UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

CARLOS EMANOEL ALCIDES DO NASCIMENTO

ANÁLISE COMBINATÓRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE À LUZ DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

RIO BRANCO – AC
2020

CARLOS EMANOEL ALCIDES DO NASCIMENTO

ANÁLISE COMBINATÓRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE À LUZ DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (MPECIM), como exigência para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Acre (UFAC)

Orientador: Prof. Dr. Itamar Miranda da Silva

Coorientador: Prof. Dr. Sandro Ricardo Pinto da Silva

RIO BRANCO – AC
2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

N244a Nascimento, Carlos Emanoel Alcides do, 1986 -
Análise combinatória nos livros didáticos do ensino fundamental: uma análise à luz da transposição didática / Carlos Emanoel Alcides do Nascimento; Orientador: Dr. Itamar Miranda da Silva e Coorientador: Sandro Ricardo Pinto da Silva. -2020.
128 f.: il.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática - MPECIM. Rio Branco, 2020.
Inclui referências bibliográficas e anexos.

1. Transposição didática. 2. Livros didáticos. 3. Análise combinatória. I. Silva, Itamar Miranda da. (Orientador). II. Silva, Sandro Ricardo Pinto da (Coorientador). III.Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Nádia Batista Vieira CRB-11º/882

CARLOS EMANOEL ALCIDES DO NASCIMENTO

ANÁLISE COMBINATÓRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE À LUZ DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Aprovada em: 23 de outubro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Itamar Miranda da Silva – CELA/UFAC – Orientador/Presidente

Prof. Dr. Sandro Ricardo Pinto da Silva – CCET/UFAC – Coorientador

Profª Drª Aline Andréia Nicolli – CELA/UFAC – Membro interno

Prof. Dr. Edcarlos Miranda de Souza – CCET/UFAC – Membro externo

Prof. Dr. Pelegrino Santos Verçosa – CELA/UFAC – Membro suplente

RIO BRANCO – AC
2020

AGRADECIMENTOS

A Deus pela criação do Universo, a ele a minha eterna gratidão pela dádiva da existência e pelo poder da criação delegado a nós.

Aos meus pais, Nilza Oliveira Alcides e José Maria Carlos do Nascimento, pela responsabilidade dispensada à minha educação, principalmente a Educação Escolar.

Aos meus queridos irmãos, Allan Carlos Alcides do Nascimento e Emanuela Alcides do Nascimento, que mesmo distantes, sempre acreditaram e torceram por mim. A eles, sou grato e digo que a recíproca também é verdadeira.

À minha esposa, Crislane de Oliveira Pereira Alcides, pela compreensão de que esta dissertação concretiza uma etapa importante na minha vida. Agradeço pelo apoio.

Ao meu amado e querido filho, Vinícius Pereira do Nascimento, pela ajuda involuntária na escrita, ao perguntar diariamente sobre o andamento do texto.

Aos meus demais familiares, sem exceção, pois, cada um à sua maneira teve a sua contribuição.

Ao meu orientador, prof. Itamar Miranda da Silva, pelo incentivo, ainda na graduação, para eu pensar na possibilidade de ingressar no MPECIM. Agradeço pela orientação e pela boa conversa nos momentos que estivemos disponíveis à concretização desse trabalho. Ressalto aqui a minha admiração e respeito pela sua pessoa, principalmente na trajetória formativa e acadêmica.

Ao meu coorientador, prof. Sandro Ricardo Pinto da Silva, pelas valiosas contribuições e encontros de escrita. Agradeço pela confiança na coorientação e aproveito para ressaltar a minha admiração e respeito pela sua pessoa.

À professora Aline Andreia Nicolli, pelas valiosas contribuições na qualificação. Agradeço, também, pelo aceite do convite para fazer parte da banca avaliadora desse trabalho. Minha gratidão e admiração pelo excelente trabalho que desenvolve.

Ao professor Edcarlos Miranda pelo aceite do convite em fazer parte da banca avaliadora desse trabalho, pelas contribuições na qualificação. Minha gratidão, respeito e admiração.

A todos os meus amigos, especialmente aos que estiveram mais próximos durante esse processo.

Ao meu amigo Robson José Barros de Mendonça, pelo incentivo e apoio incondicional ao prosseguimento no Mestrado. A você, meu amigo, muito obrigado.

Ao meu amigo John Cleyne, pela interação e companheirismo desde a inscrição no processo de ingresso no Programa.

À Cindy, minha amiga durante o curso de Licenciatura em Matemática e no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática.

Às amizades surgidas durante o mestrado, especialmente ao Michael, Mírian, Clelinda e, Jéssica. A vocês, muito obrigado.

Ao Renato Flor Saldanha, amigo de trabalho e que inicia o mesmo percurso que iniciei em 2018.

À professora Maristela Diniz pelo incentivo diário para a escrita.

Aos meus amigos, Aline, Érica e Thiago, pelas valiosas contribuições, pelos incentivos, pelas leituras e apontamentos, pelos momentos de descontração e boa conversa.

RESUMO

Esta pesquisa investigou, a partir dos constructos teóricos da Transposição Didática, como a Análise Combinatória se mostra presente nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Proposta advinda da seguinte questão de investigação: A Análise Combinatória, já revestida de suas técnicas de contagem, é um objeto novo a ser estudado no Ensino Médio? A partir dessa questão de investigação, tomamos como hipótese que a Análise Combinatória, vista no Ensino Médio, tem um passado já vivenciado pelos alunos. Para responder essa questão de investigação e, portanto, da validação da hipótese, é que buscamos nos livros didáticos do Ensino Fundamental, as noções e conceitos imprescindíveis para a organização do conhecimento abstrato em relação ao pensamento combinatório. Durante a realização desta pesquisa utilizamos duas coleções de livros didáticos de matemática, aprovados, respectivamente pelo PNLD 2019 e PNLD 2020, sendo: a primeira coleção com 5 (cinco) livros dos anos iniciais e a segunda coleção com 4 (quatro) livros dos anos finais do Ensino Fundamental, totalizando 9 (nove) livros didáticos analisados. Utilizamos uma abordagem qualitativa. Adotamos neste trabalho, dada a convergência com os nossos objetivos, uma pesquisa do tipo descritiva e, para a coleta de dados, recorremos à revisão bibliográfica. Com a finalidade de organizar e sistematizar a programabilidade implícita dos dados coletados, utilizamos uma categoria de análise, intitulada Conjuntos e, dela formulamos 23 (vinte e três) subcategorias, as quais nos guiaram por todo o processo de análise dos livros didáticos utilizados. A partir desta investigação podemos inferir que a Análise Combinatória se mostra presente ao longo de todo o Ensino Fundamental, embora revestidas de enunciados distintos da sua formalização no currículo do Ensino Médio, o que caracteriza esse Objeto como transacional. Ao final, apresentaremos um dispositivo didático, em forma de infográfico, chamado de Modelo Transacional Articulador - MTA, onde constam a sistematização dos dados coletados nos livros didáticos do Ensino Fundamental, por série e habilidades da BNCC.

Palavras-chave: Transposição Didática. Livros Didáticos. Análise Combinatória. Ensino Fundamental. BNCC.

ABSTRACT

This research investigated, based on the theoretical constructs of Didactic Transposition, how Combinatorial Analysis is present in the textbooks of Elementary Education. Proposal arising from the following research question: Is Combinatory Analysis, already covered with its counting techniques, a new object to be studied in high school? Based on this research question, we assume the hypothesis that Combinatorial Analysis, seen in high school, has a past already experienced by students. In order to answer this question of investigation and, therefore, of the validation of the hypothesis, it is that we search in the textbooks of Elementary Education, the notions and concepts essential for the organization of abstract knowledge in relation to combinatorial thinking. During the realization of this research we used two collections of mathematics textbooks, approved, respectively by PNLD 2019 and PNLD 2020, being: the first collection with 5 (five) books of the initial years and the second collection with 4 (four) books of the years end of Elementary School, totaling 9 (nine) textbooks analyzed. We used a qualitative approach. In this work, given the convergence with our objectives, we adopted a descriptive research and, for data collection, we resorted to bibliographic review. In order to organize and systematize the implicit programmability of the collected data, we used an analysis category, called Sets, and from it we formulated 23 (twenty-three) subcategories, which guided us throughout the analysis process of the textbooks used. From this investigation, we can infer that Combinatorial Analysis is present throughout the entire Elementary School, although covered by statements other than its formalization in the High School curriculum, which characterizes this Object as transactional. At the end, we will present a didactic device, in the form of an infographic, called the Transactional Articulating Model - TAM, which contains the systematization of the data collected in the textbooks of Elementary School, by grade and skills of BNCC.

Keywords: Didactic Transposition. Didatic books. Combinatory Analysis. Elementary School. BNCC.

LISTA DE SIGLAS

BN – Biblioteca Nacional

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CF – Constituição Federal

CNE – Conselho Nacional de Educação

COARE – Coordenação de Organização e Atendimento da Rede Escolar

CONAE – Conferência Nacional de Educação

CP – Conselho Pleno

EF – Ensino Fundamental

EJA - Educação de Jovens e Adultos

EM – Ensino Médio

FAE – Fundação de Assistência ao Estudante

FENAME - Fundação Nacional do Material Escolar

FNDE – Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação

FNE – Fórum Nacional de Educação

INL – Instituto Nacional do Livro

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação

MEC – Ministério da Educação e Cultura

MPECIM – Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática

MTA - Modelo Transacional Articulador

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PFC – Princípio Fundamental da Contagem

PNE - Plano Nacional de Educação

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

SIMEC – Sistema Integrado de Monitoramento Execução e Controle do Ministério da Educação

TSD – Teoria das Situações Didáticas

TTD – Teoria da Transposição Didática

TTDe – Teoria da Transposição Didática externa

TTDi – Teoria da Transposição Didática interna

UFAC – Universidade Federal do Acre

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática enquanto ciência remonta a milênios, tendo sido desenvolvida ao longo da história da humanidade, constituindo-se objeto de conhecimento em diversas civilizações e culturas, assim, não há como precisar o período de seu surgimento. Diante dessa impossibilidade de afirmar com exatidão, o que se pode afirmar, conforme Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 6), é que "toda civilização que desenvolveu a escrita também mostra evidências de algum nível de conhecimento matemático".

Segundo Goody (1986, p.48, tradução nossa), na antiga Mesopotâmia, tida como berço da humanidade, "a escrita era dependente da economia e a economia dependente da escrita", pois o cultivo de cereais, grãos e a criação de animais necessitavam do desenvolvimento de meios de controle do que era produzido ou criado. Tal controle também era necessário ser feito pelo governo central, nesse sentido temos em Berlinghoff e Gouvêa (2010) que a matemática começa a surgir enquanto atividade específica, ou seja, para atender à necessidade de saber o tamanho dos campos, a quantidade produzida, a quantidade de animais, além do imposto a ser cobrado, ou de outro modo, podemos inferir que as primeiras ideias referente à matemática surgem para justificar determinadas práticas humanas e consequentemente resolver problemas enfrentado nas mais variadas tarefas.

Da necessidade de justificar esse controle surge então a relevância do ato de contar, originando os números que atualmente recebem o nome de naturais. Para Caraça (1951) essa ideia não tem início da abstração para a prática, mas da experiência e observação para a formulação de entes abstratos. Esse autor afirma que,

> A ideia de número natural não é um produto puro do pensamento, independente da experiência; os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram-se formando lentamente pela prática diária de contagens. A imagem do homem, criando duma maneira completa a ideia de número, para depois aplicar à pratica da contagem, é cômoda, mas falsa. (CARAÇA, 1951, P. 4).

Nesse período ainda havia a vinculação dos números aos objetos contados, cada coleção recebia um nome que representava a sua quantidade. Com o passar do tempo[1] tornou-se inviável a representação do número por meio de quantidades concretas (como conjuntos de objetos, marcação, agrupamentos, etc.), assim foram criados símbolos para sua representação, desvinculando-os dos objetos. Sem a necessidade de criar nomes para as quantidades, surgiram

---

[1]Não temos a pretensão de narrar a história da matemática ou dos números, entretanto torna-se importante fazer esse recorte sobre os números, especialmente os naturais, dada a sua importância no processo de contagem.

os sistemas numéricos que permitem a contagem de quaisquer quantidades de objetos, mas que aparentemente algumas características de tal objeto não reveladas durante a construção desse conhecimento, ao menos de forma intencional por parte das obras disponíveis a esses alunos.

As demandas internas da matemática permitiram o desenvolvimento de outros números, de outros entes, bem como outras formas de representação, mas para este trabalho vamos fazer o uso apenas dos processos de contar elementos de coleções sem a necessidade de tê-los em mãos, sem fazer a sua manipulação ou sem enumerá-los, já que a proposta aqui reside em mostrar, a partir da Teoria da Transposição Didática, como a Análise Combinatória se mostra presente nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Proposta essa oriunda da seguinte questão de investigação: A Análise Combinatória, já revestida de suas técnicas de contagem, é um objeto novo a ser estudado no Ensino Médio? Tomaremos como hipótese que a Análise Combinatória, vista no Ensino Médio, tem um passado já vivenciado pelos alunos.

Para responder essa questão de investigação e, portanto, da validação da hipótese, é que buscamos nos livros didáticos do Ensino Fundamental, as noções e conceitos imprescindíveis para a organização do conhecimento abstrato em relação ao pensamento combinatório.

Para o processo de contagem, a noção de conjuntos torna-se extremamente importante. Para tanto, recorrendo a Alencar Filho (1980, p. 15), temos que "Cantor (1845-1918) chama de conjunto o grupamento num todo de objetos, bem definidos e discerníveis de nossa percepção ou de nosso entendimento, chamados os elementos do conjunto". Nesse sentido Morgado et. al (1991, p. 1) complementa que a "contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos" faz parte da Análise Combinatória. Em outras palavras, o desenvolvimento da abstração, isto é, a maneira de agir e pensar, é fundamental para ampliar a capacidade, o domínio, as competências e habilidades em relação ao entendimento dos processos de contagem.

A Análise Combinatória, assim como é conhecida na etapa[2] final da Educação Básica, aparece de forma explícita nos livros didáticos da segunda série do ensino médio, às vezes iniciando com as noções de fatoriais[3], às vezes com o estudo dos números binomiais. Vale ressaltar que as noções de Análise Combinatória, estudadas no Ensino Médio, servem de suporte para o aprofundamento do estudo da Probabilidade.

---

[2] Termo utilizado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDBEN

[3] Dado um número natural$n$, aos produtos de n por seus antecessores até 1, chamamos de fatorial de n e representamos por $n!$.

Neste sentido, mostrar a partir da Teoria da Transposição Didática, como a Análise Combinatória se mostra presente nos livros didáticos do Ensino Fundamental foi motivado, em grande parte, além de afeição pessoal, pela concordância com as ideias de Morgado (1991) para quem este Objeto de Saber causa, na maioria das vezes, certo desconforto no processo de ensino e também na aprendizagem, pois, de acordo com esse autor, problemas com enunciados pequenos, às vezes, podem tornar-se difíceis de resolver. Além disso, temos em Ferreira (2013, p. 15) que "o processo de ensino e aprendizagem desse assunto, quando direcionado ao Ensino Médio apresenta muitos obstáculos", pois, no que diz respeito às relações estabelecidas entre os professores e/ou os alunos e o Objeto de Ensino, ainda concordando com Ferreira (2013, p. 15) a "Análise Combinatória oferece grandes dificuldades para alunos e professores em relação à formulação e interpretação de seus enunciados". Então, os argumentos acima, parecem justificar o empreendimento para tal pesquisa.

Uma das consequências da fragilidade dessas relações pode fazer os alunos recorrerem à memorização das técnicas gerais utilizadas em análise combinatória, bem como ao uso de suas fórmulas, desprovidas da compreensão relevante exigida pelo problema. Isso acaba resultando, conforme Morgado (1991), na inibição do uso da engenhosidade e criatividade esperada para chegar à compreensão de tal problema e, consequentemente prejudicando a sua solução, retirando a razão de ser desta parte da matemática, além de inibir o desenvolvimento de outros potencias conhecimentos importantes para aprendizagens não somente da matemática.

Em Vazquez (2004), ao fazer menção à Análise Combinatória, o autor acrescenta que este Objeto de Ensino,

> Parece não ser bem visto tanto por docentes como discentes de um modo geral, parece sim, uma quantidade enorme de fórmulas com muitas definições que os alunos utilizam mecanicamente, muitas vezes até, não resolvendo simples problemas de contagem. Faltam exemplos concretos, conhecimento e aplicações em sala de aula. A introdução desses conceitos, mesmo que de forma básica, utilizando o ***princípio fundamental da contagem*** pode ser o início da desmistificação de um conteúdo interessante e que pode ser entendido através de raciocínios primeiramente simples para depois começar a se explorar problemas mais complexos. (VASQUEZ, P. 6, grifo nosso)

Em concordância com as ideias de Vasquez (2004), quando sugere a existência do uso mecânico de fórmulas, bem como a falta de exemplos concretos, ou até mesmo a falta de conhecimento de alguns docentes, Lima et. al (2016, p. 92), dissertando sobre a o Ensino de Combinatória, aconselha a "não fazer fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias gerais e torna as coisas mais complicadas". Reforçando, Costa (2013) ainda acrescenta que,

> a maioria dos problemas de Análise Combinatória exige dos alunos muita flexibilidade de pensamento em suas resoluções e ***o ideal seria que o aluno tivesse contato com esse conteúdo desde os primeiros anos da escola básica, para que seu desenvolvimento cognitivo acontecesse de forma gradativa.***(COSTA, 2013, P. 21, grifo nosso).

Além disso, Sturm (1999, p. 3) diz que “as fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução dos problemas, devem ser construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação”. Todos esses autores parecem corroborar com a nossa hipótese de que a Análise Combinatória, vista no Ensino Médio, tem um passado já vivenciado pelos alunos.

Para subsidiar a nossa busca de repostas à nossa questão de pesquisa, a qual indaga se a Análise Combinatória, já revestida de suas técnicas de contagem, é um objeto novo a ser estudado no Ensino Médio Tomaremos como suporte a Teoria da Transposição Didática do matemático francês Yves Chevallard (1999). Teoria que busca descrever as transformações que os Objetos de Saber sofrem até se tornarem aptos a ocupar um lugar entre os Objetos de Ensino.

Face ao exposto, ressaltamos ainda, a importância de estudar Análise Combinatória, pois este Objeto de Saber Matemático se mostra, desde o século XVIII, importante para outras áreas do conhecimento. Pois,

> a partir de meados do século XVIII, a Análise Combinatória passou a ser utilizada em vários ramos da Matemática como Estatística, Álgebra, Probabilidade, Lógica e etc., e em outras áreas do conhecimento humano como Biologia Molecular, Programação de Computadores, Economia, Teoria da Programação para o Bom Funcionamento da Empresa e etc. (ROSA, 1998, p. 4).

Ante ao exposto na nossa justificativa para pesquisa destacamos que são objetivos específicos deste trabalho: (a) identificar noções, conceitos e elementos de Análise Combinatória nos livros didáticos do Ensino Fundamental; (b) descrever conceitos e atividades, constantes nos livros didáticos do Ensino Fundamental, úteis à formação do raciocínio combinatório enquanto objeto transacional, ou seja, à luz da Transposição Didática.

Diante o exposto, o trabalho de pesquisa será organizado da seguinte maneira:

No capítulo 1, intitulado: Análise Combinatória, livro didático e a transposição didática: um percurso teórico. O capítulo encontra-se dividido em 6 seções, a saber: na seção 1, temos a Análise Combinatória: breve histórico deste Objeto de Saber, na qual pode-se encontrar um recorte histórico, tendo em vista os personagens, bem como seus trabalhos, úteis ao atendimento de nossos objetivos nesse trabalho.

Dedicamos a seção 2 para expor um pouco da Análise Combinatória vista de uma perspectiva do lugar onde este objeto de saber é produzido, logo, aqui poderão ser encontradas as demonstrações dos princípios aditivo e multiplicativo, ou seja, os elementos tecnológicos e teóricos que dão sustentação ao objeto matemático escolhido em uma perspectiva científica.

Dedicamos a seção 3 para a apresentação das principais técnicas de contagem, a partir de um enfoque escolar, isto é, a razão de ser da pesquisa.

Na seção 4, temos um traçado histórico do livro, a sua distinção com o livro didático, os conceitos de livros didáticos dado pela legislação brasileira, por fim, nesta seção, encerramos com alguns aspectos do Plano Nacional do Livro e Material Didático – PNLD. Para nos guiar no processo de análise dos livros didáticos, utilizamos as lentes da Teoria da Transposição Didática, uma vez que esta fornece elementos necessários à compreensão das transformações existentes dos/nos Objetos de Ensino.

Finalmente, com vistas à articulação do capítulo analítico com o nosso produto educacional, trouxemos na seção 6, aspectos gerais do histórico e organização da Base Nacional Comum Curricular – BNCC, ambos úteis à compreensão da organização do nosso Produto Educacional em relação as noções, conceitos e ideias relacionadas aos processos de contagem.

O capítulo 2, intitulado: Percurso metodológico será destinado à descrição do percurso metodológico seguido pela pesquisa. Esse capítulo foi organizado em quatro seções: na primeira, a qual traz aspectos da natureza da investigação e o tipo de pesquisa, ambas subsidiadas pelas ideias da Teoria da Transposição Didática. Na seção seguinte, intitulada: seleção do corpus, temos a quantidade de livros, bem como a descrição do processo de escolha desses e não dos demais livros didáticos adotados pelas escolas de Educação Básica. Nas seções seguintes, temos a descrição dos livros didáticos, apresentados pelas suas capas, seus sumários, aprovados pelos PNLD 2019 e PNLD 2020, e por fim, apresentamos na seção 4, as formas de análise utilizadas para a condução do processo de construção dos dados e informações sobre o objeto matemático por nós escolhido.

O capítulo 3, com vistas a atingir/alcançar nossos objetivos: geral e específicos realizamos a partir dos livros didáticos escolhidos a construção dos dados de nossa pesquisa, obedecendo para fins didáticos, à organização impostas pelo Currículo, quanto à sua organização de confecção pela editora, ou seja, à ordem cronológica estabelecida pelos sistemas educacionais. Os dados foram construídos, inicialmente, a partir de uma leitura criteriosa das obras selecionadas, realizando, concomitantemente, a apresentação das atividades, indicação a quais unidades temáticas da BNCC pertencem, bem como as suas respectivas habilidades, fazendo indicações de possíveis ligações com as técnicas de contagem vistas no Ensino Médio.

No capítulo 4, sob o título: considerações, temos a descrição e comentários gerais sobre os resultados e percepções obtidas através das análises realizadas nos nove livros didáticos do Ensino Fundamental.

A este trabalho encontra-se um apêndice que contém a sistematização dos dados coletados durante a etapa de análise, trata-se do nosso produto educacional. Documento composto pelas unidades temáticas e habilidades da BNCC que podemos encontrar elementos de Análise Combinatória.

Passaremos, então, a discorrer sobre do processo de surgimento da Análise Combinatória (e sua transposição), pois a sua compreensão enquanto um Objeto de Saber poderá proporcionar novas formas de enxergá-la durante a elaboração dos planejamentos que envolvem o ensino e a aprendizagem. Além do mais, conhecer o processo histórico de um Objeto de Saber ajuda compreender a sua importância enquanto Objeto de Ensino (e como é deslocado para os livros didáticos), ou seja, porque esse Objeto faz parte dos Saberes a serem ensinados.

CAPÍTULO 1

TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA, ANÁLISE COMBINATÓRIA, LIVRO DIDÁTICO, E A BNCC: UM PERCURSO TEÓRICO.

Neste capítulo, serão apresentados aspectos gerais da Teoria da Transposição Didática, também trouxemos um breve histórico da Análise combinatória enquanto objeto de saber, além da apresentação dos seus princípios basilares, o princípio aditivo e o princípio multiplicativo, de uma perspectiva científica que serão abordados com mais detalhe no decorrer da discussão. Ainda serão apresentadas, de forma breve, as técnicas gerais de contagem, com enfoque escolar. Também será apresentado um recorte da história dos livros, a sua distinção com o livro didático, a trajetória dos livros utilizados em sala de aula e o Programa Nacional do Livro de Material Didático – PNLD. Por fim, apresentaremos um breve histórico da formulação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC.

1.1. Transposição didática

Nesta seção iniciaremos com aspectos gerais do desenvolvimento da Didática da Matemática, tendo como ponto de partida o pensamento da construção de uma área que pudesse investigar os processos relacionados ao ensino de noções e conceitos matemáticos. Ainda, contrapondo às ideias de que os problemas relacionados à transmissão pareciam situar-se nos professores ou nos aprendizes, temos aqui aspectos gerais da Teoria das Situações Didáticas e, por fim, adentraremos a Teoria da Transposição Didática, tida como um dos vários e importantes constructos teóricos desenvolvidos a partir da Teoria das Situações Didáticas - TSD.

Neste sentido Almouloud (2018) descreve que a Didática da Matemática, que tem a origem do seu desenvolvimento nos anos de 1970, na França, se deu,

> no contexto marcado pela reforma da Matemática Moderna, pela criação dos IREM (Instituto de Pesquisa sobre Ensino da Matemática), e pelo sucesso das teorias psicológicas de Piaget sobre o desenvolvimento da inteligência e a aquisição de conceitos fundamentais, insistiu, em primeiro lugar, sobre os problemas de ensino de conceitos matemáticos em razão das exigências próprias ao saber matemático (ALMOULOUD, 2018, p. 148).

O Movimento da Matemática Moderna se deu na década de sessenta do século XX e teve como objetivo principal, discutir aspectos voltados ao ensino de matemática. Para Ávila (1993, p. 1) “As características principais dessa reforma foram uma ênfase acentuada na utilização da linguagem de conjuntos e numa apresentação excessivamente formal das diferentes partes da Matemática”. Imaginar a linguagem matemática, nos dias atuais, desprovida de sua simbologia, não é tarefa fácil, pois bem sabemos que o ensino de matemática possui, até certos estágios do desenvolvimento cognitivo, dependência dessas notações e formalismo. Ávila (1993, p. 1) acrescenta, ainda, que o ensino de matemática, antes da Reforma da Matemática, "Não levava em conta aspectos importantes da psicologia do aprendizado que, felizmente, vêm recebendo, hoje em dia, mais atenção".

Outro evento importante para o desenvolvimento da Didática da Matemática se deve a Gerard Vergnaud, um dos fundadores da Escola Francesa de Didática da Matemática. De acordo com Fiorenze et. al. (2008), Vergnaud,

> foi fundador do Instituto de Pesquisas sobre o Ensino de Matemática (IREM) nas Universidades da França, década de 60, momento da efervescência do Movimento da Matemática Moderna, criando as condições institucionais que favoreceram a constituição da didática entendida como disciplina científica (VERGNAUD, 2008, p. 3)

Vergnaud (1998, p. 24) defende que "não se pode estudar Matemática sem compreender o processo cognitivo da criança, do adolescente e também do professor". Com base nisso, retomamos à Piaget, mestre de Vergnaud, fundador da epistemologia genética, teoria a qual busca compreender como o conhecimento surge e se desenvolve. Ressalte-se que Piaget entende que o conhecimento é uma construção gradativa que se dá a partir da interação do sujeito com o objeto o qual se quer conhecer, pois,

> o conhecimento resultaria de interações que se produzem a meio caminho entre os dois (sujeito e objeto) dependendo, portanto, dos dois ao mesmo tempo, mas em decorrência de uma indiferenciação completa, e não de intercâmbio entre formas distintas (PIAGET, 1983, p. 6).

Nesse sentido, a passagem do conhecimento matemático, de um nível mais elementar para um nível mais complexo, acontece de forma gradativa, por meio de construções e reconstruções, do que Piaget chama de esquemas, organizando-se de forma integrada aos estágios[4] do desenvolvimento propostos por Piaget.

Com base nesse apanhado feito a partir de pontos marcantes do desenvolvimento da Didática da Matemática, Almouloud (2018, p. 148) diz que, inicialmente, esta se deu da insistência, "em primeiro lugar, sobre os problemas de ensino de conceitos matemáticos em razão das exigências próprias ao saber matemático". Nesse processo, procurou-se recorrer à análise, epistemológica e histórica, do saber, observando a maneira de agir dos professores, tanto sobre que conteúdo introduzir e como fazê-la para a promoção da formação do conceito. Entretanto Almouloud (2018, p. 148), diz que houve, durante essa análise, a percepção de que

[4]sensório-motor, pré-operatório, operatório concreto e operatório.

"não se deve limitar ao estudo da classe, é preciso levar em consideração a organização do sistema educacional (programas, currículos, material pedagógico, livros didáticos, horários...)".

Até então, tínhamos a preocupação com dois aspectos ligados aos estudos didáticos: primeiro, com objeto de saber matemático, do ponto de vista das regras da atividade científica, do paradigma adotado para a validação dessa atividade. Segundo, com as teorias relacionadas ao processo de aprendizagem. Nesse contexto, surge a Didática da Matemática, definida por Almouloud (2018), como:

> a ciência da educação cujo propósito **é o estudo de fenômenos de ensino e de aprendizagem**, mais especificamente, é o estudo de situações que visam à aquisição de conhecimentos/saberes matemáticos pelos alunos ou adultos em formação, tanto do ponto de vista das características dessas situações, quanto do tipo de aprendizagem que elas possibilitam (ALMOULOUD, 2018, p. 148, grifo nosso)

Contrapondo a Didática Geral, a Didática da Matemática não se preocupa somente com os fenômenos de ensino da matemática. Além disso, sugere que os fenômenos de ensino e de aprendizagem são independentes, ou seja, a promoção do ensino, não necessariamente, implica em aprendizagem, ou ainda, a aprendizagem pode ocorrer de forma independente da técnica de ensino utilizada. Ora, se essa última ocorre, então temos um terceiro elemento a ser considerado nessas relações, que podem ser compreendidos como os meios didáticos que interligam essas relações.

A partir da compreensão da possível interligação desses três elementos, percebe-se que o processo de aprendizagem não pode ser feito somente pelo enfoque do sujeito. Há que ser considerado o grupo no qual o sujeito está inserido, assim como, as interações ocorridas entre os elementos desse grupo.

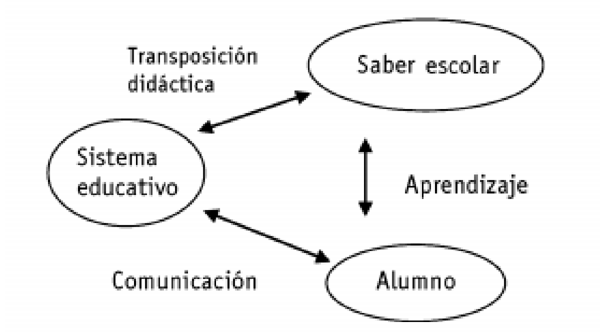
Perante o exposto, Brousseau (1986) formulou a Teoria das Situações Didáticas – TSD. Teoria que, de acordo com Teixeira e Passos (2014, p. 157), centra-se na atividade de "compreender as relações que acontecem entre os alunos, o professor e o saber em sala de aula e, ao mesmo tempo, propôs situações que foram experimentadas e analisadas "cientificamente".". Ainda em Almouloud (2018, p. 149) temos que "a noção prévia para bem compreender a Teoria das Situações Didáticas é a de "situação" ou exatamente de "conjunto de situações" que o professor deve organizar para permitir uma aprendizagem".

As situações ou conjuntos de situações, aqui, podem ser compreendidos como ações que tenham o objetivo de provocar mudanças no comportamento dos alunos, com vistas à aquisição de determinados conhecimentos. Brousseau (1986) definiu uma situação didática como:

> Um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos. (BROUSSEAU, 1986, p. 8).

Nas origens da Teoria das Situações Didáticas, Brousseau (2007, p. 13, tradução nossa) acrescenta que "com frequência, o ensino é concebido a partir das relações entre o sistema educativo e o aluno, vinculados à transmissão de determinado saber". Para melhor visualização das relações às quais esse autor se refere, vejamos o esquema da relação didática.

Figura 01 – relação didática



Fonte: Brousseau (2007, p. 13)

Para discorrer sobre as relações entre os Saber Escolar e o Sistema Educacional, ou seja, quais as transformações que um determinado Objeto de Saber Matemático sofre para fazer parte do sistema educacional e, ainda, outras transformações que esse mesmo Objeto de Saber Matemático sofre para fazer parte do Saber Escolar. Tomaremos as ideias da Teoria da Transposição Didática. Esse constructo teórico, no âmbito da matemática, é atribuído ao matemático francês Chevallard e decorre das ideias da Teoria das Situações Didáticas.

As ideias relacionadas à transposição didática foram introduzidas pelo sociólogo francês Michel Verret em 1975, à época, conforme descrito por Perrenoud (1998) Verret procurou, como sociólogo, designar como os fenômenos perpassam o ambiente escolar e as disciplinas de ensino, pois seu interesse estava em compreender como toda ação humana, que visa à transmissão de conhecimento, é necessária para prepará-los para se tornar ensinável e possível de ser aprendido.

Mais tarde, em 1980, o matemático francês Yves Chevallard retomou as ideias relacionadas à transposição didática, agora as inserindo no contexto da matemática, formulando uma teoria importante no campo da Didática da Matemática. A tese fundamental é de que todo objeto de ensino, assumido por uma instituição, no nosso caso a escola, tem uma existência que pode ser vista do ponto de vista de um ser vivo, isto é, tem um passado, presente e futuro e esse é o âmago da transposição didática.

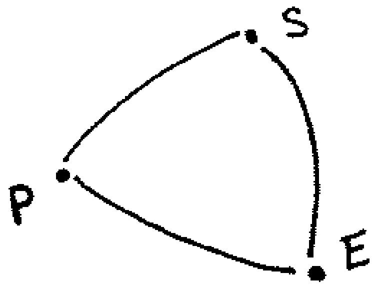
A definição de transposição didática, formulada por Chevallard (2009), aparece em seu livro *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado,* traduzido para o espanhol em 1991 do original em francês *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné,* cuja primeira edição data o ano de 1985 e reúne duas produções distintas, uma produzida a partir de notas de aulas para um curso de Didática da Matemática e a outra refere-se a ampliação das ideias redigidas, em 1982, em um texto chamado *Por que a transposição didática?*.

