uma compreensão instrumental do assunto. O conhecimento que os sujeitos apresentaram no início dessa pesquisa, parece ser um reflexo de negligência de processos pedagógicos relacionados aos números irracionais da educação básica, pois verificou-se que alguns sujeitos 'sabiam' alguma coisa a respeito de número irracional, como, por exemplo, que são representados por dízimas não-periódicas. Porém, em muitos casos, percebeu-se que esse conhecimento não ia além disso; diante do fato que o mesmo sujeito considerava possível que uma fração de inteiros pudesse gerar um número irracional. Verificou-se que muitos conceitos têm passado despercebidos pelos aprendizes, mesmo os professores consentindo com essa situação, talvez, pela ausência de compreensão deles, ou, como foi evidenciado nas entrevistas, pode acontecer pela falta de aplicação de atividades capazes de mobilizar, por exemplo, que a situação geométrica apresentada aos professores seja exercitada com os estudantes. Os estudantes de uma amostra específica não possuiam familiaridade em encontrar medidas incomensuráveis; eles se sentiam desconfortáveis ao não encontrarem valores exatos. Além disso, foi possível identificar o surgimento do processo de construção do conceito de incomensurabilidade quadrado. Os conceitos de incomensurabilidade e de interpretação geométrica dos números irracionais permearam as dúvidas apresentadas pelos licenciandos sempre que encontravam barreiras ao utilizar as unidades ofertadas para a medição da diagonal do que as tarefas geraram benefícios para imagem conceitual dos números irracionais, sua representação geométrica e percepção histórica.

Abordagem nos livros didáticos	A análise de alguns livros didáticos sugere que privilegiam: definições baseadas na representação decimal; tarefas envolvendo procedimentos como classificação como racional e irracional e determinação de frações geratrizes; registros de representação simbólico-algébricos; notas históricas enfocando nomes e datas. Entretanto, tais atividades são tratadas de forma mecânica e com pouco ou nenhum aprofundamento conceitual. Em alguns livros didáticos a apresentação dos números irracionais ocorre de modo polarizado: alguns optam por um viés empírico e outros pela definição formal. Muitos desses livros conduzem a possibilidade de ampliar o quadro de significados em relação a outros tópicos presentes na Matemática Elementar, como os pares discreto/continuo; exato/aproximado e finito/infinito. Uma conclusão geral sobre a análise dos dois livros é que, apesar dos livros didáticos apresentarem grande parte do que é sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, algumas considerações relevantes sobre esses números, tais como as ideias de aproximação e de infinito, não são realizadas ou enfatizadas nos livros didáticos. Alguns livros que apresentam meios diferenciados para uma abordagem didática de números irracionais na escolaridade básica, vão ao encontro a dois aspectos essenciais da área da História da Matemática: retomar a reflexão histórica sobre os números irracionais, e ainda semear a essência dos livros, que é proporcionar modos ou momentos para o leitor acessar e movimentar o pensar.
Estudos experimentais	A experiência proporcionada com o uso do Geogebra facilitou a compreensão dos números irracionais por parte dos alunos, onde a maioria teve uma boa aceitação de que os números irracionais existem por meio das grandezas geométricas construídas pelo Geogebra. Sequência de atividades investigativas se mostrou uma alternativa eficiente para a superação de muitos obstáculos epistemológicos ligados a números irracionais. Através da aplicação das atividades e das observações feitas, os alunos evoluíram em sua compreensão do tema, resultado confirmado na avaliação da disciplina. Estratégias metodológicas, como o ensino por atividade, para o ensino e aprendizagem dos números irracionais favoreceram a aprendizagem de modo significativo, contribuindo para a construção do conhecimento escolar. Atividades de exploração e investigação no oitavo ano do Ensino Fundamental podem direcionar os estudantes a perceberem e se familiarizem com noções básicas, complexas e muito abstratas, sobre números irracionais, se mantiver o foco nas ideias matemáticas fundamentais, sem abusar de formalismos ainda não dominados nesta faixa etária.

	Uma sequência de tarefas (atividades) que seja bem planejada e seja aplicada a partir de um prévio conhecimento de como se apresenta o conhecimento dos estudantes; caracteriza uma metodologia de ensino eficaz no aprendizado de números irracionais.

Fonte: Pommer (2012); Vasconcelos (2016); Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018); Broetto e Wagner (2019); Moreira, Soares e Ferreira (1999); Costa (2009); Silva e Penteado (2010); Pietropaolo, Corbo e Campos (2013); Nogueira e Rezende (2014); Rezende e Nogueira (2015); Broetto (2016); Machado e Rezende (2017); Rocha (2017); Souto (2010); Pommer (2012); Jesus (2017); Felix (2018); Pommer (2018); Jover (2013); Roriz (2014); Serra (2015); Matos e Barros (2016); Schembergue e Pereira (2016); Nobre (2017); Rocha (2018).

A partir dos resultados, os quais foram obtidos por meio desta revisão de estudos, foi possível desenvolver uma análise global sobre o tema em questão, constituindo, dessa forma, um entendimento profundo a respeito de números irracionais no âmbito do ensino e aprendizagem.

3.5.7. Análise dos resultados

Diante dos quadros apresentados, pode-se ter uma compreensão mais geral sobre números irracionais, dessa forma, é possível construir uma caracterização a este assunto para cada categoria (teórico, diagnóstico, análise de livro didático e experimental).

Nos estudos teóricos, obtiveram-se propostas de como ensinar números irracionais, assim como reflexões sobre este assunto no âmbito do processo de ensino e aprendizagem.

Um ponto discutido em algumas das pesquisas é a necessidade de aprimoramento do currículo a respeito do assunto de números irracionais, como por exemplo, definir número irracional já no 8º ano e procurar com os alunos do 9º ano definir reta numérica real, além disso, tratar com números irracionais por meio da aproximação. Neste âmbito a utilização de software pode ser útil no ensino de números irracionais.

Outra discussão muito importante levantada nos estudos teóricos sobre o assunto de números irracionais é que ele se situa em três aspectos: o formal, o algoritmo e o intuitivo. Sendo o excesso de uma dessas categorias em relação às outras, algo prejudicioso ao aprendizado de outros conceitos futuros, por isso o professor deve mediar entre essas três aspectos quando ensina números irracionais.

Quanto aos estudos diagnósticos, alguns deles direcionaram a coletar dados de grupos de alunos de 8ª e/ou 9ª série do Ensino Fundamental, outros direcionaram a grupos de professores de matemática ou graduandos de licenciatura em matemática.

Dentre esses grupos seletos estão os alunos de 8ª e/ou 9ª série do Ensino Fundamental que conforme as pesquisas apontam, tiveram baixo rendimento no que se refere ao entendimento do significado de números irracionais e os tópicos que constituem seu assunto. Conforme as pesquisas, o baixo rendimento neste assunto ocorre devido à obstáculos epistemológicos que dificultam a construção do conhecimento de maneira correta, à falta de vivência de situações matemáticas que explorem o assunto; à negligência e/ou falta de conhecimento de professores em poder explorar este assunto; imagem conceitual construída de forma incorreta de pré-requisitos importantes para o entendimento de números irracionais; dentre outros.

A respeito dos grupos estudados referentes a professores de matemática as pesquisas revelaram que, embora tentem ensinar o assunto de números irracionais, este ensino é muito superficial, por exemplo, muitos deles não utilizam conhecimentos importantes de números irracionais como enumerabilidade, diagonalização de Cantor e outros.

Outra situação que surgiu com as pesquisas é que a imagem conceitual construída por alguns professores, referente aos números irracionais, é constituída por noções que pertencem ao campo numérico, contendo, em alguns casos, concepções incorretas sobre representações e classificação desses números, de modo que a interpretação geométrica ligada a incomensurabilidade de grandezas não costumava fazer parte do repertório de conhecimentos desses professores, indicando lacunas nos conhecimentos pedagógicos.

A respeito dos grupos estudados referentes graduandos em licenciatura em matemática, as pesquisas revelaram que muitos destes estudantes entram na graduação sem conhecer a natureza dos números reais, especifficamente aos irracionais, e desse modo não possuem os muitos pré-requisitos necessários para o aprendizado de outros assuntos da graduação que lidam com números reais, e, com isso, ocorre uma fragilidade no conhecimento pedagógico destes estudantes quando este se forma como professor de matemática e, certamente, corrobora em um ensino também fragilizado de números irracionais.

Os estudos referentes às análises de livros didáticos apresentaram resultados bem diferenciados, alguns benéficos, outros não, com isso, têm-se a seguir os pontos positivos e os pontos negativos apresentados pelos trabalhos a respeito dessas análises.

Os pontos positivos percebidos pelas pesquisas diante da analise de livros didáticos, foram:

► Alguns privilegiam: definições baseadas na representação decimal; tarefas envolvendo procedimentos como classificação como racional e irracional e determinação de frações geratrizes; registros de representação simbólico-algébricos; notas históricas enfocando nomes e datas.

► Alguns livros fazem um tratamento complementar a respeito dos números irracionais nos eixos discreto/continuo; exato/aproximado; finito/infinito, assim como no par determinístico/aleatório.

► Alguns livros contribuem para uma boa transposição didática com relação aos números irracionais.

► Existem livros que apresentam dois importantes aspectos essenciais da área da História da Matemática: retomar a reflexão histórica sobre os números irracionais, e ainda proporcionar momentos para o leitor pensar.

► Alguns livros ajudam a compreensão inicial do embate entre o pragmático e o teórico possibilitando uma ponderação inicial para um tratamento didático mais adequado.

Os pontos negativos percebidos pelas pesquisas diante da analise de livros didáticos, foram:

► Atividades tratadas de forma mecânica e com pouco ou nenhum aprofundamento conceitual.

► Falta de algumas considerações relevantes sobre números irracionais, citados pelo PCN, tais como as ideias de aproximação e de infinito, não são realizadas ou enfatizadas.

► Frequência da abordagem inicial de números irracionais unicamente por geometria.

► Utilização de livros antigos em algumas escolas.

O conhecimento que a análise dos livros didáticos mostrou conduziu a um entendimento sobre como se pode construir um material didático que ensine números irracionais, sendo este material caracterizado com os pontos positivos citados anteriormente e evite ao máximo os pontos negativos.

Quanto aos aspectos experimentais, percebeu-se que uma metodologia de ensino muito utilizada nas pesquisas desta categoria foi a Sequência Didática, que em algumas ocorria por meio do ensino por atividade, em outras por meio de aula interativa. Dentre essas pesquisas, um recurso muito utilizado foi software, com destaque ao Geogebra, que auxiliou no desenvolvimento de atividades e/ou aulas interativas na busca pela aprendizagem de números irracionais. Alguns trabalhos foram direcionados a números reais, mas as atividades aplicadas contribuíram, extremamente, para a aprendizagem de números irracionais.

O direcionamento desta revisão de estudos possibilitou ter um uma visão sobre muitos fatos relativos ao tema diante dos trabalhos revisados na área de Números Irracionais, como a necessidade de melhorar o ensino deste assunto, levando em conta que muitos trabalhos indicam que o conhecimento sobre números irracionais tem se mostrado insuficiente em alunos do Ensino Fundamental, Ensino Médio, Ensino Superior, sendo que esse problema se estende a alguns professores de matemática e até mesmo livros didáticos. Essa compreensão revelou a necessidade de criar estratégias didáticas e metodológicas para o ensino de números irracionais.

3.6. As Concepções de Discentes

Com base nas dificuldades apresentadas por alunos, a respeito de números irracionais, percebeu-se a necessidade de diagnosticar possíveis fatores sociais que interfiram na aprendizagem dos mesmos. Diante dessa necessidade foi realizado uma pesquisa diagnóstica em 2019 com 83 discentes do 1º ano do Ensino Médio em uma escola pública, visando determinar como se encontra nível de dificuldade para o aprendizado números irracionais; assim como investigar se a prática pedagógica dos professores está contribuindo para o aprendizado desse conteúdo, mediante as habilidades estabelecidas pelo PCN e BNCC.

O desenvolvimento da pesquisa apresentada nessa subseção tomou como foco a realização de um diagnóstico do processo de ensino-aprendizagem de números irracionais conforme a opinião de discentes do 1º ano do Ensino Médio, para que pudéssemos compreender como se caracteriza o ensino e aprendizagem de números irracionais no ensino básico.

No primeiro momento foi apresentado aos alunos um termo de consentimento, que se localiza no apêndice A, requerendo a assinatura deles e de seus responsáveis, autorizando-os a participar dessa pesquisa. Após isso, foi aplicado um questionário composto de 22 perguntas de múltipla escolha (apêndice B), cujo objetivo foi traçar um perfil dos estudantes investigados sobre os aspectos relativos a aprendizagem de números irracionais, assim como obter informações sobre as metodologias de ensino e métodos de avaliação dos professores de matemática para com esses alunos, e mais um teste de 7 questões (apêndice C) para verificação da aprendizagem dessa amostra de estudantes em relação ao assunto em questão.

Com os formulários preenchidos, foi desenvolvido a tabulação dos dados obtidos do questionário e do teste, de modo, que utilizou-se a plataforma *Google Forms*, como ferramenta de construção de gráficos para a análise e conclusão dos resultados obtidos

Dessa forma, analisou-se possíveis associações entre o perfil dos alunos investigados no questionário com o desempenho dos mesmos no teste, bem como, a relação dos resultados do questionário com outros trabalhos científicos. Diante disso, foi possível diagnosticar o ensino e aprendizagem dos alunos, sobre números irracionais, com base na análise dos dados tabulados e das relações desses dados com outros trabalhos.

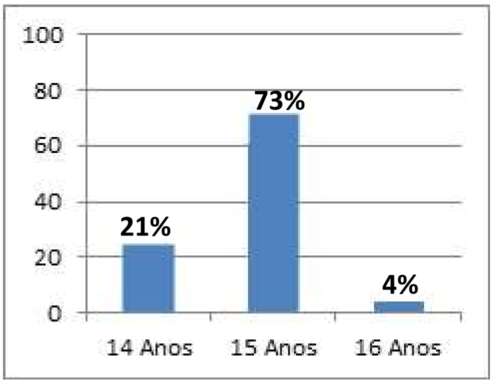
A análise apresenta a seguir objetivou relacionar os dados obtidos por essa pesquisa com os dados do meio estatístico-censitário e compressões de referenciais teóricos do meio acadêmico, para estabelecer concordâncias ou discordâncias. As questões do questionário foram classificadas quanto ao foco de análise, sendo assim, as classificações são: questões de aspecto socioeconômico, metodológico, curricular e avaliativo.

O questionário e o teste podem ser encontrados no apêndice deste trabalho.

3.6.1. Análise das questões de aspecto Socioeconômico

A questão 1 do questionário pedia que os alunos respondessem com as suas idades, algo que foi denotado no gráfico a seguir:

Gráfico 2 - Idade

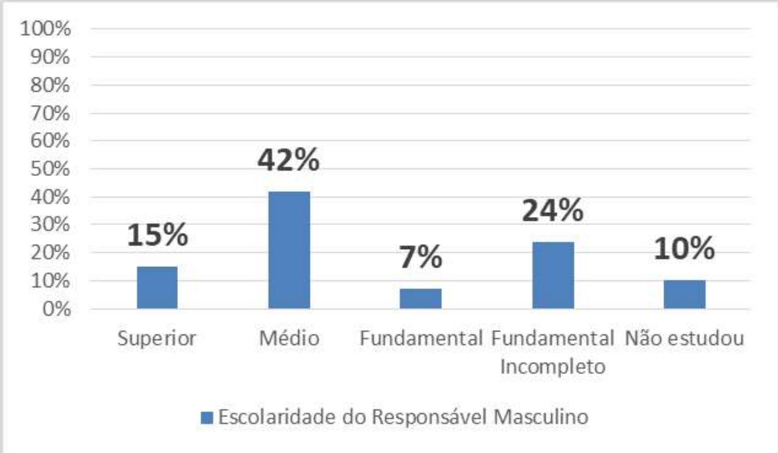


Fonte: Trabalho de Campo (2019).

De acordo com a pesquisa feita pelo IBGE (2016-2017), a faixa etária entre 15 a 17 anos de idade é adequada a de estudantes que se encontram no ensino médio. Porém, apenas 68,4% dos estudantes nessa faixa etária, em 2017, estavam na idade/série adequada. O gráfico anterior certamente denota que as idades predominantes, da amostra de alunos consultada, são as de 14, 15 e 16 anos, sendo que embora os alunos de 14 anos estejam antes da faixa etária adequada do IBGE, é notável que todos não ultrapassaram a faixa de 15 a 17 anos adequada ao EM conforme o IBGE.

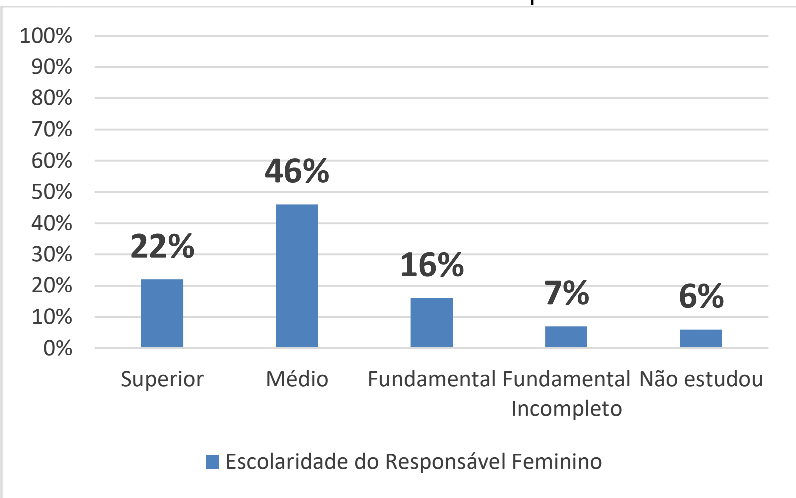
As questões 7 e 8 do questionário fizeram referência a escolaridade do responsável masculino (ver gráfico 3) e do feminino (ver gráfico 4) dos estudantes consultados, cujo gênero está apresentado no gráfico 5, referente a questão 2. Os gráficos a seguir mostram a sintetização dos dados obtidos, referentes a essas duas questões (7 e 8).

Gráfico 3 - Nível de Escolaridade do responsável Masculino



Fonte: Pesquisa de Campo (2019).

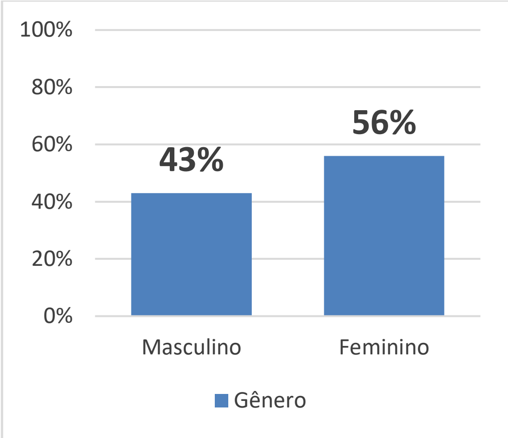
Gráfico 4 - Nível de Escolaridade do responsável Feminino



Fonte: Pesquisa de Campo (2019).

Pode-se perceber que dentre os níveis educacionais, o nível médio foi a categoria que os estudantes mais marcaram, tanto para o responsável masculino, quanto para o feminino. Esse resultado encontra-se paralelo a outro dado apresentado pelo IBGE (2016-2017), onde a Região Norte apresentou o maior crescimento em termos percentuais (1,5 p.p.) na proporção de pessoas de 25 anos ou mais de idade que concluíram, ao menos, a educação básica obrigatória, tendo alcançado, em 2017, 42,1% das pessoas nessa situação. A partir dos gráficos anteriores, é possível ter uma noção do nível que possui maior taxa percentual, isto é, o Ensino Médio.

Gráfico 5 - Gênero

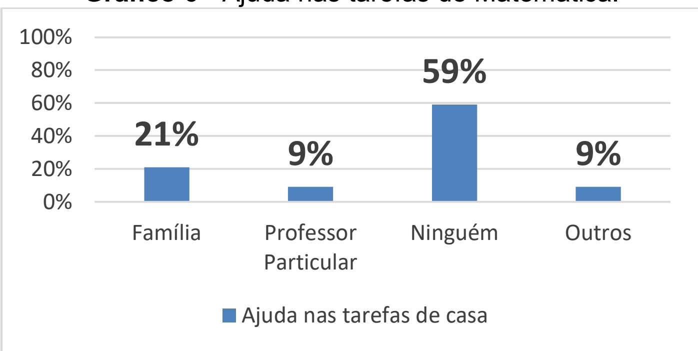


Fonte: Trabalho de Campo (2019).

Para o IBGE (2018), diversos indicadores confirmam uma tendência geral no aumento da escolaridade das mulheres em Educação em relação aos homens, apesar de a estrutura ocupacional de homens e mulheres permanecer bastante desigual.

O gráfico a seguir mostra os dados coletados com as respostas dos estudantes a respeito de quem ajuda nas tarefas de casa (questão 9).

Gráfico 6 - Ajuda nas tarefas de Matemática.



Fonte: Trabalho de Campo (2019).

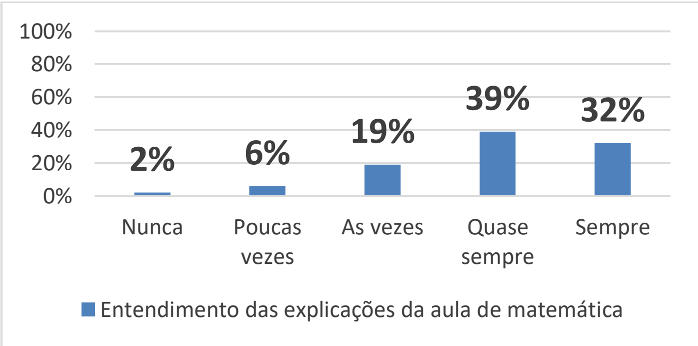
Certamente há inúmeros fatores que influenciam na ajuda, ou não, da família nas tarefas de matemática. Diante disso, é importante evidenciar, conforme a lei 8069/1990 do Estatuto da Criança e Adolescente (ECA), no art.22, onde “Aos pais incube o dever de sustento, guarda e educação dos filhos menores”. Logo, é preocupante que 20% dos estudantes consultados não tenham ninguém para ajudar nas tarefas de matemática.

3.6.2. Análise das questões de aspecto Metodológico

Essa subseção tratará da análise das questões de caráter metodológico, as quais, são as questões 11, 12, 13, 19, 20 e 21 do questionário, o qual está apresentado em anexo.

A questão 11 perguntava, aos alunos, se eles conseguem entender as explicações dadas nas aulas de matemática. Assim como o gráfico abaixo apresenta, houve um destaque maior à “quase sempre” e “sempre”, mostrando que o professor de matemática destes alunos, rege uma aula clara e compreensiva. Embora haja uma quantidade significante de indivíduos que tenha declarado que entende as explicações “às vezes”, “poucas vezes” ou “nunca”.

Gráfico 7 - Entende as explicações da aula de matemática (questão 11).



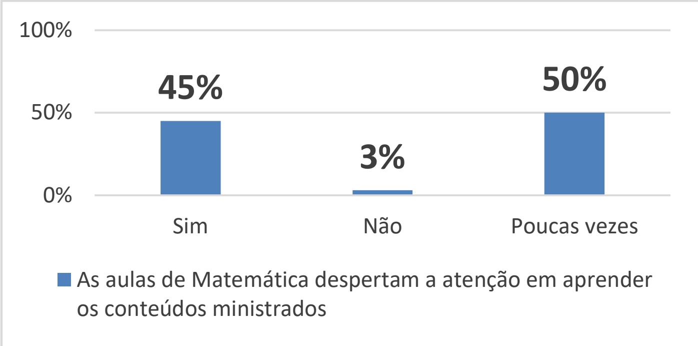
Fonte: Trabalho de Campo (2019).

De acordo com Fonseca (2008), ser professor hoje vai além de saber expor um conteúdo, ou até mesmo, passar exercícios e elaborar uma prova, significa ser um verdadeiro estrategista, no sentido de planejar, estudar, selecionar, organizar e propor os melhores meios que facilitem e conduzam os alunos à apropriação do conhecimento.

Desse modo, algumas vezes o ensino é restringido pela simples exposição do conteúdo, tornando o ensino pouco significativo para os alunos. Com base nessa percepção é comum encontrar resultados que foram evidenciados no gráfico anterior, onde 27% dos estudantes declararam que só entendiam as explicações do professor “às vezes”, “poucas vezes” ou “nunca”.

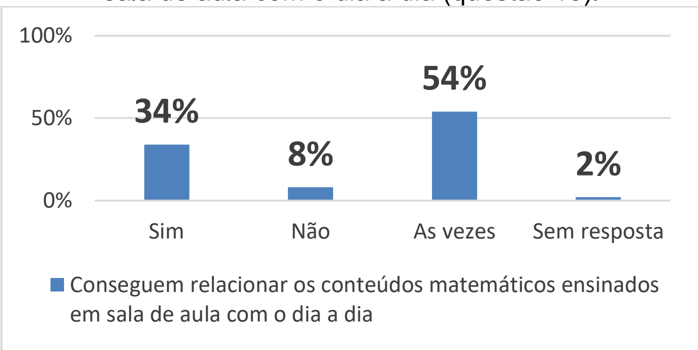
As questões 12 e 13, correspondentes a “As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?” e “Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia?”, cujos resultados estão apresentados nos gráficos 8 e 9.

Gráfico 8 - As aulas de Matemática despertam a atenção em aprender os conteúdos ministrados (questão 12)



Fonte: Trabalho de Campo (2019).

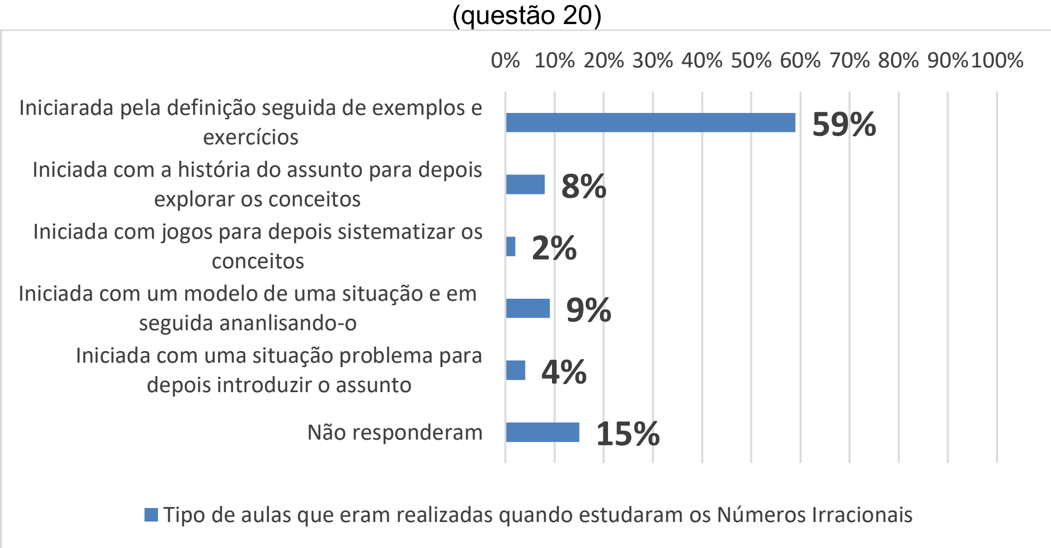
Gráfico 9 - Se os estudantes conseguem relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com o dia a dia (questão 13).



Fonte: Trabalho de Campo (2019).

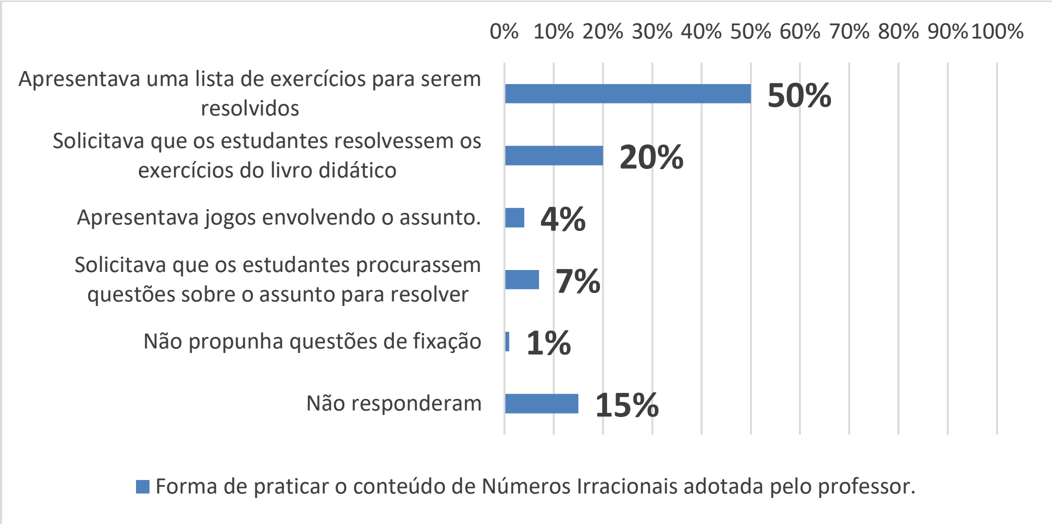
As questões 20 e 21 são: “Quando você estudou os Números Irracionais, a maioria das aulas eram:” e “Para praticar o conteúdo de Números Irracionais seu professor costumava:”. Os gráficos que mostram os dados obtidos são:

Gráfico 10 - Tipo de aulas eram realizadas quando estudaram os Números Irracionais (questão 20)



Fonte: Trabalho de Campo (2019).

Gráfico 11 - Forma de praticar o conteúdo de Números Irracionais adotada pelo professor. (questão 21)

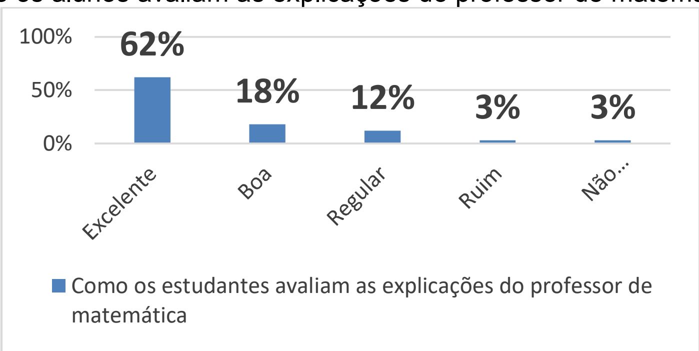


Fonte: Trabalho de Campo (2019).

A partir da leitura dos gráficos, pode-se compreender o estado do ensino aplicado a esses alunos, o qual segue o tipo tradicional de ensino, que trata de aulas que seguem a definição\exemplos\exercícios, (nessa ordem); predominância das listas de exercícios (repetição), pouca relação entre a matemática e o cotidiano dos alunos e o pouco estimulo despertado pela aula. Nesse sentido, conforme Fonseca (2008), cabe ao professor refletir o seu ato pedagógico, rever técnicas de ensino, sugerir metodologias e dinâmicas que possam auxiliar na tarefa docente. Desse modo, é necessário que o professor de matemática desses alunos venha rever a sua prática docente, buscando um melhoramento do ensino, para gerar um aprendizado mais significativo.

A questão 19 perguntava aos alunos sobre como eles avaliam as explicações do professor de matemática deles. As respostas possibilitaram a construção do seguinte gráfico:

Gráfico 12 - Como os alunos avaliam as explicações do professor de matemática (questão 19)



Fonte: Trabalho de Campo (2019).

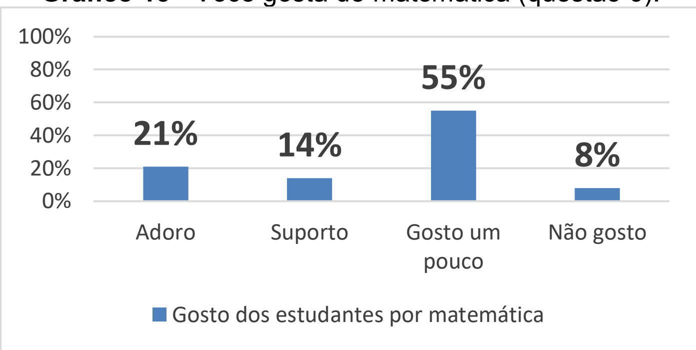
A análise dos gráficos gerados pelas respostas dos alunos, mostra que embora seja seguido, predominantemente, o método tradicional de ensino, nas aulas de matemática ministrada a esses alunos, a maioria deles caracterizou as explicações do professor de matemática como excelente, o que representa um fator positivo para o aprendizado.

3.6.3. Análise das questões de aspecto Curricular

Segundo Melo (2014), a ideia de currículo pode ser entendida como o que uma sociedade considera necessário para que os alunos aprendam em meio a sua escolaridade. Dessa forma, analisaremos as questões 6, 10, 16 e 17 que estavam no questionário, as quais têm objetivo de avaliar como se apresenta o currículo sobre o conhecimento matemático ensinado em sala de aula. A questão 22, embora seja de aspecto curricular, foi analisada na subseção posterior, pois os dados coletados dela possuem um forte vínculo com o teste, com o qual foi abordado também na próxima subseção.

Na questão 6 que perguntava "você gosta de matemática?" e aos dados obtidos, têm-se o gráfico abaixo.

Gráfico 13 - Você gosta de matemática (questão 6).

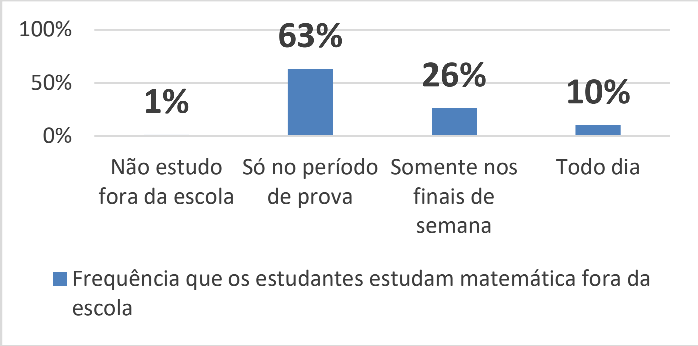


Fonte: Trabalho de Campo (2019).

A maioria dos alunos declarou que "gosta um pouco" de matemática. Essa situação pode estar relacionada a vários fatores conforme Miguel (2005), como formação deficitária do professor, condições inadequadas de trabalho (por exemplo, infraestrutura escolar), dificuldades dos alunos, currículos defasados, entre outros.

Na questão 10, foi proposto aos alunos que indicassem uma alternativa referente a frequência que eles estudam matemática fora da escola.

Gráfico 14 - Frequência que os estudantes estudam matemática fora da escola (questão 10).

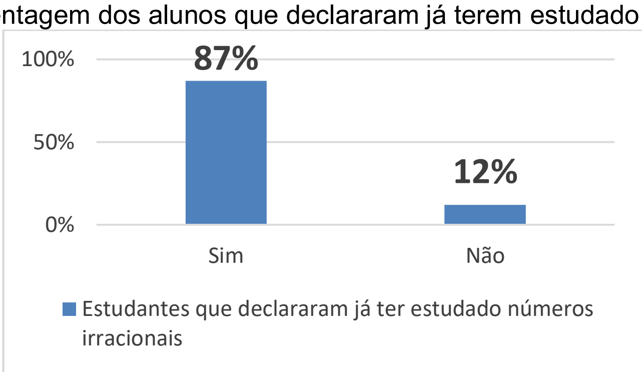


Fonte: Trabalho de Campo (2019).

Como pode-se ver no gráfico, cerca de 63% dos alunos declarou que estuda semente no período de prova. Esse dado somado aos alunos que não estudam fora da escola resulta em 64% dos estudantes. Isto mostra que a maioria dos alunos da amostra se sustentam nas informações ensinadas em sala, sem a devida repetição diária ou prática do conteúdo assimilado em sala. A prática diária ou semanal do conteúdo é algo importante, pois segundo o Portal Educação (2012) algumas das informações guardadas na memória de curto prazo, podem ser transferidas para a memória de longo prazo, normalmente por repetição ou prática.

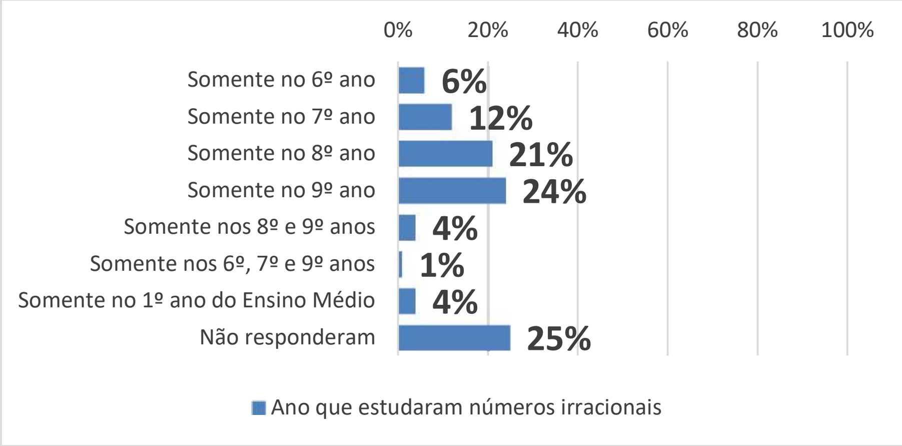
Nas questões 16 e 17, indicadas no questionário, respectivamente, como “Você já estudou números irracionais?” e “Se você na questão acima respondeu sim, diga em qual ano/ série?”. Diante disso, teve-se os dados apresentados nos gráficos 15 e 16, os quais foram apresentados a seguir.

Gráfico 15 – Porcentagem dos alunos que declararam já terem estudado números irracionais



Fonte: Trabalho de Campo (2019).

Gráfico 16 – Ano em que os alunos declararam terem estudado números irracionais



Fonte: Trabalho de Campo (2019).

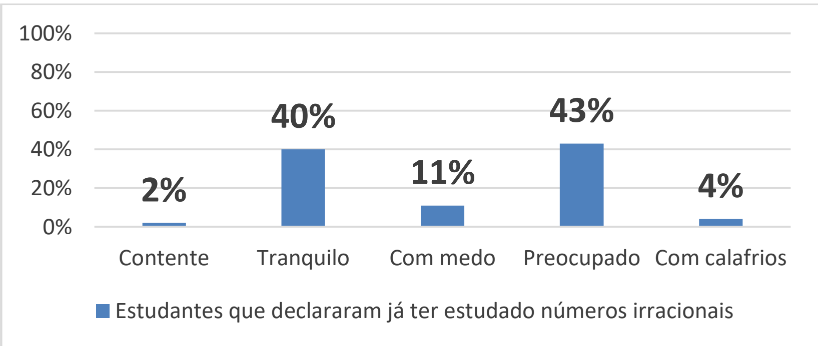
De acordo com os gráficos 15 e 16, percebe-se que a maioria dos discentes haviam estudado os números irracionais, sendo que, dentre os que responderam, a maioria estudou no 8º ou 9º anos do EF. Essa informação está de acordo com os PCN's, que cita os números irracionais como fazendo parte do quarto ciclo (8º e 9º anos), já na BNCC este assunto se encontra somente no 9º ano.

3.6.4. Análise das questões de aspecto Avaliativo

Essa subseção tratará da análise das questões de caráter avaliativo, as quais, são as questões 14 e 15 do formulário e as questões do teste, as quais estão apresentados no apêndice C.

Na questão 14 foi requisitado aos alunos a marcarem a alternativa que corresponde ao estado emocional quando estão diante de uma avaliação em matemática. A contagem das respostas para com cada alternativa esta estruturada no gráfico a seguir:

Gráfico 17 - Questão 14

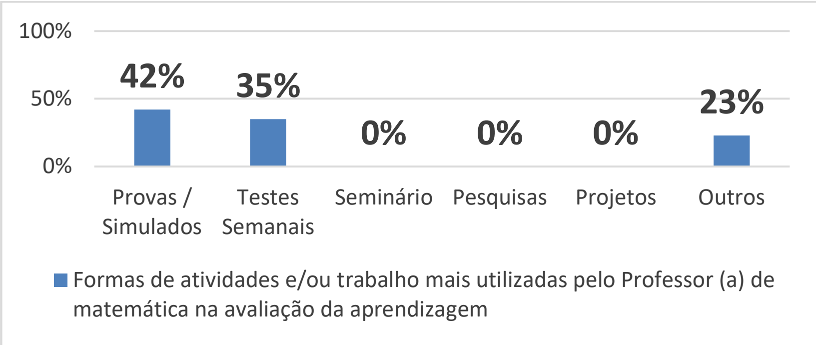


Fonte: Trabalho de Campo (2019).

Ao analisar o gráfico 17, percebe-se que a maior taxa de estudantes se sente “preocupado” quando estão diante de uma avaliação em matemática, algo que pode estar ligado ao fato da maioria de estudantes estudar somente no período de prova, ou na véspera.

Na questão 15, “Quais formas de atividades e/ou trabalho que seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?”, foi obtido os dados sintetizados no gráfico abaixo.

Gráfico 18 - Questão 15



Fonte: Trabalho de Campo (2019).

Quanto as formas de avaliar a aprendizagem, conforme os alunos responderam, pode-se perceber que as provas e simulados são as atividades avaliativas mais usadas. Em contrapartida, o uso de projetos, seminários e pesquisas aparentemente não ocorre.

Entende-se a prática avaliativa como algo além da simples atribuição de nota. Segundo Souza (2005) a principal função da avaliação é diagnosticar, de modo que, permite compreender o que contribui para o fracasso escolar, de modo que, possa ser utilizado pelo professor como referencial para as mudanças nas ações pedagógicas, objetivando um melhor desempenho do aluno.

Na questão 22 era requerido aos alunos que preenchessem um quadro que pedia informações sobre o aprendizado que os alunos tiveram sobre o conceito de número irracional. Com base nesse assunto, os alunos respondiam se haviam estudado, ou não, e, se houvessem estudado, qual o grau de dificuldade segundo eles. Segue o quadro abaixo com os dados coletados do preenchimento dos alunos.

Quadro 17 - Quadro de dificuldades.

Conteúdo	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?				
	Sim	**Não**	**MF**	**F**	**D**	**MD**	**NR**
Conceito de números Irracionais	54	29	0	24	23	5	0

MF: Muito Fácil; F: Fácil; D: Difícil; MD: Muito Difícil; NR: Não Responderam.

Fonte: Trabalho de Campo (2019).

Como pode ser visto no quadro, a maioria já havia estudado esse assunto, sendo essa conclusão de acordo com a conclusão obtida das informações do gráfico 15 a respeito dos alunos que já tinham estudado números irracionais, que indicou também que a maioria tinha estudado este assunto.

A constatação das informações fornecidas pelos alunos no quadro 17, da questão 22 descrita anteriormente, ocorreu por meio do teste de verificação, que foi comentado a seguir, cujas questões tinham a intenção de constatar se eles realmente conheciam, ou não, o conceito de número irracional e outros tópicos do assunto de números irracionais.

O teste de verificação, mencionado anteriormente, se encontra no apêndice C. Ele possui 7 questões, sendo algumas discursivas, de verdadeiro ou falso e outras de associação. A tabulação dos dados obtidos na aplicação do teste está apresentada no quadro abaixo:

Quadro 18 - Teste de Verificação

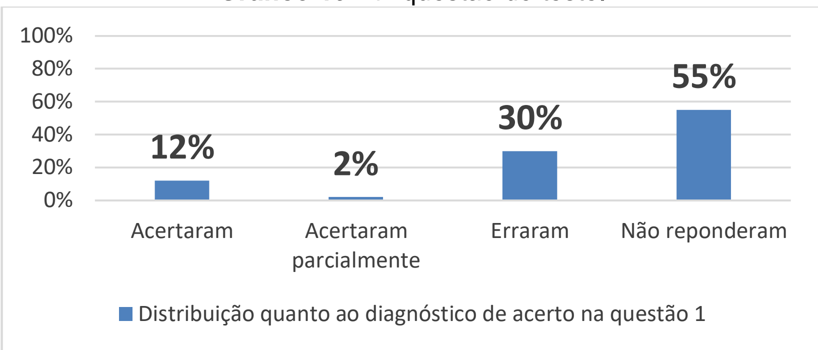
Questões	Acertaram	Acertaram parcialmente	Erraram	Não responderam
1ª Questão	10	2	25	46
2ª Questão	5	1	23	54
3ª Questão	4	0	11	68
4ª Questão	0	14	63	6
5ª Questão	32	0	16	35
6ª Questão	0	20	45	18
7ª Questão	0	9	18	56

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

O resultado do teste, como pode ser visto no quadro, não foi bom. A quantidade de acertos foi baixa, de modo que em nenhuma questão a contagem de acertos superou, pelo menos, metade da amostra. Fato esse, muito preocupante que evidencia um fato apresentado no PCN, onde apesar desse assunto ocupar um razoável espaço no currículo do quarto ciclo, o ensino de números irracionais tem contribuído pouco, para que os alunos desenvolvam seu conceito (BRASIL, 1998, p.106).

Ao comparar os resultados deste quadro com os resultados do quadro 17, onde a maioria dos alunos lembrava de já ter estudado o conceito de números irracionais, percebe-se que embora lembrarem de ter estudado este tópico, a maioria dos estudantes errou nas questões do teste de verificação, inclusive nas questões que focavam na habilidade de saber o que é número irracional, como por exemplo a 1ª questão. Na 1ª questão era esperado que eles respondessem o que é um número irracional. O gráfico 19 apresenta os resultados em porcentagem das respostas dos alunos nessa questão.

Gráfico 19 - 1ª questão do teste.



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Segundo o gráfico 19, apenas 12% dos alunos responderam corretamente, dentre os 83 alunos. A percepção deste dado é algo preocupante, pois trata de uma questão que requer o entendimento conceitual do assunto, que é saber o que são os números irracionais.

A aplicação desse teste foi uma parte muito importante do procedimento dessa pesquisa, pois possibilitou ter um diagnóstico sobre o a aprendizagem de números irracionais, além de validar possíveis concordância oi discordâncias com o quadro 17, referente à questão 22. Por exemplo, neste quadro apenas 54 alunos lembravam de ter estudado o conceito de números irracionais, o qual equivale aproximadamente a 65%, entretanto, conforme o quadro 18, apenas 10 estudantes (12%) acertaram a 1ª questão que requeria que os alunos conceituassem números irracionais.

Os dados coletados nesse teste podem representar um reflexo do estado que se encontra o ensino e aprendizagem de conhecimentos que os alunos do Ensino Médio trazem do Ensino Fundamental. Conforme o IDEB

(2005-2017) a nota dada para a educação no Pará nos anos finais do Ensino Fundamental em escolas da Rede Estadual é de 3,3 pontos, embora a meta fosse 4,6 pontos, no Ensino Médio a nota é 2,8, embora o esperado fosse 4,0 pontos. Ver figuras 33 e 34.

Figura 33 - IDEB dos anos finais do EF

Tabela 15. Ideb - anos finais do ensino fundamental - rede estadual

Unidade da Federação	Ideb - rede estadual									
	Ideb 2005	Ideb 2007	Ideb 2009	Ideb 2011	Ideb 2013	Ideb 2015	Indicador de Rendimento (P) 2017	Nota Média Padronizada (N) 2017	**Ideb 2017**	**Meta Ideb 2017**
Brasil	**3,3**	**3,6**	**3,8**	**3,9**	**4,0**	**4,2**	**0,87**	**5,13**	**4,5**	**4,8**
Norte	**3,1**	**3,3**	**3,5**	3,6	3,6	3,9	**0,86**	**4,85**	**4,2**	**4,6**
Rondônia	3,2	3,3	3,4	3,5	3,7	4,0	0,91	5,32	4,9	4,7
Acre	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,4	0,92	5,10	4,7	5,0
Amazonas	2,7	3,3	3,6	3,9	3,9	4,4	0,91	5,07	4,6	4,1
Roraima	3,2	3,5	3,7	3,6	3,5	3,7	0,86	4,60	4,0	4,7
Pará	3,1	2,9	3,1	3,1	3,0	3,2	0,77	4,29	**3,3**	**4,6**
Amapá	3,5	3,4	3,6	3,5	3,4	3,5	0,81	4,36	3,5	5,0
Tocantins	3,4	3,6	3,9	3,9	3,7	3,8	0,86	5,06	4,4	4,8

3,3 4,6

Fonte: IDEB (2005-2017).

Figura 34 - IDEB do EM

Tabela 21. Ideb - Ensino médio - rede estadual

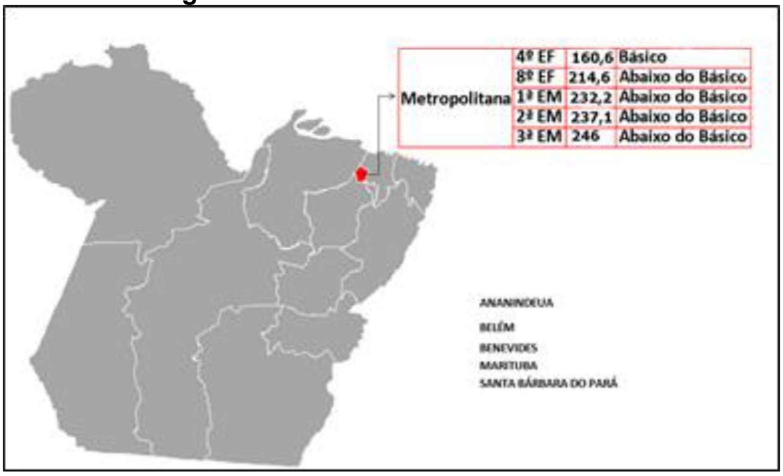
Unidade da Federação	Ideb - rede estadual									
	Ideb 2005	Ideb 2007	Ideb 2009	Ideb 2011	Ideb 2013	Ideb 2015	Indicador de Rendimento (P) 2017	Nota Média Padronizada (N) 2017	Ideb 2017	Meta Ideb 2017
Brasil	**3,0**	**3,2**	**3,4**	**3,4**	**3,4**	**3,5**	**0,82**	**4,23**	**3,5**	**4,4**
Norte	**2,7**	**2,7**	**3,1**	**3,1**	**2,9**	**3,2**	**0,82**	**3,82**	**3,2**	**4,0**
Rondônia	3,0	3,1	3,7	3,3	3,4	3,3	0,85	4,42	3,8	4,3
Acre	3,0	3,3	3,5	3,3	3,3	3,5	0,85	4,26	3,6	4,3
Amazonas	2,3	2,8	3,2	3,4	3,0	3,5	0,83	3,92	3,3	3,5
Roraima	3,2	3,1	3,5	3,5	3,2	3,4	0,84	3,92	3,3	4,6
Pará	2,6	2,3	3,0	2,8	2,7	3,0	0,79	3,58	2,8	4,0
Amapá	2,7	2,7	2,8	3,0	2,9	3,1	0,79	3,81	3,0	4,0
Tocantins	2,9	3,1	3,3	3,5	3,2	3,3	0,87	4,19	3,7	4,2

2,8 4,0

Fonte: IDEB (2005-2017).

Segundo o SISPAE (2018) a pontuação de proficiência em matemática da região metropolitana de Belém, referente ao Ensino Médio é considerada abaixo do básico (vide figura 35).

Figura 35 - Nota do SISPAE em Belém



Fonte: SISPAE (2018).

Um exemplo dessa atribuição de pontuação está na nota direcionada especificamente na escola pesquisada por essa pesquisa, que conforme este mesmo referencial, também se encontra com uma pontuação classificada como abaixo do básico (ver figura 36).

Figura 36 - Nota do SISPAE de 2018 na escola consultada

1ª Série		2ª Série		3ª Série	
Língua Portuguesa	Matemática	Língua Portuguesa	Matemática	Língua Portuguesa	Matemática
234,3	234,1	240,9	240,6	258,6	253,7

Fonte: SISPAE (2018).

Com base nos baixos resultados do IDEB de 2017 e SISPAE de 2018 sobre a aprendizagem em matemática dos alunos do Ensino Médio de escolas públicas estaduais paraenses, percebe-se que a aprendizagem de matemática não se encontra satisfatória, a qual se motiva por inúmeros fatores, as quais foram apresentados nesta subseção.

3.6.5. Síntese dos dados

O foco do texto da pesquisa apresentada nessa subseção foi realizar um diagnóstico do processo de ensino-aprendizagem de números irracionais em discentes do 1º ano do Ensino Médio, para que pudesse compreender como se caracteriza o ensino e aprendizagem de números irracionais no ensino básico.

Diante dos resultados obtidos pela coleta de dados do questionário e do teste, tem-se no quadro 19 uma síntese dos principais resultados obtidos em cada aspecto analisado por meio dos dados obtidos.

Quadro 19 - Síntese dos resultados

Aspecto	Resultados
Socioeconômicos (Questões 1, 2, 3, 4, 7, 8 e 9)	• As idades dos estudantes captada pela pesquisa eram de 14, 15 ou 16, sendo 15 anos a idade predominante. Estas idades não ultrapassaram a faixa etária adequada de alunos do EM, conforme o IBGE (2016-2017), ou seja, 15 a 17. • A maioria dos alunos declarou que tinham responsáveis com nível de escolaridade de Ensino Médio. • 59% dos estudantes consultados não tinham ninguém para ajudar nas tarefas de matemática. • A maioria dos estudantes com responsáveis com nível de escolaridade do EM não recebem ajuda de ninguém, quanto as tarefas de matemática.

Metodológicos (Questões 11, 12, 13, 18, 19, 20, 21)	• A maioria dos estudantes declarou que só entendiam as explicações, nas aulas de matemática, quase sempre ou sempre, mostrando que o professor de matemática destes alunos, rege uma aula clara e compreensiva. • O ensino aplicado a esses alunos, segue para a maioria dos estudantes, o tipo tradicional de ensino, que trata de aulas que seguem a ordem definição\exemplos\exercícios (nessa ordem); • predominância das listas de exercícios (repetição); • Uma razoável relação entre a matemática e o cotidiano dos alunos; • Razoável estimulo despertado pela aula. • A maioria deles caracterizou as explicações do professor de matemática como excelente.
Curriculares (Questões 6, 10, 16, 17 e 22)	• A maioria dos alunos declarou como gosta um pouco de matemática. • Cerca de 62% declarou que, ou estuda no período de prova, ou só na véspera de prova ou não estuda fora da escola. • A maioria (87%) dos alunos declarou que já havia estudado Números Irracionais.
Avaliativo (Questões 5, 14, 15, teste)	• 27,71% dos estudantes já tinham ficado em dependência, dentre os quais, 47,83% já ficaram em matemática. • a maior taxa (43%) dos estudantes se declarou “preocupado” quando estão diante de uma avaliação de matemática. • as provas e simulados são as atividades avaliativas mais usadas.

Fonte: Pesquisa de Campo (2019).

Ao analisar os resultados, foi possível formular um diagnóstico que ajudou a compreender vários detalhes sobre os indivíduos da amostra. Um desses detalhes que chama a atenção é que a maioria dos estudantes possui pouco conhecimento sobre o assunto de números irracionais, embora muitos já tenham o estudado. Também foi possível conhecer fatores que podem influenciar no pouco aprendizado ou a não fixação deste conteúdo como aulas que seguem o modelo tradicional, avaliações que utilizam mais provas e simulados que outrora despertam preocupação em muitos estudantes, a situação de muitos estudantes não terem ajuda dos responsáveis em casa para estudar matemática, dentre outros.

Com base nas dificuldades apresentadas pelos estudantes pesquisados, foi possível compreender que ao elaborar uma proposta de Sequência Didática sobre números irracionais, deve-se levar em conta os resultados levantados nessa pesquisa que podem interferir na aprendizagem dos estudantes na fase de experimentação. Diante dessa motivação, percebeu-se que ao elaborar uma atividade de ensino deste assunto deve-se utilizar diferentes recursos e metodologias de ensino que diferenciem do ensino tradicional, com o qual foi aplicado com os estudantes que esta pesquisa diagnosticou. Dentre os recursos e metodologias de ensino, têm-se as Tendências da Educação Matemática, as quais foram apresentadas na subseção a seguir.

3.7. Tendências e Recursos da Educação Matemática

Em meio ao contexto escolar, o ensino da Matemática necessita de uma variedade de recursos que auxiliem a prática do ensino desenvolvido pelos professores para que ocorra o aprendizado dos conteúdos matemáticos pelos estudantes. Para cada assunto ensinado, geralmente, tem-se um, ou mais, metodologias e/ou auxiliadores metodológicos que são mais adequados tornando assim as aulas mais dinâmicas e atrativas.

Conforme Silva (2008), a História da Matemática, a Resolução de Problemas, o uso de Jogos Pedagógicos, Tecnologias da Comunicação e Informação, Modelagem, Etnomatemática e Atividades de Redescoberta, são alguns exemplos de Tendências da Educação Matemática, as quais são utilizadas pelos professores no ensino da Matemática, como ferramentas úteis no aprendizado dessa disciplina. As inúmeras pesquisas na área de Educação Matemática comprovam este fato.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que apresenta um conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica (BRASIL, 2017, p.6).

Para a BNCC, algumas tendências citadas como Resolução de Problemas, a Investigação, a Modelagem, e outras, podem são formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem no Ensino Fundamental. Conforme esse mesmo documento, esses processos de aprendizagem são muito ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2017, p.266).

Tem-se nos tópicos que compõem esta subseção, algumas tendências que podem atuar como metodologia de ensino e/ou recurso metodológico no ensino de matemática, bem como no ensino de números irracionais.

3.7.1. História da Matemática

Algumas vezes os assuntos ensinados em sala pela simples exposição do conteúdo no quadro, podem ser desprovidos de significado ou importância para o estudante. Nesse sentido, uma alternativa viável que auxilie o aprendizado do aluno é o uso da História da Matemática como recurso metodológico pelo professor durante a aula. Este recurso é uma tendência da educação matemática que vem sendo bastante discutida nos últimos anos no campo da Educação Matemática.

Conforme Mazur (2012), ensinar matemática com utilização de um contexto histórico é fundamental para a valorização da essência desse conhecimento. Pois, com a história, é possível compreender a necessidade social que motivou muitos teóricos ou civilizações a encontrar, por exemplo, formas de fazer contagens, registrar quantidades e expressar suas ideias matemáticas.

Pergunta-se, por exemplo, o porquê de se racionalizar. O aprendizado desse método, ao ser ensinado aos estudantes, pode ser muito mais interessante se for dito a eles que, o mesmo, é utilizado devido há muito tempo atrás em uma época que não havia calculadora a divisão de um valor a, por um outro valor b que fosse decimal, era muito trabalhoso e, mais ainda quando este divisor (b) fosse irracional, portanto ouve a necessidade de tornar a representação fracionaria $\frac{a}{b}$ dessa divisão em uma fração equivalente com denominador inteiro, para facilitar os cálculos (LIMA; WAGNER, 2010). Essa apresentação histórica, certamente, motiva inicialmente a aprendizagem dos métodos de racionalização ensinados no ensino fundamental.

3.7.2. Ensino por Atividade

De acordo Silva (2018) o ‘Ensino por Atividade’ é uma tendência da educação matemática, que é caracterizada como uma metodologia de ensino de conteúdos matemáticos mediados por atividades de descoberta que possibilitam, ao aluno, desenvolver habilidades de cunho prático, pois, ela está ligada no construtivismo, propiciando, com isso, ao aprendiz participar de forma ativa, através das orientações do professor, na construção do seu conhecimento, ao invés de recebê-lo passivamente, isto é, por meio da aula expositiva, como geralmente acontece nos moldes tradicionais de ensino.

Conforme Sá (2019), o ensino por atividades tem as seguintes características:

1) É diretivo;

2) Tem compromisso com o conteúdo;

3) Tem compromisso com o desenvolvimento de habilidades para além do conteúdo;

4) É estruturado;

5) É sequencial;

6) Não está necessariamente associado à resolução de problemas;

7) Leva em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes;

8) Os resultados são institucionalizados ao final da atividade;

9) Não dispensa a participação do professor;

10) É adequado para formação de conceitos e acesso a resultados operacionais ou algorítmicos;

11) É iterativo entre estudantes e professor;

Essas características distinguem o ensino de matemática por atividades como uma metodologia diferenciada do ensino de matemática. Mas, além disso, esta metodologia pode ser classificada como uma tendência em Educação Matemática.

O 'Ensino por Atividades' pode ser realizado por dois tipos básicos de atividade de: conceituação ou redescoberta.

Para Sá (2019), uma atividade de conceituação busca direcionar o estudante a perceber a ocorrência de determinado tipo de situação/tipo de objeto matemático. Conforme este mesmo autor, uma atividade de redescoberta tem como objetivo levar o estudante a descobrir uma relação ou propriedade relativa a um dado objeto ou operação matemática. Sendo este momento o de exploração do objeto, o qual antecede a demonstração do resultado.

Para Santos (2017), o professor de matemática que adota o Ensino por Atividade, como metodologia de ensino, deve compreender que na construção de suas atividades alguns requisitos são essenciais como, por exemplo: As atividades devem ocorrer de maneira auto-orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem; as atividades devem prever um momento de socialização das informações entre os alunos; dentre outros.

Para o sucesso de uma aula que utiliza o Ensino por Atividade, do tipo conceituação, conforme Sá (2019), é necessário planejamento, o qual geralmente ocorre a partir de 10 etapas, sendo as seguintes: determinação, construção do objetivo, elaboração do procedimento, seleção do material, elaboração do espaço de registro, previsão de observações, previsão de institucionalização, elaboração do roteiro e verificação.

1ª etapa (determinação): momento em que o professor seleciona a definição ou conceito que ele pretende ensinar aos estudantes por meio da atividade a ser elaborada. Neste momento é importante que o professor registre por escrito a definição ou conceito para evitar alterações no momento da apresentação a turma.

2ª etapa (construção do objetivo): momento em que o professor elabora o objetivo da atividade que será apresentada aos estudantes. Os objetivos estabelecidos não devem deixar explicitar o conceito a ser apresentado com a atividade. Os objetivos devem ser diferenciados e construídos de modo que não permita o estudante vislumbrar o resultado antes da conclusão da atividade. Por exemplo: Conceituar números irracionais.

3ª etapa (elaboração do procedimento): ocorre a elaboração do procedimento da atividade, onde o professor deve encontrar um caminho ativo que permita os participantes da atividade, após observação, que identifiquem as características do objeto que se pretende apresentar a definição ou conceito.

4ª etapa (seleção do material): etapa de seleção dos materiais em que o professor os listaram para que ocorra a distribuição igualitária para cada equipe durante a realização da atividade.

5ª etapa (elaboração do espaço de registro): momento de elaboração do espaço de registro, sendo muito importante a organização de um espaço em papel que permita registros de aspectos que se deseja levar em consideração. Assim como também de elementos que não pertencem ao objeto em questão.

6ª etapa (previsão das observações): etapa em que o docente faz previsão de possíveis observações que podem surgir da análise do espaço de registro da atividade. Esta ação pode conter observações válidas e inválidas. Nas observações válidas deve estar a observação que o docente deseja que seja realizada pelos estudantes. Mesmo com a previsão de observações válidas e inválidas é possível que no momento da realização da atividade ainda surja uma observação válida que não seja a desejada ou mesmo observação inválida não prevista.

7ª etapa (previsão da institucionalização): momento em que o professor deve prever como vai utilizar as observações realizadas pelas equipes e como vai direcionar o trabalho diante das observações válidas e não desejadas, inválidas e válidas desejadas.

8ª etapa (elaboração do roteiro): etapa onde o professor constrói um roteiro para a atividade que contenha os seguintes elementos: Título, Objetivo, Material, Procedimento, espaço de registro, espaço de observação e espaço de conclusão.

9ª etapa (verificação): nesta fase o professor realiza toda a atividade a partir do roteiro elaborado para verificar se é possível chegar à observação das características desejadas do objeto matemático a ser aprendido pelos estudantes. Caso perceba que algum procedimento está inadequado deve reformular o mesmo, assim como para os materiais previstos para atividade, após a verificação pode ser percebida a necessidade de algum material não listado.

10ª etapa (Finalização do roteiro): momento de finalização da atividade, onde o docente faz um levantamento de todas as informações produzidas e finaliza.

Assim, percebe-se a existência de toda uma organização bem planejada objetivando conduzir o estudante à descoberta do assunto que o professor queira ensinar. Com esse desenvolvimento, uma aula que adota o Ensino por Atividade, do tipo conceituação, com uma sequência de atividades bem planejadas, pode possibilitar aos estudantes o desenvolvimento de habilidades como a de observação, a de levantamento de dados, de análise, de conclusão, etc.

Vale ressaltar que as atividades devem ser constituídas de maneira que o professor realize poucas intervenções no desenrolar do processo de construção do conhecimento pelo aluno. Pois, como já foi dito anteriormente essa metodologia de ensino deve propiciar ao aluno um aprendizado autônomo dos conteúdos da disciplina para que se conduzam durante a construção de sua aprendizagem.

Quanto ao ensino por atividade do tipo ‘por redescoberta’, para Sá (2019), uma aula por meio de atividade de redescoberta tem as seguintes etapas: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização.

Na etapa de organização a turma deve ser, preferencialmente, organizada em equipes com no máximo 4 alunos e no mínimo 2. Mas pode também ocorrer de forma individual o que não é recomendável por não estimular a troca de ideias que é fundamental para o processo de aprendizagem. Neste momento, o professor deve guiar as ações, orientar a formação das equipes sem imposições, estar seguro sobre seu planejamento da atividade e evitar que os estudantes desperdicem tempo com ações alheias à organização da turma.

Na etapa de apresentação da atividade, o professor deve distribuir o material necessário para a realização da atividade incluindo o roteiro da mesma. O material deve estar organizado em kits, facilitando, desse modo, a distribuição do material. Este cuidado evita o desperdício de tempo. O roteiro pode ser impresso ou disponibilizado no quadro.

O momento da execução refere-se à etapa da experimentação quando o pesquisador manipula os materiais, realiza medidas e/ou cálculo, compara e/ou observa. É neste momento que em uma aula por atividade experimental, cada equipe realiza os procedimentos estabelecidos para a atividade. Enquanto as equipes trabalham livremente, o professor supervisiona o desenvolvimento das ações e auxilia nas dúvidas.