Iniciaremos recorrendo à proposição de que, conforme Chevallard (2009, p. 12, grifo do autor, tradução nossa), "toda ciência deve assumir, como condição inicial, ser ciência de um ***objeto***, de um objeto real, cuja existência é independente do olhar que o transformará em um objeto de conhecimento". Ora, um dado objeto existe e por si só existe, cabendo aqueles que possuem a pretensão de estabelecer uma relação com ele, à missão de revesti-lo de significados, conforme o paradigma adotado, que o conduza a assumir o *status* de objeto de conhecimento. De outra forma, nessa discussão, para que um objeto possa existir é imprescindível que haja interação a partir do sujeito fortalecendo essas possíveis relações.

Neste sentido, sob a égide do sistema educacional, como um objeto de conhecimento se torna objeto de ensino, pode ser explicado a partir da satisfação de certos requisitos didáticos específicos, bem como em conformidade com a afirmativa de Chevallard (2009, p. 16), quando diz que: "para que o ensino de determinado elemento de saber seja possível, esse elemento deverá sofrer certas transformações, que o tornará apto a ser ensinado". Em decorrência disso, Chevallard (2009) recorre à afirmativa de que não se pode entender o funcionamento de um sistema didático sem compreender o seu exterior, ou seja, assume que um sistema didático é aberto e para compreendê-lo torna-se necessário levar em consideração as relações sociais, econômicas e educacionais existentes no meio o qual o sistema encontra-se inserido.

A observância do entorno de um sistema didático permite que seja considerada a compatibilidade entre o processo de transposição do objeto de referência e as suas possibilidades de ensino, razão da existência do sistema. Mas o que seria, conforme Chevallard (2009), esse sistema didático o qual estamos falando? De acordo com esse autor, as relações estabelecidas entre P: o que ensina; E: os alunos e, S: o saber ensinado, inter-relacionados entre si, que pode ser visto na figura 02, denomina-se sistema didático.

Figura 02 – sistema didático



Fonte: Chevallard (2009), p. 26

Cabe-nos, também, trazer comentários acerca do entorno desse sistema, noção necessária à compreensão de nossa proposta de trabalho, uma vez que os saberes a serem ensinados, constantes nos livros didáticos, são normatizados e legitimados a partir das forças e pressões exercidas sobre o sistema educativo, ver figura 2, e que, posteriormente, são repassadas ao sistema didático.

Chevallard (2009, p. 27) menciona que o entorno por ele descrito, caracteriza-se a partir de uma estrutura complexa, no entanto, diz que, de uma forma simples, temos "[...] os pais e os acadêmicos (os matemáticos) e, é claro, a instância política, decisória e executiva (o ministério etc.), ou seja, o corpo diretivo do sistema educacional". No Brasil, sabemos que a condução das políticas educacionais é de competência do Ministério da Educação – MEC, este por sua vez, chefiado por um ministro nomeado pelo Presidente da República, o que é de se esperar que essas políticas nem sempre sejam para atender aos anseios da sociedade, senão para atender ao proposto do Plano de Governo.

A partir da ideia de entorno, retornamos à sugestão da necessidade de que um determinado Objeto de Saber necessita de transformações adequadas para fazer parte dos Saberes a ensinar. A partir da identificação dessa necessidade, essa transformação é realizada por uma estrutura que Chevallard (2009) chamou de *noosfera*, que pode ser compreendida da seguinte maneira, conforme as palavras do autor,

> Para esta instância sugeri o nome paródico de noosfera. É na noosfera, que os representantes do sistema de ensino, com ou sem mandato (desde o presidente de uma associação de professores até o simples professor militante), se encontram, direta ou indiretamente (através de uma pesquisa, restringindo a demanda, no projeto transacional, debates ensurdecedores de projetos transacionais de uma comissão ministerial), com os representantes da sociedade (os pais de alunos, os especialistas que militam em torno do ensino, os emissários de um órgão político) (CHEVALLARD, 2009, p.28. Tradução Nossa).

É nessa esfera, denominada noosfera que, segundo Chevallard (2009, p. 28) é "onde se pensa" a Transposição Didática e, esta é marcada, de acordo com Malzer (2015, p. 463) "pelas lutas, disputas e negociações de grupos políticos, sociais e didáticos pela seleção e transposição dos saberes a ensinar".

A Transposição Didática ocorrida na noosfera refere-se à Transposição Didática Externa - TTDe, ou *stricto sensu*, ou seja, aquela que ocorre na passagem, após as transformações e exigências do entorno, do Saber Sábio para o Saber a ser ensinado que irá fazer parte do sistema educativo. Pois, em conformidade com Malzer (2015), temos o reforço de que a,

> noosfera opera entre um delicado equilíbrio, no ato de transpor os saberes. De um lado, o círculo de pesquisadores e especialistas que buscam maneiras de fazer boas transposições. Do outro lado, se encontra um grupo (autores e editoras) que prega por qualidade, mas acima de tudo quer manter a relação custo/benefício para o saber, objetivando o lucro. Elucidando transposições que atendem minimamente as exigências dos pesquisadores (que fazem as avaliações) e do governo (que contrata profissionais para as avaliações). E no meio de toda essa disputa, está o entorno social que faz a pressão, para que tópicos socialmente importantes apareçam no livro didático, como produto final. (MALZER, 2015, p. 463).

Até aqui falamos de sistema didático, entorno e, chegamos à ideia de noosfera, esta, compreendida como a esfera que, de fato, ocorre a Transposição Didática, portanto, cabe-nos agora, explicitar o que seria esse processo transformativo, bem como a sua definição, pois, de acordo com Chevallard (2009),

> Um conteúdo de saber que tenha sido designado como saber a ensinar, sofre a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto para ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que transforma um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado transposição didática. (CHEVALLARD, 2009, p. 45, tradução nossa[5]).

Chevallard (2009) chama essa primeira etapa da transformação de Transposição Didática Externa, pois é neste momento que o Objeto de Saber irá transformar-se em Objeto de Ensino, passando a integrar o sistema educativo no que se refere ao currículo formal, aos programas e às orientações curriculares.

A outra etapa desse processo adaptativo, diz respeito à Transposição Didática Interna, ou *Lato Sensu*, e esta,

> acontece dentro do que Chevallard (1991) chama de sistema educacional, onde educadores com toda a estrutura pedagógica da escola define quais textos, temas e

[5] Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la *transposición didactica*.

> outros materiais definirão a forma que um saber será comunicado por um educador em sala de aula. Pode-se dizer que esta etapa da Transposição Didática se conjura na passagem do saber a ensinar para saber ensinado. (MELZER, 2015, p. 463)

No Brasil, temos atualmente um documento, em vigor desde 2017, que traz possíveis arranjos de organização dos Objetos de Conhecimentos que, por algum processo adaptativo, denominado Transposição Didática Externa - TTDe, passaram a integrar à Base Nacional Comum Curricular – BNCC, principal documento norteador da elaboração dos currículos e livros didáticos no país.

Vale a pena ressaltar que as ideias que permeiam a transposição didática não são restritas ao campo da Didática da Matemática, atualmente é possível encontrá-las nas didáticas de outras áreas do conhecimento. Sabemos que os conhecimentos produzidos e ratificados por determinadas comunidades científicas, vão se acumulando ao longo dos anos e que sua designação como conhecimentos úteis a certas sociedades, depende das forças e pressões exercidas pelo entorno do sistema educacional.

1.2. Análise Combinatória: breve histórico desse objeto de saber

Nesta seção iniciaremos com um histórico do surgimento da Análise Cominatória enquanto Objeto de Saber, trazendo também alguns aspectos sobre a Análise Combinatória do ponto de vista científico. Para este trabalho, cujo objetivo é mostrar a partir da Teoria da Transposição Didática, como a análise combinatória se mostra presente nos livros didáticos do Ensino Fundamental, traremos alguns recortes históricos que tenham ligação expressa com a matemática estudada na Educação Básica. Ao final serão enunciados dois teoremas importantes para a Análise Combinatória: o princípio aditivo e o princípio multiplicativo.

Narrar a história da Análise Combinatória, caberia em um capítulo de livro sobre história da matemática, pois, como bem sabemos, a matemática se desenvolveu ao longo dos anos em várias civilizações. Em Eves (2011), é possível encontrar uma breve história da matemática, narrada em duas partes, a primeira parte, intitulada: antes do século XVII, e segunda parte: do século XVII em diante.

Da primeira parte, traremos a informação do matemático chinês Yang Hui que, conforme Eves (2011, p. 246) se deve “a mais antiga apresentação preservada do chamado Triângulo aritmético de Pascal”. Ainda da matemática chinesa, Eves (2011, p. 246) acrescenta que “há uma outra manifestação do triângulo num livro posterior escrito por Chu Shï-kié em 1303; é interessante que Chu fala do triângulo como algo já antigo em seu tempo. É possível então que o teorema do binômio já fosse conhecido na China de longa data”. A informação de que os chineses, no século XIV, já tinham conhecimento do que mais tarde viria a ser conhecido como triângulo de Pascal, bem como a possibilidade de conhecer o teorema do binômio, nos permite iniciar o traçado histórico da Análise Combinatória formalizada a partir do século XVI.

Historicamente, é atribuída aos jogos de azar o surgimento da combinatória, dado que a um jogador torna-se extremamente importante saber contar o número de possibilidades ele possui de vencer o seu oponente, dessas premissas poderá tomar as suas decisões com maior segurança. De acordo com Vilenkin (1972).

> A combinatória surgiu no século XVI nas camadas mais privilegiadas da sociedade, que desde então ocupavam um grande lugar nos jogos de azar. Jogando cartas e dados se ganhavam e se perdiam ouro, brilhantes, palácios, terras, cavalos de raça e adornos valiosos.(VILEKIN, 1972, p. 7, tradução nossa[6])

Diante disto é possível perceber que esta parte mais sofisticada da Análise Combinatória e da matemática tenha surgido para atender às demandas dos jogos de azar, o que pode contribuir para a exploração na educação básica de maneira a ultrapassar o seu caráter lúdico e propiciar uma aprendizagem mais significativa das noções matemáticas que fazem parte do raciocínio combinatório.

Conforme Vilenkin (1972), registros históricos mostram que um dos primeiros a estudar a contagem do número de possibilidades em um jogo de dados foi o matemático italiano Niccolo Tartaglia, a partir da confecção de uma tábua que mostrava de quantas maneiras era possível cair um dado e observar a sua face, entretanto não se tinha em conta, na época, que uma mesma soma de pontos obtidos nos dados poderia ser obtida de diversas maneiras, o que nos dias atuais é conhecido como partição de um número natural e pode ser obtido por funções de partição.

O matemático francês Blaise Pascal, cuja história narra ter sido um jovem frágil fisicamente e que por conta disso teve educação domiciliar, Eves (2011, p. 361) relata que "devido à sua fragilidade física, o garoto era mantido em casa, como garantia contra algum esforço excessivo. Seu pai decidiu ainda que a educação do filho deveria de início restringir-se ao estudo de línguas, não incluindo nada, portanto, de matemática". No entanto, o destino reservara um lugar de prestígio na história da matemática.

O proeminente jovem francês teve sua curta vida marcada por idas e vindas à matemática. Eves (2011, p. 362) sugere que "aos 14 anos de idade Pascal já participava de uma reunião semanal de um grupo de matemáticos franceses, germe da futura Academia Francesa, afinal fundada em 1666". Os períodos que se seguiram permitiram que Pascal deixasse a sua

---

[6] La combinatoria surgió em el siglo XVI, en la vida de las capas privilegiadas de la sociedad de entonces, ocupavan un gran lugar lo juegos de azar. Jugando a las cartas y a los dados se ganaban y se perdían oro y brillantes, palacios y estancias, caballos de raza y adornos costosos.

contribuição à Ciência, por exemplo, o Princípio da Hidrodinâmica de Pascal, trabalhos sobres secções cônicas, dentre outros ligados à geometria.

Em 1650, Pascal teve a sua precoce atividade científica marcada por problemas de saúde, de acordo com Eves (2011), nesse período,

> Pascal decidiu abandonar suas pesquisas em matemática e ciência e se dedicar à contemplação religiosa. Três anos mais tarde, porém, Pascal retornou brevemente à matemática. Nessa época, escreveu seu Traité du Triangle Arithmétique, conduziu diversas experiências sobre a pressão dos fluidos e, juntamente com Fermat, lançou os fundamentos da teoria das probabilidades. (EVES, 2011, p. 362).

Falar sobre o triângulo aritmético descrito no tratado é o que nos interessa, neste momento, em suas contribuições à matemática, pois a partir da observação das propriedades do Triângulo de Pascal com n linhas e n colunastemos os coeficientes da expansão do binômio $(a+b)^n$. Pascal construía o seu triângulo, conforme consta na figura 01, formando um triângulo no retângulo numérico, cuja construção se dá com a primeira linha e primeira coluna, com algarismos 1, a partir daí os outros elementos, da segunda linha em diante, são obtidos através da soma de todos os elementos que estão à esquerda e na linha anterior ao elemento que se quer construir. Por exemplo, $10 = 4+3+2+1$ ou $10 = 6+3+1$, terceira linha e quarta linha respectivamente.

Figura 03 - triângulo de Pascal.

1	1	1	1	1	1	. . .
1	2	3	4	5	6	. . .
1	3	6	10	15	21	. . .
1	4	10	20	35	56	. . .
1	5	15	35	70	126	. . .
1	6	21	56	126	252	. . .
.	.	.	.	.	.	. . .

Fonte: Eves (2011)

Embora o triângulo apareça nos trabalhos de Pascal, Morgado et al (1991, p. 2) traz a informação que "o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados à análise combinatória. O caso $n = 2$ já pode ser encontrado nos *Elementos* de Euclides em torno de 300 a. C.". Livro que, segundo Eves (2011), Pascal ganhou de seu pai, ainda quando criança.

Apesar do triângulo de Pascal calcular os coeficientes binomiais da expansão de $(a+b)^n$, Guardeño (2000) traz a informação que Newton teve em 1676, um trabalho enviado 10 anos antes, por meio de uma carta ao secretário da Real Society, H. Oldenburg, cujo conteúdo tratava da descoberta do Teorema do Binômio, como desenvolvimento de $(a+b)^{\frac{m}{n}}$através de séries de potências. Apesar da generalização feita por Newton, os coeficientes são calculados pela fórmula utilizada por Pascal, conforme veremos a seguir.

A determinação dos coeficientes binomiais não é a única aplicação dada pelo triângulo de Pascal. Embora relatos apontem que Pascal foi o primeiro do mundo ocidental a estudar as propriedades desse triângulo, outros já haviam feito descoberta semelhante, contudo, atribui-se esse nome ao objeto matemático, em sua homenagem. De acordo com Eves (2011),

> Ele também o usava, particularmente introdução à história da matemática 365 em suas discussões sobre probabilidade, para determinar o número de combinações de n objetos tomados r de cada vez [..], o que ele corretamente afirmava ser $\frac{n!}{r!(n-r)!}$, onde $n!$ é a notação atual para $n.(n-1).(n-2). \ldots .3.2.1$ (p. 365). (EVES, 2011, p. 365).

Atualmente, sabemos que a fórmula utilizada por pascal é a mesma utilizada para o cálculo de combinações sem repetição, uma das atuais técnicas de contagem. Ainda sobre o fantástico triângulo, recorremos ao *problema dos pontos*, que conforme Eves (2011, p. 365), a questão desse problema, além de reforçar a contagem, "está ligada a origem da ciência da probabilidade".

Mas de que se trata esse problema? A sua descrição pode ser encontrada em Eves (2011, p. 365), de acordo com esse autor, "o problema pede que se determine a divisão das apostas de um jogo de azar interrompido, entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecida a contagem no momento da interrupção e o número de pontos necessários para se ganhar o jogo". A seguir, tomaremos emprestado de Eves (2011), a resolução dada por Fermat e por Pascal.

> Fermat discutiu o caso em que o jogador A precisava de 2 pontos para ganhar e o jogador B de 3. Eis a solução de Fermat para este caso particular. Como é claro que mais quatro partidas decidem o jogo, seja a uma partida ganha por A e seja b uma partida ganha por B; consideremos então os 16 arranjos completos, de ordem 4, das letras a e b:
>
> aaaa aaab abba bbab
>
> baaa bbaa abab babb
>
> abaa baba aabb abbb
>
> aaba baab bbba bbbb
>
> Os casos em que a aparece duas ou mais vezes são favoráveis a A e há 11 deles. Os casos em que b aparece três ou mais vezes são favoráveis a B e há cinco deles. Portanto as apostas devem ser divididas na razão 11:5. Para o caso geral, em que A precisa de m pontos para ganhar e B precisa de n, anotam-se os 2^{m+n-1} arranjos completos, de ordem $m+n-1$, das duas letras a e b. Procura-se o número αde casos em que a

> aparece m ou mais vezes e o númeroβ de casos em que b aparece n ou mais vezes. As apostas devem ser divididas então na razão α: β (EVES, 2011, p. 393).

Agora, vejamos a resolução ao *problema dos pontos,* feita por Pascal, utilizando o triângulo semelhante ao constante na figura 01.

> Pascal resolveu o problema dos pontos utilizando seu "triângulo aritmético" [...]. ***Indicando por C(n, r) o número de combinações simples***, de ordem r, de n objetos [...], pode-se facilmente mostrar que os números ao longo da quinta diagonal do "triângulo aritmético" são, respectivamente,
>
> C(4,4) = 1, C(4,3) = 4, C(4,2) = 6, C(4,1) = 4, C(4,0) = 1.
>
> Retornando ao particular problema dos pontos considerado acima, como C(4, 4) é o número de maneiras de obter quatro letras a, C (4, 3) é o número de maneiras de obter três letras a e assim por diante, segue-se que a solução do problema é dada por
>
> [C(4,4) + C(4,3) + C(4,2)] : [C(4,1) + C(4,0)] = (1 + 4 + 6) : (4 + 1) = 11:5.
>
> No caso geral, em que A precisa de m pontos para ganhar e B precisa de n, escolhesse a $(m + n) - ésima$ diagonal do triângulo de Pascal. Calculam-se então a soma dos primeiros n números da diagonal considerada e a soma de seus últimos m números. Então, devem-se dividir as opostas segundo a razão α: β (EVES, 2011, p. 363, grifo nosso).

De acordo com Eves (2011, p. 394), "foi esse trabalho de Pascal e Fermat que lançou as bases da teoria matemática da probabilidade. Em 1657 Christiaan Huygens (1629-1695) escreveu o primeiro tratado formal sobre o assunto, embasado na correspondência Pascal-Fermat".É comum encontrar nos livros de probabilidade, capítulos iniciais sobre Análise Combinatória, pois historicamente, estão intrinsecamente ligadas.

Vale ressaltar que a história da atual Análise Cominatória não se resume a Pascal (1623-1662), Newton (1643-1727), Fermat (1601-1665), Nicolo Tartaglia (1499-1557), Girolamo Cardano (1501-1576) ou os matemáticos chineses já citados nesse trabalho. Outros trabalhos importantes, sobre combinatória, podem ser encontrados em obras de grandes matemáticos no final do século XVII. De acordo com Costa (2013), neste período foram publicadas obras relevantes no campo de Análise Combinatória, tais como:

> a) "Traité du triangule arithmétique" (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal;
> b) "Dissertatio de arte combinatorial" de Leibniz (1666);
> c) "Ars magna sciendisive combinatória" de Athanasius Kircher (1669). (COSTA, 2013, p.17)

No entanto, para este trabalho trouxemos apenas estes matemáticos e alguns de seus trabalhos, pois, trouxeram contribuições para Análise Combinatória elementar, comumente estudada nas escolas.

Vimos em parágrafos anteriores, recortes sobre aspectos históricos que indicam o surgimento de algumas técnicas que atualmente, integram a Análise Combinatória. Este Objeto de Saber faz parte de uma área da matemática que estuda as estruturas discretas, ou seja, se ocupa dos estudos de objetos e estruturas finitas. Leibniz (1966, p. 4) descreveu Combinatória como "o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos", Nicholson (1818, Apud VASQUEZ, 2004, p. 4) definiu-a como "o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si".

A partir de várias definições, Costa (2013, p. 15) reuniu algumas e definiu a Análise Combinatória como "uma parte da Matemática que visa desenvolver métodos que permitam contar, de uma forma indireta, o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições". Iniciaremos com os métodos de contagem mais elementares, os princípios aditivo e multiplicativo.

1.3. Princípios basilares da Análise Combinatória: uma perspectiva científica

Nesta seção apresentaremos os princípios aditivo e multiplicativo a partir da perspectiva de sua formalização e estudo no nível superior de ensino. Para tanto, recorreremos a alguns trabalhos que trazem a enunciação, bem como as respectivas demonstrações dos mencionados princípios, pois, para Biggs (1979), estes formam a base da Análise Combinatória e, deles decorrem as técnicas gerais de contagem, sobre as quais falaremos na seção seguinte.

Trazer estes princípios sob o enfoque do nível superior e, posteriormente, compará-los com os seus enunciados encontrados nos livros didáticos da Educação Básica, poderá nos ajudar a compreender a necessidade imposta a determinado Objeto de saber, para que então, possa fazer parte do nível, etapa e/ou fase da Educação Escolar.

1.3.1 – Princípio aditivo

O princípio aditivo como, comumente, é visto no Ensino Superior, busca formalizar as ideias de que há validade da proposição, independendo da quantidade de conjuntos, bem como a sua cardinalidade[7]. A seguir, trouxemos um exemplo de como esse princípio pode ser visto sob o enfoque do nível superior de ensino, conforme consta a seguir,

> **Proposição 1- Princípio Aditivo:** Se $A_1, A_2, \dots , A_n$ são conjuntos finitos e disjuntos, então N(A_1 + A_2 + · · · + A_n) = N(A_1) + N(A_2) + · · · + N(A_n).

[7] O número de elementos de um conjunto finito A é denotado por N(A) ou |A| e é chamado de cardinalidade.

> **Demonstração:** Faremos esta demonstração usando indução sobre o número de conjuntos. Usando a propriedade (a) acima temos que, a relação N(A_1 +A_2) = N(A_1) + N(A_2), ou seja, o resultado vale para n = 2.
> Suponha que o resultado vale para n − 1, ou seja, N(A_1 + A_2 + · · · + A_{n-1}) = N(A_1) + N(A_2) + · · · + N(A_{n-1}), e fazendo A = A_1 + · · · A_{n-1} e B = A_n, temos A ∩ B = (A_1 + A_2 + · · · + A_{n-1}) ∩ A_n = (A_1 ∩ A_n) + (A_2 ∩ A_n) + · · · + (A_{n-1} ∩ A_n) = ∅. Logo, A + B = (A_1 + A_2 + · · · + A_{n-1}) + An = A_1 + A_2 + · · · + A_{n-1} + A_n. Como os conjuntos A e B são finitos e disjuntos, e pela hipótese de indução, temos N(A_1 + A_2 + · · · + A_n) = N(A_1 + A_2 + · · · + A_{n-1}) + N(A_n) = N(A_1) + N(A_2) + · · · + N(A_n). Portanto, pelo princípio e indução finita, resulta que a sentença acima vale para todo n ≥ 2 (ASSIS, 2008, p. 18)

Partindo do exposto na proposição 1, constante na dissertação de Assis (2008), bem como em concordância com Chevallard (1991), quando diz que "o saber tal como é ensinado, o saber ensinado, é necessariamente distinto do saber inicialmente designado como o saber que deve ser ensinado, o saber a ensinar" (Chevallard, 1991, p.17)., diante disso, um determinado Objeto de Saber necessita de transformações adaptativas para que possa tornar-se apto a fazer parte dos Saberes a Serem ensinados na Educação Básica.

Recorrendo ao mesmo Objeto de Saber, o princípio aditivo, agora já transformado, encontramos nos livros didáticos da Educação Básica sob a forma da seguinte proposição: se uma decisão A pode ser tomada de x maneiras, uma decisão B pode ser tomada de y maneiras e as decisões são independentes, então o número de maneiras de se tomarem as decisões A ou B é igual a $x + y$ maneiras. Ainda podemos utilizar a notação de conjuntos para escrever a proposição acima, assumindo o seguinte formato: Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

A seguir temos um exemplo, de autoria dos autores, que ilustra essa relação existente entre os dois conjuntos, principalmente no que diz respeito a quantidade finita de elementos e ausência de elementos em comum, ou seja, com a interseção vazia.

Ex. 01 Para a realização de uma atividade artístico cultural em uma sexta-feira à noite, Aline ficou sabendo que no Cine Teatro Recreio, localizado no tradicional bairro 06 de agosto em Rio Branco, Acre, constam três filmes em cartaz, que serão exibidos ao mesmo tempo, em salas distintas. Além disso, no teatro Plácido de Castro, conhecido como Teatrão, também localizado em Rio Branco, Acre, nesse mesmo dia e horário está ocorrendo quatro apresentações de peças teatrais, ocorrendo simultaneamente. Diante disso, com vistas a ajudar Aline a escolher uma atividade, queremos saber: quantas são as opções disponíveis para que Aline desfrute de uma atividade artístico cultural nessa sexta-feira à noite?

Resolução: Nessa atividade temos a existência de dois conjuntos finitos, a saber: o conjunto formado pelos filmes e o conjunto formado pelas peças teatrais. Além disso, sabemos que não há elemento comum aos dois conjuntos, logo, sua intersecção é vazia.

De posse dessas informações o que temos que indagar é: a ocorrência desses eventos é simultânea? Ou seja, estão ocorrendo ao mesmo tempo e em lugares distintos? Se a resposta for sim, então os eventos são mutuamente excludentes, em outras palavras, a escolha de um implica a recusa dos demais. Portanto, podemos recorrer ao princípio aditivo.

Satisfeitas as condições para o uso do referido princípio, o que temos que fazer é somar as possibilidades de escolher um filme com as possibilidades de assistir a uma peça teatral, o que nos leva aos seguintes resultados:

a) Escolher um filme: 3 possibilidades;
b) Escolher uma peça teatral: 4 possibilidades.

Fazendo o uso do princípio aditivo temos como resultado sete possibilidades para Aline escolher uma delas.

Note que a informação de que todos os eventos estavam ocorrendo ao mesmo tempo e que só há a possibilidade de estar em um único lugar, nos leva a perceber que temos sete possibilidades de escolha, ou seja, o total de eventos disponíveis.

1.3.2. Princípio multiplicativo

O princípio multiplicativo, de acordo com Bezerra "é uma das mais poderosas ferramentas de resolução de problemas de contagem" (2013, p. 15). Este princípio, normalmente, é conhecido como Princípio Fundamental de Contagem ou P.F.C. e pode ser enunciado, do ponto de vista do nível superior, por meio da seguinte proposição.

> **Proposição 2 – Princípio Multiplicativo:** Se $A_1, A_2, \dots , A_n$ são conjuntos finitos, então N($A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$) = N($A_1$).N($A_2$) $\cdots$ N(A_n).
> **Demonstração:** Faremos a prova usando o primeiro princípio de indução finita. Seja B = {n ∈ N | N($A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$) = N($A_1$).N($A_2$) $\cdots$ N(A_n); com A_1, A_2, $\cdots$, A_n conjuntos finitos }: Pelo Teorema (1) temos que vale: i) n = 2 ∈ B, pois N($A_1 \times A_2$) = N(A_1).N(A_2); Temos que mostrar: ii) n ∈ B sempre que n − 1 ∈ B: Tomando A = $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}$ e C = An, então A×C = ($A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}$)×An = ($A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n$). E como, N(A × C) = N(A).N(C) e pela hipótese de indução N($A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}$) = N($A_1$).N($A_2$) $\cdots$ N(A_{n-1}). Segue que N($A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$) = N($A_1$).N($A_2$) $\cdots$ N(A_{n-1}).N(A_n). Portanto, de (i) e (ii), resulta que B contém os inteiros positivos n tal que n ≥ 2. (ASSIS, 2008, p. 20)

Da proposição apresentada podemos evidenciar, pelo menos, duas percepções que merecem destaque: a primeira é que a apresentação do P.F.C. revestido da forma da proposição acima citada, certamente não se constitui elemento de saber útil ao processo de ensino de ensino e aprendizagem na Educação Básica, pois, concordando com Chevallard (1991, p. 45, tradução nossa[8]) "um conteúdo de saber que foi designado como saber a ensinar, sofre a partir de então

[8] Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza.

um conjunto de transformações adaptativas que vão torna-lo apto para ocupar um lugar entre os objetos de ensino”. Logo, as transformações as quais Chevallard (1991) se refere, dizem respeito ao que, comumente, se encontra nos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio. A segunda percepção refere-se à distinção da evidenciação do mesmo Objeto de Saber, enquanto na Educação básica há, claramente, a preferência pelo uso do raciocínio indutivo, ou seja, aquele que parte de casos particulares para a generalização, o nível superior opta pelo raciocínio dedutivo, ou seja, há apenas a preocupação com a demonstração da validade da proposição para todos os casos.

Após as devidas transformações adaptativas, sugeridas por Chevallard (1991), o enunciado na proposição 2 – Princípio Multiplicativo assume o seguinte enunciado na Educação Básica: se uma decisão d_1 pode ser tomada de m maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de n maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 sucessivamente é $m.n$. Vale ressaltar que este princípio pode ser generalizado para k decisões sucessivas.

A seguir temos um exemplo, de autoria dos autores, que ilustra essa relação existente entre as possibilidades de se tomar duas decisões sucessivas, permitido assim, a organização de eventos.

Ex. 02: Ao comprar algumas ferramentas de jardinagem na Agro Boi, loja de material de construção localizada em Rio Branco, Acre, Renato, de posse de sua bicicleta, sai com destino à Escola Estadual Padre Antônio Diogo Feijó, localizada nas proximidades da loja. Ao sair da loja, Renato, que conhece muito bem a cidade que reside, percebe que dispõe de três possíveis caminhos para chegar ao seu destino. Ao chegar à Escola, deixa algumas ferramentas e segue para o Educandário Santa Margarida, localizado na Rua Rio Grande do Sul, s/n – Preventório, neste momento, ele se dá conta de que existem quatro possíveis caminhos para chegar ao educandário. Com a finalidade de ajudar Renato a realizar as entregas das ferramentas, de posse das informações apresentadas queremos saber: quantos sãos os possíveis caminhos que podem ser utilizados por Renato?

1.4. Técnicas gerais de contagem: perspectiva escolar

Nesta seção, iremos trazer aspectos das principais técnicas de contagem constantes nos livros didáticos do Ensino Médio. Tomaremos como suporte Dante (2005), especificamente o capítulo que trata de Análise Combinatória.

Encontramos no capítulo 24, intitulado Análise Combinatória, a apresentação do Princípio Fundamental da Contagem – PFC, das Permutações Simples, dos Arranjos Simples, das Combinações Simples, chegando às Permutações com Repetição, por fim, o capítulo se encerra com o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal, todos nessa ordem de apresentação.

Por tratar-se de uma nova forma de escrever a proposição 2 – Princípio Multiplicativo, vista na subseção 1.2.2. temos aqui a definição descrita no livro didático de Dante (2005),

> Se um evento é composto por duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na primeira etapa é **m** e para a cada possibilidade da primeira etapa o número de possibilidades na segunda etapa é **n**, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto **m.n** (DANTE, 2005, p. 284).

Não é difícil perceber que a definição acima é mais fácil de ser compreendida se comparada ao Teorema 3. Relacionadas a esse princípio temos a larga utilização de algumas criações didáticas mais indutivas, dentre elas a árvore de possibilidades e as tabelas de dupla entrada. Veremos, a seguir, a definição de Arranjo Simples ou Arranjo sem Repetição e que esse é apenas a utilização do Princípio Fundamental da Contagem revestidos sob a fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Ex. 03. Em uma convenção partidária do partido Mangará do Juruá, que irá definir os candidatos a Prefeito e Vice-Prefeito da Cidade Cruzeiro do Sul, localizada no Noroeste do Estado do Acre, constavam 10 pessoas interessadas em concorrer aos referidos cargos. Com a finalidade de descobrir de quantas maneiras será possível formar as chapas eleitorais, João da Várzea, presidente do partido resolveu fazer, manualmente, as formações, no entanto, logo desistiu, pois, a lista já estava ficando extensa. Com a finalidade de ajudar João da Várzea, calcule a quantidade de chapas eleitorais que podem ser formadas.

A fórmula acima decorre da seguinte definição: arranjos simples de n elementos tomados p a p $(p \leq n)$ são agrupamentos ordenados diferentes que podem ser formados com p dos n elementos dados. Ocorre que no caso em temos $p = n$, surge outra técnica de contagem, chamada de Permutação Simples ou Permutação sem repetição.

As ideias relacionadas à Permutação Simples são, normalmente, trazidas sob a forma de organizar n elementos em fila. Para organizar essas filas, recorremos ao Princípio Fundamental da Contagem, pois envolve o número de decisões sucessivas e sem repetição que podem ser tomadas. Esses agrupamentos (filas) diferem-se pela ordem, e os indicamos por:

$$P_n = n.(n-1).(n-2). \dots .3.2.1$$

As Permutações simples aparecem, comumente, nos livros didáticos da Educação Básica sob a forma de organização de filas, ou ainda, de quantas maneiras podemos organizar, de forma linear, todos os elementos de um conjunto. No exemplo a seguir, temos o contexto de um estacionamento, no qual o número de possibilidades de preenchimento, cuja quantidade de vagas e veículos são iguais, pode até assustar um leitor mais leigo.

Ex. 03. Em um condomínio, existem 10 vagas livres, de forma linear, destinadas aos visitantes. Certo dia, estava acontecendo a festa de aniversário de Marcelo, um dos moradores. Marcelo convidou 10 pessoas e cada uma resolveu ir em seu próprio veículo. Carlos, o agente da portaria, inculcado com o movimento, decidiu calcular o número de maneiras que esses convidados podem ocupar as vagas do estacionamento. Diante do exposto e com vistas a ajudar Carlos, calcule o número de formas de preencher o estacionamento.

Outra técnica de contagem bastante conhecida é a Combinação Simples ou Combinação sem Repetição. Dante (2005, p. 290) acrescenta que, “nos problemas de contagem, o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos”. Se nós temos que escolher subconjuntos, então a ordem que esses elementos irão ocupar, após as escolhas não terá importância, desmistificando a criação didática de que se a ordem não importa, estamos diante de um problema de combinação. As Combinações Simples são calculadas a partir da seguinte fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!} \text{ ou } C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

Vejamos, a partir de um exemplo, o uso das combinações simples comumente vista no Ensino Básico.

Ex. 04. A prova de natação do TAF - Teste de Aptidão Física da Polícia Federal, consiste em nadar 50 metros em uma piscina de 25 metros. Para maior transparência na avaliação dos candidatos, três avaliadores se posicionam nas proximidades da piscina. Em 2020, no auge da pandemia causada pelo novo corona vírus (Sars-CoV2), foi realizado um TAF na piscina do Colégio Estadual Armando Nogueira - CEAN, em Rio Branco, Acre. No entanto, por conta das restrições impostas pela OMS - Organização Mundial de Saúde, pode haver compartilhamento da piscina, obrigando a organizadora a isolar as 5 (cinco) raias. Dos 300 candidatos classificados no Acre, apenas 5 (cinco) poderão realizar o TAF por dia. Diante disso, de quantas maneiras distintas a banca pode organizar o primeiro dia do TAF?

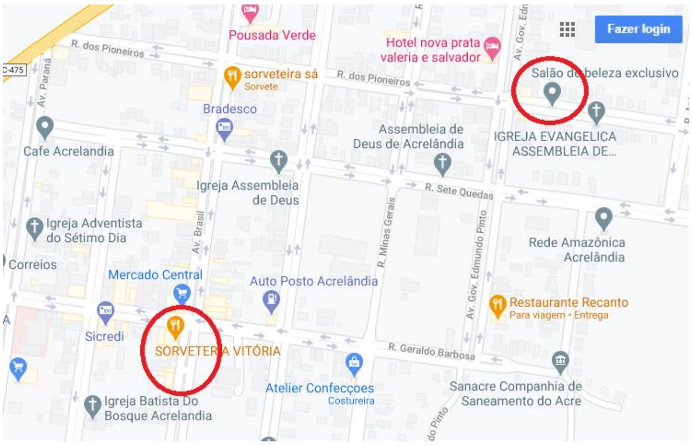
Ambas as fórmulas decorrem da seguinte definição: Combinação Simples de n elementos tomados p a p $(p \leq n)$ são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados. Existem outras notações para a escrita das Combinações Simples, Dante (2005) indica que elas podem ser escritas das seguintes maneiras: $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$. Destaque-se que essa técnica de contagem já podia ser encontrada no *Traité du triangule arithmétique*, escrito por Pascal em 1654 e publicado em 1665, conforme já citado nesse trabalho.

As Permutações com Repetição aparecem a partir da ideia de formar filas com n elementos dados, cuja repetição dos elementos é permitida. Ligada a essa técnica estão os conhecidos e intrigantes anagramas. Normalmente, essas permutações aparecem nos livros didáticos do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo anagramas, embora seja possível a sua utilização em outros tipos de problemas. Uma definição pode ser vista da seguinte forma: A permutação de n elementos dos quais α são de um tipo, β de outro e γ de outro, com $\alpha + \beta + \gamma = n$, é dado por:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$

Ex. 05. No mapa abaixo, Amanda pretende sair da Sorveteria Vitória e chegar ao Salão de beleza Exclusivo. Quantos são os menores caminhos que Amanda poderá escolher?

Figura 04: mapa de caminhos



Fonte: Google maps, recorte do mapa da cidade Acrelândia, Acre.

Por fim, outras técnicas de contagem que aparecem nos capítulos de Análise Combinatória dos livros didáticos do Ensino Médio são: o triângulo de Pascal e o Binômio de Newton. Já falamos desses dois objetos matemáticos, cabendo, aqui, apenas a citação de que ambos fazem parte das técnicas contagem estudada na Educação Básica.

Acerca das técnicas apresentadas, acrescentamos que todas decorrem da utilização e aplicação do Princípio Fundamental de Contagem, o que ratifica a informação dada por Biggs (1979), de que este é um dos princípios basilares da Análise Combinatória. Vale ressaltar que, em geral, os livros iniciam a abordagem desses conteúdos por meio de exemplos, quase sempre intuitivos, cuja finalidade, nos parece ser, permitir o desenvolvimento do raciocínio indutivo.

1.5. A trajetória dos livros didáticos no Brasil

Na língua portuguesa, bem como em outras línguas latinas, a palavra livro, segundo Barbier (2005), tem sua origem no latim *liber* (fr. *livre,* ital. *libro,* esp. *libro*), ainda podemos encontrar em Magalhães (1960) os sinônimos *volumen* e *codex*. O significado destas palavras remete à fina camada fibrosa entre a casca e o tronco da árvore, que depois de ressecada podia ser utilizada para escrever. Sabemos, nos dias atuais, que uma das matérias prima utilizada para a produção física dos livros é a celulose, extraída de algumas espécies de madeira, que a partir de distintos processos químicos e mecânicos permitem a produção do papel.

Quando nos deparamos com a palavra livro, somos remetidos à imagem de um objeto com forma geométrica semelhante a um paralelepípedo, cuja composição se dá por um conjunto de folhas de papel com algo escrito. A esta imagem, geralmente, atribuímos o significado dos livros, mas este objeto nem sempre foi assim, pois, para Barbier (2005),

> O livro propriamente dito é, na Antiguidade clássica, um volumen (ou *rotulus*), ou seja, um rolo. O emprego dessa forma material se revela de extrema importância. [...] O volumen era fabricado a partir de tiras de papiro (o *Cyperus papyrus*), uma planta do vale do Nilo [...] O papiro foi utilizado no Egito após o início do III milênio, em Roma no século III a.C. (BARBIER, 2005, p.23, tradução nossa)

A produção dos livros se dava pelo processo de cópia, o que pode ser encontrado descrito em Barbier (2005). Nessa prática, largamente utilizada na antiguidade clássica, normalmente o autor não costumava escrever pessoalmente, geralmente ditava o conteúdo a um secretário, que o escrevia em uma espécie de borrador de texto, para posteriormente ser passado a limpo para uma (*schedula)* folha e finalmente ser revisada. Os textos eram apresentados em apenas um dos lados, sempre em colunas perpendiculares ao longo do *volumen* e finalmente enrolados começando pelo final.

Diante o exposto, não é difícil perceber a dificuldade para se fazer a leitura do conteúdo do *volumen*, dada a trabalhosa tarefa de desenrolar e enrolar os rolos. Outro problema era a impossibilidade de trabalhar com vários rolos simultaneamente, tomar notas, haja vista que o *volumen* impunha uma leitura contínua e não uma simples consulta.

Como medida para contornar as restrições do *volumen*, temos o surgimento do *codex*, uma nova forma material que se caracterizaria como um dos grandes desenvolvimentos. O *codex* era, conforme descrito por Barbier (2005),

> Um livro dobrado e encadernado, cujo suporte passaria a ser o pergaminho (era mais difícil fazer *códices* em papiro). O termo latino para *códex* retoma há muitos séculos, já que sua primeira aparição conhecida como Marcial, data o ano 85. Tratava-se originalmente de uma tábua pequena de madeira (lat. c*audex*), e mais tarde, por consequência, um conjunto de pequenas tábuas de madeira unidas por uma ligadura, sobre as quais eram anotadas contas ou qualquer outro documento sem valor duradouro. (BARBIER, 2005, p. 38, tradução nossa).

A utilização do *codex* não se deu de forma imediata, já que o *volumen* sobre papiro permanecia como o livro mais utilizado, relegando o pergaminho e o *codex* aos trabalhos mais rápidos, sobretudo às breves anotações ou esboços. Mas pode-se destacar uma das vantagens do pergaminho sobre o papiro, ou seja, ao primeiro há possibilidade de escrever dos dois lados, embora esbarrasse na dificuldade de se enrolar, tal qual o papiro. Informações encontradas em Barbier (2005) indicam que,

> os manuscritos mais antigos que se conservam até hoje remontam a época da generalização do *codex*. Temos o caso do *códex La ciudad de Dios* que poderia ser da época de São Agostinho (354-430). O *códex Vaticanus* remonta à data de meados do século IV, e mostra o texto grego da Bíblia. (BARBIER, 2005, p. 39, tradução nossa).

Além desses manuscritos, Barbier (2005, p. 39) ainda traz a informação de que "já no século V, o *códex* havia substituído definitivamente o *volumen"*. Nosso recorte sobre a história do livro terá limite nas consequências da invenção do *codex,* visto que este foi de extrema importância para o futuro da civilização escrita. Com o advento da invenção do *codex* foi possível, segundo Barbier (2005), o desenvolvimento do trabalho intelectual por meio de documentos escritos. Além do mais, o *codex* dispunha, agora, de um sistema de referências, proporcionando facilidades nas consultas, continuação de leitura, anotações, o que já vimos que não era tarefa fácil no *volumen.*

Uma das barreiras encontrada no processo de produção de livros era a reprodução, o que acabaria sendo contornada a partir da invenção da prensa de tipos móveis, encontramos em Santos (2012), que por volta de 1450, pelo alemão Johanes Gensfl Eisch von Gutenberg, pois, conforme DeFleur (1993, p. 36) "anteriormente ao século XV, as pessoas reproduziam livros na Europa preparando *manu scripti*, cópias de livros existentes, laboriosamente reproduzidas à mão". O processo descrito pode trazer consigo erros de escrita, além de limitar o número de livros disponíveis para leitura. Em conformidade com DeFleur (1993), a partir da invenção Gutenberg é inegável que,

> a impressão trouxe uma modificação fantástica. Centenas ou mesmo milhares de cópias de um determinado livro podiam ser reproduzidas com grande precisão. Foi uma invenção fabulosa que espantou o mundo alfabetizado da época. (DEFLEUR, 1993, p. 37)

O invento de Gutenberg trouxe, visivelmente, um enorme avanço para produção e reprodução de livros, pois as suas limitações fabris agora seriam superadas, permitindo acesso mais amplo a escritos que antes era privilégio de poucos, ou seja, da classe mais favorecida da sociedade ou da igreja. Esse processo também permitiu a difusão da alfabetização, pois no início do século XVI, DeFleur (1993), afirma que,

> Prensas com tipos móveis estavam produzindo milhares de exemplares de livros impressos em papel. Estavam sendo publicados em todas as línguas europeias e, assim, podiam ser lidos por qualquer pessoa alfabetizada em seu idioma. A disponibilidade desses livros incentivou interesse mais disseminado pela aprendizagem da leitura. (DEFLEUR, 1993, p. 38)

Certamente a difusão de meios de acesso à informação não agradou a todos, haja vista a perda da hegemonia dos meios de controle de cunho social, econômico e religioso. Nesta época encontra-se uma mais das maiores rupturas ocorridas na Igreja Católica, o avanço do movimento Protestante na Europa. Trazer um dos episódios da história das religiões nos permite inferir, em primeiro momento, a grande importância da difusão da escrita, da leitura, da alfabetização. Outro ponto importante dessa retomada é fornecer subsídios à compreensão da importância dos livros como instrumento de divulgação de conhecimentos, de ideias, de valores culturais, de crenças.

Após um breve recorte da história do livro, chegamos ao século XIX, período que alguns autores sugerem o surgimento dos livros didáticos. Uma corrente de estudiosos trabalha a partir de um viés mais próximo do controle ideológico exercido pela Igreja, pois, Oliveira et al (1997), nesta época, atribui-se a utilização dos livros didáticos,

> Como um adicional à Bíblia, até então, o único livro aceito pelas comunidades e usado nas escolas. Somente por volta de 1847, os livros didáticos passaram a assumir um papel de grande importância na aprendizagem e na política educacional. Os primeiros livros didáticos, escritos, sobretudo para os alunos das escolas de elite, procuram complementar os ensinamentos não disponíveis nos Livros Sagrados. (OLIVEIRA ET AL, 1997, p. 26).

Por outro lado, outros autores acreditam que os livros didáticos teriam surgido bem antes até do surgimento da imprensa. Para eles a sua origem tem relação com a produção de conhecimentos científicos, embora a sua difusão tenha, de fato, se dado a partir do invento de Gutenberg. Para Gatti Júnior (2004),

> Sua origem está na cultura escolar, mesmo antes da invenção da imprensa no final do século XV. Na época em que os livros eram raros, os próprios estudantes universitários europeus produziam seus cadernos de textos. Com a imprensa, os livros tornaram-se os primeiros produtos feitos em série e, ao longo do tempo a concepção do livro como "fiel depositário das verdades científicas universais" foi se solidificando (GATTI JUNIOR, 2004, p.36).

Seja qual for a corrente de pensamento a ser seguida, temos clareza de que a invenção da imprensa foi a grande responsável pela produção dos livros na escala como conhecemos nos dias atuais. Ao mesmo tempo em que temos, nas primeiras décadas do século XXI, o surgimento de uma nova forma de conceber o formato dos livros, deixando os livros impressos arquivados em grandes capítulos da história da humanidade, iniciando uma nova era de produção, a digitalização do conhecimento, da informação, de tudo o que se pode expressar a partir da interação homem-objeto.

Antes de adentrarmos a trajetória do livro didático no Brasil, iniciaremos com algumas definições importantes para a sua compreensão. Traremos ainda algumas características que distinguem os livros didáticos dos demais livros. O aparecimento do adjetivo didático sugere a sua relação com a Didática, descrita por Piletti (1999, p. 42) como a "disciplina técnica e que tem como objetivo específico à técnica de ensino (direção técnica da aprendizagem)". Podemos perceber que o livro didático existe para atender uma relação existente entre o que ensina e o que aprende.

Uma definição de livro didático pode ser encontrada nas palavras de Teixeira (1963, p. 30) quando o define como um "tratado em que se apresentam as noções, os princípios e as leis de qualquer ciência, expostos sistemática e tecnicamente, como um corpo ordenado de conhecimentos". Definição revestida de uma abordagem bem tradicional, contrariando a sua concepção. Anísio Teixeira foi uma das figuras mais importantes do Movimento Escola Nova, contrário ao ensino tradicional no Brasil, o que sugere a definição dada como a descrição de sua percepção a partir do vivenciado à época.

Em parágrafos anteriores tratamos dos livros quanto a sua produção física, sem considerar o seu conteúdo e trouxemos algumas definições. Outra caracterização se dá na maneira como os livros didáticos são organizados, de acordo com Gonçalves (2017),

> O livro didático apresenta um conteúdo organizado de modo metódico, estruturado, orientado por intencionalidades de natureza didático-pedagógicas, isto é, organizado de uma maneira que os assuntos são apresentados de modo graduado e com linguagem adequada aos estudantes ao qual ele se destina. (GONÇALVES, 2017, p. 63).

Algumas informações podem ser extraídas da citação anterior, tais como a produção dos livros relacionados às disciplinas específicas, cuja seleção dos conteúdos se dá de forma a atender às necessidades das séries ou anos escolares, em conformidade com os componentes curriculares. Outro ponto importante é a definição quanto a sua utilização, ponto controverso, pois o professor escolhe o livro que o aluno irá utilizar.

No Brasil, conforme Silva (2011), a trajetória do livro didático teve início nas primeiras décadas do século XX, com a origem do Instituto Nacional do Livro – INL, cujo surgimento se deu a partir da incorporação das atribuições do Instituto Cairu, até então responsável pela produção da Enciclopédia Brasileira e o Plano Nacional de Educação – PNE. A transformação se deu pelo Decreto-Lei nº 93/1937, cuja redação conferia ao novo Instituto as seguintes competências,

> a) organizar e publicar a Enciclopédia Brasileira e o Dicionário da Língua Nacional, revendo-lhes as sucessivas edições;
> b) editar toda sorte de obras raras ou preciosas, que sejam de grande interesse para a cultura nacional;
> c) promover as medidas necessárias para aumentar, melhorar e baratear a edição de livros no país bem como para facilitar a importação de livros estrangeiros
> d) incentivar a organização e auxiliar a manutenção de bibliotecas públicas em todo o território nacional. (BRASIL, 1963, p.1)

Apesar das atribuições expressas no Decreto-Lei de Getúlio Vargas, Oliveira (1994, p. 43) acrescenta que o Instituto Nacional do Livro – INL buscou “contribuir para criação de uma cultura nacional e centrou o seu trabalho no livro, como instrumento de estabilidade social e transmissão dessa cultura”. Após 50 anos de existência, o INL deixou de existir por força da Lei nº 7.624/1987, cuja redação autorizou a criação de três Fundações Públicas com personalidade jurídica de direito privado, dentre elas a Fundação Nacional Pró-Leitura - Pró-Leitura, que incorporou a Biblioteca Nacional – BN e o Instituto Nacional do Livro – INL.

Em 1938, um ano após a criação do INL, temos a edição do Decreto-Lei nº 1.006/1938, que estabelece as condições de produção, importação e utilização do livro didático. Neste documento também encontramos algumas definições trazidas pelo legislador, ao considerar como livros didáticos os compêndios e os livros de leitura de classe. Em conformidade com Brasil (1938), nos parágrafos do Art. 2º, temos:

> [...]
> § 1º Compêndios são os livros que exponham, total ou parcialmente, a matéria das disciplinas constantes dos programas escolares.
> § 2º Livros de leitura de classe são os livros usados para leitura dos alunos em aula. (BRASIL, 1938, p. 1).

Um dos artigos do referido Decreto-Lei sugere o início do processo de autorização prévia, pelo Ministério da Educação, dos livros didáticos que serão utilizados na Educação Básica, autorização extensiva aos livros didáticos editados pelos poderes públicos. Outro ponto importante é a vedação expressa, ao poder público e a direção da escola, determinar a adoção de determinados livros, também não podem expressar preferência por livros autorizados.

Em 1945, com a edição do Decreto-Lei nº 8.460/1945, ficou restrito ao professor é livre o processo de escolha do livro didático a ser utilizado pelo aluno, desde que não seja contrária aos programas escolares. Embora exista liberdade, ela se limita à escolha e utilização em sala de aula, pois o processo de autorização se dá por procedimento conduzido uma comissão formada por membros, que notoriamente possuem a competência de examinar os livros didáticos que lhes forem apresentados, e emitir pareceres favoráveis ou não à aceitação dos livros submetidos à análise.

As atividades relativas à edição e distribuição de livros textos, até então sob a responsabilidade do Instituto Nacional do Livro – INL, por força do Decreto 77.107/76, passam a ser de competência da Fundação Nacional do Material Escolar – FENAME, esta teve sua denominação social alterada para Fundação de Assistência ao Estudante - FAE, o que pode ser encontrado no Decreto nº 88.295/1983, cujo preâmbulo aprova do Estatuto Social da FAE.

Chegamos ao mais antigo dos programas de distribuição de livros didáticos no Brasil, trata-se do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, criado pelo Decreto nº 91.542/1985. A finalidade do Programa era distribuir livros didáticos aos estudantes que estivessem matriculados em escolas públicas de 1º grau. Apesar da execução do PNLD ser de competência do Ministério da Educação, por intermédio da Fundação de Apoio ao Estudante – FAE, esta deveria atuar com a participação das Secretarias Estaduais e Municipais de Educação, além das Secretarias de Educação do Distrito Federal, dos Territórios e das Associações Comunitárias.

Em fevereiro de 1997, por meio da Medida Provisória nº 1.549-27/1997, o Governo Federal reestruturou a Presidência da República e seus Ministérios. Nessa reforma, a Fundação de Apoio ao Estudante deixou de existir, passando a integrar o Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação – FNDE. Com a extinção da FAE, o PNLD passou a ser executado pelo FNDE.

Nas edições seguintes, tivemos algumas alterações significantes no PNLD. Na edição do ano 2000, houve a previsão de entrega dos livros no ano anterior, bem como a distribuição de dicionários aos alunos de 1ª a 4ª das escolas públicas. Em 2011, o FNDE distribuiu livros para o Ensino Médio, inclusive para a modalidade Educação de Jovens e Adultos – EJA.

Atualmente o PNLD tem fonte legal no Decreto 9.099/2017, sob a nomenclatura de Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD, substituindo o Programa Nacional do Livro Didático, ou seja, com o advento do referido Decreto, tivemos a inclusão dos materiais didáticos no programa, tais como jogos e softwares educacionais, obras pedagógicas, materiais destinados ao apoio da gestão pedagógica, dentre outros. A execução do Programa é feita de forma alternada, atendendo em ciclos os quatro ciclos de ensino: Educação Infantil, anos iniciais do Ensino Fundamental, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

1.5.1. PNLD 2019 e PNLD 2020: aspectos gerais

Iniciaremos essa subseção, a partir da exposição de alguns elementos da Resolução FNDE nº 15, de 26 de julho de 2018, a qual dispõe sobre as normas de conduta no âmbito da execução do Programa Nacional do Livro e do Material Didático. Esta Resolução serviu de pressuposto legal do PNLD para as edições 2019 e 2020. Considerando, ainda, "As diversidades sociais e culturais que caracterizam a sociedade brasileira, bem como o pluralismo de ideias e as concepções pedagógicas no processo de escolha" (p. 1), reforça a importância do professor e dos profissionais da educação no processo de escolha dos livros e materiais didáticos, bem como norteia esse processo, com vistas à sua transparência. Ressalte-se, ainda, que o disposto na Resolução n° 15/2018, tem origem legal nos termos do Art. 4° do Decreto nº 9.099/2017 e origem formal por decisão do Conselho Deliberativo do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE e ambas objetivam o estabelecimento das regras a serem seguidas pelo PNLD.

De acordo com o Art. 6° do Decreto 9.099/2017 "O processo de aquisição de materiais didáticos ocorrerá de forma periódica e regular, de modo a atender as etapas e os segmentos de ensino". Em agosto de 2018, por meio do informe 28/2018 COARE/FNDE, tivemos o início da escolha do PNLD 2019 destinado à Educação Infantil e aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. O referido informe trouxe a possível data de início do processo, que será feita exclusivamente pelo sistema PDDE-Interativo, para o dia 23/08/2018, marcando o início da edição 2019. Vale a pena ressaltar que o referido comunicado trouxe algumas novidades, tais como:

> Inclusão do atendimento à educação infantil e às instituições comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público, que atendam à educação infantil e às escolas do campo; - Possibilidade de as redes de ensino, em conjunto com suas escolas, decidirem pela unificação ou não dos materiais que serão distribuídos, sem impedir que cada escola participante do PNLD continue registrando suas escolhas individualmente. –
> [...]
> Obrigação de inclusão da ata de reunião da escolha no Sistema PDDE-Interativo. Caso não o façam, as escolas deverão apresentar uma justificativa. - Obrigação de as escolas informar sobre a visita de representante que realizou divulgação de material do PNLD. (BRASIL, 2018, p. 1).

Tivemos, com a publicação desse comunicado, o início das etapas e procedimentos constantes no Art. 8º do Decreto 9.099/2017. A etapa seguinte diz respeito à Avaliação

Pedagógica, a ser realizada pelo Ministério da Educação, dos materiais pedagógicos inscritos. Durante a etapa de Avaliação Pedagógica, o MEC conta com o assessoramento de uma comissão técnica específica, cujos membros são indicados pelos membros dos sistemas de educação e escolhidos pelo ministro da Educação. A comissão é formada por especialistas das diferentes áreas do conhecimento correlata e tem duração igual ao período de vigência do PNLD, atualmente com duração de quatro anos.

Em 16 de agosto de 2018, o Ministério da Educação e Cultura, publicou no Diário Oficial da União, a Portaria nº 30, de 15 de agosto de 2018, que marcou o fim da etapa de avaliação, bem como a habilitação. Nessa publicação consta a relação das obras aprovadas para cada componente curricular. Na etapa seguinte, tivemos a participação efetiva das escolas no processo de escolha do material didático.

Para auxiliar no processo informatizado da etapa de escolha, o FNDE publicou em seu portal na internet, uma cartilha, intitulada: passo a passo para o registro da escolha – PNLD 2019. Resumidamente, nesta cartilha constam orientações de como acessar o sistema, como proceder no que diz respeito aos termos e condições, como fazer o registro da escolha, como gravar o registro da escolha e, como finalizar a escolha. O FNDE alerta para o caso onde a escola não acessa ou não grava a sua escolha, pois, nesse caso será encaminhada uma dentre as obras aprovadas, para cada componente curricular.

No portal do FNDE é possível encontrar os informes publicados para nortear a condução do PNLD. Dentre esses informes daremos destaques ao informe COARE/FNDE nº 34/2019, o qual trouxe mudanças no processo de escolha dos livros e material didático. As alterações do rito dizem respeito, segundo informe da COARE/FNDE, às seguintes possibilidades:

> As redes de ensino deverão optar por um dos seguintes modelos de escolha:
> **a) Material único para cada escola:** Cada escola irá realizar sua própria escolha individualmente e receberá o material escolhido pelo seu corpo docente.
> **b) Material único para cada grupo de escolas:** A rede de ensino irá definir um grupo específico de escolas que receberá o mesmo material didático. O material a ser adotado será o mais escolhido dentre as escolas pertencentes ao grupo de escolas definido pela rede de ensino. Cada escola irá realizar sua própria escolha individualmente e receberá o material mais escolhido pelo grupo.
> **c) Material único para toda a rede:** A escolha da rede de ensino será unificada e TODAS as escolas da rede utilizarão o mesmo material. O material a ser adotado será o mais escolhido dentre as escolas pertencentes à rede de ensino. Cada escola irá realizar sua própria escolha individualmente e receberá o material mais escolhido pelas escolas da rede. (BRASIL, 2019, p. 1, grifo nosso).

Ressaltamos que as alterações trazidas por esse informe são um tanto controversas, pois, apesar de ser democrática, a escolha do material fica, nas três possibilidades, a cargo das redes de ensino e não dos professores que, de fato, irão trabalhar com o material.

Após a escolha, temos as etapas de negociação e aquisição, conforme os procedimentos dispostos na Lei 8.666/93, conhecida como lei de licitações. Finalmente, as editoras fornecedoras dos livros escolhidos e vencedoras do certame, farão a entrega do material diretamente às escolas.

Na edição do PNLD 2020, tivemos o atendimento dos Anos Finais do Ensino Fundamental. No entanto, se comparada à edição anterior, não tivemos mudanças circunstancias, com exceção das datas e o reforço de alguns informes já publicados. Dentre eles, destacamos o informe COARE/FNDE nº 29/2019, o qual marcou o início do processo de escolha do PNLD 2020, datando a primeira quinzena de agosto. Ainda desse informe, temos que,

> A decisão na escolha do livro didático deve ser dos professores. O processo de escolha deverá ser realizado a partir de uma reflexão coletiva, com base nas orientações constantes no Guia do PNLD, que será disponibilizado após a divulgação do resultado definitivo da avaliação pedagógica pelo Ministério da Educação e da habilitação das empresas e obras participantes. Mobilize o corpo docente da sua escola! A seleção dos materiais deve ser estabelecida de forma democrática e autônoma. (BRASIL, 2019)

Neste comunicado tivemos o reforço da importância da participação dos professores no processo de escolha do livro didático, além de relembrar que a seleção dos materiais deve ser de forma autônoma e democrática, ou seja, sem a intervenção ou interferência de representantes de editoras ou dos agentes do sistema de ensino alheios à escola. Quanto à forma democrática, vale ressaltar que, a edição do PNLD 2019 e a edição do PNLD 2020, ambas obrigam o diretor da escola, pessoa responsável pelo registro da escolha do material didático no PDDE-interativo SIMEC, a anexar a ata de escolha dos livros didáticos, anexar o termo de compromisso e assinar, virtualmente, o termo de visita dos representantes das editoras.

A trajetória do livro didático, desde a inscrição até a distribuição, terminando o ciclo com o monitoramento e avaliação, representa sem dúvidas um grande avanço das políticas públicas voltadas à educação brasileira. Embora, alguns vícios legais, formais e até materiais, por forças alheias ao sistema educacional representem retrocessos, conhecer, minimamente, um processo tão complexo como a escolha de um livro didático que irá, de certa forma moldar a nossa sociedade, torna-se um dever, não só legal, mas moral de cada educador.

Além disso, sabemos que a trajetória dos livros didáticos e a sua regulamentação, majoritariamente, por meio de Decretos ou Decretos-lei, falam muito sobre os processos de condução das políticas públicas voltadas aos materiais didáticos no Brasil. As definições de livros didáticos trazidas pelos Decretos sugerem que os livros didáticos são meros repositórios de conhecimentos científicos ou de cultura acumulada, ou de fragmentos destes, e que por um processo de avaliação pedagógica realizada por equipes, às vezes distantes das salas de aula, acabam por fazer a aceitação de livros didáticos que atendem somente o que é solicitado pelos currículos formais do sistema educacional, assim, ao professor cabe a doce ilusão de escolha do livro mais próximo à realidade do aluno. Ante o exposto, voltamos à crítica feita por Teixeira (1963), ao dizer que,

> (…) nenhum conhecimento científico é suscetível de ser assim ensinado em sua forma lógica final. É ele produto do engenho humano. E engenho aí deve ser entendido literalmente como mecanismo que elabora, segundo processos demorados e ultrameticulosos, o produto acabado e refinado que é o conhecimento científico, devidamente formulado. Sua apresentação direta assim logicamente formulada é de profunda utilidade e indispensável mesmo – não porém para o aprendiz, mas, para quem já sabe, que aí encontrará, nesse tratado, o corpo sistemático de conhecimentos descobertos, para os manipular nas suas diversas aplicações ou para os utilizar em novas descobertas (TEIXEIRA, 1963, p. 30)

A apresentação "da matéria das disciplinas constantes nos programas escolares", conforme sugerido pelos Decretos ao longo da trajetória do livro didático no Brasil, certamente não consta tal qual foi produzido, necessitando de transformações adequadas para que sejam apresentadas ao aluno. Para tanto, entendemos que uma das maneiras de enxergar essas transformações, seria olhá-las à luz da Teoria da Transposição Didática.

1.6. Base Nacional Comum Curricular: histórico e organização

Iniciamos o capítulo trazendo aspectos históricos da Análise Combinatória, enquanto Objeto de Saber Matemático, posteriormente trouxemos aspectos gerais desse mesmo Objeto de Saber, agora, sob um enfoque escolar. Tornou-se necessário a descrição de um breve histórico do surgimento do livro, da distinção existente entre os livros e os livros didáticos, para tanto recorremos ao trajeto do livro didático, sob a égide do PNLD. Por fim, utilizamos a Teoria da Transposição Didática para trazer as ideias necessárias à compreensão de que a Análise Combinatória presente nos livros didáticos necessita de transformações adequadas para que possam integrar os conteúdos a serem ensinados. Portanto, para compreender melhor a parte do Sistema Educacional responsável pela organização do Currículo da Educação Básica brasileira, vamos iniciar a descrição histórica da criação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC para então trazer os aspectos técnicos relacionados à organização desse documento educacional.

Iniciaremos o trajeto histórico do processo de formação Base Nacional Comum Curricular a partir do disposto no Art. 210[9] da CF/88, embora existam documentos legais anteriores que fixavam currículo comum, mas não com as mesmas características do documento que temos atualmente. A lei 5.692/71[10] trazia em seu Art. 4º a orientação de que os currículos do ensino de 1º e 2° teriam um núcleo comum obrigatório para todo o território nacional e parte diversificada de acordo com as especificidades locais. Embora essa lei de diretrizes trouxesse em seu texto uma tentativa de criar um currículo comum, o período marcado pela ditadura militar[11] impôs muitas mudanças, principalmente no âmbito jurídico, impedindo o seu avanço, fazendo com que o tema fosse retomado, já no Brasil república, com a sanção da Lei 9.394/96[12], especificamente em seu Art. 26, o qual trazia em sua redação original que os currículos do ensino fundamental e médio deveriam ter uma base nacional comum, a qual seria complementada por uma parte diversificada, de acordo com as características regionais e locais dos sistemas educacionais. Em 2013, a Lei 12.796/2013 alterou o Art. 26 da LDB, passando incluir os currículos da educação infantil na obrigatoriedade da base nacional comum.

Embora houvesse a previsão legal para a criação de um documento legal para servir de base para a formação dos currículos educacionais em todo o território nacional, isso não ocorreu de forma imediata, tampouco nos anos seguintes, pois, conforme Corrêa e J. C. Morgado (2018), no ano de 1997,

> o governo de Fernando Henrique Cardoso, com o pretexto da necessidade educacional, define e implementa os **Parâmetros Curriculares Nacionais** que, mesmo sem a aprovação do Conselho Nacional de Educação (CNE), serviram para os Sistemas de Ensino e as Escolas reorientarem os seus currículos, mesmo não sendo normativo (CORRÊA E J. C. MORGADO, 2018, p. 4, grifo nosso)

Destaque-se, ainda, que os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs, conforme B. B. Teixeira (2000) não tinham a,

> pretensão de serem uma base nacional comum para o ensino fundamental, mas são a proposta do MEC. Poderão ser considerados na elaboração dos projetos pedagógicos das escolas, assim como outros "parâmetros" construídos nas várias instâncias da Federação (B. TEIXEIRA, 2000, p. 7).

[9] Art. 210. Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacional e regionais.
[10] Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1º e 2º graus, e dá outras providências
[11] Regime instaurado em 1964 e que durou até 1985
[12] Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, popularmente conhecida como LDB.