No momento do registro há a sistematização das informações das equipes. Neste momento espera-se que cada equipe registre as informações obtidas durante a execução dos procedimentos no respectivo espaço destinado no roteiro.

Na etapa de análise cada equipe deve analisar as informações que foram registradas e devem descobrir uma relação válida entre as informações registradas. Sendo esta fase crucial para o desempenho da atividade onde os alunos deverão ter o primeiro acesso a informação desejada pelo professor.

A institucionalização corresponde à etapa onde é produzida a conclusão oficial da turma a partir das conclusões que cada equipe elaborou no momento da análise. Este momento ocorre a formalização do assunto pelo qual originou o desenvolvimento da atividade.

Assim se tem as atividades por conceituação e as atividades por redescoberta e ambas devem ser muito bem planejadas e organizadas para se obter êxito na aprendizagem de um assunto que se queira utilizar como metodologia de ensino o ensino por atividade.

De acordo com (Sá, 2019), o ensino de matemática por atividades possui duas formas de se desenvolver. Como atividade de demonstração ou atividade experimental. A atividade de demonstração ocorre quando o educador aplica a atividade em sala, de modo que os alunos somente observam, conjecturam, fazem registros, discutem os resultados e constroem uma conclusão. Dessa forma, os alunos descobrem o conhecimento matemático que é apresentado na atividade.

A atividade experimental pode ser realizada individualmente ou em grupo, de modo que, o professor adota a função de orientador e desenvolve as devidas orientações para que os alunos realizem a atividade. A partir desse direcionamento, eles observam, constroem hipóteses e fazem os seus registros, até chegar o momento final, onde o professor abre para a discussão dos resultados encontrados, a fim de instituir o conhecimento matemático oriundo da atividade (SÁ, 2019).

Uma outra característica do 'Ensino por Atividade' é que devido a mesmo tornar o estudante um agente ativo no processo de ensino e aprendizagem, percebe-se que a eficácia dessa metodologia vai depender dos conhecimentos prévios do aluno, suas manifestações e representações simbólicas, aliados a um ambiente de experimentação adequado.

3.7.3. Mídias Tecnológicas

A tecnologia é um recurso muito útil quando se quer ensinar um conteúdo matemático. Pois, o ambiente virtual possui capacidade quase ilimitada de criação de ambientes e situações virtuais que favorecem o aprendizado.

As Mídias Tecnológicas são um tipo de Tendência da Educação Matemática que tem ganhado bastante notoriedade nos últimos tempos. Ela permite potencializar formas de resolução de problemas por meio de recursos tecnológicos como calculadora, aplicativos da internet, softwares e outros, até mesmo, caso se queira tratar desses problemas utilizando outras tendências como história da matemática, modelagem ou etnomatemática (MAZUR, 2012).

As mídias digitais são referidas na BNCC. Conforme este documento, uma das habilidades específicas para o Ensino Fundamental é “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2017, p. 267). Dessa forma, é possível promover a aprendizagem de conteúdos de matemática de forma eficiente.

De acordo com Gravina (2012), a tecnologia digital apresenta à nossa disposição varias ferramentas interativas que se exibem na tela do computador, ou celular, objetos dinâmicos e manipuláveis. Dessa forma, provoca interessantes reflexos nas pesquisas em Educação Matemática, especialmente naquelas que têm foco nos desafiantes processos de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo, onde os aspectos individuais e sociais se fazem presentes.

Para Mazur (2012), em meio à atualidade, a qual está bastante avançada tecnologicamente, não tem sentido não se apropriar desse recurso para auxiliar a aprendizagem. Entretanto a escola caminha a passos lentos no desenvolvimento da aprendizagem.

3.7.4. Histórias em Quadrinhos

O hábito de contar histórias é uma característica que se apresenta desde muito tempo na cultura humana. A partir do momento em que o ser humano tomou consciência desta habilidade, ele usou a linguagem oral, desenhos em cavernas, a escrita e inúmeras formas de comunicação para dar sentido a experiências, relatos, legados e muitas outras situações construtivas em uma narrativa.

Conforme Mainardes (2007) contar histórias é a mais antiga das artes, sendo que o hábito de ouvi-las e de contá-las tem inúmeros significados, está interligado ao desenvolvimento da imaginação, à capacidade de ouvir o outro e de se expressar, à construção de identidade e aos cuidados afetivos. Por isso costuma-se ler narrativas, mesmo quando são fictícias, para conseguir acessar outras situações, com personagens, com um cenário, com conflitos, com sentimentos, com uma moral e tantos outros elementos que proporcionam que o leitor se conecte com uma realidade diferente da sua.

São inúmeras as aplicações do hábito de contar histórias, vai desde a mobilização social, até ao desenvolvimento aprendizagem.

Sobre os benefícios pedagógicos das histórias, Souza e Bernardinho (2011) afirmam que as histórias apresentam mecanismos para enfrentar os problemas de uma maneira saudável e criativa, levando a criança a um mundo de opções e possibilidades, opções sobre o que fazer diante de um obstáculo e possibilidades de soluções criativas para a superação dos problemas. A partir daí, a história grava-se na mente do indivíduo por meio de ensinamentos que passam ao patrimônio moral de vida, e quando o mesmo se depara com situações idênticas, é levado a agir de acordo com a experiência que, conscientemente viveu na história. Diante disso, acredita-se que as histórias são uma poderosa ferramenta didática que capaz de proporcionar aprendizagem.

Atualmente são várias as formas com que as histórias podem ser contadas, por meio de texto, de imagens, de músicas, de vídeos, e muitas outras. Outra forma muito interessante é por meio de Histórias em Quadrinhos.

Segundo Machado (2015) as Histórias em Quadrinhos (HQ) foram consolidadas como linguagem desde o início do século XX, elas ganharam grande aceitação como um tipo de mídia que funcionava como veículo de massa, desenvolvendo uma linguagem peculiar e elementos que tinham relação com o Cinema, a TV e as propagandas. As HQs utilizavam uma linguagem popular, formas e cores vibrantes e de narrativas humorísticas, e se caracterizaram bastante sob o estigma de ser direcionado ao público infantil. Mas um tempo depois ganhou conotações que as caracterizaram como mídia voltada para outros tipos de públicos.

Hoje as HQ’s apresentam várias temáticas, conteúdos e fins, voltados ao ato de contar história. Uma das finalidades das HQ’s é o ensino de conteúdos.

Conforme Silva (2010, apud Miranda, 2019) a utilização de quadrinhos no meio escolar é algo justificado pela característica de permitir desenvolver discussões com certo rigor científico a partir de elementos da vida diária, principalmente quando se trata de uma leitura interessante, envolvente e questionadora. Por esse motivo, conforme Maia, Tavares e Costa (2014), as HQ’s são uma excelente ferramenta para utilização de professores em geral.

De acordo com Miranda (2019), os alunos já gostam de ler HQs, assim as possibilidades deles aprenderem algum assunto são ampliadas por meio da familiaridade deles com esse tipo de leitura. Com o uso desse tipo de leitura no ensino, muitos benefícios podem ser alcançados como:

Auxilio no desenvolvimento da leitura.

Enriquecimento do vocabulário dos estudantes.

O caráter elíptico da linguagem quadrinhistica obriga o leitor a pensar e imaginar.

Podem ser utilizadas em qualquer nível escolar e com qualquer temática.

Podem democratizar o acesso a conteúdo midiático que, por meios comuns, não seriam adequados.

Quanto ao ensino de matemática, por exemplo, é possível utiliza-las para situar o leitor em um contexto, com personagens, espaço e conflitos que ajudam o leitor a enxergar concepções matemáticas.

Pode-se perceber o grande potencial dos quadrinhos para educar, podendo estimular a leitura ou mesmo facilitar a compreensão de um conteúdo matemático de forma humorada. Nesse sentido, a utilização das HQ’s em aulas de matemática, bem como em outras disciplinas, podem ser entendida como metodologia de ensino, que no caso da matemática, envolve entes matemáticos, levando em conta o poder e a atratividade dos quadrinhos entre crianças e adolescentes e o potencial de ferramenta educativa que eles possuem (MAIA; TAVARES; COSTA, 2014).

Maia, Tavares e costa (2014) argumentam sobre a tese de que as HQ’s podem ser utilizadas como metodologia de ensino quando se ministra aulas de matemática. Ferreira e Oliveira (2020) propõem algo semelhante, porém as

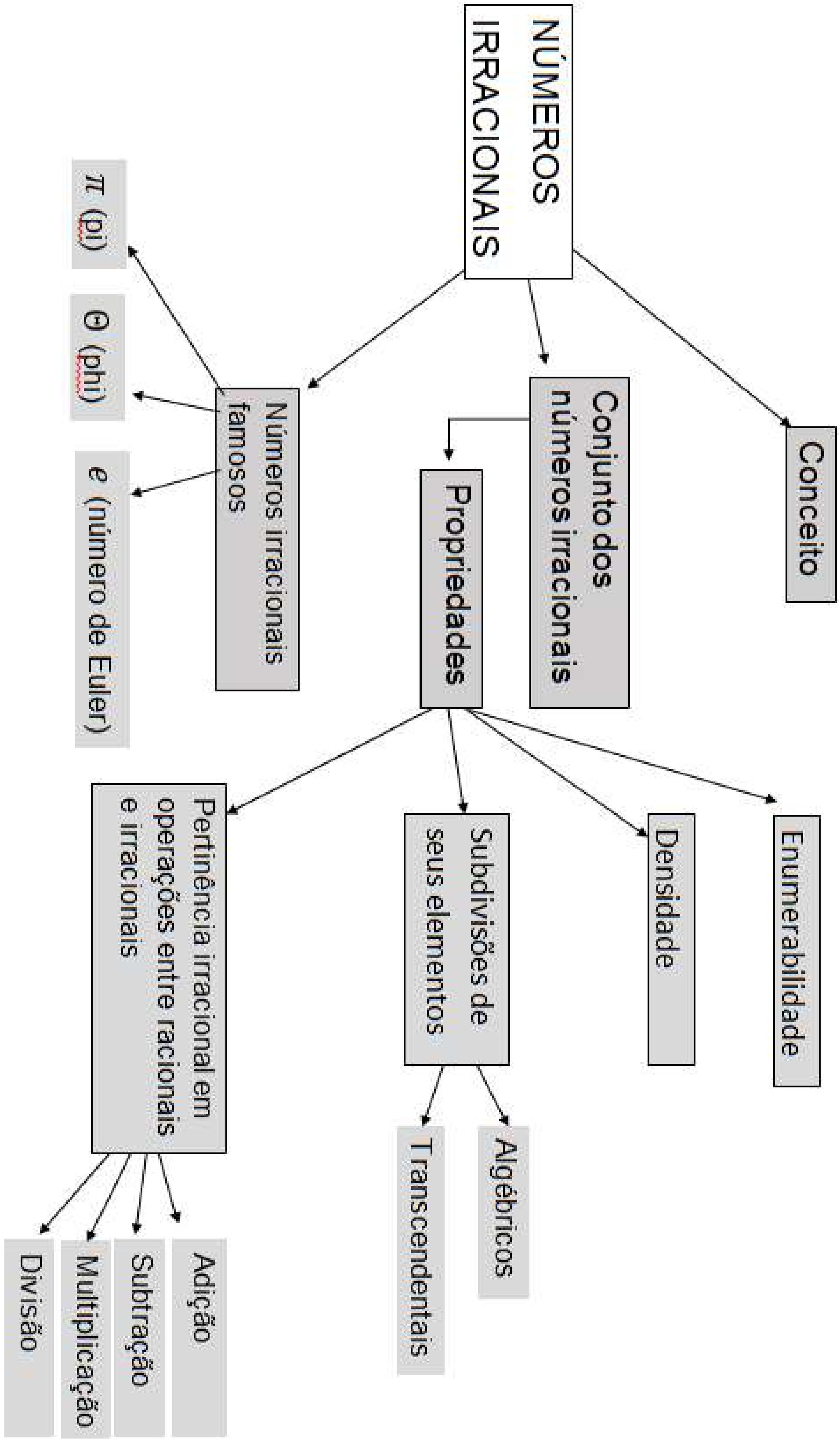
HQ’s seriam um recurso metodológico de aulas pautadas na história da matemática como metodologia de ensino.

Utilizar história da matemática e HQ’s durante a aula de matemática é algo bastante inovador e que pode ter bastante eficiência no ensino. Para Santos (2014), é uma proposta que possui possibilidade de entender muitos conhecimentos matemáticos como uma criação humana, sendo com isso dotada de motivações para seu desenvolvimento, para assim buscar responder aos alunos questionamentos como “pra que isso serve?”.

Utilizar as Histórias em Quadrinhos como metodologia ensino ou como recurso metodológico para o ensino de Matemática, bem como de outras formas, requer bastante planejamento. Maia, Tavares e costa (2014) enfatizam alguns desafios quando se utiliza as HQ’s no ensino como a necessidade de se compreender melhor essa linguagem por professores. Além desse desafio, tem-se também a dificuldade por professores em saber construir HQ’s, bem como saber como emprega-las, saber organizar os quadrinhos mais relevantes para serem trabalhados em sala de aula, dentre outros desafios.

3.8. Mapa Conceitual

Nesta subseção é apresentado o mapa conceitual que estrutura o assunto de números irracionais. Este recurso foi construído para fornecer uma base para entender como se organiza a estrutura do assunto em questão com alguns tópicos que ele compõe, os quais auxiliaram para a construção da Sequência Didática que foi proposto neste trabalho. Desse modo tem-se na próxima página o mapa conceitual do assunto de números irracionais.


NÚMEROS IRRACIONAIS
Conceito
Conjunto dos números irracionais
Propriedades
Enumerabilidade
Densidade
Subdivisões de seus elementos
Algébricos
Transcendentais
Pertinência irracional em operações entre racionais e irracionais
Adição
Subtração
Multiplicação
Divisão
Números irracionais famosos
π (pi)
Θ (phi)
e (número de Euler)

4. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Nesta seção foi apresentada uma proposta de Sequência Didática como metodologia de ensino para o ensino de números irracionais. Também foi tratado sobre o método de constatação da eficácia da aplicação da Sequência Didática proposta, que ocorreu por meio de testes (pré-teste e pós-teste) que avaliaram o desempenho dos alunos, antes e depois da aplicação da Sequência Didática.

4.1. Pré-teste e pós-teste

Neste momento apresentamos o pré-teste e o pós-teste que ajudaram na constatação da eficácia do aprendizado construído com a experimentação que foi realizada com alunos do Ensino Médio por meio da Sequência Didática apresentada na subseção 4.2, sobre números irracionais.

Antes da experimentação, inicialmente foi aplicado o pré-teste, de modo que nesse momento os estudantes ainda não tinham nenhuma informação do pesquisador sobre números irracionais. Após a experimentação ocorreu o pós-teste o qual continha as mesmas questões do pré-teste. Nele, os estudantes responderam as questões, dispondo de um conhecimento construído no experimento.

Os dados coletados no pré-teste e no pós-teste foram analisados para verificar se a experimentação teve um efeito no aprendizado dos participantes acerca do assunto tratado. Para a construção e aplicação do mesmo, buscou-se coletar o máximo de dados quantitativos para julgar a eficiência ou não dessa proposta de Sequência Didática para o ensino de números irracionais.

O pré-teste e o pós-teste possuem as mesmas questões, sendo elas, um total de 9 questões que se encontram exibidas a seguir.

Questões do Pré-teste e Pós-teste

Nome:______________________________ Data: ____/____/______

1-Diga na sua opinião, o que são números irracionais?

Possíveis respostas esperadas: números que não podem ser escritos na forma de fração; Números que representam distâncias que não podem ser medidas com números racionais; Uma dizima que não é periódica; Números cuja totalidade não pode ser contada.

2-Indique os números do quadro a seguir que são números racionais e os que são números irracionais.

0,5	243	$\sqrt{4}$	0,000001	-1,25	$\sqrt{2}$	0,111...
$-\frac{1}{4}$	0,333...	1200,00	$\sqrt{6}$	100,1	$5\sqrt{2}$	
0,123333....	1+$\sqrt{2}$	10000	$3\sqrt{2}$	- 0,345		
$\sqrt{12}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{5}-2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$			

Respostas esperadas:

Racionais: 0,5; 243; $\sqrt{4}$; 0,000001; -1,25; 0,111...; $-\frac{1}{4}$; 0,333...; 1200,00; 100,1; 0,123333...; 10000; - 0,345.

Irracionais: $\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$; $5\sqrt{2}$; 1+$\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{5}-2$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3-Apresente exemplos de números irracionais diferentes do quadro anterior.

Respostas esperadas: espera-se que escrevam raízes não exatas ou dizimas não periódicas ou números irracionais famosos

4-Qual a característica decimal de um número irracional?

a) Possui dígitos se repetindo periodicamente e possui casas decimais infinitas.

b) Não possui dígitos se repetindo periodicamente e possui casas decimais infinitas.

c) Não possui casas decimais infinitas

d) Não é decimal.

Resposta esperada: b

5-Leia as alternativas a seguir e escreva V, para verdadeiro, e F, para falso nos parênteses, a respeito de suas afirmações. Justifique o porquê de sua resposta em cada parêntese.

a)( ) A adição entre dois números irracionais sempre resulta em um número **irracional**.
Justifique:____
____

b)( ) A multiplicação entre dois números irracionais sempre resulta em um número **irracional**.
Justifique:____
____

c)( ) A divisão entre dois números irracionais sempre resulta em um número **irracional**.
Justifique:____
____

d)( ) A adição (+) entre um número **racional** e um número **irracional** sempre resulta em um número **irracional**.
Justifique:____
____

e)( ) A adição (+) entre um número **racional** e um número **irracional** sempre resulta em um número **racional**.
Justifique:____
____

f)( ) A multiplicação (x) entre um número **racional** e um número **irracional** sempre resulta em um número **irracional**.
Justifique:____
____

g)( ) A multiplicação (x) entre um número **racional** e um número **irracional** sempre resulta em um número **racional**.
Justifique:____
____

h)( ) A divisão (÷) de um número **racional** por um número **irracional** sempre resulta em um número **racional**.
Justifique:____
____

i)(   ) A divisão (÷) de um número **racional** por um número **irracional** sempre resulta em um número **irracional**.
Justifique:____

Respostas esperadas: FFFVFVFFV

6-O que é π e qual o seu significado?

Respostas esperadas: numero irracional obtido pela razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro; número irracional de valor aproximado de 3,14.

7-O que é ϕ e qual o seu significado?

Respostas esperada: número irracional considerado número da perfeição (da beleza, de ouro, divino) e de valor aproximado de 1,6; o número obtido da razão $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

8-O que é e e qual o seu significado?

Resposta esperada: um número irracional de valor aproximado 2,71. Foi descoberto com o trabalho com capitalização contínua.

9-O conjunto dos números irracionais é denso ou não denso?

Resposta esperada: Denso.

10-O conjunto dos números irracionais é Enumerável ou Não Enumerável?

Resposta esperada: Não Enumerável.

Análise a priori do pré-teste e pós-teste

Como já foi citado, durante o pré-teste não será cedido informações acerca de números irracionais. Com o conhecimento levantado na revisão de estudos, sobretudo aqueles de cunho diagnóstico, é possível fazer hipóteses da performance dos alunos no pré-teste.

Acredita-se que o desempenho dos estudantes não será bom, já que o assunto de números irracionais é tratado no próprio 9º ano, mas que geralmente não se obtém um aprendizado satisfatório devido a grande característica formal que este assunto possui.

Este conteúdo pode levantar certa familiaridade com números decimais que acredita-se que seja conhecido pelo aluno. Portanto, há a possibilidades dos participantes confundirem os números irracionais, com os racionais e dízimas periódicas. Isso pode acontecer diante do provável desconhecimento da natureza de números que são irracionais. Assim eles irão associar com algo que eles já conhecem, isto é, racionais, dízimas periódicas e outros conhecimentos.

Os dados dos estudantes no pré-teste serão coletados para análise, assim as hipóteses levantadas neste texto sobre o desempenho deles, neste teste, serão validadas ou não. Seja o diagnóstico bom ou ruim, a aplicação da experimentação irá construir o conhecimento de números irracionais para melhorar o rendimento destes estudantes, melhorando, dessa forma o desempenho deles no pós-teste.

Na próxima subseção é apresentada a Sequência Didática que foi aplicada no momento da experimentação.

4.2. Sequência Didática

Dispondo das informações levantadas na seção de Análises Previas, foi possível construir nesta subseção uma proposta de Sequência Didática que foi construída para ser um objeto de aprendizagem que auxilie o ensino de números irracionais para o alcance do objetivo deste trabalho e para ajudar na prática docente da Educação Básica. Para isso, elaboramos um conjunto de doze atividades didáticas, as quais foram construídas e organizadas levando em conta o planejamento de construção de uma sequência de atividade proposto por Sá (2019) referente ao Ensino por Atividade que foi explicada na subseção 3.7.2. Sendo assim, o planejamento deste conjunto de atividade ocorreu a partir de 10 etapas, sendo as seguintes:

1ª etapa: Determinação dos tópicos que serão ensinados a respeito do assunto de números irracionais. Eles foram definidos tendo como base as habilidades estabelecidas nos documentos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Secretaria do Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA), bem como das habilidades avaliadas pelo SISPAE e os descritores do SAEB.

Quadro 20 – Habilidades requisitadas em grades curriculares

Documentos Curriculares	Habilidades
BNCC	▪ (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). ▪ (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
PCN	▪ Reconhecer que existem números que não são racionais. ▪ Resolver situações-problema envolvendo números irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. ▪ Selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números irracionais.
SISPAE*	▪ MPA13-Utilizar a razão pi para no

	calculo do perímetro e da área de circunferência.(9º ano) ▪ MPA54-Representar números reais na reta numérica. (8º e 9º anos)
SAEB*	9 ano EF ▪ D11-Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações. ▪ D27-Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.
SEDUC	▪ (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). ▪ (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

* Nestes documentos alguns tópicos do assunto de números irracionais são citados de modo implícito.

Fonte: Brasil (2017); Brasil (1998); Sispae (2018); Saeb (2001); Pará (2018).

Com base nas habilidades anteriores, foram definidos os tópicos que se encontram no quadro 21, os quais direcionaram ao segundo passo referente à construção dos objetivos.

2º Etapa: Esta etapa refere-se à construção dos objetivos das atividades a se planejar para a aprendizagem destes tópicos. Estes objetivos os quais foram apresentados no quadro 21 foram desenvolvidas para garantir o aprendizado de cada tópico estabelecido previamente, mas sempre com a ideia de que o conjunto de todos eles deve configurar a aprendizagem do assunto de Números Irracionais, assim como ampliar e consolidar o conceito desse tipo de número e os significados de sua natureza.

3ª Etapa: Nesta etapa ocorreu a elaboração dos procedimentos de ensino ligados as listas de atividades que, somadas ao planejamento estabelecido neste trabalho, configuram-se uma Sequência Didática baseada na metodologia de ensino chamada Ensino por Atividade. Durante esta elaboração, tivemos também um cuidado muito minucioso neste momento para que as questões fossem bem claras para o entendimento do aluno e que pudessem retirar o máximo de informação dele referente aos tópicos.

Para garantir um aprendizado mais lúdico e adequado, foram selecionados recursos como calculadora, história da matemática e história em quadrinhos para auxiliar na resolução das atividades pelos estudantes. Também foi construído atividades de aprofundamento para reforçar e melhorar o conhecimento aprendido em algumas das atividades da proposta de Sequência Didática deste trabalho.

4ª Etapa: Neste momento houve a organização do material que compõe as atividades, onde decidimos que se possível cada atividade poderá ser distribuída para grupos de 2 alunos.

5ª Etapa: Este momento refere-se á elaboração e organização do espaço de registro onde os alunos irão descrever, marcar, explicar; resolver nas atividades propostas. Esses campos se localizam nas próprias folhas de roteiro das atividades descritas nas próximas subseções que compõe esta seção.

6ª Etapa: Nesta etapa ocorreu a previsão de observações que se encontram descritas na análise a priori de cada atividade citada nas subseções que estão apresentadas ao longo desta seção.

7ª Etapa: Este momento refere-se à previsão de institucionalização acerca do que será apresentado após a atividade para que os estudantes entendam de maneira mais formal o conhecimento aprendido.

8ª Etapa: Nesta fase foi construído um roteiro onde se organizou as atividades apresentadas nas próximas subseções, obedecendo aos seguintes elementos:

i) Título: onde é nomeada cada atividade;

ii) Objetivo: onde é estabelecida a finalidade que se espera chegar a respeito do aprendizado do estudante sobre o tópico do assunto tratado;

iii) Material: o recurso material que os alunos utilizarão durante as atividades;

iv) Procedimento, onde há a orientação das etapas de cada atividade;

v) Observação: local onde os estudantes apresentam tudo o que observaram nas respostas escritas nas questões;

vi) Conclusão, momento da atividade, onde os alunos explicam o que concluíram no decorrer da atividade, sendo este momento o que se espera que haja a formalização do objeto matemático.

Em algumas das atividades não há a presença de termos como Conclusão e Observação, devido este tipo de atividade utilizar o recurso de revista em quadrinhos para promover o aprendizado por meio da leitura, onde a observação está inclusa na própria leitura e o elemento da Conclusão ocorrerá em campos onde exigem que o aluno descreva o que concluíram com a leitura.

9ª Etapa: e o processo de verificação da aprendizagem dos tópicos definidos no início, sendo este processo desenvolvido por meio do pré-teste e pós-teste que foram apresentados na subseção 4.1.

Tem-se a seguir, um quadro expondo os tópicos do assunto em questão; organizados por aula, objetivo, tempo de duração de aula, assim como as metas que devem ser alcançadas. Estes itens, os elementos de planejamento associados a cada atividade da Sequência Didática de números irracionais que foi apresentada nesta seção.

Quadro 21 – Elementos de planejamento das atividades da Sequência Didática.

Aula	Tópicos	Metas	Objetivos de Atividade	Tempo
1ª	Dízimas Periódicas	Perceber que dízimas não periódicas não podem ser escritas como fração, sendo essas chamadas de irracionais.	Conceituar dizima periódica.	30 min
2ª*	Classificação de dízimas periódicas		Classificar os tipos de dízimas periódicas.	30 min
3ª*	Dízimas periódicas simples		Descobrir uma maneira de converter uma dízima periódica simples em fração.	45 min
4ª*	Dízimas periódicas compostas		Descobrir uma maneira de converter uma dízima periódica composta em fração.	45 min
5ª	Números irracionais		Conceituar número irracional	30 min
6ª	Os Números Irracionais	Caracterizar os números irracionais	Conhecer e caracterizar números irracionais, assim como o conjunto dos números irracionais.	1h 30min
7ª*	Propriedades dos números irracionais.	Descobrir propriedades operatórias entre racionais e irracionais	Descobrir uma propriedade de adição envolvendo Números Irracionais.	30 min
8ª*	Propriedades dos números irracionais.		Descobrir uma propriedade de multiplicação de Números Irracionais.	30min
9ª*	Propriedades dos		Descobrir uma	30min

	números irracionais		propriedade de divisão de Números Irracionais.	
10ª	O Número π	Compreender números irracionais especiais	Conhecer o número π.	1h 30 min
11ª	O Número ϕ		Conhecer o número ϕ.	1h 30 min
12ª	O Número e		Conhecer o número e.	1h 30 min

*Contém atividade de aprofundamento.
Fonte: Autor (2021).

Para o desenvolvimento de algumas atividades, foram utilizados alguns recursos metodológicos muito importantes para torna-las mais práticas e rápidas. Um dos recursos foi uma calculadora na forma de *app* instalável em celular androide disponibilizado aos alunos no momento da experimentação para algumas das atividades que utilizavam esse recurso.

Esta calculadora na forma de *app* se chama Calculador e Identificador de Racionais e Irracionais[3], ela ajudará na realização de várias operações, principalmente divisões, assim como a devida identificação do resultado se tem ou não infinitas casas decimais. Tem-se a seguir uma figura explicando superficialmente a estrutura dessa calculadora.

Figura 37 – *App* Calculador e Identificador de Racionais e Irracionais

Fonte: Autor (2021).

Este *app* foi elaborado pelo autor desta pesquisa exclusivamente para ser utilizado nessa sequência didática, tendo em vista que ela permite

[3] Pode ser baixado no link: *https://drive.google.com/file/d/1RxjjASZhQI9VOtSvP3q_NbbUbczSv6TZ/view?usp=sharing*

expressar o resultado de muitas contas e identificar se é racional exato, racional não exato (dízima periódica) ou irracional, além de apresentar uma expansão decimal para números não exatos com a informação de que possuem infinitas casas decimais, algo que se diferencia de outras calculadoras.

Outro recurso metodológico utilizado nessa sequência didática são quatro revistas em História em Quadrinhos. Essas revistas foram elaboradas pelo autor desse trabalho, e se encontram nos apêndices D, E, F e G.

Figura 38 – Revistas em HQ

Fonte: Autor (2021).

As revistas em quadrinhos possuem como título “O Museu dos Números Irracionais” (partes I, II, III e IV). Elas foram elaborada por meio da plataforma online de montagem de HQ *Pixton*, o aplicativo de edição de imagem *PotoScape* e o aplicativo de vetorização de imagem *CorelDRAW*. Acreditamos que os alunos irão compreender a leitura das revistas e se intrigarem com novas noções bastante interessantes como a ideia de infinito, proximidade, enumerabilidade, cardinalidade, densidade, sobre o número π e outras noções que dizem respeito do universo numérico dos números irracionais. Além de conhecerem sobre a história.

Diante das informações apresentadas nessa subseção, agora apresentamos as atividades que fazem parte da Sequência Didática proposta nesse trabalho. Ressalta-se que as atividades que compõe essa Sequência

Didática foram elaboradas levando-se em conta as conclusões e entendimentos obtidos na revisão de estudos assim como na fundamentação teórica.

Tem-se nas próximas subseções as atividades que compõe a Sequência Didática de números irracionais que foi descrita nesta seção, tal como as análises a priori de cada um delas, explicando sobre a eficácia prevista no processo de aplicação das atividades. Também são apresentadas as atividades de aprofundamento de algumas das atividades da Sequência Didática proposta, assim como as análises a priori delas, esclarecendo sobre suas importâncias para o aprofundamento do conhecimento aprendido pelos estudantes.

A atividade 1, que está apresentada a seguir, trata sobre números racionais, com foco nos que são números racionais não exatos, ou seja, que são racionais decimais infinitos, os quais possuem a característica de ter infinitas casas decimais periódicas de período não nulo. Esses números são chamados de Dízimas Periódicas.

4.2.1. Atividade 1

Título: Dízimas periódicas
Objetivo: Conceituar dizima periódica.
Material: roteiro da atividade, máquina de calcular e caneta.
Procedimento:

- **Com o auxílio da calculadora determine o valor de cada divisão**
- **Registre o resultado**
- **Com os dados obtidos preencha o quadro**

Divisão	Resultado	A quantidade de casas decimais é:	
		Finita	Infinita
27: 9			
1:9			
30:4			
25:9			
100:8			
35:9			

80:2			
41:9			
281:900			
10:99			

Observação:

Análise a priori da atividade 1: A atividade 1 é composta de um quadro que direciona o aluno a realizar várias divisões de inteiros para obter números decimais, onde os estudantes deverão classifica-los em números de quantidade finitas ou infinitas casas decimais.

Durante o preenchimento do quadro, os alunos deverão usar a calculadora na forma de *app* "calculador e Identificador de racionais e irracionais" que ajudará na realização das divisões, assim como a devida identificação do resultado se tem ou não infinitas casas decimais.

A atividade é finalizada com a área onde os discentes irão descrever a observação deles. O quadro a seguir apresenta possíveis observações que podem ser feitas por eles, sendo elas divididas em: "válida e desejada", que são as resposta que se esperam que sejam feitas nessa atividade; "válida e não desejada" que são as respostas que embora não sejam erradas, não são adequadas ao que se deseja para cumprir o objetivo da atividade; e por fim "inválida e não desejada" que são as respostas que são incorretas e que não se adequam ao objetivo da atividade. Tem-se a seguir o quadro citado anteriormente.

Quadro 22 – Possíveis observações dos alunos na atividade 1

Tipo de observação		Enunciado
Previstas	**Válida e desejada**	Existem divisões em que o resultado é um número decimal com finitas casas decimais e outras com infinitas casas decimais que se repetem.
	Válida e não desejada	Os resultados são números decimais.
		Alguns resultados não são exatos;
		Existem números grandes e números pequenos
	Inválida e não desejada	As divisões não são possíveis;

Fonte: Autor (2021)

Assim que todos os estudantes tiverem respondido, eles serão encaminhamento para a etapa de formalização onde será apresentada a eles a definição de dízima periódica, que se encontra abaixo.

Dízima periódica é uma decimal na qual, após um número finito de termos, aparece um bloco de termos (chamado o período) e a partir daí o decimal é constituído pela repetição sucessiva desse bloco, isto é $x, a_1 a_2 \ldots \overline{b_1 b_2 \ldots b_n}$, onde a barra sobre o bloco $\overline{b_1 b_2 \ldots b_n}$ indica que ele irá se repetir indefinidamente (MATOS, 2017).

Esta atividade foi construída para que o estudante perceba que em meio aos números racionais (números que podem ser escritos em fração) existem alguns cuja representação fracionária é infinita e periódica. Possibilitando o alcance do objetivo que esta atividade se propôs que é de conceituar dízima periódica. Nossa hipótese é que os alunos terão facilidade em perceber a diferenciação entre decimais de número de casas finita e os de casas decimais infinitas, ainda mais que os estudantes farão uso da calculadora para facilitar esse aprendizado, mantendo-os no foco dos resultados e reduzindo o tempo de desenvolvimento do cálculo, que é um pré-requisito que pode fazer ou não parte do conhecimento dos estudantes.

A atividade 2 que está apresentada a seguir, trata sobre classificação de dízimas periódicas, que podem ser classificadas em dizima periódica simples, quando é formada quando imediatamente após a vírgula tem-se o período (número após a vírgula que se repete periodicamente); e em dízima periódica composta, quando se tem uma parte numérica após a vírgula que antecede o período, sendo esta parte conhecida como antiperíodo.

4.2.2. Atividade 2

Titulo: Classificação de dízimas periódicas
Objetivo: Classificar os tipos de dízimas periódicas.
Material: roteiro da atividade, máquina de calcular e caneta.
Procedimento:

- **Com o auxílio da calculadora determine o valor de cada divisão**
- **Registre o resultado**
- **Com os dados obtidos preencha o quadro**

Divisão	Resultado
$\frac{1}{9}$	
$\frac{1}{90}$	
$\frac{2}{9}$	
$\frac{2}{90}$	
$\frac{13}{99}$	
$\frac{13}{990}$	
$\frac{25}{99}$	
$\frac{25}{990}$	
$\frac{56}{99}$	
$\frac{56}{990}$	

Observação:

Análise a priori: A atividade 2 é composta de um quadro que direciona o aluno a realizar várias divisões (organizadas no formato de fração) para obter números decimais que são dízimas periódicas, onde os estudantes deverão perceber a existência de dois tipos de dízimas periódicas. Os alunos serão direcionados a utilizar a calculadora na forma de *app* “Calculador e Identificador de Racionais e Irracionais”, mencionado anteriormente, que ajudará na realização das divisões, assim como a devida identificação do resultado se é ou não dízima periódica.

Após isso, os discentes irão descrever a observação deles sobre o preenchimento do quadro.

Da mesma forma que foi feito na análise a priori da atividade 1, foi construído um quadro apresentando possíveis observações que podem ser feitas por alunos durante a aplicação da atividade 2. Tem-se a seguir este quadro.

Quadro 23 - Possíveis observações dos alunos na atividade 2

<table>
<tr><th colspan="2">Tipo de observação</th><th>Enunciado</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Previstas</td><td>Válida e desejada</td><td>Dentre as dizimas periódicas, existem aquelas com denominador com uma quantidade de 9's seguida de um zero, onde a representação decimal de dizima periódica possui uma parte que não se repete depois da vírgula.</td></tr>
<tr><td>Válida e não desejada</td><td>Todas são dizimas periódicas.</td></tr>
<tr><td>Inválida e não desejada</td><td>Todas as frações resultam em decimais finitos.</td></tr>
</table>

Fonte: Autor (2021).

Assim que todos os estudantes tiverem respondido, eles serão encaminhamento para a etapa de formalização onde será conceituada a noção de dízima periódica simples e dízima periódica composta, bem como seus elementos (inteiro, período e antiperíodo).

Nossa hipótese a respeito dessa atividade é que os alunos terão facilidade em perceber a diferenciação entre dizimas periódicas simples e compostas a partir de seus elementos, especialmente quanto a presença ou não do antiperíodo, algo que vai facilitar para que tenham sucesso no alcance do objetivo dessa atividade, é que os estudantes farão uso da calculadora para facilitar os cálculos.

A atividade 3 que está apresentada a seguir, trata sobre a conversão de dízimas periódicas simples para a forma fracionária, que recebe uma abordagem onde se percebe a regra a partir da observação de sucessivas divisões.

4.2.3. Atividade 3

Titulo: Dízimas periódicas simples
Objetivo: Descobrir uma maneira de converter uma dízima periódica simples em fração.
Material: roteiro da atividade, máquina de calcular, caneta.

Procedimento:

- **Com o auxílio da calculadora determine o valor de cada divisão**
- **Registre o resultado**
- **Com os dados obtidos preencha o quadro**

1-Com o auxílio da calculadora quando for preciso, complete o quadro a seguir.

Fração	Número decimal	O numero decimal é uma dizima periódica?	
		Sim	Não
$\frac{18}{9}$			
$\frac{1}{9}$			
$\frac{2}{9}$			
	0,333...		
	0,444....		
$\frac{297}{99}$			
$\frac{23}{99}$			
$\frac{42}{99}$			
	0,56 56 56...		
	0,62 62 62...		

$\frac{999}{999}$			
$\frac{123}{999}$			
$\frac{352}{999}$			
	0,467 467...		
	0,812 812...		

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da atividade 3: A atividade 3 é composta de um quadro que conduz o aluno a realizar várias divisões para obtenção da representação decimal de várias frações, sendo estes valores obtidos, em sua maioria, dízimas periódicas simples.

Durante o preenchimento do quadro, os alunos deverão usar a calculadora na forma de *app* “calculador e Identificador de Racionais e Irracionais”, que ajudará na realização dos cálculos das divisões, assim como a devida identificação do resultado como sendo ou não dízima periódica.

Os alunos terão que associar cada dízima com a quantidade de 9’s que se apresenta no denominador da fração correspondente. Além disso, eles terão que indicar se os números decimais são dízimas periódicas ou não, de modo a perceber que nem toda vez que uma fração possui 9’s no denominador o decimal correspondente será necessariamente uma dízima periódica.

Após o preenchimento do quadro, os discentes irão descrever a observação deles sobre o que responderam no quadro que possa ser interpretado como uma regularidade. Daí, com base nessas observações, eles terão que apresentar na área de conclusão a regularidade que perceberam sobre o método a se usar para converter dizimas periódicas em fração, que pode ou não estar de acordo com o que o objetivo proposto nessa atividade. O alcance desse objetivo irá contribuir para que o aluno comece a enxergar dizimas periódicas como racionais.

Da mesma forma que foi feito na análise a priori da atividade 1, foi construído uma quadro apresentando possíveis observações, bem como as conclusões, que podem ser feitas por alunos durante a aplicação da atividade 3. Tem-se a seguir este quadro.

Quadro 24 - Possíveis observações e conclusões dos alunos na atividade 3

Tipo de observação		**Enunciado**	
		Quanto à observação	**Quanto à conclusão**
Previstas	**Válida e desejada**	O período da dizima periódica sempre fica no numerador da fração. Se o numerador da fração tem um dígito, então sempre aparece 9 no denominador, se tiver dois dígitos, então aparece 99, e assim por diante. Todas as dizimas periódicas podem ser transformadas em frações, mas nem todas as frações com 9's no denominador representam dizimas periódicas.	Para obter a fração de uma dízima periódica simples, nos casos apresentados, deve-se colocar o número que se repete no numerador e a quantidade de números que se repetem tem que indicar a quantidade de 9 que se apresenta no denominador;
	Válida e não desejada	Todas as dízimas periódicas resultam de uma fração.	Conforme o numero do numerador for maior o denominador também será maior em uma fração geratriz de uma dízima periódica.
	Inválida e não desejada	Todas as frações com 9's no denominador podem ser convertidas em dizimas periódicas.	Forma-se fração com numerador sendo o período e o denominador é sempre o 9.

Fonte: Autor (2021).

Assim que todos os estudantes tiverem respondido, eles serão encaminhamento para a etapa de formalização onde serão discutidos com eles os possíveis métodos propostos por eles na atividade e outros mais formais.

Nossa hipótese é que os estudantes terão um desempenho moderadamente bom em descobrir uma forma de converter dizimas periódicas simples em fração. O uso da calculadora irá facilitar muito os cálculos, facilitando o aprendizado, ao manter o foco dos estudantes nos resultados.

Atividade de Aprofundamento da Atividade 3

1-Converta as dízimas periódicas a seguir para a forma fracionária.

a) 0,4444... b) 0,777... c) 0,888... d) 0,121212...

e) 0,353535... f) 0,464646... g) 0,532532... h) 0,123123...

A atividade 4 que está apresentada a seguir, trata sobre a conversão de dízimas periódicas compostas para a forma fracionária, que recebe uma abordagem onde, da mesma forma que foi feito na atividade 3, o aluno deve perceber a regra a partir da observação de sucessivas divisões.

4.2.4. Atividade 4

Titulo: Dízimas periódicas compostas
Objetivo: Descobrir uma maneira de converter uma dízima periódica composta em fração.
Material: roteiro da atividade, máquina de calcular, caneta.
Procedimento:

- **Com o auxílio da calculadora determine o valor de cada divisão**
- **Registre o resultado**
- **Com os dados obtidos preencha o quadro**

Forma fracionária	Dízima	O numero decimal é uma dizima periódica?	
		Sim	Sim
$\frac{2}{9}$			
$\frac{2}{90}$			
$\frac{2}{900}$			

	0,0002 2 2...		
	0,00002 2 2...		
$\frac{1800}{900}$			
$\frac{34}{99}$			
$\frac{34}{990}$			
$\frac{34}{9900}$			
	0,00034 34 34...		
	0,000034 34 34...		
$\frac{456}{999}$			
$\frac{456}{9990}$			
$\frac{456}{99900}$			
	0,000456 456...		
	0,0000456 456...		
$\frac{198}{9900}$			

Observação:

Conclusão:

Analise a priori: A atividade 4 é composta de uma questão que conduz ao cálculo para obtenção da representação decimal de várias frações, sendo estes valores obtidos, em sua maioria, dízimas periódicas compostas.

Durante o preenchimento do quadro, os alunos deverão usar a calculadora na forma de *app* “calculador e Identificador de racionais e irracionais”, que ajudará na realização dos cálculos das divisões, assim como na devida identificação do resultado como sendo ou não dízima periódica.

Comparado à atividade sobre dizimas periódicas simples, agora os alunos terão que associar o período com a quantidade de 9’s e também o antiperíodo com a quantidade de 0’s após os 9’s que se apresenta no denominador da fração correspondente. Além disso, eles terão que classificar os números decimais em dízimas periódicas ou não periódicas de modo a perceber que nem toda vez que uma fração possui 9’s seguido de 0’s no denominador o decimal correspondente será necessariamente uma dízima periódica composta.

Após o preenchimento do quadro, os discentes irão descrever a observação deles sobre o que responderam no quadro que possa ser interpretado como uma regularidade. Daí, com base nessas observações, eles terão que apresentar na área de conclusão a regularidade que perceberam sobre o método a se usar para converter dizimas periódicas em fração, que pode ou não estar de acordo com o que o objetivo proposto nessa atividade. O alcance desse objetivo irá contribuir para que o aluno comece a enxergar dizimas periódicas compostas como racionais.

Da mesma forma que foi feito na análise a priori da atividade 1, foi construído uma quadro apresentando possíveis observações, bem como as conclusões, que podem ser feitas por alunos durante a aplicação da atividade 4. Tem-se a seguir este quadro.

Quadro 25 - Possíveis observações e conclusões dos alunos na atividade 4

Tipo de observação		**Enunciado**	
		Quanto à observação	**Quanto à conclusão**
Previstas	**Válida e desejada**	A quantidade de números no período e no antiperíodo indica, respectivamente, a quantidade de 9 e a quantidade de 0 após o 9, no denominador da fração e o numerador é o número do período.	A quantidade de números no período e no antiperíodo indica, respectivamente, a quantidade de 9 e a quantidade de 0 após o 9, no denominador da fração geratriz e o numerador é o número do período
	Válida e não desejada	Em todos os casos têm-se dízimas periódicas compostas.	Dízimas Compostas podem ser convertidas em frações
	Inválida e não desejada	O método para converter dízimas periódicas compostas em fração é igual ao método para dízimas periódicas simples.	Toda fração que tem no denominador 9's seguidos de 0's, tem resultado sendo dizima periódica composta.

Fonte: Autor (2021)

Assim que todos os estudantes tiverem respondido, eles serão encaminhamento para a etapa de formalização onde serão discutidos com eles os possíveis métodos propostos por eles na atividade e outros mais formais.

Nossa hipótese é que os alunos terão um desempenho moderadamente bom em descobrir uma forma de converter dizimas periódicas compostas em fração. A utilização da calculadora tende a auxiliar muito os cálculos, facilitando o aprendizado, ao manter o foco dos estudantes nos resultados.

Atividade de Aprofundamento da Atividade 4

1-Converta as dízimas periódicas a seguir para a forma fracionária.

a) 0,0444... b) 0,00777... c) 0,000888... d) 0,0121212...

e) 0,353535... f) 0,0464646... g) 0,00532532... h) 0,000123123...

A atividade 5 que está apresentada a seguir, trata sobre uma aula interativa com os estudantes, onde serão requisitados conhecimentos obtidos nas atividades anteriores, para que eles percebam a impossibilidade de se escrever a fração de uma dízima que não é periódica.

4.2.5. Atividade 5

Título: Números irracionais
Objetivo: Conceituar números irracionais.
Material: roteiro da atividade, caneta.

Procedimento: Aula Interativa

Descrição da Atividade:

As perguntas desta atividade serão apresentadas aos estudantes de modo verbal. Inicialmente será apresentada uma sequência de números 0,333...; 0,3222...; 0,444..., para então perguntar quais as frações que correspondem a cada um deles.

Após receber as respostas dos alunos será perguntado: Existem números que não podem ser escritos como fração?

Caso não se tenham respostas sobre esta pergunta, será requisitado aos alunos que respondam a seguinte questão:

Questão: Sobre a dízima 0,12345678..., responda o que se pede.

a) É periódica? Caso responda sim, qual o número que se repete?

b) É possível transforma-la em fração?

Desse modo, os conhecimentos sobre dízimas periódicas, serão confrontados com a questão anterior, onde os alunos irão perceber que a impossibilidade de se escrever a fração correspondente à dízima apresentada.

Análise a priori da atividade 5: Esta atividade vai ocorrer por meio de uma aula interativa com os estudantes, onde será requisitada a reflexão sobre os conhecimentos obtidos nas atividades anteriores, que possibilitará uma discussão com os estudantes sobre a crença de que todo número decimal pode, ou não, ser escrito na forma de fração. Alguns estudantes podem responder sim, outros não, mas a discussão feita com eles abre o momento propício para apresentar os números de casas decimais infinitas e não periódicas, ou seja, os números irracionais. Essa apresentação irá fornecer uma ideia bem superficial de número irracional, que será um conhecimento pressuposto em relação à próxima atividade que direcionará os estudantes à caracterização desse número.

Acredita-se que os alunos irão receber bem esta atividade, principalmente os que fixarem bem os objetivos das atividades anteriores, a partir do entendimento que todas as dízimas periódicas podem se convertidas em fração.

A atividade 6 que se apresenta a seguir não se baseia na metodologia de Ensino por Atividade, nem mesmo será aula interativa. Sua ocorrência dependerá da leitura de História em Quadrinhos, onde os personagens, ambientes e as situações irão conduzir os leitores para conhecer e caracterizar os números irracionais.

4.2.6. Atividade 6

Título: Os Números Irracionais
Objetivo: Apresentar a história dos números irracionais.
Material: roteiro da atividade, caneta.

Procedimento:

Leia a revista em quadrinhos “O Museu dos Números Irracionais - Parte I” e depois responda as questões no anexo 1.

Anexo 1 – Questões sobre a revista em quadrinhos “O Museu dos Números Irracionais - Parte I”.

1 – O que é um número irracional?

2 – Indique uma situação matemática em que surge um número irracional.

3-Indique os números do quadro a seguir que são números racionais e os que são números irracionais.

0,5	243	$\sqrt{4}$	0,000001	-1,25	$\sqrt{2}$	0,111...
$-\frac{1}{4}$	0,333...	1200,00	$\sqrt{6}$	100,1	3^2	
0,123333....	$\sqrt{9}$	10000	$\sqrt{5}$	- 0,345	$\sqrt{10}$	
$\sqrt{12}$	1,2	$\sqrt{17}$	13,5	$\sqrt{15}$	$\sqrt{1}$	

4 – Escreva alguns exemplos de números irracionais além dos que foram apresentados no quadro da questão anterior.

5 – O conjunto dos números Inteiros é enumerável ou não enumerável?

6 – O conjunto dos números Racionais é enumerável ou não enumerável?

7 – O conjunto dos números Irracionais é enumerável ou não enumerável?

8- Qual conjunto tem maior cardinalidade, o conjunto dos números racionais ou o conjunto dos números irracionais?

9 - O conjunto dos números Irracionais é denso ou não denso? Por que?

Análise a priori da Atividade 6: A atividade 6 é constituída de 9 questões que direcionam os estudantes a caracterizarem os números irracionais sobre o conceito que os distingui dos racionais, sobre a representação geométrica de número irracional, sobre como tratá-los referente à percepção de proximidades, sobre a característica do conjunto dos números irracionais referente à cardinalidade, enumerabilidade e densidade.

As questões foram elaboradas levando em conta a leitura feita pelos estudantes da revista em quadrinhos “O Museu dos Números Irracionais – Parte I” (ver Apêndice D) que apresenta de forma ilustrada uma história que apresenta recortes da história dos números irracionais e algumas discussões sobre noções que caracterizam esse tipo de número. Esta revista em quadrinhos é a 1ª parte de um conjunto de 4 revistas, sendo que a 2ª parte foi utilizada na atividade 10, a 3ª na atividade 11 e a 4ª parte utilizada na atividade 12. A revista em quadrinhos desta atividade, assim como as demais, representa um recurso metodológico que acreditamos tornar mais compreensível o entendimento de números irracionais aos alunos do 9º ano.

Acreditamos que os alunos irão compreender a leitura da revista e se intrigar com novas noções bastante interessantes como a ideia de proximidade, enumerabilidade, cardinalidade, densidade e outras que dizem respeito do universo numérico dos números irracionais. Além de conhecerem sobre a história.

Após a leitura os estudantes irão responder as 9 questões da atividade 6, que irão requerer respostas ligadas a leitura da própria revista. Este momento será muito importante porque aluno irá descrever o que ele compreendeu sobre números irracionais, fixando ainda mais o conhecimento adquirido com a leitura da revista.

A atividade 7 a seguir aborda a operação de adição quando se opera dois irracionais, ou um racional e outro irracional. Uma propriedade importante quando se desenvolve cálculos com números não exatos. Uma observação importante de se fazer é que devido à subtração $a - b$ também ser caracterizada como uma adição $a + (-\, b)$ então essa atividade também aborda esta operação.

4.2.7. Atividade 7

Título: Propriedades dos números irracionais

Objetivo: Descobrir uma propriedade de adição envolvendo Números Irracionais.

Material: Roteiro de atividade, caneta e aplicativo.

Procedimento:

- **Com o auxílio da calculadora “Calculador e Identificador de Racionais e Irracionais” determine o valor de cada divisão.**
- **Registre o resultado**
- **Com os dados obtidos preencha o quadro**

Números	O número é	
	Racional	Irracional
x = $\sqrt{2}$		
y = $\sqrt{3}$		
A soma x + y é		
x = $\sqrt{5}$		
y = $\sqrt{7}$		
x = $\sqrt{5}$		
y = $-\sqrt{5}$		
A soma x + y é		
x = $\sqrt{10}$		
y = $\sqrt{10}$		
A soma x + y é		
x = 2		
y =$\sqrt{3}$		
A soma x + y é		
x =$\sqrt{5}$		
y= 10		
A soma x + y é		
x = $\sqrt{8}$		
y = 6		
A soma x + y é		
x = 10		
y = $\sqrt{10}$		
A soma x + y é		
x =$\sqrt{12}$		
y = 30		
A soma x + y é		
x = 1		
y = $\sqrt{18}$		
A soma x + y é		

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da Atividade 7: A atividade 7, assim como as atividades 8 e 9 referem-se a duas propriedades muito importantes sobre irracionais, que é a propriedade do fechamento para as operações de adição, multiplicação e divisão e a propriedade da pertinência irracional em operações entre racional e irracional nas mesmas operações. Estas propriedades foram explicadas na subseção 3.2 na fundamentação matemática do assunto em questão.

A atividade 7 é composta de um quadro que direciona o aluno a realizar várias adições que referem-se especificamente ao fechamento da operação de adição quando se opera dois números irracionais e a pertinência irracional dos resultados quando se soma um número irracional com um racional, algo apresentado no teorema 3 da subseção 3.2.3 onde foi explicado sobre a propriedade da Pertinência Irracional em Operações entre Racional e Irracional.

Durante o preenchimento do quadro, os alunos deverão utilizar a calculadora na forma de *app* "calculador e Identificador de racionais e irracionais" para a realização dos cálculos das somas entre irracionais e racionais e entre irracionais, assim como a devida identificação do resultado em racional ou irracional.

Após o preenchimento do quadro, os discentes irão descrever a observação deles sobre o que responderam no quadro que possa ser interpretado como uma regularidade. Daí, com base nessas observações, eles terão que escrever na área de conclusão a regularidade que perceberam sobre adições entre irracionais e entre racional e irracional, que pode ou não estar de acordo com o que o objetivo proposto nessa atividade.

Da mesma forma que foi feito na análise a priori da atividade 1, foi construído uma quadro apresentando possíveis observações, bem como as conclusões, que podem ser feitas por alunos durante a aplicação da atividade 7. Tem-se a seguir este quadro.

Quadro 26 - Possíveis observações e conclusões dos alunos na atividade 7

Tipo de observação		**Enunciado**	
		Quanto à observação	**Quanto à conclusão**
Previstas	**Válida e desejada**	A soma será irracional sempre quando um dos fatores for racional e o outro for irracional	Sempre a soma entre irracional e racional é irracional.
	Válida e não desejada	Os alunos podem ter alguma lembrança da atividade 6 e junto com suas intuições podem ter uma observação correta sem necessitarem do uso do aplicativo.	Sempre a soma entre um número com radical, sendo não exato, e outro sem radical é irracional.

	Inválida e não desejada	A soma será irracional sempre quando um dos fatores for sem raiz quadrada e o outro tiver raiz quadrada.	Sempre a soma entre um número com radical e outro sem radical é irracional.

Fonte: Autor (2021).

Nossa hipótese é que os alunos terão um desempenho moderadamente bom em observar e concluir o que se espera, pois com a calculadora, o preenchimento do quadro fica mais fácil dos estudantes observarem uma regularidade para então concluir que nem sempre a adição entre irracionais gera como resultado números irracionais, entretanto sempre a adição entre um racional, positivo ou negativo, e um irracional, positivo ou negativo, resulta em um número irracional.

A atividade 8 aborda a operação de multiplicação quando se opera dois irracionais, ou um racional e outro irracional. Uma propriedade importante quando se desenvolve cálculos com números não exatos.

4.2.8. Atividade 8

Título: Propriedades dos números irracionais
Objetivo: Descobrir uma propriedade de multiplicação de Números Irracionais.
Material: Roteiro de atividade, caneta e aplicativo.
Procedimento:

- **Com o auxílio da calculadora "Calculador de Identificador de Racionais e Irracionais" determine o valor de cada divisão.**
- **Registre o resultado**
- **Com os dados obtidos preencha o quadro**

Números	O número x é	
	Racional	Irracional
x = $\sqrt{3}$		
y = $\sqrt{5}$		
O Produto x·y é		
x = $\sqrt{5}$		
y = $\sqrt{5}$		
O Produto x·y é		
x = $\sqrt{6}$		
y = $\sqrt{8}$		
O Produto x·y é		

x =$\sqrt{10}$		
y = $\sqrt{10}$		
O Produto x·y é		
x =3		
y =$\sqrt{2}$		
O Produto x·y é		
x =$\sqrt{7}$		
y=5		
O Produto x·y é		
x =$\sqrt{8}$		
y =9		
O Produto x·y é		
x = 10		
y =$\sqrt{10}$		
O Produto x·y é		
x =$\sqrt{14}$		
y =20		
O Produto x·y é		
x =$\sqrt{13}$		
y =3		
O Produto x·y é		

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da Atividade 8: A atividade 8 refere-se à propriedade do fechamento para as operações de multiplicação de irracionais, e a propriedade da pertinência irracional em operações entre racional e irracional nessa mesma operação.

Essa atividade é composta de um quadro que direciona o aluno a realizar várias multiplicações que referem-se especificamente ao fechamento da operação de multiplicações quando se opera dois números irracionais e a pertinência irracional dos resultados quando se multiplica um número irracional com um racional, algo apresentado no teorema 3 da subseção 3.2.3 onde foi explicado sobre a propriedade da Pertinência Irracional em Operações entre Racional e Irracional.

Assim como a atividade 7, os alunos deverão usar o *app* “Calculador e Identificador de Racionais e Irracionais” que ajudará na realização de cálculos de multiplicação requeridos para o preenchimento do quadro, assim como a devida classificação do resultado em racional ou irracional.

Dispondo do *app* de calculadora, mencionado anteriormente, e o quadro da atividade 8 os alunos devem concluir que nem sempre a multiplicação entre irracionais resulta em números irracionais, entretanto sempre a multiplicação entre um racional e um irracional resulta em um número irracional.

Após o preenchimento do quadro, os discentes irão descrever a observação deles sobre o que responderam no quadro que possa ser interpretado como uma regularidade. Daí, com base nessas observações, eles terão que escrever na área de conclusão a regularidade que perceberam sobre multiplicação entre irracionais e entre racional e irracional, que pode ou não estar de acordo com o que o objetivo proposto nessa atividade.

Da mesma forma que foi feito na análise a priori da atividade 7, foi construído uma quadro apresentando possíveis observações e também as conclusões que podem ser feitas por alunos durante a aplicação da atividade 8. Tem-se a seguir este quadro.

Quadro 27 - Possíveis observações e conclusões dos alunos na atividade 8

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Tipo de observação</th><th colspan="2">Enunciado</th></tr>
<tr><th>Quanto à observação</th><th>Quanto à conclusão</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Previstas</td><td>Válida e desejada</td><td>O produto será irracional sempre quando um dos fatores for racional e o outro for irracional</td><td>Sempre o produto entre irracional e racional é irracional.</td></tr>
<tr><td>Válida e não desejada</td><td>Os alunos podem ter alguma lembrança da atividade 6 e junto com suas intuições podem ter uma observação correta sem necessitarem do uso do aplicativo.</td><td>Sempre o produto entre um número com radical, não exato, e outro sem radical é irracional.</td></tr>
<tr><td>Inválida e não desejada</td><td>O produto será irracional sempre quando um dos fatores for sem raiz quadrada e o outro tiver raiz quadrada.</td><td>Sempre o produto entre um número com radical e outro sem radical é irracional.</td></tr>
</table>

Fonte: Autor (2021).

Após a etapa de experimentação, nossa hipótese é que os alunos terão um desempenho moderadamente bom e em observar e concluir o que se espera, pois com a calculadora de irracionais, o preenchimento do quadro fica mais fácil dos estudantes observarem uma regularidade para chegar à conclusão que se espera.

Vale acrescentar que há a possibilidade dos alunos perceberem uma outra regularidade, que é a semelhança da conclusão obtida na atividade 7 a respeito de adição com a conclusão obtida nesta atividade 8 sobre multiplicação, o que pode facilitar a fixação para o aluno prever mais rapidamente a conclusão da atividade 8 e certamente a atividade 9 para divisão.

A atividade 9 aborda a operação de divisão quando se opera dois irracionais, ou um racional e outro irracional. Uma propriedade importante quando se desenvolve cálculos com números não exatos.

4.2.9. Atividade 9

Título: Propriedades dos números irracionais
Objetivo: Descobrir uma propriedade de divisão de Números Irracionais.
Material: Roteiro de atividade, caneta e aplicativo.
Procedimento:

- **Com o auxílio da calculadora "Calculador e Identificador de Racionais Irracionais" determine o valor de cada divisão.**
- **Registre o resultado**
- **Com os dados obtidos preencha o quadro**

Números	O número x é	
	Racional	Irracional
x = $\sqrt{2}$		
y = $\sqrt{5}$		
O quociente x : y é		
x = $\sqrt{3}$		
y = $\sqrt{3}$		
O quociente x: y é		
x = $\sqrt{6}$		
y = $\sqrt{8}$		
O quociente x: y é		
x = $\sqrt{12}$		
y = $\sqrt{12}$		
O quociente x: y é		

x = 4		
y = $\sqrt{2}$		
O quociente x: y é		
x = $\sqrt{6}$		
y= 4		
O quociente x: y é		
x = $\sqrt{8}$		
y = 9		
O quociente x: y é		
x = 10		
y = $\sqrt{10}$		
O quociente x: y é		
x = $\sqrt{12}$		
y = 24		
O quociente x: y é		
x = 5		
y = $\sqrt{10}$		
O quociente x: y é		

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da Atividade 9:

A atividade 9 refere-se à propriedade do fechamento para as operações de divisão de irracionais, e a propriedade da pertinência irracional em operações entre racional e irracional nessa mesma operação. Esta atividade é composta de um quadro que direciona o aluno a realizar várias divisões que referem-se especificamente ao fechamento da operação de divisões quando se opera dois números irracionais e a pertinência irracional dos resultados quando se dividi um número irracional com um racional.

Nessa atividade, os alunos também usarão a calculadora *app*, que ajudará na realização de cálculos de divisão requeridos para o preenchimento do quadro, assim como a devida classificação do resultado em racional ou irracional.

Dispondo da calculadora *app* e o quadro da atividade 9 os alunos devem concluir que nem sempre a divisão entre irracionais resulta em números irracionais, entretanto sempre a divisão entre um racional e um irracional resulta em um número irracional.

Após o preenchimento do quadro, os discentes irão descrever a observação deles sobre o que responderam no quadro, que possa ser interpretado como uma regularidade. Daí, com base nessas observações, eles terão que escrever na área de conclusão a regularidade que perceberam sobre divisão entre irracionais e entre racional e irracional, que pode ou não estar de acordo com o que o objetivo proposto nessa atividade.

Da mesma forma que foi feito na análise a priori da atividade 7, foi construído uma quadro apresentando possíveis observações e também as conclusões que podem ser feitas por alunos durante a aplicação da atividade 9. Tem-se a seguir este quadro.

Quadro 28 - Possíveis observações e conclusões alunos na atividade 9

Tipo de observação		**Enunciado**	
		Quanto à observação	**Quanto à conclusão**
Previstas	**Válida e desejada**	O quociente será irracional sempre quando um dos elementos da razão for racional e o outro for irracional.	Sempre o quociente obtido na divisão entre irracional e racional (ou vice versa) é irracional. Acontece o mesmo da atividade anterior, onde se um deles é irracional e o outro racional, o resultado é irracional.
	Válida e não desejada	Os alunos podem ter alguma lembrança das atividades 7 e 8 e junto com suas intuições podem ter uma observação correta sem necessitarem do uso do aplicativo.	Sempre o quociente obtido da divisão entre um número com radical, não exato, e outro sem radical é irracional.
	Inválida e não desejada	O quociente será irracional sempre quando um dos elementos da razão for sem raiz quadrada e o outro tiver raiz quadrada.	Sempre a divisão entre um número com radical e outro sem radical é irracional.

Fonte: Autor (2021).

Após a etapa de experimentação, nossa hipótese é que os alunos terão um desempenho bom em observar e concluir o que se espera, pois com a calculadora *app*, os cálculos serão facilitados.

Também se prevê que os estudantes a semelhança dessa atividade em relação as atividade 7 e 8 e, com isso, concluir mais rapidamente que sempre o quociente obtido na divisão entre irracional e racional (ou vice versa) é irracional, mas quando são dois irracionais o quociente nem sempre é irracional.

Atividade de Aprofundamento da Atividade 7, 8 e 9

1ª seção de questões (Adição)

1-Leia as alternativas a seguir e escreva V, para verdadeiro, e F, para falso nos parênteses, a respeito de suas afirmações.

(   ) A adição (+) entre dois números **irracionais** sempre resulta em um número **irracional**.
Justifique:____
____

(   ) A adição (+) entre um número **racional** e um número **irracional** sempre resulta em um número **racional**.
Justifique:____
____

(   ) A adição (+) entre um número **racional** e um número **irracional** sempre resulta em um número **irracional**.
Justifique:____
____

2-Responda cada pergunta a seguir.

a) O valor numérico da expressão $2 + 3 + 30 + 50 + \sqrt{5}$ é racional ou irracional? Justifique.

b) O valor numérico da expressão $5 + 10 + \sqrt{4} + 2 + 0$ é racional ou irracional? Justifique.

c) O valor numérico da expressão $-\sqrt{2}+\sqrt{2}+3+1$ é racional ou irracional? Justifique.

d) Sabendo que $x=2$ e $y=\sqrt{5}$, o valor numérico da expressão $3x-4+y$ é racional ou irracional? Justifique.

2ª seção de questões (Multiplicação)

1-Leia as alternativas a seguir e escreva V, para verdadeiro, e F, para falso nos parênteses, a respeito de suas afirmações.

(   ) A multiplicação entre dois números **irracionais** sempre resulta em um número **irracional**.
Justifique:____
____

(   ) A multiplicação (x) entre um número **racional** e um número **irracional** sempre resulta em um número **racional**.
Justifique:____
____

(   ) A multiplicação (x) entre um número **racional** e um número **irracional** sempre resulta em um número **irracional**.