No entanto, com o advento da lei 13.005/2014[13], com amparo no Art. 214[14] da CF/88, tivemos o início de um movimento de criação de uma Base Nacional Comum Curricular no Brasil. No anexo desse documento temos as metas e estratégias para a implementação do Plano Nacional de Educação – PNE, dessas, quatro versam sobre a criação desse documento, dentre elas, citamos apenas, conforme Brasil (2014) a meta 2 e suas estratégias 2.1 e 2.2, cujas redações são:

> Meta 2. Universalizar o ensino fundamental de 9 (nove) anos para toda a população de 6 (seis) a 14 (quatorze) anos e garantir que pelo menos 95% (noventa e cinco por cento) dos alunos concluam essa etapa na idade recomendada, até o último ano de vigência deste PNE.
>
> 2.1) o Ministério da Educação, em articulação e colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, deverá, até o final do 2º (segundo) ano de vigência deste PNE, elaborar e encaminhar ao Conselho Nacional de Educação, precedida de consulta pública nacional, proposta de direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento para os (as) alunos (as) do ensino fundamental;
>
> 2.2) Pactuar entre União, Estados, Distrito Federal e Municípios, no âmbito da instância permanente de que trata o § 5º do art. 7º desta Le i, a implantação dos direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento que configurarão a base nacional comum curricular do ensino fundamental;

Com a aprovação do PNE, bem como o compromisso com o cumprimento das metas estabelecidas, tivemos em 2014 o início da elaboração da primeira versão da BNCC para o ensino fundamental, a qual seguiu a cronologia disposta na figura 05.

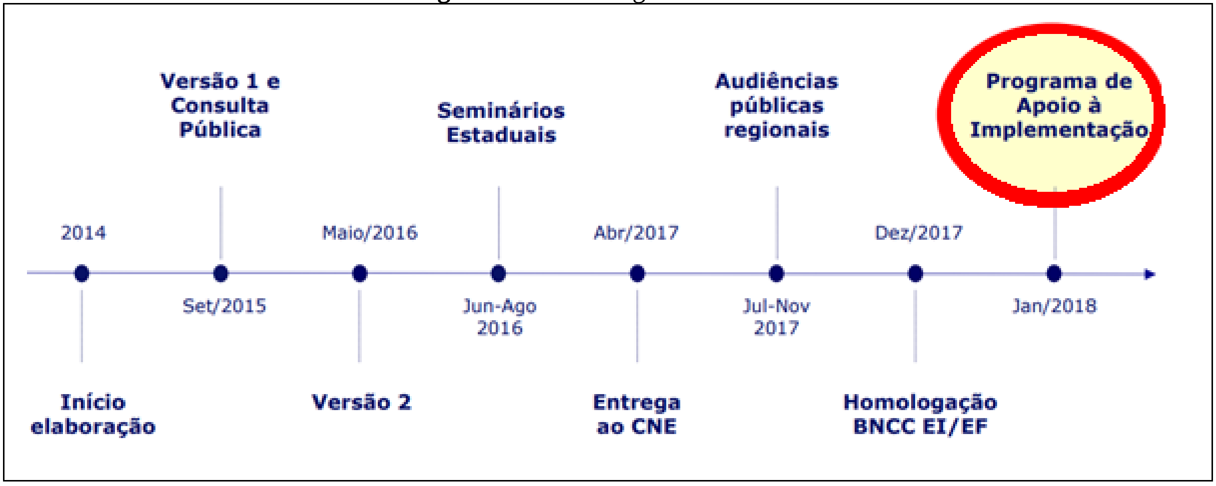
Ainda durante a 2ª Conferência Nacional de Educação, realizada em 2014 pela CONAE, tivemos, de acordo com o documento final do Fórum Nacional da Educação FNE (2014), como tema desse evento,

> O PNE na Articulação do Sistema Nacional de Educação: Participação Popular, Cooperação Federativa e Regime de Colaboração. Nessa direção, a Conferência teve como propósito contribuir com a política nacional de educação, indicando responsabilidades, corresponsabilidades, atribuições concorrentes, complementares e colaborativas entre os entes federados e os sistemas de ensino. (CONAE, 2014, p.8)

[13]Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências.

[14]Art. 214. da CF/88 "A lei estabelecerá o plano nacional de educação, de duração decenal, com o objetivo de articular o sistema nacional de educação em regime de colaboração e definir diretrizes, objetivos, metas e estratégias de implementação para assegurar a manutenção e desenvolvimento do ensino em seus diversos níveis, etapas e modalidades por meio de ações integradas dos poderes públicos das diferentes esferas federativas"

Figura 05 – cronologia BNCC – EF



Fonte: LIMA, R. P. IV Encontro Regional dos Conselhos Municipais de Educação do Nordeste. 2018

O ano que se seguiu, a publicação da Portaria n. 592[15], de 17 de junho de 2015, marcou legalmente o início dos trabalhos de elaboração da proposta a ser apresentada, conforme discorrido durante o FNE ocorrido em 2014. Em 16 de setembro 2015, tivemos a disponibilização[16] pública da 1º versão da Base Nacional Comum Curricular – BNCC que teve sua discussão pública preliminar a partir da mobilização das escolas públicas realizada no período de 2 a 15 de dezembro de 2015. Destaque-se que esse período ficou conhecido como o dia D da BNCC.

Seguindo a cronologia da figura 05 – Cronologia BNCC - EF, constante na página 46, em 3 de maio de 2016, tivemos a disponibilização[17] da 2ª versão da BNCC. Conforme portal do MEC, de 26 de junho a 10 de agosto desse mesmo ano,

> Aconteceram 27 Seminários Estaduais com professores, gestores e especialistas para debater a segunda versão da BNCC. O Conselho Nacional de Secretários de Educação (Consed) e a União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (Undime) promoveram esses seminários.

A realização dos seminários, bem como a emissão dos seus relatórios, subsidiou o início da formulação da 3ª versão da BNCC, num processo colaborativo com a versão anterior. No ano seguinte, no mês de abril, o MEC entregou, ao CNE, a versão final da Base Nacional Comum Curricular, após a emissão do Parecer CNE/CP nº 15/2017, do Conselho Pleno do Conselho Nacional de Educação, aprovado na Sessão Pública do dia 15 de dezembro de 2017. Esse parecer, que tem como anexo a BNCC – Educação Infantil e Ensino Fundamental, foi

[15] Institui comissão de especialistas para a elaboração da proposta da Base Nacional Comum Curricular.
[16] O documento pode ser acessado a partir do link: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/relatorios-analiticos/BNCC-APRESENTACAO.pdf
[17] O documento pode ser acessado a partir do link: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/relatorios-analiticos/bncc-2versao.revista.pdf

homologado pela Portaria nº 1.570, de 20 de dezembro de 2017, do Ministério da Educação e Cultura.

A Base Nacional Comum Curricular, de forma a reunir os conjuntos de ideias fundamentais dos diversos campos de conhecimento que compõe a Matemática, propôs que a formação dos currículos de Matemática contenha, conforme Brasil (2017, p. 268), "cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização". A última versão da BNCC trouxe, para o componente curricular de matemática, cinco unidades temáticas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, e probabilidade e estatística. As unidades temáticas referem-se ao agrupamento de objetos de conhecimentos assim como o desenvolvimento da capacidade de relacioná-los refere-se às habilidades.

Vale ressaltar que esses agrupamentos não são fixos, pois, expressam apenas um dos possíveis arranjos para se construir os currículos de matemática. Ainda das habilidades, a BNCC, conforme Brasil (2017, p. 275) traz que a sua "progressão ano a ano se baseia na compreensão e utilização de novas ferramentas e também na complexidade das situações-problema propostas, cuja resolução exige a execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas distintas". Um exemplo da articulação entre unidades temáticas, sugerida por esse documento, e que trouxemos, pois, tem proximidade com a nossa proposta diz respeito aos elementos de combinatória enquanto Objeto Transacional. Em Brasil (2017), pode-se encontrar o seguinte,

> Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos (BRASIL, 2017, p. 275).

Ante o exposto, reiteramos que a forma como a BNCC está organizada, constitui-se apenas de um dos possíveis arranjos de organização das unidades temáticas, no entanto, essa organização servirá de base para a organização dos currículos das unidades da federação, além de servir de fonte primária para a organização dos livros e materiais didáticos.

CAPÍTULO 2

PERCURSO METODOLÓGICO

Neste capítulo, descreveremos o percurso metodológico seguido pela pesquisa. A organização do capítulo se dá em quatro seções: na primeira, consta a natureza da investigação, o tipo de pesquisa, ambas subsidiadas pelas ideias da Teoria da Transposição Didática. Na seção 2, intitulada, seleção do corpus, temos a quantidade de livros selecionados e como foram selecionados. Nas seções seguintes teremos a descrição dos livros, conforme os seus respectivos PNLD e por fim, apresentaremos na seção 4, as formas de análise, com base em nossas categorias de análise.

2.1. Natureza da Investigação

Nesta seção, apresentaremos os aspectos metodológicos de nossa pesquisa, indicando o tipo escolhido, quanto à abordagem, e quanto aos objetivos. Inicialmente, vamos discorrer um pouco sobre algumas concepções teóricas e conceituais da pesquisa científica. Gil (2002) define pesquisa como,

> Procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa desenvolve-se por um processo constituído de várias fases, desde a formulação do problema até a apresentação e discussão dos resultados. (GIL, 2002, p. 17).

Uma pesquisa surge, então, de um problema, o qual o pesquisador pode tomar alguns caminhos em buscas de repostas. Essa busca, segundo Gil (2002), pode se dar da “vontade de conhecer pela própria satisfação de conhecer” (p. 17) ou pode ter início a partir “do desejo de conhecer com vistas a fazer algo de maneira mais eficiente ou eficaz” (p. 17). Parece coerente pensar que as duas hipóteses formuladas por Gil (2002) não são mutuamente excludentes, pois conhecer um objeto para uma melhor interação implica, também, satisfazer a vontade do pesquisador em conhecê-lo.

Gerhardt e Silveira (2009), ao passo que indicam a pesquisa como núcleo de uma ciência, essas autoras reafirmam que ela “possibilita uma aproximação e um entendimento da realidade a investigar. A pesquisa é um processo permanentemente inacabado. Processa-se por meio de aproximações sucessivas da realidade, fornecendo-nos subsídios para uma intervenção no real” (p. 31). Com vistas à investigação de livros didáticos, cujo nosso objetivo é mostrar, a partir da Teoria da Transposição Didática, como a Análise Combinatória se mostra presente nos livros didáticos do Ensino Fundamental, escolhemos realizar, quanto à abordagem, uma pesquisa qualitativa.

Algumas características, de acordo com Gerhardt e Silveira (2009, p. 32, grifo das autoras), desse tipo de pesquisa são: "objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de *descrever, compreender, explicar*, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno". Encontramos em Tartuce (2006, p. 12), que: "a percepção que o observador tem do fato" caracteriza o fenômeno da pesquisa. No entanto, essas percepções são plurais, não uma única forma de olhar para o mesmo fenômeno. As percepções singulares dependem do paradigma adotado pelo pesquisador.

Neste trabalho, buscando compreender o questionamento de que, seria a Análise Combinatória, já revestida de suas técnicas de contagem, um objeto novo a ser estudado no Ensino médio? Passamos a olhar esse Objeto de Ensino através das lentes da Teoria da Transposição Didática de Chevallard (1999).

Esta pesquisa, quanto à sua natureza, caracteriza-se como uma pesquisa aplicada. Gerhardt e Silveira (2009) definem pesquisa dessa natureza como aquela que "objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos. Envolve verdades e interesses locais" (p. 35).

Vele trazer, ainda, alguns aspectos de pesquisa, quanto aos seus objetivos, ou seja, quanto aos seus critérios de investigação. Adotamos neste trabalho, dada a convergência com os nossos objetivos, uma pesquisa do tipo descritiva, pois, de acordo com Gil (2002, p. 42), o objetivo primordial desse tipo de pesquisa é "a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre variáveis". Esse autor ainda acrescenta que,

> Algumas pesquisas descritivas vão além da simples identificação da existência de relações entre variáveis, e pretendem determinar a natureza dessa relação. Nesse caso, tem-se uma pesquisa descritiva que se aproxima da explicativa. Há, porém, pesquisas que, embora definidas como descritivas com base em seus objetivos, acabam servindo mais para proporcionar uma nova visão do problema, o que as aproxima das pesquisas exploratórias.(GIL, 2002, p. 42).

As classificações acima elencadas trazem a proximidade de nossa pesquisa com aspectos teóricos relativos às maneiras ou às formas de fazer pesquisa. Todavia, torna-se necessário a elaboração de um planejamento da pesquisa, pormenorizando a coleta, análise e interpretação dos dados. De acordo com, Gil (2002),

> O delineamento refere-se ao planejamento da pesquisa em sua dimensão mais ampla, que envolve tanto a diagramação quanto a previsão de análise e interpretação de coleta de dados. Entre outros aspectos, o delineamento considera o ambiente em que são coletados os dados e as formas de controle das variáveis envolvidas. (GIL, 2002, p.42)

Concordando com esse autor, faremos o uso de alguns aspectos da pesquisa bibliográfica, para a coleta de dados, com vistas a responder nossos objetivos específicos: (a) identificar noções, conceitos e elementos de Análise Combinatória nos livros didáticos do Ensino Fundamental; (b) descrever conceitos e atividades, constantes nos livros didáticos do Ensino Fundamental, úteis à formação do raciocínio combinatório enquanto objeto transacional. Para tanto, nas seções seguintes poderão ser encontradas apresentações norteadoras da escolha, bem como a quantidade e descrição dos livros didáticos a serem analisados. Além da forma de análise utilizada nessa pesquisa.

2.2. Seleção do corpus

Com vistas à obtenção de respostas aos nossos objetivos específicos, que consistem em: (a) identificar noções, conceitos e elementos de Análise Combinatória nos livros didáticos do Ensino Fundamental; (b) descrever conceitos e atividades, constantes nos livros didáticos do Ensino Fundamental, úteis à formação do raciocínio combinatório enquanto objeto transacional, objetivos que decorrem do nosso objetivo geral que é mostrar, a partir da Teoria da Transposição Didática, como a Análise Combinatória se mostra presente nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Então, com vistas a atendê-los, faz-se necessário a realização de escolhas das obras didáticas a serem analisadas.

O Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação - FNDE, autarquia vinculada ao Ministério da Educação e Cultura- MEC, responsável pela execução das Políticas Educacionais do MEC, dentre elas a o Programa Nacional do Livro e Material Didático – PNLD, mantém em seu portal, de domínio governamental e acesso público, o controle estatístico de todas as obras aprovadas e disponíveis para escolhas pela equipe escolar.

Neste trabalho, utilizaremos para a escolha dos livros didáticos de matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, o PNLD 2019, regulamentado através do disposto na Resolução FNDE nº 15 de 26 de julho de 2018. Nessa edição, segundo o portal do FNDE, 124.607 escolas, em todo o território nacional, participaram da escolha dos livros e material didáticos para a utilização nesta fase da Educação Básica.

Ainda nessa edição, conforme dados obtidos a partir da publicação da Portaria da Secretaria da Educação Básica nº 30, de 15 de agosto de 2018, tivemos 16 obras didáticas, de editoras distintas, aprovadas para o componente curricular: matemática. Das obras aprovadas, segundo dados estatísticos do FNDE, tivemos a participação de 15 editoras distintas, responsáveis pela distribuição de 13.057.076 livros didáticos para a utilização nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Dados obtidos do portal do FNDE mostram que 7.933.818 livros, aproximadamente 60,76%, ficaram de ser entregues às escolas, pelas seguintes editoras:

1 - Editora Moderna S.A. responsável por 3.591.769 livros, conforme as seguintes coleções:

i) Coleção: AR – Aprender e Relacionar: matemática (247.333 livros);
ii) Coleção: Buriti Mais – matemática (2.892.519 livros);
iii) Coleção: Novo Pintanguá – matemática (451.917 livros).

2 – Editora Ática S.A., responsável por 2.799.188 livros da coleção em sua totalidade pela coleção Ápis matemática.

3 –Editora FTD S.A., responsável por 1.542.861 livros em sua totalidade pela coleção A Conquista da Matemática.

De posse desses dados, optamos por analisar, para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, cinco livros, 1° ano ao 5º ano, da coleção Buriti mais matemática, da editora Moderna, uma vez que esta coleção possui a maior quantidade de livros a serem distribuídos às escolas públicas de todo o território nacional.

Para a análise dos livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, tomaremos por base o seu último PNLD, edição 2020, regulamentada pela Resolução FNDE nº 15 de 26 de julho de 2018. Nesta edição, conforme dados obtidos do portal do FNDE, 48.213 escolas foram beneficiadas.

A portaria da Secretaria da Educação Básica nº 27, de 26 de agosto de 2019, divulgou o resultado final da avaliação pedagógica do PNLD 2020, Anos Finais do Ensino Fundamental. No resultado publicado, 11 obras didáticas de matemática foram aprovadas e disponibilizadas para escolha.

De acordo com dados estatísticos do FNDE, disponível em seu portal na internet, 11 editoras firmaram contratos para o fornecimento de livros e material didático para os anos de 2020 a 2023, vigência do PNLD 2020, totalizando 80.528.321 livros. Desse total 9.964.565 são do componente curricular: matemática.

Nesta edição do PNLD, a editora FTD S.A. emplacou a venda de 5.667.109 livros didáticos de matemática, ou ainda, em termos percentuais, 56,87% do fornecimento de livros de matemática destinados aos Anos Finais do Ensino Fundamental, ficaram a cargo dessa editora. Deste total, temos a divisão em duas coleções:

i) Coleção: Matemática, realidade & tecnologia (531.370 livros);
ii) Coleção: A conquista da matemática (5.135.739 livros).

Em primeiro plano, pretendíamos analisar os livros da coleção A conquista da matemática, no entanto, não obtivemos sucesso na obtenção dos referidos livros, por dois motivos: a representação da editora FTD em Rio Branco – Acre, não dispõe de livros (PNLD 2020) reservas para fornecimento à nossa pesquisa; A Rede Estadual de Educação fez, nos termos do Decreto 9.099/2018, a opção pelo material único para toda a rede, com vigência de 2020 a 2023, tendo como fornecedora a Editora Scipione S.A., responsável pela coleção: Matemática Essencial.

Diante do exposto, nossa escolha é pelos quatro livros, 6º ano, 7º ano, 8º ano e 9º ano, da coleção: Matemática Essencial, que abrangem, segundo informações da SEE/AC, toda a Rede Estadual.

2.3. Descrição do material

A partir da seleção dos livros conforme o critério de escolha exposto na seção anterior será feita a descrição de cada livro escolhido para análise, conforme a tabela 01: livros dos Anos Iniciais (1º, 2º, 3º, 4º e 5º) e a tabela 02: livros dos Anos Finais (6º, 7º, 8º e 9º ano). Posteriormente faremos comentários gerais sobre cada uma das obras, tais como: biografia do autor, editora, ano de publicação e a coleção, aprovada no PNLD, a qual pertence.

Quadro 01 - livros dos Anos Iniciais

Série/ano	Título/autor	Sumário	Autor/Editora
1º ano	**Figura 06:** livro 1º ano  Fonte: capa do livro *Buriti mais matemática 1º ano*	Unidade 1 - Vamos começar; Unidade 2 – Vamos contar; Unidade 3 – Vamos adicionar e subtrair Unidade 4 – Geometria Sugestões de leitura Bibliografia Material complementar	Carolina Maria Toledo; Ed. Moderna S.A.
2º ano	**Figura 07:** livro 2º ano	Unidade 1 - Localização e movimentação Unidade 2 – Números Unidade 3 - Adição e subtração Unidade 4 – Geometria Sugestões de leitura Bibliografia	Carolina Maria Toledo; Ed. Moderna S.A.

	 Fonte: capa do livro *Buriti mais matemática 2º ano*	Material complementar	
3º ano	**Figura 08:** livro do 3º ano  Fonte: capa do livro *Buriti mais matemática 3º ano*	Unidade 1 - Sistema de numeração decimal Unidade 2 - Adição e subtração Unidade 3 - Grandezas e medidas Unidade 4 - Localização e movimentação Unidade 5 - Multiplicação Unidade 6 – Geometria Unidade 7 - Mais grandezas e medidas Unidade 8 - Multiplicação e divisão 180 Sugestões de leitura Bibliografia Material complementar	Carolina Maria Toledo; Ed. Moderna S.A.
4º ano	**Figura 09:** livro 4º ano  Fonte: capa do livro *Buriti mais matemática 4º ano*	Unidade 1 - Sistema de numeração decimal Unidade 2 - Adição e subtração Unidade 3 - Geometria Unidade 4 - Multiplicação e divisão Unidade 5 - Grandezas e medidas Unidade 6 - Frações e números na forma decimal Unidade 7 - Mais grandezas e medidas Unidade 8 - Mais Geometria Sugestões de leitura Bibliografia Material complementar	Carolina Maria Toledo; Ed. Moderna S.A.
5º ano	**Figura 10:** livro do 5º ano	Unidade 1 - Números naturais Unidade 2 - As quatro operações Unidade 3 – Geometria Unidade 4 - Mais operações Unidade 5 – Frações Unidade 6 – Grandezas e medidas Unidade 7 - Números na forma decimal	Carolina Maria Toledo; Ed. Moderna S.A.

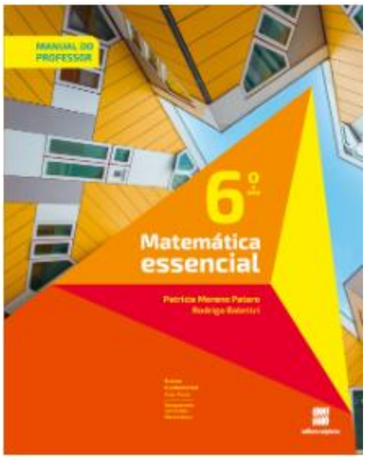
	 Fonte: capa do livro *Buriti mais matemática 5º ano*	Unidade 8 – Localização Sugestões de leitura Bibliografia Material complementar	

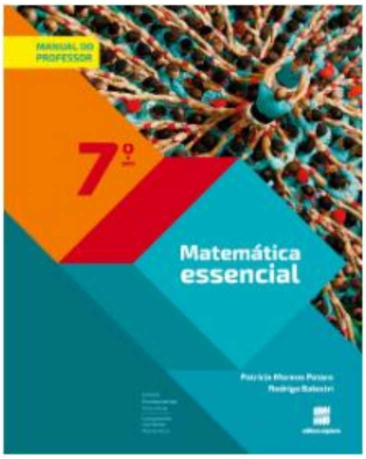
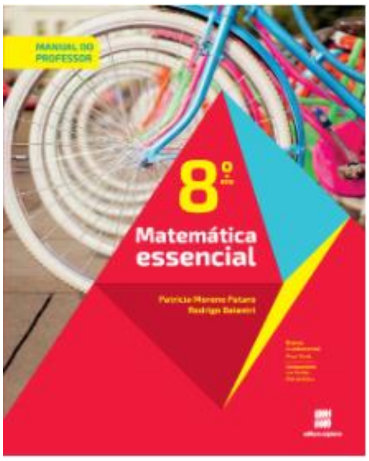
Fonte: autores

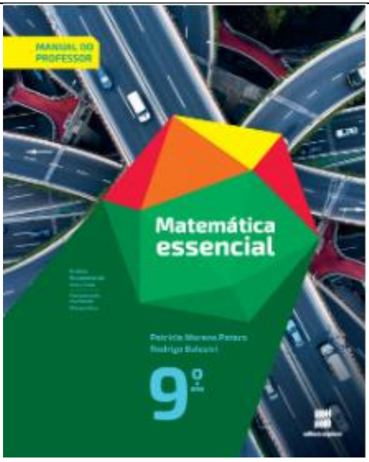
Os livros didáticos escolhidos e descritos foram aprovados pelo PNLD 2019, fornecidos e distribuídos pela editora Moderna S.A. e pertencem à coleção *Buriti mais matemática* organizada pela editora Moderna, tendo como editora responsável Carolina Maria Toledo, cujo breve relato biográfico do autor pode ser encontrado na contra capa dos referidos livros. Moderna (2017) descreve que a organizadora da coleção é “licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo e professora em escolas públicas e particulares de São Paulo por 15 anos”.

Os livros didáticos, dos Anos Finais do Ensino Fundamental, escolhidos conforme os critérios elencados na seção anterior constam na coleção: matemática essencial, da editora Scipione S.A. Passaremos a descrever os livros didáticos do 6° ano ao 9° ano, conforme autor, série e forma de organização dos conteúdos.

Quadro 02 - livros dos Anos Finais

Série/ano	**Título/autor**	**Sumário**	**Autor/Editora**
6º ano	**Figura 11:**livro do 6º ano 	Capítulo 1 - Figuras geométricas espaciais; Capítulo 2 - Os números naturais; Capítulo 3 - Operações com números naturais; Capítulo 4 - Potências e raízes; Capítulo 5 - Múltiplos e divisores; Capítulo 6 – Frações; Capítulo 7 - Ângulos e retas; Capítulo 8 - Polígonos e figuras semelhantes; Capítulo 9 - Localização e pares ordenados; Capítulo 10 - Números decimais;	Patrícia Moreno Pataro e Rodrigo Dias Balestri Ed. Scipione S.A.

	Fonte: capa do livro *Matemática essencial 6º ano*	Capítulo 11 - Medidas de comprimento, de massa e de tempo; Capítulo 12 - Estatística e probabilidade; Capítulo 13 - Medidas de área e de volume.	
7º ano	**Figura 12:**livro do 7º ano  Fonte: capa do livro *Matemática essencial 7º ano*	Capítulo 1 - Múltiplos e divisores; Capítulo 2 – Frações; Capítulo 3 - Números decimais; Capítulo 4 - Estatística e probabilidade; Capítulo 5 - Números positivos e números negativos; Capítulo 6 - Expressões algébricas, fórmulas e equações; Capítulo 7 - Grandezas e medidas de temperatura, energia e capacidade; Capítulo 8 – Ângulos; Capítulo 9 - Polígonos e formas circulares; Capítulo 10 – Proporcionalidade; Capítulo 11 - Simetria e transformação de figuras; Capítulo 12 - Medidas de área e de volume;	Patrícia Moreno Pataro e Rodrigo Dias Balestri Ed. Scipione S.A.
8º ano	**Figura 13:**livro do 8º ano  Fonte: capa do livro *Matemática essencial 8º ano*	Capítulo 1 - Ângulos e polígonos; Capítulo 2 - Potências e raízes; Capítulo 3 - Conjuntos numéricos; Capítulo 4 - Polinômios, produtos notáveis e fatoração; Matemática - Capítulo 5 - Transformação de figuras; Capítulo 6 - Equações, sistemas de equações e inequações; Capítulo 7 – Proporcionalidade; Capítulo 8 - Estatística e probabilidade; Capítulo 9 - Triângulos Capítulo 10 - Quadriláteros e formas circulares; Capítulo 11 - Medidas de área; Capítulo 12 - Medidas de volume e de capacidade.	Patrícia Moreno Pataro e Rodrigo Dias Balestri Ed. Scipione S.A.
9º ano	**Figura 14:**livro do 9º ano	Capítulo 1 - Potências e raízes; Capítulo 2 - Equações do 2º grau e sistemas de equações; Capítulo 3 - Matemática financeira; Capítulo 4 - Razão e proporção; Capítulo 5 - Noções de função e função afim; Capítulo 6 - Função quadrática; Capítulo 7 - Medidas de comprimento e medidas em informática;	Patrícia Moreno Pataro e Rodrigo Dias Balestri Ed. Scipione S.A.

	 Fonte: capa do livro *Matemática essencial 9º ano*	Capítulo 8 – Semelhança; Capítulo 9 - Relações no triângulo retângulo; Capítulo 10 - Estatística e probabilidade; Capítulo 11 - Circunferência e círculo; Capítulo 12 - Figuras geométricas espaciais	

Fonte: autores

Os livros didáticos, dos Anos Finais, escolhidos e descritos foram aprovados pelo PNLD 2020, fornecidos e distribuídos pela editora Scipione S.A. e pertencem à coleção *Matemática essencial* de autoria de Patrícia Rosana Moreno Pataro e Rodrigo Dias Balestri, cujo breve relato biográfico dos autores pode ser encontrado na contra capa dos referidos livros.Balestri e Pataro (2018) descrevem que os autores da coleção são:

> 1 – Patrícia Rosana Moreno Pataro é licenciada em matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR). Especialista em estatística pela UEL-PR. Atuou como professora da rede particular de ensino. Autora de livros didáticos para o ensino fundamental.
>
> 2 – Rodrigo Dias Balestrié licenciado em matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR). Especialista em Educação Matemática pela UEL-PR. Especialista em física para o novo ensino médio pela UEL-PR. Mestre em ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL-PR. Professor da rede pública de ensino Fundamental e Médio. Autor de livros didáticos para o ensino fundamental e ensino médio.

A escolha dos livros didáticos utilizados na análise se deu, primeiramente, pelo fato de pertencerem à lista dos livros aprovados no PNLD 2019 e PNLD 2020, bem como as devidas adequações à BNCC. Por outro lado, escolhemos a coleção Buriti Matemática, livros didáticos do 1º ao 5º ano, com base nos dados estatísticos divulgado pelo SIMEC, no que diz respeito à coleção mais escolhida pelas escolas públicas brasileira. Quanto aos livros didáticos do 6º ao 9º ano da coleção: Matemática Essencial, a Rede Pública Estadual de Educação fez, nos termos do Decreto 9.099/2018, a opção pelo material único para toda a rede, com vigência de 2020 a 2023, por esse motivo, escolhemos os livros didáticos dessa coleção para a obtenção e análise dos dados.

2.4. Forma de análise

A partir de uma análise dos princípios aditivo e multiplicativo, enquanto Objeto de Saber Matemático, elaboramos uma categoria abrangente para nos guiar nas buscas por elementos relacionados à Análise Combinatória. Dessa categoria, elaboramos subcategorias as quais julgamos importantes para o início da exploração do material. A análise terá como ponto de partida a leitura do material, em um primeiro momento, à procura de termos constantes nos textos contidos nos livros e que tenham similaridade com nossas subcategorias.

Posteriormente, a partir da identificação das similaridades de acordo com o nosso rol exemplificativos de subcategorias, iremos descrever as atividades encontradas em forma de figuras, retiradas diretamente do material. Após essa etapa, faremos a recuperação dos elementos de Análise Combinatória encontrados em nossa análise, mesmo que nesse momento, por mais que não seja exigida a utilização das técnicas gerais de contagem, nos propomos a analisar a sua possível utilização em momentos posteriores.

A formulação da categoria, intitulada: conjuntos, se deu a partir da afirmativa de Biggs (1979), de que estes são os princípios basilares da Análise Combinatória, deles decorrendo as demais técnicas gerais de contagem. Retomando Morgado et. al (1991, p.1), buscamos apoio para a formulação dessa categoria, na definição de um dos objetivos da Análise Combinatória, que de acordo com os autores pode ser compreendida como "a contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos". Diante disso, elaboramos quadro 03: categorias. Nesse quadro encontramos as subcategorias que irão nos guiar na busca dos termos e/ou atividades que possam auxiliar na obtenção das respostas aos nossos objetivos.

Quadro 03 - Categorias

Categorias	**Subcategorias**
1. Conjuntos	1. Relações; 2. Classificação; 3. Quantificação; 4. Elementos; 5. Seleção; 6. Agrupamentos; 7. Características; 8. Contar; 9. Intersecção; 10. Finitos; 11. Decisões;

	12. Excludentes/ exclusivas; 13. Ordem; 14. Disposição dos elementos; 15. Propriedades; 16. Condições; 17. Inclusão; 18. Disjuntos/ disjuntivos; 19. Decisões sucessivas; 20. Subconjuntos; 21. Escolhas; 22. Repetidos/ repetições; 23. Árvore de possibilidades/ diagrama de possibilidades; 24. Tabela de dupla entrada.

Fonte: Autores (2020)

Para analisar o primeiro objetivo específico, a saber: identificar noções, conceitos e elementos de Análise Combinatória nos livros didáticos do Ensino Fundamental, faremos:

i. Busca inicial por termos que tenham similaridade com as nossas subcategorias;

ii. Leitura e análise dos termos encontrados no item (i).

Para analisar o segundo objetivo específico, a saber: descrever conceitos e atividades, constantes nos livros didáticos do Ensino Fundamental, úteis à formação do raciocínio combinatório enquanto objeto transacional, faremos:

i. Descrição da atividade, em forma de figuras, retiradas diretamente do material analisado;

ii. Identificação da Unidade Temática, Objetos de Conhecimento e Habilidades, conforme código constante na BNCC, a qual a atividade faz parte.

iii. Descrição detalhada dos elementos de Análise Combinatória encontrados no material escolhido para análise das atividades que possivelmente poderão ser retomada em situações didáticas aplicáveis a outras fases ou etapas de Ensino.

Salientamos que nossa pesquisa possui cunho qualitativo e se dará de forma exploratória, então, dados os nossos objetivos, iremos utilizar algumas atividades que possam, implicitamente, elementos que, juntos, constituam a Análise Combinatória enquanto Objeto de Ensino. Conforme o exposto nessa seção, iniciaremos, no próximo capítulo, a construção dos dados e, concomitantemente a essa, faremos a nossa análise.

CAPÍTULO 3

CONTRUÇÃO DOS DADOS E ANÁLISE

Neste capítulo, com vistas à convergência ao nosso objetivo geral que é mostrar, a partir da Teoria da Transposição Didática, como a Análise Combinatória se mostra presente nos livros didáticos do Ensino Fundamental, bem como aos nossos objetivos específicos, a saber: (a) identificar noções, conceitos e elementos de Análise Combinatória nos livros didáticos do Ensino Fundamental; (b) descrever conceitos e atividades, constantes nos livros didáticos do Ensino Fundamental, úteis à formação do raciocínio combinatório enquanto objeto transacional. Propusemo-nos a realizar, a partir dos livros didáticos escolhidos, a construção dos dados de nossa pesquisa, obedecendo para fins didáticos, à ordem cronológica estabelecida pelos sistemas educacional. Os dados serão construídos, inicialmente, a partir de uma leitura criteriosa das obras selecionadas, dada a concordância com Bardin (1977), quando diz que um olhar atento pode contribuir para,

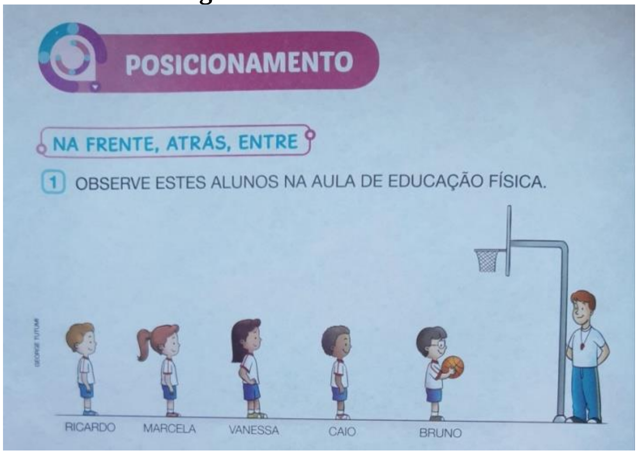
> O enriquecimento da leitura: Se um olhar imediato, espontâneo, e já fecundo, não poderá uma leitura atenta, aumentar a produtividade e pertinência? Pela descoberta de conteúdos e de estruturas que confirmam (ou infirmam) o que se procurar demonstrar a propósito das mensagens, ou pelo esclarecimento de elementos de significações suscetíveis de conduzir a uma descrição de mecanismos de que *a priori* não detínhamos a compreensão. (BARDIN, 1977, p. 29)

Nessa citação, temos claramente o apoio necessário para a condução de nossas leituras, aliadas a elas, nos guiaremos pelos aspectos principais da Teoria da Transposição Didática. Posteriormente faremos a análise dos dados coletados, de acordo com os critérios já estabelecidos na seção 2.4 do capítulo 2, bem como a evidenciação de que, para aquele objeto de ensino se encontrar ali, foi necessário a realização de uma transformação e que ao evidenciar suas características e integrá-las, teremos a proximidade com o objeto do ponto de vista científico.

Face ao exposto, iniciaremos a coleta dos dados através do livro didático do 1º ano, da coleção Buriti mais matemática organizada, pela editora Moderna, sob a responsabilidade de Carolina Maria Toledo.

Esse livro está organizado em oito unidades, sendo a primeira intitulada: vamos começar. Nossa primeira leitura aponta para o título chamado de posicionamento, pois, nele consta uma atividade relacionada à ideia de ordem, que pode progredir para a realização de atividades voltadas ao estudo das permutações simples, uma vez que sugere a formação de filas, as quais os elementos dispostos poderão trocar de lugares, conforme pode ser visto na figura a seguir.

Figura 15:Posicionamento



Fonte: Moderna (2017, p. 12

A atividade descrita faz parte da unidade temática geometria, e faz uso da habilidade EF01MA11, no entanto, não fica restrita, somente, a essa unidade temática, pois, pode sugerir a formação de sequências, quantificação de elementos, ou ainda noções de acaso, todas constantes, respectivamente, nas unidades temáticas: álgebra, números e, probabilidade e estatística.

As ideias de posicionamento, constante na atividade acima, ludicamente remonta à organização em forma de filas para cada aluno colocar-se em uma posição de arremesso da bola de basquete, neste caso, na ordem que está estabelecida, de maior proximidade com a cesta para o maior distanciamento: Bruno, Caio, Vanessa, Marcela e Ricardo, o que nos permite formular o questionamento a seguir, a partir da concordância de que

> Os conceitos de transposição e o próprio saber científico estão interligados, o que fica mais evidente quando sua análise é remetida ao plano pedagógico, onde toda transposição está relacionada a um saber específico, assim como toda a aprendizagem se faz sob a influência de uma transposição. (PAIS, 2001, p. 15)

Poderíamos formar outra fila com os mesmos alunos, agora, com a seguinte disposição: Caio, Bruno, Vanessa, Marcela e Ricardo? Dessa indagação, sabemos que o objetivo do ensino, nessa etapa, não é esse, mas que em outro momento, essa situação poderá ser retomada, bem como poderá haver a inserção de outros elementos, pois,

> A noção de transposição pode ser analisada no domínio mais específico da aprendizagem para caracterizar o fluxo cognitivo relativo à evolução do conhecimento, restrita ao plano das elaborações subjetivas, pois é nesse nível que ocorre o núcleo do fenômeno. A conveniência em destacar essa dimensão da transposição está associada à necessária aplicação de conhecimentos anteriores para a aprendizagem de um novo conceito. Na síntese de uma nova ideia, cada um desses momentos não subsiste sem uma base anterior. Este é o sentido estrito da cognição normal, ou seja, ***nenhum conceito surge sem a existência de um precedente***. (PAIS, 2001, p. 15, grifo nosso).

Ao criar uma situação didática semelhante a essa, o professor poderá contribuir para a formação de elementos necessários e úteis a compreensão das Permutações, objeto de estudo no Ensino Médio, etapa na qual, geralmente, o aluno aprenderá que a partir da fórmula $P_n = n.(n-1).(n-2).\ldots.3.2.1$, temos 120 maneiras de formar a fila para arremesso.

Ressalte-se que a resposta decorre do conhecimento de técnicas que nos permitem contar de maneira mais eficiente e, claro, ainda não acessível nesse momento, todavia, proporcionar ao aluno a vivência de situações que vão além da atividade proposta, pode permitir, posteriormente, a percepção desse movimento de ida e volta que ocorre no processo de ensino e aprendizagem, talvez, desgarrando da ideia de que a escola é apenas um local para a transmissão de conhecimento e isso, em partes se deve ao fato de que,

> O problema está em que os professores entendem esses elementos[18] de forma linear, mecânica, sem perceber o movimento de ida e volta entre um e outro, isto é, sem estabelecer as relações recíprocas entre um e outro. Por causa disso, o ensino vira uma coisa mecânica: o professor passa a matéria, os alunos escutam, repetem e decoram o que foi transmitido, depois resolvem meio maquinalmente os exercícios de classe e as tarefas de casa; aí reproduzem nas provas o que foi transmitido e começa tudo de novo. (LIBÂNEO, 2013, p. 141).

As relações recíprocas, às quais Libâneo (2013) se refere, reforçam a ideia de que a criação de situações didáticas que envolvam elementos de Análise Combinatória pode ser retomada posteriormente com vistas ao desfazimento dessa linearidade e mecanicidade do ensino desse Objeto de Saber. Além disso, a retomada dessas situações, já vivenciadas pelos alunos, poderá facilitar o processo de compreensão das fórmulas, bem como facilitar o processo de generalização dos resultados.

Há ainda que se observar a relação existente no processo didático, que para Chevallard (2019), é fundamental para o seu estabelecimento, trata-se da relação saber/tempo. Nesse sentido, temos que,

> a concretização do conhecimento, previamente realizado, permite que se estabeleça essa relação: aliás, o texto deve estabelecer uma relação particular (de acordo com os requisitos que consideraremos) com a duração e o tempo didático. O processo didático existe como uma interação de um texto e uma duração. (CHEVALLARD, 2009, p. 75, tradução nossa[19])

Ora, a sugestão da observância dessa relação, implica em planejar uma atividade a partir de elementos que proporcionem ao aluno a possibilidade de ter contato com um ensino

---

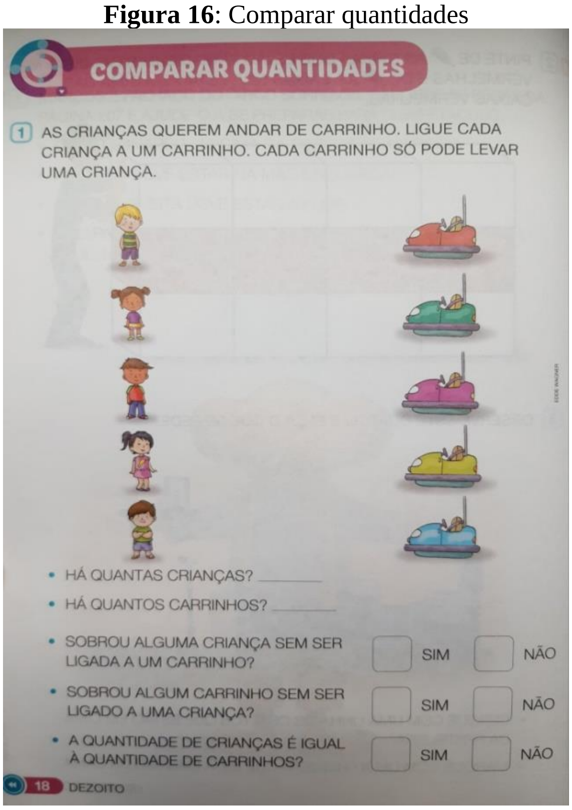
[18] Para Libâneo (2013) os elementos são: matéria, professor e aluno. O que Chevallard (1991) chama de sistema didático: o que ensina, os alunos e o saber ensinado.

[19] la puesta en texto del saber, previamente realizada, permite que se establezca esa relacion: es más, el texto deve entablar una relacion particular (segun exigencias que consideraremos) con la duracion y el tiempo didácticos. El processo didactico existe como interación de un texto y una duración.

mais linear e progressivo de determinado saber matemático, permitindo que, em outros momentos a retomada desses elementos seja feita com vistas a tornar a sua compreensão mais transparente, pois, para Chevallard (2009, p. 67, tradução nossa) o ato de ensino pode ser visto como uma “compreensão reflexiva de seus fins e as explicitações de sua intenção didática”.

Nessa mesma unidade, sob o título: comparar quantidades, temos a presença de uma atividade, constante na unidade temática números, habilidades: EF01MA02 e EF01MA03, conforme figura 15, que sugere o relacionamento entre elementos de dois conjuntos distintos, o primeiro contendo cinco crianças e o segundo contendo cinco carrinhos. Uma possível modificação no texto da atividade pode nos levar inferir que aqui estão presentes noções que sugerem a existência de elementos de combinatória, pois, uma pergunta do tipo: quantas possibilidades de escolhas do carrinho existem para a primeira criança? Ou ainda, quantas combinações podem ser feitas, utilizando as escolhas feitas pelas cinco crianças? Perguntas como essas podem ser respondidas, facilmente, a partir da compreensão do Princípio Multiplicativo, ou pelo diagrama de árvores ou ainda pela utilização de tabela de dupla entrada.

Figura 16: Comparar quantidades



Fonte: Moderna (2017, p. 18)

Ressaltamos que, ante ao exposto pela atividade proposta, estamos, ao modificar a questão, criando novas situações didáticas que certamente podem ser úteis à compreensão de problemas de combinações simples.

Um olhar mais atento à atividade proposta, que originalmente retrata problema relativo à quantidade, características e associação, pode, a partir da criação de novas situações didáticas, de acordo com Pais (2001, p. 15) darem sentido ao “fluxo cognitivo relativo à evolução do conhecimento”.

Ainda nesse sentido, com vistas à inserção dos elementos do processo de transposição didática, temos a “programabilidade[20] da aquisição do saber” (CHEVALLARD, 2009, p. 69, tradução nossa) a qual sugere que esse requisito “deve ser passível de recortes que possibilitem sequências aceitáveis, tanto por critérios pedagógicos como institucionais” (LEITE, 2004, p. 48), ou seja, tenha proximidade com o objeto de ensino em questão.

A atividade constante na figura 17, página 26, constante na unidade temática números, traz as habilidades EF01MA02 e EF01MA03, pede que os alunos observem a coleção de veículos de brinquedo de José e, depois, faça o que é pedido. A partir da representação gráfica dos brinquedos, a atividade traz o seguinte questionamento: “você sabe dizer com certeza a cor do veículo que escolheu?” (MODERNA, 2017, p. 26).

Em um primeiro momento, trata-se apenas de uma escolha de elementos que estão agrupados porque possuem as propriedades que os caracterizam como carrinhos, formando o que chamamos de conjuntos ou coleção, mas poderíamos avançar e perceber que ali estão noções de subconjuntos e que estes podem se formar a partir de várias características. Poderíamos ter, por exemplo, o subconjunto dos carros amarelos, dos carros vermelhos, dos carros azuis e dos carros verdes.

Figura: 17: Compreender informações

Fonte: Moderna (2017, p. 26)

[20] La programabilidad de la aquisición del saber

Através da nossa descrição, de uma possibilidade de criação de outras situações didáticas, percebemos que, mesmo implicitamente, aqui temos elementos de Análise Combinatória, pois, as compreensões da noção de conjuntos, da escolha de elementos para a formação de novos conjuntos estão intimamente ligadas à compreensão das combinações simples.

Ressaltamos que, apesar da atividade pertencer, explicitamente, à unidade temática números, o seu uso pode ser feito em conjunto com outras unidades temática, tais como: álgebra, probabilidade e estatística, pois, de acordo com a BNCC, o aluno deve ser levado a,

> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2017, p. 267).

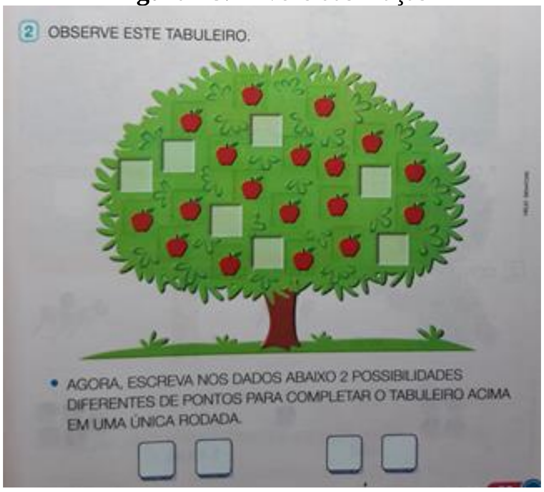
A seguir, temos na figura 18, constante na unidade temática números, trazendo as habilidades EF01MA07 e EF01MA08. Esta atividade é do nosso ponto de vista, interessante, pois se trata de um jogo, chamado de árvore das maçãs, cujas instruções serão aqui descritas.

Regras:

- Os jogadores decidem quem vai começar o jogo;
- O primeiro joga os dados, e pega a quantidade de maçãs correspondente ao total dos valores indicados nos dados;
- Em seguida, o jogador coloca as maçãs na árvore dele e passa os dados para o próximo jogador;
- Ganha quem preencher primeiro a árvore com as maçãs.

A atividade 2, constante na figura 18, consiste em escrever duas possibilidades diferentes de pontos para completar o tabuleiro. Inicialmente, a tarefa chama a atenção, visto que traz, expressamente, a palavra possibilidades, sugerindo a realização de escolhas. Uma leitura mais atenta, indica que teremos que particionar o número 18 em 4 partes, as quais poderão ser escolhidas dentre os números que formam as faces de um dado. Vejamos a figura.

Figura 18: Árvore das maçãs



Fonte: Moderna (2017, p. 55)

Particionando o número 18, que representa o total de maças, em quatro partes, que representa a quantidade de jogadas, temos as seguintes possibilidades, que resolvem a questão: 4 + 4 + 4 + 6 = 18 e 3 + 4 + 5 + 6 = 18. Não estamos resolvendo a questão tendo em vista a fase ou etapa educacional do aluno, no entanto a nossa resolução poderá, sem muitos problemas, ser retomada e compreendida em fases ou etapas seguintes da educação básica, pois, o que esperamos é evidenciar a existência, implícita, de elementos de Análise Combinatória nessa atividade dos Anos Iniciais.

A atividade da figura 18, localizada na unidade temática geometria, bem como habilidades EF01MA11 e EF01MA12, traz uma situação que requer do aluno a retomada das ideias de lateralidade, bem como a medição de distância, ambas necessárias para o estudo de localização. Embora, para essa fase de ensino, a atividade seja bem pertinente, pois, de certa forma, possui aspectos lúdicos, bem como o reforço de noções matemáticas já estudadas, temos, quase de forma explícita, a permutação com repetição, uma vez que envolve raciocínios envolvendo quantidade de caminhos mais curtos.

Alguns exercícios, principalmente no ensino médio, requerem que o aluno utilize algumas estratégias antes de fazer o uso da técnica de contagem. Algumas, que conseguimos identificar nessa atividade, iremos descrever, pois, nos ajudará a reforçar a existência da Análise Combinatória nessa atividade.

A escolha do sistema de coordenadas geográficas[21]nos permite descrever a nossa direção de forma mais resumida, por exemplo: Leste, Leste, Sul ou LLS. Outra etapa importante é a definição dos pontos de partida, de chegada e, de intersecção com as ruas.

[21]Sistema de localização que se estrutura através de linhas imaginárias, traçadas paralelamente entre si nos sentidos Norte-Sul e Leste-Oeste.

A partir do estabelecimento dessas estratégias, podemos resolver facilmente, a questão que indaga sobre a existência do caminho mais curto entre o mercado e a escola de inglês.

Figura 19: Trajeto no mapa

Fonte: Moderna (2017, p. 89)

Expandindo ainda mais o questionamento, será que só existe um caminho mais curto, entre o mercado e a escola de inglês? Neste caso, temos, a partir das nossas estratégias, um possível caminho: LLS. Desse caminho é possível, fazendo uma permutação com repetição, chegar à conclusão de que existem 3 caminhos mais curtos entre esses dois pontos.

Essa atividade, talvez seja, nesta etapa de ensino, a que mais se aproxima da Análise Combinatória estudada no Ensino Médio, o que nos permitiu explicitar a presença desse Objeto de Ensino, logo no início da Educação Escolar, sugerindo uma transformação, inicialmente imposta pelo Objeto de Saber Matemático e, consequentemente pelo sistema educacional, para que então pudesse fazer parte dessa fase ou etapa de ensino.

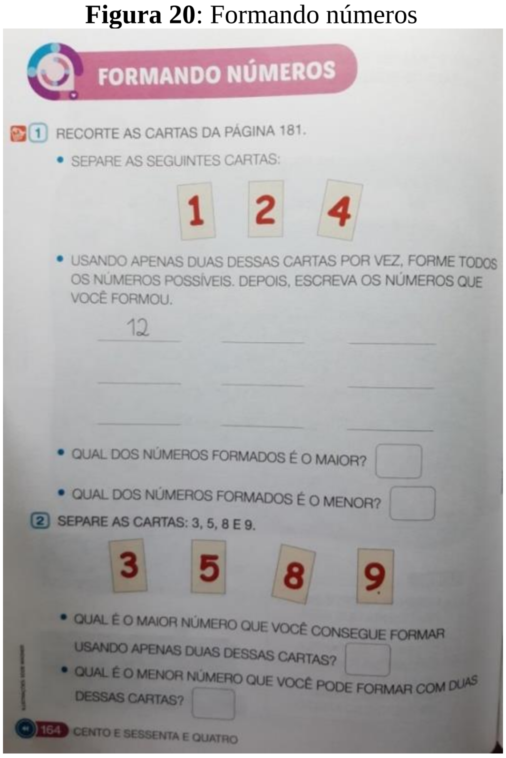
A atividade traz a possibilidade de estabelecimento entre os objetos matemáticos explícitos, especialmente a ideia de distância e lateralidade, ligados aos aspectos do cotidiano do aluno, de sua vida prática, de suas vivências, o que nos permite iniciar a inserção de elementos de Análise Combinatória, pois,

> Existe uma diversidade de fontes de referências para o ensino da matemática, tais como: problemas científicos, as técnicas, problemas, jogos e recreações vinculadas ao cotidiano do aluno, além de problemas motivados por questões internas à própria matemática. A princípio, todas essas fontes são legítimas para contextualizar a educação escolar e o indesejável é a redução do ensino a uma única fonte de referência, o que reduz o significado do conteúdo estudado. (PAIS, 2001, p. 26)

Trabalhar com situações didáticas que instiguem o aluno a pensar sobre a quantidade de caminhos para fazer determinados percursos e, mais, quantos caminhos possuem a menor distância, evidenciam a presença, implícita, de Análise Combinatória nessa atividade.

Finalizando a análise do livro do 1º ano encontramos a presença de uma atividade, constante na unidade temática números, habilidades EF01MA02 e EF01MA05, utilizada para a formação de números. Nesta atividade, os autores procuraram retomar as noções matemáticas relativas à ordem existente no conjunto dos números naturais, bem como inserir novas noções, tais como: valor posicional e a possibilidade de formar números a partir do conjunto dos algarismos que formam o sistema de numeração decimal. A atividade pede que o aluno liste todos os arranjos com dois números que podem ser obtidos a partir dos números 1, 2 e 4. Sabemos que existem 9 arranjos possíveis e sua listagem não é tão trabalhosa neste momento.

Figura 20: Formando números



Fonte: Moderna (2017, p. 164)

Aqui temos claramente as noções úteis para a compreensão dos arranjos com repetição, visto no Ensino Médio, pois, sabemos que a partir do conjunto que compreende os algarismos que formam o sistema de numeração decimal, podemos obter infinitos arranjos, os quais formarão, por exemplo, o conjunto dos números naturais.

Para Libâneo (2013) é necessário que exista uma inter-relação entre a matéria, o ensino e o estudo dos alunos, ou seja, espera-se certa reciprocidade entre esses elementos durante o ensino dos conteúdos, o que Chevallard (1991) ressalta com a necessidade de observância do entorno do sistema didático, para que seja considerada a compatibilidade entre o processo de transposição e Objeto de Saber que estamos tomando como referência.

Vale destacar que essa inter-relação, especialmente no caso da atividade em análise, pode ser extremamente útil para a desmistificação de algumas criações didáticas que são utilizadas, conforme Pais (2001, p. 16) de “forma desvinculada de sua finalidade principal”. Um exemplo pertinente de criação didática desvinculada refere-se justamente ao processo de formação de números a partir de um conjunto de algarismos, pois, ao perguntar se ordem importa, para então decidirmos sobre a escolha dos arranjos ou das combinações, estamos desconsiderando a proposta, implícita, da atividade constante na figura 19: formando números, afinal, o valor posicional de um algarismo é extremante importante para a representação de um número.

A compreensão de que uma alteração de lugar, da ordem, pode alterar o resultado, já é um passo gigantesco para compreensão da distinção existente entre os arranjos simples e as combinações simples.

Do livro do 1º ano trouxemos seis atividades que introduzem noções, algumas, implicitamente, de Análise Combinatória. Nelas encontramos elementos de permutação simples, combinações simples, arranjos com repetição e até partições.

O livro do 2º ano do Ensino Fundamental está dividido em 8 unidades, das quais iremos retirar algumas atividades, convergentes aos nossos objetivos, das seguintes unidades: unidade 1 – compreender problemas; unidade 7 – operando com números naturais.

Vejamos que a atividade proposta na p. 26, pertencente à unidade temática geometria, habilidade EF02MA12, pede para que sejam traçados caminhos que Apolo pode fazer cujo ponto de partida se dá no mercado e o ponto de chegada se dá na padaria, no entanto, temos a restrição imposta aos competidores, ou seja, passar pela casa de Lúcia. Atividades semelhantes a essa podem oportunizar ao aluno a possibilidade de criar outras restrições, além das Situações Didáticas criadas pelo professor.

Figura 21: Localização

Fonte: Moderna (2017, p. 26)

A atividade, aqui exposta, possui semelhança com a atividade constante na figura 18: trajeto no mapa, constante na p. 66 deste trabalho. Apesar da semelhança, outras estratégias são requeridas, pois aqui temos uma restrição que anteriormente não tínhamos, mas que não impede a utilização das mesmas estratégias de resolução já utilizadas anteriormente.

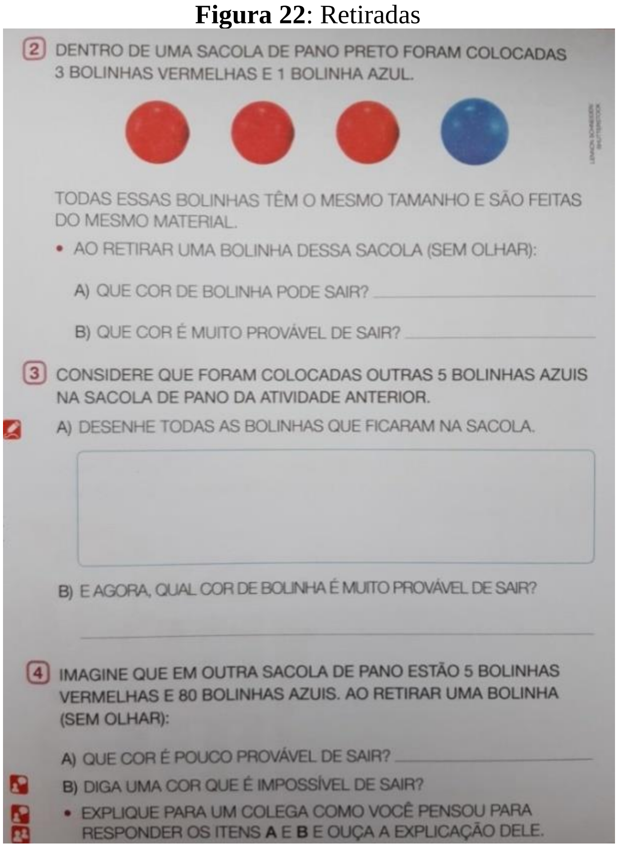
Traçar um único caminho ou um caminho mais perto para a realização do trajeto, não impõe muita dificuldade, no entanto, a sua utilização em situações didáticas de outras fases ou etapas da Educação Básica, pode ser feita com o objetivo de encontrar o trajeto pelo menor caminho ou ainda descobrir quantos são os menores trajetos existentes. Nesta atividade a criação de situações didáticas úteis para o ensino das técnicas de contagem e, que podem ser retomadas no Ensino Médio, possibilita a articulação com outros objetos de saber matemático, bem como outras disciplinas, como, por exemplo, a Geografia, pois, aqui podemos nos valer das coordenadas geográficas para nossa estratégia de resolução. Essa articulação,

> Exige uma dupla explicitação dos vínculos do conteúdo estudado pelo aluno, tanto em relação a outras disciplinas, como em relação às situações da vida do cotidiano. Dessa maneira, não se trata de imaginar uma aprendizagem delimitada ao contexto científico. Por outro lado, o desafio pedagógico envolve também a aprendizagem de conceitos cujo significado pode estar mais próximo da abstração do que da dimensão experimental. O inconveniente está na centralização em um desses extremos. (PAIS, 2001, p. 21).

A solução de nossas novas indagações quanto ao número de caminhos mais curtos, oriunda das possíveis situações didáticas criadas a partir da atividade em questão, requer a utilização da permutação com repetição e a utilização do Princípio Fundamental da Contagem – PFC, entretanto, há que se ressaltar a nossa concordância com Pais (2001) quando cita o inconveniente da centralização da atividade, ou na contextualização desvinculada da sua finalidade principal, ou na abstração exagerada, que tem mais proximidade com o Saber Científico do que com o Saber Escolar.

A atividade 2, da figura 21, p. 27, constante na unidade temática probabilidade e estatística, habilidade EF02MA21, pede que o aluno faça a retirada de apenas uma bolinha que se encontra dentro de uma sacola. Após a retirada é perguntado: (a) que cor de bolinha pode sair? (b) que cor é muito provável de sair?

Figura 22: Retiradas



2 DENTRO DE UMA SACOLA DE PANO PRETO FORAM COLOCADAS 3 BOLINHAS VERMELHAS E 1 BOLINHA AZUL.

TODAS ESSAS BOLINHAS TÊM O MESMO TAMANHO E SÃO FEITAS DO MESMO MATERIAL.

- AO RETIRAR UMA BOLINHA DESSA SACOLA (SEM OLHAR):

A) QUE COR DE BOLINHA PODE SAIR? ______

B) QUE COR É MUITO PROVÁVEL DE SAIR? ______

3 CONSIDERE QUE FORAM COLOCADAS OUTRAS 5 BOLINHAS AZUIS NA SACOLA DE PANO DA ATIVIDADE ANTERIOR.

A) DESENHE TODAS AS BOLINHAS QUE FICARAM NA SACOLA.

B) E AGORA, QUAL COR DE BOLINHA É MUITO PROVÁVEL DE SAIR?

______

4 IMAGINE QUE EM OUTRA SACOLA DE PANO ESTÃO 5 BOLINHAS VERMELHAS E 80 BOLINHAS AZUIS. AO RETIRAR UMA BOLINHA (SEM OLHAR):

A) QUE COR É POUCO PROVÁVEL DE SAIR? ______

B) DIGA UMA COR QUE É IMPOSSÍVEL DE SAIR?

- EXPLIQUE PARA UM COLEGA COMO VOCÊ PENSOU PARA RESPONDER OS ITENS **A** E **B** E OUÇA A EXPLICAÇÃO DELE.

Fonte: Moderna (2017, p. 27)

O raciocínio que se pretende formar no aluno vai além do simples ato de escolher, estão ligados às noções introdutórias de probabilidades, utilizadas nesta etapa, objetos físicos da vivência do aluno, pois concordamos que,

> A educação escolar deve se iniciar pela vivência do aluno, mas isso não significa que ela deva ser reduzida ao saber cotidiano. No caso da matemática, consiste em partir do conhecimento dos números, das medidas e da geometria, contextualizado em situações próximas do aluno. O desafio didático consiste em estruturar condições para que ocorra uma evolução desta situação inicial rumo aos conceitos previstos. (PAIS, 2001, p. 21).

Vale ressaltar que Pais (2001) chama a atenção para que, ao fazer a contextualização, não ocorra a substituição do saber escolar pelo saber do cotidiano do aluno, pois para o autor, esses saberes são distintos e temos que tomar cuidado com o que ele chama de vigilância didática, pois sua aplicação quando se dá de forma,

> Deslocada de seu território original torna-se estéril, perde seu significado, obscurece sua finalidade e confunde a solução do problema estudado naquele momento. Assim, é preciso sempre estar atento à eficiência de uma interpretação pedagógica, o que depende fortemente da consciência de quem analisa o fenômeno. Em suma, é necessário o exercício de uma *vigilância didática.* Essa é uma das atribuições do trabalho docente, que deve estar ancorado tanto nos saberes científicos como em uma concepção educacional. (PAIS, 2001, p. 18)

Na atividade 3, da atividade em análise, apesar de ter semelhança com a atividade 2, trata-se de uma questão tipicamente de probabilidade, ao trazer, a ideia de eventos impossíveis, bem como a maior probabilidade de ocorrência de um evento. O que não impede de utilizá-la em uma atividade de Análise Combinatória, afinal, algumas questões envolvendo probabilidades, para a formação de seu espaço amostral, faz, por exemplo, uso das combinações simples.

Quanto ao deslocamento sugerido por Pais (2001), concordando com Chevallard, temos a dessincretização[22] do saber, ou seja, nessa etapa da Transposição Didática "as especializações da prática da criação teórica são substituídas por especializações pertinentes às práticas da aprendizagem" (LEITE, 2004, p. 48).

Por fim, encerramos a análise do livro do 2° ano com a atividade constante na p. 150, pertencente à unidade temática números, habilidade EF02MA05, a qual descreve um problema envolvendo significados da subtração, ou seja, retirar unidades de um conjunto e formar subconjuntos. A atividade sugere que Fábio distribua sua coleção de 24 carrinhos entre os seus oito sobrinhos, para tanto pediu ajuda ao seu amigo.

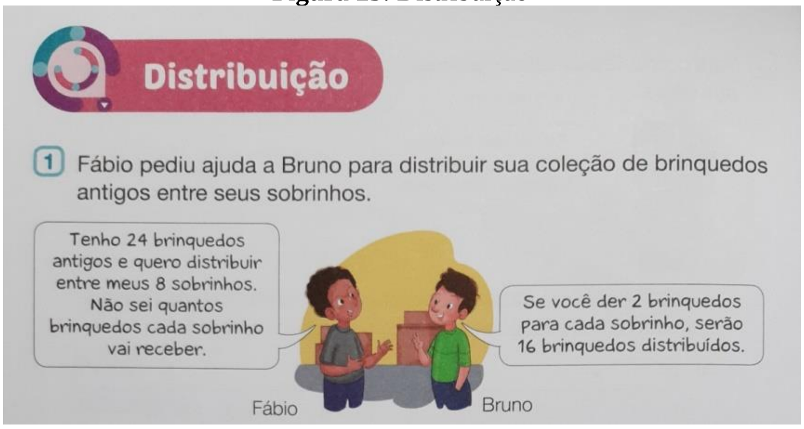
Vejamos que o problema, em primeiro momento, trata-se de retirar um a um e distribuir aos sobrinhos, pois, bem sabemos que a divisão dos carrinhos entre os sobrinhos não irá deixar resto, ou seja, após a divisão, todos ficarão com a mesma quantidade. Nesta fase da educação básica, ainda não foram inseridas as ideias de divisão, portanto, a resolução terá que seguir o caminho da subtração. Vejamos que, à proporção que o aluno avança nas fases e etapas da Educação Básica, novas técnicas, novos conceitos vão sendo inseridos nas possibilidades do aluno encarar a resolução de um problema.

---

[22] Tradução de "desincretizacióon"

Ao se deparar com as ideias da divisão, certamente o aluno terá mais possibilidades de resolver esse problema matemático. O que nos permite avançar, com o problema em questão, e propor algo a mais, como por exemplo: de quantas maneiras Fábio pode distribuir os brinquedos?

Figura 23: Distribuição



Fonte: Moderna (2017, p. 150)

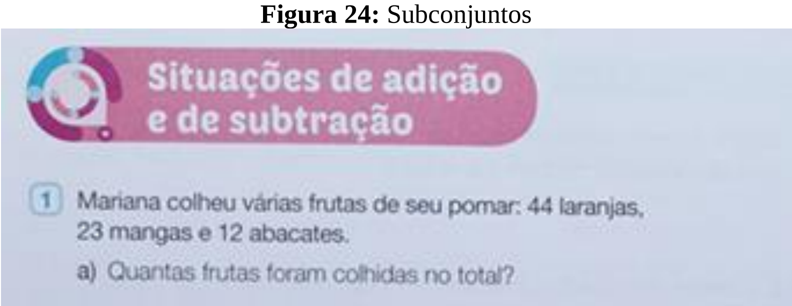
Nesta atividade iremos ressaltar a evidente possibilidade de apresentar ao aluno a noção de conjuntos, entendido intuitivamente, conforme Alencar Filho (1913, p. 15, grifo nosso), "como toda coleção bem definida de objetos, ***não importa que natureza***, considerados globalmente". Chamar a atenção para uma tentativa de se trabalhar com essas ideias tem a sua importância para a compreensão, no Ensino Médio, de que as combinações simples são subconjuntos, daí uma das justificativas da utilização da criação didática que indaga sobre a importância da ordem dos elementos.