Justifique:____
____

2-Responda cada pergunta a seguir.

a) O valor numérico da expressão $10 \times 3 + 30 - 50 \times \sqrt{5}$ é racional ou irracional? Justifique.

b) O valor numérico da expressão $2+\sqrt{3}\times 6+4$ é racional ou irracional? Justifique.

c) O valor numérico da expressão $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 5 + 3$ é racional ou irracional? Justifique.

d) Sabendo que $x = 2$ e $y = \sqrt{3}$, o valor numérico da expressão $4x - 2y$ é racional ou irracional? Justifique.

3ª seção de questões (Divisão)

1-Leia as alternativas a seguir e escreva V, para verdadeiro, e F, para falso nos parênteses, a respeito de suas afirmações.

(   ) A divisão (÷) entre dois números **irracionais** sempre resulta em um número **irracional**.
Justifique:____
____

(   ) A divisão (÷) de um número **racional** por um número **irracional** sempre resulta em um número **racional**.
Justifique:____
____

(   ) A divisão (÷) de um número **racional** por um número **irracional** sempre resulta em um número **irracional**.
Justifique:____
____

2-Responda cada pergunta a seguir.

a) O valor numérico da expressão $5 \times 2 + 2 \div \sqrt{7} - 1$ é racional ou irracional? Justifique.

b) O valor numérico da expressão $\sqrt{3} \div \sqrt{3} + 6 - 5$ é racional ou irracional? Justifique.

c) O valor numérico da expressão $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \div \sqrt{2} + 4$ é racional ou irracional? Justifique.

d) Sabendo que $x = 2$ e $y = \sqrt{6}$, o valor numérico da expressão $4x \div 2y$ é racional ou irracional? Justifique.

A atividade 10 que se apresenta a seguir não se baseia na metodologia de Ensino por Atividade. Sua ocorrência dependerá da leitura de uma História em Quadrinhos, de forma semelhante à atividade 6. No caso desta atividade a seguir, será fornecido destaque a um dos números irracionais mais famosos, o π (pi).

4.2.10. Atividade 10

Título: O número π
Objetivo: Apresentar o número π.
Material: Roteiro de atividade e caneta.

Procedimento: Leia a revista em quadrinhos "O Museu dos Números Irracionais - Parte II" e depois responda as questões no anexo 2.

Anexo 2 – Questões sobre a revista em quadrinhos "O Museu dos Números Irracionais - Parte II".

Com base na leitura feita na revista em quadrinhos "O Museu dos Números Irracionais – Parte II", responda as questões a seguir:

1 – O que é π?

2- O π é classificado como racional ou irracional?

3- O π é algébrico ou transcendente?

4 - Determine uma aproximação para o número π.

5 – Apresente uma situação geométrica, de acordo com a história do π, que resulte em uma aproximação ou relação que envolva o π.

Análise a priori da Atividade 10: A atividade 10 é constituída de uma leitura feita pelos estudantes da revista em quadrinhos "O Museu dos Números Irracionais – Parte II" (ver Apêndice E) que apresenta de forma ilustrada recortes da história do número irracional π e algumas discussões sobre noções que o caracterizam. Esta revista em quadrinhos é a segunda parte de um conjunto de revistas, já mencionadas anteriormente.

Após os alunos terminarem a leitura da revista, irão ser conduzidos a responder 6 questões anexadas a essa atividade que irão requerer informações da leitura feita por eles sobre caracterização do número irracional π, sobre o conceito geométrico que o define como constante, sobre sua irracionalidade, quanto à transcendência, sobre sua percepção de proximidade, sobre situações geométricas que resulte em π.

Acreditamos que os estudantes irão ter uma boa receptividade sobre a noção e história do π contida na leitura da revista e se intrigarem com ideias interessantes como, por exemplo, o método de Arquimedes para se determinar um valor aproximado de π.

A atividade 11 que se apresenta a seguir não se baseia na metodologia de Ensino por Atividade. Sua ocorrência dependerá da leitura de uma História em Quadrinhos, de forma semelhante às atividades 6 e 10. No caso desta atividade a seguir, será fornecido destaque a um dos números irracionais mais famosos, o ϕ (fi).

4.2.11. Atividade 11

Título: O número ϕ
Objetivo: Apresentar o número ϕ.
Material: Roteiro de atividade e caneta.

Procedimento: Leia a revista em quadrinhos “O Museu dos Números Irracionais - Parte III” e depois responda as questões no anexo 3.

Anexo 3 – Questões sobre a revista em quadrinhos “O Museu dos Números Irracionais - Parte III”.

Com base na leitura feita na revista em quadrinhos “O Museu dos Números Irracionais – Parte III”, responda as questões a seguir:

1 – O que é ϕ?

2- O ϕ é classificado como racional ou irracional?

3 - Determine uma aproximação para o número ϕ.

4 – Apresente uma situação geométrica, de acordo com a história do ϕ, que resulte em uma aproximação ou relação que envolva o ϕ.

Análise a priori da Atividade 11: A atividade 11 é constituída de uma leitura feita pelos estudantes da revista em quadrinhos “O Museu dos Números Irracionais – Parte III” (ver Apêndice F) que apresenta de forma ilustrada uma história que apresenta recortes da história do número irracional ϕ e suas presenças em figuras geométricas, obras de arte, monumentos e na natureza. Esta revista em quadrinhos é a terceira parte de um conjunto de revistas, já mencionadas anteriormente.

Da mesma forma que foi feito na atividade 10, após os alunos terminarem a leitura da revista da atividade 11, irão ser conduzidos a responder 5 questões anexadas a essa atividade que irão requerer informações da leitura feita por eles sobre caracterização do número irracional ϕ quanto às situações geométricas que essa constante se apresenta.

Nossa previsão é que os estudantes irão ter uma boa receptividade sobre a noção e história do ϕ contida na leitura da revista e se intrigarem com ideias interessantes como, por exemplo, a presença de inúmeras aproximações desse número em obras de arte e em outras formas de expressão humana.

A atividade 12 que se apresenta a seguir não se baseia na metodologia de Ensino por Atividade. Sua ocorrência dependerá da leitura de uma História em Quadrinhos, de forma semelhante às atividades 6, 10 e 11. No caso desta atividade a seguir, será fornecido destaque a um dos números irracionais mais famosos, o número de Euler (e).

4.2.12. Atividade 12

Título: O número e
Objetivo: Apresentar o número e
Material: Roteiro de atividade e caneta.

Procedimento: Leia a revista em quadrinhos "O Museu dos Números Irracionais - Parte IV" e depois responda as questões no anexo 4.

Anexo 4 – Questões sobre a revista em quadrinhos "O Museu dos Números Irracionais - Parte IV".

Com base na leitura feita na revista em quadrinhos "O Museu dos Números Irracionais – Parte IV", responda as questões a seguir:

1 – O que é o número e?

2- O número e é classificado como racional ou irracional?

3- O e é algébrico ou transcendente?

4 - Determine uma aproximação para o número e.

5 – Apresente uma situação, de acordo com a história do e, que resulte em uma aproximação do e.

Análise a priori da Atividade 12: A atividade 12 é constituída de uma leitura feita pelos estudantes da revista em quadrinhos “O Museu dos Números Irracionais – Parte IV” (ver Apêndice G) que apresenta de forma ilustrada um enredo que apresenta recortes da história do número irracional e e alguns diálogos entre os personagens sobre noções que o caracteriza.

Assim como na atividade 11, após os alunos terminarem a leitura da revista em quadrinhos, irão ser conduzidos a responder 6 questões anexadas a essa atividade que irão requerer informações da leitura feita por eles sobre caracterização do número irracional e quanto a sua irracionalidade, a transcendência, situação histórica que gerou aproximações de e, e alguns outros entendimentos.

Acredita-se que os estudantes iram compreender bem sobre a noção e história de e que se encontra na leitura da revista em questão, além de se intrigarem com ideias curiosas como, por exemplo, a variação da capitalização em juros compostos quando se muda o período de tempo.

5. EXPERIMENTAÇÃO

Na seção anterior foi apresentado o instrumento de ensino com a qual foi utilizado no momento da experimentação, bem como o instrumento de verificação da aprendizagem, que é o pré-teste e pós-teste. Diante disso, esta seção descreve detalhadamente como ocorreram as aulas, quanto as circunstâncias e procedimentos da aplicação das atividades apresentadas na subseção anterior para se obter dados, cuja análise pode comprovar a eficácia da sequência didática proposta nesse trabalho para a aprendizagem de números irracionais.

Inicialmente tínhamos o planejamento de aplicar a sequência didática com alunos do Ensino Fundamental, por isso foi requisitada uma escola da rede pública de ensino de Belém que tinha Ensino Fundamental, porém não se obteve sucesso devido à situação emergencial com a qual as escolas da rede publica e particulares de ensino se encontravam, diante dos impactos da pandemia por COVID-19. Diante disso, foi feito um trabalho de divulgação verbal e por redes sociais para estudantes que moravam nas proximidades do bairro da Jaderlândia (Ananindeua/PA) e do bairro da Marambaia (Belém/PA). Percebeu-se inicialmente que a maioria se encontrava cursando o Ensino Médio na rede pública de ensino.

Mesmo com o trabalho de divulgação, apenas 6 alunos se interessaram em participar da aplicação do experimento. Tem-se a seguir a distribuição dos alunos por série.

Quadro 29 – Distribuição de alunos por série

Alunos	Série
A1	3º ano
A2	2º ano
A3	3º ano
A4	1º ano
A5	3º ano
A6	3º ano

Fonte: Autor (2021)

Inicialmente foi perguntado a esses estudantes se já tinham ouvido falar de números irracionais, a maioria comentou já ter estudado, mas que não tinham ideia de quem são esses números. Com isso, foi apresentado aos alunos um termo de consentimento, que se localiza no apêndice H, requerendo a assinatura deles consentindo em participar desse trabalho.

Tal como, o pré-teste e o pós-teste, as atividades foram ocorrendo em 4 encontros para cada um dos alunos (individualmente), não ocorrendo nos mesmos momentos, os quais foram registrados no quadro a seguir para cada um dos alunos.

Quadro 30 – Cronograma dos encontros para cada aluno

Alunos	1º encontro (pré-teste, 1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª atividades)	2º encontro (6ª e 7ª atividades)	3º encontro (8ª, 9ª e 10ª, atividades)	4º encontro (11ª e 12ª atividades e pós-teste)
A1	23/03/2021	24/03/2021	26/03/2021	29/03/2021
A2	23/03/2021	24/03/2021	25/03/2021	26/03/2021
A3	30/03/2021	01/04/2021	02/04/2021	03/04/2021
A4	05/04/2021	06/04/2021	07/04/2021	08/04/2021
A5	19/04/2021	21/04/2021	22/04/2021	24/04/2021
A6	16/04/2021	19/04/2021	22/04/2021	26/04/2021

Fonte: Autor (2021)

Os alunos A1 a A2 foram os primeiros em que foi aplicado o experimento. Após a aplicação com estes alunos, percebeu-se que a duração da atividade estava sendo em 4 encontros. As subseções apresentadas ao longo dessa seção descrevem como ocorreram esses encontros, expondo como os alunos reagiram nas atividades, bem como se os registros (escrito ou gravado) evidenciam que eles alcançaram ou não os objetivos esperados.

Durante a experimentação foi entregue o material de atividade para cada aluno, de acordo com a ocorrência de cada aula cuja ordenação se encontra no quadro anterior, por meio de encontros que ocorreram de modo individual a cada aluno, seguindo as normas de segurança (uso de mascara, álcool em gel e um certo distanciamento). Durante a ocorrência das aulas, os instrumentos de coleta dos dados foram gravador de voz, o próprio material de atividade onde contém os registros do preenchimento dos alunos e a observação dos aplicadores das atividades que descreveram os detalhes e acontecimentos das atividades em um texto (diário de campo).

Antes de iniciar a sequência didática, foi explicado aos alunos como seria ocorrido as atividades, para não gerar a impressão de atividade como teste de conhecimentos, mas sim como um conjunto de procedimentos no modelo de atividade que eles deveriam ir resolvendo com auxilio da calculadora e outros recursos, além de registrarem o que observações e conclusões sobre o que iam compreendendo.

Quanto ao cronograma da sequência didática, tem-se a seguir, um quadro expondo a duração em que ocorreu cada uma das atividades, agrupadas em seus respectivos encontros.

Quadro 31 – Duração do tempo de cada atividade

Encontro	Atividade – Tópico	Tempo
1º Encontro (Duração de 2h:10m)	1ª Atv - Dízimas Periódicas	20 min
	2ª Atv - Classificação de dízimas periódicas	20 min
	3ª Atv - Dízimas periódicas simples	30 min
	4ª Atv - Dízimas periódicas compostas	30 min
	5ª Atv - Números irracionais	30 min
2º encontro (Duração de 2h:00)	6ª Atv - Os Números Irracionais	1h 30min
	7ª Atv - Propriedades dos números irracionais.	30 min
3º encontro (Duração de 2h:30min)	8ª Atv - Propriedades dos números irracionais.	30min
	9ª Atv - Propriedades dos números irracionais	30min
	10ª Atv - O Número π	1h:30min
4º encontro (Duração de 1h:40min)	11ª Atv - O Número ϕ	1h
	12ª Atv - O Número e	40 min

Fonte: Autor (2021)

Diante dessas informações é possível ter uma ideia das atividades cuja aplicação durou mais tempo e as que foram mais rápidas. Mas essa estimativa de tempo ocorreu em função do tempo que os alunos levaram para resolver as atividades que se diferencia um pouco do tempo que havíamos planejado antes da aplicação.

5.1. Primeiro Encontro

No primeiro encontro, foram aplicadas as atividades 1, 2, 3, 4 e 5, bem como o pré-teste. As atividades desse encontro tiveram o objetivo de conduzir os alunos a descobrir métodos para converter dizimas periódicas em fração, e, com isso, perceber a impossibilidade de aplicação desse método para dízimas (racionais não exatos) que não tem repetição periódica, os direcionando, desse modo, à concepção do que é um número irracional.

Para facilitar a aquisição dos conhecimentos esperados nesse 1º encontro, foi disponibilizado um celular com a calculadora *app* “calculador e Identificador de racionais e irracionais” já instalado.

Tem-se a seguir as descrições das atividades referentes a esse encontro, bem como do pré-teste.

Pré-teste

Ao iniciar o primeiro encontro foi aplicado o pré-teste, onde não foi cedido informações acerca de números irracionais. Mas devido alguns alunos aparentarem preocupação por não saberem responder as questões do pré-teste, foi dito a eles que respondessem apenas as questões que soubessem, e se alguma questão transmitisse pouca lembrança ou nenhuma, que tentassem responder conforme a intuição, palpite ou simplesmente deixassem em branco. A duração em que ocorreu essa aplicação foi de no máximo 5 minutos. O quadro a seguir apresenta as respostas dos alunos.

Quadro 32 – respostas dos alunos no pré-teste

Quest	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Q1	Incógnita **(inválida)**	Não sei **(inválida)**	Não sei **(inválida)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**
Q2	**(identificou os racionais e irracionais de forma inválida)**	**(identificou os racionais e irracionais de forma inválida)**	**(identificou os racionais e irracionais de forma inválida)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(identificou os racionais e irracionais de forma inválida)**
Q3	0,333 0,444 1,555... **(inválida)**	Não sei **(inválida)**	Não sei **(inválida)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**
Q4	a) Possui dígitos se repetindo periodicamente e possui casas decimais infinitas. **(marcou a alternativa incorreta)** **(Inválida)**	a) Possui dígitos se repetindo periodicamente e possui casas decimais infinitas. **(marcou a alternativa incorreta)** **(Inválida)**	b) Não possui dígitos se repetindo periodicamente e possui casas decimais infinitas. **(marcou a alternativa correta)** **(Válida)**	b) Não possui dígitos se repetindo periodicamente e possui casas dec. infinitas. **(marcou a alternativa correta)** **(Válida)**	b) Não possui dígitos se repetindo periodicamente e possui casas decimais infinitas. **(marcou a alternativa correta)** **(Válida)**	b) Não possui dígitos se repetindo periodicamente e possui casas dec. infinitas. **(marcou a alternativa correta)** **(Válida)**

Q5 (V ou F) A B C D E F G H I	Acertou a maioria das situações por chute, mas as justificativas não eram corretas. **(inválida)**	Acertou a maioria das situações por chute de Verdadeiro ou Falso, mas não justificou. **(inválida)**	**(Errou a maioria por chute) (inválida)**	**(Não respondeu)**	**(Não respondeu)**	**(Errou a maioria por chute) (inválida)**
Q6	Exemplo de um número irracional 0,333 **(inválida)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	Aproximadamente 3,14 **(acertou parcialmente)**
Q7	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**
Q8	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	Pertencimento de conjunto **(inválida)**	**(não respondeu)**
Q9	Não denso **(inválida)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	Não denso **(inválida)**
Q10	Enumerável **(inválida)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	**(não respondeu)**	Não enumerável **(válida)**

Fonte: Autor (2021)

Assim como foi previsto, o desempenho dos estudantes não foi bom, houve poucas respostas válidas. Com exceção do Aluno A6 na questão 6, as únicas respostas válidas nas questões foram ‘chutes’ (palpites aleatórios sem vínculo com o conhecimento trabalhado). Isso foi comprovado pela fala deles, pois havia um diálogo constante dos alunos para com o aplicador da atividade, onde diziam não saber do assunto, que iam marcar qualquer uma das alternativas, que achavam que a resposta era algo que eles lembravam e que não tinham certeza.

1ª Atividade

Após a finalização da aplicação do pré-teste, foi passado o material da 1ª atividade para aos alunos, cujo objetivo era conceituar dizima periódica, seguido da explicação dos procedimentos, e o direcionamento para eles fazerem os cálculos no *app*. No primeiro contato deles com o *app*, foi solicitado para que observassem bem as informações que apareciam no visor do celular quando se faz algum calculo no *app*. Informações como: resultado da conta; identificação em racional exato, racional não exato ou irracional; e uma maior expansão decimal para resultados racionais não exatos e irracionais.

Essa atividade é constituída de uma folha com um quadro que requeria que os alunos determinassem os resultados de algumas divisões (na calculadora *app*), preenchessem no quadro os resultados e que indicassem se este resultado tinha casas decimais finitas ou infinitas.

Durante o preenchimento do quadro, os alunos respondiam de um modo muito prático, sem expressar dificuldade, já que o uso do *app* auxiliava nesse processo. Os termos “finitos” e “infinitos” eram conhecidos por todos os alunos, o que facilitou a leitura deles do quadro.

Após o preenchimento do quadro, os alunos tinham que escrever tudo que eles observaram, quanto às respostas escritas no quadro e outras percepções notadas por eles durante esse preenchimento. Eles expressaram dificuldade em organizar na forma escrita suas ideias, então foi solicitado que falassem primeiro suas observações para depois escreverem. Isso facilitou que a organização da escrita deles sobre o que era requerido.

Tem-se a seguir um quadro apresentando as observações respondidas pelos alunos, bem como uma análise dessas observações, se são validas e desejadas, parcialmente validas e desejadas ou invalidas.

Quadro 33 – Resposta dos alunos na 1ª Atividade

Alunos	Observações	Validade
A1	“Que os Números racionais são dízimas periódicas exatas e inexatas e não são irracionais como eu acreditava ser” “Todos são racionais, dividido em finitos e infinitos e a divisão de números iguais (normais) resultam em números racionais diferentes” “As dizimas são repetições infinitas”	Válidas e desejadas
A2	“Todos são racionais” “Alguns são finita outros são infinita” “Os números grandes são chamados dizima periódica e são todos infinitos e são repetidos”	Válidas e desejadas
A3	“Os racionais exatos são aquele finito, os racionais não exatos são aqueles infinitos (dízimas periódicas)”	Válida e desejada
A4	“Quando tem os três pontinhos é infinito e quando não tem é infinito, quando é infinito é racional não exato é quando é finito é exato”	Parcialmente válidas e desejadas, pois nenhuma das observações fala sobre repetição, mas a noção de ser infinito foi observada.
A5	“Que todos são racionais, o que muda é que alguns são exatos e outros são não exatos.” “Alguns são finitos outros são infinitos.”	Parcialmente válidas e parcialmente desejadas, pois

	"Todos os numeros não exatos são infinitos e os numeros exatos são finitos."	nenhuma das observações fala sobre repetição, mas a noção de ser infinito foi observada.
A6	"Muitos resultados fazem parte dos racionais, os inteiros e os números com virgula e números após a virgula com uma casa" "Números finitos são divisões inteiras perfeitas, números infinitos são divisões inteiras imperfeitas" "Todo racional não exato será uma dizima periódica"	Válidas e desejadas.

Fonte: Autor (2021)

Diante do objetivo dessa atividade, que é conceituar dizima periódica, percebe-se que ela direcionou os alunos compreenderem que dentre os resultados de divisões, existem aqueles que possuem casas decimais finitas e os que têm casas decimais infinitas. Com base nas observações dos alunos, é possível concluir que alcançaram uma compreensão que permite conceituar dizimas periódicas.

O uso do *app* permitiu que eles compreendessem que os não exatos também são chamados de dízimas periódicas, pois após escreverem as observações foi perguntado a eles se sabiam o que são dízimas periódicas, e pela fala deles notou-se que o termo "dizima periódica" foi bem assimilado por eles como sendo racional não exato (infinitas casas decimais). Entretanto somente os alunos A1, A2 e A6 perceberam que as dizimas periódicas são decimais com repetição infinita.

Aos alunos A4 e A5 cujas observações não denotavam a percepção de dizima periódica nos decimais infinitos e periódicos, foi pedido que explicassem oralmente sobre como eram os números não exatos, daí eles descreveram como sendo números infinitos e com repetição, ajudando com isso, a formalização do objetivo dessa atividade, conceituar dízimas periódicas.

Embora no pré-teste os alunos tenham demonstrado não saberem o que é número racional, percebeu-se pelas observações dos alunos e pelas falas deles que os termos "racional exato" e "racional não exato" que apareciam na calculadora em cada cálculo que realizavam, acabaram sendo assimilados por eles, bem como a associação entre a ideia de exato com casas decimais finitas e a associação de não exato com casas decimais infinitas.

Antes da realização dessa atividade, eles aparentavam preocupação em não saber realizar as atividades, mas ao finalizar ela, eles ficaram mais animados diante da simplicidade que ela representou, pois muitos deles entenderam que ela, bem como as outras, se tratava de uma atividade que eles podiam usar calculadora e depois descobrir uma certa regularidade nas respostas.

2ª Atividade

A 2ª atividade tinha o objetivo de classificar dízimas periódicas. Ela é constituída de uma folha com um quadro que requeria que os alunos determinassem os resultados de algumas divisões (na calculadora *app*) e preenchessem no quadro os resultados. A ideia planejada para essa atividade era que os alunos perceberem a existência de dízimas com repetições depois da vírgula (dizimas periódicas simples) e aquelas que possuem dígitos sem repetição após a vírgula seguidos da repetição (dizimas periódicas compostas).

Durante o preenchimento do quadro, os alunos respondiam sem dificuldade, já que o uso do *app* auxiliava nesse processo. Além disso, a facilidade percebida por eles na atividade anterior, também influenciou no estado de tranquilidade que eles aparentavam nessa atividade.

Após o preenchimento do quadro, os alunos tinham que escrever tudo que eles observaram, quanto às respostas escritas no quadro. Dessa vez, os alunos tiveram menor dificuldade em expor suas ideias de forma escrita, já que se tratava de uma etapa semelhante da atividade anterior.

Tem-se a seguir um quadro apresentando as observações respondidas pelos alunos, bem como uma análise dessas observações, se são validas e desejadas, parcialmente validas e desejada e, invalidas.

Quadro 34 - Resposta dos alunos na 2ª Atividade

Alunos	Observações	Validade
A1	"Todos são racionais infinitos que são dizimas periódicas" **"Ocorrem dizimas que possuem e não possuem o zero depois da virgula dependendo do número que os divide"** "A divisão de racionais exatos podem resultar em racionais inexatos, infinitos ou dízimas periódicas"	Válidas e desejadas
A2	**"Alguns tem o zero na frente e outros não"** **"Quando tem um zero Ex: $\frac{45}{90}$ ai da 0,0454545..."**	Válidas e desejadas
A3	**"Os números infinitos que não possuem zero, leva apenas um zero na frente"** **"Também observei que por mais que um resultado seja igual ao outro, difere bastante por conta de apenas um zero depois da outra"**	Válidas e desejadas

A4	"tudo infinito" "o primeiro é um um um" **"alguns zeros depois da virgula"**	Parcialmente válidas e desejadas, por não enfatizar com clareza a diferença entre dizimas periódicas
A5	"O resultado sempre é não exato e sempre dá o numero que é dividido" **"As vezes tem um zero após a virgula".**	Parcialmente Válidas e desejadas, por não enfatizar com clareza a diferença entre dizimas periódicas.
A6	"O resultado dependerá da quantidade de casas decimais da parte de baixo e todo numero que for na base 9 tera o numero da parte de cima se repetindo periodicamente"	Inválida, por indicar que toda fração de denominador 9 gera dizimas periódicas.

*as respostas em negrito são as que tiveram maior aproveitamento ao que era desejado como resposta.

Fonte: Autor (2021)

De acordo com as respostas dos alunos, bem como de suas falas, percebeu-se que eles tinham uma percepção, mesmo que algumas vezes pouco clara, de que existem dizimas periódicas com ou sem zero depois da virgula, fazendo referencia as dízimas periódicas compostas simpes e compostas. Isso foi interpretado por eles como algo incomum do que eles acreditavam ser dizima periódica, que era pra eles apenas um número com repetição infinita depois da vírgula.

Percebeu-se durante o preenchimento do quadro que alguns alunos já demonstravam ter uma previsão do resultado das razões sem ter que utilizar calculadora, como por exemplo, os alunos A1, A2 e A6. Quanto a essa observação surgiu duas consequências, uma boa e a outra ruim. A consequência boa foi que a capacidade de previsão do resultado sem utilizar a calculadora tornou o preenchimento dos alunos A1, A2 e A6 mais rápido. A consequência ruim foi que alguns alunos, como a A6, poderiam achar qualquer razão que tivesse 9 no denominador seria uma dízima, como por exemplo, a razão $\frac{18}{9}$ poderia ser previsto equivocadamente que seu resultado fosse 0,181818... A aluna A6 deixa essa compreensão bem clara na escrita se suas observações, conforme o quadro 34 mostra, porém os alunos A1 e A6 também tinham pensado nessa hipótese.

Como os alunos A1 e A2 foram os primeiros em que aplicamos a sequência didática, já havíamos previsto que os demais alunos poderiam criar as compreensões apresentadas anteriormente, por isso, desenvolvemos a seguinte estratégia: foi dado oportunidade a todos de fazer seus cálculos algumas vezes pela calculadora, outras vezes intuitivamente caso já tivessem previsto o resultado e, no final, alertamos que nem sempre essa previsão do resultado poderia estar correta, pois sem sempre quando se tem 9 no denominador vai necessariamente gerar dizimas periódicas, como por exemplo $\frac{18}{9}, \frac{27}{9}, \frac{9}{9}$.... Essa estratégia de contingência foi feita com os alunos A1 e A2, mas também foi utilizada com os demais, principalmente com a aluna A6 que escreveu em suas observações especificamente a compreensão equivocada de que quando se tem 9 no denominador sempre terá como resultado uma dízima periódica.

Quanta a aluna A6 que foi a única que não descreveu em suas observações nada que representasse uma diferenciação entre as dízimas periódicas, foi perguntado no final da atividade: todas as dízimas periódicas da atividade são semelhantes? Há diferença entre elas? Em meio a esses questionamentos, ela rapidamente notou que algumas dizimas periódicas tinham 0 entre a vírgula e o período e em outros casos não tinham.

Diante do objetivo dessa atividade, que é classificar dizimas periódicas, percebe-se que após ela, os alunos começaram a notar diferenças entre as dizimas periódicas, ou seja, as com repetição infinita imediata depois da virgula e as dizimas periódicas com números não repetidos entre a virgula e a repetição infinita. Permitindo, com isso, a explicação formal aos alunos sobre as partes que constituem dizimas periódicas (parte inteira, antiperíodo e período) e a classificação em dizimas periódicas simples e dizimas periódicas compostas.

3ª Atividade

A 3ª atividade, cujo objetivo era descobrir uma maneira de converter uma dízima periódica simples em fração, foi constituída de uma folha com um quadro que requeria que os alunos determinassem os resultados de algumas divisões (na calculadora *app*) e preenchessem no quadro os resultados.

A estratégia era que os alunos percebessem que há uma relação entre dízima periódica simples com a quantidade de 9’s que se apresenta no denominador da fração correspondente. Além disso, eles terão que indicar se os números decimais são dízimas periódicas ou não, de modo a perceber que nem toda vez que uma fração possui 9's no denominador o decimal correspondente será necessariamente uma dízima periódica.

Durante o preenchimento do quadro, os alunos respondiam sem dificuldade, já que o uso do *app* auxiliava nesse processo. Algumas vezes eles até deixavam de utilizar este recurso em situações em que eles já haviam previsto o resultado das divisões como, por exemplo, dois dos alunos perceberam que 23/99 só podia resultar na dízima 0,2323..., porém ao perceberem que nem todo fração com 9's no divisor resultavam em dizimas, então sempre pediam a calculadora para verificar se a resposta prevista estava correta.

O próprio preenchimento total do quadro já representou uma evidencia de que alcançaram o objetivo desta atividade, pois em situações que requeriam a fração de uma dizima apresentada, eles responderam de modo correto, alguns rapidamente, outros mais lento, mas todos conseguiam perceber a regularidade entre as dízimas periódicas simples e suas frações.

Ao terminarem o preenchimento do quadro, os alunos tinham que escrever tudo que eles observaram quanto às respostas escritas no quadro. Embora os alunos tivessem percebido a existência de uma regularidade entre as dízimas periódicas simples e suas frações, tiveram dificuldade em organizar de forma escrita as observações, pois haviam notado várias observações, mas não conseguiam organiza-las de modo claro. Nesse momento, todos falavam o que tinham observado, mas sempre era solicitado que escrevessem essas falas.

Tem-se a seguinte um quadro apresentando as observações respondidas pelos alunos, bem como uma análise dessas observações, em validas e desejadas, parcialmente validas e desejadas e validas e não desejadas.

Quadro 35 – Observações dos alunos na 3ª Atividade

Alunos	Observações	Validade
A1	"De acordo com o de cima será denominado o de baixo"	Parcialmente valida e desejada, por não expor com maior clareza, mas trazendo um pouco de sentido sobre o que se esperava.
A2	"Quando é só 9 é um numero, dois 99 é dois numeros e 999 é três numeros (período)"	Valida e desejada
A3	"Eu observei que as frações que tem apenas um único número na parte de baixo, apenas um número se repete, já quanto aos demais funcionam quase da mesma coisa. Os números são iguais"	Valida e desejada
A4	"Os numeros mudaram" "cada vez os numeros vão subindo 9 99 999"	Valida e não desejada
A5	"o numero que se repete é o de cima" "quando é so um 9 é porque tem um numero em cima, e quando tem 99 é porque tem dois numeros em cima, e assim por diante"	Válida e desejada
A6	"nem sempre quando tiver 9 em baixo vai ser uma dizima".	Válida e desejada

Fonte: Autor (2021)

Ao ler as observações dos estudantes, percebe-se que grande parte deles desenvolveu observações válidas e desejadas.

Além das observações foi requerido que eles apresentassem a conclusão que tiveram nesta atividade conforme o objetivo dela, em outras palavras, seria qual a maneira descoberta por eles para converter uma dízima periódica simples em fração. Tem-se a seguir um quadro sintetizando as respostas deles.

Quadro 36 - Conclusão dos alunos na 3ª Atividade

Alunos	Conclusões	Validade
A1	"0,812 812... $\frac{812}{999}$ deve ser colocado a repetição da fração dividida por 999 de acordo com o número de casas decimais igualando os de cima"	Válida e desejada
A2	"Coloca a mesma quantidade de 9 dos números de cima e os números que se repetem vão pra cima"	Válida e desejada
A3	"Bom o metodo que eu usei para transformar em fração, foi a seguinte todos os numeros se repetem, eu apenas peguei os numeros e deixava como fração, como a parte de baixo sempre se repetia eu fui seguindo o ritmo. Eu colocava os números dos que se repete, e com isso chegava a resposta. Era uma fração"	Válida e desejada
A4	"se tiver três bota três nove e assim por diante"	Parcialmente Válida e desejada, pois falta clareza na resposta.
A5	"Sempre quando tiver um numero em cima, o de baixo vai ser um 9, e assim por diante"	Válida e desejada
A6	"Quando tinha um numero no período relacionamos com um 9, quando tinha dois numeros no período relacionamos com um 99, e assim por diante".	Válida e desejada

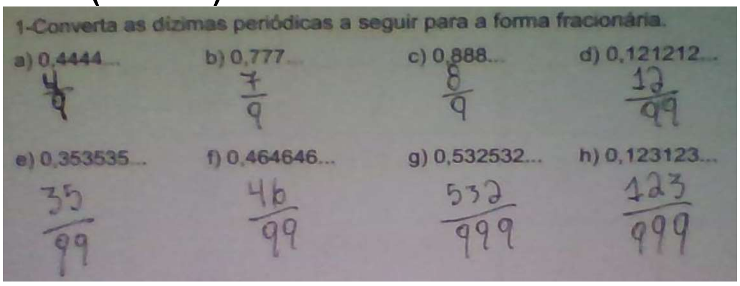
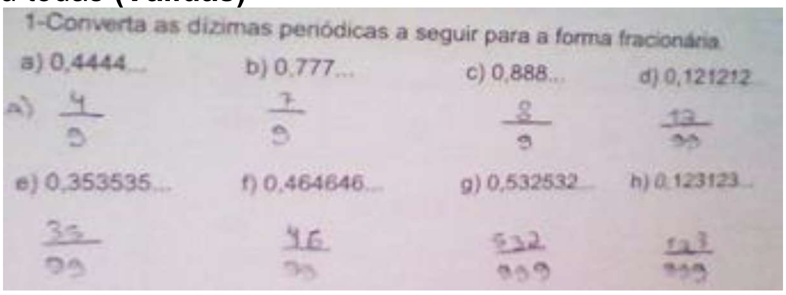
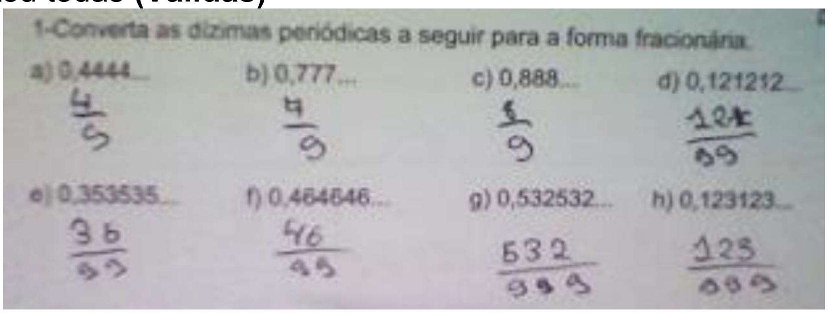
Fonte: Autor (2021)

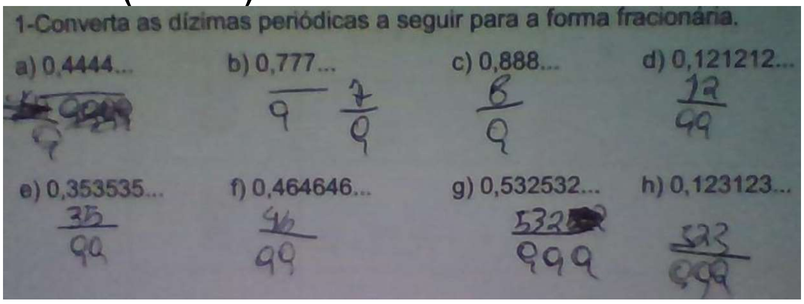
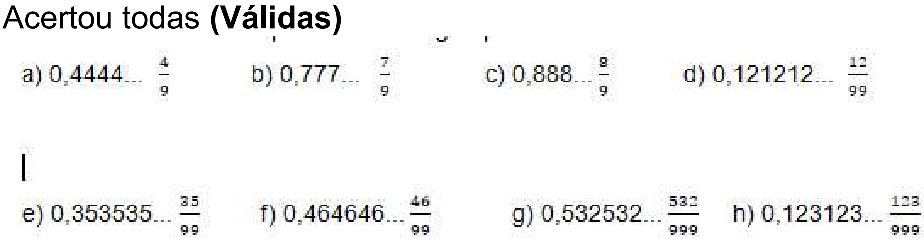
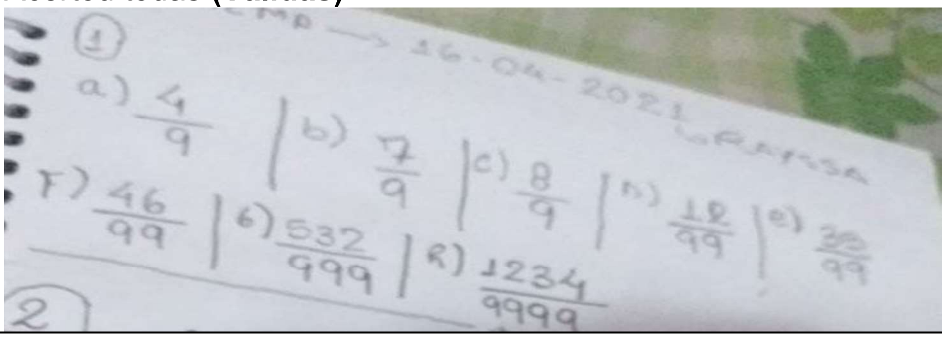
Alguns de modo mais claro, outros nem tanto, mas todos apresentaram conclusões validas que iam de acordo com o que era desejado para esta atividade.

Um fato interessante é que na atividade 2 anterior, a aluna A6 conseguiu chegar parcialmente na conclusão esperada para essa atividade, e desse modo ela tinha explicado verbalmente nessa atividade que já tinha percebido a conclusão que ela teve nessa atividade 3.

Uma comprovação de que esses alunos certamente alcançaram o objetivo da atividade foi os resultados da atividade de aprofundamento. Os quais foram sintetizados no quadro a seguir:

Quadro 37 - Resposta dos alunos na Atividade de aprofundamento da atividade 3

Alunos	Respostas
A1	Acertou todas **(Válidas)**  1-Converta as dízimas periódicas a seguir para a forma fracionária. a) 0,4444... 4/9 b) 0,777... 7/9 c) 0,888... 8/9 d) 0,121212... 12/99 e) 0,353535... 35/99 f) 0,464646... 46/99 g) 0,532532... 532/999 h) 0,123123... 123/999
A2	Acertou todas **(Válidas)**  1-Converta as dízimas periódicas a seguir para a forma fracionária a) 0,4444... a) 4/9 b) 0,777... 7/9 c) 0,888... 8/9 d) 0,121212 12/99 e) 0,353535... 35/99 f) 0,464646... 46/99 g) 0,532532... 532/999 h) 0,123123... 123/999
A3	Acertou todas **(Válidas)**  1-Converta as dízimas periódicas a seguir para a forma fracionária. a) 0,4444... 4/9 b) 0,777... 7/9 c) 0,888... 8/9 d) 0,121212... 12/99 e) 0,353535... 35/99 f) 0,464646... 46/99 g) 0,532532... 532/999 h) 0,123123... 123/999

<table>
<tr><td>A4</td><td>Acertou todas (Válidas)

</td></tr>
<tr><td>A5</td><td>Acertou todas (Válidas)

</td></tr>
<tr><td>A6</td><td>Acertou todas (Válidas)
</td></tr>
</table>

Fonte: Autor (2021)

Todos os alunos acertaram as questões, mas como pode-se ver nas resoluções deles, há algumas rasuras, isso porque houveram erros como confundir o período, como por exemplo, achar que o período de 0,121212... é 121, ao invés de 12. Mas, os alunos que cometiam esse erro demonstravam insegurança, por isso, sempre pediam a calculadora para verificar se as respostas estavam corretas, quando testavam as frações e percebiam que o resultado não era a dízima esperada, iam corrigindo seus erros, e quando percebiam novamente que estava errada, continuavam corrigindo e verificando na calculadora.

Mesmo os alunos que acertaram todas as questões na primeira resposta, utilizaram ao menos uma vez a calculadora para verificar se acertaram.

Uma observação intrigante foi que embora alguns alunos não tenham respondido de modo bem claro as observações e conclusões na atividade 3, conseguiram responder a atividade de aprofundamento com ótimo desempenho. Os alunos A4 e A5 se encaixam nessa descrição, porém as vezes pediam calculadora para verificar.

Ao final dessa atividade, percebeu-se que os alunos já sabiam converter dízimas periódicas simples em frações.

4ª Atividade

O objetivo da 4º atividade foi de que os alunos descobrissem uma maneira de converter uma dízima periódica composta em fração. Essa atividade utilizou uma abordagem similar ao da atividade 3, onde o aluno deve perceber a regra a partir da observação de sucessivas divisões.

A estratégia dessa atividade era que os alunos teriam que associar o período com a quantidade de 9's e também o antiperíodo com a quantidade de 0's após os 9's que se apresenta no denominador da fração correspondente. Além disso, eles terão que classificar os números decimais em dízimas periódicas ou não periódicas de modo a perceber que nem toda vez que uma fração possui 9's seguido de 0's no denominador o decimal correspondente será necessariamente uma dízima periódica composta.

Durante o preenchimento do quadro, os alunos respondiam sem dificuldade, já que o uso do *app* auxiliava nesse processo. Algumas vezes eles até deixavam de utilizar este recurso em situações em que eles já haviam previsto o resultado das divisões, mas testavam no *app* se o resultado era mesmo o que tinham respondido.

O próprio preenchimento total do quadro já representou uma evidencia de que já estavam se conduzindo para o objetivo desta atividade, pois em situações que requeriam a fração de uma dizima apresentada, eles responderam de modo correto, alguns rapidamente, outros mais lento, mas todos conseguiam perceber partes da regularidade entre as dízimas periódicas compostas e suas frações.

Ao terminarem o preenchimento do quadro, os alunos tinham que escrever tudo que eles observaram quanto às respostas escritas no quadro. Embora os alunos tivessem percebido a existência de uma regularidade entre as dízimas periódicas compostas e suas frações, tiveram dificuldade em organizar de forma escrita as observações, pois haviam notado várias observações, mas não conseguiam organiza-las de modo claro. Nesse momento, todos falavam o que tinham observado, mas sempre era solicitado que escrevessem essas falas.

Tem-se a seguir um quadro apresentando as observações respondidas pelos alunos, bem como uma análise dessas observações, em validas e desejadas, parcialmente validas e desejadas e validas e não desejadas.

Quadro 38 - Observações dos alunos na Atividade 4

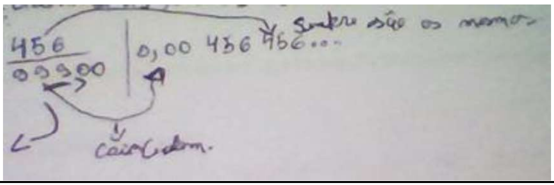
Alunos	Observações	Validade
A1	"Quando o número de casas decimais é igual (de cima e de baixo) a dizima se torna simples, porém quando há um zero a mais acaba se tornando composto" "De acordo com o número de casas decimais do antiperíodo afeta diretamente na fração, tornando-a maior com o antiperiodo (zero) depois do nove"	Válida e desejada
A2	"Sempre quando tiver 0 na fração sempre é o antiperíodo"	Válida e não desejada, por ser uma conclusão já obtida da atividade anterior
A3	"Eu observei que as frações na parte denominadora são basicamente as mesmas coisas. Porem muda com a quantidade de 0"	Parcialmente válida e desejada, por ser uma observação pouco clara, mas que reflete um pouco de sentido sobre o que se esperava
A4	"cada numero aumenta um zero" "os zeros depois da virgula bota no nove"	Válida e desejada
A5	"sempre depois da virgula tem um zero, dois zeros, e assim sucessivamente" "é praticamente a mesma coisa da simples" "os numeros de baixo os zeros são aqueles que estão depois da virgula"	Válida e desejada
A6	"Percebe-se que a quantidade de zeros no denominador será a quantidade de zeros que haverá após a virgula na dízima periódica"	Válida e desejada

Fonte: Autor (2021)

De acordo com as observações dos estudantes apresentadas no quadro, percebe-se que todos desenvolveram observações válidas e desejadas, porém alguns tiveram observações parcialmente válidas diante da falta de clareza.

Além das observações foi requerido que eles apresentassem a conclusão que tiveram nesta atividade conforme o objetivo dela, que refere-se à maneira descoberta por eles para converter uma dízima periódica composta em fração. Tem-se a seguir um quadro sintetizando as respostas deles.

Quadro 39 – Conclusões dos alunos na Atividade 4

Alunos	Conclusões	Validade
A1	“O período está ligado diretamente ao número de nove” “O antiperíodo está ligado diretamente ao número de zero”	Válida e desejada
A2	Tem que botar os números que se repetem em cima e em baixo tem que botar os nove os tantos do de cima e botar os zeros depois do nove, tem que ser o tanto do antiperiodo	Válida e desejada
A3	Exemplo: 	Válida e desejada
A4	“Os noves que se repetem e os zeros depois da virgula”	Inválida
A5	sempre depois da virgula tem um zero, dois zeros, e assim sucessivamente é praticamente a mesma coisa da simples os numeros de baixo os zeros são aqueles que estão depois da virgula	Válida e desejada
A6	Observar a quantidade de zeros, após a virgula da dízima, e colocar a mesma quantidade na base 9. Ex: 0,0034 → $\frac{34}{9900}$	Válida e desejada

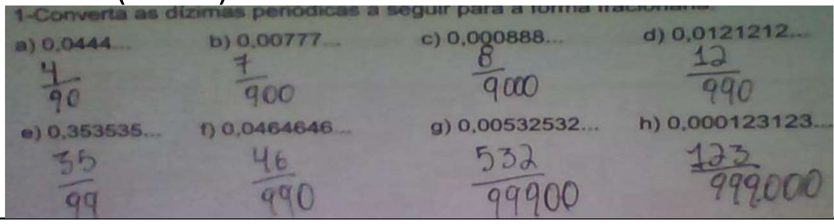
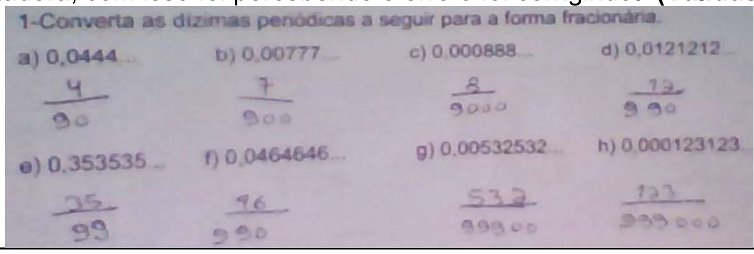
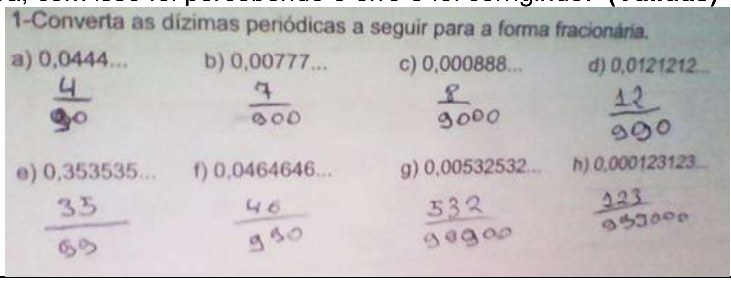
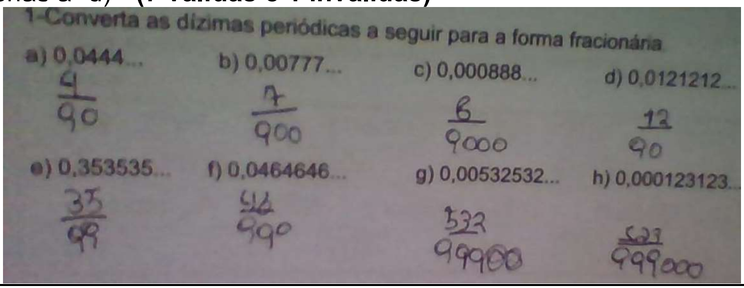
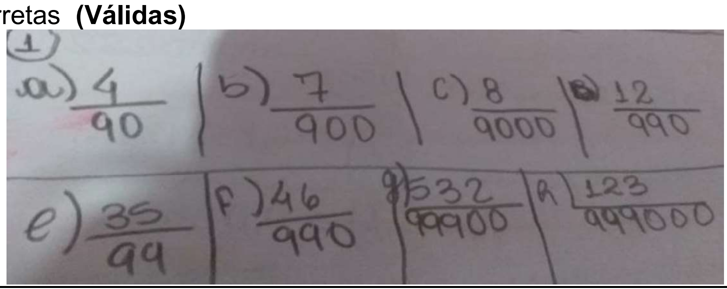
Fonte: Autor (2021)

Com exceção do aluno A4, a maioria dos alunos apresentaram conclusões validas que iam de acordo com o que era desejado para esta atividade. O aluno A4 apresentou uma conclusão que há muito pouco valor ou clareza sobre o que realmente se esperava, isso foi motivado pelo fato deste aluno ter dificuldade em saber se expressar de forma escrita, bem como na forma falada. Mas devido, ele ter completado o quadro desta atividade com facilidade, previu-se nesse momento que ele pudesse ter chegado à conclusão que se esperava, como os demais, mas não soube escreve-la.

Assim como na atividade anterior, a aluna A6 se destacou novamente ao declarar oralmente que já havia chegado as conclusões dessa atividade na atividade 2, pois ao fazer cálculos que resultavam em dízimas periódicas simples e outros que resultavam em compostas, tinha notado que a presença do zero após o 9 em situações como $\frac{2}{90}$ tinha relação no antiperíodo 0,0222...

Após concluir a atividade 4, foi passado uma atividade de aprofundamento para eles resolverem. As respostas deles foram sintetizados no quadro a seguir.

Quadro 40 – Respostas dos alunos na Atividade de Aprofundamento da Atividade 4

Alunos	Respostas da Atividade de Aprofundamento da Atividade 4
A1	Acertou todas **(Válidas)**  1-Converta as dízimas periódicas a seguir para a forma fracionária a) 0,0444... $\frac{4}{90}$ b) 0,00777... $\frac{7}{900}$ c) 0,000888... $\frac{8}{9000}$ d) 0,0121212... $\frac{12}{990}$ e) 0,353535... $\frac{35}{99}$ f) 0,0464646... $\frac{46}{990}$ g) 0,00532532... $\frac{532}{99900}$ h) 0,000123123... $\frac{123}{999000}$
A2	Acertou todas, mas inicialmente errou algumas, mas sempre pedia pra verificar na calculadora, com isso foi percebendo o erro e foi corrigindo. **(Válidas)**  1-Converta as dízimas periódicas a seguir para a forma fracionária. a) 0,0444... $\frac{4}{90}$ b) 0,00777... $\frac{7}{900}$ c) 0,000888... $\frac{8}{9000}$ d) 0,0121212... $\frac{12}{990}$ e) 0,353535... $\frac{35}{99}$ f) 0,0464646... $\frac{46}{990}$ g) 0,00532532... $\frac{532}{99900}$ h) 0,000123123... $\frac{123}{999000}$
A3	Acertou todas, mas inicialmente errou algumas, ele leu o esquema das conclusões obtidas por ele na atividade e começou a pedir pra verificar na calculadora, com isso foi percebendo o erro e foi corrigindo. **(Válidas)**  1-Converta as dízimas periódicas a seguir para a forma fracionária. a) 0,0444... $\frac{4}{90}$ b) 0,00777... $\frac{7}{900}$ c) 0,000888... $\frac{8}{9000}$ d) 0,0121212... $\frac{12}{990}$ e) 0,353535... $\frac{35}{99}$ f) 0,0464646... $\frac{46}{990}$ g) 0,00532532... $\frac{532}{99900}$ h) 0,000123123... $\frac{123}{999000}$
A4	Errou apenas a “d)” **(7 válidas e 1 inválidas)**  1-Converta as dízimas periódicas a seguir para a forma fracionária a) 0,0444... $\frac{4}{90}$ b) 0,00777... $\frac{7}{900}$ c) 0,000888... $\frac{8}{9000}$ d) 0,0121212... $\frac{12}{90}$ e) 0,353535... $\frac{35}{99}$ f) 0,0464646... $\frac{46}{990}$ g) 0,00532532... $\frac{532}{99900}$ h) 0,000123123... $\frac{123}{999000}$
A5	Errou somente a “g)” **(7 válidas e 1 inválidas)** 1-Converta as dízimas periódicas a seguir para a forma fracionária. a) 0,0444... $\frac{4}{90}$ b) 0,00777... $\frac{7}{900}$ c) 0,000888... $\frac{8}{9000}$ d) 0,0121212... $\frac{12}{990}$ e) 0,353535... $\frac{35}{99}$ f) 0,0464646... $\frac{46}{990}$ g) 0,00532532... $\frac{532}{9990}$ h) 0,000123123... $\frac{123}{999000}$
A6	Todas corretas **(Válidas)**  1 a) $\frac{4}{90}$ b) $\frac{7}{900}$ c) $\frac{8}{9000}$ d) $\frac{12}{990}$ e) $\frac{35}{99}$ f) $\frac{46}{990}$ g) $\frac{532}{99900}$ h) $\frac{123}{999000}$

Fonte: Autor (2021)

Os alunos A1, A2, A3 e A6 acertaram todas as questões, já os A4 e A5 acertaram quase todas, mostrando que eles chegaram ao objetivo esperado para esta atividade, mas por não se atentar ao período de um dos casos apresentados, acabaram não acertando todos.

Apenas o A2 e o A3 pediam a calculadora para verificar se as respostas estavam corretas, enquanto que os outros, respondiam com convicção de que tinham acertado.

Ao final dessa atividade, percebeu-se que os alunos já sabiam converter dízimas periódicas compostas em frações.

5ª Atividade

Este momento foi uma aula interativa com os estudantes, onde foram requisitados conhecimentos obtidos nas atividades anteriores, para que eles percebessem a impossibilidade de se escrever a fração de uma dízima que não é periódica.

Inicialmente foi apresentado aos alunos uma sequência de dizimas periódicas 0,333...; 0,3222...; 0,444.., para então perguntar quais as frações que correspondem a cada um deles. Após receber as respostas dos alunos, foi perguntado: Existem dízimas que não podem ser escritos como fração?

Ninguém respondeu essa pergunta, daí foi requisitado aos alunos que respondam a seguinte questão:

Questão: Sobre a dízima 0,12345678..., responda o que se pede.

a) É periódica? Caso responda sim, qual o número que se repete?

b) É possível transforma-la em fração?

A pergunta a) foi respondida de modo correto, mas quando tentaram escrever na forma de fração, conforme as regras para se determinar fração de dízimas periódicas, perceberam que quando não há período fica impossível de escrever a fração correspondente.

Diante disso, foi explicado superficialmente o que é um número irracional, sobre a impossibilidade de se escrever na forma de fração. E também foi pedido que eles tentassem formar exemplos desse tipo de número, algo que teve uma boa eficácia, pois fez eles se esforçarem para exemplificar irracionais.

Também foi exemplificado casos obtidos de radicais como $\sqrt{2}$ cujo resultado obedece a descrição de ser uma dízima não periódica. Mas tivemos cuidado para não gerar a impressão que todas as raízes são irracionais, para isso foi apresentado exemplos como $\sqrt{1}$ e $\sqrt{4}$ que são racionais, já que seus resultados não tem característica de irracional, mas sim de racionais exatos.

Também foi apresentado a eles o que acontece quando calculamos raízes não exatas na calculadora comum $\sqrt{2}$, onde nesse caso não vai haver indicação de que se trata de um resultado com infinitas casas decimais não periódicas, mas que devido a memória da calculadora ser limitada a quantidade de casas decimais desses números tem um certo limite, mas que se conclui que seja irracional por ter vírgula e suas casas decimais ocuparem todo o visor da calculadora, sendo não exato e não periódico.

Os alunos receberam bem esta atividade, embora já tivessem cansados pelo esforço em ter que raciocinar mais que o habitual, pois já fazia quase um ano que não participavam de aulas, já que desde o começo do ano passado os impactos da pandemia de COVID-19 fizeram com que as escolas desses alunos entrassem em recesso. Logo, esta atividade, bem como dessa Sequência Didática, direcionou estes alunos a assumir um papel mais ativo no processo de aprendizagem.

Previu-se que nessa atividade os alunos, principalmente os que estavam no 3º ano, tivessem alguma relembrança do que é número irracional, mas nem mesmo após conceituar esse tipo de número, nessa atividade, eles demonstraram familiaridade por já terem estudado.

5.2. Segundo Encontro

No segundo encontro, foram aplicadas as atividades 6 e 7. As atividades desse encontro buscaram conduzir os alunos compreenderem as características dos números irracionais, além de direciona-los a descobrir as propriedades operatórias da adição de números irracionais. Tem-se a seguir as descrições das atividades referentes a esse encontro.

6ª atividade

A atividade 6 teve o objetivo de apresentar a história dos números irracionais. Sua ocorrência dependeu da leitura de uma História em Quadrinhos chamada de Museu dos Irracionais (parte I), onde os personagens, ambientes e as situações foram conduzindo os leitores para conhecer e caracterizar os números irracionais, por meio da história dos Números Irracionais. Após a leitura os alunos foram direcionados a resolver uma lista de 9 questões relacionadas a leitura que fizeram.

Essas questões foram apresentadas a esses alunos, pra entender as contribuições que a leitura da HQ forneceu a eles, para que pudessem caracterizar os números irracionais sobre o conceito que os distingui dos racionais, sobre a representação geométrica de número irracional, sobre como tratá-los referente a percepção de proximidades, sobre a característica do conjunto dos números irracionais referente a cardinalidade, enumerabilidade e densidade.

Percebeu-se que os primeiros alunos (A1 e A2) leram a HQ e de fato se intrigavam, mas no final não lembravam o bastante para responder as questões, daí adotou-se a estratégia de fazer uma releitura conjunta e compassada, de modo que a cada pausa na leitura sempre era perguntado a eles, o que foi que você entendeu? Daí em diante foi adotada essa estratégia também com os demais alunos, pois previu-se que eles poderiam também ter essa dificuldade em reter informações na leitura.

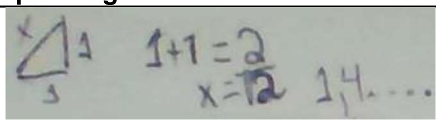
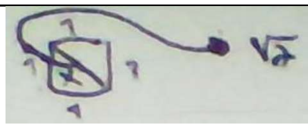
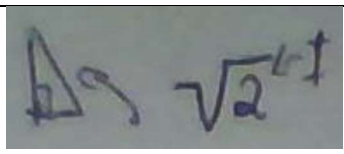
Com essa leitura conjunta e compassada, os alunos questionavam mais a leitura feita. O A1, por exemplo, após ler algumas páginas, comentou sobre não fazer sentido o fato dos irracionais serem um conjunto infinito maior que os conjuntos dos naturais, inteiros e racionais que também eram infinitos. Daí repetiu-se a leitura sobre o processo de diagonalização proposto por cantor, o que fez esse aluno ficar intrigado.

Os alunos compreenderam a leitura em HQ e se intrigaram com novas noções bastante interessantes como a ideia de existir distâncias que não se pode medir, a não enumerabilidade do conjunto dos irracionais que indica que não podem ser contados, a cardinalidade maior do conjunto dos irracionais se comparado aos racionais, e outras noções que dizem respeito do universo numérico dos números irracionais. Além de conhecerem sobre a história desse tipo de número.

Após a leitura, os estudantes responderam as 9 questões dessa atividade. Este momento foi muito importante porque os alunos descreveram o que entenderam e organizar as ideias sobre as características dos números irracionais

Quanto às questões de conceituação e aplicação de números irracionais que são respectivamente a 1ª e a 2ª, tem-se no quadro a seguir as respostas dos alunos.

Quadro 41 – Respostas dos alunos nas questões 1 e 2 da Atividade 6

Alunos	**1-O que é um número irracional?**	**2-Indique uma situação matemática em que surge um número irracional.**
A1	"Não pode ser colocado como fração" **(Válida)**	 (**Parcialmente Válida, por ter um erro ao aplicar o teorema de Pitágoras, mas acertou no resultado)**
A2	É um número que não pode ser contado, nem medido. **(Válida)**	 **(Válida)**
A3	São numeros infinitos quebrados que não podem ser medidos **(Válida)**	 **(Válida)**
A4	"não tem repetição infinita" "não tinha resultado" **(Válida)**	 **(Válida)**
A5	"É todo aquele que não há repetição, não consegue medir, não se consegue formar uma fração" **(Válida)**	"diagonal de um quadrado de lado 1" **(Válida)**
A6	São numeros que não podem ser escritos na forma de fração, que não podem ser contados, são infinintamente maiores que os racionais **(Válida)**	A diagonal de um quadrado de lado 1 **(Válida)**

Fonte: Autor (2021)

Devido a HQ conter multas ideias sobre os números irracionais, acreditou-se que pelos menos uma delas poderiam ser apresentadas como resposta dos alunos para as questões 1 e 2. Daí, com base nas respostas dos alunos apresentadas no quadro, percebe-se o que cada um assimilou com a leitura, referente a informações que podiam servir para conceituar números irracionais (1ª questão) e para indicar uma situação matemática em que surge um número irracional (2ª questão).

Referente a 1ª questão, os alunos conseguiram de fato lembrar algumas informações importantes sobre o conceito de irracional, como: Números que não podem ser escritos como fração (A1, A5 e A6); Números que não podem ser medidos (A2, A5 e A3); Números que não podem ser contados (A2 e A6); Números sem representação periódica e exata (A4 e A5); números cuja totalidade tem cardinalidade maior que dos racionais (A6). Essas informações conceituais evidenciam que eles sabem o que é irracional, por meio de várias características ligadas a seu conceito que assimilaram com a leitura da HQ.

Referente a 2ª questão, as informações do quando mostram que a maioria teve lembranças das ilustrações da HQ a ponto de lembrarem do desenho que indica a situação matemática que surge números irracionais, especificamente o primeiro irracional comentado na história, que foi o $\sqrt{2}$.

Quanto às questões de identificação e exemplificação de números irracionais que são respectivamente a 3ª e a 4ª, tem-se no quadro a seguir as respostas dos alunos.

Quadro 42 - Respostas dos alunos nas questões 3 e 4 da Atividade 6

Alunos	**3-Indique os números do quadro a seguir que são números racionais e os que são números irracionais.**	**4 – Escreva exemplos de números irracionais**
A1	(Circulou corretamente os racionais e irracionais, mas pedia a calculadora (calculadora comum) para verificar se algumas raízes tinham resultados exatos, possibilitando identificar alguns irracionais). **(válidas)**	Citou os exemplos: $\sqrt{8}$, $\sqrt{21}$ e $\sqrt{15}$. **(válidas)**
A2	(Circulou corretamente os racionais e irracionais, embora tenha tido inicialmente alguns erros onde classificava racionais como sendo irracional, mas quando confrontado com perguntas como "quem são os irracionais que você lembra de ter conhecido na história?" "quem são os racionais que você conhece?" ele lembrou das raízes não exatas e dos racionais exatos e não exatos, daí corrigiu os erros). **(válidas)**	Citou os exemplos: $\sqrt{17}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{44}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, mas quando tinha duvida pedia pra calcular na calculadora pra verificar se o resultado era não periódico e infinito. **(válidas)**
A3	(Circulou corretamente os racionais e irracionais, embora tenha tido inicialmente alguns erros onde classificava racionais como sendo irracional, mas quando confrontado com perguntas como "quem	Citou os exemplos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{15}$, $-\sqrt{17}$ e 0,123....

	são os irracionais que você lembra de ter conhecido na história?” “quem são os racionais que você conhece?” ele lembrou dos racionais exatos e não exatos com repetição, daí corrigiu os erros). **(válidas)**	**(válidas)**
A4	(Circulou corretamente os racionais e irracionais, mas inicialmente teve alguns erros sobre os racionais, diante disso pediu a calculadora pra identificar racionais, diante disso foi mostrado exemplos na calculadora que o fez lembrar dos racionais exatos e não exatos já vistos por ele, o fez marcar identificar corretamente os racionais, quanto os irracionais, ele pedia a calculadora (calculadora comum) para verificar se algumas raízes tinham resultado exato, possibilitando identificar alguns irracionais). **(válidas)**	Citou os exemplos: 0,505152... e $\sqrt{2}$ **(válidas)**
A5	(Circulou corretamente os irracionais, mas inicialmente ficou confundindo as dizimas periódicas com irracionais, entretanto foi perguntado se essa aluna lembrava da atividade 1 referente aos racionais exatos e não exatos que tinha visto na calculadora, então rapidamente ela lembrou que as dizimas periódicas são racionais, especificamente racionais exatos que essa aluna lembrava. Também pediu a calculadora (calculadora comum) para verificar se algumas raízes tinham resultado exato ou não exato). **(válidas)**	Citou os exemplos: $\sqrt{20}$ 3,34527.... 5,3456.... $\sqrt{29}$ **(válidas)**
A6	(Circulou corretamente os racionais e irracionais, mas pedia a calculadora para verificar se algumas raízes tinham resultados exatos, possibilitando identificar alguns irracionais). **(válidas)**	Citou os exemplos: π $\sqrt{5}$ 0,152013... **(válidas)**

Fonte: Autor (2021)

Na 3ª questão ajudou os alunos a desenvolverem uma organização dos conhecimentos a respeito da identificação se um número é racional ou irracional. Eles acertavam a classificação de alguns casos, erravam outros e corrigiam seus erros com base em intervenções superficiais como: Quem são os irracionais que você lembra de ter conhecido na história? Quem são os racionais que você conhece?

Um fato interessante é que todos os alunos pediam calculadora, em alguns momentos, para verificar se algumas raízes tinham resultados exatos ou não, possibilitando identificar alguns irracionais. Nessas situações não foi utilizado o *app* calculadora, mas sim uma calculadoras simples, pois queríamos que eles observassem os resultados e verificassem se atendem a característica de ser irracional.

Todo esse trabalho exercitou a capacidade de identificar números irracionais e também ajudou na resolução da 4ª questão, que requeria exemplos de números irracionais diferentes dos apresentados na 3ª questão. Como pode-se ver no quadro, os alunos responderam a 4ª questão sem errar, pois os exemplos de número irracionais apresentados por eles estavam corretos

Quanto às questões de enumerabilidade, que são as 5ª, 6ª e 7ª, tem-se no quadro a seguir as respostas dos alunos.

Quadro 43 - Respostas dos alunos nas questões 5, 6 e 7 da Atividade 6

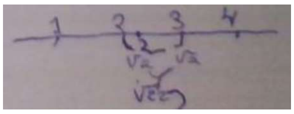
Alunos	**5 – O conjunto dos números Inteiros é enumerável ou não enumerável?**	**6–O conjunto dos números Racionais é enumerável ou não enumerável?**	**7 – O conjunto dos números Irracionais é enumerável ou não enumerável?**
A1	"é enumerável" **(válida)**	"é enumerável" **(válida)**	"não enumerável" **(válida)**
A2	Sim, porque ele pode ser contado **(válida)**	Sim, porque ele pode ser contado **(válida)**	Não porque ele não pode ser contado **(válida)**
A3	Enumerável **(válida)**	Enumerável **(válida)**	não Enumerável **(válida)**
A4	"enumerável porque pode ser contado" **(válida)**	"enumeráveis" **(válida)**	"enumeráveis" **(inválida)**
A5	Enumerável **(válida)**	Enumeráveis **(válida)**	Não-Enumeráveis **(válida)**
A6	Enumeráveis **(válida)**	Enumeráveis **(válida)**	Não-Enumeráveis **(válida)**

Fonte: Autor (2021)

Todos os alunos tiveram dificuldade nessas questões, diante disso, foi lembrado a eles que um conjunto enumerável significa o mesmo que conjunto contável (que pode ser contado), com isso eles rapidamente lembraram dos trechos da HQ que tratava desse assunto e responderam essas questões com maior certeza. Houve somente um erro, o aluno A4 errou na questão 7, pois teve alguns problemas em entender algumas compreensões da HQ, devido ter fortes dificuldades em ler (e inscrever) e com isso não conseguir assimilar todas as ideias apresentadas na HQ.

Quanto às questões sobre cardinalidade e densidade que são, respectivamente, a 8ª e a 9ª, tem-se no quadro a seguir as respostas dos alunos.

Quadro 44 - Respostas dos alunos nas questões 8 e 9 da Atividade 6

Alunos	**8-Qual conjunto tem maior cardinalidade, o conjunto dos números racionais ou o conjunto dos números irracionais?**	**9-O conjunto dos números Irracionais é denso ou não denso? Por que?**
A1	"irracionais" **(válida)**	"É denso, pois há uma infinidade de números dentre qualquer comparação entre números" **(válida)**
A2	"Irracionais porque tem muito numero a ser descontado que não pode ser contado" **(válida)**	"Denso porque quando pega dois numeros irracionais exite infinitos irracionais" **(válida)**
A3	"numeros Irracionais" **(válida)**	Denso  **(válida)**
A4	"irracional infinito maior" **(válida)**	"Denso" **(válida)**
A5	"Irracionais" **(válida)**	"Denso" **(válida)**
A6	"Irracionais" **(válida)**	"Denso" **(válida)**

Fonte: Autor (2021)

Todos os alunos acertaram a 8ª e a 9ª questões, o que mostra que lembravam das compreensões de cardinalidade (quantidade de elementos) e densidade. Eles se lembravam porque ao ler os trechos da HQ sobre esses assuntos era perguntado pelo professor o que eles entenderam. O exercício de falar o que entenderam os ajudou a organizarem as ideias assimiladas na leitura. Os alunos A5 e A6, por exemplo, faziam questionamentos orais como:

A6 se referiu à cardinalidade dos irracionais: "não sabia que os irracionais eram maiores?";

A5 se referiu à densidade: "então quer dizer que tem infinitos dentro desses irracionais, é isso?".

Esses questionamentos evidenciaram uma surpresa a essas alunas sobre os conceitos abordados na leitura, indicando que essas alunas, bem como os outros, compreenderam as noções de cardinalidade e densidade dos irracionais.

7ª atividade

Na atividade 7, o aluno deveria descobrir uma propriedade de adição envolvendo Números Irracionais, que é o fato de não obedecer à propriedade do fechamento para a operação de adição e a propriedade da pertinência irracional na adição entre racional e irracional.

Os participantes preencheram o quadro, onde realizaram várias adições entre irracionais e entre racionais e irracionais, utilizando a calculadora *app*, que fornecia o resultado e a classificação deste em racional ou irracional. Três alunos da amostra preferiam identificar se os resultados eram racionais ou irracionais partindo da observação do próprio resultado. Outros simplesmente focavam na identificação fornecida por essa calculadora.

Após o preenchimento do quadro, os discentes descreveram a observação deles sobre o que responderam no quadro que possa ser interpretado como uma regularidade e depois escreveram as conclusões, entretanto as observação e conclusões tiveram as mesmas respostas. Tem-se a seguir um quadro expondo essas respostas.

Quadro 45 - Observações e conclusões dos alunos na Atividade 7

Alunos	Observações / Conclusões	Validade
A1	“A soma de um número racional com um irracional não varia no resultado. Porém a de dois pode variar, sendo racional ou irracional”	Valida e desejada
A2	“é que na maioria das vezes o numero da irracional quando faz a soma de dois irracionais” “na soma de racional e irracional sempre da irracional”	Válida e desejada
A3	“eu observei que somar um número irracional com um irracional, não afeta em nada na possibilidade daquele numero se tornar Racional”	Inválida, pois a soma de dois números pode ser racional ou irracional
A4	“Um irracional e outro racional da irracional sempre” “quando os dois são irracionais quando tem raiz quadrada e outro - fica racional”	Válida e desejada
A5	“na maioria das vezes quando os dois são irracionais a soma da irracional, mas as vezes da racional” “sempre a soma de racional com um irracional a soma da irracional”	Válida e desejada
A6	“o resultado quando somamos dois irracionais a maioria das vezes da irracional, quando somamos dois números iguais com sinais diferentes da um numero racional” “quando somamos um numero racional com um numero irracional temos como resultado um numero irracional”	Válida e desejada

Fonte: Autor (2021)

Os alunos tiveram um bom desempenho em observar e concluir o que se esperava. Vale acrescentar que a utilização da calculadora de irracionais foi imprescindível para esse bom desempenho, pois facilitou o preenchimento do quadro.

Somente o aluno A3 escreveu uma resposta inválida, mesmo em suas falas e ações ele tenha mostrado que tinha chegado à conclusão esperada durante o preenchimento do quadro da questão. Assim percebeu-se que ele simplesmente não conseguir formular melhor a sua escrita para expressar o que de fato tinha concluído, mas melhorou nas atividades posteriores.

Uma observação interessante é que algumas vezes os alunos chamavam um número irracional de “i” e um número racional de “ra”, isso foi algo que pareceu ter facilitado a organização das ideias deles na hora de escrever as conclusões. Mas foram direcionados a escreverem nas conclusões esses nomes na forma adequada, ou seja, racionais e irracionais nas conclusões.

Ao final dessa atividade, foi apresentado a seguinte situação sem uso de calculadora: se realizarmos a adição 1 + 1,123456..., onde o primeiro é racional e o segundo é irracional, o que você acha que acontece com o resultado? Será que ao calcular essa soma, o racional 1 consegue afetar a parte não periódica do irracional 1,123456... de modo que o resultado seja racional?

A resposta dos alunos foi “não”. Nesse momento demonstraram um semblante intrigado, pois eles perceberam que o resultado seria 2,123456... que é irracional, que significa que racional não consegue afetar a parte não periódica a ponto de elimina-la. Essa conclusão esclareceu o porquê da conclusão obtida anteriormente, quanto a propriedade da pertinência irracional na adição entre racional e irracional.

5.3. Terceiro Encontro

No terceiro encontro, foram aplicadas as atividades 8, 9 e 10. As atividades 8 e 9 buscaram dar continuidade a atividade 7 sobre a condução dos alunos a descobrirem as propriedades operatórias, que agora nesse momento tratavam da multiplicação e divisão de números irracionais. A atividade 10 tratou sobre apresentar aos alunos o número π. Tem-se a seguir as descrições das atividades referentes a esse encontro.

8ª atividade

Na atividade 8, o aluno deveria descobrir uma propriedade de multiplicação envolvendo Números Irracionais, que é o fato de não obedecer a propriedade do fechamento para a operação de multiplicação e a propriedade da pertinência irracional na multiplicação entre racional e irracional.

De forma semelhante à atividade 7, os participantes preencheram o quadro da atividade 8, onde realizaram várias multiplicações entre irracionais e entre racionais e irracionais, utilizando a calculadora *app*, que fornecia o resultado e a classificação deste em racional ou irracional. Três alunos da amostra preferiam identificar se os resultados eram racionais ou irracionais partindo da observação do próprio resultado. Outros simplesmente focavam na identificação fornecida por essa calculadora.

Após o preenchimento do quadro, os discentes descreveram a observação deles sobre o que responderam no quadro que possa ser interpretado como uma regularidade, e depois responderam a conclusão, entretanto, eles indicaram as conclusões como sendo as próprias observações feitas. Tem-se a seguir um quadro expondo essas respostas.

Quadro 46 - Observações e conclusões dos alunos na Atividade 8

Alunos	Observações / Conclusões	Validade
A1	"Multiplicação é a mesma que a soma devido a não mudar um número infinito irracional" "Irracional com irracional é variante"	Valida e desejada
A2	"Na maioria das vezes da irracional mas também pode ser racional, quando são irracionais" "Quando é racional e irracional sempre da irracional na multiplicação"	Válida e desejada
A3	"Quando multiplicamos dois irracionais nem sempre a multiplicação também se torna irracional" "E quando multiplicamos um racional com um irracional temos total certeza que sempre dará irracional"	Válida e desejada
A4	"Quando uma raiz irracional com outra igual da racional" "Sempre que um é racional e um é irracional da irracional"	Válida e desejada
A5	"Da diferente quando multiplica iguais, quando é irracional com irracional" "Multiplicação de irracional com irracional nem sempre dá irracional, pois quando são raízes iguais o resultado é racional" "Sempre da irracional, quando multiplica racional e irracional"	Válida e desejada
A6	"O mesmo que acontece com a adição"	Válida e desejada

Fonte: Autor (2021)

As respostas dos alunos indicam que eles tiveram um bom desempenho em observar e concluir o que se esperava. Durante o desenvolvimento dessa atividade, todos denotavam em suas falas as conclusões que se esperava. Vale acrescentar que o uso da calculadora de irracionais foi muito importante para a eficácia dessa atividade.

Além disso, todos os alunos perceberam uma certa semelhança com as conclusões obtidas na atividade anterior, o A6, por exemplo, escreveu "O mesmo que acontece com a adição". Quanto aos outros, apenas faziam alguns comentários no final da atividade ressaltando essa semelhança, como por exemplo:

A1 - "parece o mesmo que acontece com a adição"

A2 – "parece a mesma coisa"

A3- "na próxima atividade de divisão é o mesmo que acontece com a adição e multiplicação?"

A4 – "é o mesmo"

A5 – "é o mesmo? a adição, multiplicação e divisão"

Esses comentários indicam uma compreensão importante que evidenciou que eles estavam usando a intuição para saber quais possíveis conclusões poderiam tirar na próxima atividade referente a operação de divisão.

Uma observação interessante é que, da mesma forma que ocorreu na atividade 7, a maioria dos alunos chamavam um número irracional de "i" e um número racional de "ra". Pareceu ser uma forma de eles facilitarem a organização das ideias na hora de escrever as conclusões. Mas foram direcionados a escreverem nas conclusões esses nomes na forma adequada, ou seja, racionais e irracionais nas conclusões.

Ao final dessa atividade, foi apresentado a seguinte situação sem uso de calculadora: se realizarmos a multiplicação 2 x 1,123456..., onde o primeiro é racional e o segundo é irracional, o que você acha que acontece com o resultado? Será que ao calcular esse produto, o racional 2 consegue afetar a parte não periódica do irracional 1,123456... de modo que o resultado seja racional?

Somente os alunos A1 e A6 responderam adequadamente como "não" Nesse momento demonstraram um semblante intrigado, pois eles perceberam que o resultado seria 2,246... que é irracional, que significa que racional não consegue afetar a parte não periódica a ponto de elimina-la, da mesma forma que na adição.

A maioria não tinha muitos conhecimentos quanto à multiplicação de decimais. Portanto, foi realizado essa conta na frente deles para ver se eles notavam a mesma coisa que os alunos A1 e A6. E de fato notaram. Essa conclusão esclareceu o porquê da conclusão obtida anteriormente, quanto a propriedade da pertinência irracional na multiplicação entre racional e irracional.

9ª atividade

Na atividade 9, o aluno deveria descobrir uma propriedade de divisão envolvendo Números Irracionais, que é o fato de não obedecer a propriedade do fechamento para a operação de divisão e a propriedade da pertinência irracional na divisão entre racional e irracional.

De forma semelhante às atividades 7 e 8, os participantes preencheram o quadro da atividade 9, onde realizaram várias divisões entre irracionais e entre racionais e irracionais, utilizando a calculadora *app*. Antes de finalizar o preenchimento do quadro, todos já tinham demonstrado quais as conclusões se obteria.

Após o preenchimento do quadro, os discentes descreveram a observação deles sobre o que responderam no quadro que possa ser interpretado como uma regularidade, e depois responderam o que concluíram com essas observações, porém eles indicaram que as conclusões eram as próprias observações. Tem-se a seguir um quadro expondo essas respostas.

Quadro 47 – Observações e conclusões dos alunos na Atividade 9

Alunos	Observações / Conclusões	Validade
A1	"A divisão em poucos casos de dois irracionais pode ser racional, mais na maioria das vezes é irracional, racional com irracional sempre será irracional devido a não afetar na disima"	Valida e desejada
A2	"Quando os dois são irracionais pode da racional ou irracional na divisão. e quando divide um racional e um irracional da irracional"	Válida e desejada
A3	"Eu observei que não importa se é soma, multiplicar, ou dividir, os irracionais sempre ganham os racionais, tem exceções que é no caso se for um irracional com outro irracional"	Válida e desejada

A4	"Quando os dois são irracionais igual da racional" "todas as vezes que um for irracional e o outro racional da irracional"	Válida e desejada
A5	"Um irracional dividido por ele mesmo da racional" "É praticamente a mesma coisa da multiplicação e da adição, so muda a operação"	Válida e desejada
A6	"Semelhante ao que acontece com a adição e multiplicação"	Válida e desejada

Fonte: Autor (2021)

As respostas dos alunos mostraram que tiveram um bom desempenho em observar e concluir o que se esperava. Muitas vezes previam quais observações e conclusões teriam nessa atividade antes de realiza-la, pois ao passarem pelas atividades 7 (adição) e 8 (multiplicação), as conclusões eram semelhantes, então possivelmente seriam semelhantes ao da atividade 9 referente a divisão. Desse modo essa atividade durou menos tempo que as atividade 7 e 8.

Uma observação interessante é que conclusões dessa atividade foram retomadas nas atividades 10 e 11, pois as compreensões dessas atividades tratavam de números irracionais obtidos de razões, o π que é a razão entre o comprimento da circunferência pela medida de seu diâmetro, e o ϕ que é obtido da razão $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Assim, as atividades 10 e 11 ajudaram a aprofundar os conhecimentos adquirido pelos alunos na atividade 9, da mesma forma que esses mesmos conhecimentos foram pré-requisitos importantes para que os alunos fossem convencidos da irracionalidade do π e do ϕ.

Ao final dessa atividade 9, bem como das atividades 7 e 8, todos os alunos já tinham uma ideia intuitiva que o racional não consegue afetar a parte não periódica do irracional para tornar o resultado racional, na adição, subtração e divisão.

Atividade de Aprofundamento das Atividades 7, 8 e 9

Os alunos resolveram questões para aprofundar os conhecimentos adquiridos nas atividades 7, 8 e 9.

Quanto à atividade de aprofundamento da atividade 7 sobre a propriedade operatória da adição envolvendo irracionais e racional e irracional, tem-se o quadro a seguir apresentando as respostas dos alunos.

Quadro 48 - 1ª seção (adição) – Atividade de aprofundamento da atividade 7

Quest		A1	A2	A3	A4	A5	A6
1	a)	Falso, o resultado é variante **(Válida)**	Falso, porque também da racional **(Válida)**	Falso, nem sempre irracional com irracional vai da irracional **(Válida)**	Falso **(Válida)**	Falso, nem sempre da irracional **(Válida)**	Falso **(Válida)**
	b)	Falso, somado um número racional com um irracional sempre resultará em um irracional **(Válida)**	Falso, porque só da irracional **(Válida)**	Falso **(Válida)**	Falso **(Válida)**	Falso, porque dá irracional **(Válida)**	Falso **(Válida)**
	c)	Verdadeiro, a soma dos dois resulta sempre em um nº irracional **(Válida)**	Verdadeiro, porque só da irracional **(Válida)**	Verdadeiro **(Válida)**	Verdadeiro **(Válida)**	Verdadeiro , porque dá irracional **(Válida)**	Verdadeir o **(Válida)**
2	a)	Irracional, devido ao 5 não possuir raiz quadrada **(Válido)**	é irracional, porque um deles é irracional **(Válido)**	Irracional por causa do $\sqrt{5}$ **(Válido)**	Irracional por causa da raiz de $\sqrt{5}$ **(Válido)**	Irracional porque não da valor exato **(Válido)**	Irracional, porque a soma de um R e um I sempre da Irracional **(Válido)**
	b)	Racional, pois possui raiz quadrada **(Válido)**	é racional, porque todos são racionais **(Válido)**	Racional, porque todos são racionais **(Válido)**	Racional **(Válido)**	Racional, o resultado deu racional **(Válido)**	Racional, porque a rais de 4 é racional exato **(Válido)**
	c)	Racional $-\sqrt{2}+\sqrt{2}+3+1$ **(Válido)**	é racional, porque quando os irracionais diminuem nessa conta da zero e não sobra nem um irracional **(Válido)**	Racional, nem sempre, nesse caso irracional com irracional da irracional **(Válido)**	Racional **(Válido)**	Racional, porque as duas raízes diminuem e dão zero **(Válido)**	Racional **(Válido)**
	d)	Irracional, devido as expressões não mudar o fato que cinco não possui raiz quadrada. **(Parcialmente válido)**	Irracional **(válido)**	**(não respondeu por não lembrar de expressão algébrica)**	Irracional **(válido)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**

Fonte: Autor (2021)

Quanto à atividade de aprofundamento da atividade 8 sobre a propriedade operatória da multiplicação envolvendo irracionais e racional e irracional, tem-se o quadro a seguir apresentando as respostas dos alunos.

Quadro 49 - 2ª seção (multiplicação) **–** Atividade de aprofundamento da atividade 8

Quest		A1	A2	A3	A4	A5	A6
1	a)	Falso, devido variar Racional e Irracional **(Válido)**	Falso, porque também da racional **(Válido)**	Falso **(Válido)**	Falso **(Válido)**	Falso **(Válido)**	Falso **(Válido)**
	b)	Falso, a multiplicação entre eles sempre resulta em irracional **(Válido)**	Falso, só da irracional **(Válido)**	Falso **(Válido)**	Falso **(Válido)**	Falso **(Válido)**	Falso **(Válido)**
	c)	Verdadeiro, a multiplicação entre eles sempre resulta em irracional **(Válido)**	Verdadeiro, porque só da irracional **(Válido)**	Verdadeiro **(Válido)**	Verdadeiro **(Válido)**	Verdadeiro **(Válido)**	Verdadeiro **(Válido)**
2	a)	Irracional, por ter um irracional, resultando sempre em irracional **(Válido)**	Irracional por causa da $\sqrt{5}$ **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**
	b)	Irracional, por ter um irracional, resultando sempre em irracional **(Válido)**	Irracional por causa da $\sqrt{3}$ **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	Racional **(Inválido)**	Irracional **(Válido)**
	c)	Racional, devido a multiplicação de dois irracionais dar em um número racional resultando em racional **(Válido)**	Racional $\sqrt{2}$ x $\sqrt{2}$ = $\sqrt{4}$ = 2 **(Válido)**	Racional **(Válido)**	Racional **(Válido)**	Irracional **(Inválido)**	Racional **(Válido)**
	d)	Irracional, por ter um irracional, resultando sempre em irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	**(Não respondeu por não lembrar de expressão algébrica)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**

Fonte: Autor (2021).

Quanto à atividade de aprofundamento da atividade 9 sobre a propriedade operatória da divisão envolvendo irracionais e racional e irracional, tem-se o quadro a seguir apresentando as respostas dos alunos.

Quadro 50 - 3ª seção (divisão) **–** Atividade de aprofundamento da atividade 9

Quest		A1	A2	A3	A4	A5	A6
1	a)	Falso, devido a ser um resultado variante Racional e Irracional **(Válido)**	Falso, porque também da racional **(Válido)**	Falso **(Válido)**	Falso **(Válido)**	Falso **(Válido)**	Falso **(Válido)**
	b)	Falso, sempre resulta em irracional **(Válido)**	Falso, não porque so da irracional **(Válido)**	Falso **(Válido)**	Falso **(Válido)**	Falso **(Válido)**	Falso **(Válido)**
	c)	Verdadeiro, sempre resulta em irracional **(Válido)**	Verdadeiro, sim porque só da irracional **(Válido)**	Verdadeiro **(Válido)**	Verdadeiro **(Válido)**	Verdadeiro **(Válido)**	Verdadeiro **(Válido)**
2	a)	Irracional, tem um número irracional que na expressão não se transforma em racional, resultando em irracional sempre **(Válido)**	é irracional por causa da $\sqrt{7}$ **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**
	b)	Racional, dois irracionais = transformados em racional **(Válido)**	é racional por que $\sqrt{3}$: $\sqrt{3}$ da 1 e um é racional **(Válido)**	Racional **(Válido)**	Racional **(Válido)**	Racional **(Válido)**	Racional **(Válido)**
	c)	Irracional, tem um número irracional que na expressão não se transforma em racional, resultando em irracional sempre **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**
	d)	Irracional, tem um número irracional que na expressão não se transforma em racional,	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**	**(Não respondeu por não lembrar de expressão algébrica)**	Irracional **(Válido)**	Irracional **(Válido)**

		resultando em irracional sempre **(Válido)**					

Fonte: Autor (2021).

Como pode-se perceber, as noções adquiridas nas atividades 7, 8 e 9 foram bem aplicadas nas atividades de aprofundamento, pois a maioria dos alunos acertou as questões. Em algumas situações os alunos responderam corretamente e justificavam, mas em outras não justificavam.

Os alunos tiveram dificuldade de responder as alternativas “d)” da 2ª questão de cada uma dessas seções (de adição, multiplicação e divisão), pois requeria conhecimento de expressões algébricas, na verdade era só pra substituir valores em uma expressão algébrica e julgar se seu valor numérico era racional ou irracional, mas mesmo assim a maioria teve dificuldade em resolver, com exceção do aluno A5 que além de responder corretamente, justificou de forma válida. Já os outros, embora a maioria tenha acertado essa questão, pode-se dizer que devido não terem justificado podem ter respondido por ‘chute’ ou intuição.

Após essa atividade de aprofundamento, os alunos passaram a ter maior habilidade de observar uma conta ou expressão numérica com operações de adição, multiplicação e divisão e já ter uma ideia intuitiva se o resultado era racional ou irracional.

10ª atividade

A atividade 10 teve o objetivo de Apresentar o número π. Sua ocorrência dependeu da leitura da História em Quadrinhos chamada de Museu dos Irracionais (parte II), que apresenta, de forma ilustrada, recortes da história do número irracional π e algumas discussões sobre noções que o caracterizam.

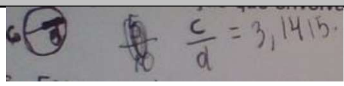
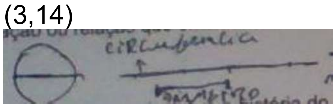
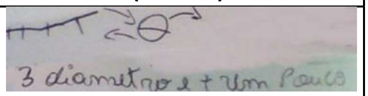
Devido a pouca disponibilidade de tempo, foi feito uma leitura conjunta rápida com os alunos, os direcionando a ler com mais atenção os fatos mais importantes que caracterizavam o número π.

Os alunos compreenderam a leitura em HQ e se intrigaram com novas noções bastante interessantes como a ideia de π ser obtido de uma razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, sobre a concepção que alguns matemáticos e povos tinham sobre π, sobre o fato de ser irracional e ser transcendente (não poder ser medido nem mesmo construído por régua e compasso), além de outros entendimentos.

Após a leitura os alunos foram direcionados a resolver uma lista de 5 questões relacionadas a leitura que fizeram. Essas questões foram apresentadas a esses alunos, pra entender as contribuições que a leitura da HQ forneceu a eles, para que pudessem caracterizar o número π sobre o seu conceito, significado geométrico e outras compreensões. Este momento foi muito importante para os alunos organizarem as ideias compreendidas com a leitura realizada.

Quanto às questões, tem-se no quadro a seguir as respostas dos alunos.

Quadro 51 – Respostas dos alunos na atividade 10

Questão / Aluno	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
A1	"é a divisão da circunferência pelo diametro" **(Válida)**	"Irracional" **(Válida)**	"transcendente" **(Válida)**	3,14015 **(Válida)**	 **(Válida)**
A2	"É um numero infinito irracional" **(Válida)**	"Irracional" **(Válida)**	"Transcendente" **(Válida)**	3,14 **(Válida)**	Quantos diâmetros cabem na circunferência  **(Válida)**
A3	"é um irracional" **(Válida)**	"Irracional" **(Válida)**	"Transcendente" **(Válida)**	3,24 **(Válida)**	A quantidade de diâmetros que cabe na circunferência (3,14)  **(Válida)**
A4	"Numero irracional" **(Válida)**	"Irracional" **(Válida)**	"Transcendente" **(Válida)**	3,14 **(Válida)**	 **(Válida)**
A5	"A razão entre a circunferência e seu diâmetro" **(Válida)**	"Irracional" **(Válida)**	**(Sem resposta)**	3,14 **(Válida)**	"a razão entre a circunferência e seu diâmetro" **(Válida)**
A6	"É um número irracional" **(Válida)**	"Irracional" **(Válida)**	"Transcendente" **(Válida)**	3,14 **(Válida)**	"é a razão entre o Comprimento da circunferência pelo seu diâmetro." **(Válida)**

Fonte: Autor (2021).

Ao observar o quadro, pode-se perceber que as respostas dos alunos mostram que eles assimilaram alguns conhecimentos sobre π, conforme o que a atividade propôs. Sobretudo, conhecimentos sobre o conceito e valor numérico aproximado.

A compreensão geométrica foi bem assimilada pela maioria dos alunos, pois, conforme mostra o quadro, os alunos A1, A2, A3 e A4 souberam desenhar uma circunferência e seu diâmetro, se referindo ao surgimento de π como quantidade de diâmetros que cabem na circunferência ou a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro.

Na questão 3, a aluna A5 não respondeu, pelo fato da noção de transcendência ainda não fazer muito sentido pra ela, embora esse conceito tenha sido tratado na atividade 6. Mesmo não sabendo responder essa questão ela teve um bom proveito nas outras questões.

Ao final dessa atividade foi feita uma discussão com os alunos para evitar um específico obstáculo epistemológico, discutido na subseção 3.3.4 do assunto de Números Irracionais quando se trata do número π, que pode ser citado da seguinte forma:

Se o número π é razão entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu próprio diâmetro então por que ele é irracional (não pode ser escrito como fração)?

Esse questionamento acontece quando os alunos não sabem diferenciar fração e razão, desse modo, torna-se perigoso esse questionamento, pois pode gerar a conclusão equivocada de que “existem alguns números irracionais que podem ser escritos como fração, como o π”. Prejudicando desse modo o conceito de números irracionais.

Ao citar esse questionamento aos alunos, a maioria deles declarou que realmente tinham pensado nisso.

Daí foi explicado os conceitos de fração e razão, já que ambas possuem a mesma notação. Explicou-se que a ideia de fração está ligada a números inteiros e utilizando elementos de mesma natureza a partir da relação parte/todo, já a ideia de razão compreende relacionar elementos (grandezas) de natureza diferente ou igual sendo que esses elementos podem ser inteiros, racionais, irracionais ou reais. Logo, se o π é número irracional, isto é, não pode ser obtido de uma fração, mas também que esse número é obtido de uma razão, então essa razão não é constituída de somente números inteiros. Vale ressaltar que se é obtido de uma razão, então pelo menos um dos elementos é irracional, esse entendimento é uma propriedade dos números irracionais adquirida pelos alunos na atividade 9 anterior.

Apos terminar essa atividade foi perguntado aos participantes se já queriam fazer atividade 11, mas ninguém quis continuar nesse dia, devido estarem cansados. A atividade 10 pareceu ter dado mais trabalho de aprendizagem do que as atividades 8 e 9 desse encontro.

Mesmo após terminar a atividade, as alunas A5 e A6, de forma independente em seus respectivos perguntaram sobre qual a relação do π e a ideia de ‘radianos’. Inicialmente isso nos motivou em perceber que haviam alunos com interesse em aprofundar os conhecimento sobre esse número. Daí explicou-se o seguinte:

O radiano é uma forma medir arcos, onde arcos de uma circunferência são medidos em função do raio da mesma, assim sabendo que uma circunferência, que também pode ser interpretada como arco de ângulo central 360°, mede π diâmetros, então ela mede 2π raios que pode ser escrito como 2π radianos, assim qualquer arco de ângulo x correspondente a uma quantidade determinada de radianos, como o arco de 180º mede π radianos, como o arco de 90º mede $\frac{\pi}{2}$ radianos e assim por diante, sendo que radianos é a quantidade de raios que se pode medir um determinado arco.

As alunas A5 e A6 se surpreenderam por agora sim entender sobre um termo que antes não fazia sentido a elas.

5.4. Quarto Encontro

No quarto encontro, foram aplicadas as atividades 11, 12 e pós-teste bem como o pós-teste. As atividades desse encontro buscaram apresentar aos alunos alguns números irracionais famosos como ϕ e e, além de finalizar essa sequência didática com a aplicação o pós-teste. Tem-se a seguir as descrições das atividades referentes a esse encontro.

11ª atividade

A atividade 11 teve o objetivo de Apresentar o número ϕ. Sua ocorrência dependeu da leitura da História em Quadrinhos chamada de Museu dos Irracionais (parte III), que apresenta, de forma ilustrada, recortes da história do número irracional ϕ, quanto as suas presenças em figuras geométricas, obras de arte, monumentos e na natureza.

Para isso, foi feita uma leitura conjunta com os alunos, os direcionando a ler com atenção os vários fatos que caracterizavam o número ϕ.

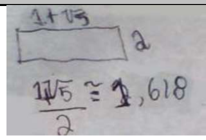
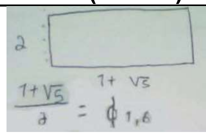
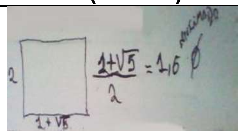
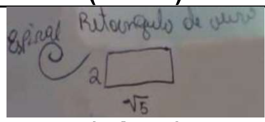
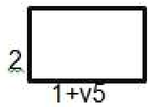
Os alunos compreenderam a leitura em HQ e se intrigaram com novas noções do número ϕ, como o fato dele ser usado em muitas construções, monumentos e obras de arte, bem como a cultura de apreciação da fisiologia humana com medidas próximas desse número. Durante a leitura, no momento em que leram sobre o fato de que ϕ equivale a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ foi explorado esse momento para abordar os conhecimentos de propriedades operatórias de números irracionais e foi perguntado a todos: como podemos ter certeza que essa razão é irracional? Após certo tempo em que eles ficaram pensando os alunos A1, A2, A3 e A6 responderam que essa razão é irracional devido $1+\sqrt{5}$ ser irracional e com isso $(1+\sqrt{5}) \div 2$ seria também irracional, assim eles lembraram que as operações de adição e divisão entre racional e irracional sempre geram irracionais, daí se intrigaram sobre essa compreensão pois o número ϕ passou a ter mais significado como sendo de fato número irracional.

Já os alunos A4 e A5 que não lembravam foi perguntado: $1+\sqrt{5}$ é racional ou irracional? E o $1+\sqrt{5}$ dividido por 2 é racional ou irracional? A partir, daí eles conseguiram entender que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se tratava de um número irracional mesmo, fornecendo mais significado ao número ϕ como irracional.

Após a leitura os alunos foram direcionados a resolver uma lista de 5 questões relacionadas a leitura que fizeram. Essas questões foram apresentadas a esses alunos, pra entender as contribuições que a leitura da HQ forneceu a eles, para que pudessem caracterizar o número ϕ sobre o seu conceito, significado geométrico e outras compreensões. Este momento foi muito importante para os alunos organizarem as ideias compreendidas com a leitura realizada.

Tem-se no quadro a seguir, as respostas dos alunos nas 5 questões passadas a eles.

Quadro 52 - Respostas dos alunos na atividade 11

Questões / Alunos	Q1	Q2	Q3	Q4
A1	"Um numero irracional 1,618" **(Válida)**	Irracional **(Válida)**	1,618... **(Válida)**	 **(Válida)**
A2	"é o numero de Deus, número divino, etc... 1,6" **(Válida)**	Irracional **(Válida)**	1,6 **(Válida)**	 **(Válida)**
A3	"é um numero irracional que também falam de "numero da beleza" " **(Válida)**	Irracional **(Válida)**	1,6 **(Válida)**	 **(Válida)**
A4	"É um número irracional" **(Válida)**	Irracional **(Válida)**	1,6 **(Válida)**	 **(Válida)**
A5	"É a razão de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$" **(Válida)**	Irracional **(Válida)**	1,65 **(Válida)**	"Um retângulo com largura 1+√5 e comprimento 2" **(Parcialmente válida)**
A6	"É um numero irracional que tem diversas nomenclaturas como numero divino,..." **(Válida)**	Irracional **(Válida)**	1,6 **(Válida)**	 (1+v5) / 2 = fi **(Válida)**

Fonte: Autor (2021)

Os alunos mostram que assimilaram alguns conhecimentos importantes sobre ϕ, conforme o que a atividade propôs. Sobretudo, conhecimentos sobre o conceito, noção geométrica, valor numérico aproximado e aplicações.

Na questão 4, muitos deles se lembraram do desenho do retângulo de ouro como uma situação matemática onde surge o número ϕ. Somente a aluna A5 alcançou aproveitamento parcial nessa questão, pois escreveu uma descrição um pouco equivocada onde o comprimento do retângulo de ouro seria 2 enquanto que a largura seria $1 + \sqrt{5}$, mostrando que possivelmente essa aluna não entende que comprimento se refere à medida do lado maior do retângulo, que nesse caso seria $1 + \sqrt{5}$, ou simplesmente não entende que

$1 + \sqrt{5}$ é maior que 2. Mesmo assim, o fato dela lembrar do retângulo de ouro, bem como de responder de forma válida nas outras questões mostra que a atividade teve um efeito bom na aprendizagem dessa aluna, bem como nos demais.

12ª atividade

A atividade 12 teve o objetivo de Apresentar o número e. Sua ocorrência dependeu da leitura da História em Quadrinhos chamada de Museu dos Irracionais (parte IV), que apresenta, de forma ilustrada, recortes da história do número irracional e. Para isso, foi feita uma leitura conjunta rápida com os alunos, os direcionando a ler com atenção a história.

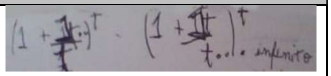
Embora os alunos tenham se intrigado com a leitura, alguns alunos declararam não entender nada sobre o que é juros ou capitalização, como por exemplo, os alunos A4, A5 e A6. O aluno A4 disse não saber o que esses conceitos significavam, as alunas A5 e A6 disseram que ainda não tinham estudado sobre esses assuntos, mesmo elas estando no 3º ano do Ensino Médio. Daí, tivemos que explicar os conceitos de juros, capitalização, aplicação (investimento) e empréstimo, de forma resumida para não tornar a leitura demorada, mas tentando conectar com a história passada na leitura. Os alunos se interessaram muito pela explicação, já que se tratava de conhecimentos da Matemática Financeira, o que tornou a leitura conjunta da HQ muito satisfatória nesse trecho de origem do número e.

Esses alunos, bem como os demais, se intrigaram bastante com a situação da capitalização mudar quando se converte o período para outra unidade de medida, a qual, direciona ao surgimento do número e.

Após a leitura os alunos foram direcionados a resolver uma lista de 5 questões relacionadas a leitura que fizeram. Essas questões foram apresentadas a esses alunos, pra entender as contribuições que a leitura da HQ forneceu a eles, para que pudessem caracterizar o número e sobre o seu conceito, como ele surge e outras compreensões. Este momento foi muito importante para os alunos organizarem as ideias compreendidas com a leitura realizada.

Tem-se no quadro a seguir, as respostas dos alunos nas 5 questões passadas a eles.

Quadro 53 - Respostas dos alunos na atividade 12

Questões / Alunos	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
A1	"Uma aproximação de 2,71... irracional" **(Válida)**	Irracional **(Válida)**	Transcendente **(Válida)**	2,71... **(Válida)**	 **(Válida)**
A2	"E um número irracional 2,71 ≅" **(Válida)**	Irracional **(Válida)**	Transcendente **(Válida)**	2,71 ≅ **(Válida)**	"Juros composto" **(Parcialmente Válida)**
A3	"é um número" **(Válida)**	Irracional **(Válida)**	Transcendente **(Válida)**	2,7 **(Válida)**	"Juros composto" **(Parcialmente Válida)**
A4	"Irracional" **(Válida)**	Irracional **(Válida)**	Transcendente **(Válida)**	2,71 **(Válida)**	"Os juros ia aumentando 2,71" **(Válida)**
A5	"Aproximadamente 2,71" **(Válida)**	Irracional **(Válida)**	**(sem resposta)**	2,71 **(Válida)**	"Juros composto" **(Parcialmente Válida)**
A6	"É um numero irracional transcendente obtido de juros compostos" **(Válida)**	Irracional **(Válida)**	Transcendente **(Válida)**	2,7 **(Válida)**	"Juros composto" **(Parcialmente Válida)**

Fonte: Autor (2021)

Ao final da atividade percebeu-se que eles assimilaram alguns conhecimentos importantes sobre e, conforme o que a atividade propôs, principalmente sobre o conceito e valor numérico aproximado desse número.

Quanto a ideia intuitiva do surgimento do e por meio da fórmula da capitalização continua, não foi bem assimilada pela maioria dos alunos devido não compreenderem sobre o uso da fórmula do juros composto, embora soubessem o significado de juros composto e intuitivamente como ele funciona. O A4 foi um dos alunos que melhor aproveitou a explicação sobre juros e sua relação com a leitura de modo que, para ele, o juros crescia até chegar no número e. Já o aluno A1 compreendeu a fórmula de capitalização da leitura e como ela pode ser conduzida a uma expressão reduzida que gera o número e a partir de certa infinitude.

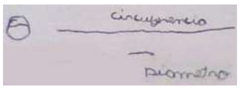
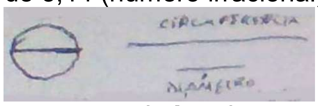
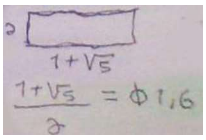
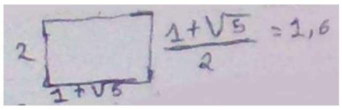
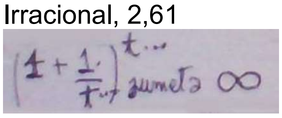
Pós-teste

Ao finalizar a aplicação das atividades dessa sequência didática neste quarto encontro, foi aplicado o pós-teste, que possuía as mesmas questões do pré-teste. Embora os alunos já tivessem um pouco cansados das atividades 11 e 12 desse encontro, eles preferiram fazer o pós-teste pra finalizar com os experimentos.

Ao terem contato com o pós-teste, os alunos aparentaram mais confiança se comparado ao momento que foi aplicado o pré-teste no início. A duração em que ocorreu essa aplicação foi de entre 15 a 20 minutos. Os quadros a seguir apresentam as respostas dos alunos.

Quadro 54 – Respostas dos alunos no Pós-teste (parte 1)

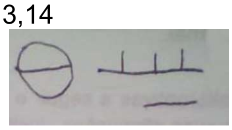
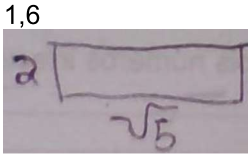
Quest		A1	A2	A3
Q1		Que não podem ser escritos em forma de fração **(Válida)**	São numeros infinitos que não podem ser contados e nem medidos e eles não podem ser escritos como fração **(Válida)**	Números irracionais são números infinitos que não se repetem e não podem ser transformados em fração. Eles não podem ser contados pois são enumeráveis. Eles não podem ser medidos. **(Válida)**
Q2		**(Identificou ou racionais e irracionais de modo válido)**	**(Identificou ou racionais e irracionais de modo válido)**	**(Identificou ou racionais e irracionais de modo válido)**
Q3		0,1545231... $\sqrt{7}$ $\sqrt{3}$ π **(Válida)**	0,145872... π ϕ $\sqrt{5}$ $\sqrt{2}$ $-5\sqrt{10}$ **(Válida)**	0,12345... $\sqrt{17}$ **(Válida)**
Q4		b) Não possui dígitos se repetindo periodicamente e possui casas decimais infinitas. **(marcou a alternativa correta)** **(Válida)**	b) Não possui dígitos se repetindo periodicamente e possui casas decimais infinitas. **(marcou a alternativa correta)** **(Válida)**	b) Não possui dígitos se repetindo periodicamente e possui casas decimais infinitas. **(marcou a alternativa correta)** **(Válida)**
Q5	a)	Falso, é variável, não só irracional **(Válida)**	Falso, da racional também **(Válida)**	Falso, nem sempre somando irracionais com irracionais da um número irracional **(Válida)**
	b)	Falso, pois é variante **(Válida)**	Falso, pode da racional também **(Válida)**	Falso, Não, algumas vezes podem resultar sim em números racional **(Válida)**
	c)	Falso, é variante **(Válida)**	Falso, da racional também **(Válida)**	Falso, Não importa se você soma, multiplica ou divide, nem sempre irracional com irracional da irracional **(Válida)**
	d)	Verdadeiro, pois sempre resulta em irracional **(Válida)**	Verdadeiro, sim porque I com R sempre da I **(Válida)**	Verdadeiro, porque irracional sempre vence **(Válida)**
	e)	Falso, pois sempre resulta em irracional **(Válida)**	Falso, não sempre da irracional **(Válida)**	Falso **(Válida)**

	f)	Verdadeiro, pois sempre resulta em irracional **(Válida)**	Verdadeiro, sim porque I com R sempre da I **(Válida)**	Verdadeiro, porque irracional sempre vence **(Válida)**
	g)	Falso, pois sempre resulta em irracional **(Válida)**	Falso, não sempre da irracional **(Válida)**	Falso **(Válida)**
	h)	Falso, pois sempre resulta em irracional **(Válida)**	Falso, não sempre da irracional **(Válida)**	Falso **(Válida)**
	i)	Verdadeiro, pois sempre resulta em irracional **(Válida)**	Verdadeiro, sim porque I com R sempre da I **(Válida)**	Verdadeiro, porque irracional sempre vence **(Válida)**
Q6		3,1415..., comprimento pelo diâmetro  **(Válida)**	É um numero irracional e infinito ≅3,14, quantos diâmetros cabem na circunferência  **(Válida)**	São a quantidade de diâmetros numa circunferência. Aproximação de 3,14 (numero irracional)  **(Válida)**
Q7		1,618..., conhecido como numero divino e irracional, nº da beleza encontrado em várias obras de arte  [acertou na escrita, mas errou no desenho] **(Parcialmente Válida)**	ϕ é um número irracional  **(Válida)**	Número irracional  **(Válida)**
Q8		Irracional, 2,61  **(Válida)**	e é um número irracional aproximado 2,71 **(Válida)**	Número irracional, 2,7 aproximação **(Válida)**
Q9		Denso **(Válida)**	Denso **(Válida)**	Denso **(Válida)**
Q10		Não enumerável **(Válida)**	Não enumerável porque não pode ser contado **(Válida)**	Não enumerável **(Válida)**

Fonte: Autor (2021)

Quadro 55 - Respostas dos alunos no Pós-teste (parte 2)

Quest	A4	A5	A6
Q1	numeros que não podem ser contados, não podem ser medidos, não podem fazer fração **(Válida)**	São números que não são exatos e não podem ser uma fração **(Válida)**	São números que não podem ser escritos na forma fracionaria e não podem ser contados, e sua características são dizimas não periódicas, não podem ser medidos **(Válida)**
Q2	**(Identificou os racionais e irracionais de modo <u>parcialmente válido</u>)**	**(Identificou os racionais e irracionais de modo <u>válido</u>)**	**(Identificou os racionais e irracionais de modo <u>válido</u>)**
Q3	0,646566... $\sqrt{2}$ ϕ π **(Válida)**	1,34568...... 1+√5 **(Válida)**	π 0,1425... $\sqrt{13}$ **(Válida)**

Q4		b) Não possui dígitos se repetindo periodicamente e possui casas decimais infinitas. **(marcou a alternativa correta)** **(Válida)**	b) Não possui dígitos se repetindo periodicamente e possui casas decimais infinitas. **(alternativa correta)** **(Válida)**	b) Não possui dígitos se repetindo periodicamente e possui casas decimais infinitas. **(alternativa correta)** **(Válida)**
Q5	a)	Falso **(Válida)**	Falso, nem sempre são irracionais **(Válida)**	Falso, porque quando tem duas raízes iguais de sinais diferentes da racional **(Válida)**
	b)	Falso **(Válida)**	Falso, nem sempre o resultado são irracionais **(Válida)**	Falso, porque da racional **(Válida)**
	c)	Falso **(Válida)**	Falso, nem sempre o resultado são irracionais **(Válida)**	Falso, porque da racional **(Válida)**
	d)	Verdadeiro, sempre irracional **(Válida)**	Verdadeiro **(Válida)**	Verdadeiro, porque realmente não há possibilidades de da racional **(Válida)**
	e)	Falso **(Válida)**	Falso **(Válida)**	Falso, porque realmente não há possibilidades de da racional **(Válida)**
	f)	Verdadeiro, sempre irracional **(Válida)**	Verdadeiro **(Válida)**	Verdadeiro **(Válida)**
	g)	Falso **(Válida)**	Falso **(Válida)**	Falso **(Válida)**
	h)	Falso **(Válida)**	Verdadeiro, (**inválida**)	Falso **(Válida)**
	i)	Verdadeiro, sempre irracional **(Válida)**	Falso (**inválida**)	Verdadeiro **(Válida)**
Q6		é um número irracional 3,14  **(Válida)**	A razão entre a circunferência e seu diâmetro **(Válida)**	É um numero irracional transcendente de valor aproximado 3,14. Surge a partir do calcula da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. **(Válida)**
Q7		é um numero irracional 1,6  [acertou na escrita, mas errou no desenho] **(Parcialmente válida)**	A razão aproximadamente 2/1+√5 **(Inválida)**	É um numero também irracional algébrico, surge a partir do calculo da razão do comprimento 2 e largura 1+ √5 de um retângulo de ouro. Valor aproximado de 1,6. Recebe nomenclaturas como numero divido, numero da beleza, etc. **(Parcialmente válida)**
Q8		é um numero irracional 2,71 **(Válida)**	Aproximadamente 2,71 **(Parcialmente válida)**	É um numero irracional, transcendente, surge a partir de capitalização. Valor aproximado de 2,7 **(Válida)**
Q9		denso porque pode encontrar infinitos números dentro deles **(Válida)**	Não denso **(Inválida)**	Denso **(Válida)**
Q10		não enumerável porque não pode ser contado **(Válida)**	Não enumerável **(Válida)**	Não enumeráveis **(Válida)**

Fonte: Autor (2021)

Ao observar os quadros, percebe-se que a maioria das respostas dos alunos é válida. O aluno A4, por exemplo, que demonstrou ter problemas na leitura e escrita, bem como uma base matemática deficitária respondeu corretamente de forma válida a maioria das questões.

Após entregarem o pós-teste, foi perguntado a eles se gostaram deste experimento, o que achavam dos conhecimentos trabalhados, se tinham alguma crítica ou sugestão a fazer sobre as atividades.

Os alunos acharam bem prático algumas atividades que eles utilizaram calculadora, já as que tinham leituras em HQ eles achavam mais trabalhosas, devido algumas revistas serem extensas, mas alguns declararam que a leitura conjunta ajudou muito a ser mais rápido e mais compreensível. Mas de um modo geral eles gostaram de conhecer sobre os números irracionais, principalmente os alunos do 3º ano do EM, que comentaram que nunca tinham entendido esse assunto e que só agora compreenderam. A aluna A6, por exemplo, declarou que entendeu outros conhecimentos que dependem do assunto de números irracionais como a ideia de ‘radiano’ da trigonometria circular.

6. ANÁLISE A POSTERORI E VALIDAÇÃO

Com o objetivo de validar a pesquisa, nesta seção foi desenvolvido um tratamento estatístico aos dados obtidos com a fase de experimento da sequência didática, bem como do pré-teste e pós-teste.

As subseções que compõem essa seção expressam os resultados de cada encontro de modo que foram divididos pelas metas que já foram citadas no quadro 21. Cada meta foi desenvolvida abrangendo um conjunto de atividades, cada uma com seu respectivo objetivo, e em cada uma dessas atividades os alunos tiveram um determinado desempenho. Com isso é possível observar a totalidade desses desempenhos para verificar se as metas foram alcançadas.

O quadro a seguir organiza essas informações para poder entender como foram organizadas as subseções quanto às metas.

Quadro 56 – Organização das atividades por Metas

Metas	Atividades correspondentes
Meta 1: Perceber que dízimas não periódicas não podem ser escritas como fração, sendo essas chamadas de irracionais.	Atividade 1, Atividade 2, Atividade 3, Atividade 4, Atividade 5
Meta 2: Caracterizar os números irracionais	Atividade 6
Meta 3: Descobrir propriedades operatórias entre racionais e irracionais.	Atividade 7, Atividade 8, Atividade 9
Meta 4: Compreender números irracionais especiais	Atividade 10, Atividade 11, Atividade 12

Fonte: Autor (2021)

Além das subseções sobre a fase de experimentação da sequência didática organizada de acordo com as metas, também há subseções que analisam os resultados do pré-teste e pós-teste, para validar se os resultados evidenciam estatisticamente se os objetivos foram alcançados.

6.1. Análise a Posteriori das Atividades da Meta 1

As atividades desenvolvidas nessa primeira parte foram feitas para que os alunos percebessem que toda dízima periódica pode ser escrita como fração, mas se não haver período (repetição) não é possível determinar a fração, podendo esta, ser chamada de dízima não periódica ou número irracional.

O quadro 57 apresenta os resultados obtidos com as atividades que compõe esse objetivo.

Quadro 57 – Resultado dos alunos nas atividades da Sequência Didática que compõe a meta 1.

Aula – Tópico	**Objetivos de Atividade**	**Desempenho dos alunos**
1ª - Dízimas Periódicas	Conceituar dizima periódica	66,6% dos alunos escreveram respostas válidas e desejadas (4) 33,3% dos alunos escreveram respostas parcialmente válidas e desejadas (2) 0% inválidas
2ª- Classificação de dízimas periódicas	Classificar os tipos de dízimas periódicas.	50% dos alunos escreveram somente respostas válidas e desejadas (3) 33,3% dos alunos escreveram respostas parcialmente válidas e desejadas (2) 16,6% dos alunos escreveram respostas somente inválidas (1)
3ª*- Dízimas periódicas simples	Descobrir uma maneira de converter uma dízima periódica simples em	83,3% dos alunos escreveram respostas somente válidas e desejadas (5) 16,6% dos alunos escreveram respostas parcialmente válidas e desejadas (1) 0% inválidas

	fração.	
4ª*- Dízimas periódicas compostas	Descobrir uma maneira de converter uma dízima periódica composta em fração.	83,3% dos alunos escreveram respostas somente válidas e desejadas (5) 0% dos alunos escreveram respostas parcialmente válidas e desejadas (0) 16,6% dos alunos escreveram respostas somente invalidas (1)
5ª- Números irracionais	Conceituar número irracional	—

* - Contém atividade de aprofundamento.
Nota: Além de informar o percentual e também apresenta a quantidade absoluta nos parênteses.

Fonte: Autor (2021).

Ao observar o quadro, nota-se que os alunos tiveram um desempenho razoável quanto à validade das respostas no início das atividades e que foi aumentando nas atividades seguintes até a 3 e 4. O quantitativo de alunos que escreveu respostas válidas conseguiu perceber o que era esperado nas atividades, mas o quantitativo que escreveu respostas parcialmente válidas ou inválidas era de alunos com pouca capacidade de organizar as ideias na forma escrita.

De acordo com o desenvolvimento das atividades, a utilização do app “calculador e identificador de racionais e irracionais” foi muito importante, pois auxiliou as atividades tornando-as mais rápidas e práticas aos alunos, favorecendo com isso a aprendizagem cujos resultados se encontram no quadro 57. A contribuição desse recurso nas atividades se assemelha aos resultados de Serra (2015) que, conforme mencionamos na revisão de estudos, mostrou que a utilização de software no ensino pode auxiliar nas ações e reflexões dos alunos, tornando-as mais rápidas e intuitivas. Essa conclusão descreve com muita familiaridade as atividades 1, 2, 3 e 4, pois os alunos desenvolveram muitas compreensões com facilidade e praticidade.

Quanto às atividade 3 e 4, elas eram as únicas atividades desse momento que eram acompanhadas de atividades de aprofundamento. Tem-se o quadro a seguir apresentando os resultados dessas atividades de aprofundamento.

Quadro 58 - Resultado dos alunos nas atividades de aprofundamento que compõe a meta 1.

Aula – Tópico	Objetivos de Atividade	Resultado Percentual da Atv de Aprofundamento
3ª- Dízimas periódicas simples	Descobrir uma maneira de converter uma dízima periódica simples em fração.	100% dos alunos escreveram respostas válidas 0% das respostas eram inválidas
4ª- Dízimas periódicas compostas	Descobrir uma maneira de converter uma dízima periódica composta em fração.	83,3% dos alunos escreveram respostas válidas (4 alunos), ou seja, tiveram 100% de acerto. 16,6% dos alunos escreveram respostas parcialmente válidas (2 alunos) ambos com desempenho de 87,5% (acertaram 7 de um total de 8 questões)

Fonte: Autor (2021).

Quanto as atividades de aprofundamento das atividade 3 e 4, percebe-se que os alunos tiveram um bom desempenho. Na 3, por exemplo, todos alcançaram 100% de acerto, enquanto que na 4, somente quatro alunos alcançaram esse desempenho, e os outros dois acertaram quase todas (sete de um total de oito). Referente a quantidade de erros desses dois alunos, embora muito baixa, percebeu-se que ocorreram por falta de atenção, pois esses alunos acertaram quase todas, mostrando na atividade de aprofundamento, bem como na atividade de aprendizagem, que tinham notado a regra para se determinar a fração de dizimas periódicas compostas.

O fato dos alunos terem um bom desempenho nas atividades de aprofundamento mostra que de fato as atividade 3 e 4, bem como as anteriores, tiveram um efeito notável para o alcance dos objetivos esperados quanto a compreensão de que “toda dízima periódica pode ser escrita como fração”, conduzindo-os com isso a uma abordagem favorável da 5ª atividade que os direcionaram a perceber que “dizimas sem período” não são capazes de serem escritas como fração, devido os conhecimentos aprendidos nas atividades anteriores não se aplicarem.

É importante destacar que embora muitos alunos no momento de experimentação tivessem dificuldade de escrever suas observações sobre como escrever a fração geratriz de uma dizima periódica simples e composta, tiveram maior facilidade em escrever as próprias frações geratrizes das dízimas periódicas apresentadas na atividade de aprofundamento, isso conduz a uma compreensão citada por Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018) sobre o componente intuitivo. Que refere-se a quando o indivíduo considera auto evidente um fato, que o faz aceitar sem a necessidade de justificar algo que legitime essa ideia. Sobre essa perspectiva, pode-se dizer que os experimento desenvolvidos nas atividades 3 e 4 exploraram esse componente intuitivo, pois mesmo os alunos tivessem dificuldade em justificar em palavras suas observações nessas atividade, tiveram mais facilidade em justificar por meio da resolução das atividades de aprofundamento.

Além das atividades 3 e 4, o aspecto intuitivo também foi explorado nas atividade 1 e 2, pois devido os alunos utilizarem a calculadora *app* para responder essas atividades, alguns elementos dessa calculadora foram fixados intuitivamente como o significado de racional exato quando o resultado é um número finito, o significado de racional não exato quando o resultado da divisão é um número com infinitos dígitos, além de outras compreensões, as quais perpassam pelos pares finito/infinito e exato/aproximado citados por Pommer (2012) como muito importantes e que se estão em falta no ensino básico, já que muitas aulas privilegiam mais aspectos operatórios, finitos e exatos, o que limita a abordagem e o entendimento destas noções no ensino da Matemática.

Tendo em vista a análise descrita anteriormente dos resultados das atividades 1, 2, 3, 4 e também a interação com os alunos na aula da atividade 5, concluiu-se que os alunos alcançaram a meta 1.

6.2. Análise a Posteriori das Atividades da Meta 2

A atividade desenvolvida nessa segunda parte foi feita para que os alunos soubessem caracterizar os números irracionais (meta 2). Devido às questões que compõe esta atividade ser de um número maior se comparado as atividades anteriores, e também por gerar uma análise quantitativa muito diferenciada entre os alunos (alguns deixaram de acertar algumas questões, mas tem nível de significância de erro diferenciado) resolvemos mudar o percentual de desempenho dos alunos para o percentual de respostas quanto a validade. O quadro a seguir apresenta os resultados obtidos na atividade da meta 2.

Quadro 59 – Resultado da atividade da sequência didática ligada à meta 2

Aula - Tópicos	Objetivos de Atividade	Desempenho dos alunos
6ª - Os Números Irracionais	Conhecer e caracterizar números irracionais, assim como o conjunto dos números irracionais.	96,29% das respostas eram válidas (52 respostas) 1,85% das respostas eram parcialmente válidas (1 resposta) 1,85% das respostas eram inválidas (1 resposta)

Nota: como eram 6 alunos que responderam 9 questões, então foi gerado 54 respostas.

Fonte: Autor (2021)

Os resultados apresentados no quadro indicam que a maioria das respostas escritas pelos alunos era válida, restando apenas duas que mesmo não sendo totalmente válidas, uma era parcialmente válida, enquanto que a outra era inválida, provocados pelo fato de seus autores não lembrarem de algumas informações da leitura feita em HQ.

A atividade trabalhou características sobre os números irracionais como conceituação, o tratamento de irracionais por aproximação, exemplificação e identificação numérica de irracionais, enumerabilidade e densidade do conjunto dos irracionais e outras noções que caracterizam os irracionais. Devido esta atividade abordar todos esses tópicos por meio de um material didático que foi lido pelos alunos, pode-se dizer que foi possível minimizar fragilidades que podem ser encontrados em muitos materiais na forma de livros didáticos quando abordam números irracionais que são:

► Atividades tratadas de forma mecânica e com pouco ou nenhum aprofundamento conceitual, (SOUTO, 2010).

► Falta de algumas considerações relevantes sobre números irracionais, citados pelo PCN, tais como as ideias de aproximação e de infinito, não são realizadas ou enfatizadas (JESUS, 2017).

► Frequência da abordagem inicial de números irracionais unicamente por geometria (FELIX, 2018).

Para ter superado essas limitações e ter alcançado os resultados presentados no quadro 59, essa atividade contou com a leitura dos alunos sobre um material na forma de HQ que abordou muitos conhecimentos de números irracionais por meio da história da matemática. Isso perpassa por um atributo citado por Pommer (2018), ao analisar livros didáticos, que é a capacidade de desenvolver a reflexão histórica sobre os números irracionais e proporcionar momentos para o leitor movimentar o pensar.

Os resultados dessa atividade comprovam a eficácia deste tipo de abordagem em materiais didáticos, talvez até superando as expectativas de aprendizagem, devido ela ocorrer por meio de HQ’s, pois conforme citado nas análises prévias, abordar o ensino com utilização de HQ’s é uma proposta que possui possibilidade do aluno entender muitos conhecimentos matemáticos sobre origem de um conhecimento e as motivações de sua criação, para assim buscar responder aos alunos questionamentos como “pra que isso serve?” (SANTOS, 2014).

Em meio a isso, pode-se dizer que esta atividade desenvolveu este tipo de contribuição nos alunos da amostra, pois o carácter ilustrativo das HQ’s explorou muitos conhecimentos de Números Irracionais, sabendo contornar a problemática, citado no PCN, em saber desenvolver o ensino de Números Irracionais explorando, junto a isso, o formalismo matemático que este assunto possui, com certa ponderação.

É importante destacar que só o fato dos alunos terem compreendido o que são os números irracionais já representa um passo muito importante frente ao desempenho muito baixo que os alunos tiveram no pré-teste, onde denotaram não saber o que são esses números.

Diante dos resultados bastante favoráveis ao que se esperava quanto à validade das respostas, compreende-se então que o desempenho dos alunos evidencia que de fato conseguiram compreender as várias características que os números irracionais apresentam, ou seja, alcançaram a meta 2.

6.3. Análise a Posteriori das Atividades da Meta 3

A atividade desenvolvida nessa terceira parte foi feita para que os alunos descobrissem propriedades operatórias entre racionais e irracionais, que é o fato da adição, multiplicação e divisão entre irracionais não obedecerem à propriedade do fechamento e a propriedade da pertinência irracional na adição, multiplicação e divisão entre racional e irracional.

Tem-se a seguir um quadro apresentando os resultados das atividades de aprendizagem (7, 8 e 9), as quais compõem a Meta 3.

Quadro 60 - Resultado das atividades da Sequência Didática que compõe a meta 3

Aula – Tópicos	Objetivos de Atividade	Desempenho dos alunos na Atividade
7ª*- Propriedades dos números irracionais.	Descobrir uma propriedade de adição envolvendo Números Irracionais.	83,33% Valida e desejada (5) 16,66% Inválida (1)
8ª*- Propriedades dos números irracionais.	Descobrir uma propriedade de multiplicação de Números Irracionais.	100% Valida e desejada (6)
9ª*- Propriedades dos números irracionais	Descobrir uma propriedade de divisão de Números Irracionais.	100% Valida e desejada (6)

* - contém atividade de aprofundamento.
Nota: Além de informar o percentual, também é apresentado a quantidade absoluta nos parênteses.
Fonte: Autor (2021)

Antes de aplicar essas atividades, cogitou-se a possibilidade do desempenho dos alunos nessas três atividades fossem iguais ou quase iguais, pois as conclusões esperadas na atividade 7 são semelhantes as conclusões da 8 e 9. Isso condiz com o que de fato aconteceu, pois os resultados apresentados no quadro indicam que a maioria das respostas escritas pelos alunos eram válidas e desejadas, sendo que na atividade 7 o percentual foi de 83,33%, mas alcançou 100% na atividade 8 e permaneceu 100% na 9.

O desempenho dos alunos nessas atividades foi satisfatório, mostrando que perceberam as regularidades presentes nas operações de adição, multiplicação e divisão entre dois irracionais e entre racional e irracional.

Quanto as atividades de aprofundamento, devido terem um número maior de questões se comparado à outras atividades, elas podem gerar uma análise quantitativa muito diferenciada entre os alunos (alguns deixaram de acertar algumas questões, mas tem nível de significância de erro diferenciado) resolvemos mudar o percentual de desempenho dos alunos na atividade de aprofundamento para o percentual de respostas quanto a validade. Desse modo, o quadro a seguir apresenta esses resultados.

Quadro 61 - Resultado dos alunos nas atividades de aprofundamento que compõe a meta 3

Aula - Tópicos	Objetivos de Atividade	Resultado Percentual da Atividade de Aprofundamento*
7ª- Propriedades dos números irracionais.	Descobrir uma propriedade de adição envolvendo Números Irracionais.	95,23% das respostas estavam válidas (40) 2,38% das respostas estavam parcialmente válidas (1) 0% estavam inválidas 2,38% das respostas estavam em branco (1)
8ª- Propriedades dos números irracionais.	Descobrir uma propriedade de multiplicação de Números Irracionais.	92,85% das respostas estavam válidas (39) 0% parcialmente válidas 4,76% das respostas estavam inválidas (2) 2,38% das respostas estavam em branco (1)
9ª- Propriedades dos números irracionais	Descobrir uma propriedade de divisão de Números Irracionais.	97,61% das respostas estavam válidas (41) 0% parcialmente válidas 0% estavam inválidas 2,38% das respostas estavam em branco (1)

Nota 1: Cada atividade de aprofundamento continha 2 questões com alternativas (1ª questão com 3 alternativas e 2ª questão com 4 alternativas), assim tinham 7 comandos, que ao serem respondidos pelos 6 alunos formaram 42 respostas.
Nota 2: Além de informar o percentual, também é apresentado a quantidade absoluta nos parênteses.

Fonte: Autor (2021).

Ao observar os dados apresentados no quadro, percebe-se que a maioria (acima de 90%) das respostas eram válidas, o que indica que as atividades 7, 8 e 9 tiveram efeito adequado para que os alunos soubessem lidar com situações problemas que requeressem esses conhecimentos. As respostas parcialmente válidas ocorreram por pequenos equívocos no processo de justificação das respostas; as inválidas ocorreram por falta de atenção, pois a maioria tinha chegado à conclusão nas atividades de aprendizagem e, por fim, as respostas em branco ocorreram pelo fato de um específico aluno não saber lidar com situações-problema ligadas a expressões algébricas.