É claro que não esperamos que haja uma formalização do conceito de conjunto, mas esperamos que indagações como: por que os brinquedos estão juntos? Ou porque estão separados dos demais? Sejam feitas com a intenção de que o aluno perceba que a formação de agrupamentos depende de uma regra bem clara que os permitam estarem juntos e mais, posso dividi-los em agrupamentos menores, intuitivamente, formando conjuntos menores, os quais podem ser chamados de subconjunto.

Resta-nos claro aqui que elementos de Análise Combinatória podem ser inseridos, sem muita dificuldade, nesse problema, tornando-o familiar ao aluno do Ensino Médio, visto que já o conhece, pois, já lhe foi apresentado em etapas anteriores sob a forma de formação de agrupamentos, ou formação de subconjuntos.

A atividade da figura 24, que consta na página 34 do livro do 3º ano, pertence à unidade temática números, habilidade EF03MA03, e traz situações de adição e subtração. Apesar de induzir o aluno a recorrer ao uso do algoritmo da adição, claramente temos um problema que impõe ao aluno a percepção de união de conjuntos, pois ao somar os elementos do conjunto das laranjas, das mangas e, dos abacates, teremos um conjunto, que poderemos chamar, por exemplo, de conjunto das frutas. A percepção das noções de conjuntos aparece de forma implícita, pois, intuitivamente, ao somar a quantidade de frutas, o aluno estará iniciando, por mais que não se dê conta, a construção das noções do princípio aditivo.

Figura 24: Subconjuntos



Situações de adição e de subtração

1 Mariana colheu várias frutas de seu pomar: 44 laranjas, 23 mangas e 12 abacates.

a) Quantas frutas foram colhidas no total?

Fonte: Moderna (2017, p. 34)

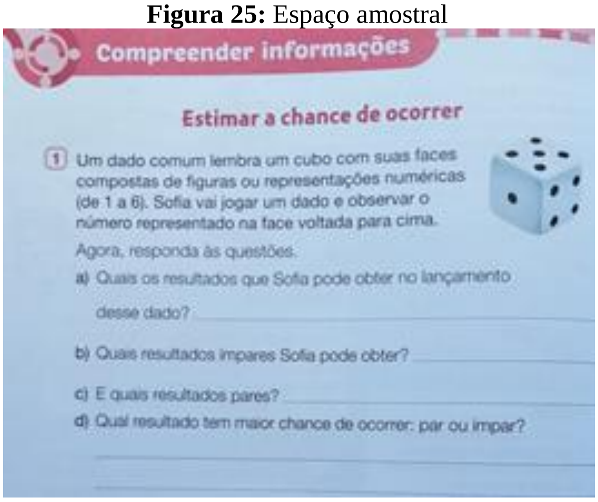
Vejamos uma possibilidade de uso para essa mesma atividade em etapas posteriores, após o aluno ter tido contato com as noções introdutórias de conjuntos. Se substituirmos os questionamentos por: a) de quantas maneiras Mariana pode escolher uma fruta? b) de quantas maneiras Mariana pode escolher 3 frutas, sendo uma laranja, uma manga e, um abacate? As respostas para esses novos questionamentos, sugerem o uso do princípio aditivo e o uso das combinações simples.

Vale lembrar que a utilização do princípio aditivo para responder de quantas formas Mariana pode escolher uma fruta, retoma às mesmas ideias da adição da quantidade de frutas, pois, para Bisognin e Tolio (2017, p. 725), “aprender a contar relacionando grupos, ou seja, conjuntos de certos objetos, é a maneira como as crianças aprendem a contar”. No entanto, agora, partindo do pressuposto que o aluno já possua a compreensão das ideias introdutórias de conjuntos, necessárias para a compreensão desse princípio. Em relação às maneiras de Mariana escolher uma fruta, a restrição tornou-se necessária para a utilização das combinações simples, mas poderíamos tê-la deixado sem a restrição, assim, permitindo o uso das combinações completas. Ressaltar essas possibilidades torna-se importante para que o leitor tenha a percepção de que um objeto de ensino possui um passado e que, a partir de sua compreensão, poderá retornar em outros níveis ou etapas de ensino, revestido de outros elementos.

Finalizando a análise do livro do 3º ano, trouxemos a atividade constante na figura 25, constante na página 176, pertencente à unidade temática probabilidade e estatística, habilidade EF03MA25.

A atividade propõe que sejam efetuados lançamentos de um dado[23]e sejam observados os valores numéricos constante em sua face que, após o lançamento, ficará voltada para cima. Como cada face de um dado recebe uma única representação numérica, iniciando em 1 e terminando em 6, a atividade pede, expressamente, embora não seja a intencionalidade, a descrição do espaço amostral do lançamento único de um dado.

Figura 25: Espaço amostral



Compreender informações

Estimar a chance de ocorrer

1 Um dado comum lembra um cubo com suas faces compostas de figuras ou representações numéricas (de 1 a 6). Sofia vai jogar um dado e observar o número representado na face voltada para cima.

Agora, responda às questões.

a) Quais os resultados que Sofia pode obter no lançamento desse dado?

b) Quais resultados ímpares Sofia pode obter?

c) E quais resultados pares?

d) Qual resultado tem maior chance de ocorrer: par ou ímpar?

Fonte: Moderna (2017, p. 176)

Nesta etapa de ensino, as noções de acaso, estimativas de chances de ocorrer ou experimentos aleatórios, são iniciadas de forma progressiva, como podemos ver na atividade constante na página 176 do livro em análise. No entanto, sabemos que ao modificar ou criar novas situações didáticas, elementos de análise combinatória podem aparecer, como por exemplo, a descrição de um espaço amostral de vários lançamentos ou vários dados, pode acabar exigindo o uso das permutações com repetição. Por exemplo: no lançamento de um dado, 5 vezes, um após a outra, quantas são as possibilidades de sair 3 faces pares e 2 faces ímpares? Para ilustrar a importância da compreensão dessa atividade em momentos posteriores, vejamos duas possíveis soluções. 1 - Sequência (par, par, par, ímpar, ímpar); 2 – sequência (par, par, ímpar, ímpar). Note que não podemos garantir que os números saiam nessa ordem, entretanto, recorrendo à permutação com repetição, podemos garantir a existência de 10 sequências que possuem as propriedades que impusemos.

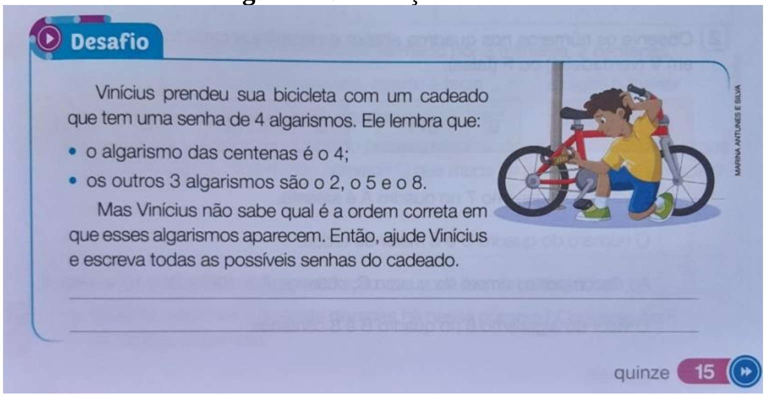
No livro do 4º ano, na unidade temática números, habilidade EF04MA08 temos pela primeira vez, expressamente, uma habilidade relacionada aos problemas de contagem. A introdução dessa habilidade se dá pela atividade constante na figura 25, na qual é pedida a

[23] Objeto com o formato de um cubo, cujas faces são compostas por representações numéricas em forma de pontos, sem repetição, iniciando em 1 e terminando em 6.

descrição ou enumeração das possibilidades de abertura de um cadeado que possui uma senha de 4 algarismos.

Nessa atividade, na qual o autor resgata as ideias de valor posicional para fixar o algarismo 4 na ordem das centenas, temos implicitamente as ideias do princípio multiplicativo e dos fatoriais. Para a sua resolução, nesta fase de ensino, o aluno terá que recorrer à listagem dos elementos, obedecendo à restrição do problema, bem como a realização da permutação dos algarismos disponíveis.

Figura 26: formação de senha



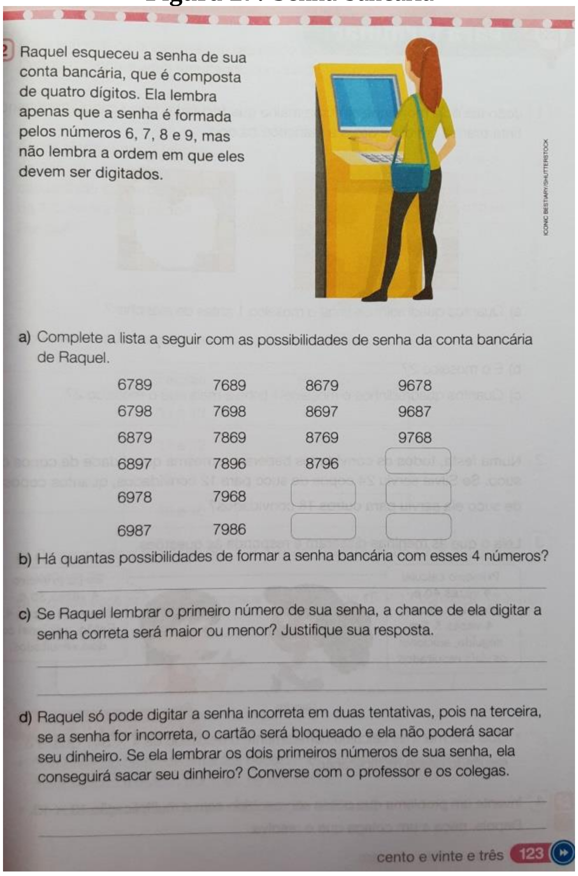
Fonte: Moderna (2017, p. 15)

Listar as possibilidades, neste momento, é a maneira mais rápida de resolver esse problema, pois, os alunos ainda não tiveram contato com a enunciação do PFC. Além do mais, serão, no máximo, 6 tentativas até que Vinícius encontre a senha correta.

Em outras etapas da educação básica, as ideias aqui compreendidas, serão de extrema importância, pois, ao se deparar com problemas que envolvam grande quantidade de dados ou possibilidades, o aluno perceberá o quão enfadonho é listar ou enumerar todas as possibilidades, pois, para Morgado et al (1991, p. 1) as técnicas de contagem enquanto parte da “Análise Combinatória, são conceitos que permitem resolver um tipo de problemas de Analise Combinatória: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos”. Entretanto, salientamos que a partir das noções simples do princípio multiplicativo, privilegiando raciocínios indutivos, semelhantes ao da atividade proposta (fig. 25: formação de senha), é possível chegar a compreensão das técnicas as quais Morgado et al (1991) se refere.

A atividade constante à página 123, desse mesmo livro, pertence à unidade temática probabilidade e estatística, habilidade EF04MA26, cuja descrição traz as ideias da análise de chances de eventos aleatórios. A atividade solicita que sejam adotadas estratégias para a solução do problema de Raquel, ou seja, ela se lembra dos algarismos que formam a senha, mas não se lembra da sequência correta. Em um primeiro momento, é pedido para que sejam listadas as possibilidades que ainda não foram formadas, o que exigirá apenas concentração e percepção de sequências que ainda não foram formadas.

Figura 27: Senha bancária



2 Raquel esqueceu a senha de sua conta bancária, que é composta de quatro dígitos. Ela lembra apenas que a senha é formada pelos números 6, 7, 8 e 9, mas não lembra a ordem em que eles devem ser digitados.

a) Complete a lista a seguir com as possibilidades de senha da conta bancária de Raquel.

6789	7689	8679	9678
6798	7698	8697	9687
6879	7869	8769	9768
6897	7896	8796	
6978	7968		
6987	7986		

b) Há quantas possibilidades de formar a senha bancária com esses 4 números?

c) Se Raquel lembrar o primeiro número de sua senha, a chance de ela digitar a senha correta será maior ou menor? Justifique sua resposta.

d) Raquel só pode digitar a senha incorreta em duas tentativas, pois na terceira, se a senha for incorreta, o cartão será bloqueado e ela não poderá sacar seu dinheiro. Se ela lembrar os dois primeiros números de sua senha, ela conseguirá sacar seu dinheiro? Converse com o professor e os colegas.

cento e vinte e três 123

Fonte: Moderna (2017, p. 123)

Um aluno atento perceberá que na primeira coluna, todos as sequências começam com o algarismo 6, na segunda coluna, todas as sequências começam com o algarismo 7, na terceira coluna, todas as sequências começam com o algarismo 8 e, na quarta coluna, todas as sequências começam com o algarismo 9. Ressalte-se, ainda, que a estratégia adotada, pelo autor, para a listagem das sequências segue o padrão que acabamos de descrever.

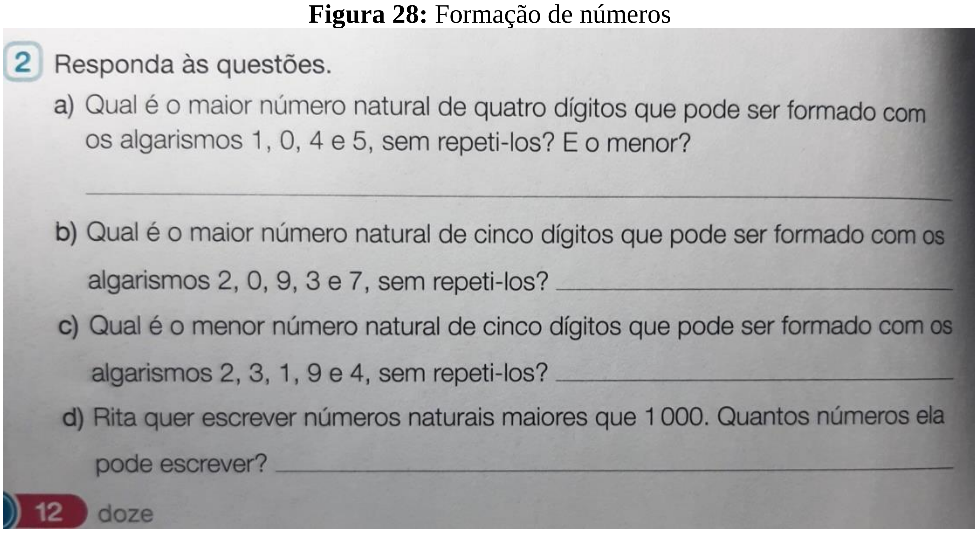
No item c, desta mesma atividade, há a inserção de uma nova restrição ao problema, tornando-o mais simples, pois, ao fixar o primeiro algarismo, o número de possibilidades será reduzido, o que nos leva a justificar o item d, que impõe duas restrições, a saber: o conhecimento do primeiro dígito, o conhecimento do segundo dígito, o conhecimento dos algarismos disponíveis para a formação da senha e a quantidade de dígitos da senha. A partir do conhecimento dessas restrições é possível responder que, desde que Raquel não digite errado, é possível a efetivação do saque, antes do bloqueio da senha.

No último ano da primeira fase da segunda etapa da educação básica, temos na atividade 2, página 12, do livro do 5º ano uma atividade que pertence à unidade temática números, habilidade EF05MA01: ler, escrever e ordenar números naturais.

A atividade pede que sejam formados números naturais de acordo com as imposições do enunciado do problema. Apesar de, aparentemente, se tratar de um problema simples, algumas estratégias se forem adotadas de forma equivocadas, podem tornar a resolução extremamente trabalhosa.

Para responder os itens da questão, faremos alguns comentários à luz dos conhecimentos mais avançados de Análise Combinatória, pois, ao identificar os elementos de Análise Combinatória na atividade proposta, recorremos ao que Pais (2001, p. 26) chama de epistemologia do professor, ou seja, "as concepções referentes à disciplina com que trabalha esse professor, oriundas do plano estrito de sua compreensão e que conduzem uma parte essencial de sua postura pedagógica, em relação ao entendimento dos conceitos ensinados aos alunos". Vejamos que o problema pede a formação de um número de quatro ordens (unidade de milhar, centena, dezena e unidade), até então, são ideias que revestem o sistema de numeração decimal, bem como as noções de valor posicional, ambas já foram apresentadas ao aluno.

Figura 28: Formação de números


2 Responda às questões.

a) Qual é o maior número natural de quatro dígitos que pode ser formado com os algarismos 1, 0, 4 e 5, sem repeti-los? E o menor?

b) Qual é o maior número natural de cinco dígitos que pode ser formado com os algarismos 2, 0, 9, 3 e 7, sem repeti-los?

c) Qual é o menor número natural de cinco dígitos que pode ser formado com os algarismos 2, 3, 1, 9 e 4, sem repeti-los?

d) Rita quer escrever números naturais maiores que 1 000. Quantos números ela pode escrever?

12 doze

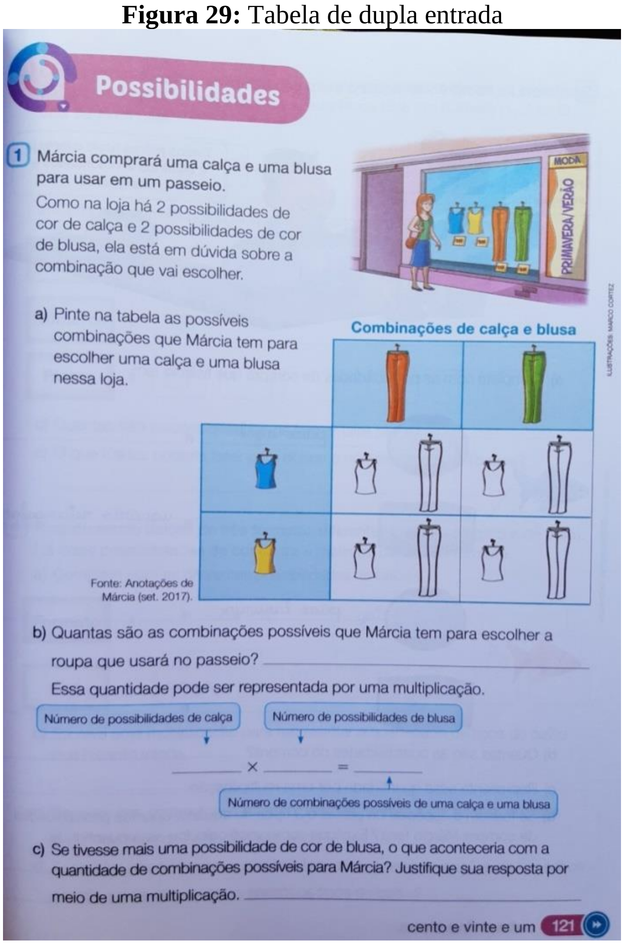
Fonte: Moderna (2017, p. 12)

No item a, é esperado que o aluno, tenha a percepção da impossibilidade de iniciar o número com o algarismo zero, logo, neste item, espera-se que a resolução tenha início pela ordem das unidades de milhar, chegando, por meio das noções de valor posicional, ao maior e menor número, 5410 e 1045, respectivamente. A resolução dos demais itens segue a mesma estratégia de resolução adotada para o item a.

Apesar de nosso intuito não ser a realização da resolução dessas atividades, ressalte-se que, apesar de não se encontrar expressamente na atividade, as noções de Análise Combinatória se fizeram presentes aqui. Entretanto, a compreensão adequada das ideias que formulam ou permeiam o entendimento do sistema de numeração decimal, tornou-se extremamente eficiente para a chegada à solução do problema.

Finalizando a análise dos livros do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, temos mais uma atividade, pertencente às unidades temáticas: números e, probabilidade e estatística, habilidades EF05MA09 e EF05MA25. Nessa atividade, intitulada: possibilidades, temos explicitamente, elementos de Análise Combinatória. A atividade pede que sejam fornecidas as combinações, de calças e blusas, possíveis para Márcia comprar.

Figura 29: Tabela de dupla entrada



Possibilidades

1 Márcia comprará uma calça e uma blusa para usar em um passeio.

Como na loja há 2 possibilidades de cor de calça e 2 possibilidades de cor de blusa, ela está em dúvida sobre a combinação que vai escolher.

a) Pinte na tabela as possíveis combinações que Márcia tem para escolher uma calça e uma blusa nessa loja.

Combinações de calça e blusa

Fonte: Anotações de Márcia (set. 2017).

b) Quantas são as combinações possíveis que Márcia tem para escolher a roupa que usará no passeio? ____

Essa quantidade pode ser representada por uma multiplicação.

Número de possibilidades de calça — Número de possibilidades de blusa

____ × ____ = ____

Número de combinações possíveis de uma calça e uma blusa

c) Se tivesse mais uma possibilidade de cor de blusa, o que aconteceria com a quantidade de combinações possíveis para Márcia? Justifique sua resposta por meio de uma multiplicação. ____

cento e vinte e um 121

Fonte: Moderna (2017, p. 121)

Explicitamente, temos a presença das combinações simples, aqui, introduzidas por meio do uso da tabela de dupla entrada, que nesta etapa de ensino, torna-se extremamente valiosa, uma vez que estamos trabalhando com uma pequena quantidade de dados.

Apesar do dispositivo denominado: tabela de dupla entrada, estar limitado ao uso de dois conjuntos, permitido apenas a formação de pares ordenados, ele se constitui, se utilizado de forma adequada, uma ampla porta de entrada para a compreensão do processo de escolha, que envolve as combinações simples, estudadas no Ensino Médio.

Em relação ao item b, temos a presença, implícita para o aluno, do Princípio Fundamental da Contagem – PFC. Embora não esteja sob o seu enunciado formal, normalmente visto nos livros didáticos, sua presença é reforçada pela multiplicação, que tem como fatores, as quantidades de elementos dos dois conjuntos. A compreensão desse princípio nesta etapa terá grande importância na generalização do PFC, dada a possibilidade de expansão de sua utilização para n conjuntos.

Vimos que, ao longo dos anos iniciais, a Análise Combinatória esteve presente nos livros didáticos dessa fase de ensino, então, faremos a partir de agora, a análise dos livros dos anos finais do Ensino Fundamental. Iniciaremos com o livro didático do 6º ano, que representa a entrada do aluno na segunda fase do Ensino Fundamental.

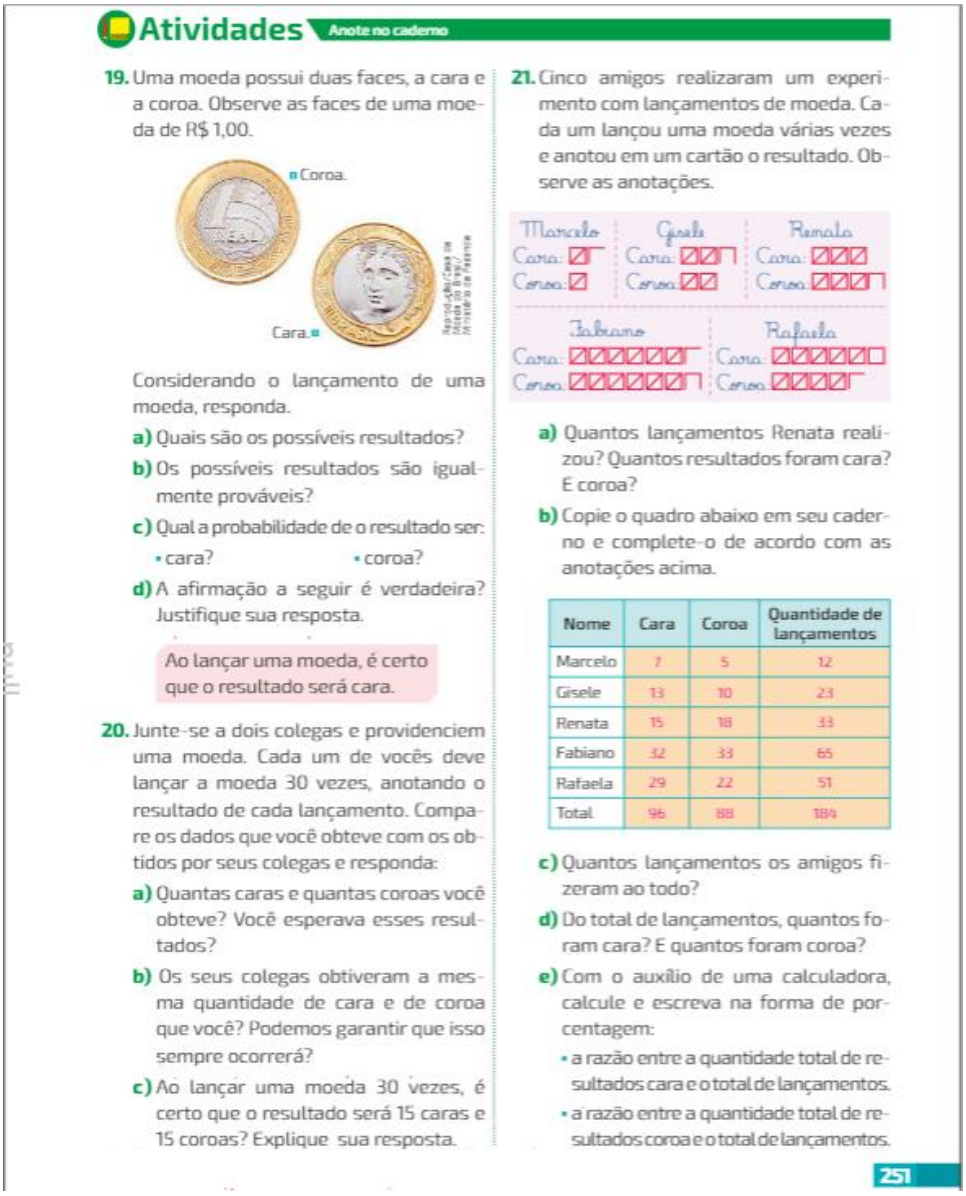
A atividade que consta na página 251, pertence à unidade temática probabilidade e estatística, habilidade EF06MA30, a qual sugere a observação dos resultados obtidos a partir de experimentos aleatórios utilizando moedas. É perceptível que a intencionalidade dessa atividade é desenvolver a habilidade de observar as possibilidades dos resultados possíveis[24] durante a realização dos experimentos, no entanto, o uso de objetos concretos manipuláveis permite ao aluno uma compreensão mais objetiva da formação de um espaço amostral, visto que os resultados serão obtidos pela observação e não, diretamente, pela abstração.

Trata-se, essencialmente, de problemas de probabilidade, mas que podem requerer, em algum momento, o uso do raciocínio combinatório para a sua resolução. Vejamos essa necessidade, a partir de uma indagação comumente encontrada em outras etapas, ou até outros níveis, de ensino. Por exemplo: ao lançar, uma moeda honesta, seis vezes consecutiva qual é a probabilidade de se obter exatamente quatro caras e duas coroas? A resolução acaba solicitando o uso do princípio multiplicativo, para a formação do espaço amostral.

A formação do espaço amostral se inicia pelo número de possibilidades obtidas no primeiro lançamento, multiplicada pelo número de possibilidade do segundo lançamento, multiplicada pelo número de possibilidade do terceiro lançamento, multiplicada pelo número de possibilidade do quarto lançamento, multiplicada pelo número de possibilidade do quinto lançamento, multiplicada pelo número de possibilidade do sexto lançamento, totalizando 64 possibilidades.

Figura 30: Espaço amostral – moedas

[24] Também conhecido como espaço amostral



Atividades Anote no caderno

19. Uma moeda possui duas faces, a cara e a coroa. Observe as faces de uma moeda de R$ 1,00.

Considerando o lançamento de uma moeda, responda.

a) Quais são os possíveis resultados?

b) Os possíveis resultados são igualmente prováveis?

c) Qual a probabilidade de o resultado ser:

- cara?
- coroa?

d) A afirmação a seguir é verdadeira? Justifique sua resposta.

Ao lançar uma moeda, é certo que o resultado será cara.

20. Junte-se a dois colegas e providenciem uma moeda. Cada um de vocês deve lançar a moeda 30 vezes, anotando o resultado de cada lançamento. Compare os dados que você obteve com os obtidos por seus colegas e responda:

a) Quantas caras e quantas coroas você obteve? Você esperava esses resultados?

b) Os seus colegas obtiveram a mesma quantidade de cara e de coroa que você? Podemos garantir que isso sempre ocorrerá?

c) Ao lançar uma moeda 30 vezes, é certo que o resultado será 15 caras e 15 coroas? Explique sua resposta.

21. Cinco amigos realizaram um experimento com lançamentos de moeda. Cada um lançou uma moeda várias vezes e anotou em um cartão o resultado. Observe as anotações.

Marcelo — Cara: / Coroa:
Gisele — Cara: / Coroa:
Renata — Cara: / Coroa:
Fabiano — Cara: / Coroa:
Rafaela — Cara: / Coroa:

a) Quantos lançamentos Renata realizou? Quantos resultados foram cara? E coroa?

b) Copie o quadro abaixo em seu caderno e complete-o de acordo com as anotações acima.

Nome	Cara	Coroa	Quantidade de lançamentos
Marcelo	7	5	12
Gisele	13	10	23
Renata	15	18	33
Fabiano	32	33	65
Rafaela	29	22	51
Total	96	88	184

c) Quantos lançamentos os amigos fizeram ao todo?

d) Do total de lançamentos, quantos foram cara? E quantos foram coroa?

e) Com o auxílio de uma calculadora, calcule e escreva na forma de porcentagem:

- a razão entre a quantidade total de resultados cara e o total de lançamentos.
- a razão entre a quantidade total de resultados coroa e o total de lançamentos.

251

Fonte: Scipione (2018, p. 251)

Vimos que a formação do número de casos possíveis recorreu ao uso do princípio multiplicativo. Quanto à formação do número de casos favoráveis, teremos que recorrer à ideia já trazida na atividade em questão, ou seja, recorrer à percepção do que queremos, pois, a partir da formação do tipo de resultados que estamos procurando é que poderemos finalizar a resolução. Temos na atividade 30, a formação do raciocínio que acabamos que expor, pois, nessa foi pedido para listar todos os eventos. Ocorre que agora, para a atividade que propusemos, queremos sequências do tipo: (k, k, c, k, k, c)[25], o que nos leva a probabilidade de ocorrência dessa sequência de resultados é dada pela fração: $\frac{1}{64}$. No entanto, essa é apenas uma configuração dos resultados, afinal, não podemos garantir que os resultados saiam nessa ordem,

[25] Utilizamos a letra c para indicar "cara" e a letra k para indicar "coroa"

logo, temos que recorrer à permutação com repetição para auxiliar na formação do número de sequências desejáveis ou favoráveis.

Ao utilizar a permutação com repetição temos: $P_6^{4,2} = 15$ sequências do tipo que queremos, portanto, chegamos, com o auxílio de uma das técnicas de contagem, ao resultado esperado pela questão, ou seja, chegamos à fração $\frac{15}{64}$.

A atividade constante na página 252, pertencente à unidade temática probabilidade e estatística, habilidade EF06MA30, traz todas as fichas com números de dois algarismos formados a partir dos algarismos 2, 3, 6 e 7. Na sequência é pedido o cálculo das probabilidades, conforme itens a, b, c, d, e.

Figura 31: Formação de números

27. Olívia escreveu em fichas todos os números de dois algarismos que podem ser compostos com os algarismos 2, 3, 6 e 7.

22 23 26 27 32 33 36 37 62 63 66 67 72 73 76 77

Com as faces voltadas para baixo, as fichas foram embaralhadas e Olívia retirou uma delas. Qual é a probabilidade de a ficha retirada por ela conter um número:

a) ímpar?
b) par?
c) maior do que 70?
d) menor do que 35?
e) primo?

252

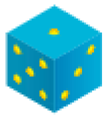
Fonte: Scipione (2018, p. 252)

Nesta atividade já vieram listados todos os números de dois algarismos que podem ser formados a partir dos algarismos 2, 3, 6 e 7, poderíamos, posteriormente, pedir que o aluno enumere os elementos dessa lista, o que já vimos em atividades constantes nos livros dos Anos Iniciais, no entanto, caso isso seja solicitado, iremos nos adiantar e recorrer ao uso do arranjo com repetição[26], objetos de ensino que fazem parte do Ensino Médio.

A atividade a seguir, constante na página 253, do livro do 6º ano, pertence à unidade temática probabilidade e estatística, habilidade EF06MA30, e traz a descrição do espaço amostral do lançamento de um dado, uma vez após a outra. Nesta listagem, que constam a soma dos números obtidos nas faces voltadas para cima, temos o uso da tabela de dupla entrada, dispositivo extremamente útil e seguro para os objetivos dessa atividade.

Figura 32: Tabela de dupla entrada – arranjos com repetição

[26]Arranjo com repetição: Todos os elementos podem aparecer repetidos em cada grupo de p elementos.
Fórmula: $A_r(m,p) = m^p$.



28. Certo jogo consiste em lançar duas vezes o mesmo dado e adicionar os pontos obtidos na face voltada para cima, vencendo o participante que obtiver a menor pontuação. O quadro ao lado apresenta as possibilidades de pontuação que um participante pode obter.

a) Quantas possibilidades de resultados diferentes uma pessoa pode obter nesse jogo? Quais são essas possibilidades?

b) Qual é a probabilidade de uma pessoa obter:

- 10 pontos?
- 5 pontos?
- 12 pontos?

2ª lançamento \ 1ª lançamento	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Ilustrações: Sergio L. Filho

c) Em uma partida disputada por dois participantes, o 1º deles obteve nos lançamentos as faces ⚂ e ⚄. Qual é a probabilidade de o 2º participante:

- vencer a partida?
- empatar a partida?
- perder a partida?

Fonte: Scipione (2018, p. 253)

A obtenção da resposta ao item a, torna-se relativamente simples, pois, basta que o aluno conte o número de pares ordenados que podem ser formados com os possíveis resultados obtidos a partir dos lançamentos. Para essa atividade, dois lançamentos, a tabela de dupla entrada acaba sendo suficiente. No entanto, vale ressaltar que as ideias que estão por trás desse dispositivo referem-se ao Princípio Multiplicativo.