Quanto aos resultados alcançados nessas atividades, bem como nas atividades de aprofundamento, pode-se afirmar que os alunos compreenderam relações muito importantes envolvendo racionais e irracionais, que segundo Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018), podem favorecer a aprendizagem dos alunos sobre a percepção dos argumentos formais quando lidam com números irracionais. Essa maturidade matemática pode ser vista no desempenho dos alunos nas questões das atividades de aprofundamento, onde os alunos mostraram que sabem observar operações, expressões numéricas e expressões algébricas e fazer um estudo visual para constatar se o resultado numérico será racional ou irracional e, com isso, lidar com valores exatos ou aproximados.

Essa habilidade visual repercutiu de forma vital nas atividades 10 e 11, para a aceitação da irracionalidade de π e ϕ, pois esses números são obtidos de razões, e desse modo a priori alguns alunos não estavam desenvolvendo uma boa aceitação da irracionalidade desses números por confundirem razão com fração, mas foram relembrados de que: se π e ϕ são irracionais obtidos de razões, então certamente surgiram de divisões envolvendo irracional e racional ou irracional e irracional. Diante disso, os alunos reagiram com muita aceitação e clareza a irracionalidade destes números.

Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018), citados anteriormente, indicam também que após a aquisição das habilidades contidas nas atividades 7, 8 e 9 sobre as propriedades operatórias de irracionais e racionais, os alunos passam a compreender a possibilidade de construir infinitos números irracionais a partir de um único número cuja irracionalidade já foi aceita. Essa nova compreensão pode ser visualizada na resposta de alguns alunos na questão 3 do pós-teste, onde foi solicitado que todos os alunos exemplificassem números irracionais, daí obteve-se os resultados apresentados no quadro seguinte.

Quadro 62 – Resposta dos alunos na questão 3 do pós-teste

Alunos	**3-**Apresente exemplos de números irracionais diferentes do quadro anterior.
A1	0,1545231... $\sqrt{7}$ $\sqrt{3}$ π
A2	0,145872... π ϕ $\sqrt{5}$ $\sqrt{2}$ $\mathbf{-5\sqrt{10}}$
A3	0,12345... $\sqrt{17}$
A4	0,646566... $\sqrt{2}$ ϕ π
A5	1,34568...... **1+√5**
A6	π 0,1425... $\sqrt{13}$

Fonte: Autor (2021).

Os resultados apresentados indicam que somente os alunos A2 e A5 conseguiram formular números irracionais novos a partir de operações entre racionais e irracionais. Esse resultado indica que após a sequência didática, especificamente após as atividades 7, 8 e 9, os alunos A2 e A5 passaram a ter a habilidade de construção de novos irracionais, conforme Corbo, Pietropaolo e Amorim (2018) haviam afirmado.

Diante dos resultados bastante favoráveis ao que se esperava quanto à validade das respostas, compreende-se então que o desempenho dos alunos evidencia que de fato conseguiram compreender as propriedades operatórias entre irracionais e racionais (Meta 3).

6.4. Análise a Posteriori das Atividades da Meta 4

A atividade desenvolvida nessa quarta parte foi feita para que os alunos compreendessem alguns números irracionais especiais, especificamente os números π, ϕ e e. Devido os resultados das questões que compõe esta atividade gerar uma análise quantitativa muito diferenciada entre os alunos (alguns deixaram de acertar algumas questões, mas tem nível de significância de erro diferenciado) resolvemos mudar o percentual de desempenho dos alunos para o percentual de respostas quanto à validade. O quadro a seguir apresenta os resultados obtidos.

Quadro 63 - Resultado das Atividades da Sequência Didática que compõe a meta 4

Aula - Tópico	**Objetivos de Atividade**	**Desempenho dos alunos**
10ª- O Número π	Conhecer o número π.	96,66% das respostas eram válidas (29) 0% das respostas eram parcialmente válidas 0% das respostas eram inválidas 3,33% das respostas eram em branco (1)
11ª - O Número ϕ	Conhecer o número ϕ.	95,83% das respostas eram válidas (23) 4,16% das respostas eram parcialmente válidas (1) 0% das respostas eram inválidas 0% das respostas eram em branco
12ª - O Número e	Conhecer o número e.	83,33% das respostas eram válidas (25) 13,33% das respostas eram parcialmente válidas (4) 0% das respostas eram inválidas 3,33% das respostas eram em branco (1)

Nota 1: Cada atividade de aprofundamento continha 2 questões com alternativas (1ª questão com 3 alternativas e 2ª questão com 4 alternativas), assim tinham 7 comandos, que ao serem respondidos pelos 6 alunos formaram 42 respostas.
Nota 2: Além de informar o percentual e também apresenta a quantidade absoluta nos parênteses.

Fonte: Autor (2021)

Os resultados apresentados no quadro indicam que a maioria das respostas escritas pelos alunos era válida, o que mostra que a utilização do recurso metodológico HQ teve um efeito significante no conhecimento dos alunos sobre os números irracionais tratados nessas atividades.

Nas atividades 10 e 11, referentes aos números π e ϕ, a porcentagem de respostas válidas e desejadas foram de 95,83%, enquanto que na 12, referente ao numero e, essa porcentagem baixou para 83,33%. Daí, surge a seguinte conclusão: Os alunos tiveram um bom desempenho em todas as atividades, mas esse desempenho foi menor na atividade sobre o número e, se comparado as atividades dos outros números.

O menor desempenho na atividade 12 ocorreu porque a revista HQ dessa atividade abrange compreensões pouco familiares aos alunos, mesmo eles estando no Ensino Médio, o que pode ter provocado pouca assimilação da leitura, como a capitalização contínua que forma a expressão algébrica que gera o número e. Mesmo com essa problemática, outras compreensões foram bem assimiladas como o fato de e ser irracional, ter valor aproximado de 2,7 e ser transcendente.

Um fato citado na subseção anterior que é importante relembrar, trata sobre o fato dos objetivos alcançados nas atividades que compõem a meta 3 terem repercutidos de forma vital nas atividades 10 e 11, para a aceitação da irracionalidade de π e ϕ, pois esses números são obtidos de razões, levando a conclusão: se π e ϕ são irracionais obtidos de razões, então certamente surgiram de divisões envolvendo irracional e racional ou irracional e irracional. Diante disso, os alunos reagiram com muita aceitação e clareza a irracionalidade destes números.

Diante dos resultados bastante favoráveis ao que se esperava quanto à validade das respostas, compreende-se então que o desempenho dos alunos evidencia que de fato conseguiram compreender e caracterizar alguns números irracionais especiais (meta 4).

O fato dos alunos terem conhecido os números π, ϕ e e foi muito importante pois, conforme Brasil (1998), as aulas sobre este assunto no Ensino Fundamental, muitas vezes abordam os números irracionais durante o cálculos com radicais. Isso certamente limita o conhecimento dos alunos somente aos irracionais na forma de raízes, mas o alcance da meta 4 pelos estudantes superou essa limitação, pois eles passaram a conhecer outros tipos de irracionais, isso pode ser comprovado no quadro 59 que apresenta as repostas dos alunos na 3ª questão do pós-teste que requeria exemplos de números irracionais, 4 alunos responderam pelo menos um dos números π, ϕ e e abordados nas atividades que compõem a meta 4.

6.5. Análise a Posteriori do Pré-teste e Pós-teste

Em busca de validar se os efeitos da sequência didática proposta nesse trabalho, os dados dos estudantes no pré-teste e pós-teste que foram coletados na fase da experimentação e apresentados na seção anterior, receberam um tratamento estatístico para poder analisar o desempenho dos estudantes. Ressaltamos que as questões do pré-teste e pós-teste eram as mesmas, para poder a analisar as diferenças no desempenho dos estudantes antes e depois do experimento. O quadro a seguir apresenta esses resultados de acordo com a quantidade de acertos, erros e respostas em branco de cada aluno.

Quadro 64 – Resultados pareados do pré-teste e pós-teste

Aluno	**Acertos (%)**		**Erros (%)**		**Em Branco**	
	Pré-teste	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**
A1	0	9 acertos + 1 acerto parcial	8	0	2	0
A2	1 acerto parcial por chute	10 acertos	4	0	5	0
A3	1 acerto chute	10 acertos	4	0	5	0
A4	1 acerto chute	8 acertos + 2 acerto parcial	0	0	9	0
A5	1 acerto chute	6 acertos + 2 acertos parciais	1	2 erros	8	0
A6	2 acertos chute + 1 acerto parcial	9 acerto + 1 acerto parciais	3	0	4	0

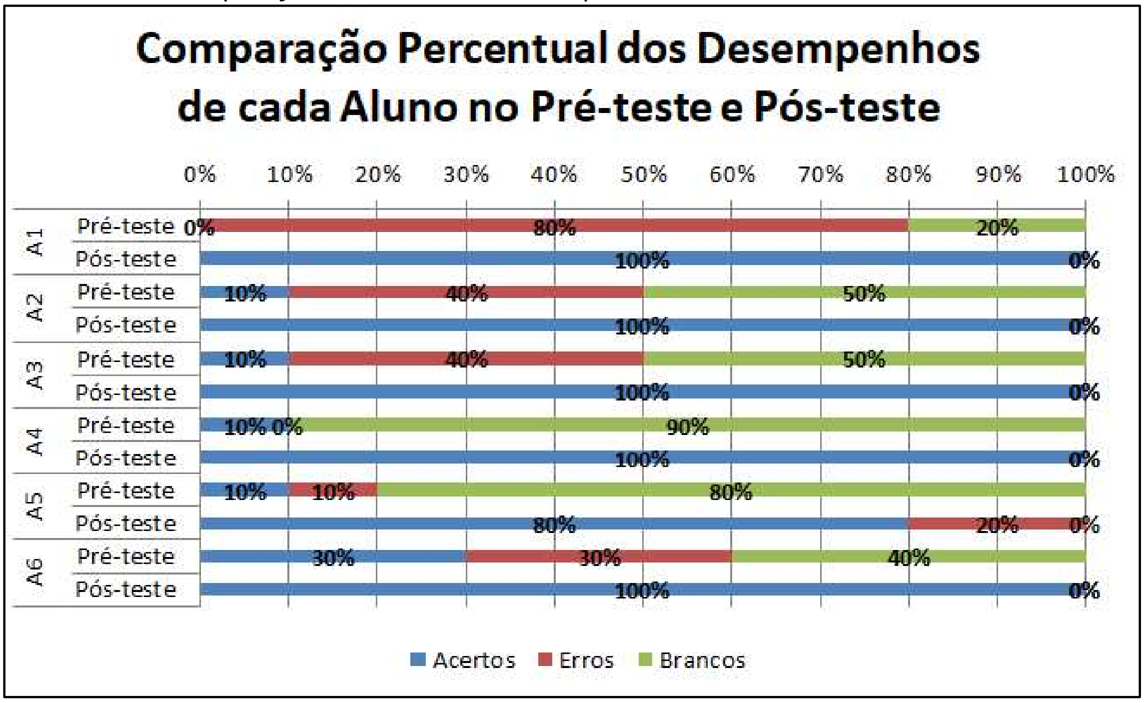
Acertos: número de questões respondidas de forma válida pelos alunos.
Erros: número de questões respondidas de forma inválida pelos alunos.
Em Branco: número de questões não respondidas.
Chute: marcação aleatória sem conexão com o conhecimento necessário para se resolver.
Acerto parcial: resposta válida, que se encontra com bom aproveitamento de validade.

Fonte: Autor (2021).

Diante dos dados apresentados no quadro 64, considerando a quantidade de acertos como nota do desempenho dos alunos, então se percebe que a nota média no pré-teste é aproximadamente 1,16 e no pós-teste é aproximadamente 9,66; assim percebe-se que o desempenho dos alunos foi maior no pós-teste. Isso indicou que a quantidade de acertos por aluno aumentou significativamente no pós-teste se comparado ao pré-teste. Com isso, a quantidade de erros também reduziu na maioria dos alunos.

Conforme os dados expostos no quadro 64, têm-se a seguir um gráfico expondo a comparação percentual entre as quantidades de acertos, erros e brancos de cada aluno durante o pré-teste e pós-teste.

Gráfico 20 – Comparação Percentual do Desempenho de cada Aluno no Pré-teste e Pós-teste



Fonte: Autor (2021)

Diante dos dados apresentados no gráfico anterior podemos observar que:

▪ Em se tratando do pré-teste, para cada aluno o maior percentual era de erros e respostas em branco, algo que ocorreu devido o pouco ou nenhum conhecimento dos alunos da amostra sobre o assunto. Apesar de muitos alunos nem fazerem ideia do que é número irracional, a maioria (A2, A3, A4, A5 e A6) acertou pelo menos uma questão, sendo suas respostas na maioria das vezes por chute (marcação aleatória sem vínculo com o conhecimento matemático). A aluna A6 alcançou maior desempenho (30% das questões) do que os demais alunos, embora também tenha chutado em muitas dessas questões, ela mostrou ter um resíduo de conhecimento bem superficial sobre números irracionais.

▪ Em se tratando do pós-teste, todos os alunos alcançaram maior percentual nos acerto, se comparado aos percentuais de erros e respostas em branco. Assim maioria dos alunos respondeu corretamente as questões, tendo eles alcançado desempenho máximo (100% de acertos), exceto a aluna A5, que alcançou um desempenho de 80%. Diante disso somente esta aluna teve porcentagens de erros, sendo essa porcentagem de 20% das questões.

Quanto às respostas em branco, a porcentagem foi de 0% para todos os alunos.

▪ A comparação dos dados do pré-teste e pós-teste aponta que houve aumento percentual do desempenho de todos os alunos, bem como a diminuição da porcentagem de erros e respostas em branco. Assim percebe-se que os efeitos da Sequência Didática repercutiram no aumento do desempenho de cada aluno sobre o assunto em questão.

Agora, observando o desempenho sob a perspectiva das questões, podemos comparar os dados do pré-teste e pós-teste para cada uma das questões, tem-se então o quadro a seguir sintetizando essas informações.

Quadro 65 - Resultados pareados das respostas dos alunos em cada questão dos pré-teste e pós-teste

Questão	**Acertos**		**Erros**		**Em Branco**	
	Pré-teste	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**
Q1 Conceituação	0	6	3	0	3	0
Q2 Identificação	0	6	4	0	2	0
Q3 - Exemplificação	0	6	3	0	3	0
Q4 Característica decimal	4 (chute)	6	2	0		0
Q5 Operações	0	6	4 (somente chutes)	0	2	0
Q6 Número π	1 (parcial)	6	1	0	4	0
Q7 Número ϕ	0	5	0	1	6	0
Q8 Número e	0	6	1	0	5	0
Q9 Densidade	0	5	2	1	4	0
Q10 Enumerabilidade	1 (chute)	6	1	0	4	0

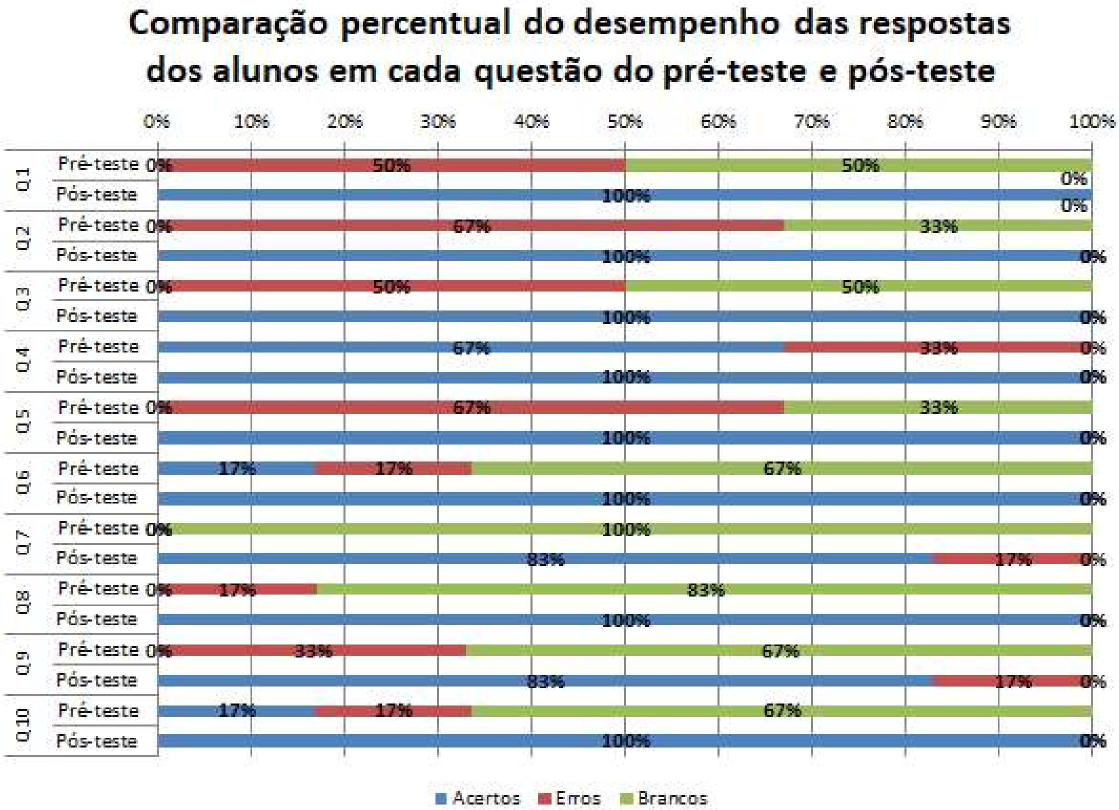
Acertos: número de questões respondidas de forma válida pelos alunos.
Erros: número de questões respondidas de forma inválida pelos alunos.
Em Branco: número de questões não respondidas.
Chute: marcação aleatória sem conexão com o conhecimento necessário para se resolver.
Acerto parcial: resposta válida, que se encontra com bom aproveitamento de validade.

Fonte: Autor (2021)

Diante das informações apresentadas no quadro 65, sabendo que a amostra foi composta 6 alunos, então percebe-se que em cada questão do pré-teste a média de alunos que acertou foi de 0,6 e no pós-teste foi de 5,8; assim percebe-se que após a sequência didática houveram mais estudantes que acertaram as questões.

Conforme os dados expostos no quadro 65, tem-se a seguir um gráfico expondo a comparação percentual entre as quantidades de acertos, erros e brancos em cada questão durante o pré-teste e pós-teste.

Gráfico 21 - Comparação Percentual das respostas dos alunos em cada questão do pré-teste e pós-teste



Fonte: Autor (2021)

Diante das informações apresentadas no gráfico anterior, podemos observar que:

▪ Em se tratando do pré-teste, a maioria das questões alcançou maior percentual de respostas deixadas em branco ou respondidas incorretamente, se comparado ao percentual de acertos, algo que ocorreu devido o pouco ou nenhum conhecimento dos alunos da amostra sobre o assunto. Mesmo diante dessas circunstâncias, houve questões com percentuais de acertos, as quais são as questões Q4, Q6 e Q10, porém esses acertos ocorreram por chute (marcação aleatória sem vínculo com algum conhecimento matemático que conduza à resposta correta).

▪ Em se tratando do pós-teste, a maioria das questões alcançou maior percentual de respostas corretas, algo que ocorreu devido os alunos terem agregado um maior conhecimento sobre o assunto de números irracionais na Sequência Didática. Mesmo diante dessa situação, houveram alguns percentuais de erros em algumas questões, como por exemplo nas questões Q7 e Q9, os quais tiveram uma porcentagem de 17% dos erros.

▪ A comparação dos dados do pré-teste e pós-teste aponta que houve aumento da porcentagem de acertos em todas as questões e diminuição da porcentagem de erros e respostas em branco. Assim percebe-se que os efeitos da Sequência Didática repercutiram no aumento do desempenho dos alunos na resolução de cada questão.

Os resultados do pré-teste, conforme já foi mencionado, indicaram um desempenho muito baixo sobre números irracionais. Este resultado indica que a aprendizagem dos participantes, sobre o assunto, se encontrava muito deficitária antes da aplicação da Sequência Didática. Isso é uma de várias evidências, também levantadas em muitos estudos revisados por este trabalho, como Roriz (2014), Moreira, Soares e Ferreira (1999), Broetto (2016) e Rocha (2018), os quais concluíram que grande parte dos alunos egressos do Ensino Fundamental não possuem os conhecimentos esperados sobre números irracionais, sejam eles do Ensino Médio ou Ensino Superior.

Sobre essa situação de pouca aprendizagem de números irracionais, conforme o PCN, apesar do assunto de Números Irracionais ocupar um razoável espaço no currículo do quarto ciclo (8º e 9º anos), seu ensino tem contribuído pouco para que os alunos desenvolvam seu conceito (BRASIL, 1998). O PCN também cita outro agravante, o formalismo matemático desse assunto que ao ser vinculado ao ensino pode dificultar a aprendizagem.

Em meio a essa e tantas outras problemáticas, os resultados apresentados no pós-teste indicaram que a sequência didática em questão soube contornar as dificuldades que poderiam influenciar na aprendizagem dos estudantes, mesmo diante das possíveis dificuldades epistemológicas do assunto tratado, pois o desempenho dos alunos aumentou bastante após a aplicação da Sequência Didática, conforme foi mostrado nos gráficos 20 e 21. Assim, comparando aos resultados do estudo experimental, por atividades, desenvolvido por Nobre (2017), percebe-se que, assim como ele concluiu, é possível afirmar que os estudantes do Ensino Básico são capazes de aprender noções básicas, complexas ou muito abstratas sobre números irracionais, necessitando para isso, manter foco nas ideias matemáticas fundamentais, sem abusar de formalismos ainda não dominados pelos alunos.

Os benefícios da sequência didática pautada no ensino por atividade em relação à aprendizagem são comprovados com os resultados apresentados, mas também é possível notar esses benefícios nas conclusões de outros trabalhos, como os que foram realizados por Schembergue e Pereira (2016), Nobre (2017) e Rocha (2018), os quais desenvolveram práticas de ensino experimental baseado em atividades, e alcançaram resultados muito satisfatórios para a aprendizagem de estudantes.

O conjunto desses resultados mostrou que a sequência didática foi bem sucedida, tendo fornecido muitos conhecimentos sobre números irracionais aos alunos, que antes da aplicação desse experimento não faziam nenhuma ideia do que seria esse tipo de número, mesmo todos eles sendo do Ensino Médio.

Mesmo a comparação visual dos resultados do pré-teste e pós-testes evidenciar que de fato a aplicação da sequência didática teve um efeito esperado na aprendizagem dos alunos, é importante estabelecer uma maior confiança dessa conclusão sobre aspectos estatísticos. A subseção 6.7 irá tratar sobre essa confiança.

A aplicação do pós-teste pode ser analisada se considerarmos tanto os acertos dos alunos, quanto os erros. Quanto aos erros, a próxima subseção irá tratar de analisa-los pra entender os motivos de terem acontecido.

6.6. Análise de Erro do Pós-teste

Mesmo com o estudo do desempenho dos estudantes no pós-teste há a necessidade de saber quais são as questões que eles mais erraram, os tipos de erros que mais foram cometidos e os motivos para que esses erros terem acontecidos. Diante disso, nessa subseção, foram analisados os erros cometidos pelos alunos no pós-teste.

Quanto à questão sobre identificação de racionais e irracionais, a qual possuía 22 números dispostos em um quadro e os alunos deveriam identificar os racionais e os irracionais. Com exceção do aluno A4, todos acertaram essa questão. O aluno A4 acertou parcialmente essa questão por classificar cinco números de forma errada. O quadro a seguir descreve a resposta dele:

Descrição da folha de preenchimento do Aluno A4
A4: Dentre os 22 casos ele errou em indicar como sendo Irracional, os números $\sqrt{4}$, $0{,}000001$, $-\frac{1}{4}$, $0{,}12333\ldots$ e indicar como Racional o número $\sqrt{12}$.

O motivo dos erros do aluno A4 são vários, o primeiro está no fato desse aluno não ter um bom domínio do calculo de raízes (algumas vezes acerta, outras vezes erra), por isso as vezes ele acabava dando palpites equivocados, tanto na experimentação, quanto no pós-teste, como achar que $\sqrt{12}$ tem raiz 6 e achar que $\sqrt{4}$ não tem raiz exata. Vale acrescentar que foi comentado com ele anteriormente sobre essa dificuldade e foi oferecido calculadora caso ele tivesse dúvida, mas na aplicação dos pós-teste ele dispensou calculadora para verificar as raízes e respondeu as questões com confiança.

O número $0{,}000001$ foi indicado por ele como sendo irracional, devido não perceber repetição e achar que esse número tinha infinitas casas decimais, diante disso atribui-se a esse erro por falta de atenção, pois já havia sido trabalhado casos como esse na experimentação, e por isso ele tinha consciência da característica decimal de um irracional.

Ele também indicou a dízima periódica 0,12333... como sendo irracional, enquanto que na mesma questão dizimas como 0,333... e 0,111... eram indicadas como racionais. Ao finalizar o pós-teste foi perguntado a ele o porquê de indicar 0,12333... como número irracional. Ele relatou dizendo que eram números diferentes, depois ao perceber que esse número tem repetição periódica, rapidamente quis corrigir o erros dele. Desse modo, percebe-se que esse erro é outro caso de falta de atenção.

Um outro erro desse aluno por falta de atenção foi em indicar o número $-\frac{1}{4}$ como sendo irracional, o que pareceu muito estranho, pois na primeira questão que perguntava sobre o que são números irracionais ele declarou serem números ‘que não pode fazer fração’. Portanto este erro pode ter sido cometido por falta de atenção ou por não estar familiarizado com frações negativas o que pode ter influenciado ele a considerar como não sendo fração e com isso sendo irracional. Após o termino do pós-teste ele declarou não ter prestado muita atenção. Vale acrescentar que embora ele tenha errado a classificação dos cinco números apresentados anteriormente, ele acertou nos 17 números restantes.

Quanto a questão 5 (Q5), a qual possuía 9 alternativas de verdadeiro e falso, tratava sobre as propriedades operatórias entre racionais e irracionais. Todos acertaram essa questão, exceto a aluna A5 que acertou parcialmente essa questão por errar as alternativas h) e i), apresentadas a seguir, e acertar as demais.

Resposta da aluna A5 enviada pelo whatsapp.
h)(V) A divisão (÷) de um número **racional** por um número **irracional** sempre resulta em um número **racional**. Justifique: (Não justificou) i)(F) A divisão (÷) de um número **racional** por um número **irracional** sempre resulta em um número **irracional**. Justifique: (Não justificou)

O motivo para esses erros não está ligado a algum problema na aprendizagem porque essa aluna acertou uma questão semelhante a essa na atividade de aprofundamento sobre propriedades operatórias de irracionais. Atribui-se como motivo para esse erro a seguinte ideia: o fato das respostas esperadas para as alternativas serem a)F b)F c)F d)V e)F f)V g)F h)F i)V, assim a aluna percebeu que o par de alternativas d) e e) que tratavam de 'adição' praticamente tinham as mesmas respostas que o par seguinte f) e g) que tratavam de 'multiplicação', daí ela supôs que o próximo par que tratava de divisão também tivesse, essas mesmas respostas, ou seja, h) V e i)F, porém ela errou. Portanto este erro ocorreu por falta de atenção ao que de fato foi requerido na questão.

Quanto à questão 7 (Q7), requeria que os alunos respondessem sobre que é ϕ e qual o seu significado. Era esperado que os alunos escrevessem algumas das seguintes respostas: que é um número irracional de aproximação 1,6; que é um número que pode ser escrito como $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; que é um número obtido da razão entre o comprimento $1+\sqrt{5}$ e largura 2 de um retângulo (retângulo de ouro); ou que é um número irracional considerado número da perfeição (da beleza, de ouro, divino) de aproximação 1,6; ou alguma resposta semelhante à alguma dessas.

O único aluno cuja resposta não teve nenhum aproveitamento foi a aluna A5 cuja resposta está registrada no quadro a seguir:

Resposta da aluna A5 enviada pelo whatsapp.
A razão aproximadamente 2/1+√5

Ao observar essa resposta, percebe-se que essa aluna errou, por não lembrar ou confundir a ordem de posicionamento da razão $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ com a ordem $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$, assim chegou perto de estar certa em sua resposta, porém ela deixou de escrever outros detalhes importantes como "é um número irracional" ou "tem valor aproximado de 1,6" assim a respostas que ela forneceu possivelmente é a única coisa ela lembrava da atividade 11. Vale acrescentar que na atividade 11 havia uma questão que perguntava o que é ϕ, ela respondeu de forma válida, dizendo que esse número é a razão $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

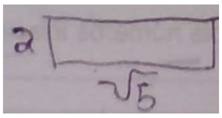
Assim, atribui-se como motivo para este erro, a pouca lembrança, da aluna A5, sobre os conhecimentos assimilados na atividade 11. Mas ainda sim, sua resposta guarda uma lembrança residual sobre os conhecimentos pouco assimilados, e que foram discutidos posteriormente com ela para corrigi-los.

Ainda nessa questão (Q7) houveram respostas com detalhes errados, mas que guardavam um satisfatório aproveitamento, cuja correção as classificaram como Parcialmente Corretas. Essas respostas estão apresentadas no quadro a seguir:

Transcrição das folhas de preenchimento dos alunos A1, A4 e A6

A1: 1,618..., conhecido como numero divino e irracional, nº da beleza encontrado em várias obras de arte

A4: é um numero irracional 1,6



A6: É um numero também irracional algébrico, surge a partir do calculo da razão do comprimento 2 e largura 1+ √5 de um retângulo de ouro. Valor aproximado de 1,6. Recebe nomenclaturas como numero divido, numero da beleza, etc.

Os alunos A1 e A4 escreveram respostas válidas, e ambos tentaram ilustrar um retângulo de ouro para complementar suas respostas, entretanto eles indicaram como se esse retângulo tivesse comprimento $\sqrt{5}$ e largura 2, o que representa um erro, pois o comprimento correto deveria ser $1+\sqrt{5}$. Embora esse detalhe esteja errado, ele não torna errado o restante das respostas dos alunos A1 e A4 que a proposito responde o que a questão pede, além disso o fato desses alunos lembrarem do retângulo de ouro representa que a atividade 11 da sequência didática gerou lembranças ilustrativas significantes, mesmo que estejam um pouco erradas.

A aluna A6 escreveu uma resposta bastante abrangente e que responde o que se pede na questão, porém em um trecho da sua resposta ela errou em um pequeno detalhe, ela confundiu os termos comprimento e largura do retângulo de ouro, que possivelmente foi provocado por não entender que o comprimento de um retângulo é a medida do lado maior e a largura é o lado menor, ou talvez entenda isso, mas não compreende que $1+\sqrt{5}$ é maior que 2, portanto o comprimento do retângulo de ouro é $1+\sqrt{5}$ e a largura é 2. Assim, o trecho da resposta dela que fala sobre isso, direciona ao mesmo erro cometido pela aluna A5, que o ϕ é obtido da razão $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$. Após terminar o pós-teste foi discutido essa resposta com ela, ela revelou que sabia que o ϕ era obtido da razão do lado maior (comprimento) e do lado menor (largura), mas que achava que 2 era maior que $1+\sqrt{5}$.

Quanto à questão 8 (Q8), era requerido que os alunos respondessem sobre que é e e qual o seu significado. Era esperado que os alunos escrevessem algumas das seguintes respostas: que é um número irracional de aproximação 2,7 e que foi descoberto com o trabalho com capitalização contínua; ou que é um número que pode ser escrito como $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ com n aumentando infinitamente; ou alguma resposta semelhante à alguma dessas. O único aluno que errou completamente essa questão foi a aluna A5 cuja resposta está registrada no quadro a seguir:

Resposta da aluna A5 enviada pelo whatsapp.
Aproximadamente 2,71

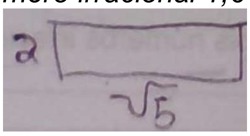
Ao observar essa resposta, percebe-se que essa aluna não forneceu uma resposta com um bom aproveitamento, pois embora ela esteja correta e fosse esperado também essa reposta, não é falado que e é um número irracional, muito menos faz referencia sobre a situação de capitalização contínua que o gera, apenas fala sobre seu valor aproximado, assim ela se encontra incompleta, o que torna essa resposta parcialmente correta.

Percebe-se que a única lembrança que a aluna teve naquele momento da atividade 12 foi de que e é aproximadamente 2,7. Após finalizar essa atividade, ela revelou que não lembrava da situação da capitalização continua que foi tratado na atividade 12, por não entender desse assunto, nem mesmo passou pela mente dela em responder que e é um número irracional.

Quanto a questão 9 (Q9), era requerido que os alunos respondessem se o conjunto dos números irracionais é denso ou não denso. Era esperado que respondessem ‘denso’. Quase todos os alunos responderam corretamente, somente a aluna A5 respondeu ‘Não denso’, mesmo ela tendo acertado uma questão similar a essa na atividade 6, mostrando que o erro que essa aluna cometeu foi motivado por esquecimento. Após terminar a atividade ela explicou que não lembrava o que densidade significava.

Os erros apresentados e analisados nessa subseção foram sintetizados no quadro a seguir:

Quadro 66 – Erros cometidos pelos alunos que tornaram respostas incorretas ou parcialmente corretas

Questões	Critério	Pós-teste	Descrição do erro
Q4 – identificação de racionais e irracionai			**A4:** Dentre os 22 casos ele errou em indicar como sendo irracional, os números $\sqrt{4}, \quad 0{,}000001, \quad -\frac{1}{4}, \quad 0{,}12333\ldots$ e indicar como Racional o número $\sqrt{12}$ **Motivo do erro:** os erros envolvendo raiz atribuem-se como motivo a dificuldade de calcular raízes, os demais ocorreram por falta de atenção.
Q5 Operações	Acertos Parciais	1 acerto parcial	**A5:** h) *Verdadeiro* i) *Falso* (na verdade a resposta correta é Falso na h) e verdadeiro na i) **Motivo do erro:** falta de atenção, pois ela sabia do assunto abordado.
	Erros	0	___
Q7 Número ϕ	Acertos Parciais	3 acertos parciais	**A1:** *1,618..., conhecido como numero divino e irracional, nº da beleza encontrado em várias obras de arte*  (acertou na escrita, mas errou no desenho) **Motivo do erro:** esquecimento de que o comprimento correto é $1+\sqrt{5}$. **A4:** *é um numero irracional 1,6*  (acertou na escrita, mas errou no desenho) **Motivo do aproveitamento parcial:** esquecimento de que o comprimento correto é $1+\sqrt{5}$ **A6:** *É um numero também irracional algébrico, surge a partir do calculo da razão do comprimento 2 e largura 1+ √5 de um retângulo de ouro. Valor aproximado de 1,6. Recebe nomenclaturas como numero divido, numero da beleza, etc.*

			(acertou na escrita, mas errou em achar que o comprimento é 2 e largura é 1+ √5) **Motivo do erro:** achava que 2 era maior que 1+√5, mostrando que tem dificuldade em comparação de números envolvendo radicais**.**
	Erros	1	**A5:** *A razão aproximadamente 2/1+√5* (confundiu a ordem de posicionamento da razão $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ com a ordem $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$) **Motivação do erro:** lembranças distorcidas de informações trabalhadas na atividade 11.
Q8 Número e	Acertos Parciais	1 acerto parcial	**A5:** *Aproximadamente 2,71* (essa resposta só traz a ideia de que o número e é não exato, mas não especifica que é irracional) **Motivação do erro:** esquecimento de outros detalhes importantes que poderiam especificar melhor a resposta como “é um número irracional”.
	Erros	0	___
Q9 Densidade	Acertos Parciais	0	___
	Erros	1	**A5:** *Não denso* (na verdade os irracionais são densos) **Motivação do erro:** esquecimento do significado de densidade.

Fonte: Autor (2021)

Diante de tudo que foi apresentado, notou-se que os erros foram causados por esquecimento, falta de atenção, ou pré-requisitos pouco compreendidos. Mas a maioria dos erros foi causada por esquecimento.

Uma observação importante de se fazer é que dentre os alunos que erraram, a aluna A5 foi quem teve maior quantidade de erros. Sendo a maioria deles causados por esquecimento de noções já trabalhadas em atividades anteriores. É importante destacar que essa aluna era do 3º ano do EM e que estava participando desse trabalho para melhorar sua aprendizagem em matemática que segundo ela não era tão boa. Relatou também que suas aulas de matemática estão ocorrendo online e com isso torna-se difícil tirar duvidas de matemática com o professor, bem como de professores de outras disciplinas. Mesmo apresentando esses erros, a aluna A5 teve um bom aproveitamento no pós-teste de 8 acertos, que comparado ao pré-teste onde ela acertou apenas uma questão por ‘chute’, pode-se dizer que conseguiu assimilar muitos conhecimentos no experimento.

Outro aluno que se destacou em seus erros parciais foi o aluno A4, que já havíamos comentado que ele teve um estudo muito deficitário, sobretudo nos anos de 2020 e de 2021 em que os impactos da pandemia de COVID-19 atingiram as escolas públicas, além de estudar matemática muito pouco em casa devido sua mãe (mãe solteira) também não ter muita base em matemática pra lhe ensinar. Mesmo com alguns erros, esse aluno teve um bom aproveitamento no pós-teste o que mostra que ele de fato conseguiu assimilar muitos conhecimentos no experimento.

De forma geral, ao analisar os erros cometidos no pós-teste e suas motivações, percebeu-se que não tinham relação com a epistemologia do assunto tratado ou pelo fato de alguma abordagem da Sequência Didática ser inadequada aos alunos, mas eram casos particulares motivados na maioria das vezes por esquecimento.

6.7. Teste de Hipóteses

Mesmo a comparação visual dos resultados do pré-teste e pós-testes evidenciar que de fato a aplicação da sequência didática teve um efeito esperado na aprendizagem dos alunos, houve a necessidade de estabelecer uma confiança maior sobre essa conclusão sob os moldes estatísticos. Diante disso, resolvemos aplicar o chamado ‘teste de hipótese’, que é uma metodologia estatística que auxilia a tomada de decisões sobre uma ou mais populações baseado na informação obtida da amostra.

Conforme Moodle (2021), esse tipo de teste permite verificar se os dados amostrais trazem evidência que apoiem ou não uma hipótese estatística formulada. Pra isso, é necessário comparamos as médias de duas distribuições normais de uma mesma população, no entanto em dois momentos diferentes, que no caso do experimento deste trabalho são o momento do pré-teste e o momento do pós-teste. A estatística de teste padronizada adotada foi a t-student para as diferenças entre médias de amostras dependentes. “Duas amostras são dependentes quando cada elemento de uma amostra corresponde a um elemento da outra amostra” (LARSON; FARBER, 2016, p. 391). A estatística de teste padronizada t-student para amostras dependentes é dada pela seguinte equação:

$$t_{calc} = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$$

Onde

n é o numero de sujeitos da pesquisa;

d é a diferença entre os resultados no pré-teste e no pós-teste;

$\bar{d}$ é a média das diferenças nas notas do pré-teste e pós-teste, calculado como $\bar{d} = \frac{\sum di}{n}$;

μ_d é a média hipotética das diferenças de dados emparelhados na população;

S_d é o desvio padrão amostral das diferença entre os resultados no pré-teste e no pós-teste, calculado como $S_d = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$;

O grau de liberdade é o elemento utilizado para construir o gráfico da t-student, sendo calculado como $n - 1$ = 6 - 1 = 5.

Antes de aplicar este teste, inicialmente consideremos o quadro a seguir, dispondo as notas absolutas dos estudantes nos dois testes. Como foram 10 questões, as notas foram tabuladas nesse quadro, conforme o número de questões corretas de cada estudante.

Quadro 67 – Notas conforme os Acertos

	pré	pós
A1	0	10
A2	1	10
A3	1	10
A4	1	10
A5	1	8
A6	3	10

Fonte: Autor (2021)

Diante disso, pode-se fazer a hipótese “média do pré-teste é menor que no pós-teste” sendo esta a nossa hipótese alternativa, enquanto que a hipótese nula seria “média do pré-teste é maior ou igual ao pós-teste”. Assim teremos:

Hipóteses

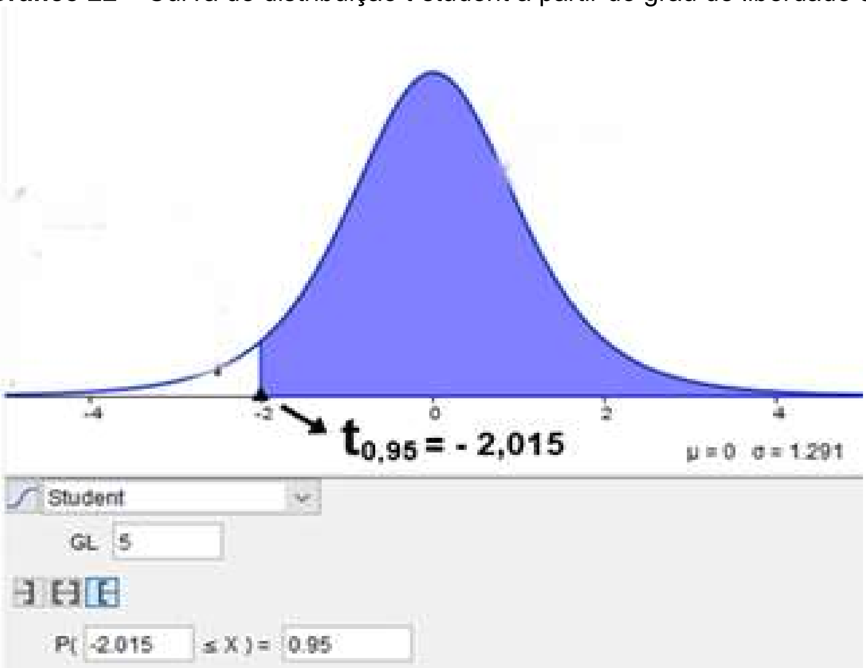
H_0: $\mu_{pré} \geq \mu_{pós}$

H_1: $\mu_{pré} < \mu_{pós}$

Nosso objetivo neste momento é aplicar a t-student para perceber se a hipótese H_0 deve ser ou não descartada conforme a probabilidade P(t) estabelecida nesse gráfico, que vamos definir com nível de significância de 95%.

Ao observar o gráfico t-student do tipo unilateral à esquerda no Geogebra, para um grau de liberdade 5 e com nível de significância de 95% ou 0,95 teremos um t crítico ($t_{0,95}$) de -2,015, conforme o gráfico a seguir presenta.

Gráfico 22 – Curva de distribuição t-student a partir do grau de liberdade 5



Fonte: Autor (2021)

Agora vamos calcular o parâmetro t da distribuição obtida no experimento, mencionada anteriormente como t_{calc}, desenvolvendo os cálculos para obtenção dos elementos teremos:

Quadro 68 – Tratamento estatístico dos resultados do pré-teste e pós-teste

Alunos	Pré	Pós	d	$(d_i - \bar{d})^2$
A1	0	10	-10	2,25
A2	1	10	-9	0,25
A3	1	10	-9	0,25
A4	1	10	-9	0,25
A5	1	8	-7	2,25
A6	3	10	-7	2,25
			$\sum di$=-51 ($\bar{d}$ = -8,5)	7,5

Fonte: Autor (2021)

Cálculo do t observado

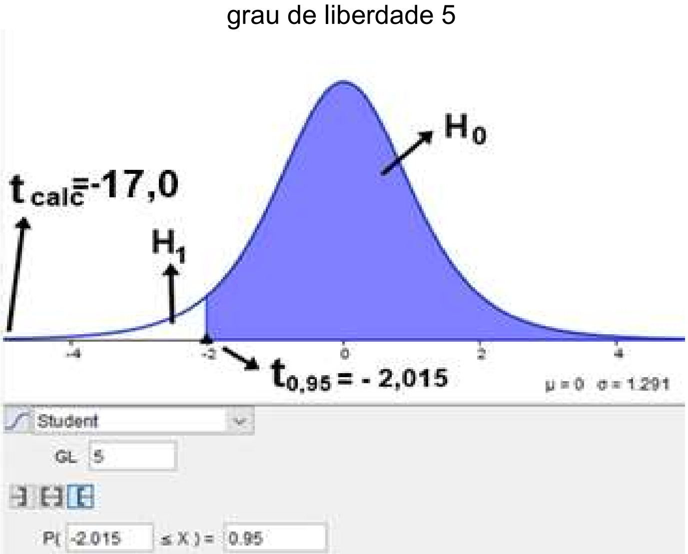
$\bar{d} = \frac{\sum di}{n}$ $\quad \bar{d} = \frac{-51}{6}$ = - 8,5

$S_d = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{7,5}{6-1}} = \sqrt{\frac{7,5}{5}} = \sqrt{1,5} \cong 1,224$

$t_{calc} = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{-8,5-0}{\frac{1,224}{\sqrt{6}}} \cong -17,0$

Agora, é possível comparar com o t calculado (t_{calc}) com o t crítico ($t_{0,95}$). Onde, se $t_{calc} \geq t_{0,95}$ então não descarta-se H_0, se $t_{calc} < t_{0,95}$ então descarta-se H_0. Desse modo, chegamos a conclusão de que H_0 deve ser descartada, pois $t_{calc} \cong -17$ e $t_{0,95}$ = -2,015 então $t_{calc} < t_{0,95}$.

Gráfico 23 – Comparação entre o t calculado e o t crítico da curva de distribuição t-student de grau de liberdade 5



Fonte: Autor (2021)

A probabilidade de correr a hipótese inicial está representada no espaço em azul do gráfico 23. O T calculado (t_{calc}) do teste resultou em aproximadamente -17, valor que ficou bem abaixo de – 2,015, local onde a hipótese nula (H_0) seria válida. Sendo assim, com uma confiança de 95%, rejeita-se a hipótese inicial, isto é, a hipótese nula H_0 $(\mu_{pré} \geq \mu_{pós})$ e se aceita a hipótese alternativa H_1, comprovando que $\mu_{pré} < \mu_{pós}$, ou seja, o pós-teste apresentou, estatisticamente, melhores notas de que o pré-teste e que os estudantes obtiveram melhores rendimentos após a aplicação da sequência didática.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi analisar a aprendizagem gerada pela aplicação de uma Sequência Didática sobre Números Irracionais em alunos do Ensino Médio. Para isso adotou-se uma abordagem quantitativa qualitativa, guiando-se pela metodologia de pesquisa Engenharia Didática. Nesse sentido, o trabalho caminhou pelas etapas: Análises Prévias; Concepção e Análise a Priori; a Experimentação e a Análise a Posteriori.

Quanto à seção Análises Prévias:

▪ Nos Aspectos Históricos (subseção 3.1) observamos que em meio curso da história da humanidade, gradativamente as ideias de contínuo e discreto foram ganhando notoriedade, iniciando-se com a percepção que nem toda grandeza geométrica poderia ser medida (referente aos números irracionais), e com isso o conceito de número irracional foi se desenvolvendo em meio a sua formalização e caracterização;

▪ Na Fundamentação Matemática (subseção 3.2), o conhecimento bibliográfico levantado ajudou a compreender o que se precisa alcançar de aprendizagem na Sequência Didática, a partir de noções sobre os números irracionais como: conceito, enumerabilidade, cardinalidade, densidade, dentre outros;

▪ Nos Obstáculos Epistemológicos (subseção 3.3), as informações ajudaram a evitar alguns obstáculos na aprendizagem de números irracionais durante a etapa de experimentação, bem como na etapa de construção da sequência didática para também evita-los;

▪ Nos Aspectos Curriculares (subseção 3.4), foi possível conhecer como o assunto de Números Irracionais é abordado no currículo do Ensino Básico, além de questionamentos e potencialidades no processo de ensino e aprendizagem deste assunto, como, por exemplo, a não adequação em aborda-lo no Ensino Fundamental em seu aspecto formal; além da importância de ensina-lo para explorar concepções como discreto, continuo, exato, aproximado, finito e infinito. O conjunto de informações desse tópico ajudou a compreender os aspectos curriculares necessários para estruturar a Sequência Didática proposta;

▪ Na Revisão de Estudos (subseção 3.5), pôde-se conhecer o que se tem discutido na literatura acadêmica e científica sobre o processo de ensino e aprendizagem do assunto referido, algo que possibilitou ter um uma visão sobre muitos fatos peculiares aos Números Irracionais, como a necessidade de melhorar o ensino deste assunto, levando em conta que muitos trabalhos indicam que o conhecimento sobre números irracionais tem se mostrado insuficiente em alunos do Ensino Fundamental, Ensino Médio, Ensino Superior, sendo que esse problema se estende a alguns professores de matemática e até mesmo livros didáticos. Essa compreensão revelou a necessidade de criar estratégias didáticas e metodológicas para o ensino de números irracionais.

▪ Nas Concepções Discentes (subseção 3.6), foi possível formular um diagnóstico que ajudou a compreender várias informações sobre os alunos da amostra que podem se apresentar em outros alunos do Ensino Básico. Uma dessas informações é que a maioria dos estudantes possui pouco conhecimento sobre o assunto de números irracionais, embora muitos já tenham o estudado. Além disso, existem fatores que podem influenciar nesse pouco aprendizado ou a não fixação deste conteúdo, como aulas que seguem o modelo tradicional e a situação de muitos estudantes não terem ajuda dos responsáveis em casa para estudar matemática. Diante desses resultados, percebeu-se que ao elaborar uma Sequência Didática sobre este assunto deve-se utilizar diferentes recursos e metodologias de ensino que diferenciem do ensino tradicional.

▪ Nas Tendências da Educação Matemática (subseção 3.7) percebeu-se que para cada tópico ensinado de Números Irracionais, pode-se ter um, ou mais, metodologias e/ou recursos metodológicos, dependendo do mais adequado a se utilizar fase de experimentação, tornando-a mais dinâmica e atrativa aos estudantes.

▪ No Mapa Conceitual (subseção 3.8), observamos como se organiza a estrutura do assunto em questão a partir dos tópicos que ele compõe. A estrutura sintética do mapa conceitual auxiliou na construção da Sequência Didática que foi proposta neste trabalho.

Quanto à seção Concepção e Análise a Priori (seção 4), dispondo de todo arca bolço de informação reunido na seção de Análises Previas, foi possível construir uma Sequência Didática contendo 12 atividades para o ensino de números irracionais. Esse objeto de aprendizagem foi estruturado com base na metodologia Ensino por Atividade, cujo efeito da experimentação nos alunos foi validado por um pré-teste e um pós-teste que foram apresentados também nesta mesma seção.

Na seção de Experimentação (seção 5), foi descrito como ocorreu a aplicação da Sequência Didática com os alunos, onde foram citadas as circunstâncias e procedimentos da aplicação das atividades que compõem essa sequência. Nessa fase, os alunos tiveram uma boa receptividade quanto às atividades da Sequência Didática, bem como aos recursos metodológicos (calculadora e HQ) que os auxiliaram na realização das atividades, deixando-as mais práticas e rápidas.

Quanto à seção de Análise a Posteriori e Validação (seção 6), foi apresentada a análise dos dados obtidos da fase de experimentação, bem como a conclusão da validação proporcionada pelos pré-teste e pós-teste e a análise dos erros obtidos no pós-teste. Dentre os resultados obtidos, a comparação dos dados do pré-teste e pós-teste aponta que houve aumento percentual do desempenho de todos os alunos, bem como a diminuição da porcentagem de erros e respostas em branco. Também foi percebido que em todas as questões houve aumento da porcentagem de acertos e diminuição da porcentagem de erros e respostas em branco. Assim percebe-se que os efeitos da Sequência Didática repercutiram no aumento do desempenho dos alunos na resolução de cada questão.

O conjunto desses resultados mostrou que a Sequência Didática foi bem sucedida em seu objetivo, tendo fornecido muitos conhecimentos sobre o assunto de Números Irracionais aos alunos. Para estabelecer maior confiança sobre essa conclusão sob os moldes estatísticos, aplicou-se o chamado 'teste de hipótese'. Diante dos cálculos realizados e a análise do gráfico t-student comprovou-se que o pós-teste apresentou melhores notas do que o pré-teste e que os estudantes obtiveram melhores rendimentos após a aplicação da Sequência Didática.

Ainda na seção 6, foram analisados os erros cometidos pelos alunos no pós-teste. Ao analisar esses erros e suas motivações, percebeu-se que não tinham relação com a epistemologia do assunto tratado ou pelo fato de alguma abordagem da Sequência Didática ser inadequada aos alunos, mas eram casos particulares, que na maioria das vezes, eram causados por esquecimento.

O conjunto dos resultados mostrou que a sequência didática foi bem sucedida, tendo fornecido muitos conhecimentos sobre números irracionais aos alunos participantes, respondendo com isso a questão de pesquisa que foi formulada inicialmente, ou seja, qual o efeito da aplicação de uma Sequência Didática no ensino e aprendizagem de números irracionais?

Da mesma forma podemos afirmar que o objetivo da pesquisa 'analisar a aprendizagem gerada pela aplicação de uma Sequência Didática sobre Números Irracionais' foi alcançado perante aos resultados e conclusões apresentados anteriormente

Diante dos resultados, acredita-se ter alcançado os cinco objetivos específicos, definidos inicialmente, pois foi apresentado um referencial teórico que organizou e orientou a apresentação e o desenvolvimento significativo do tema dos números irracionais no Ensino Básico. Também se desenvolveu uma compreensão do conteúdo de números irracionais sobre várias perspectivas como a conceitual, a histórica, a curricular, a diagnóstica do processo de ensino e aprendizagem em pesquisas acadêmicas e científicas, a diagnóstica da aprendizagem na concepção discente e nas possibilidades didáticas de ensino.

No curso deste trabalho, também foi elaborado uma Sequência Didática que auxiliou no processo de ensino e aprendizagem dos conhecimentos teóricos apresentados sobre números irracionais, levando em consideração as várias perspectivas deste conteúdo no âmbito do ensino e aprendizagem. Diante disso, aplicou-se esta Sequência Didática em uma amostra de alunos, cuja aprendizagem sobre o tema foi analisada, e se mostrou satisfatória.

A importância da Sequência Didática proposta transcende o âmbito experimental para um patamar onde possa ser utilizada na prática docente a respeito do ensino do assunto de Números Irracionais e outros conhecimentos ligados a este. Assim, o conjunto de atividades apresentadas, auxiliadas aos recursos calculadora e revistas em HQ, constituem um Produto Educacional que pode auxiliar na prática de ensino de matemática no Ensino Básico.

Por fim, este trabalho alcançou o objetivo pelo qual se propôs, no entanto seu desenvolvimento será aproveitado em trabalhos futuros, voltados tanto para Ensino Médio, quanto para o Ensino Fundamental e Ensino Superior. Espera-se que o conteúdo abordado seja capaz de corroborar o trabalho de outros pesquisadores da Educação Matemática, bem como auxiliar na prática de ensino de professores de matemática.

Ao finalizar o texto deste trabalho, sob uma perspectiva pessoal, acreditamos ter contribuído muito para o aprendizado dos alunos da pesquisa, pois o desenvolvimento desse trabalho foi muito enriquecedor para o conhecimento deles, e muito além disso, foi muito enriquecedor também para a nosso conhecimento em saber planejar e executar um ensino experimental, onde o aluno é agente ativo no processo de ensino. Esperamos que todos os professores que tiverem contato com este trabalho possam também compartilhar desse maravilhoso conhecimento.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P.; LEAL, L.C.; PONTE, J. P. **Investigar para Aprender Matemática (textos selecionados)**. Lisboa: Grupo “Matemática Para Todos – investigações na sala de aula” (CIEFCUL) e Associação de Professores de Matemática, 1998.

ALMOULOUD, Saddo Ag; QUEIROZ, Cileda de; COUTINHO, Silva. **Revemat:** Revista Eletrônica de Educação Matemática, 2008.

BRASIL. **Estatuto da criança e do adolescente:** Lei n. 8.069, de 13 de julho de 1990, e legislação correlata. 14. ed. Brasília: Câmara dos Deputados, Edições Câmara, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/04/BNCC_19mar2018_versaofinal.pdf>. Acesso em: 13 de abr. 2019.

BRASIL. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP)**. Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb). Matriz de Referência de Matemática do Saeb: Temas e seus Descritores. 2001. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/matriz_de_referencia_de_lingua_portuguesa_e_matematica_do_saeb.pdf. Acesso em: 13 de fev. de 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: SEF/MEC, 1998.

BOMGIOVANI, Cesar Augusto Oliveira et al. **Teoria das Proporções de Eudoxo e os Incomensuráveis**. 2018. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=2447541>. Acesso em: 02 Jul. 2021.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BROETTO, Geraldo. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes da licenciatura em matemática**. 2016. 588 f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

BROETTO, G. C.; WAGNER V. M. P. S. O Ensino de Números Irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso? **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 33, n. 64, p. 728-747, ago. 2019.

CÂMARA, M. C.; RODRIGUES, M. da S. O Número Φ. **FAMAT em Revista**. n.11, Uberlândia-MG, 2008.

CALHEIROS, José Cícero. **O cálculo com enfoque geométrico Campinas**. 2016. 144 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional.) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.

CARDOSO, Jennifer Caroline Maia. **Números Irracionais e Tecnologias da Informação e Comunicação:** Possibilidades de Encontro. 2019. 77f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei – MG, 2018.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. **Zetetike**, Campinas-UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118

CARVALHO, Sônia Pinto de. A área e o perímetro de um círculo. **1º Colóquio de Matemática da Região Sudeste**. Minas Gerais, 2011. Disponível em: https://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SE-1.02.pdf. Acesso em 02 de Jul. de 2021.

CEE. **Resolução N° 001 de 05 de Janeiro de 2010**. Disponível em: <http://www.cee.pa.gov.br/sites/default/files/RESOLUCAO_001_2010_REGULAMENTACAO_EDUC_BAS-1.pdf> Acessado em 25 de Jun. de 209.

CERRI, Cristina. **Desvendando os Números Reais**. 2006. Disponível em: https://www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/cristina.cerri.pdf. Acesso em 02 de Jul. de 2021.

COSTA, A. B.; OLIVEIRA R. de F. S. de; LOPES, T. B. Dos Logaritmos de Napier à mais Bela de todas as Fórmulas. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S.L.], v. 4, n. 12, p. 26 – 40, 2017.

COSTA, L. V. O. **Números Reais no Ensino Fundamental:** Alguns Obstáculos Epistemológicos. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação da

Área de Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

CORRÊA, Francisco Júlio Sobreira de Araújo. **Introdução à Análise Real**. Belém: UFPA, Faculdade de Matemática, Matemática a Distância, Belém, 2008.

CORBO, O.; PIETROPAOLO, R. C.; AMORIM, M. E. A Interação entre os Componentes Intuitivo, Algorítmico e Formal no Ensino dos Números Irracionais na Educação Básica. **JIEEM**, [S. L.], v.11, n.3, p. 210-219, 2018.

CRUZ, Willian José da; SOARES, Carlos Alberto Santana. Um olhar para as dízimas periódicas: convite ao professor da educação básica. **XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM)**, Recife, 2011.

CURRAN, Leo C. **Parthenon de Atenas**. 1957. Disponível em: https://greciantiga.org/img.asp?num=0126. Acesso em 02 de Jul. de 2021

DELLAJUSTINA, F. J.; MARTINS, L. C. Poderia Arquimedes ter calculado π com areia e um bastão? **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 36, n. 3, Joinville-SC, 2014.

DUARTE, Carlos Eduardo de Lima. **Conjuntos Numéricos**. 2013, 41f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, 2013.

DUARTE, Wellington Evangelista. Obstáculos epistemológicos no ensino de matemática. Colóquio Luso-Brasileiro de Educação (COLBEDUCA), n.3, v.2, 2017, Florianópolis/SC. **Anais do III COLBEDUCA**. Florianópolis/SC: [S.N.], 2017. [online].

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP. 2004.

EVES, Howard. **Introdução á História da Matemática**. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011. 848p.

FELIX, S. F. **Estudo de Abordagens dos Números Irracionais nos Anos Finais do Ensino Fundamental**. 2018. Dissertação (Mestrado em matemática do Programa de Pós-graduação em Educação) - Unidade Acadêmica Especial de Matemática, Universidade Federal de Goiás Regional Catalão, Catalão, 2018.

FERREIRA, R. D. L. da C. **Georg Cantor e os Números Transcendentes**. 2014. 46 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Ciências e Tecnologia. Coimbra, 2014. Disponível em: https://estudogeral.uc.pt/handle/10316/33689. Acesso em 02 de Jul. de 2021.

FIGUEIRA, Ramon Formiga. **O número de Euler**. 2017. 79 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PROFMAT, João Pessoa, 2017.

FIGUEIREDO, Djairo Gedes de. **Números Irracionais e Transcendentes**. 3ª ed. Campinas: SBM, 2002.

FLEMMING, Diva Marília. **Tendências em educação matemática**. 2º ed. Palhoça: UnisulVirtual, 2005.

FONSECA, Tânia Maria de Moura. **Ensinar x Aprender:** Pensando a prática pedagógica. Material didático – Projeto de intervenção no Colégio Major Vespasiano Carneiro de Mello, Secretaria de Estado da Educação, PDE, Ponta Grossa – PR, 2008.

FURTADO, Marcelo Fernandes. **Algumas Realizações de Charles Hermite**. 1996. 45 f. Monografia – Programa Especial de Treinamento, Universidade de Brasília, Brasília, 1996.

GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2ª edição, 2007.

GARCIA, V. C.; SOARES, D. da S.; FRONZA, J. **Ensino dos Números Irracionais no Nível Fundamental**. Coleção Cadernos De Matemática Para Professores. v.1. 2005. Disponível em: http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/GR%C1FICA-IRRACIONAIS.pdf. Acesso em: 29 de Mai. de 2021.

GASPAR, Maria Terezinha; MAURO, Suzeli. Explorando a Geometria Através da História da Matemática e da Etnomatemática. **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Recife, 2004.

GODEFROY, Gilles. **A Aventura dos Números**. Trad. Antônio Viegas. Lisboa - Portugal: Instituto Piaget, 1997.

GRAVINA, Maria Alice et al. **Matemática, mídias digitais e didática:** tripé para formação de professores de matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

GRILLI, Alexandre; *et al*. ROTEIRO: **Determinando o Número π**. 2011. Disponível em: http://www.gradadm.ifsc.usp.br/dados/20112/SLC0596-1/Pi%20Roteiro%20Pi.pdf. Acesso em: 20 de abr. de 2020

GRIMBERG, Gerard; ROQUE, Tatiana. Pesquisa e ensino de matemática: tensão entre modernidade e arcaismos na visão francesa sobre a análise entre 1872 e 1886. **Educação Matemática Pesquisa**, v.14, n.3, p.411-438, 2012.

HERSHKOWITZ, Rina. Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria. **Boletim GEPEM**, v. 32, p. 3–31, 1994.

IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua**. 2016-2017.

IBGE. **Estatísticas de gênero:** Indicadores Sociais das Mulheres no Brasil. N. 38. 2018. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101551_informativo.pdf>. Acesso em: 28 Jul. de 2019.

IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua**. 2018.

IDEB; Diretoria de Estatísticas Educacionais; Diretoria de Avaliação da Educação Básica. **Resumo Técnico**: Resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica 2005-2017.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A noção de obstáculo epistemológico e a educação matemática. In: **Educação Matemática –** uma (nova) introdução. Machado, S. (Org.) São Paulo: Ed. Da PUC-SP, 2002.

INFOPÉDIA. **Dízima in Infopédia**. Porto: Porto Editora. 2003-2020. Disponível em: https://www.infopedia.pt/$dizima. Acesso em 11 de Des. de 2020.

JESUS, B. C. D. **Números Irracionais:** Uma Análise de Livros Didáticos dos Ensinos Fundamental II e Médio. 2017. 51 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei – MG, 2017.

JESUS, B. C. D. de; OLIVEIRA, V. C. A. de. Sobre Números Irracionais e Possibilidades para seu Ensino. **Instrumento Revista de Estudo e Pesquisa em Educação**, Juiz de Fora, v. 20, n. 2, jul./dez. 2018.

JORDÃO, Ronaldo Silva. **Matemática Aplicada**. 1ª ed. Brasília: NT Editora, 2015. Disponível em: https://avant.grupont.com.br/dirVirtualLMS/arquivos/arquivosPorRange/0000000573/texto/0175d972338624ea38dfed5fb8cb9b4e.pdf. Acesso em 29 de Mai. de 2021.

JOVER, R. S. R. Números irracionais e sua compreensão pela experiência. **XI Encontro Nacional de Educação Matemática**, Curitiba, 2013.

JUNIOR, A. B. da R. **Abordagens Cronológicas no Ensino de Matemática Financeira**. 2013. 77f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora – MG, 2013.

LAFETÁ, Anna Carolina; SILVA, Elaine; LELIS, Jean. Teoria dos Números Transcendentes: Do Teorema de Liouville à Conjectura de Schanuel - 1ª ed. **V Bienal de Matemática**, Rio de Janeiro, 2017.

LARSON, Ron; FARBER, Betsy. **Estatística aplicada**. 6. Ed. Tradução: José Fernando Pereira Gonçalves, São Paulo: Pearson, 2016.

LEOPOLDINO, Karlo Sérgio Medeiros. **Sequência de Fibonacci e a Razão Áurea:** Aplicações no Ensino Básico. 2016. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal-RN, 2016.

LIMA, Elon Lages; WAGNER, Eduardo. **Perguntas e Respostas – Seção 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. PAPEM. Videoaula. Disponível em: http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2010. Acesso em: 1 de Out. de 2019.

LOPES, A. C. M.; SÁ, F. P. de. Números Reais: aspectos históricos. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 3, n. 9, p. 79-90, 2016. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/56/46. Acesso em: 24 de abr. de 2020.

LOPES, Rosa Guedes. **O Desejo do Analista e o Discurso da Ciência**. 2007. 252 f. Tese (Doutorado em Teoria Psicanalítica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

LORENZONI, C. A. C. de A.; SAD, L. A. História da Matemática e o "Fazer Matemática" na Educação Básica. **Revista de História da Educação** Matemática, v.4, n.1, 2018. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/340825746_HISTORIA_DA_MATEMATICA_E_O_FAZER_MATEMATICA_NA_EDUCACAO_BASICA_ISSN_2447-6447. Acesso em: 25 de abr. de 2020.

LORIN; João Henrique; REZENDE, Veridiana. Os Alogon: uma história dos números irracionais. **Encontro Interdisciplinar de Educação**, [online], v.5, n.1, 2013. Disponível em: http://www.fecilcam.br/anais/v_enieduc/data/uploads/mat/trabscompletos/mat00778624900.pdf. Acesso em 25 de abr. de 2020.

LUBECK, K. R. M.; LUBECK, M. L. Tópicos Sobre o "Pi" e os Números Reais. **V Bienal da SBM**, 2010. Disponível em: http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Mini_Cursos_Completos/MC13Completo.pdf. Acesso em 02 de Jul. de 2021.

MACHADO, Djeison. **Propostas Didáticas para o Ensino do Número π**. 2013. 66f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática:** as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez Editora, 1995.

MACHADO, S. R. A.; REZENDE, V. Concepções de Professores acerca de Conhecimentos de Estudantes sobre Números Irracionais. **Encontro Paranaense de Educação Matemáica-2017**, Cascavel, 2017.

MARQUES, Diego. **Teoria dos Números Transcendentes**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MATOS, L. P. de; BARROS, R. A. Uma Sequência de Atividades Investigativas Utilizando Uma Abordagem Histórica Sobre os Números Irracionais. **XII ENEM**, São Paulo, 2016.

MATOS, Raphael Neves de. **Uma Contribuição Para o Ensino Aprendizagem dos Números Racionais:** A Relação entre Dízimas Periódicas e Progressões Geométricas. 2017. 76f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional) - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Teófilo Otoni, 2017.

MAZUR, Sônia Maria Leite. **As Diferentes Tendências em Educação Matemática e o seu Significado para o Estudo dessa Ciência**. 2012. 45 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Métodos e Técnicas de Ensino) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Medianeira, 2012.

MIGUEL, J. C. **O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico metodológicas**. Núcleos de Ensino: Artigos dos Projetos realizados em 2003. p.375-394, 2005. Disponível em: <http://www.gradadm.ifsc.usp.br/dados/20121/ SLC0630-1/Ensino-Matematica-Enfoque-Conceitos.pdf>. Acesso em 15 set 2015.

MLODINOW, Leonard. **A Janela de Euclides: a história da geometria:** das linhas paralelas ao hiperespaço. Trad. de Enésio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

MOODLE, UFSC. **Teste de Hipóteses**. 2021. Disponível em: https://www.inf.ufsc.br/~andre.zibetti/probabilidade/teste-de-hipoteses.html. Acesso em 31 de Abr. de 2021.

MOREIRA, C. G. T. de A. Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas. **Colóquio da Região Sudeste**, São João del Rey – MG, v. 1, n. 1, abr. de 2011.

MOREIRA, P. C.; SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C. Números Reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 7, n. 12 , p. 95-117, Jul./Dez. 1999.

MOSCIBROSKI, Thais Meurer. **Amplitude do Conjunto dos Números Irracionais**. 2002. 71f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

NÍVEN, M. **Números Racionais e Irracionais**. SBM. Rio de Janeiro, p. 215. 1984.

NOBRE, Ronaldo Bezerra. **Sobre possibilidades de ensino e aprendizagem dos números irracionais no 8º ano do Ensino Fundamental**. 2017. 188 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática no Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

NOGUEIRA, C.; REZENDE, V. A teoria dos campos conceituais no ensino de números irracionais: implicações da teoria piagetiana no ensino de matemática. **Schème: Revista eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas**. v. 6, n. 1, p. 41-63, 2014.

OLIVEIRA, Fernando Neres de. Uma prova elementar da irracionalidade de π. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, n.13, [online], 2018.

OLIVEIRA, Jaqueline. **Tópicos Selecionados de Trigonometria e sua História**. 2010. 68 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2010.

OLIVEIRA, J. C.; GOMES, C. C. **Números Irracionais e Transcendentes**. 2009. 61 f. TCC (Professor Especialista em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina e Universidade Virtual do Maranhão, Imperatriz, 2009.

ONUCHIC, L.R. Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 203.

PARÁ. Secretaria de Educação do Pará (SEDUC). **Documento Curricular Estado do Pará**. 2018. Disponível em: http://www.cee.pa.gov.br/?q=node/753. Acesso em: 12 de Out. de 2020.

PEREIRA, Arminda Manuela Queimado. **Equações Algébricas:** alguns episódios históricos. 2017. 93 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) – Faculdade de Ciências e Matemática. Universidade de Lisboa. Lisboa (Portugal), 2017.

PIETROPAOLO, R. C.; CORBO, O.; CAMPOS, T. M. M.. Os Números Irracionais e seu ensino delineando a imagem conceitual de um grupo de professores. **I CEMACYC**. Santo Domingo-Republica Dominicana, 2013.

PLATÃO, 427-347 a.C. **Diálogos:** Teeteto e Crátilo. Trad. do grego Carlos Alberto Nunes. Belém: Universidade Federal do Pará, 1988.

POLYA, G. A. **Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

POMMER, Wagner Marcelo. Frações Contínuas e os Números Irracionais no Ensino Básico. **VI SESEMAT**, Campo Grande – MS, v.6. n.1. 2012.

POMMER, W. M. **A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico:** Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais. 2012. Tese (Doutorado em Educação do Programa de Pós-graduação em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, USP, São Paulo, 2012.

POMMER, W. M. Números Irracionais Na Escolaridade Básica: As Contribuições Didático-Epistemológicas Advindas Da História Da Matemática. **REnCiMa**, [S.L.], v. 9, n.3, p. 183-199, 2018.

PORTAL EDUCAÇÃO. **Que estruturas cerebrais estão envolvidas nos mecanismos de memória?** 2012. Disponível em: < https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/educacao/que-estruturas-cerebrais-estao-envolvidas-nos-mecanismos-de-memoria/21575>. Acesso em: 21 Jul. de 2019.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., CUNHA, M. H., SEGURADO, M. I. **Histórias de investigações matemáticas.** Desenvolvimento curricular na educação básica; 8, Lisboa: IIE, 1998.

PRECIOSO, J. C.; PEDROSO, H. C. História do Número e: Gênese e Aplicações. **Revista Eletrônica Matemática e Estatística Em Foco**, [S.L], v. 1, n.1, Jun. de 2013.

QUEIROZ, Rosania Maria. **Razão Áurea:** A Beleza de uma Razão Surpreendente. 2007. 39 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Desenvolvimento Educacional). Universidade Estadual De Londrina. Londrina, 2007.

REIS, Mauricio Cortez; RAMOS, Lauro. Escolaridade dos Pais, Desempenho no Mercado de Trabalho e Desigualdade de Rendimentos. **RBE**, Rio de Janeiro. v. 65, n. 2, Abr-Jun de 2011.

REZENDE, V.; NOGUEIRA, C. M. I. Números Irracionais na Educação Básica: Documentos Curriculares e Conhecimentos de Alunos Brasileiros e Franceses. **VI SIPEM**, v.3, n. 17, 2015.

RORIZ, Murilo Morais. **Construção dos Números Reais**. 2014. 46 f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

ROCHA, Rute Ribeiro Meireles. **Sensibilização para existência e dos números Irracionais**. 2018. 155 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2018.

SÁ, Pedro Franco. **Atividades para o ensino de matemática no nível fundamental**. Belém: EDUEPA, 2009.

SANDIFER, Ed. Who proved e is irrational? Tradução nossa. **How Euler Did It-MAA online**, [S.L.], v.4, n. 2, Fev. de 2006. (coluna do MAA on-line, escrita por Ed Sandifer, da Western Connecticut State University, de 2003 a 2010.) Disponível em: http://eulerarchive.maa.org/hedi/. Acesso em 08 de Jul. de 2020.

SANTOS C. P. dos; NETO, J. P.; SILVA, J. N. **Euler + Hexágono Mágico**. 1 ed. [S.L]: Norprint, 2007.

SANTOS, Tatiana de Souza Lima. **O Conceito de Infinito:** Uma Abordagem a Partir da Resolução de Problemas. 2015. 54 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.
SAEB. **Matriz de Referência de Matemática do Saeb:** Temas e seus Descritores. 2001

SANTOS, Alan Silva dos. **Um estudo sobre o conceito de densidade do conjunto dos números irracionais e do conjunto dos números irracionais:** uma abordagem com tecnologias. 2017. 132 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

SANTOS, Emanuella; *et al*. **Fatores Socio-Econômicos:** Os “Descaminhos” Da Educação. 2016. Disponível em: <https://portal.fslf.edu.br/wp-content/uploads/2016/12/FATORES-SOCIO-ECONOMICOS.pdf>. Acesso em 11 Jul. de 2019.

SANTOS, Robério Valente. **O ensino de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais com números naturais**. 2017. 393f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2017.

SARMENTO, Carlos Vitor da Silva; *et al*.. Progressão Parcial da Matemática e Suas Dificuldades: Estudo De Caso No Município De Águas Belas. **Revista Científica Semana Acadêmica**. Fortaleza, 2017, Nº. 000118, 29/12/2017. Disponível em: <https://semanaacademica.org.br/artigo/progressao-parcial-da-matematica-e-suas-dificuldades-estudo-de-caso-no-municipio-de-aguas> Acessado em: 25/06/2019.

SCHEMBERGUE M. C.; PEREIRA, M.; **O Enigmático Número Irracional**. PDE-2016, Paraná, 2016.

SERRA, D. S. Aplicações de números irracionais: um número famoso, outro instigante. **Revista Liberato**, Novo Hamburgo, v. 16, n. 25, p. 01-100, jan./jun. 2015.

SILVA, Marcelo Baía da. **Ensino de regras de três por atividades.** 2017. 480 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

SILVA, B. A.; PENTEADO, C. B. **A densidade dos números reais:** concepções de professores da educação básica. Paradígma. [online], 2010, v. 31, n.1, p.123-140. Disponível em: <http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S10112251201000 0100007&ln=es&nrm=iso>. Acesso em 15 ago. 2020.

SIQUEIRA, Regiane Aparecida Nunes de. **Tendências da educação matemática na formação de professores**. 2007. 50 f. Monografia (Especialização em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Ponta Grossa. Departamento de Pesquisa e Pós-Graduação, Ponta Grossa, 2007.

SISPAE. Perfil dos Participantes e Fatores Associados ao Desempenho Escolar. **SisPAE**. 2018. Disponível em:

<https://sispae.vunesp.com.br/reports/RelatorioSISPAE.aspx?c=SEPA1702>. Acesso em: 28 Jul. de 2019.

SOARES, E. F. E.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. (1999). Números reais: concepções dos licenciandos e formação Matemática na licenciatura. **Zetetiké**, Campinas, v. 7, n.12, pp. 95–117.

SOARES, Adriano Gomes. **Origem da Palavra Dízimo**. 2013. Disponível em: https://origemdapalavra.com.br/palavras/dizimar/#:~:text=%E2%80%9CD%C3%ADzimo%E2%80%9D%20vem%20do%20Latim%20DECIMUS,soldados%20era%20escolhido%20para%20morrer. Acesso em 11 de Des. de 2020.

SOARES, Diogo Oliveira. **Logaritmos e Função Logarítmica na Matemática Escolar Brasileira**. 2017. 98 f. Dissertação (Profissional em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

SOUTO, A. M. **Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica**. 2010. p. 106. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

SOUZA, Alexandre Ramon de. **Razão Áurea e Aplicações:** Contribuições para a Aprendizagem de Proporcionalidade de Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. 2013. 183 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2013.

SOUZA, K. R.; KERBAUY, M. T. M. **Abordagem quanti-qualitativa:** superação da dicotomia quantitativa-qualitativa na pesquisa em educação. Educação e Filosofia. Uberlândia, vol. 31, n.4, pp. 21-44, 2017.

SOUZA, D. V. de; SOUSA, F. B. de; MONTE, G. S. do. A Máscara de Phi: A Beleza que só a Matemática Explica. **Jornada de Estudos em Matemática**, v.1, n.1, 2015.

TADEU, E. V. C. *et al*. Determinação do número pi (π) por meio de uma rede quadrada de resistores idênticos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, n. 2, 2018. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0142. Acesso em: 20 de abr. de 2020.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151–169, 1981.

VASCONCELOS, Daniel Victor Menezes de. **Números Irracionais:** uma abordagem para o ensino básico. 2016. 49 f. Dissertação (Magister Scientiae) - Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2016.

APÊNDICE A - Termo de Consentimento

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada O uso de atividades para o Ensino de Números Irracionais, sob a responsabilidade dos(as) pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva, orientadoras e orientando Rafael Lameira Barros** vinculados a Universidade do Estado do Pará.
Nesta pesquisa nós estamos buscando realizar um diagnóstico do **ensino de** Números Irracionais a partir da opinião dos estudantes**.** A sua colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa.
Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.
Você não terá gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa.
Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o **ensino de** Números Irracionais**.**
Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.
Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.
Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva, orientador e orientando Rafael Lameira Barros** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação(CCSE) da Universidade do Estado do Pará(UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n.Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

_________________, ______ de ________________ de 2019.

____

Assinatura dos pesquisadores

Eu,____
__ aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____

Participante da pesquisa

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor(a) responsável você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu filho (a), participar da pesquisa intitulada: um diagnóstico do **ensino de Números Irracionais** sob a responsabilidade dos pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva, orientadoras e orientando Rafael Lameira Barros** vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Com esse trabalho estamos buscando diagnosticar o ensino de Problemas Aditivos a partir da opinião dos estudantes**.** A colaboração do aluno (a) será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa e essa atividade ocorrerá nas dependências da escola sob a supervisão de um professor.

Em nenhum momento o aluno (a) identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade do discente será preservada.

Você e o aluno não terão gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica gerando um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o ensino de Números Irracionais.

Você é livre para decidir se seu filho(a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva e orientando (a) Rafael Lameira Barros** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação(CCSE) da Universidade do Estado do Pará(UEPA) : Tv. Djalma Dutra s/n.Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542.

__________________, ______ de _________________ de 2019.

____
Assinatura dos pesquisadores

Eu,____ autorizo que meu/minha filho(a)____ a participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____
Assinatura do responsável

APÊNDICE B - Questionário dos Estudantes Egressos

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIASSOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno (a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1- **Idade**: _______anos 2- **Gênero**: □ Masculino □ Feminino

3- **Série/**Ano:________

4- **Tipo de escola que estuda**?

□Municipal □Estadual □Conveniada □Outra

5- **Você já ficou em dependência**?

□Não □Sim. Em quais disciplinas?__________

6- **Você gosta de Matemática**?

□Não gosto □Suporto □Gosto um pouco □Adoro

7- **Qual a escolaridade do seu responsável masculino**?

□Superior □Médio □Fundamental □Fundamental incompleto □Não estudou

8- **Qual a escolaridade da sua responsável feminina**?

□Superior □Médio □Fundamental □Fundamental incompleto □ Não estudou

9- **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática**?

□Professor particular □Família □Ninguém □Outros. Quem?___________

10- **Com que frequência você estuda matemática fora da escola**?

□Todo dia □ Somente nos finais de semana □No período de prova □Só na véspera da prova □Não estudo fora da escola.

11- **Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática**?

□Sempre □Quase sempre □Às vezes □Poucas vezes □Nunca

12- **As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados**?

□sim □não □às vezes

13- **Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia**?

□Sim □Não □Às vezes

14-Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática?

□Contente □Tranquilo □com Medo □Preocupado □com Raiva □com Calafrios

15- **Quais formas de atividades e/ou trabalho que seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?**

□Provas/simulado □Testes semanais □Seminários □Pesquisas □Projetos

□Outros. Quais? ________________________________

16- **Você já estudou sobre os Números Irracionais**? □Sim □Não

17- **Se você na questão acima respondeu sim, diga em qual ano/série**? __

18- **Seu professor de matemática demonstra domínio do conteúdo Números Irracionais**? □Sim □Não

19. Como v**ocê avalia as explicações do seu professor de matemática**?

□Ruim □Regular □Boa □Excelente

20- **Quando você estudou os Números Irracionais, a maioria das aulas**:

□Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios;

□Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;

□Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;

□Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;

□Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

21- **Para praticar o conteúdo de Números Irracionais seu professor costumava**:

□Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;

□Apresentar jogos envolvendo o assunto;

□Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;

□Não propunha questões de fixação;

□Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

22-Com base na sua experiência q**uando você estudou Números Irracionais preencha o quadro a seguir.**

(**MF**: Muito Fácil; **F**: Fácil; **D**: Difícil; **MD**: Muito difícil)

Conteúdo	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?			
	Sim	**Não**	**MF**	**F**	**D**	**MD**
Conceito de números Irracionais						

APÊNDICE C - Teste de Verificação referente ao Diagnóstico para os Estudantes Egressos

TESTE DE VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM DO ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS

Número da chamada: _____

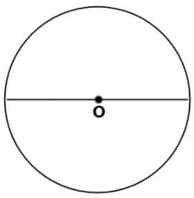
1-O que são números irracionais?

____
____

2-Cite um exemplo de número irracional?

____
____

3-Seja uma circunferência de centro O, a qual foi representada abaixo. Se dividirmos seu comprimento por seu diâmetro, assim como em qualquer circunferência, iremos encontrar um número muito famoso. Qual é esse número? Qual o seu valor aproximado?



4-Dados os números abaixo, circule apenas os que são irracionais.

2 $\quad \frac{3}{2} \quad \sqrt{2} \quad 0{,}5 \quad -\frac{1}{25} \quad \sqrt{4} \quad \sqrt{20} \quad -0{,}001 \quad \pi$

5-No quadro abaixo, há dois números de infinitas casas decimais. Um deles tem casas decimais que se repetem em sequência, já o outro, possui casas decimais que não se repetem de forma sequencial.

3,4444444444444...	2,14159241376523...

Qual deles representa um número irracional?

6-Escreva V para verdadeira e F para falsa, a respeito das afirmações abaixo e justifique:

a) Todo número irracional pode ser escrito na forma de fração. (   )

____

____

b) $(\sqrt{5})^2$ é racional e $\sqrt{\sqrt{3}}$ é irracional. (   )

____

____

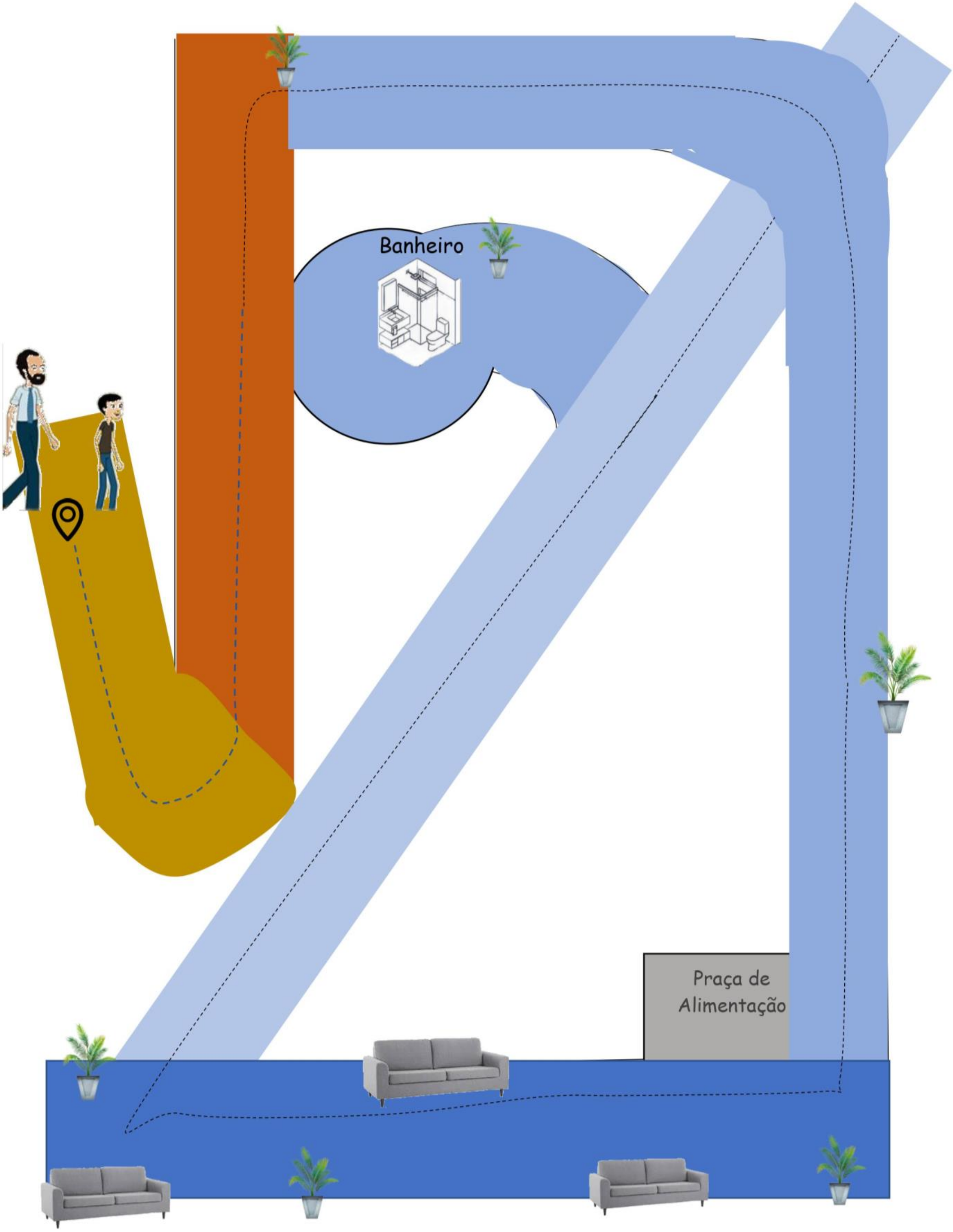
7-O valor de $3\sqrt{2} - 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}$ é racional ou irracional? Justifique.

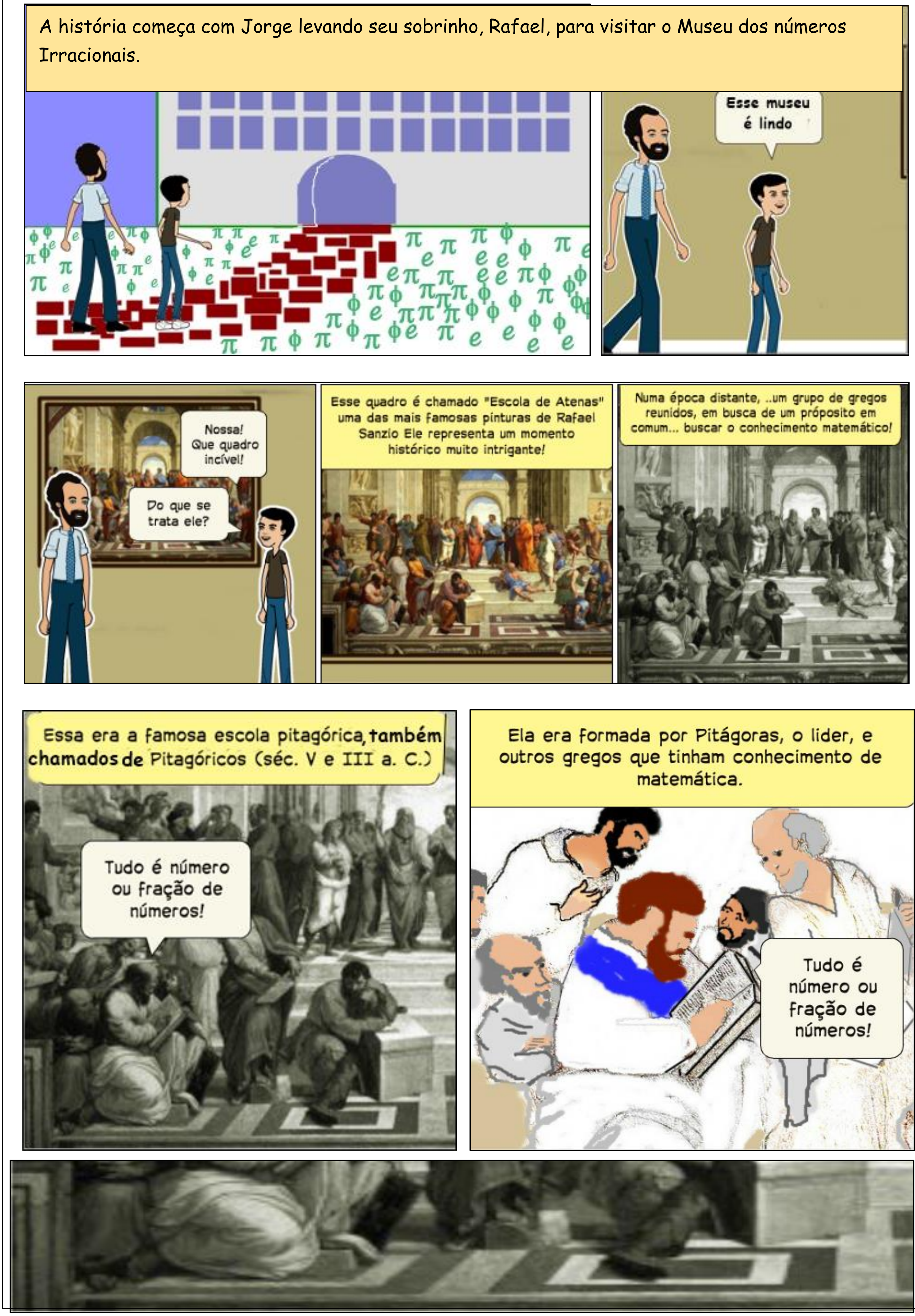
____

____

O Museu dos Números Irracionais – Parte I

Mapa do trajeto que será seguido nesse capítulo



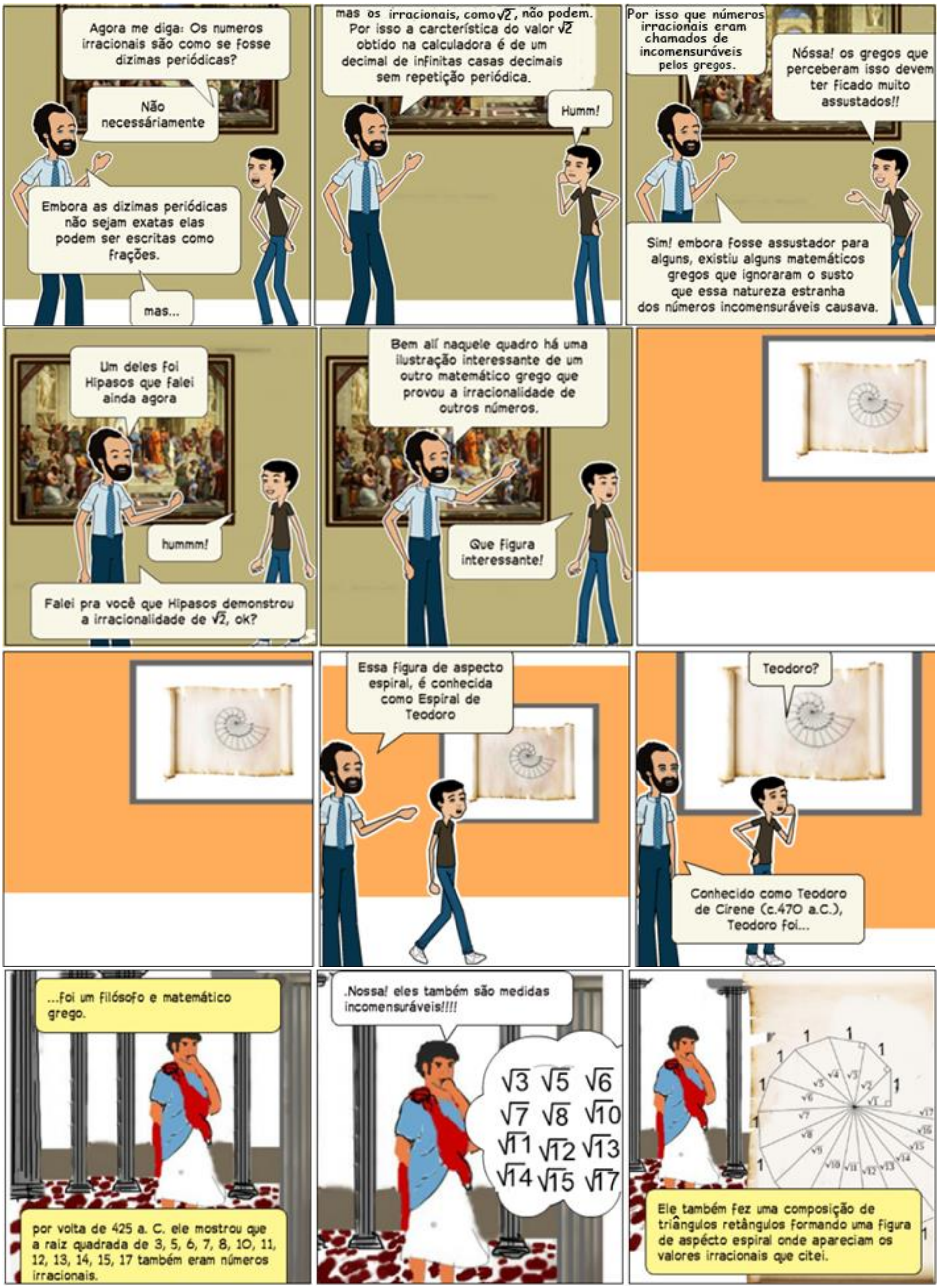

A história começa com Jorge levando seu sobrinho, Rafael, para visitar o Museu dos números Irracionais.
Esse museu é lindo
Nossa! Que quadro incível!
Do que se trata ele?
Esse quadro é chamado "Escola de Atenas" uma das mais famosas pinturas de Rafael Sanzio Ele representa um momento histórico muito intrigante!
Numa época distante, ..um grupo de gregos reunidos, em busca de um próposito em comum... buscar o conhecimento matemático!
Essa era a famosa escola pitagórica, **também chamados de** Pitagóricos (séc. V e III a. C.)
Tudo é número ou fração de números!
Ela era formada por Pitágoras, o lider, e outros gregos que tinham conhecimento de matemática.
Tudo é número ou fração de números!


Vários conhecimentos de diferentes povos foram reunidos nessa escola.
Conhecimentos que os fizeram muito conhecidos até os dias de hoje
Uma relação matemática interessante que não necessáriamente foi descoberta por Pitágoras e seus discípulos, mas foi agregada ao conhecimento abordado por eles é...
a relação que chamamos hoje de Teorema de Pitágoras
olá Pitágoras! sou um visitante.
Varios conhecimentos de diferentes povos foram reunidos na escola pitagórica.
Estou maravilhado com o conhecimento reunido ou criado aqui neste grupo de sábios!
Obrigado! Quer conhecer um pouco sobre nosso conhecimento?
Sim
Então, está ok!
Sei que existem muitos conhecimentos matemáticos ligados a geometria e outras áreas que são estudados por este grupo de sábios. Dentre esses conhecimentos...
ouvi dizer que conhecem uma relação que envolve os lados de triângulos retângulos!

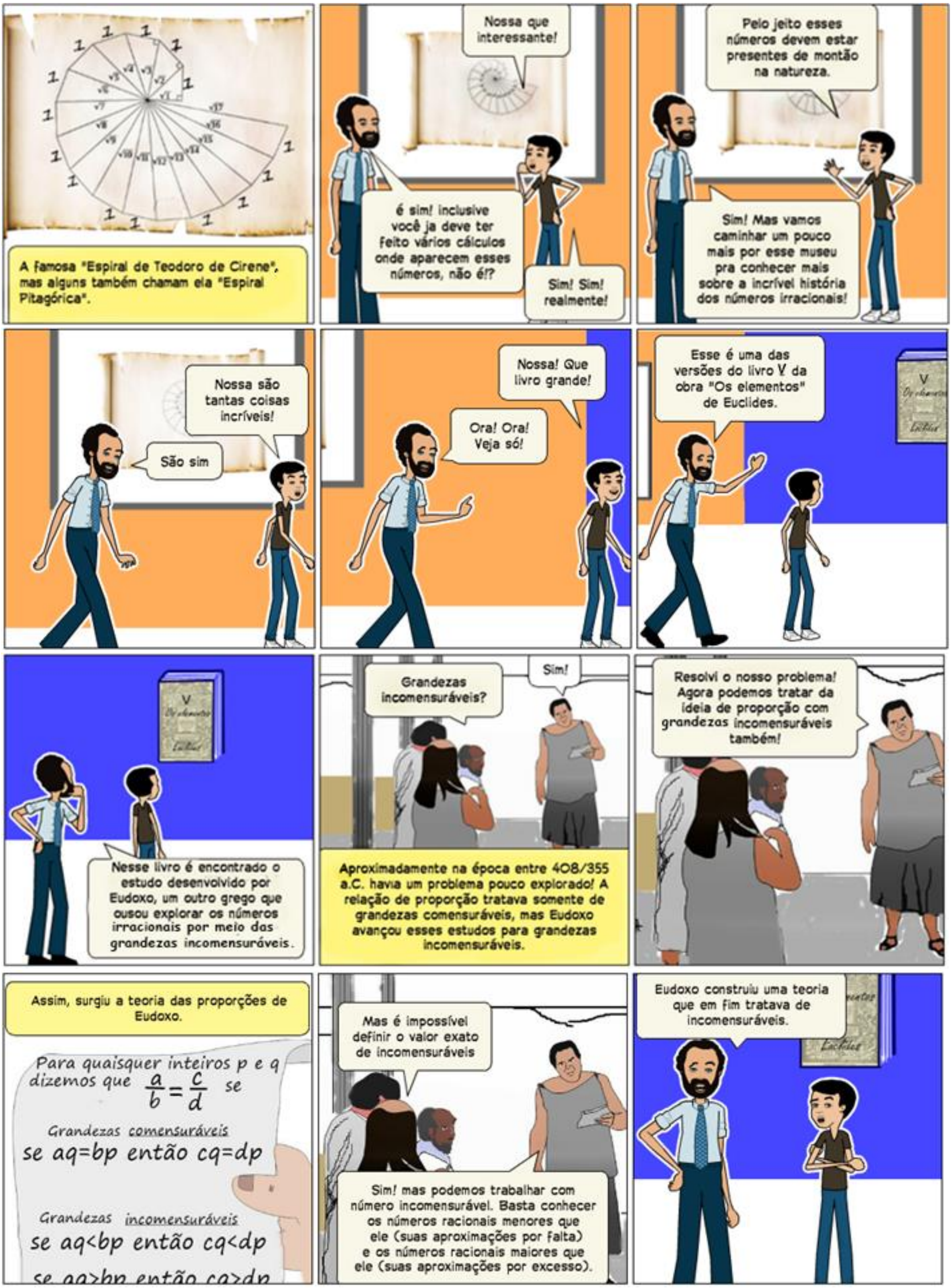

Sim! Sim!
Vou te explicar
Considere um triângulo retângulo plano. O lado oposto ao ângulo de 90 graus se chama hipotenusa os demais lados se chamam catetos....
...assim teremos: o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.
b a c
a²=b²+c²
Será que isso é correto?
É sim! vou lhe mostrar.
A=(c+b)² A₁=a² A₂=4(bc/2)
A = A₁+ A₂
(c+b)² = a²+ 4.(b.c/2)
c²+2cb+b² = a²+ 2.(c.b)
c²+2cb+b²-2cb = a²+ 2.(c.b)-2cb
c² + b² = a²
Essa é uma maneira de perceber essa relação.
Atenção o valor do elemento "a" é sempre a hipotenusa!
3² + 4² = 5²
9 + 16 = 25
25 = 25
6² + 8² = 10²
36 + 64 = 100
100 = 100
9² + 12² = 15²
81 + 144 = 225
225 = 225
Esses são exemplos de aplicação dessa relação.
Nossa! que interessante!
Foi a partir dela que eles fizeram uma grande decoberta.
Nossa! que relação incrível!
Sim! mas... embora ela pareça perfeita! ela nos revelou algo muito assustador!
A existência de uma medida que não pode ser expressa pela forma de fração e não existe valor exato que seja capaz de medi-la! Trata-se diagonal de uma quadrado de lado 1.
x² = 1² + 1²
x² = 2
x = √2
Nossa!
Seu valor é determinado pela raiz quadrada de 2.
A partir dessa compreenção surgiu um conhecimento que abalou muitos gregos.
...um conhecimento que impactou a concepção matemática que Pitágoras e seus discípulos possuiam.
Não é possivel! Como pode existir um comprimento que não se pode medir
Ao se depararem com a situação geométrica, da digonal de um quadrado de lado 1, perceberam que sua medida (raiz quadrada de 2) não era exata...
Será 1,4 ? Será 1,41 ? Será 1,414 ? ...
Não consigo encontrar nenhum número que multiplicado por ele próprio resulte em 2


...e nem mesmo era possível medi-la como fração do lado desse mesmo quadrado
Será 3/2 do lado? Será 7/5 do lado?... Não consigo encontrar nem mesmo uma fração, se quer, que multiplicada por si propria resulte em 2.
√2
Por isso percebe-se algo muito estranho! Pois embora seja possível construir essa diagonal, não é possível determinar seu valor!
Ao não encontrarem o valor dessa raíz eles perceberam que isso ia de contra a concepção deles de que tudo era número ou fração de números.
...os gregos daquela época, em especial os pitagóricos, entraram em uma crise sobre a existência ou não desse número. A famosa "crise dos incomensuráveis.
Existe sim!
Não existe!
Não existe!
percebemos então que nem todo comprimento pode ser expresso por número!
está se referindo aos "alogon"?
Sim!!!
"alogon" erá o nome dado a essas medidas incomensuráveis
Que significa não racional, ou o que hoje chamamos de irracionais.
Porém naquela época alogon significava também algo que não deveria ser dito.
Vou tentar agora determinar o valor exato da raiz quadrada de 2.
Vejamos...
√n = |a|, se a x a = n
Se calcular: 1x1=1 (chegou perto), 2x2=4 (passou) Então a raiz quadrada de 2 está entre 1 e 2
Se calcular: 1,1 x 1,1 = 1,21 (Aproxima de 2) ..... 1,4 x 1,4 = 1,96 (aproxima mais ainda) 1,5 x 1,5 = 2,25 (Passou) Conclui-se que a raiz quadradade 2 está entre 1,4 e 1,5
1,41 x 1,41 = 1,9881 1,42 x 1,42 = (Passou) Está entre 1,41 e 1,42
Se continuar a tentar nunca irei terminar.
Não consigo chegar a um valor exáto
a calculadora determinou um valor racional aproximado, sendo ele um valor com muuuuitas casas decimais.
Mas na verdade!. Quanto mais próximo um racional está desse numero mais casas decimais possui, pois não há valor exato.
Eu me lembro de já ter tentado encontrar a medida da diagonal de um quadrado de lado 1, mas não consegui!
d=? 1m 1m
Conforme a história que você acabou de contar, nem mesmo Pitágoras conseguiu.
Sim! Mas teve um matemático que fazia parte dos pitagóricos, que conseguiu demonstrar que o número √2 não pode ser escrito como fração, ou seja não é racional.
O nome dele era Hipaso.

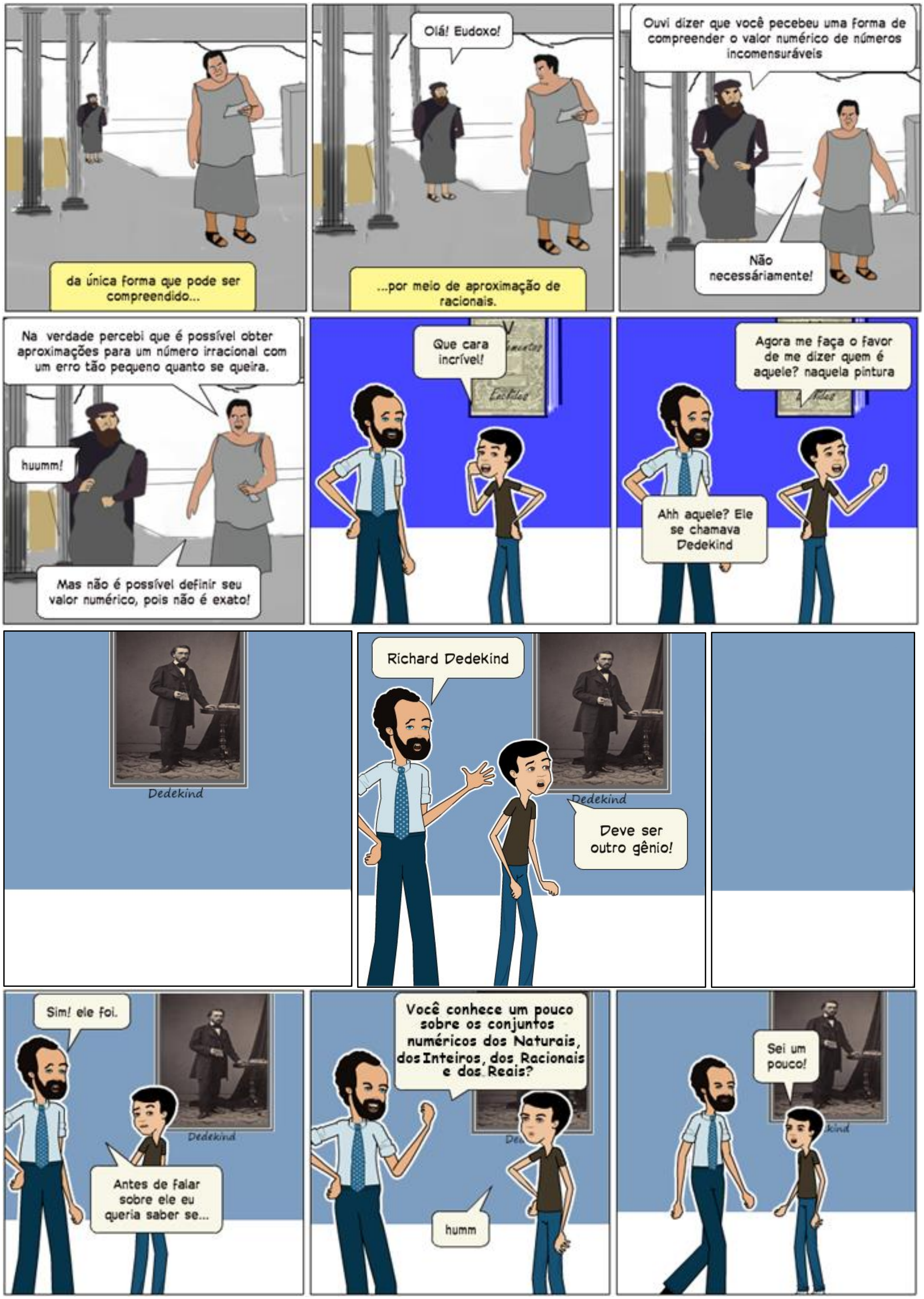
Hipaso, não consigo imaginar comprimentos que não podemos medir por um número ou fração de um número.
Alguns estudiosos acreditam que foi Hipaso Metapotum (470 a.C.) especificamente aquele que teria descoberto a existência de medidas que eram incomensuráveis.
Calma amigo! Muito breve irei provar isso, demonstrando que aquela medida estranha de $\sqrt{2}$ não se pode determinar valor exato.
Embora alguns tenham negado a existência desses números, Hipaso acreditava o contrário. Para ele, esses números existiam, mas que representavam medidas que não se podiam medir.
Hipaso então conseguiu demonstrar que a diagonal do quadrado de lado 1, o qual refere-se ao valor da raiz $\sqrt{2}$, não se pode medir, sendo seu valor racional, ou seja, é irracional.
Olá Hipasos!
Me disseram que você acredita em medidas incomensuráveis.
$x^2 = 1^2 + 1^2$
$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2}$
Sim, acredito. Você ja viu o problema que eu, Pitágoras e os outros discutimos?
Sim!
d=?
1m
1m
ok!
Para mim, a medida da diagonal de uma quadrado de lado 1 de fato existe!
Mas não é possível determinar um valor exáto para ela, e também é impossível escreve-la como uma fração do lado.
Eu me lembro que a medida dessa diagonal é o resultado de $\sqrt{2}$, como podemos provar isso que você falou?
Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja um número racional, então pode ser escrito como uma fração p/q com p e q inteiros diferentes de zero e sendo p/q fração irredutível.
então $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ assim, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ então $\frac{p^2}{q^2} = 2$, assim $p^2 = 2q^2$. Óra! Se isso for verdade, então p^2 é par, então p também será par, então p pode ser escrito como 2k (sendo k un inteiro positivo), assim teremos $(2k)^2 = 2q^2$
$4k^2 = 2q^2 \rightarrow 2k^2 = q^2$ mas se isso for verdade, então q^2 é par, logo q também será par, portanto p e q são numeros pares.
mas isso é um absurdo, pois se os dois forem pares então a fração p/q não é irredutível. Isso contradiz o que eu disse no início.
Desse modo, Hipasos demonstrou que a medida da diagonal de um quadrado de lado 1 não pode ser escrita na forma de fração.
Isso é o mesmo que dizer que $\sqrt{2}$ não é racional?
Sim, ou dizer que é irracional.



Agora me diga: Os numeros irracionais são como se fosse dizimas periódicas?
Não necessáriamente
Embora as dizimas periódicas não sejam exatas elas podem ser escritas como frações.
mas...
mas os irracionais, como √2, não podem. Por isso a carcterística do valor √2 obtido na calculadora é de um decimal de infinitas casas decimais sem repetição periódica.
Humm!
Por isso que números irracionais eram chamados de incomensuráveis pelos gregos.
Nóssa! os gregos que perceberam isso devem ter ficado muito assustados!!
Sim! embora fosse assustador para alguns, existiu alguns matemáticos gregos que ignoraram o susto que essa natureza estranha dos números incomensuráveis causava.
Um deles foi Hipasos que falei ainda agora
hummm!
Falei pra você que Hipasos demonstrou a irracionalidade de √2, ok?
Bem alí naquele quadro há uma ilustração interessante de um outro matemático grego que provou a irracionalidade de outros números.
Que figura interessante!
Essa figura de aspecto espiral, é conhecida como Espiral de Teodoro
Teodoro?
Conhecido como Teodoro de Cirene (c.470 a.C.), Teodoro foi...
...foi um filósofo e matemático grego.
por volta de 425 a. C. ele mostrou que a raiz quadrada de 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 também eram números irracionais.
.Nossa! eles também são medidas incomensuráveis!!!!
√3 √5 √6
√7 √8 √10
√11 √12 √13
√14 √15 √17
Ele também fez uma composição de triângulos retângulos formando uma figura de aspécto espiral onde apareciam os valores irracionais que citei.



A famosa "Espiral de Teodoro de Cirene", mas alguns também chamam ela "Espiral Pitagórica".
Nossa que interessante!
é sim! inclusive você ja deve ter feito vários cálculos onde aparecem esses números, não é!?
Sim! Sim! realmente!
Pelo jeito esses números devem estar presentes de montão na natureza.
Sim! Mas vamos caminhar um pouco mais por esse museu pra conhecer mais sobre a incrível história dos números irracionais!
Nossa são tantas coisas incríveis!
São sim
Nossa! Que livro grande!
Ora! Ora! Veja só!
Esse é uma das versões do livro V da obra "Os elementos" de Euclides.
Nesse livro é encontrado o estudo desenvolvido por Eudoxo, um outro grego que ousou explorar os números irracionais por meio das grandezas incomensuráveis.
Grandezas incomensuráveis?
Sim!
Aproximadamente na época entre 408/355 a.C. havia um problema pouco explorado! A relação de proporção tratava somente de grandezas comensuráveis, mas Eudoxo avançou esses estudos para grandezas incomensuráveis.
Resolvi o nosso problema! Agora podemos tratar da ideia de proporção com grandezas incomensuráveis também!
Assim, surgiu a teoria das proporções de Eudoxo.
Para quaisquer inteiros p e q dizemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se
Grandezas comensuráveis
se aq=bp então cq=dp
Grandezas incomensuráveis
se aq<bp então cq<dp
se aq>bp então cq>dp
Mas é impossível definir o valor exato de incomensuráveis
Sim! mas podemos trabalhar com número incomensurável. Basta conhecer os números racionais menores que ele (suas aproximações por falta) e os números racionais maiores que ele (suas aproximações por excesso).
Eudoxo construiu uma teoria que em fim tratava de incomensuráveis.

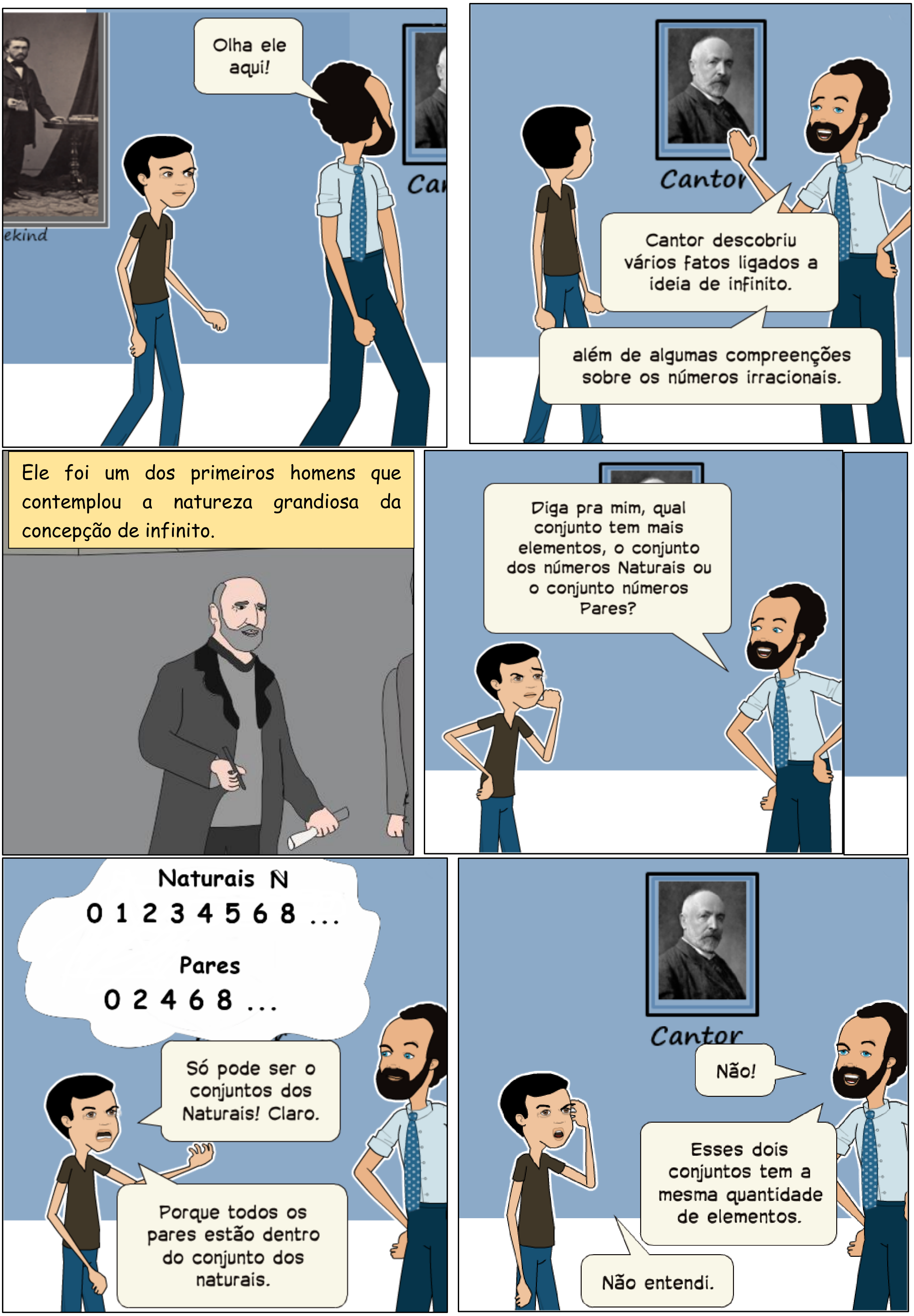


da única forma que pode ser compreendido...
Olá! Eudoxo!
...por meio de aproximação de racionais.
Ouvi dizer que você pecebeu uma forma de compreender o valor numérico de números incomensuráveis
Não necessáriamente!
Na verdade percebi que é possível obter aproximações para um número irracional com um erro tão pequeno quanto se queira.
huumm!
Mas não é possível definir seu valor numérico, pois não é exato!
Que cara incrível!
Euclides
Agora me faça o favor de me dizer quem é aquele? naquela pintura
Ahh aquele? Ele se chamava Dedekind
Dedekind
Richard Dedekind
Dedekind
Deve ser outro gênio!
Sim! ele foi.
Dedekind
Antes de falar sobre ele eu queria saber se...
Você conhece um pouco sobre os conjuntos numéricos dos Naturais, dos Inteiros, dos Racionais e dos Reais?
humm
Sei um pouco!

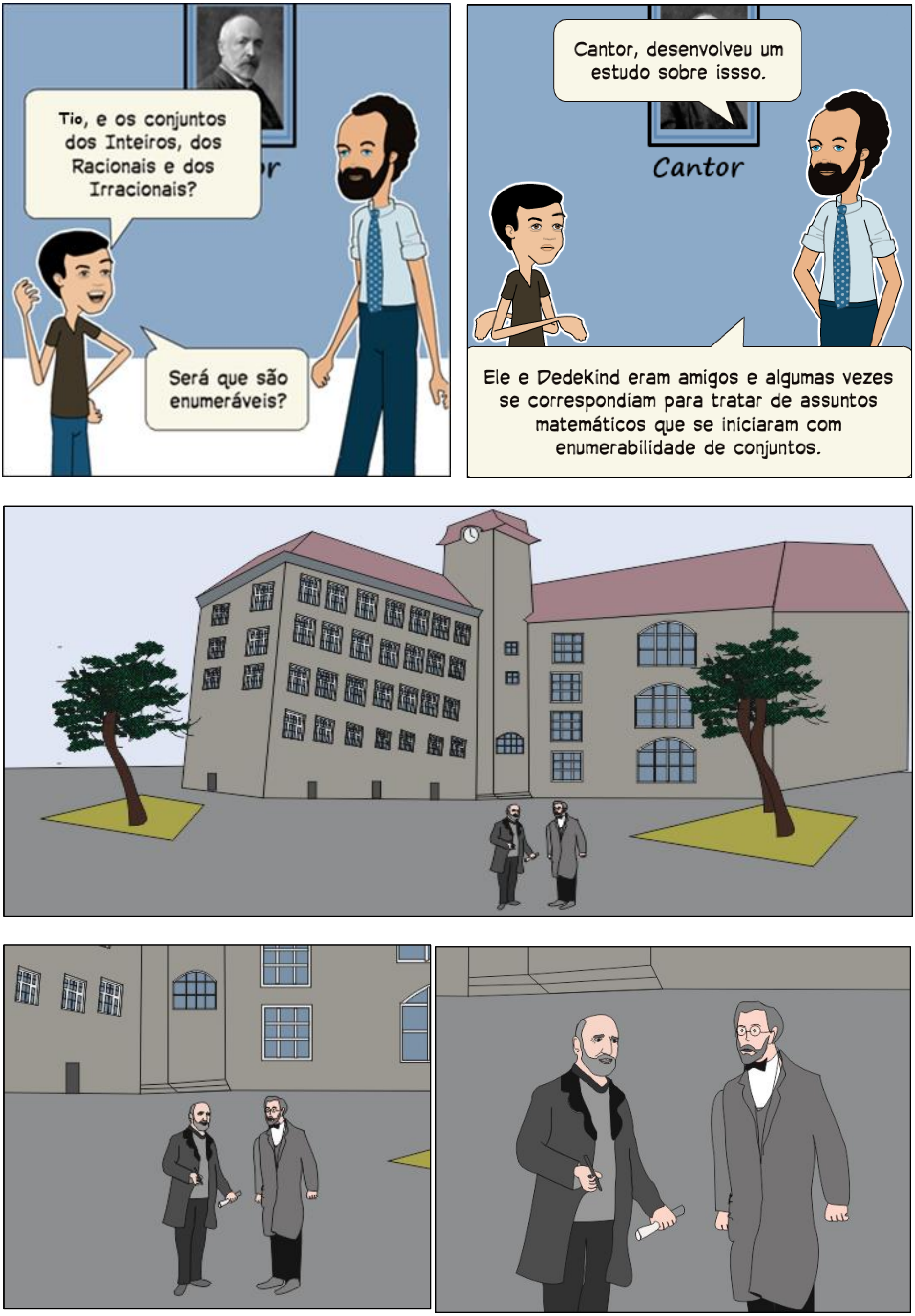
Eu estudei na escola que o conjunto dos Naturais (N) está contido no conjunto dos Inteiros (Z), este por sua vez está contido no conjunto dos Racionais (Q) e...
Isso mesmo!
...além desses que eu falei, ainda tem o conjunto dos irracionais.
O conjunto dos Naturais (N) é os números como 0, 1, 2, 3, ... e continua ininitamente
Os Inteiros (Z) é composto pelos naturais positivos e negativos e o zero: ...-2, -1, 0, 1, 2...
O conjunto dos Racionais (Q) são números na forma x/y onde x e y são inteiros, por exemplo -1/2, 0, 2/3, 4/3 e infinitos outros números.
ótimo, mas o valor do y admite qualquer inteiro, exceto o zero
Ah é mesmo. Pois na divisão x por y, o y não pode ser zero.
Dessa forma os racionais adimitem qualquer decimal que possa ser escrito na forma de fração,
Os únicos números racionais que são decimais não exatos são as dizimas periódicas.
mas os decimais não exatos que não são dízimas periódica, são os irracionais, né?
Isso mesmo, basta ser por exemplo um número como 0,1234567.. e nunca terminar e nunca repetir periódicamente pra ser Irracional.
Pelo que me lembro, raiz quadrada de 2, e raiz quadrada de 3 são exemplos de Irracionais.
Sim!
Tem até um jeito de visualizar esses conjuntos em desenho.
Q
Z
N
I
Ok! Após caminharmos por essa seção do museu falaremos mais sobre esses conjuntos, inclisive dos Reais.
E os números Reais? Eu não lembro se já estudei eles
Dedekind
O conjunto dos Reais é a união entre todos esses conjuntos que você falou.
Ahhh sim!
Agora que falamos sobre esses conjuntos, tratarei de falar sobre este homem do quadro.
Dedekind
Dedekind foi um matemático que fez grande contribuição para a sua área.
Olá professor Dedekind! A aula de semana passada foi muito boa!
Ahhh! Obrigado rapazes!
Estive refletindo bastante após essa aula!
sobre o que?
sobre a ideia de contínuo!
Se a diagonal de um quadrado, de lado 1 cm, existe, então como pode não existir um racional que mensure essa grandeza geométrica?


Nossa!
O que será que há nas grandezas geométricas que as diferencia dos números racionais?
Preciso responder essas perguntas!
Irei ler a teoria de Eudoxo
Entendeu alguma coisa?
O professor está um pouco frustrado pelos números irracionais ainda não estarem bem definidos.
Hum rum!
Ahh sim! aquela situação da reta racional ser incompleta!
Alguns meses depois!!!
Após estudar bastante sobre a teoria de Eudoxo e outras obras acho que estou avançando sobre a ideia de contínuo
$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}\dots$
Nossa! tive uma ideia!
$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}$
A ideia dele foi a seguinte..
Imagine a reta real!
Ok!


Classe A
Classe B
Reta Real
X
Classe A
Classe B
Dedekind
Cortando essa reta em duas partes podemos separar os números racionais em duas classes A e B.
Classe A
Classe B
Reta Real
X
Classe A
Classe B
Dedekind
...de modo que todo número da primeira classe A é menor que todo número da segunda classe B.
Classe A
Classe B
Reta Real
X
Classe A
Classe B
(Situação 1)
X
Classe A
Classe B
(Situação 2)
X
Se A tem um maior elemento (Situação 1) ou se B tem um menor elemento (Situação 2), o corte define um número real racional X.
Classe A
Classe B
Reta Real
X
Classe A
Classe B
Classe A
Classe B
Dedekind
mas se A não tem um maior elemento e B não tem um menor elemento então o corte define um número real irracional X.
Nossa!
Dedekind
Assim ficou conhecido os cortes de Dedekind, cuja ideia mostra a continuidade da reta relacionando os números racionais com os irracionais.
Achei bem interessante essa idéia de Dedekind!
Dedekind
Sim! Realmente!
Dedekind
Então vamos continuar andando, pois o próximo a conhecermos era um amigo de Dedekind.
Vamos!

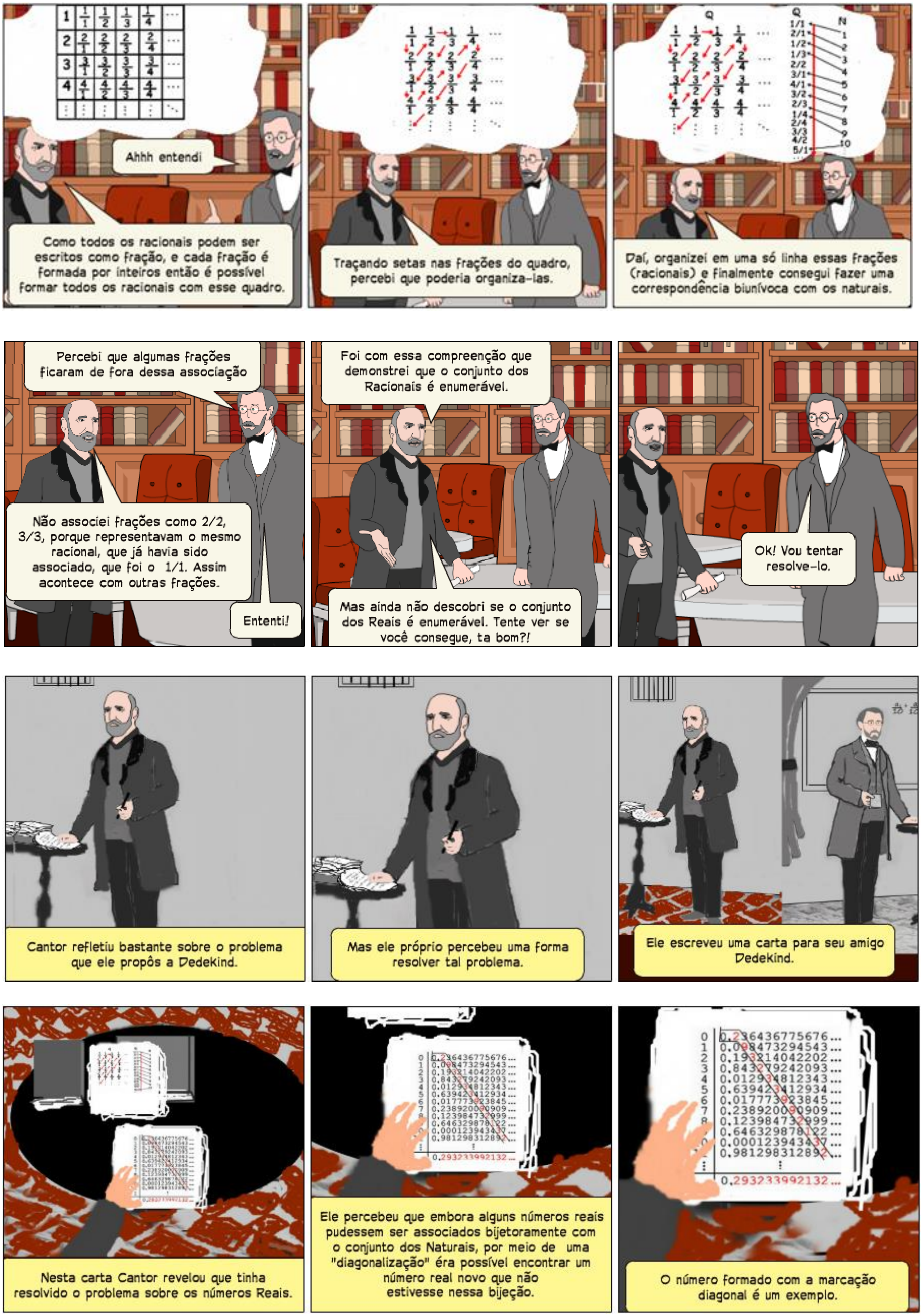

Olha ele aqui!
Cantor
Cantor descobriu vários fatos ligados a ideia de infinito.
além de algumas compreenções sobre os números irracionais.
Ele foi um dos primeiros homens que contemplou a natureza grandiosa da concepção de infinito.
Diga pra mim, qual conjunto tem mais elementos, o conjunto dos números Naturais ou o conjunto números Pares?
Naturais ℕ
0 1 2 3 4 5 6 8 ...
Pares
0 2 4 6 8 ...
Só pode ser o conjuntos dos Naturais! Claro.
Porque todos os pares estão dentro do conjunto dos naturais.
Cantor
Não!
Esses dois conjuntos tem a mesma quantidade de elementos.
Não entendi.