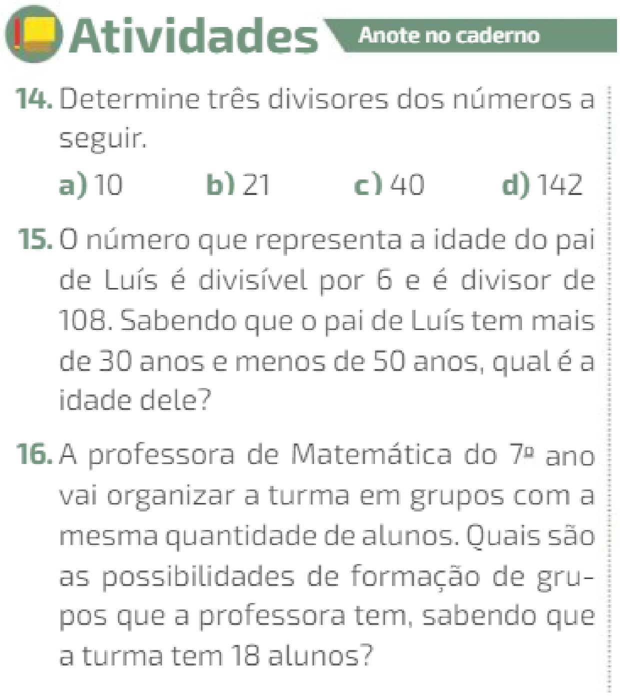
Além desse importante princípio, ressaltamos a existência da possibilidade da utilização de uma técnica de contagem, largamente utilizada no Ensino Médio, que permite a formação de listas de k objetos entre n $(n \geq 1, k \geq 0)$[27], além disso a sua utilização permite a expansão para n lançamentos, ficando, nesse caso, 6^k, onde k é o número de lançamento que queremos.

A atividade constante na página 18, do livro do 7º ano, da editora Scipione (2018), pertence à unidade temática números, habilidade EF07MA01. No item a, é pedido apenas três divisores dos números dados, entretanto, a determinação de todos os divisores pode ser feita sem a necessidade de listá-los, o que pode até ser útil na determinação da quantidade de divisores solicitada.

---

[27] Arranjo com repetição

Figura 33: Quantidade de divisores



Atividades Anote no caderno

14. Determine três divisores dos números a seguir.

a) 10 **b)** 21 **c)** 40 **d)** 142

15. O número que representa a idade do pai de Luís é divisível por 6 e é divisor de 108. Sabendo que o pai de Luís tem mais de 30 anos e menos de 50 anos, qual é a idade dele?

16. A professora de Matemática do 7º ano vai organizar a turma em grupos com a mesma quantidade de alunos. Quais são as possibilidades de formação de grupos que a professora tem, sabendo que a turma tem 18 alunos?

Fonte: Scipione (2018, p. 18)

A determinação de todos os divisores de um número inteiro pode ser facilmente feita a partir do princípio multiplicativo. Ressaltamos, mais uma vez, que o objetivo aqui não é utilizar técnicas de contagem para a resolução desses problemas, no entanto, pretendemos identificar as possibilidades de criação de situações didáticas em outras etapas da Educação Básica, que possam retomar o que consta proposto aqui, na atividade em análise.

Quanto ao problema proposto no item 16, da atividade em questão, ressaltamos que a atividade consiste em encontrar o número de divisores positivos do número 18. Nesta etapa de ensino, o aluno terá que recorrer à listagem de todos os divisores, o que não será mais necessário quando lhe for apresentado o princípio multiplicativo. Vejamos como fica a resolução a partir das ideias do PFC. Inicialmente, começamos formando o multiconjunto[28] $X = \{2, 3, 3\}$ cujos elementos são os fatores primos utilizados na composição do número 18. Escrevendo os elementos em forma de potência, de acordo com processo de decomposição em fatores primos, temos que os divisores de 18 são números da forma: $2^{\alpha}.3^{\beta}$, onde: $\alpha = \{0, 1\}$ e $\beta = \{0, 1,2\}$, por fim, a quantidade de divisores do número 18 é dada por: $|\alpha|.|\beta| = 2.3 = 6$. Vale destacar que esse procedimento é visto no Ensino Médio, claro, sem as ideias de multiconjunto, conforme vimos aqui. Também podemos enxergar a maneira de encontrar os divisores da

[28]Multiconjunto é um “conjunto” com possíveis repetições de elementos, ou seja, no multiconjunto cada objeto pode ter várias cópias.

seguinte maneira: i) pegamos a multiplicidade de cada elemento e adicionamos uma unidade, pois essa adição refere-se à possibilidade de o expoente ser igual a zero; ii) feito o procedimento do item i, é só fazer o uso do princípio multiplicativo e chegar à resposta.

Trazer essas ideias tem como objetivo ressaltar a importância de que o aluno saiba contar o número de divisores de um número, o que na atividade em análise, está sendo feita de maneira intuitiva, recorrendo às noções de divisão de números naturais, mas que, se compreendidas, poderão ser extremamente úteis em outras etapas ou níveis de ensino.

Iniciamos a análise do 8º ano, com uma atividade pertencente à unidade temática números, objeto de conhecimento denominado polígonos regulares. Associado a esse objeto de conhecimento, após revisão da BNCC, não encontramos habilidade que tratam das diagonais de polígonos regulares. No entanto, entendemos que a atividade tem proximidade com a habilidade EF08MA11, que faz parte da unidade temática álgebra e, conforme Brasil (2017), essa versa sobre a Identificação de "regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes" (p. 313).O enunciado dessa habilidade encaixa-se na atividade em análise, pois trata de uma sequência[29]na qual os seus elementos representam o número de diagonais de polígonos regulares com n lados, sendo $n \geq 3$.

A atividade constante na página 27 do livro do 8° ano, editora Scipione (2018) remete diretamente à Análise Combinatória, pois, a fórmula utilizada para o cálculo do número de diagonais, pode ser deduzida, de pelo menos duas maneiras, a primeira, a partir da observação da regularidade existente entre as ligações entre os vértices do polígono e, a segunda, diretamente do número de segmentos de retas que podem ser formados utilizando os vértices do polígono.

A primeira maneira consiste em iniciar contando o número de segmentos de retas que podem ser formados a partir de um vértice escolhido, excluindo os segmentos que formam os lados do polígono. Aqui há uma proximidade com a etapa de ensino, pois, espera-se que o aluno se dê conta que os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ são iguais, assim perceberão que ao final da contagem o resultado estará duplicado, justificando a divisão por 2 constante na fórmula[30].

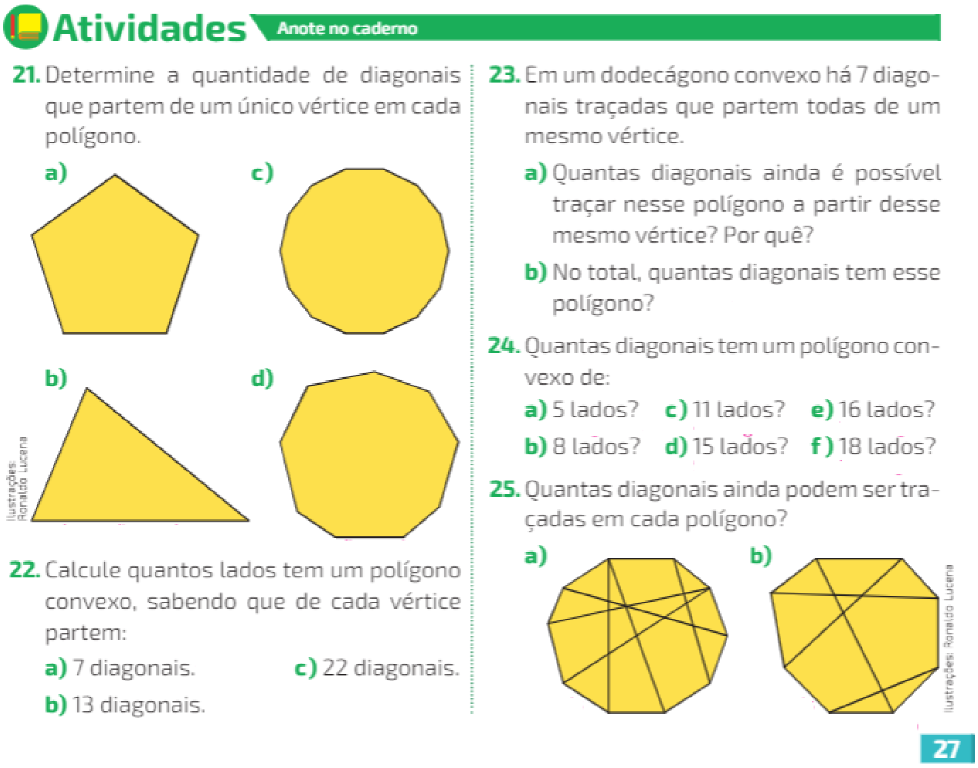
A segunda maneira já se utiliza da técnica de contagem chamada de combinações simples, pois, o procedimento consiste em contar o número de segmentos de reta que podem ser formados com o número de vértice do polígono e fazer a exclusão do número de vértices.

[29] $x_n = (2, 5, 9, 14, \dots, \frac{n(n-3)}{2})$

[30] D = $\frac{n(n-3)}{2}, para\ n \geq 3$

A resolver $C_{n,2} - n$ temos a fórmula necessária para resolver todas as questões da atividade em análise.

Figura 34: Diagonais de polígonos regulares convexos


Atividades Anote no caderno

21. Determine a quantidade de diagonais que partem de um único vértice em cada polígono.

a) b) c) d)

22. Calcule quantos lados tem um polígono convexo, sabendo que de cada vértice partem:

a) 7 diagonais. b) 13 diagonais. c) 22 diagonais.

23. Em um dodecágono convexo há 7 diagonais traçadas que partem todas de um mesmo vértice.

a) Quantas diagonais ainda é possível traçar nesse polígono a partir desse mesmo vértice? Por quê?

b) No total, quantas diagonais tem esse polígono?

24. Quantas diagonais tem um polígono convexo de:

a) 5 lados? b) 8 lados? c) 11 lados? d) 15 lados? e) 16 lados? f) 18 lados?

25. Quantas diagonais ainda podem ser traçadas em cada polígono?

a) b)

Ilustrações: Ronaldo Lucena

27

Fonte: Scipione (2028, p. 27)

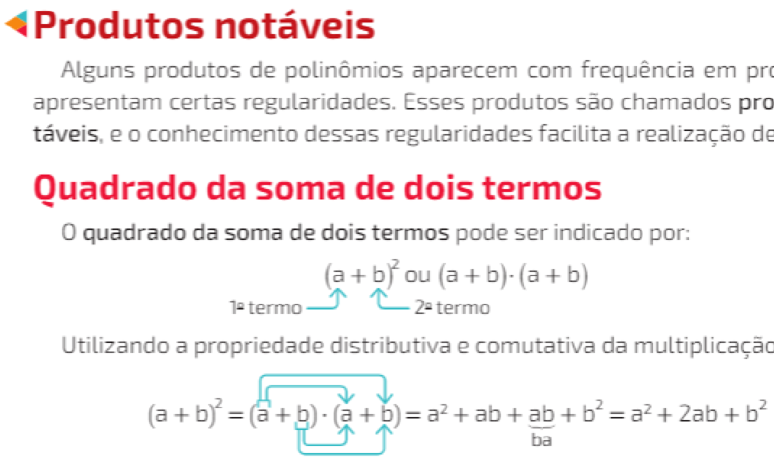
A próxima análise, pertence à unidade temática álgebra, habilidade EF08MA06 e, refere-se ao quadrado da soma de dois termos. Desta vez iremos abordar a parte teórica, pois, ao ter contato com o quadrado de um binômio, por mais que o aluno entenda, neste momento, que se trata da resolução de uma expressão algébrica, cuja habilidade em utilizar a propriedade da distributividade é suficiente para se chegar ao resultado, em momentos posteriores será lhe apresentado, por exemplo, o cubo da soma, ou um binômio elevado a $n - ésima$ potência.

A familiarização com o cubo da soma ou o cubo da diferença, será extremamente útil para a compreensão dos coeficientes dos monômios que fazem parte da expansão do binômio, pois, ao ter contato com o triângulo de Pascal, bem como os números binomiais[31], o que foi visto aqui, no 8° ano do Ensino Fundamental, pode ser retomado, com vistas à compreensão de

[31]Um número binomial é a combinação de um número de n termos tomados k ak. Escrevemos tal número da seguinte forma: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Onde: $n, k \in \mathbb{N}\ e\ k \leq n$

que os coeficientes do cálculo do quadrado da soma foram obtidos a partir dos números binomiais e que $(a+b)^2$ é apenas um caso particular do Binômio de Newton[32].

Figura 35: Produtos notáveis



Produtos notáveis

Alguns produtos de polinômios aparecem com frequência em problemas e apresentam certas regularidades. Esses produtos são chamados **produtos notáveis**, e o conhecimento dessas regularidades facilita a realização de cálculos.

Quadrado da soma de dois termos

O **quadrado da soma de dois termos** pode ser indicado por:

$$(\underbrace{a}_{1^{\underline{o}}\text{ termo}}+\underbrace{b}_{2^{\underline{o}}\text{ termo}})^2 \text{ ou } (a+b)\cdot(a+b)$$

Utilizando a propriedade distributiva e comutativa da multiplicação, temos:

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+\underbrace{ab}_{ba}+b^2=a^2+2ab+b^2$$

Fonte: Scipione (2018, p.90)

Ainda no livro do 8º ano, editora Scipione (2018), chegamos, de fato, à Análise Combinatória de forma explícita, pois, a atividade constante na página 189, pertence à unidade temática números, objeto de conhecimento a princípio multiplicativo da contagem, habilidade EF08MA03, que compreende, pois, “Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo” (BRASIL, 2017, p. 313).

A parte teórica traz uma situação, na qual é dada a uma pessoa três possibilidades de escolher um computador e duas possibilidades de efetuar o pagamento. Neste caso, ao aluno é pedido que sejam calculadas todas as possibilidades de compra, bem como a realização do pagamento, o que é sugerido pelo autor, para a resolução, duas maneiras distintas de listar as possibilidades pedidas.

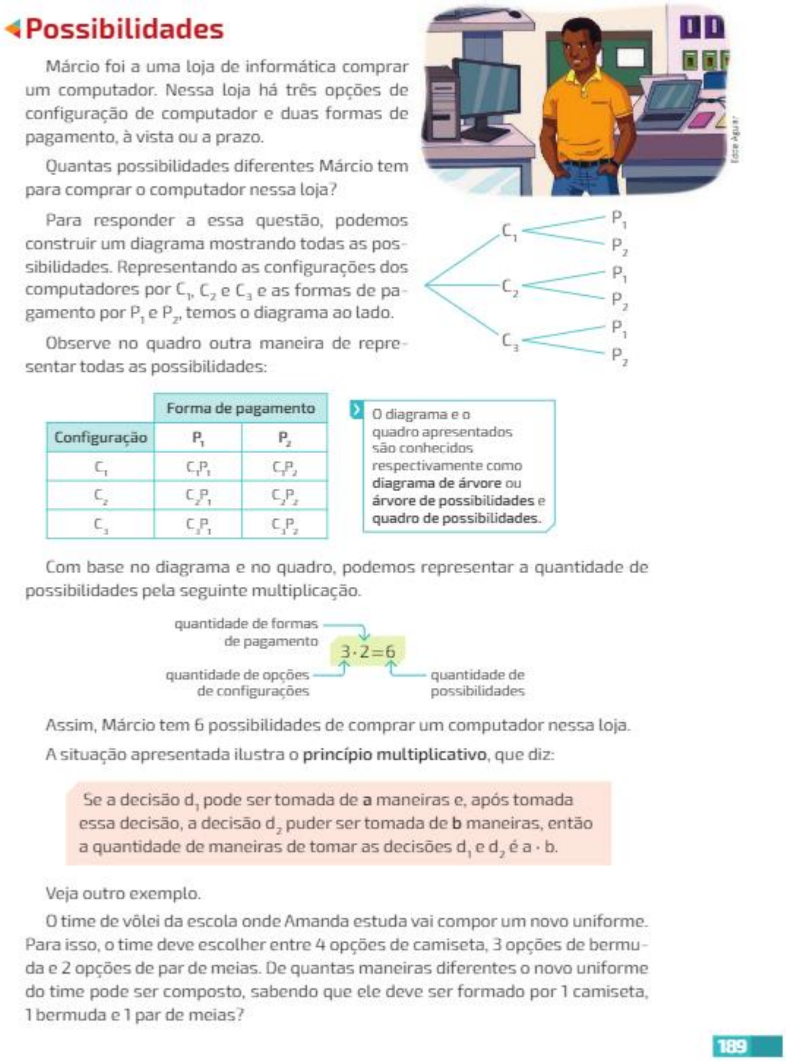
Na primeira maneira temos a tabela de dupla entrada, dispositivo já visto nesse trabalho e que nos remete à ideia das combinações simples, ou seja, de quantas maneiras o computador pode ser escolhido? Posteriormente, após a tomada dessa decisão, de quantas maneiras o pagamento pode ser efetuado?

Na segunda maneira temos a inserção de outro dispositivo bastante útil à resolução de problemas de contagem, trata-se da árvore de possibilidades. Ressaltamos que tanto o uso das tabelas de dupla entrada, como as árvores de possibilidades, caracterizam-se como dispositivos práticos úteis para a familiarização e compreensão com os processos de contagem, pois, dados

[32] $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

conjuntos com poucos dados, não há muita dificuldade em listar e encontrar o número de possibilidade, no entanto, quando o número de elementos, dos conjuntos em questão, aumentam, há necessidade de recorrer, ou ao princípio multiplicativo, ou diretamente às técnicas de contagem.

Figura 36: Árvore de possibilidade - PFC



Possibilidades

Márcio foi a uma loja de informática comprar um computador. Nessa loja há três opções de configuração de computador e duas formas de pagamento, à vista ou a prazo.

Quantas possibilidades diferentes Márcio tem para comprar o computador nessa loja?

Para responder a essa questão, podemos construir um diagrama mostrando todas as possibilidades. Representando as configurações dos computadores por C_1, C_2 e C_3 e as formas de pagamento por P_1 e P_2, temos o diagrama ao lado.

Observe no quadro outra maneira de representar todas as possibilidades:

Configuração	Forma de pagamento P_1	P_2
C_1	C_1P_1	C_1P_2
C_2	C_2P_1	C_2P_2
C_3	C_3P_1	C_3P_2

O diagrama e o quadro apresentados são conhecidos respectivamente como **diagrama de árvore** ou **árvore de possibilidades** e **quadro de possibilidades**.

Com base no diagrama e no quadro, podemos representar a quantidade de possibilidades pela seguinte multiplicação.

$$\underbrace{3}_{\text{quantidade de opções de configurações}} \cdot \underbrace{2}_{\text{quantidade de formas de pagamento}} = \underbrace{6}_{\text{quantidade de possibilidades}}$$

Assim, Márcio tem 6 possibilidades de comprar um computador nessa loja.

A situação apresentada ilustra o **princípio multiplicativo**, que diz:

> Se a decisão d_1 pode ser tomada de **a** maneiras e, após tomada essa decisão, a decisão d_2 puder ser tomada de **b** maneiras, então a quantidade de maneiras de tomar as decisões d_1 e d_2 é $a \cdot b$.

Veja outro exemplo.

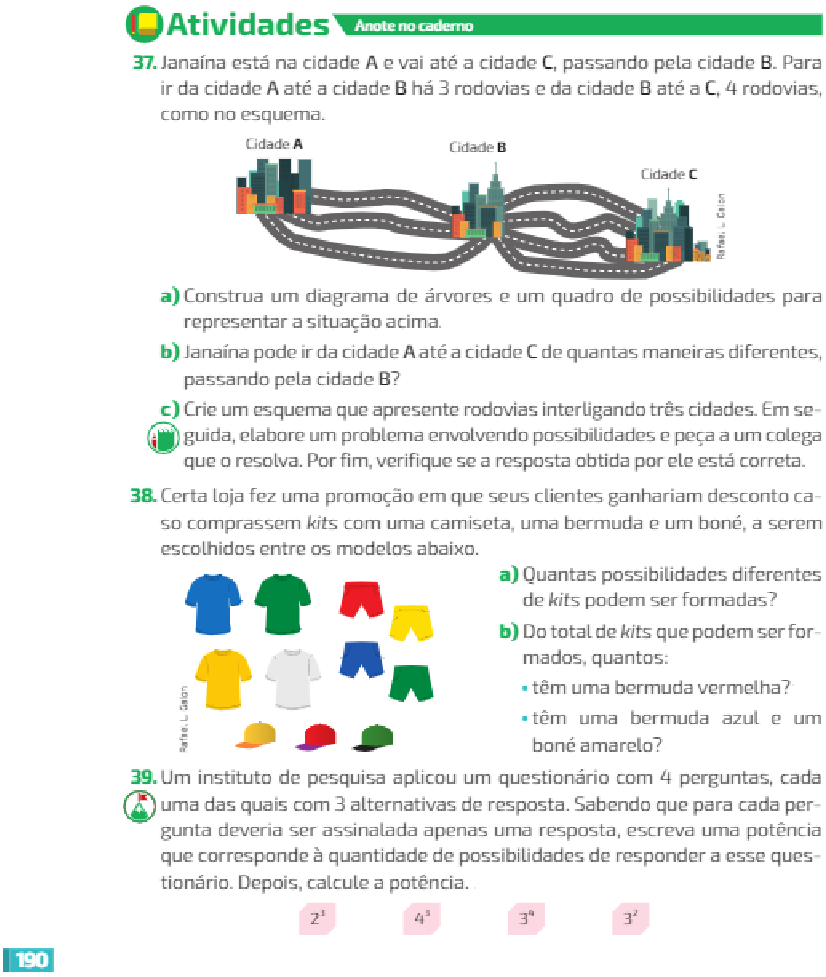
O time de vôlei da escola onde Amanda estuda vai compor um novo uniforme. Para isso, o time deve escolher entre 4 opções de camiseta, 3 opções de bermuda e 2 opções de par de meias. De quantas maneiras diferentes o novo uniforme do time pode ser composto, sabendo que ele deve ser formado por 1 camiseta, 1 bermuda e 1 par de meias?

189

Fonte: Scipione (2018, p. 189)

Por fim, no livro do 8º ano, editora Scipione (2018), temos uma atividade relacionada à teoria que vimos na figura 37, também da habilidade EF08MA03, da unidade temática intitulada números. A figura traz, no primeiro problema, uma situação em que temos de sair da cidade A, passar pela cidade B e, finalmente, chegar à cidade C. Vejamos que apesar da sua solução poder ser feita rapidamente por meio do PFC, chegando ao resultado de 12 possibilidades, o enunciado pede que seja utilizado a técnica chamada árvore de possibilidades para encontrar o número de possibilidades de realizar o trajeto. Ainda nessa figura, temos o problema de número 38, o qual traz uma representação gráfica de 4 camisas, 4 bermudas e 3 bonés, posteriormente, pede que sejam montados kits com uma unidade de cada peça de vestuário. Destacamos que, pelo fato de estarmos trabalhando com três conjuntos, o uso da tabela de dupla entrada torna-se inviável, pois, não atende as nossas necessidades, portanto, teríamos que recorrer à árvore de possibilidades ou diretamente ao princípio multiplicativo, em ambos os casos, chegando a um total de 48 kits.

Figura 37: Árvores de possibilidades – combinação simples



Atividades Anote no caderno

37. Janaína está na cidade A e vai até a cidade C, passando pela cidade B. Para ir da cidade A até a cidade B há 3 rodovias e da cidade B até a C, 4 rodovias, como no esquema.

a) Construa um diagrama de árvores e um quadro de possibilidades para representar a situação acima.

b) Janaína pode ir da cidade A até a cidade C de quantas maneiras diferentes, passando pela cidade B?

c) Crie um esquema que apresente rodovias interligando três cidades. Em seguida, elabore um problema envolvendo possibilidades e peça a um colega que o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

38. Certa loja fez uma promoção em que seus clientes ganhariam desconto caso comprassem *kits* com uma camiseta, uma bermuda e um boné, a serem escolhidos entre os modelos abaixo.

a) Quantas possibilidades diferentes de *kits* podem ser formadas?

b) Do total de *kits* que podem ser formados, quantos:

- têm uma bermuda vermelha?
- têm uma bermuda azul e um boné amarelo?

39. Um instituto de pesquisa aplicou um questionário com 4 perguntas, cada uma das quais com 3 alternativas de resposta. Sabendo que para cada pergunta deveria ser assinalada apenas uma resposta, escreva uma potência que corresponde à quantidade de possibilidades de responder a esse questionário. Depois, calcule a potência.

2^3 4^3 3^4 3^2

190

Fonte: Scipione (2018, p. 190)

Vale ressaltar que, além da árvore de possibilidade, do princípio multiplicativo, ainda poderíamos recorrer á formação de subconjuntos, onde teríamos que escolher um elemento de cada um dos conjuntos dados, conforme resolução a seguir:

Sejam: $A = \{c_1, c_{2,} c_{3,} c_4\}$; $B = \{s_1, s_{2,} s_{3,} s_4\}$ e $C = \{b_1, b_{2,} b_3\}$, os conjuntos das camisas, bermudas e bonés, respectivamente. De quantas maneiras podemos escolher uma camisa, uma bermuda e, um boné? Temos aqui um caso de combinação simples, junto com o princípio multiplicativo, pois, $C_{4,1}.C_{4,1}.C_{3,1} = 4.4.3 = 48$ possibilidades para montar um kit com as condições dadas.

Finalizando a análise dos livros do Ensino Fundamental, chegamos ao livro 9º ano, aqui, destacaremos duas atividades, sendo a primeira relacionada à probabilidade, mas que a montagem do espaço amostral requer o uso da Análise Combinatória e a segunda, também de probabilidade, no entanto, resolvemos trazê-la, pois trata de uma atividade que envolve o jogo de dominó duplo seis e, a montagem das peças desse jogo é feita a partir das técnicas de contagem.

Figura 38: Lançamento de moedas

15. Considere o seguinte experimento aleatório: lançar três vezes uma moeda.

a) Qual é o espaço amostral desses experimento?

b) Qual é a probabilidade de obter:

- cara no 1º lançamento?
- coroa no 3º lançamento?
- cara nos três lançamentos?

Indique por C "cara" e por K "coroa".

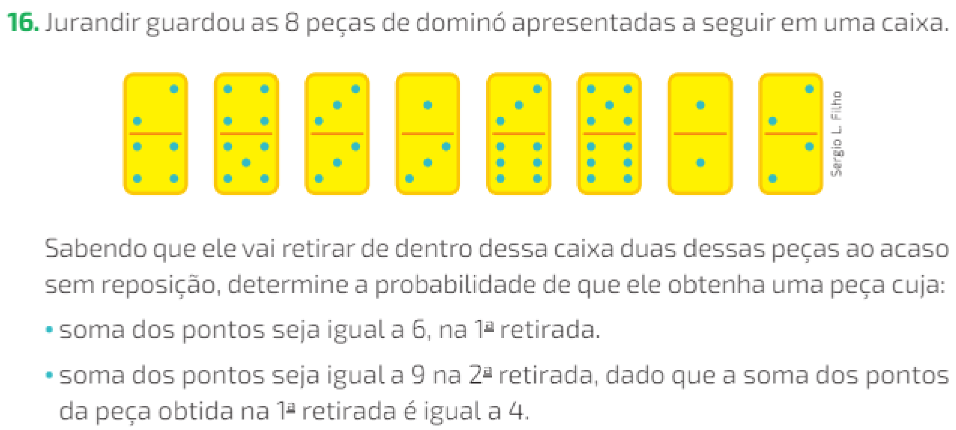
Fonte: Scipione (2018, p. 228)

Nesta atividade, que faz parte da unidade temática probabilidade e estatística, habilidade EF09MA20, temos o lançamento de uma moeda, feitos um após o outro durante três vezes. O cálculo do espaço amostral, requerido no item a, não oferece muita dificuldade, pois podemos recorrer ao PFC e obter o resultado igual a 8 possibilidades. Quanto ao item b, temos um problema mais engenhoso e que requer maior percepção acerca dos eventos possíveis, embora, a montagem da árvore de possibilidades seja o ideal para a visualização dos eventos solicitados.

O ideal, nesta etapa de Ensino, é que o aluno, de fato, recorra à árvore de possibilidades, para que compreenda, através da listagem dos eventos, o que está sendo pedido pelo problema. Posteriormente, poderá ser-lhe pedido algo mais sofisticado, mas com essas mesmas ideias constantes na atividade em análise.

A escolha desta atividade, apesar de pertencer à unidade temática de probabilidade e estatística, bem como já ter sido analisada outra semelhante a esta, deve-se ao fato de existir possibilidades de criação de situações didáticas envolvendo a formação de peças do dominó duplo seis. Com o objetivo de ressaltar a existência de elementos de Análise Combinatória nesta atividade, descreveremos duas possibilidades de formação desse tipo de dominó. Na primeira, utilizaremos apenas a ideia das combinações simples e do princípio multiplicativo, além de adição de peças com pontas iguais. Na segunda, utilizaremos as ideias das combinações completas.

Figura 39: Dominó



16. Jurandir guardou as 8 peças de dominó apresentadas a seguir em uma caixa.

Sergio L. Filho

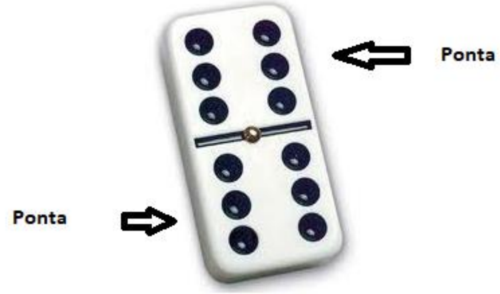
Sabendo que ele vai retirar de dentro dessa caixa duas dessas peças ao acaso sem reposição, determine a probabilidade de que ele obtenha uma peça cuja:

- soma dos pontos seja igual a 6, na 1ª retirada.
- soma dos pontos seja igual a 9 na 2ª retirada, dado que a soma dos pontos da peça obtida na 1ª retirada é igual a 4.

Fonte: Scipione (2018, p. 228)

Para a visualização, vejamos a figura 40, a qual é formada por duas pontas composta de figuras que representam quantidades numéricas. No dominó duplo seis, podemos ter pontas com os elementos do conjunto $X = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, cuja cardinalidade é igual a 7.

Figura 40: Peça de dominó



Fonte: Google imagens

Para a formação de um ponta dispomos de 7 possibilidades de escolha, para formação da outra ponta temos apenas 6 possibilidades, uma vez que a primeira já foi escolhida, chegando assim, pelo PFC, a um total de 42 peças. No entanto, sabemos que essas possibilidades estão duplicadas, pois, as pontas não são numeradas, ou seja, não temos a ponta 1 ou a ponta 2, logo, teremos que fazer a exclusão das repetições, restando apenas 21 peças, cujas pontas diferem entre si pela quantidade de figuras representativas dos elementos do conjunto $X = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Além disso, podemos ter peças duplas, popularmente conhecidas como "carroças", totalizando 7 peças duplas, assim, somando 21 possibilidades das peças com pontas distintas, com as 7 peças duplas, temos um total de 28 peças.

A outra possibilidade de montagem das peças do dominó envolve as ideias de multiconjuntos, pois, chegamos à solução ao responder o seguinte questionamento: quantos multiconjuntos de 2 elementos existem em $X = \{0,1,2,3,4,5,6\}$? Antes da solução, traremos a definição formal de multiconjunto.

Proposição: O número de multiconjuntos de cardinal k que podemos formar no conjunto $[n]$ é igual a

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$$

Portanto, voltando ao nosso questionamento, temos que: $n = 7$ e $k = 2$, logo: $\binom{8}{2} = 28$ possibilidades de formação das peças do dominó duplo seis.

Aqui, finalizamos a etapa analítica deste trabalho, evidenciando as principais atividades que podemos encontrar elementos de Análise Combinatória. Além da identificação dos elementos implícitos, identificamos as possíveis situações didáticas que podem ser criadas a partir de uma leitura mais atenta dessas atividades. Ressaltamos que a identificação e descrição das Unidades Temáticas e Habilidades aqui constantes não ficam restritas aos livros didáticos analisados, pois, tanto esses quantos os demais se encontram adequados ao requerido pela BNCC.

CONSIDERAÇÕES

Esta pesquisa foi desenvolvida a partir da formulação da hipótese de que a Análise Combinatória, vista no Ensino Médio, tem um passado já vivenciado pelos alunos. Para tanto, em busca de elementos necessários à comprovação dessa hipótese, recorremos aos livros didáticos adotados pelas escolas públicas que oferecem o Ensino Fundamental, pois, a partir deles é possível enxergar uma das principais maneiras de como os Objetos de Saber a serem ensinados irão chegar aos alunos.

Mostrar, a partir da Teoria da Transposição Didática, como esse Objeto se mostra presente nos livros didáticos do Ensino Fundamental resultou, inicialmente, no estudo dos seus aspectos históricos com vistas à compreensão da sua importância à matemática, evidenciando, assim, a sua ligação com outros objetos de conhecimento, bem como outras áreas do conhecimento que fazem uso da Análise Combinatória.

Compreender que um Objeto, possui historicamente, uma construção longa, às vezes formulada a partir de disputas de poder, posicionamento socioeconômico, bem como fatores políticos, nos permite ter uma visão mais abrangente sobre um objeto de conhecimento, o que nem sempre nos é oportunizado pelos textos didáticos. Neste sentido é que trouxemos um breve histórico da Análise Combinatória enquanto Objeto de Saber, pois, dada a sua importância na atualidade, não poderíamos deixar de evidenciar o contexto histórico de sua produção, bem como a demarcação de eventos e personagens importantes em seu lapso temporal, para que pudéssemos conhecê-lo e percebê-lo, atualmente, como Objeto de Conhecimento.

Sabemos que muitas produções nunca chegaram ao conhecimento do público em geral ou até mesmo aos membros da própria comunidade científica, pois não se encontram registrados, sejam escritos ou impressos, ou atualmente digitalizados por algum instrumento de registro. O que nos remete, mais uma vez, ao processo de construção e formalização da Análise Combinatória, tendo em vista que a nossa narrativa acerca da construção desse Objeto de Conhecimento se deu a partir de fragmentos obtidos de livros de história da Matemática.