Naturais ℕ
0 1 2 3 4 5 6 8 ...
Pares
0 2 4 6 8 ...
O conjunto dos Naturais tem quantos elementos?
Infinitos
e o conjunto dos Pares?
Infinitos também!
Ahhhh sim, entendi agora.
Cantor
Como os dois conjuntos tem quantidade de elementos infinita, então eles tem o mesmo tamanho.
Exatamente!
Além disso, é possível perceber que o conjunto dos números pares é contável, ou seja,...
Naturais ℕ
0 1 2 3 4 5 6 ...
0 2 4 6 8 10 12 ...
Pares
...para cada elemento dele pode ser asssociado a um, e somente um número do conjunto dos naturais.
Isso, é uma relação de um para um, né?
Exatamente!
Mas atenção! Nesse caso essa relação pode ser chamada de Bijeção
Então um conjunto é contável quando fizer bijeção com o conjunto dos numeros Naturais
Isso mesmo!
Os conjuntos que tem essa qualidade se chamam de Conjuntos Enumeráveis.
Será que os conjuntos que falamos anteriormente são enumeráveis

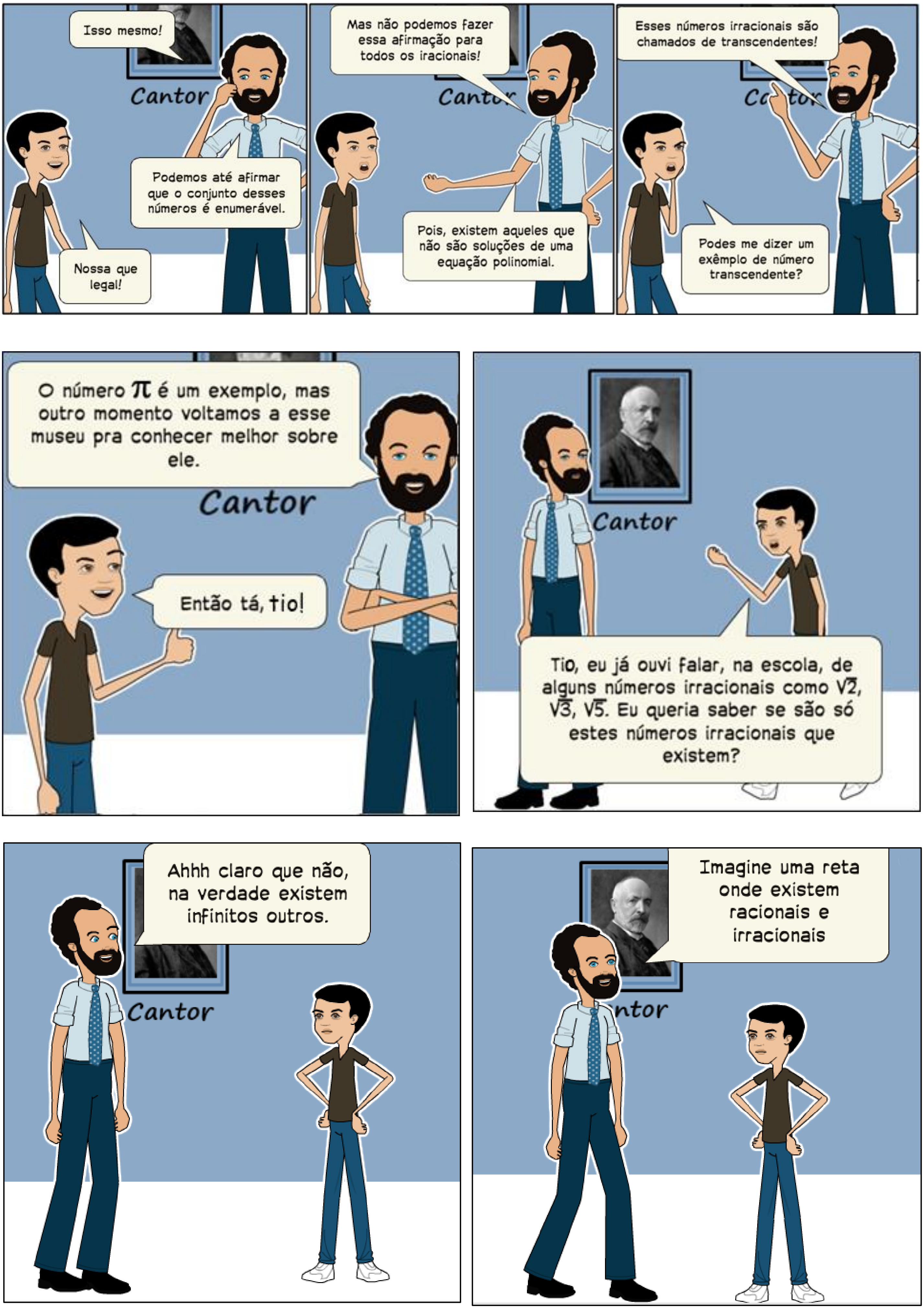

Tio, e os conjuntos dos Inteiros, dos Racionais e dos Irracionais?
Será que são enumeráveis?
Cantor
Cantor, desenvolveu um estudo sobre issso.
Ele e Dedekind eram amigos e algumas vezes se correspondiam para tratar de assuntos matemáticos que se iniciaram com enumerabilidade de conjuntos.


Olá Cantor!
Olá Dedekind!
o que achou da ideia de conjuntos infinitos?
Eu concordei com essa ideia!
Um conjunto é infinito se poder fazer uma relação de bijeção com o conjunto nos naturais, pois este é infinito.
Só que desconfio que a cardinalidade dos conjuntos infinitos nem sempre é o mesmo.
Cardinalidade?
Me refiro ao tamanho (quantidade de elementos)
Ahhh sim!
Mas, como assim?
Pra mim, dois conjuntos que tem quantidade de elementos infinita, certamente têm o mesmo tamanho.
ou melhor... têm a mesma cardinalidade.
pois, é...
Mas será que isso é sempre verdade?
por exemplo, ainda não foi demonstrado que o conjunto dos Reais é enumerável, enquanto não for provado, não posso dizer que ele tem a mesma cardinalidade que outros conjuntos infinitos.
Pode me explicar melhor sobre as cartas que me mandou.
Sobre a cardinalidade do conjunto dos Inteiros e dos Racionais.
Vou lhe explicar primeiramente sobre a cardinalidade dos Inteiros.
Imagine a seguinte função...
1 2 3 4 5 ...
...-2 -1 0 1 2 3 ...
uma função que relaciona cada número natural com um único número inteiro de tal modo que os inteiros possam ser contados.
1 2 3 4 5 ...
...-2 -1 0 1 2 3 ...
Ahh entendi.
Desse modo, devido os naturais e inteiros serem infinitos, dá pra fazer uma bijeção com estes conjuntos.
Exatamente!

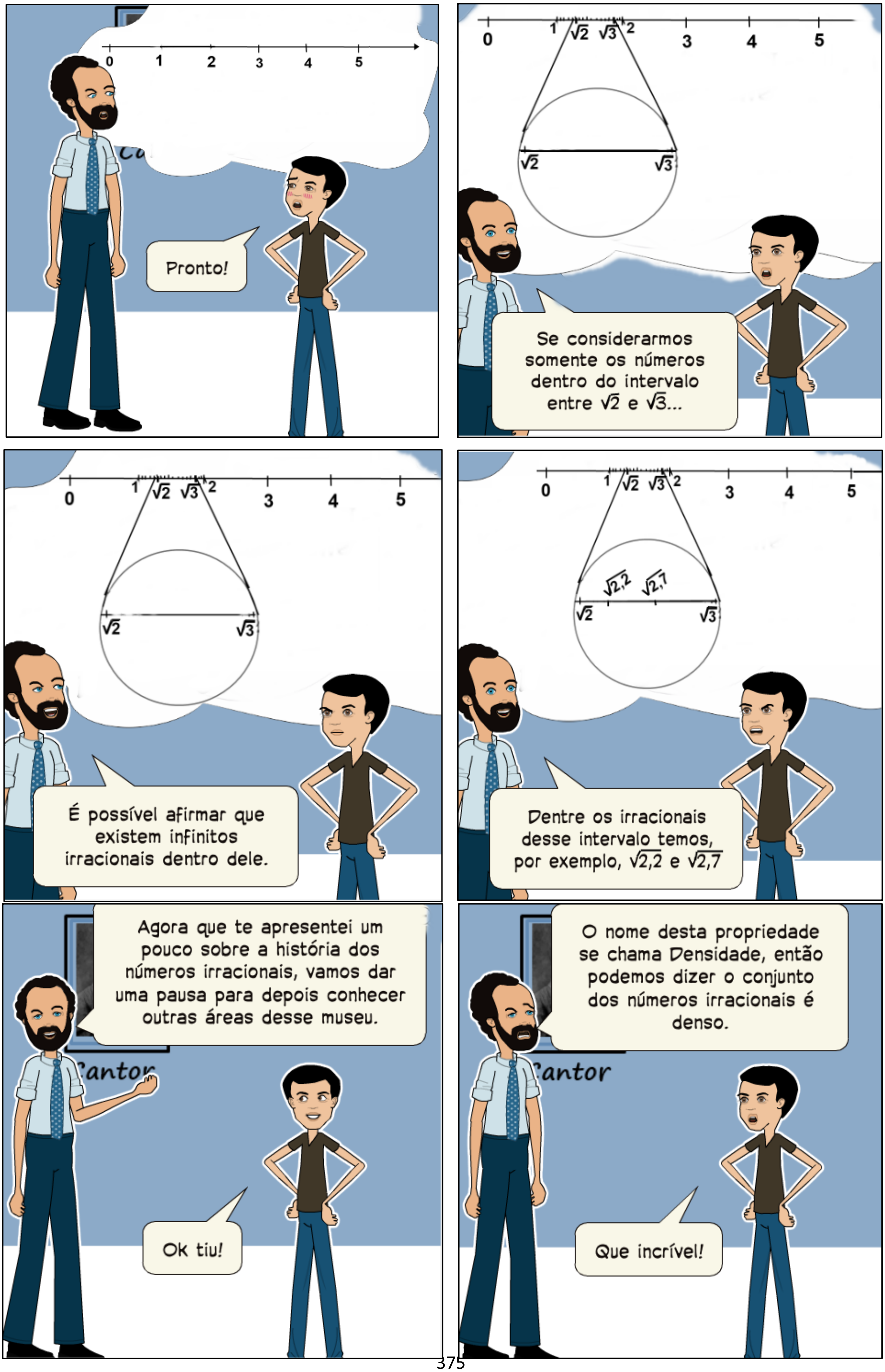

Mas essa função existe?
Sim, existe!
Imagine o seguinte:
Consideramos a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$, uma função definida por duas sentenças tal que
$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, se\ n\ for\ par \\ \frac{1-n}{2}, se\ n\ for\ impar \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
Portanto, posso dizer que o conjunto dos Inteiros é enumerável, por ter a mesma cardinalidade que os Naturais.
Ahhh! Entendi.
Achei bem interessante isso, mas gostaria é de saber como você conseguiu demonstrar que o conjunto dos racionais é enumerável!
Ok!
Vamos para a biblioteca, pra eu lhe explicar melhor.
O conjunto dos racionais inclui números que podem ser escritos na forma de fração. Isso compreende números decimais exátos e as dízimas.
Disso eu sei, meu amigo!
Você também sabe que toda fração é um par ordenado de dois números Inteiros.
Realmente!
Por exemplo, 2/3 pode ser associado ao par ordenado (2, 3), sendo este composto de números Inteiros.
Se todo número racional pode ser escrito como fração, então cada par ordenado de inteiros pode ser associado a um único número racional.
Imagine um quadro, onde a primeira linha e a primeira coluna sejam números inteiros.
1 2 3 4 ...
1 $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ ...
2 $\frac{2}{1}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ ...
3 $\frac{3}{1}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{3}{4}$ ...
4 $\frac{4}{1}$ $\frac{4}{2}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{4}{4}$ ...
humm
É possível associar cada par de inteiros para formar frações, por exemplo, os inteiros 1 e 2 formam o racional 1/2.
bla bla bla


Ahhh entendi
Como todos os racionais podem ser escritos como fração, e cada fração é formada por inteiros então é possível formar todos os racionais com esse quadro.
Traçando setas nas frações do quadro, percebi que poderia organiza-las.
Daí, organizei em uma só linha essas frações (racionais) e finalmente consegui fazer uma correspondência biunívoca com os naturais.
Percebi que algumas frações ficaram de fora dessa associação
Não associei frações como 2/2, 3/3, porque representavam o mesmo racional, que já havia sido associado, que foi o 1/1. Assim acontece com outras frações.
Ententi!
Foi com essa compreenção que demonstrei que o conjunto dos Racionais é enumerável.
Mas ainda não descobri se o conjunto dos Reais é enumerável. Tente ver se você consegue, ta bom?!
Ok! Vou tentar resolve-lo.
Cantor refletiu bastante sobre o problema que ele propôs a Dedekind.
Mas ele próprio percebeu uma forma resolver tal problema.
Ele escreveu uma carta para seu amigo Dedekind.
Nesta carta Cantor revelou que tinha resolvido o problema sobre os números Reais.
Ele percebeu que embora alguns números reais pudessem ser associados bijetoramente com o conjunto dos Naturais, por meio de uma "diagonalização" éra possível encontrar um número real novo que não estivesse nessa bijeção.
O número formado com a marcação diagonal é um exemplo.
0,293233992132...


Assim ele percebeu que o conjunto dos Reais não é enumerável e que sua cardinalidade é maior que dos Naturais, Inteiros e Racionais
Uma compreensão que se obtém com este trabalho de Cantor é que o conjunto dos Irracionais tem cardinalidade maior que dos Racionais, Inteiros e Naturais.
Cantor
Então o conjunto dos Irracionais é maior que dos racionais?
Sim, mesmo sendo conjuntos de quantidade de elementos infinita.
Então quer dizer que embora todos esses conjuntos (N, Z e Q) tenham infinitos elementos, o conjunto dos Irracionais tem maior tamanho?
Cantor
Sim! Por isso que aquele desenho que pensou anteriormente está errado.
Porque o conjunto dos Irracionais tem que ser maior!
Q
Z
N
I
R
Então já entendi o desenho a se fazer.
Isso mesmo, Rafael.
Na verdade acho até que esse desenho não está perfeitamente correto, pois Cantor mostrou que os conjuntos ℕ, ℤ e ℚ possuem a **mesma cardinalidade**.
em fim, agora que você entendeu...
Mas tio não tem como pegar só uma parte do conjunto dos irracionais e numerá-los? (fazer bijeção com o conjunto dos Naturais)
Ahhhh que bom que fez essa pergunta.
Cantor
Me lembrei de falar sobre os números algébricos e transcendentes
O conjunto dos irracionais pode ser dividido em irracionais algébricos e os números trancendentes
humm
A palavra "Algébricos" me lembra equações polinomiais que estudei na escola. Tem alguma coisa a ver com números irracionais algébricos?
Tem tudo a ver!
Os números irracionais algébricos são aqueles irracionais que são soluções de uma equação polinomial
Imagine por exêmplo a equação polinomial $x^2 - 2 = 0$.
$x^2 - 2 = 0$
$x = \pm\sqrt{2}$
Soluções:
$x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$
Consegue achar as soluções?
Sim! As soluções são $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.
Isso mesmo! além do mais, essas soluções são números irracionais.
Sim! Sim! Mas agora que percebemos que $\sqrt{2}$ é solução dessa equação polinomial, podemos chamá-lo de número irracional algébrico, né?



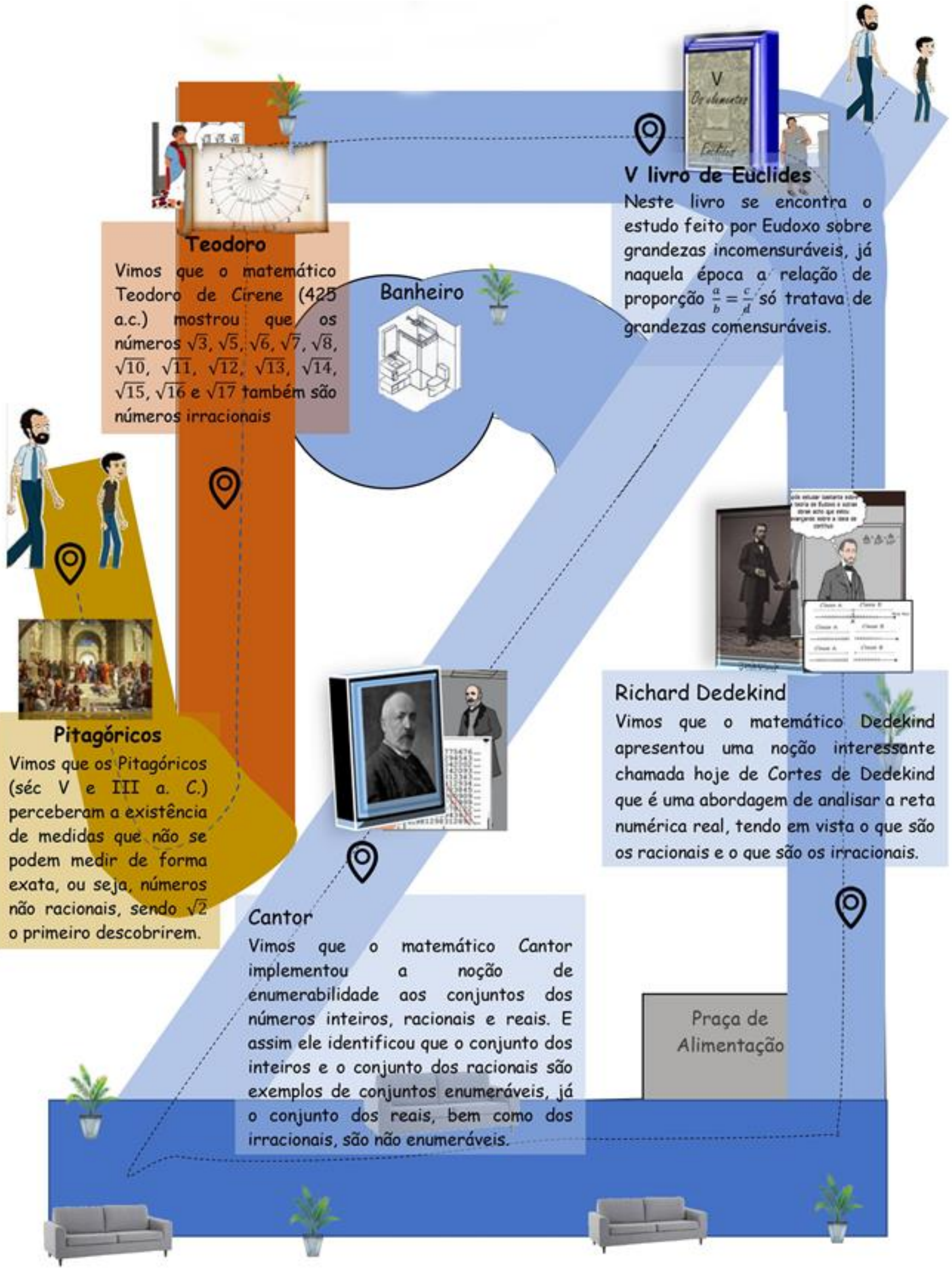
Isso mesmo!
Cantor
Podemos até afirmar que o conjunto desses números é enumerável.
Nossa que legal!
Mas não podemos fazer essa afirmação para todos os iracionais!
Pois, existem aqueles que não são soluções de uma equação polinomial.
Esses números irracionais são chamados de transcendentes!
Podes me dizer um exêmplo de número transcendente?
O número π é um exemplo, mas outro momento voltamos a esse museu pra conhecer melhor sobre ele.
Cantor
Então tá, tio!
Cantor
Tio, eu já ouvi falar, na escola, de alguns números irracionais como √2, √3, √5. Eu queria saber se são só estes números irracionais que existem?
Ahhh claro que não, na verdade existem infinitos outros.
Cantor
Imagine uma reta onde existem racionais e irracionais


0 1 2 3 4 5
Pronto!
0 1 √2 √3 2 3 4 5
√2 √3
Se considerarmos somente os números dentro do intervalo entre √2 e √3...
0 1 √2 √3 2 3 4 5
√2 √3
É possível afirmar que existem infinitos irracionais dentro dele.
0 1 √2 √3 2 3 4 5
√2,2 √2,7
√2 √3
Dentre os irracionais desse intervalo temos, por exemplo, √2,2 e √2,7
Agora que te apresentei um pouco sobre a história dos números irracionais, vamos dar uma pausa para depois conhecer outras áreas desse museu.
Ok tiu!
O nome desta propriedade se chama Densidade, então podemos dizer o conjunto dos números irracionais é denso.
Que incrível!

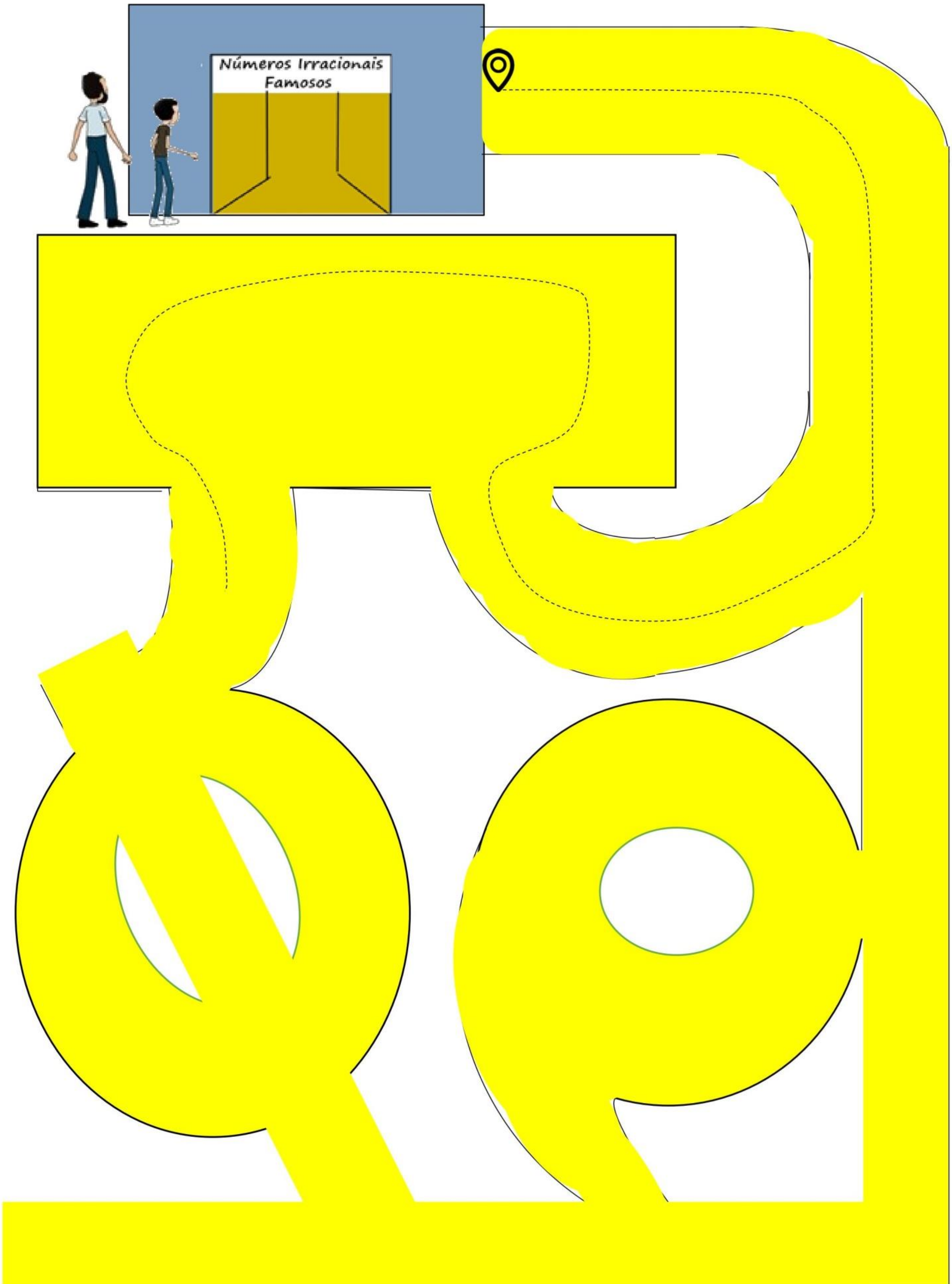
Caminho traçado nesse capítulo

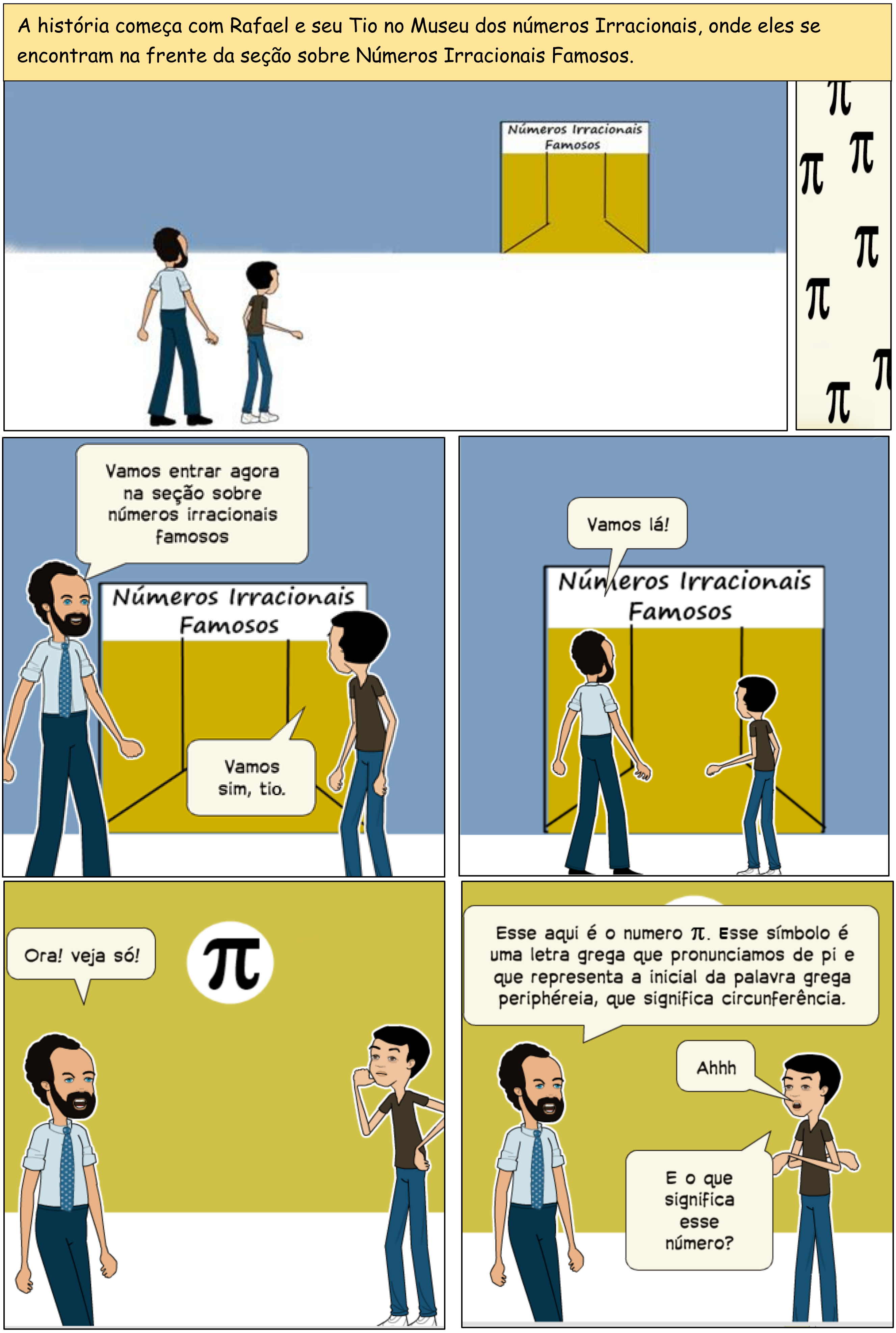
O Museu dos Números Irracionais - Parte II

Capítulo Anterior

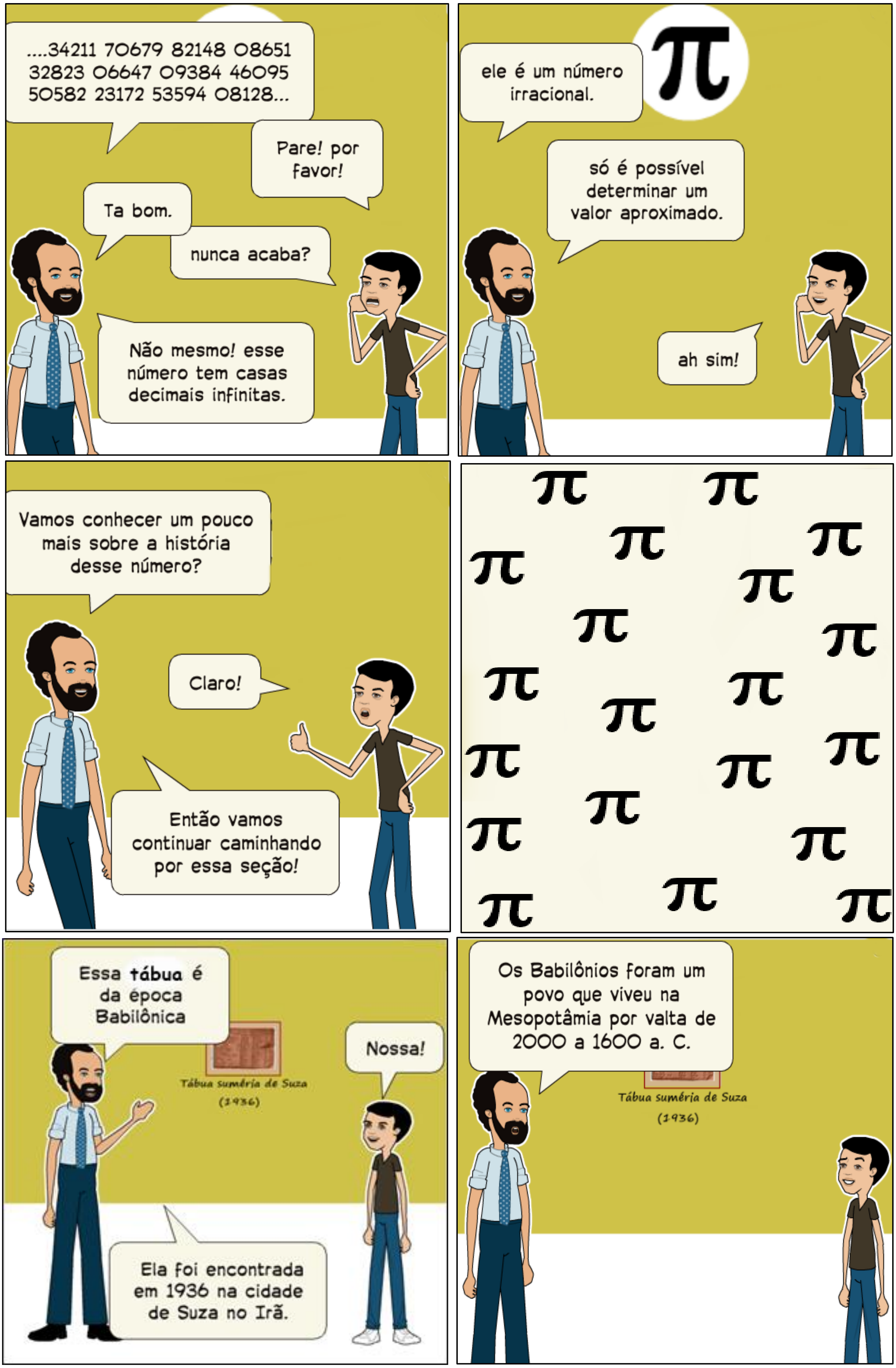


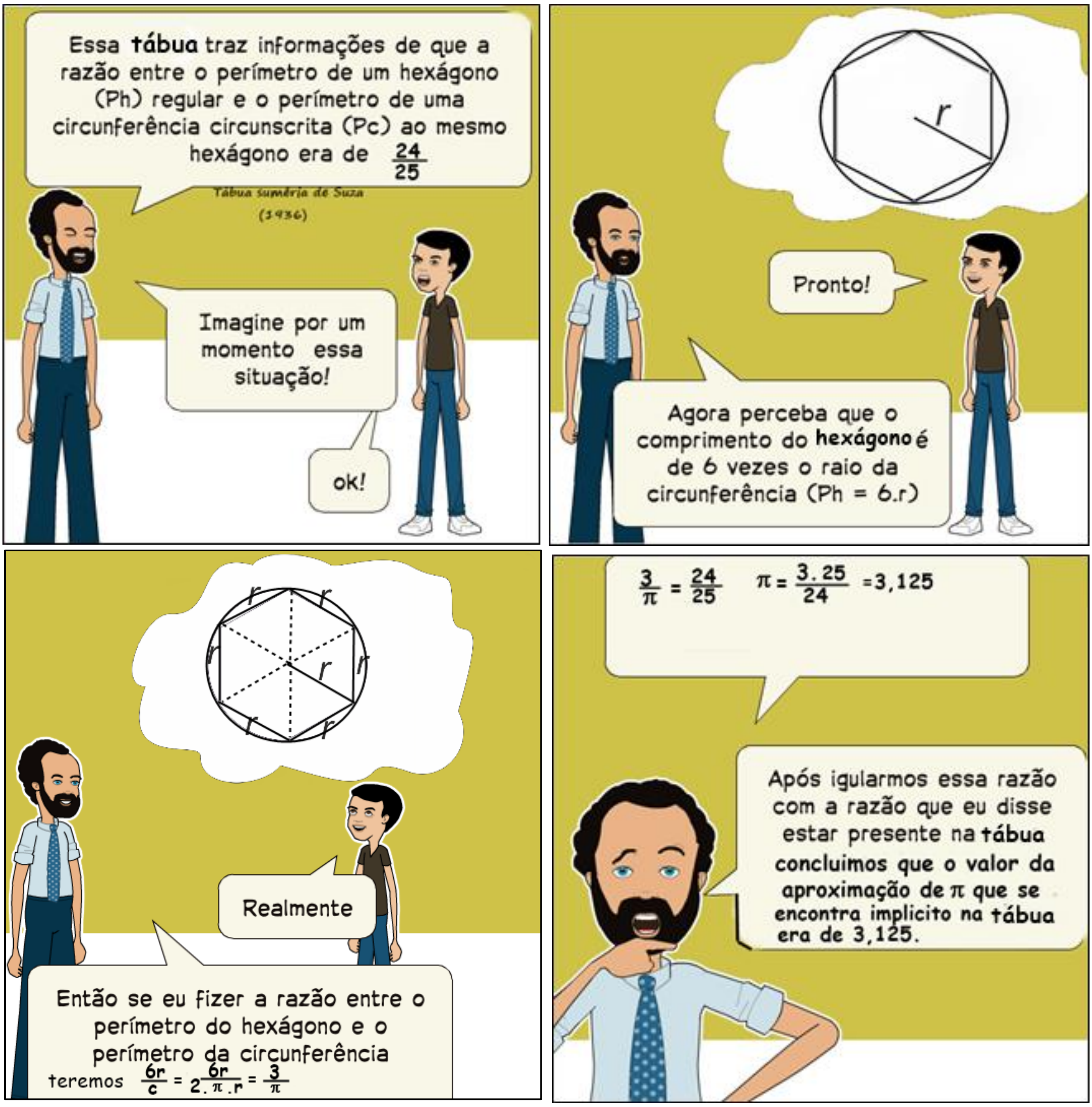
Mapa do trajeto que será seguido nesse capítulo



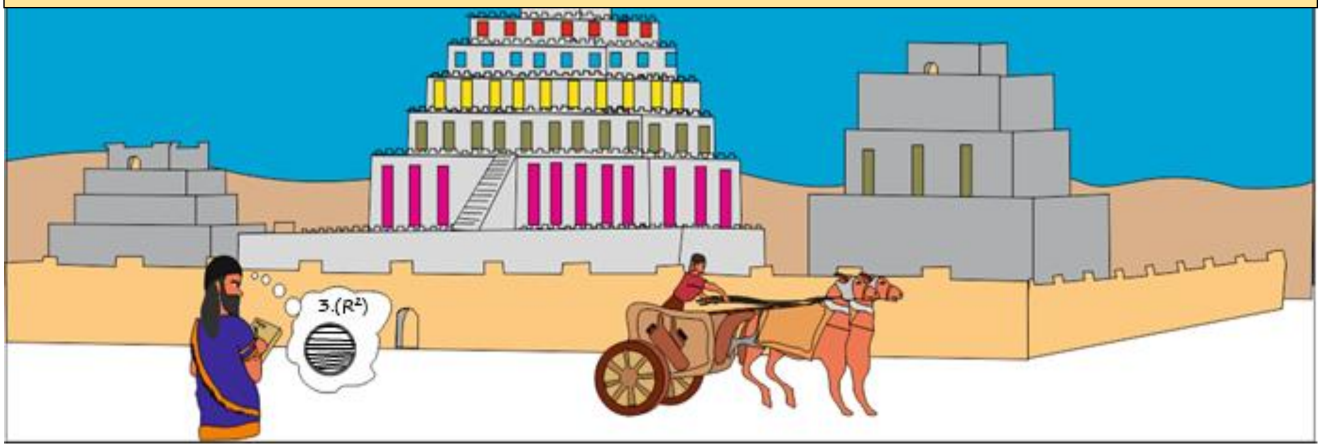

A história começa com Rafael e seu Tio no Museu dos números Irracionais, onde eles se encontram na frente da seção sobre Números Irracionais Famosos.
Números Irracionais Famosos
Vamos entrar agora na seção sobre números irracionais famosos
Números Irracionais Famosos
Vamos sim, tio.
Vamos lá!
Números Irracionais Famosos
Ora! veja só!
π
Esse aqui é o numero π. Esse símbolo é uma letra grega que pronunciamos de pi e que representa a inicial da palavra grega periphéreia, que significa circunferência.
Ahhh
E o que significa esse número?


Ele é um número irracional, que representa uma razão...
...imagine uma circunferência com um diâmetro!
Circunferência
diâmetro
Pronto
Agora imagine que você estica a circunferência até formar uma linha reta.
Circunferência
diâmetro
Ok!
Agora me responda: quantas medidas do diâmetro se pode formar com o comprimento dessa circunferência?
Circunferência
diâmetro
Acho que três
na verdade, 3 e mais um pedacinho.
Isso mesmo!
π
Esse número que você tentou encontrar é a razão entre o comprimento da circunferência e o comprimento do seu diâmetro!
Este é o número π cujo símbolo foi usado pela primeira vez por Euler em 1748.
Nossa!
π
e quanto ele vale?
ele vale 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825...

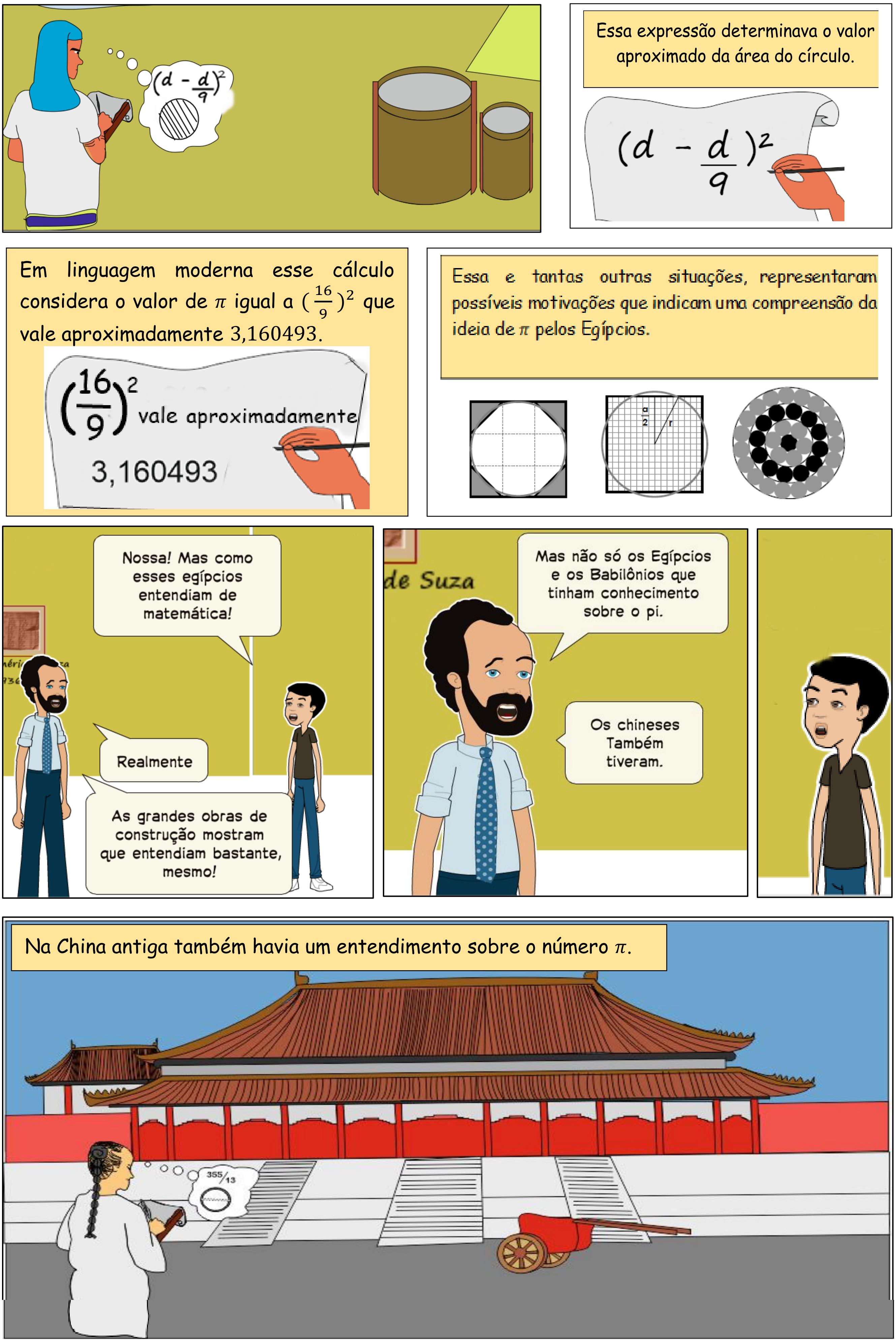

....34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128...
Pare! por favor!
Ta bom.
nunca acaba?
Não mesmo! esse número tem casas decimais infinitas.
ele é um número irracional.
só é possível determinar um valor aproximado.
ah sim!
Vamos conhecer um pouco mais sobre a história desse número?
Claro!
Então vamos continuar caminhando por essa seção!
Essa tábua é da época Babilônica
Tábua suméria de Suza (1936)
Nossa!
Ela foi encontrada em 1936 na cidade de Suza no Irã.
Os Babilônios foram um povo que viveu na Mesopotâmia por valta de 2000 a 1600 a. C.
Tábua suméria de Suza (1936)



Os Babilônicos na antiguidade também faziam cálculos para se determinar a área de círculos em muitas situações.



Existem evidências que apontam que o método usado por eles para calcular a área do círculo era multiplicar 3 ao quadrado do raio. Neste caso eles consideraram π valendo 3, mas....
$3.(R^2)$
...a tabua de Suza que observamos, anteriormente, mostra que eles utilizavam também 3,125 para indicar o valor de π.
$3 + \frac{1}{8}$
$=3,125$
Agora que você falou dos Babilônicos... pode aproveitar o momento e falar dos Egípcios, né?
Nossa que interessante!
Eles também conheciam sobre o π?
Ótima sujestão!
Tábua suméria de Suza
(1936)
Sim! Conforme as evidências, sim!
Os Egípcios na antiguidade armazenavam alimentos em celeiros cilíndricos. Como a base de um cilindro circular reto é um círculo, então conhecer um método que permitisse determinar a área do círculo era uma necessidade prática.
$(d - \frac{d}{9})^2$
Base superior
Base inferior



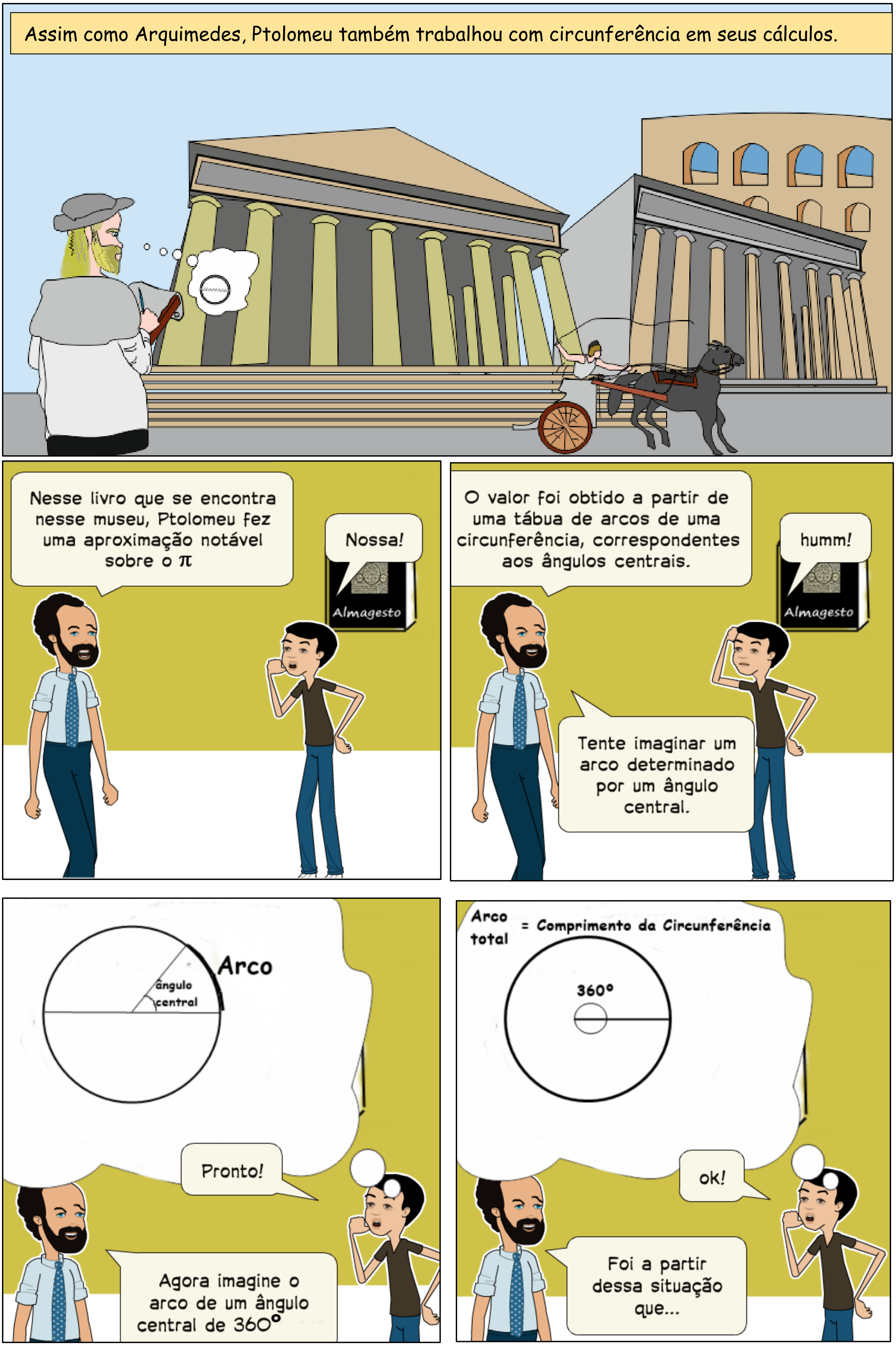
$(d - \frac{d}{9})^2$
Essa expressão determinava o valor aproximado da área do círculo.
$(d - \frac{d}{9})^2$
Em linguagem moderna esse cálculo considera o valor de π igual a $(\frac{16}{9})^2$ que vale aproximadamente 3,160493.
$(\frac{16}{9})^2$ vale aproximadamente 3,160493
Essa e tantas outras situações, representaram possíveis motivações que indicam uma compreensão da ideia de π pelos Egípcios.
Nossa! Mas como esses egípcios entendiam de matemática!
Realmente
As grandes obras de construção mostram que entendiam bastante, mesmo!
de Suza
Mas não só os Egípcios e os Babilônios que tinham conhecimento sobre o pi.
Os chineses Também tiveram.
Na China antiga também havia um entendimento sobre o número π.
355/13


Na China, Liu Hui (ca. 220 d. C.), um copiador de livros, conseguiu obter o valor 3,14159 para π a partir de um polígono de 3072 lados.
355/13
Mas no final do século V que o matemático Tsu Ch'ung-chih chegou a um valor mais próximo, sendo obtido pela razão $\frac{355}{13}$.
355/13
$\frac{355}{13}$ vale aproximadamente
3,141593
Mas ela ainda não acabou.
Que incrível essa história.
Existiu um matemático na cidade de Siracusa, na região da Itália, chamado Arquimedes (287-212 a.C.)...
de Suza
Arquimedes era matemático, físico, engenheiro, inventor, e astrônomo.
Ele também tratou do significado de π

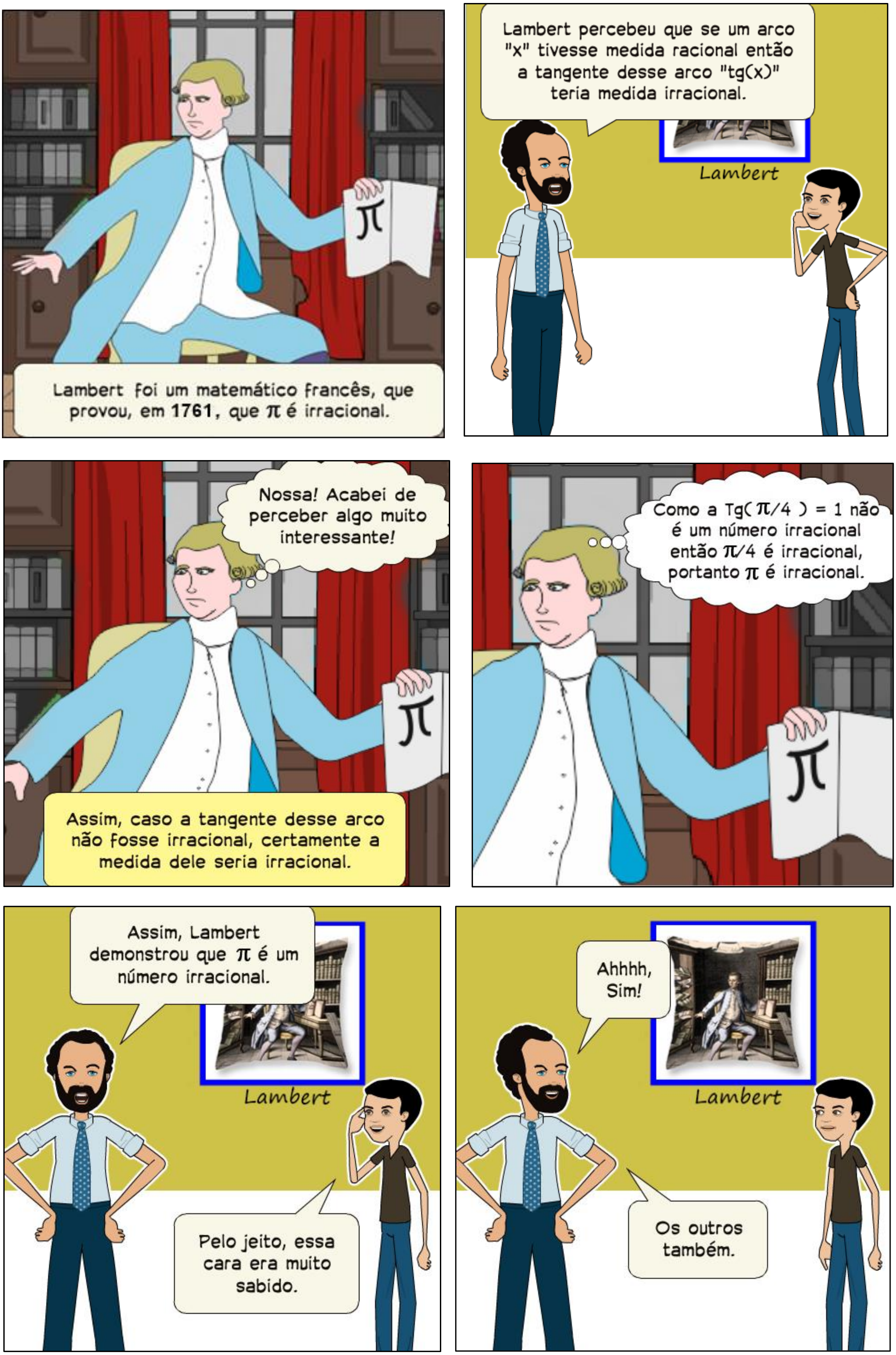

Arquimedes tratou do significado de π de maneira magnífica.
π=?
a partir de um método geométrico criado por ele mesmo...
...tratou do valor de π de maneira científica.
Imagine uma circunferência.
humm!
Agora imagine dois polígonos regulares de 4 lados (n=4). Um deles incrito na circunferência e o outro circunscrito nela.
Poligono Circunscrito
Poligono Inscrito
n=4
Pronto!
Agora aumente para o dobro do número de lados desses polígonos (n=8).


Poligono Circunscrito
Poligono Inscrito
n=8
Agora aumente novamente para o dobro do número de lados desses polígonos (n=16).
Ta ok!
Poligono Circunscrito
Poligono Inscrito
n=16
Agora aumente novamente para o dobro do número de lados desses polígonos (n=32).
Ok!
Poligono Circunscrito
Poligono Inscrito
n=32
O que percebeu?
Nossa! Que incrível! Os polígonos estão ficando próximos da circunferência!
Quase não há mais diferença visual entre eles.
Arquimedes percebeu que o perímetro do polígono inscrito (Pi) é menor que o perímetro da circunferência (Pci), e este, é menor que o perímetro do polígono circunscrito (Pc). Assim, ele delimitou um intervalo para o valor de Pci, isto é, do perímetro da circunferência.
Pi < Pci < Pc
Assim ele conseguiu determinar uma aproximação para π
Arquimedes repetiu o processo que lhe falei, com polígonos inscritos e circunscritos de até 96 lados, até perceber que o π está entre 3,140 e 3,143.
3,140< π < 3,143


Esse método é conhecido como "método clássico para o cálculo do número π".
Digamos que o grande reconhecimento pelo trabalho dele está no fato de ele não tentar apresentar o valor exato de π, mas somente um limite inferior e um superior para este número.
Vamos continuar andando por este museu, ok?
Claro!
Vamos sim!
Está gostando do passeio, Rafael.
Claro, tio!
Ora! Ora! Veja só, esse é um dos livros de uma coleção chamada de Almagesto escrita por Ptolomeu (85-165 d.C.),
Almagesto
Nossa é bem antigo.
Quem foi esse tal de Ptolomeu?
Almagesto
Foi um cientista, astrônomo e geógrafo grego que viveu em Alexandria.

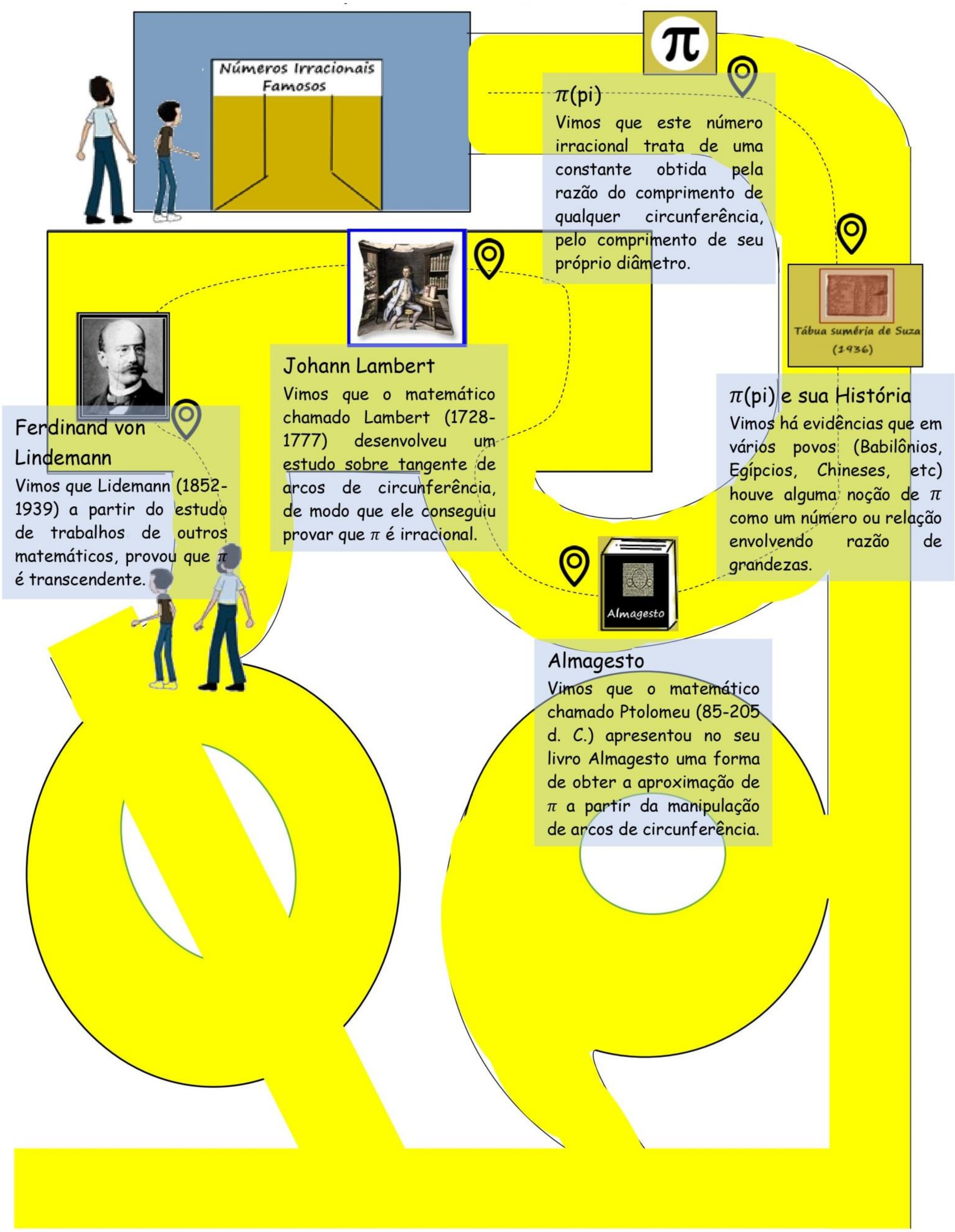

Assim como Arquimedes, Ptolomeu também trabalhou com circunferência em seus cálculos.
Nesse livro que se encontra nesse museu, Ptolomeu fez uma aproximação notável sobre o π
Nossa!
Almagesto
O valor foi obtido a partir de uma tábua de arcos de uma circunferência, correspondentes aos ângulos centrais.
humm!
Almagesto
Tente imaginar um arco determinado por um ângulo central.
Arco
ângulo central
Pronto!
Agora imagine o arco de um ângulo central de 360°
Arco total = Comprimento da Circunferência
360°
ok!
Foi a partir dessa situação que...


...Ptolomeu dividiu o comprimento total do arco quando o ângulo central era de 360 graus, pelo diâmetro da circunferência.
Almagesto
Obtendo, a aproximação 3,1416 para π.
377/120
360°
$\frac{377}{120}$ vale aproximadamente 3,1416
Tio! Tio!
Quem é aquele cara?
Almagesto
humm
Lambert
Ahhh aquele?
Lambert
Esta é uma imagem de Johann Heinrich Lambert (1728–1777)


Lambert foi um matemático francês, que provou, em **1761**, que π é irracional.
Lambert percebeu que se um arco "x" tivesse medida racional então a tangente desse arco "tg(x)" teria medida irracional.
Lambert
Nossa! Acabei de perceber algo muito interessante!
Assim, caso a tangente desse arco não fosse irracional, certamente a medida dele seria irracional.
Como a Tg(π/4) = 1 não é um número irracional então π/4 é irracional, portanto π é irracional.
Assim, Lambert demonstrou que π é um número irracional.
Lambert
Pelo jeito, essa cara era muito sabido.
Ahhhh, Sim!
Lambert
Os outros também.

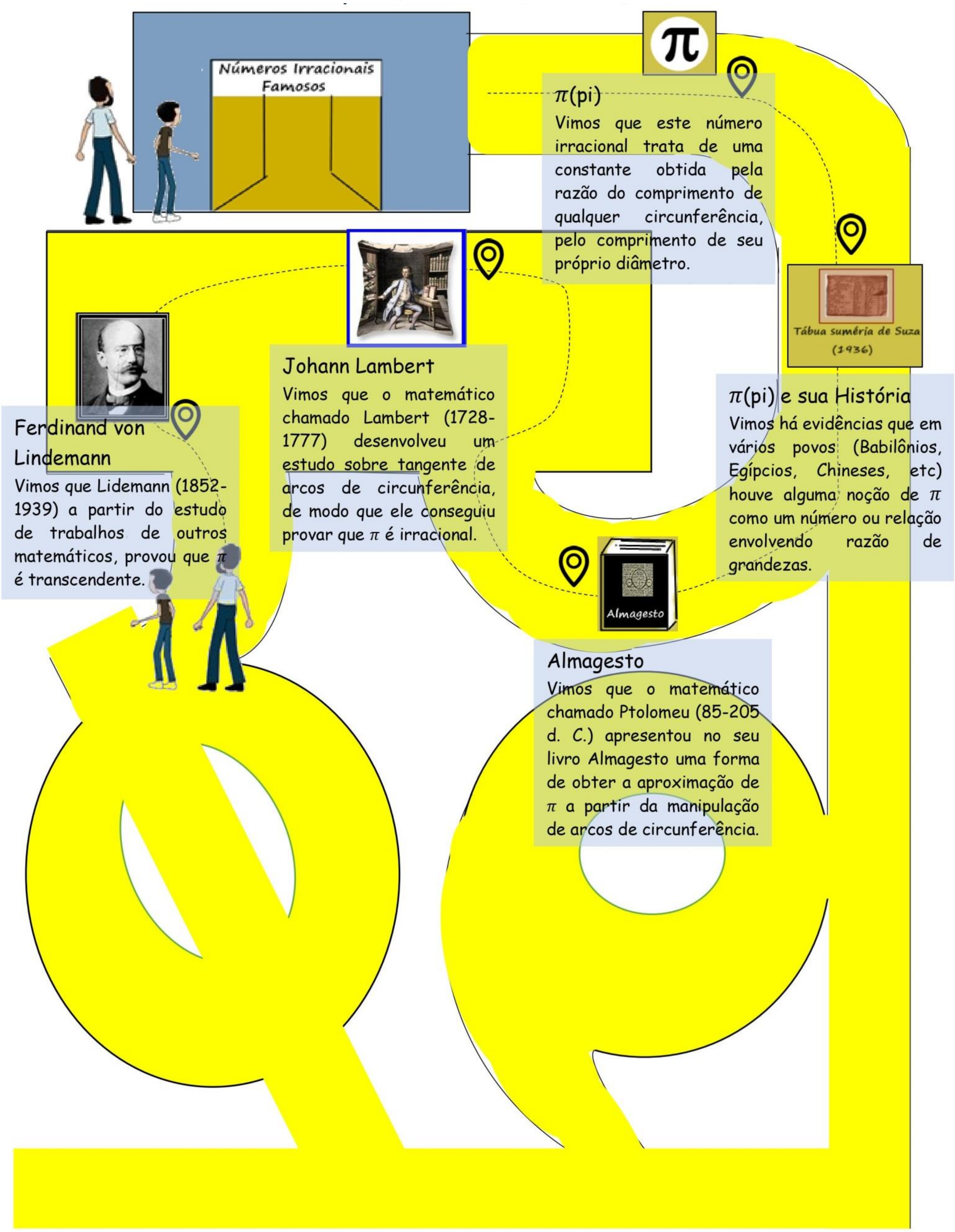

já aquele bem alí, é Ferdinand von Lindemann (1852-1939)
Lindemann foi um matemático que provou que π é um número irracional transcendente.
Nossa! sério?
e é transcendente, ok!
Sei também que $e^{i\pi} + 1 = 0$
Sabendo que o número "e" é transcendente, e dispondo da "identidade de Euler", ele provou que o π não pode ser raíz de um polinômio.
ou seja, π é um número irracional transcendente.
Pelo que vi, o π tem uma grande história
Ahhh, isso é verdade.
FIM DA HISTÓRIA MAS A HISTÓRIA DO π CONTINUA
Esta história em quadrinhos é apenas um recorte histórico de alguns fatos e evidências importantes que contribuiram para a compreensão atual do número π

Caminho traçado nesse capítulo

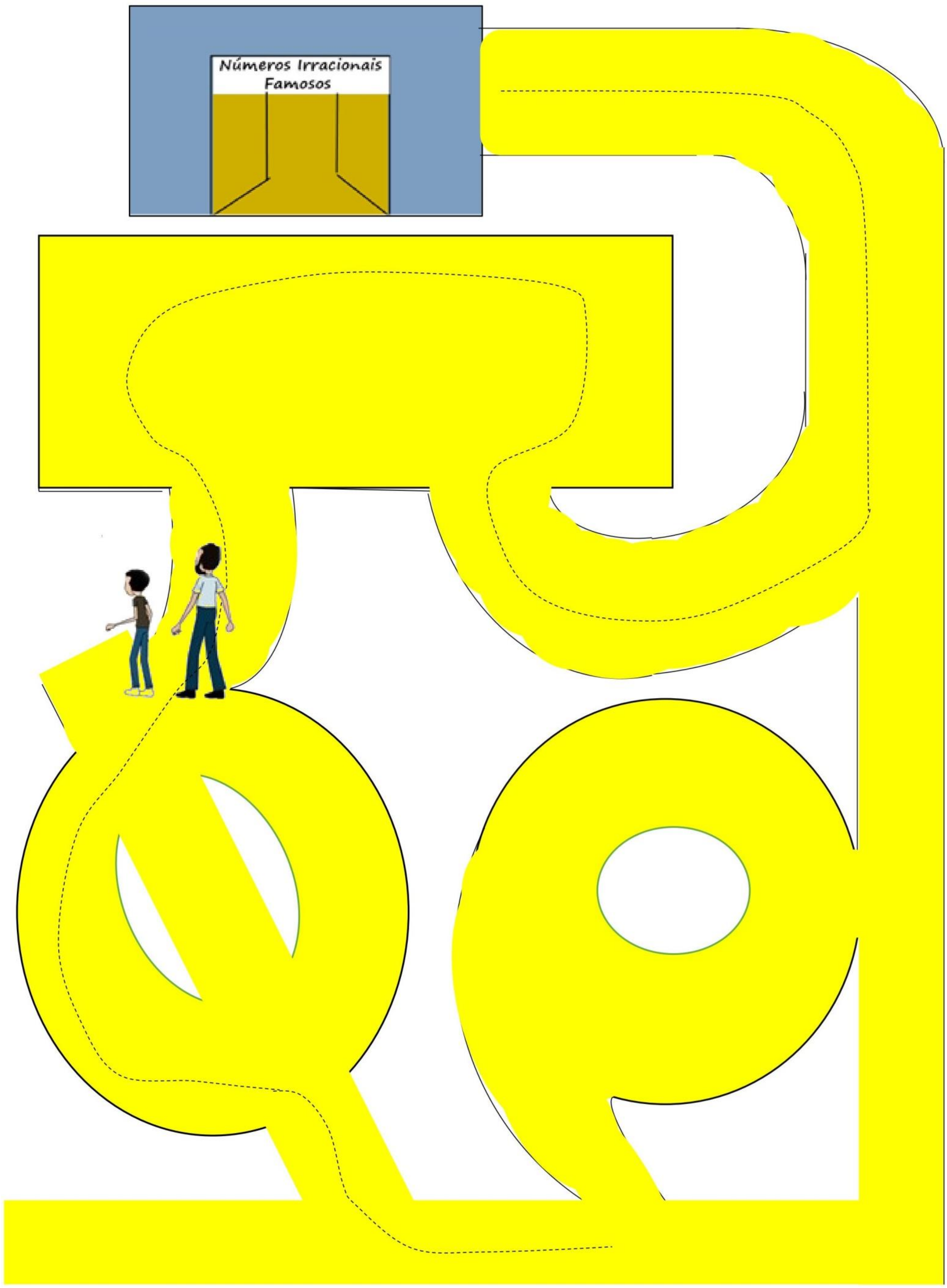


O Museu dos Números Irracionais – Parte III

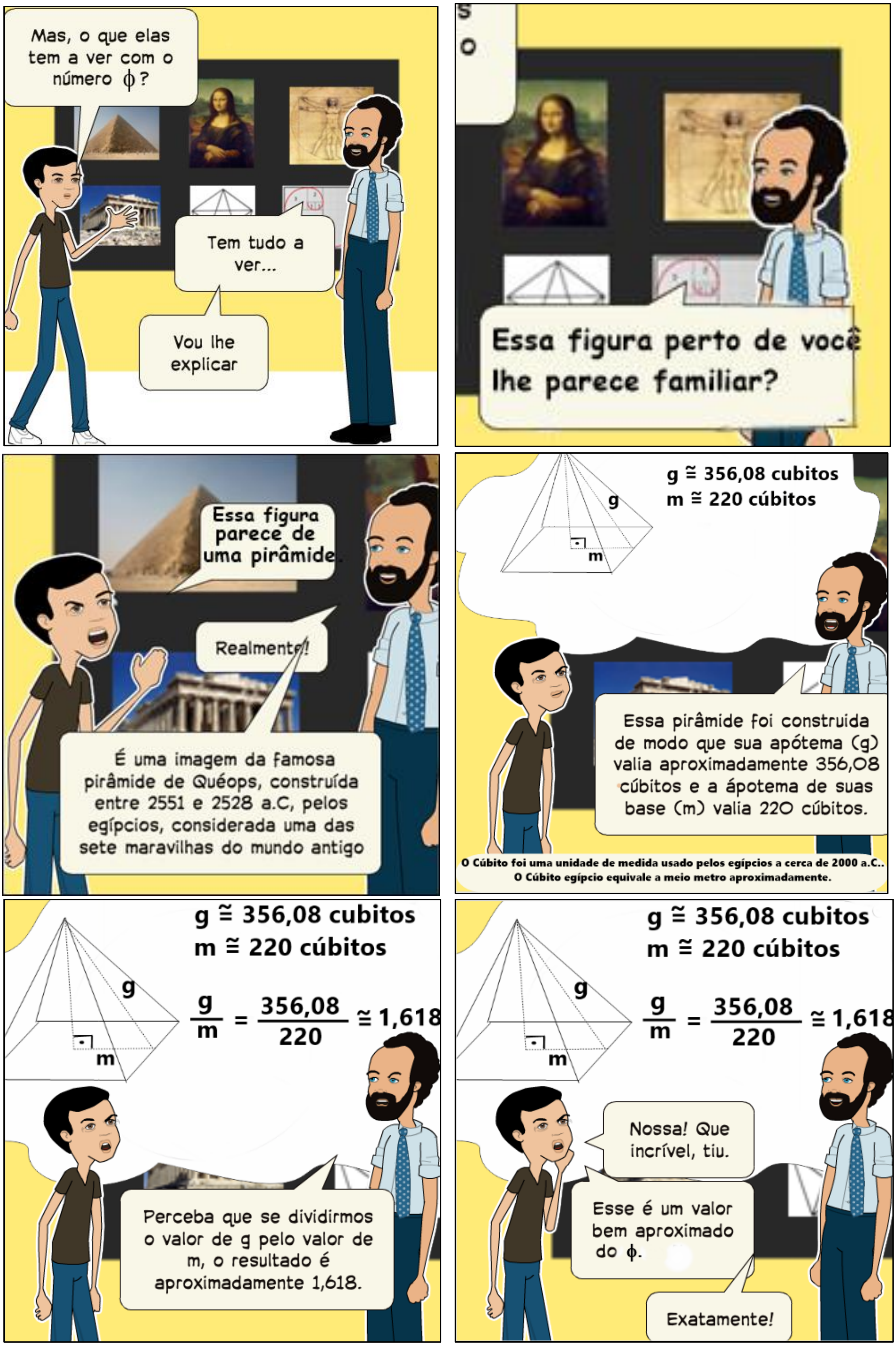
Capítulo Anterior



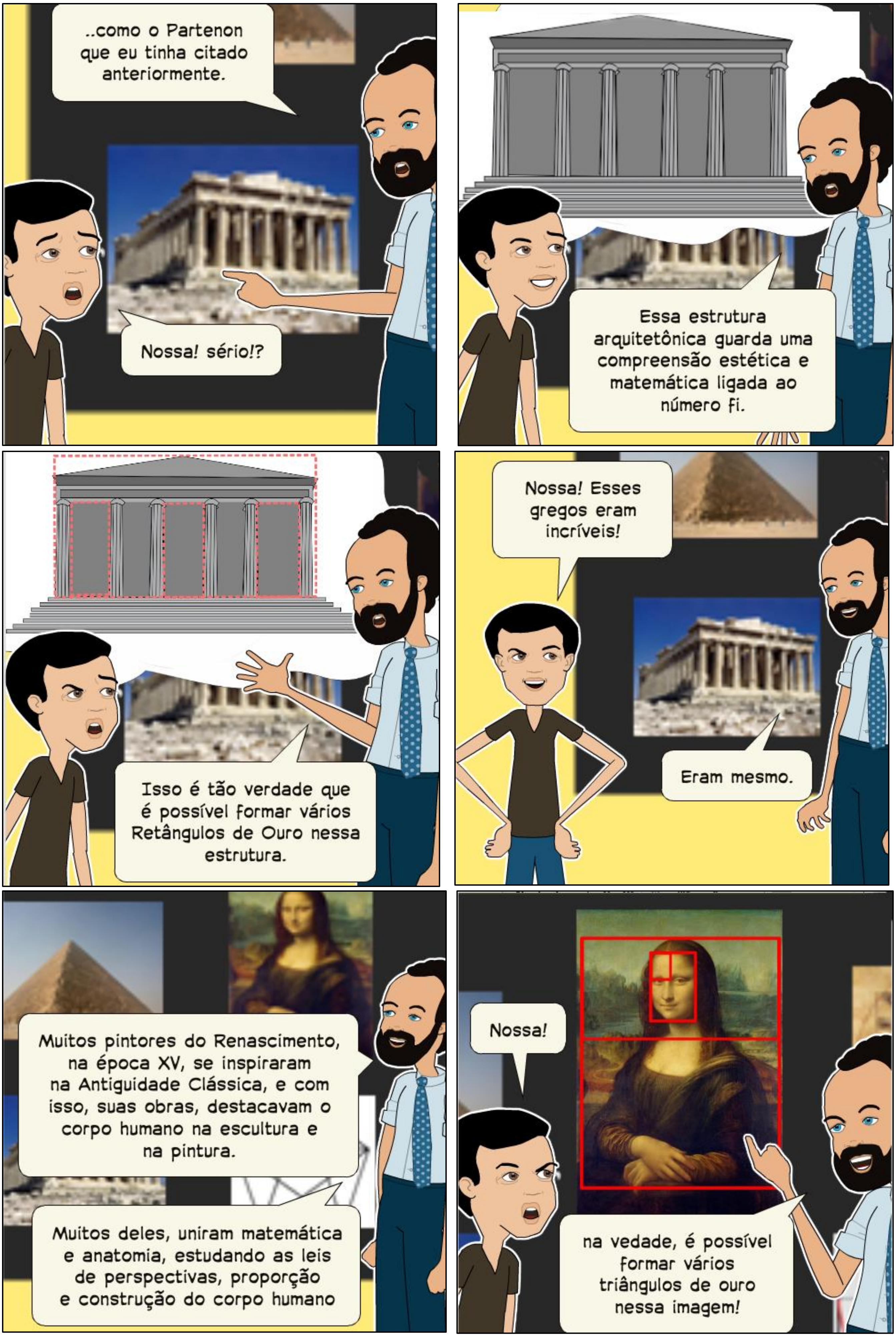
Mapa do trajeto que será seguido nesse capítulo

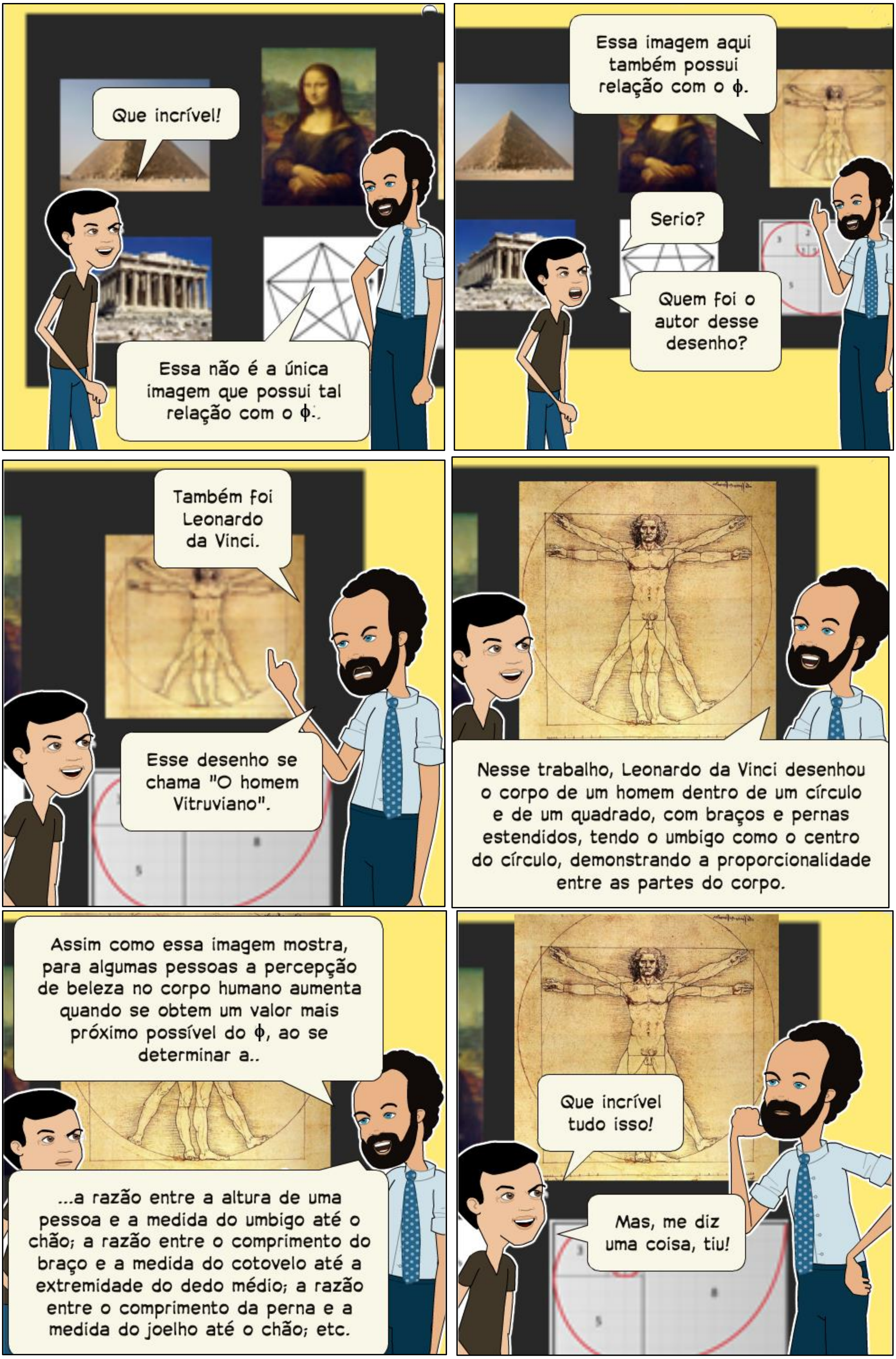


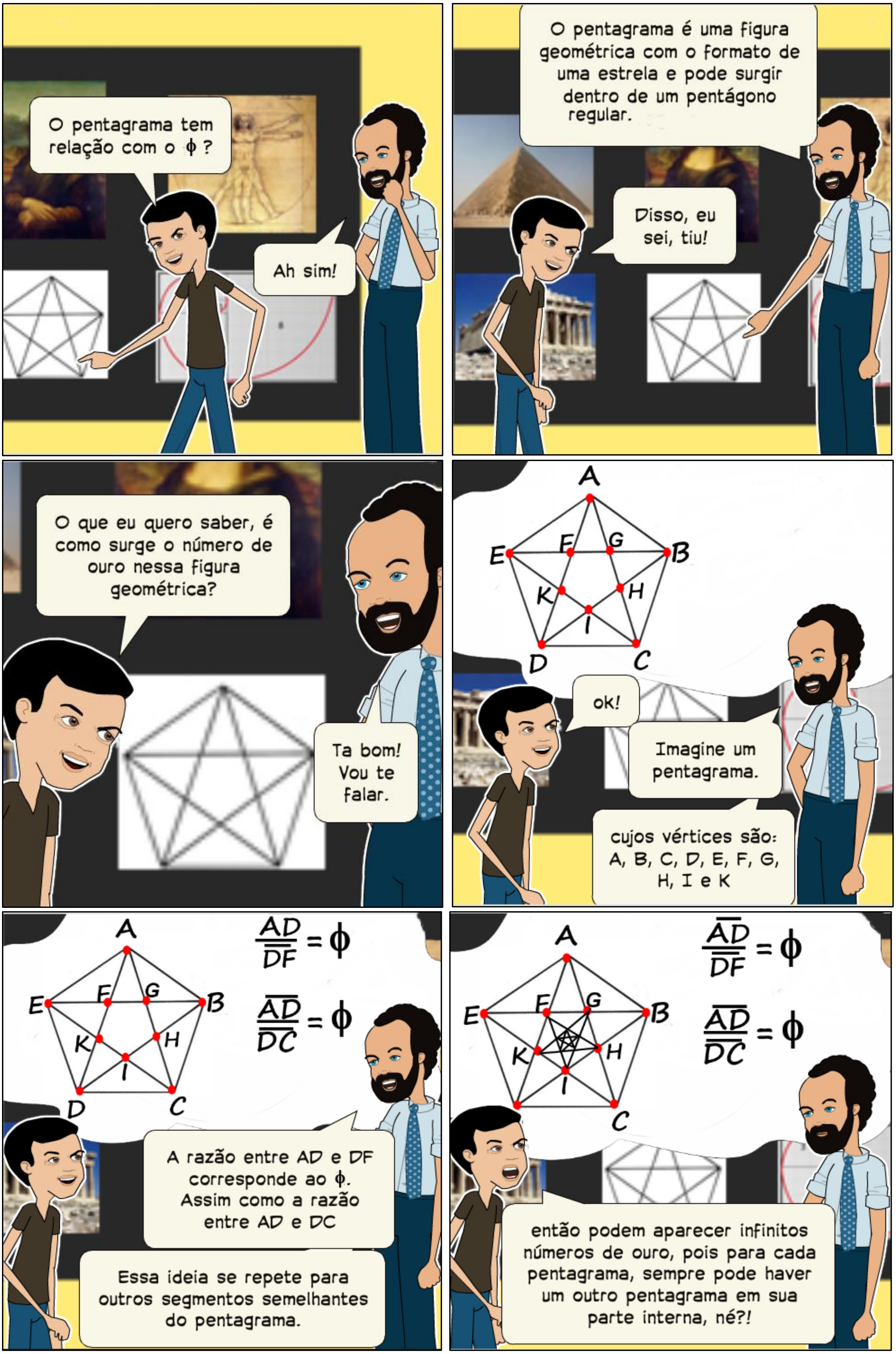

ϕ
Esse é o famoso ϕ um número irracional que é representado por esse símbolo e pronunciado de fi.
Uma aproximação do seu valor é 1,6180339
Ele também é chamado de proporção áurea, número de ouro, número divino, dentre outros nomes.
Por quê ele recebe esses nomes?
hummm
Pra explicar isso teremos que caminhar um pouco mais por essa área do museu.
Ok!
Siga-me
Veja só essas imagens.
Elas representam desenhos e pinturas famosas

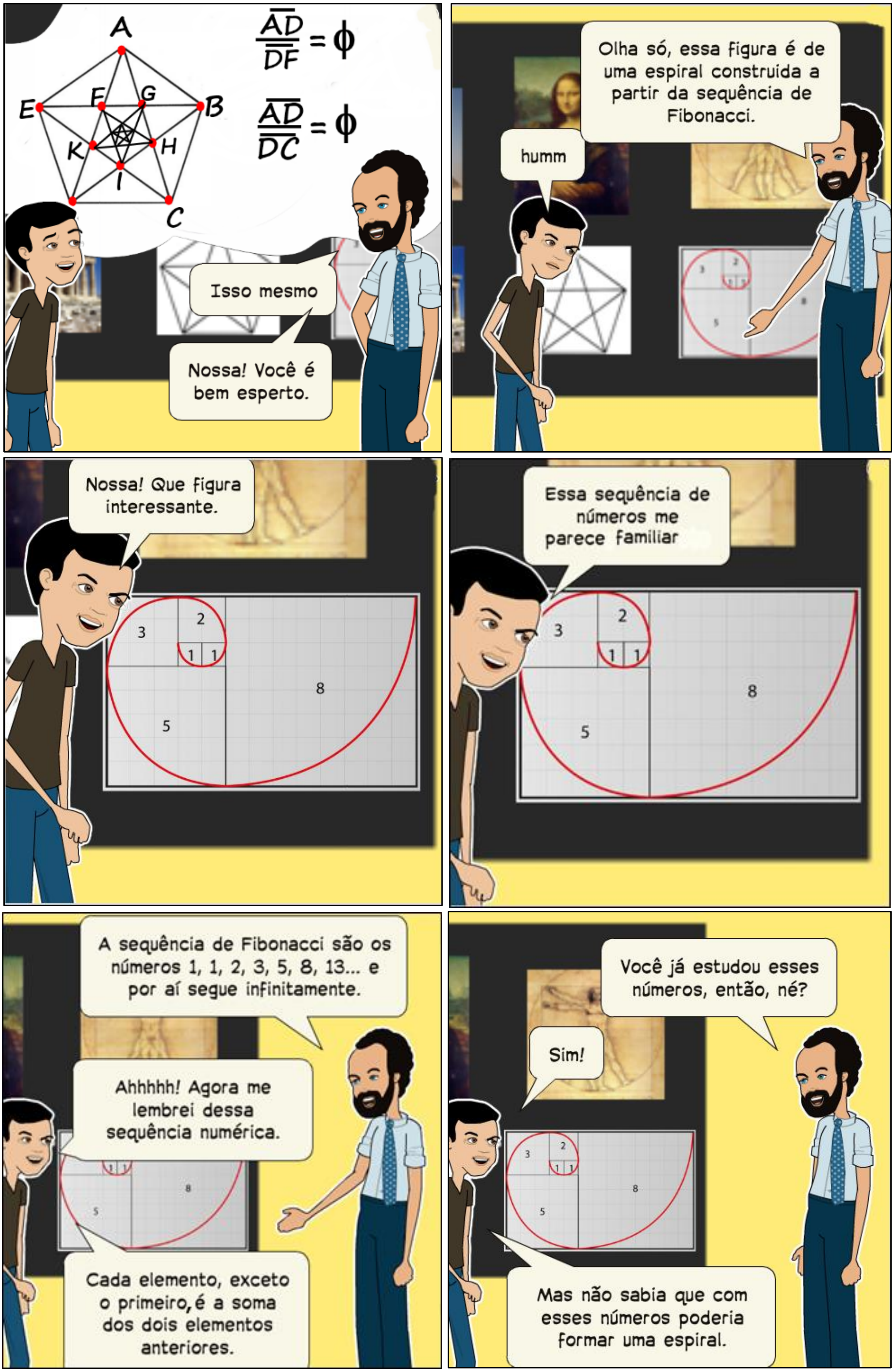

Mas, o que elas tem a ver com o número ϕ?
Tem tudo a ver...
Vou lhe explicar
Essa figura perto de você lhe parece familiar?
Essa figura parece de uma pirâmide.
Realmente!
É uma imagem da famosa pirâmide de Quéops, construída entre 2551 e 2528 a.C, pelos egípcios, considerada uma das sete maravilhas do mundo antigo
g ≅ 356,08 cubitos
m ≅ 220 cúbitos
g
m
Essa pirâmide foi construída de modo que sua apótema (g) valia aproximadamente 356,08 cúbitos e a ápotema de suas base (m) valia 220 cúbitos.
O Cúbito foi uma unidade de medida usado pelos egípcios a cerca de 2000 a.C..
O Cúbito egípcio equivale a meio metro aproximadamente.
g ≅ 356,08 cubitos
m ≅ 220 cúbitos
g
m
$\frac{g}{m} = \frac{356,08}{220} \cong 1,618$
Perceba que se dividirmos o valor de g pelo valor de m, o resultado é aproximadamente 1,618.
g ≅ 356,08 cubitos
m ≅ 220 cúbitos
g
m
$\frac{g}{m} = \frac{356,08}{220} \cong 1,618$
Nossa! Que incrível, tiu.
Esse é um valor bem aproximado do ϕ.
Exatamente!

Olha essa outra imagem!
Este monumento se chama Partenon, um templo grego, construído por volta de 447 a 433 a.C
Antes de explicar sobre este monumento, irei falar sobre uma figura geométrica importante, o Retângulo de Ouro!
2
$1+\sqrt{5}$
Imaginando um retângulo que possui comprimento medindo $1+\sqrt{5}$ e a largura medindo 2, temos que esse é um exemplo de Retângulo de Ouro.
2
$1+\sqrt{5}$
$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$
Esse retângulo possui esse nome, pois a razão entre o comprimento e a largura é o valor de ϕ.
Ah entendi!
Retângulo de Ouro aparece em diversas estruturas de edificação, como...

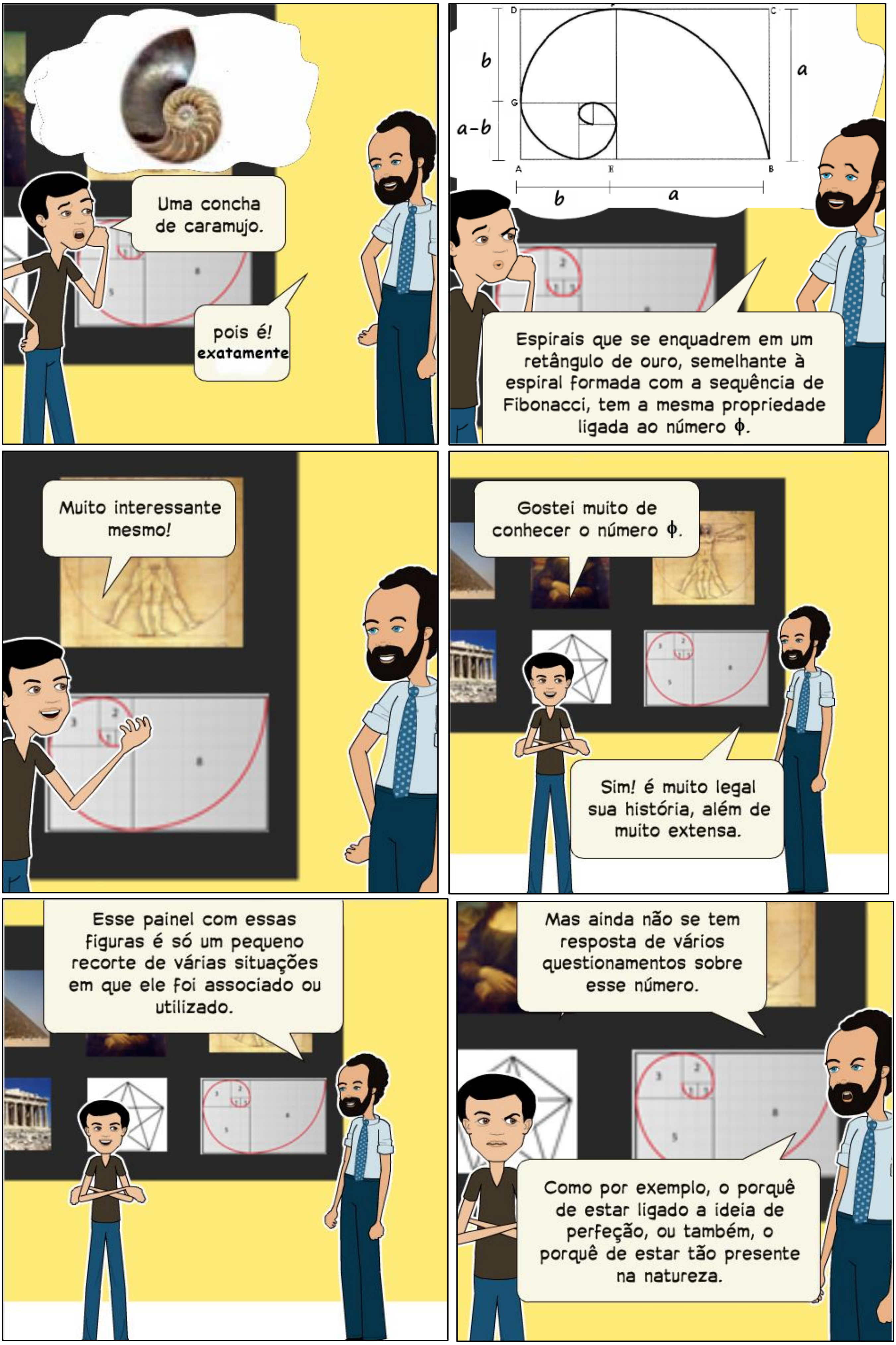

..como o Partenon que eu tinha citado anteriormente.
Nossa! sério!?
Essa estrutura arquitetônica guarda uma compreensão estética e matemática ligada ao número fi.
Isso é tão verdade que é possível formar vários Retângulos de Ouro nessa estrutura.
Nossa! Esses gregos eram incríveis!
Eram mesmo.
Muitos pintores do Renascimento, na época XV, se inspiraram na Antiguidade Clássica, e com isso, suas obras, destacavam o corpo humano na escultura e na pintura.
Muitos deles, uniram matemática e anatomia, estudando as leis de perspectivas, proporção e construção do corpo humano
Nossa!
na vedade, é possível formar vários triângulos de ouro nessa imagem!


Que incrível!
Essa não é a única imagem que possui tal relação com o ϕ..
Essa imagem aqui também possui relação com o ϕ.
Serio?
Quem foi o autor desse desenho?
Também foi Leonardo da Vinci.
Esse desenho se chama "O homem Vitruviano".
Nesse trabalho, Leonardo da Vinci desenhou o corpo de um homem dentro de um círculo e de um quadrado, com braços e pernas estendidos, tendo o umbigo como o centro do círculo, demonstrando a proporcionalidade entre as partes do corpo.
Assim como essa imagem mostra, para algumas pessoas a percepção de beleza no corpo humano aumenta quando se obtem um valor mais próximo possível do ϕ, ao se determinar a..
...a razão entre a altura de uma pessoa e a medida do umbigo até o chão; a razão entre o comprimento do braço e a medida do cotovelo até a extremidade do dedo médio; a razão entre o comprimento da perna e a medida do joelho até o chão; etc.
Que incrível tudo isso!
Mas, me diz uma coisa, tiu!


O pentagrama tem relação com o ϕ ?
Ah sim!
O pentagrama é uma figura geométrica com o formato de uma estrela e pode surgir dentro de um pentágono regular.
Disso, eu sei, tiu!
O que eu quero saber, é como surge o número de ouro nessa figura geométrica?
Ta bom! Vou te falar.
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
Imagine um pentagrama.
ok!
cujos vértices são: A, B, C, D, E, F, G, H, I e K
$\frac{\overline{AD}}{\overline{DF}} = \phi$
$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \phi$
A razão entre AD e DF corresponde ao ϕ. Assim como a razão entre AD e DC
Essa ideia se repete para outros segmentos semelhantes do pentagrama.
então podem aparecer infinitos números de ouro, pois para cada pentagrama, sempre pode haver um outro pentagrama em sua parte interna, né?!

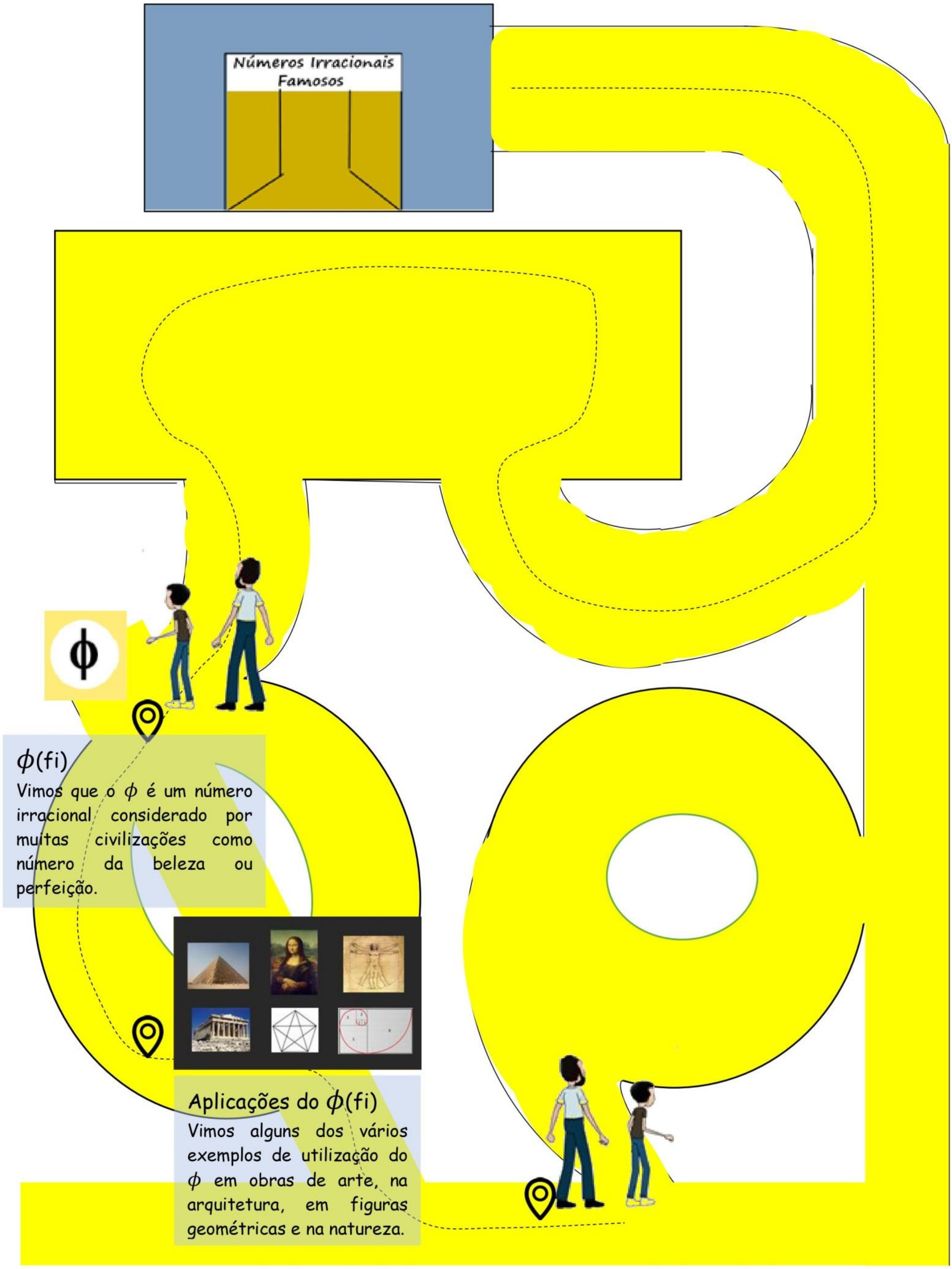

A
E
F
G
B
K
H
I
C
$\frac{\overline{AD}}{\overline{DF}} = \phi$
$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \phi$
Isso mesmo
Nossa! Você é bem esperto.
Olha só, essa figura é de uma espiral construída a partir da sequência de Fibonacci.
humm
Nossa! Que figura interessante.
Essa sequência de números me parece familiar
A sequência de Fibonacci são os números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... e por aí segue infinitamente.
Ahhhhh! Agora me lembrei dessa sequência numérica.
Cada elemento, exceto o primeiro, é a soma dos dois elementos anteriores.
Você já estudou esses números, então, né?
Sim!
Mas não sabia que com esses números poderia formar uma espiral.


3
2
1
1
8
5
Quadrados de lados medindo os elementos dessa sequência, podem ser organizados de modo que pode ser formado uma espiral.
3
2
1
1
8
5
repare que os números que você vê no centro de cada quadrado equivale a medida de cada lado
Mas, tio, qual é a relação entre essa sequência de números e o ϕ?
Calma rapaz! Vou lhe explicar.
o que será que acontece se eu determinar a razão entre cada elemento e o elemento anterior da sequência de Fibonacci? 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...
Observe o seguinte: 1/1 = 1; 2/1 = 2; 3/2 = 1,5; 5/3 = 1,6...; 8/5 = 1,6; 13/8 = 1,625;
o que percebeu ao observar as razões: 1; 2; 1,5; 1,6...; 1,6; 1,625 ?
Eita! Eita!
Está ficando próximo do número ϕ.
Exatamente!
Esse número é incrível! Cada vez me surpreende mais!
Ah! agora imagine algumas situações na natureza em que surgem uma figura em espiral?


Uma concha de caramujo.
pois é! exatamente
D C
b
a
G
a-b
A E B
b a
Espirais que se enquadrem em um retângulo de ouro, semelhante à espiral formada com a sequência de Fibonacci, tem a mesma propriedade ligada ao número ϕ.
Muito interessante mesmo!
Gostei muito de conhecer o número ϕ.
Sim! é muito legal sua história, além de muito extensa.
Esse painel com essas figuras é só um pequeno recorte de várias situações em que ele foi associado ou utilizado.
Mas ainda não se tem resposta de vários questionamentos sobre esse número.
Como por exemplo, o porquê de estar ligado a ideia de perfeção, ou também, o porquê de estar tão presente na natureza.

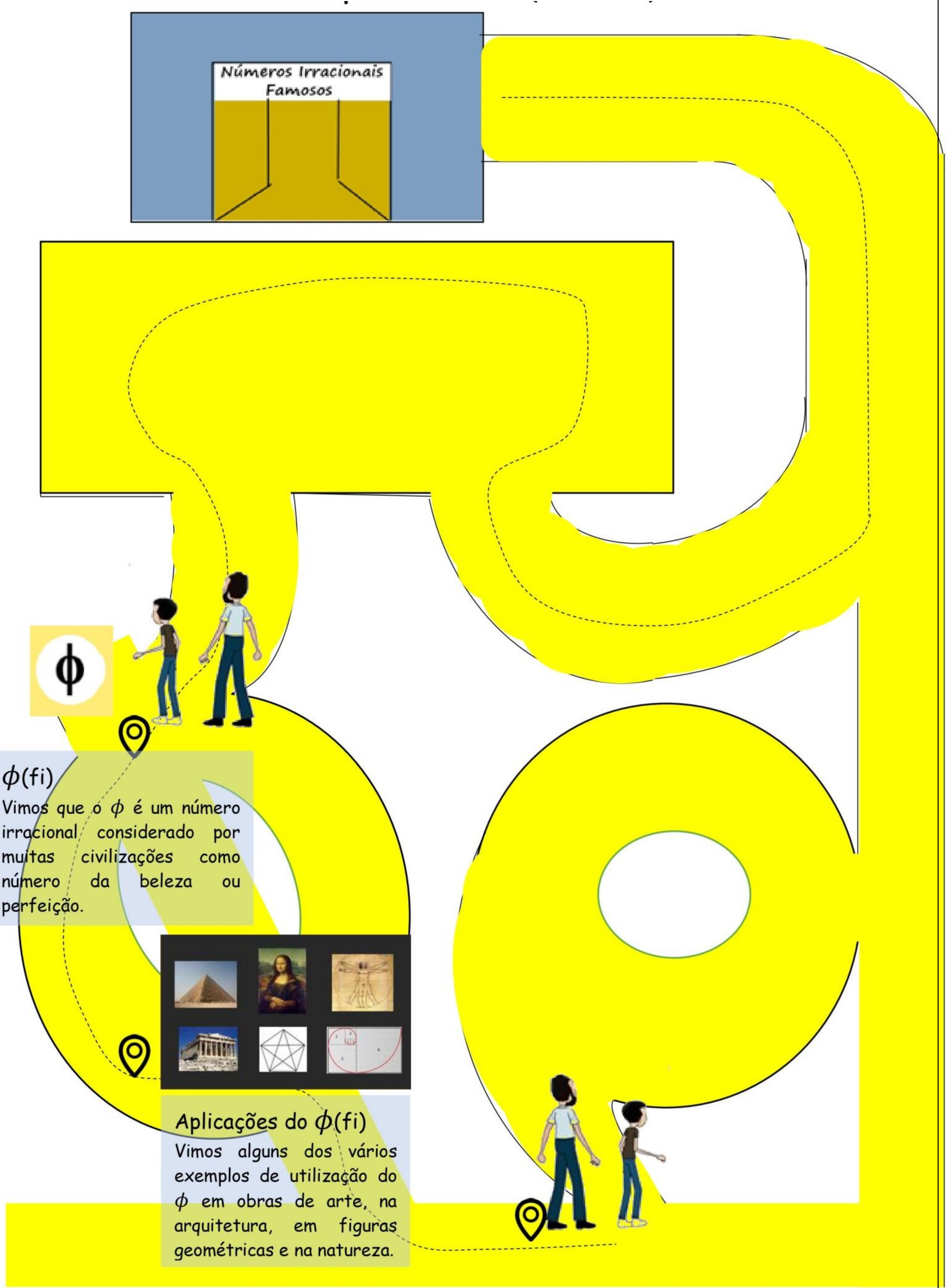

Na verdade os valores que geralmente encontramos do ϕ são só aproximações de seu valor numérico, devido ele ser irracional, portanto não é exáto.
Ah sim entendi

Caminho traçado nesse capítulo

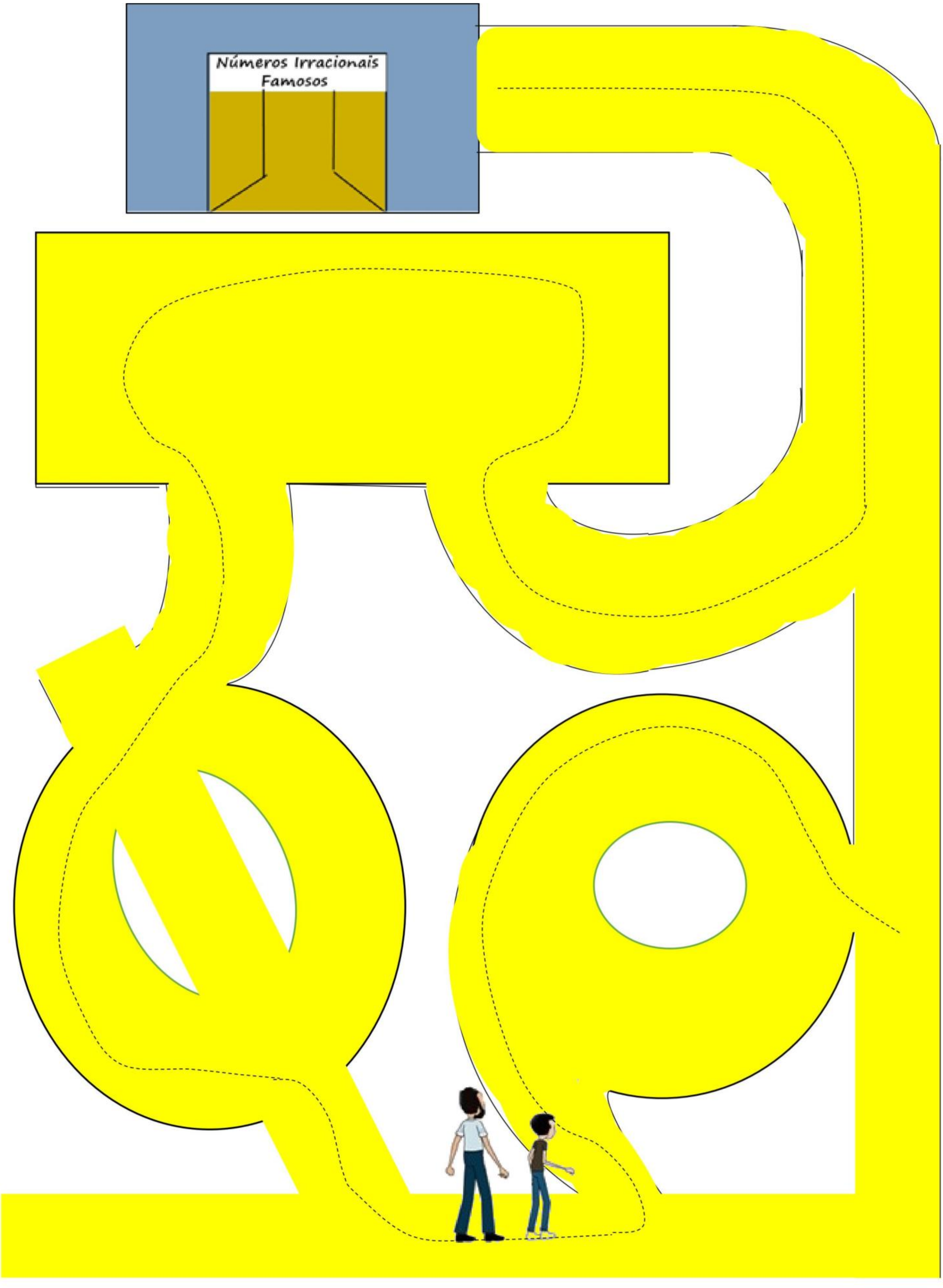


O Museu dos Números Irracionais – Parte IV

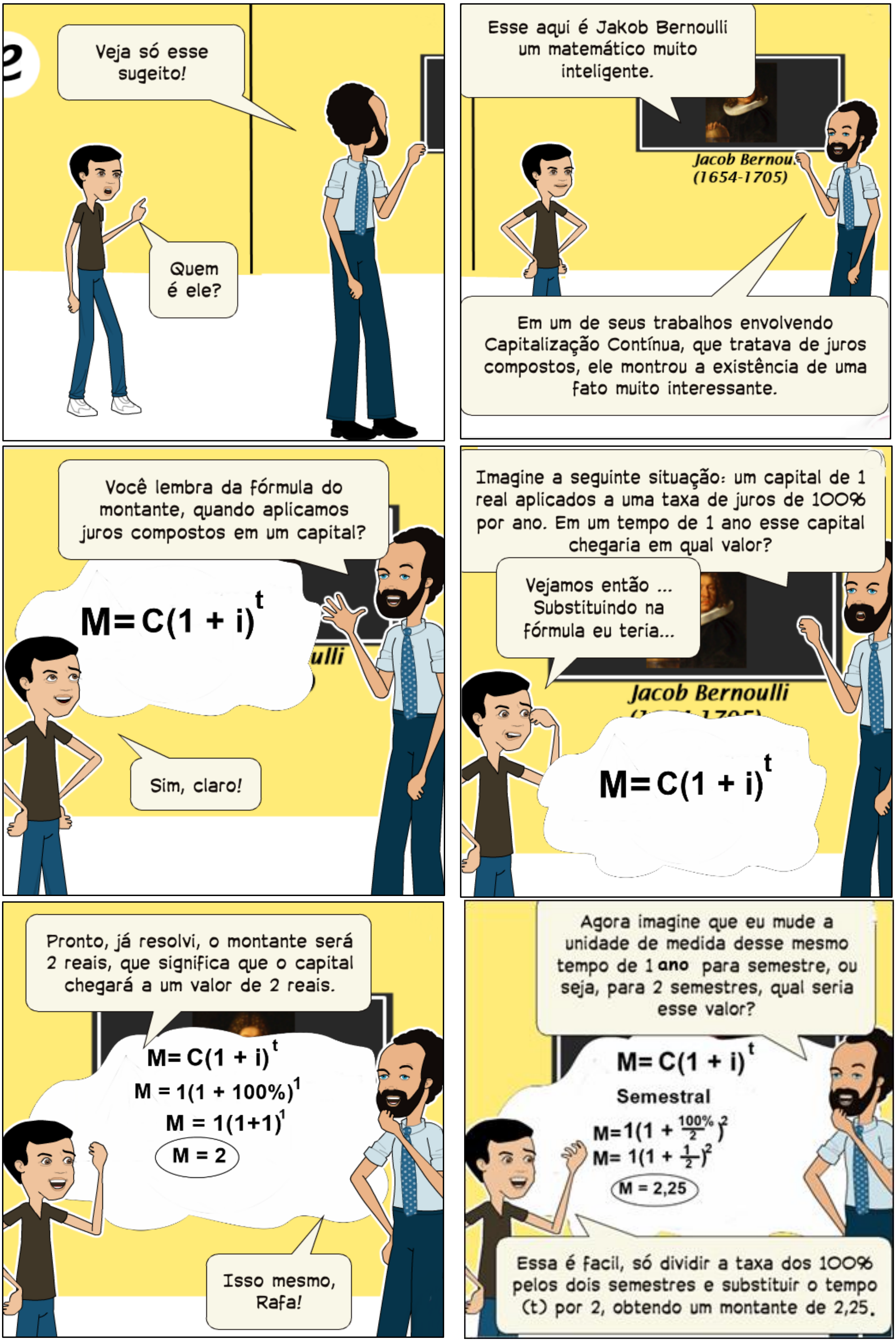
Capítulo Anterior



Mapa do trajeto que será seguido nesse capítulo



Veja, Rafael, reconhece esse número?
Não, tio.
Este é o famoso "Número de Euler" que é simbolizado pela letra "e".
Ok! Mas qual o valor dele?
O valor dele é 2,71828182845904 5235360287471352 662497757247093 699959574966967 62772407663035
Continuando onde eu parei ..354759457138
Ok, tio, já pode parar
Já entedi que esse número nunca acaba, da mesma maneira que os demais números irracionais desse museu.
Exatamente! Além de não haver repetição periódica. Mas vamos resumir esse número a uma aproximação de 2,71.
Agora me conte um pouco sobre a história desse número irracional.
Então vamos continuar andando, siga-me!
OK



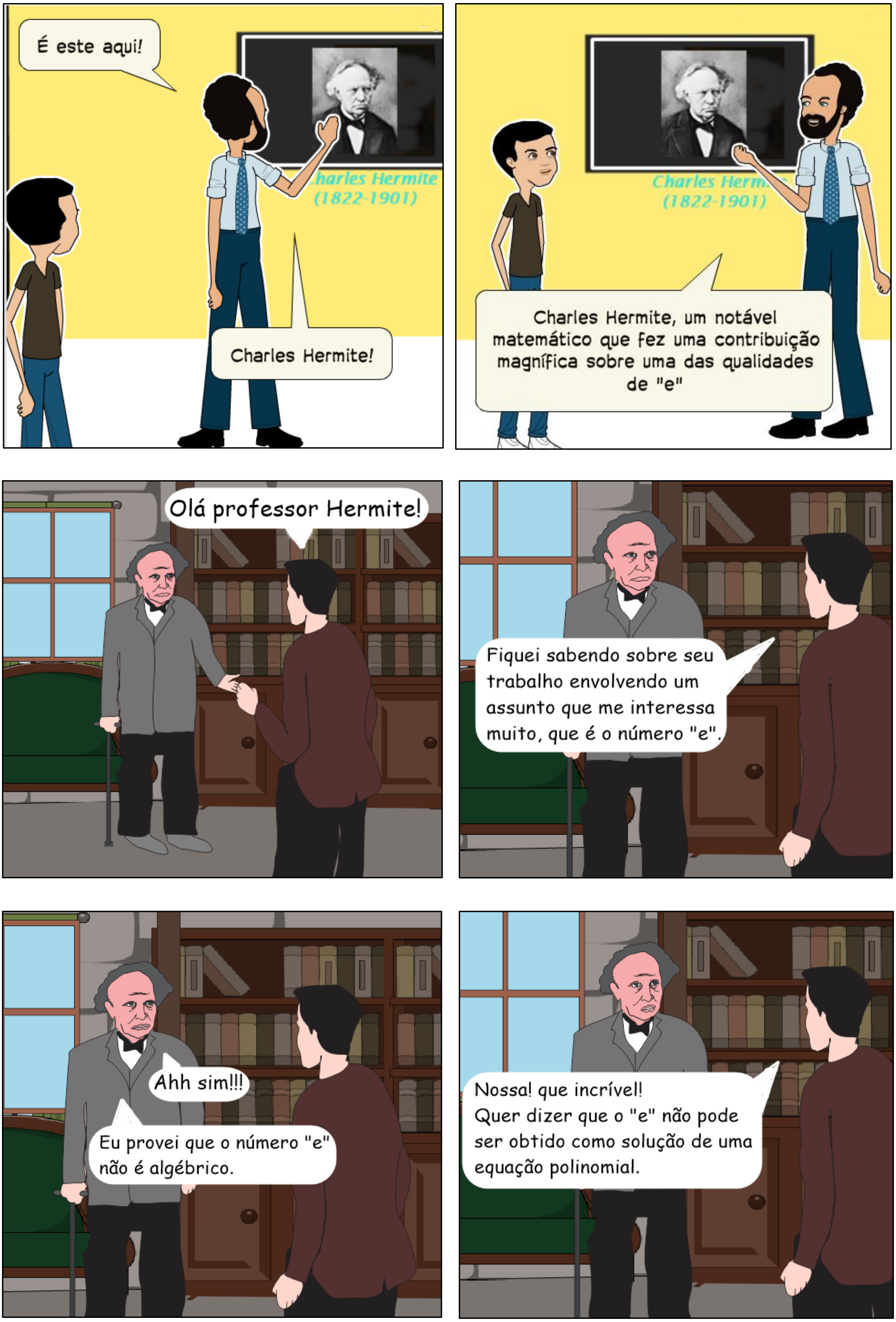
Veja só esse sugeito!
Quem é ele?
Esse aqui é Jakob Bernoulli um matemático muito inteligente.
Jacob Bernoulli (1654-1705)
Em um de seus trabalhos envolvendo Capitalização Contínua, que tratava de juros compostos, ele montrou a existência de uma fato muito interessante.
Você lembra da fórmula do montante, quando aplicamos juros compostos em um capital?
M= C(1 + i)^t
Sim, claro!
Imagine a seguinte situação: um capital de 1 real aplicados a uma taxa de juros de 100% por ano. Em um tempo de 1 ano esse capital chegaria em qual valor?
Vejamos então ... Substituindo na fórmula eu teria...
Jacob Bernoulli
M= C(1 + i)^t
Pronto, já resolvi, o montante será 2 reais, que significa que o capital chegará a um valor de 2 reais.
M= C(1 + i)^t
M = 1(1 + 100%)^1
M = 1(1+1)^1
M = 2
Isso mesmo, Rafa!
Agora imagine que eu mude a unidade de medida desse mesmo tempo de 1 ano para semestre, ou seja, para 2 semestres, qual seria esse valor?
M= C(1 + i)^t
Semestral
M=1(1 + 100%/2)^2
M= 1(1 + 1/2)^2
M = 2,25
Essa é facil, só dividir a taxa dos 100% pelos dois semestres e substituir o tempo (t) por 2, obtendo um montante de 2,25.

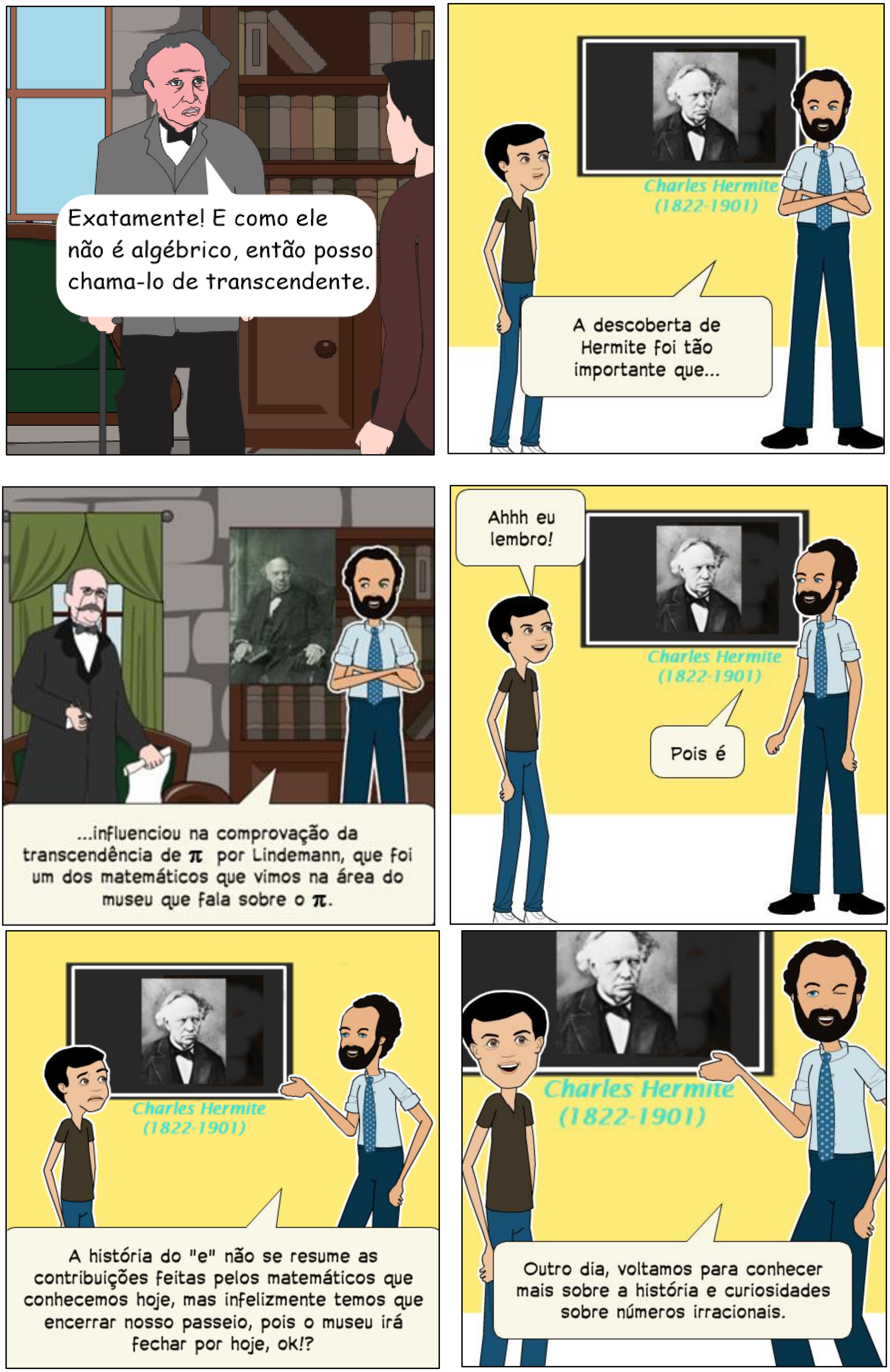

E se agora eu mudasse a unidade de medida desse tempo de 1 ano para meses, ou seja, um total de 12 meses, quanto seria o montante?
É só aplicar a mesma ideia feita por mim anteriormente.
Jacob Bernoulli (1654-1705)
Vou obter nesse caso um montante aproximado de 2,61 reais.
$M = C(1 + i)^t$
Anual
$M = 1(1 + 100\%)^1$
$M = 1(1+1)^1$
$M = 2$
Semestral
$M = 1(1 + \frac{100\%}{2})^2$
$M = 1(1 + \frac{1}{2})^2$
$M = 2,25$
Mensal
$M \cong 2,6130$
Existe alguma coisa familiar nesses valores!
Ahhh já sei, são aproximações do número que meu tio falou anteriormente.
Você já deve ter percebido que a expressão que estamos trabalhando nessa situação é $(1+\frac{1}{t})^t$
$(1 + \frac{1}{t})^t$
Sei sim, sendo que para t = 1, o valor numérico é 2; para t = 2, o valor numérico é 2,25; para t= 12 chegaremos próximo de 2,61.
Já percebeu alguma coisa familiar nesses números?
São aproximações do número "e".
Exatamente! E quanto maior o período (t) nessa expressão, então mais próximo estaremos de e, nessa situação!
Jacob fez esse mesmo estudo de tal modo que ele mostrou que se aumentarmos infinitamente o tempo n, o valor numérico da expressão será um valor entre 2 e 3.
Jacob Bernoulli (1654-1705)

$(1+\frac{1}{n})^n$
n | $(1+1/n)^n$
1 | 2
2 | 2,25
3 | 2,37037
4 | 2,44141
5 | 2,48832
10 | 2,59374
50 | 2,69159
100 | 2,70481
1.000 | 2,71692
10.000 | 2,71815
100.000 | 2,71827
1.000.000 | 2,71828
10.000.000 | 2,71828
Quando o período de tempo n se aproxima de infinito o valor resultante dessa expressão se aproxima de um valor que está entre 2 e 3.
$(1+\frac{1}{n})^n$
$n \to \infty$
$2<(1+\frac{1}{n})^n<3$
Embora Jacob não tenha criado necessáriamente o número e, sua discoberta forneceu um dos primeiros vislumbres da relação que origina este número.
Jacob Bernoulli
(1654-1705)
Agora vamos andando mais um pouco, para conhecer o principal matemático a contribuir para a concepção do número e
É aquele alí.
No início do passeio por essa área, eu te disse que o número "e" é chamado também de Número de Euler, lembra?
$e \cong 2,71$
Leonhard Euler
(1707-1783)
Sim!

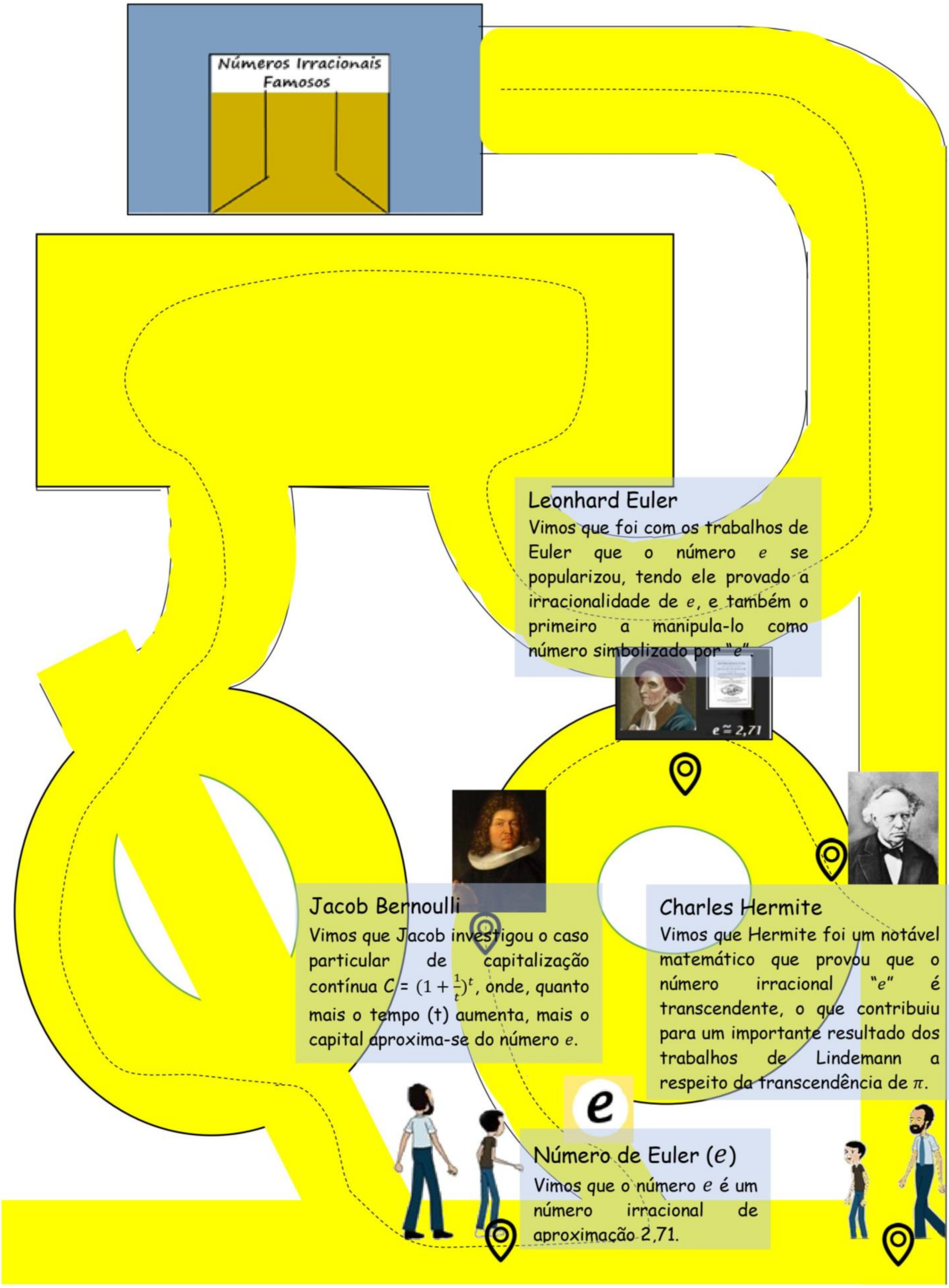

$e \cong 2{,}71$
Leonhard Euler (1707-1783)
Pois é, este matemático se chama Leonhard Euler, que foi aquele em que o número "e" se popularizou, e com isso foi chamado de Número de Euler.
Nossa!
Foi um matemático incrível, que fez inúmeras contribuições para a matemática.
Uma dessas contribuições foi a concepção do "e" como número propriamente dito, além de provar que ele é irracional.
Um número? Como pode o resultado da expressão $(1+\frac{1}{n})^n$ quando n se aproxima de infinio ser um número?
E que número é esse? Euler!
Imagine a seguinte soma $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$
Essa soma foi descoberta por Isaac Newton (1642 - 1727), em 1665, como uma forma de escrever a expressão $(1+\frac{1}{n})^n$ para um derminado n.
$(1+\frac{1}{n})^n$
Ahhh! Lembrei que essa expressão é aquela estudada por Jacob, onde quando n aumenta infinitamente o resultado dessa expressão está no intervalo entre 2 e 3.


Exatamente! Sabendo que essa expressão pode ser escrita naquela soma proposta por Newton eu consigo determinar uma boa aproximação para esse número que se encontra no intervalo entre 2 e 3.
Nossa! Euler estou começando a entender.
Ahhhh! Então por isso que está escrito no teu livro o número 2,71828182845904523536028
Sim, eu escrevi ele somente com 23 casas decimais, mas como ele nunca acaba, então simbolizei pela letra "e".
$e^{i\pi} + 1 = 0$
Mas, Euler fez muito mais que provar a irracionalidade de "e".
Foi ele quem criou uma relação que envolve três números muito famosos, π, e, i e o 1.
Se eu falasse de todas as contribuições de Euler, iria ficar falando o dia inteiro.
$e \cong 2,71$
Agora vamos finalizar nosso passeio conhecendo mais um dos ilustres matemáticos que contribuíram para o entendimento de "e".


É este aqui!
(1822-1901)
Charles Hermite!
(1822-1901)
Charles Hermite, um notável matemático que fez uma contribuição magnífica sobre uma das qualidades de "e"
Olá professor Hermite!
Fiquei sabendo sobre seu trabalho envolvendo um assunto que me interessa muito, que é o número "e".
Ahh sim!!!
Eu provei que o número "e" não é algébrico.
Nossa! que incrível!
Quer dizer que o "e" não pode ser obtido como solução de uma equação polinomial.


Exatamente! E como ele não é algébrico, então posso chama-lo de transcendente.
Charles Hermite (1822-1901)
A descoberta de Hermite foi tão importante que...
...influenciou na comprovação da transcendência de π por Lindemann, que foi um dos matemáticos que vimos na área do museu que fala sobre o π.
Ahhh eu lembro!
Charles Hermite (1822-1901)
Pois é
Charles Hermite (1822-1901)
A história do "e" não se resume as contribuições feitas pelos matemáticos que conhecemos hoje, mas infelizmente temos que encerrar nosso passeio, pois o museu irá fechar por hoje, ok!?
Charles Hermite (1822-1901)
Outro dia, voltamos para conhecer mais sobre a história e curiosidades sobre números irracionais.

Caminho traçado nesse capítulo



APÊNDICE H - Termo de Consentimento para participação na aplicação da Sequência Didática

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar de um experimento didático intitulado O Ensino de Números Irracionais por Atividades para o ensino de Números Irracionais, sob a responsabilidade do pesquisador **Rafael Lameira Barros**.

Nesta pesquisa nós estamos buscando aplicar uma Sequência Didática voltada ao Ensino de Números Irracionais**.** A sua colaboração na pesquisa será responder atividades solicitadas.

Em nenhum momento você será identificado.

Não há riscos. Os benefícios serão a aprendizagem sobre o assunto de Números Irracionais, bem como de outros assuntos que se relacionam com este.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

________________, _____ de ______________ de 2021.

____

Assinatura dos pesquisadores

Eu,____aceito participar da Sequência Didática citada anteriormente, de forma voluntaria, após ter sido devidamente esclarecido.

____

Assinatura do Participante

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
https://ccse.uepa.br/ppgem/