Outro aspecto relevante a ser considerado diz respeito ao lugar de registro desses Objetos de Conhecimento, historicamente, encontrados em livros impressos, cujas funções são diversas, dentre elas, a divulgação e/ou propagação dos resultados obtidos a partir da interação homem-objeto. No entanto, há que se ter em mente, de forma clara, a finalidade desses livros, característica importantíssima, pois, ao leitor nem sempre se tema utilidade que se espera ao produzi-lo.

Obviamente, não se pode esperar que um aluno da Educação Básica, compreenda teoremas semelhantes aos que trouxemos neste trabalho, pois essa face da Análise Combinatória requer a compreensão de outros conhecimentos, os quais ainda não faz parte de suas vivências escolares e, talvez nem faça parte de sua vida acadêmica. Mas nem por isso podemos estacionar na incerteza de que não é possível ensiná-lo, ou atribuir ao aluno a mesma incerteza de que não é possível aprender.

De posse desse questionamento é que pudemos nos alinhar e fazer uso da Teoria da Transposição Didática, de Chevallard (2009), na tentativa de explicar a existência de um processo de transformação de Saberes que ocorre em esferas distintas de formação e desenvolvimento dos Objetos de Conhecimentos. É através desse processo transformativo que determinado Objeto de Saber passa a existir em lugares distintos ao de sua origem, passando a adaptar-se a uma nova forma de expor-se e fazer-se entender.

É no livro didático que o leitor tem a possibilidade de encontrar os Saberes Matemáticos, já transformados e adaptados às necessidades do Sistema Educativo, ou seja, o Saber Científico convertido em Saber Escolar. Todavia, temos que salientar que esse processo transformativo não ocorre de maneira simples, tampouco para simplificar um Objeto de Saber, tornando-o, ou desvinculado de sua finalidade principal, ou deixa-lo abstrato o suficientemente próximo do seu lugar de surgimento. Destaque-se que o referido processo envolve questões que extrapolam a vontade de se realizar a transformação, pois sofrem influencias, diretamente, das forças que agem sobre o Sistema Educacional, que somadas, formam, o que Chevallard (2009) chama de entorno do sistema didático.

Neste trabalho, trouxemos alguns aspectos políticos que agem diretamente sobre o Sistema Educacional, dentre eles o breve relato do processo burocrático do relacionado à escolha dos livros didáticos, por meio do Programa Nacional do Livro e Material Didático – PNLD, que serão adotados pelas escolas de Educação Básica. Perpassando pelas edições de Decretos, constituição de comissões, avaliações, escolhas e distribuições dos livros e material didático.

Ressaltamos que um dos principais documentos que transitam nesse entorno do sistema didático, a BNCC, é fruto de um longo processo de elaboração, pois podem ser encontrados registros contendo sua previsão legal em documentos com origem no tenebroso período militar instalado no Brasil na década de 60 do século XX. As constantes mudanças governamentais ocorridas em nosso país imprimiram uma parcela de suas ideologias no que se refere às concepções pedagógicas de ensino. Essa inserção, nem sempre benéfica, é que permitiu a presença de determinados Objetos de Saber em um documento tão importante como a Base Nacional Comum Curricular, permitindo que essas forças sejam repassadas para os livros didáticos, bem como para os currículos das Unidades da Federação.

Ainda sobre os elementos constituintes da noosfera, temos o livro didático como um dos principais lugares de existência, de fato, dos Objetos a serem ensinados na Educação Básica, e que até pouco tempo, talvez fosse, de acordo com o histórico do PNLD, o único lugar de existência, afinal, a inserção do material didático, como parte do Plano Nacional do Livro Didático, teve a sua entrada legal no Sistema Educacional brasileiro com o advento do Decreto 9.099/2017, mesmo ano da homologação da BNCC. Nesse sentido é que utilizamos o livro didático para alinhar o nosso objetivo geral à hipótese inicial do nosso trabalho que é mostrar, a partir da Teoria da Transposição Didática, como a Análise Combinatória se mostra presente nos livros didáticos do Ensino Fundamental.

A seleção dos nove livros didáticos que utilizamos em nossa pesquisa se deu em conformidade com edições vigentes do PNLD, anos 2019 e 2020, dos quais identificamos 25 atividades, convergentes com a nossa leitura objetivando a busca dos termos ou indícios que contivessem proximidade com as subcategorias constantes no quadro 03. As análises dos livros didáticos nos permitiu identificar elementos de Análise Combinatória em todos os anos que compõem a etapa de ensino recortada para pesquisa, denominada pela LDB como Ensino Fundamental, divido em duas fases: anos iniciais (1º ano ao 5º ano) e anos finais (6º ano ao 9º ano), o que nos permitiu comprovar a hipótese de que a Análise Combinatória já possui um passado vivenciado pelos alunos, assim, não é um novo Objeto de Ensino a ser apresentado aos alunos.

A descrição analítica dessas atividades se deu a partir do estudo e compreensão do Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo, bem como as suas principais técnicas de contagem, pois, serviram de lentes para a nossa leitura mais clara e atenta, bem como a identificação de elementos de Análise Combinatória que se encontram implícitos, trazida pelo seu processo adaptativo, nas atividades constantes nos livros didáticos do Ensino Fundamental, etapa movida pelo nosso objetivo específico (a) identificar noções, conceitos e elementos de Análise Combinatória nos livros didáticos do Ensino Fundamental.

Destacamos ainda que a Base Nacional Comum Curricular, conforme Brasil (2017, p. 276) traz no componente curricular de matemática que "no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, deve-se retomar as vivências cotidianas das crianças com números, formas e espaço, e também as experiências desenvolvidas na Educação Infantil, para iniciar uma sistematização dessas noções". Ancorados nessa leitura, após as análises das atividades e, com vistas a responder o nosso objetivo específico (b) que é descrever conceitos e atividades, constantes nos livros didáticos do Ensino Fundamental, úteis à formação do raciocínio combinatório enquanto objeto transacional, elaboramos o nosso Produto Educacional, cujo conteúdo advém das análises realizadas nos livros didáticos, e tem sua organização ancorada na organização dos objetos de conhecimentos e habilidades constantes na BNCC.

No decorrer da etapa analítica deste trabalho, identificamos a existência da possibilidade de realização de outros estudos semelhante a este, no que diz respeito à identificação da transacionalidade de outros Objetos de Saber que fazem parte da noosfera que envolve o sistema didático. Essa percepção nos leva a inferir, em concordância com Chevallard (2009), que a transformação adaptativa que determinados Objetos de Saber sofrem para que possam fazer parte dos Saberes a serem ensinados, não ficam alocados em uma única fase ou etapa de Ensino, pois, mostramos neste trabalho, especialmente o caso da Análise Combinatória, que implicitamente esse Objeto de Saber faz parte, sem exceção, de toda a Educação Básica.

Por fim, esperamos que este trabalho possa incentivar pesquisas semelhantes no que diz respeito à identificação da transacionalidade de outros Objetos de Saber. Além disso, terminamos enfatizando que as unidades temáticas da BNCC, oportunizam a criação de situações didáticas para o ensino da Análise Combinatória, a partir de suas habilidades, que perpassam a fase ou etapa de ensino, a qual se encontra explicitada nos currículos formais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALENCAR FILHO, E. **Teoria Elementar dos Conjuntos**. São Paulo: Nobel, 1913.

ARTAUD, Michèle. **À propos de la transposition institutionnelle d'unobjet mathématique** Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1991, fascicule S6,Vième école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique, p. 47-52.

______.**Introductionà l'approche écologique du didactiques: l'écologique des organisations mathématiques et didactiques**. In: LA NEUVÈME ÉCOLE D'ETE DE DIDATIQUES DÊS MATHEMATIQUES, 9. 1988, Hougate, Bailleul. Anais... Hougate, p. 101-134. 1988

ÁVILA, G.**RPM 23 - O ensino de Matemática**. 1993, Disponível em: <www.rpm.org.br/cdrpm/23/1.htm>. Acesso em: 27 de abril de 2020.

BALESTRI, R. D, PATARO, P. R. M. **Matemática essencial 6º ano: ensino fundamental – anos finais**. 1º edição. São Paulo. Ed. Scipione. 2018.

______. **Matemática essencial 7º ano: ensino fundamental – anos finais**. 1º edição. São Paulo. Ed. Scipione. 2018.

______. **Matemática essencial 8º ano: ensino fundamental – anos finais**. 1º edição. São Paulo. Ed. Scipione. 2018.

______. **Matemática essencial 9º ano: ensino fundamental – anos finais**. 1º edição. São Paulo. Ed. Scipione. 2018.

BEZERRA, L. R. D. **Métodos de contagem**. Dissertação (mestrado), UFPB, 2013, 93f.

BIGGS, N. L. **The roots of combinatorics**. Revista Historia Mathematica. Vol6. 1979. p.109-136.

BISOGNIN, E., TOLIO, F. B. **Um Estudo dos Princípios Aditivo e Multiplicativo por meio de Jogos** Ciência e Natura, Santa Maria v.39 n.3, 2017, Set - Dez, p. 723 – 737 Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM ISSN impressa: 0100-8307 - ISSN on-line: 2179-460X

BRASIL. Câmara dos Deputados. **Decreto-Lei nº 93, de 21 de dezembro de 1937**. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-93-21-dezembro-1937-350842-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 10 de abril de 2020.

______. Câmara dos Deputados. **Decreto-Lei nº 1.006, de 30 de dezembro de 1938**. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-1006-30-dezembro-1938-350741-publicacaooriginal-1-pe.html >. Acesso em: 10 de abril de 2020.

______. Câmara dos Deputados. **Decreto-Lei nº 8.460, de 26 de dezembro de 1945**. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-8460-26-dezembro-1945-416379-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 10 de abril de 2020.

______. Câmara dos Deputados. **Decreto nº 77.107, de 04 de fevereiro de 1976**. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1970-1979/decreto-77107-4-fevereiro-1976-425615-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 10 de abril de 2020.

______. Câmara dos Deputados. **Decreto nº 88.295, de 10 de maio de 1983**. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1980-1987/decreto-88295-10-maio-1983-438189-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 10 de abril de 2020.

______. Câmara dos Deputados. **Decreto nº 91.542, de 19 de agosto de 1985**. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1980-1987/decreto-91542-19-agosto-1985-441959-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 10 de abril de 2020.

______. Câmara dos Deputados. **Medida Provisória nº 1.549-27, de 14 de fevereiro de 1997**. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/medpro/1997/medidaprovisoria-1549-27-14-fevereiro-1997-376943-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 10 de abril de 2020.

______. Constituição (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988.**Brasília, DF: Presidência da república, Disponível em: <planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicaocompilado.htm>. Acesso em: 01 de maio de 2020.

______. Planalto – Casa Civil. **Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971.** Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l5692.htm>. Acesso em: 01 de maiode2020.

______. Planalto – Casa Civil. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 01 de maio de 2020.

______. Planalto – Casa Civil. **Lei nº 12.796/2013, de 4 de abril de 2013.** Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2013/Lei/L12796.htm>. Acesso em: 01 de maio de 2020.

______. Planalto – Casa Civil. **Lei nº 13.005/2014, de 25 de junho de 2014.** Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/lei/l13005.htm>. Acesso em: 01 de maio de 2020.

______. Planalto – Casa Civil. **Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/decreto/D9099.htm>. Acesso em: 10 de abril de 2020.

______. Ministério da Educação. **Documento final da CONAE 2014**. Disponível em: <http://conae2014.mec.gov.br/images/doc/Sistematizacao/DocumentoFinal29012015.pdf>. Acesso em: 01 de maio de 2020.

______. Ministério da Educação. **Parecer do Conselho Nacional de Educação/Conselho Pleno nº 15/2017.** Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2017-pdf/78631-pcp015-17-pdf/file>. Acesso em: 01 de maio de 2020.

______. Ministério da Educação. **Portaria nº 1.570, de 21 de dezembro de 2017.**Homologa o parecer CNE/CP nº 15/2027. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2017-pdf/78631-pcp015-17-pdf/file>. Acesso em: 01 de maio de 2020.

______. Ministério da Educação. **Portaria nº 592, de 17 de junho de 2015.** Institui comissão de especialistas para a elaboração de proposta da Base Nacional Comum Curricular.Disponívelem:<http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=21361-port-592-bnc-21-set-2015-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 01 de maio de 2020.

______. Ministério da Educação. **Histórico da BNCC.** Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/historico>. Acesso em: 01 de maio de 2020.

______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 01 de maio de 2020.

BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques**. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-115. 1986. Disponível em: <https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/>. Acesso em: 28 de abril de 2020.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora. 1951

CHEVALLARD. Y. **La TAD face au professeur de mathématiques.** 2009. Disponível em:<yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162> . Acesso em: 15 maio. 2018.

______. **La transposición didáctica**: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2009.

CORRÊA. A, MORGADO J. C. **A construção da Base Nacional Comum Curricular no Brasil: tensões e desafios**, Anais do Colóquio Luso-Brasileiro de Educação – COLBEDUCA, Braga e Paredes de Coura – Portugal, V. 3, 2018.

COSTA, E. R. S. **Uma proposta de ensino de análise combinatória para alunos do Ensino Médio** – Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras - UFLA, 2013.107 p.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. (Trad. de Maria Cristina Bonomi). São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DANTE, L. R. **Matemática, volume único**, 1ª ed., São Paulo, Ática, 2005.

MELZER E. E. M. **As teorias de Chevallard e Fleck: relações entre a Transposição Didática e o Tráfego de Pensamentos.** EDUCERE, 2015, Curitiba. Anais do XII Congresso Nacional de Educação. v. 1. p. 460-474. Disponível em: <https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/16730_11057.pdf>. Acesso em: 18de maio de 2020.

EVES, H. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, F.P. **Análise combinatória no ensino médio: uma abordagem sem o uso de fórmulas**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Vale do São Francisco - Juazeiro - BA, 2013.

GERHARDT, T. E. e SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**; coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. 120 p.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GUARDEÑO, A. J. D. **El legado de las Matematicas, de Euclides a Newton: los genios através de sus libros**, Universidad de Sevilla, Real Sociedad Matematica Española, ed. Consejería de Cultura, 2000.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar: Combinatória/probabilidade.** 6ª ed, São Paulo: Atual Editora Ltda., 1993

LEIBNIZ, G. W. **Dissertatio de arte combinatorial**. Berlin: AkademieVerlag, 1966. 163 p.

MODERNA, E. (org.). **Buriti mais matemática.** 1º ano Ensino Fundamental – Anos Iniciais - Editora responsável: Carolina Maria Toledo, 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2017.

______. **Buriti mais matemática.** 2º ano Ensino Fundamental – Anos Iniciais - Editora responsável: Carolina Maria Toledo, 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2017.

______. **Buriti mais matemática.** 3º ano Ensino Fundamental – Anos Iniciais - Editora responsável: Carolina Maria Toledo, 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2017.

______. **Buriti mais matemática.** 4º ano Ensino Fundamental – Anos Iniciais - Editora responsável: Carolina Maria Toledo, 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2017.

______. **Buriti mais matemática.** 5º ano Ensino Fundamental – Anos Iniciais - Editora responsável: Carolina Maria Toledo, 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2017.

LEITE, M. S. **Contribuições de Basil Bernstein e Yves Chevallard para a discussão do conhecimento escolar**. (Dissertação). PUC-RIO. Rio de Janeiro. 2004.

MORGADO et al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

MUNIZ NETO, A.C. **Tópicos de Matemática Elementar – Volume 4 – Combinatória** – Coleção do professor de matemática 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

OLIVEIRA, J. B. A.et al. **A política do livro didático**. Campinas: UNICAMP, 1984.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PERRENOUD, P. **La transposition didactique à partir de pratiques: des savoir saux compétences.** Revue des sciences de l´education, 22, 1998.

PIAGET, J. **A gênese das estruturas lógicas elementares.** Rio de Janeiro: Zahar, 1983.

ROSA, M. **Desmistificando a análise combinatória**. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 6.1998, São Leopoldo, Anais, São Leopoldo: ENEN, 1998.1.

ROSEN, K. H. **Matemática Discreta e suas Aplicações**, Tradução da 6ª edição em inglês. Editora Mc-Graw Hill Brasil. 2009.

SABO, R. **Saberes Docentes:** a análise combinatória no Ensino Médio. (Dissertação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP – São Paulo, 2010.

SILVA, I.M. **A relação do professor com o saber Matemático e os conhecimentos mobilizados em sua prática.** Tese de doutorado, Universidade Federal do Pará, Belém - PA, 2014.

STURM, W. **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa**, 1999. 94p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de Campinas. Campinas, 1999.

TARTUCE, T. J. A. **Métodos de pesquisa**. Fortaleza: UNICE – Ensino Superior, 2006. Apostila.

TEIXEIRA, A. **Gilberto Freyre, mestre e criador da Sociologia**. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos. Rio de Janeiro, v.40, n.91, jul./set. 1963. p.29-36.

TEIXEIRA, B. B. **Parâmetros Curriculares Nacionais, Plano Nacional de Educação e a autonomia da escola**. 23ª reunião da ANPEd, Caxambu – MG, 2000. Disponível em: < http://23reuniao.anped.org.br/textos/0503t.PDF> acesso em: 02 de maio de 2020.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. **Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau.** Zetetiké, v. 21, n. 1, p. 155-168, 16 abr. 2014.

VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. **Análise Combinatória: Alguns Aspéctos históricos e uma Abordagem Pedagógica**. Tese (VIII Encontro Nacional de Educação Matemática) — UFPE, Recife, 2004.

VILENKIN, N. **¿De cuantas formas?** Tradução para o espanhol de Juan Jose Tolosa. Editora Mir – Moscou – 1972.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Produto Educacional: Modelo Transacional Articulador

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

CARLOS EMANOEL ALCIDES DO NASCIMENTO

MODELO TRANSACIONAL ARTICULADOR - ANÁLISE COMBINATÓRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

RIO BRANCO – AC
2020

CARLOS EMANOEL ALCIDES DO NASCIMENTO

MODELO TRANSACIONAL ARTICULADOR - ANÁLISE COMBINATÓRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Produto Educacional elaborado a partir da dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós – Graduação do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática (MPECIM), da Universidade Federal do Acre (UFAC), como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Itamar Miranda da Silva

Coorientador: Prof. Dr. Sandro Ricardo Pinto da Silva

Banca examinadora:

Prof. Dr. Itamar Miranda da Silva – CELA/UFAC – Orientador/Presidente

Prof. Dr. Sandro Ricardo Pinto da Silva – CCET/UFAC – Coorientador

Profª Drª Aline Andréia Nicolli – CELA/UFAC – Membro interno

Prof. Dr. Edcarlos Miranda de Souza – CCET/UFAC – Membro externo

Prof. Dr. Pelegrino Santos Verçosa – CELA/UFAC – Membro suplente

RIO BRANCO – AC
2020

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

EF – Ensino Fundamental

MA - Matemática

MTA – Modelo Transacional Articulador

PNLD – Plano Nacional do Livro e Material Didático

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

A elaboração desse produto educacional, enquanto resultado do processo de pesquisa, consiste na elaboração de um dispositivo didático-matemático denominado Modelo Transacional Articulador – MTA que, de acordo com Silva (2014) pode permitir ao professor

> analisar um saber matemático que tenha por finalidade torná-lo ensinável, e com isso, ultrapassando maneiras de agir e pensar empíricos e/ou espontâneos em conscientes, ou seja, que possibilita ao professor dominar um discurso coerente e consistente capaz de justificar a razão de ser do ensino durante a relação pedagógica. (p. 179).

Silva (2014) trouxe em sua tese de doutorado, a concretização desse modelo para o caso específico da Análise Combinatória, semelhante ao nosso, no entanto, sob um olhar de pesquisa distinto, mas não excludente, da nossa, pois, a concretização do MTA, trazida por esse autor, envolveu a consideração das maneiras de agir de professores que atuam na Educação Básica, implicitamente a partir da observação do que Chevallard (2009) denomina de Transposição Didática Interna, ou seja, aquilo que decorre diretamente da relação entre os elementos do sistema didático.

Para este trabalho situamos o MTA após o processo de Transposição Didática Externa, em conformidade com Chevallard (2009), a partir da passagem do Objeto de Saber para fazer parte dos Saberes a serem ensinados, assim, utilizamos a análise do livro didático, alinhado à BNCC, para a concretização desse dispositivo a partir da identificação das unidades temáticas e habilidades úteis à formação do raciocínio combinatório enquanto objeto transacional.

A seguir traremos, infográficos de cada ano do Ensino Fundamental, a localização de unidades temáticas e respectivas habilidade que contém elementos de Análise Combinatória, conforme consta no capítulo analítico da dissertação de mestrado intitulada: Análise Combinatória nos livros didáticos do Ensino Fundamental: uma análise à luz da Transposição Didática.

Além do infográfico, pode-se encontrar juntamente a ele, o resumo do constante na BNCC no que diz respeito às unidades temáticas na área de matemática, bem como das habilidades e, ainda, uma atividade que traz elementos que caracterizam a Análise Combinatória como Objeto Transacional, mostrando que esse Objeto de Saber se encontra presente no Ensino Fundamental.

Conforme Brasil (2017), a BNCC encontra-se dividida em cinco unidades temáticas, correlacionadas e organizadas de forma a orientação para a elaboração dos currículos das unidades da federação do Brasil.

> A unidade temática **Números** tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.
>
> A unidade temática **Álgebra**, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações.
>
> A **Geometria** envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.
>
> As medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade. Assim, a unidade temática **Grandezas e medidas**, ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico.
>
> A incerteza e o tratamento de dados são estudados na unidade temática **Probabilidade e estatística**. Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações- -problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos. (p. 268 – p. 274).

Neste sentido, traremos após cada infográfico, o resumo das habilidades que podemos encontrar elementos de Análise Combinatória.

MODELO TRANSACIONAL ARTICULADOR – MTA

Figura 1: MTA do 1° ano

Fonte: autores

Habilidades:

(EF01MA02) Contar de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias como o pareamento e outros agrupamentos.
(EF01MA03) Estimar e comparar quantidades de objetos de dois conjuntos (em torno de 20 elementos), por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois) para indicar "tem mais", "tem menos" ou "tem a mesma quantidade".

(EF01MA05) Comparar números naturais de até duas ordens em situações cotidianas, com e sem suporte da reta numérica. Construção de fatos básicos da adição

(EF01MA07) Compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com o suporte de material manipulável, contribuindo para a compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo. Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar).

(EF01MA08) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, utilizando estratégias e formas de registro pessoais. Álgebra Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências

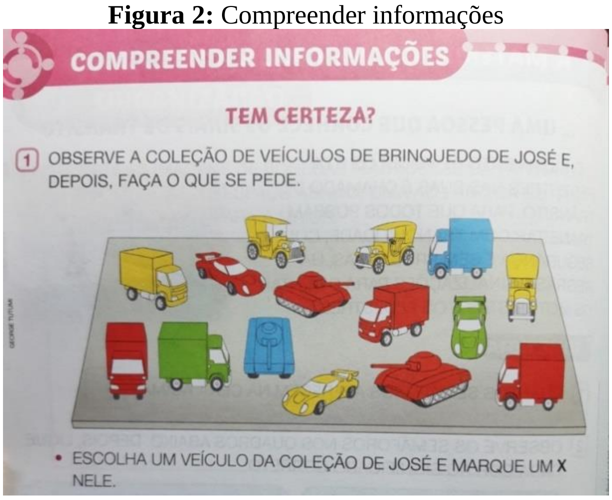
(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida. Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)

> (EF01MA11) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás.
>
> (EF01MA12) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar-se o referencial.
>
> (EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como "acontecerá com certeza", "talvez aconteça" e "é impossível acontecer", em situações do cotidiano.

A partir das análise da atividade constante na página 26 do livro do 1° ano do Ensino Fundamental, que faz parte da unidade temática números, com a presença das habilidades EF01MA02 e EF01MA03 de forma explícita, temos a exemplificação das possíveis articulações com outras unidades temáticas pertencente à mesma série. Nela, é pedido aos alunos que observem a coleção de veículos de brinquedo de José e, posteriormente, inicie o processo de escolha. A partir da representação gráfica dos brinquedos, a atividade traz o seguinte questionamento: "você sabe dizer com certeza a cor do veículo que escolheu?" (MODERNA, 2017, p. 26).

Em um primeiro momento, trata-se apenas de uma escolha de elementos que estão agrupados porque possuem as propriedades que os caracterizam como carrinhos, formando o que chamamos de conjuntos ou coleção, mas poderíamos avançar e perceber que ali estão noções de subconjuntos e que estes podem se formar a partir de várias características. Poderíamos ter, por exemplo, o subconjunto dos carros amarelos, dos carros vermelhos, dos carros azuis e dos carros verdes.

Figura 2: Compreender informações



Fonte: Moderna (2017, p. 26)

Através da nossa descrição, de uma possibilidade de criação de outras situações didáticas, percebemos que, mesmo implicitamente, aqui temos elementos de Análise

Combinatória, pois, as compreensões da noção de conjuntos, para escolha de elementos que formam novos conjuntos estão intimamente ligadas à compreensão das combinações simples.

Ressaltamos que, apesar da atividade pertencer, explicitamente, à unidade temática números, o seu uso pode ser feito em conjunto com outras unidades temática, tais como: álgebra, probabilidade e estatística, pois, de acordo com a BNCC, o aluno deve ser levado a,

> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2017, p. 267).

Figura 3: MTA do 2° ano

Fonte: autores

Habilidades:

> (EF02MA05) Construir fatos básicos da adição e subtração e utilizá-los no cálculo mental ou escrito. Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar);
>
> (EF02MA12) Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência, e indicar as mudanças de direção e de sentido.

Vejamos que a atividade proposta na p. 26, pertencente à unidade temática geometria, habilidade EF02MA12, pede para que sejam traçados caminhos que Apolo pode fazer cujo ponto de partida se dá no mercado e o ponto de chegada se dá na padaria, no entanto, temos a restrição imposta aos competidores, ou seja, passar pela casa de Lúcia. Atividades semelhantes a essa podem oportunizar ao aluno a possibilidade de criar outras restrições, além das Situações Didáticas criadas pelo professor.

Figura 4: Localização

Fonte: Moderna (2017, p. 26)

A atividade, aqui exposta, traz um trajeto no mapa, que para a sua resolução são requeridas estratégias para traçar um único caminho ou um caminho mais perto para a realização do trajeto, o que não impõe muita dificuldade aos alunos, pois, é possível, a partir da figura, indicar todos os possíveis caminhos, no entanto, a sua utilização pode se dar em situações didáticas de outras fases ou etapas da Educação Básica, com o objetivo de encontrar o trajeto pelo menor caminho ou ainda descobrir quantos são os menores trajetos existentes.

Nesta atividade a criação de situações didáticas úteis para o ensino das técnicas de contagem e, que podem ser retomadas no Ensino Médio, possibilita a articulação com outros objetos de saber matemático, bem como outras disciplinas, como, por exemplo, a Geografia, pois, aqui podemos nos valer das coordenadas geográficas para nossa estratégia de resolução. Essa articulação,

> Exige uma dupla explicitação dos vínculos do conteúdo estudado pelo aluno, tanto em relação a outras disciplinas, como em relação às situações da vida do cotidiano. Dessa maneira, não se trata de imaginar uma aprendizagem delimitada ao contexto científico. Por outro lado, o desafio pedagógico envolve também a aprendizagem de conceitos cujo significado pode estar mais próximo da abstração do que da dimensão experimental. O inconveniente está na centralização em um desses extremos. (PAIS, 2001, p. 21).

Uma possível solução para as nossas novas indagações quanto ao número de caminhos mais curtos, advindas de situações didáticas que podem ser criadas a partir da atividade em questão, requer a utilização da permutação com repetição e a utilização do Princípio Fundamental da Contagem – PFC, entretanto, há que se ressaltar a nossa concordância com Pais (2001) no que diz respeito ao inconveniente da centralização da atividade, ou na contextualização desvinculada da sua finalidade principal, ou na abstração exagerada, que tem mais proximidade com o Saber Científico do que com o Saber Escolar.

Figura 5: MTA do 3° ano

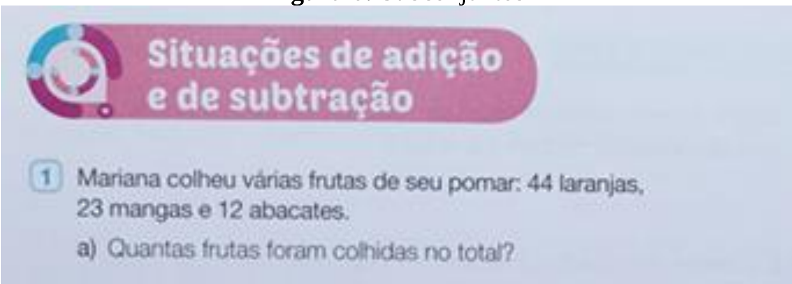
Fonte: autores

Habilidades:

> (EF03MA03) Construir e utilizar fatos básicos da adição e da multiplicação para o cálculo mental ou escrito.
>
> (EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.

A atividade a seguir, que consta no livro do 3º ano, pertence à unidade temática números, habilidade EF03MA03, e traz, explicitamente, situações de adição e subtração. Apesar de induzir o aluno a recorrer ao uso do algoritmo da adição, claramente temos um problema que impõe ao aluno a percepção de união de conjuntos, pois ao somar os elementos do conjunto das laranjas, das mangas e, dos abacates, teremos um conjunto, que poderemos chamar, por exemplo, de conjunto das frutas. A percepção das noções de conjuntos aparece de forma implícita, pois, intuitivamente, ao somar a quantidade de frutas, o aluno estará iniciando, por mais que não se dê conta, a construção das noções do princípio aditivo.

Figura 6: Subconjuntos



Fonte: Moderna (2017, p. 34)

Vejamos uma possibilidade de uso para essa mesma atividade em etapas posteriores, após o aluno ter tido contato com as noções introdutórias de conjuntos. Ao substituirmos os questionamentos por:

a) de quantas maneiras Mariana pode escolher uma fruta?

b) de quantas maneiras Mariana pode escolher 3 frutas, sendo uma laranja, uma manga e, um abacate?

As respostas para esses novos questionamentos, sugerem o uso do princípio aditivo e o uso das combinações simples.

Vale lembrar que a utilização do princípio aditivo para responder de quantas formas Mariana pode escolher uma fruta, retoma às mesmas ideias da adição da quantidade de frutas, pois, para Bisognin e Tolio (2017, p. 725), "aprender a contar relacionando grupos, ou seja, conjuntos de certos objetos, é a maneira como as crianças aprendem a contar". No entanto, agora, partindo do pressuposto que o aluno já possua a compreensão das ideias introdutórias de conjuntos, necessárias para a compreensão desse princípio. Em relação às maneiras de Mariana escolher uma fruta, a restrição tornou-se necessária para a utilização das combinações simples, mas poderíamos tê-la deixado sem a restrição, assim, permitindo o uso das combinações completas. Ressaltar essas possibilidades torna-se importante para que o leitor tenha a percepção de que um objeto de ensino possui um passado e que, a partir de sua compreensão, poderá retornar em outros níveis ou etapas de ensino, revestido de outros elementos.

Figura 7: MTA do 4° ano

Fonte: autores

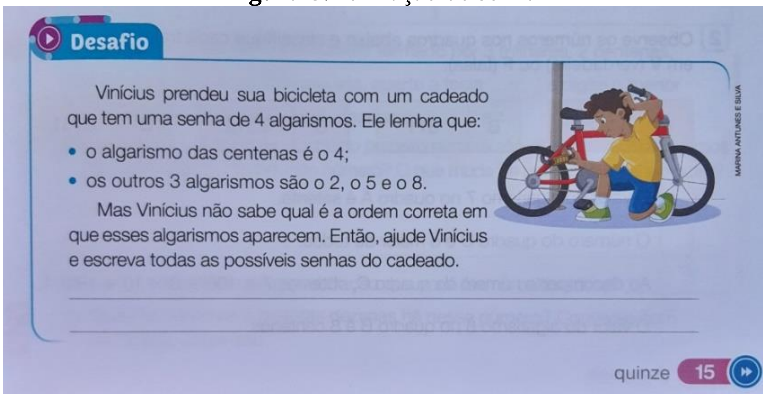
Habilidades:

> (EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
>
> (EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.

No livro do 4º ano, na unidade temática números, habilidade EF04MA08 temos pela primeira vez, expressamente, uma habilidade relacionada aos problemas de contagem. A introdução dessa habilidade se dá pela atividade constante na figura 25, na qual é pedida a descrição ou enumeração das possibilidades de abertura de um cadeado que possui uma senha de 4 algarismos.

Nessa atividade, na qual o autor resgata as ideias de valor posicional para fixar o algarismo 4 na ordem das centenas, temos implicitamente as ideias do princípio multiplicativo e dos fatoriais. Para a sua resolução, nesta fase de ensino, o aluno terá que recorrer à listagem dos elementos, obedecendo à restrição do problema, bem como a realização da permutação dos algarismos disponíveis.

Figura 8: formação de senha



Fonte: Moderna (2017, p. 15)

Listar as possibilidades, neste momento, é a maneira mais rápida de resolver esse problema, pois, os alunos ainda não tiveram contato com a enunciação do PFC. Além do mais, serão, no máximo, 6 tentativas até que Vinícius encontre a senha correta.

Em outras etapas da educação básica, as ideias aqui compreendidas, serão de extrema importância, pois, ao se deparar com problemas que envolvam grande quantidade de dados ou possibilidades, o aluno perceberá o quão enfadonho é listar ou enumerar todas as possibilidades, pois, para Morgado et al (1991, p. 1) as técnicas de contagem enquanto parte da "Análise Combinatória, são conceitos que permitem resolver um tipo de problemas de Analise Combinatória: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos". Entretanto, salientamos que a partir das noções simples do princípio multiplicativo, privilegiando raciocínios indutivos, é possível chegar à compreensão das técnicas gerais de Contagem, exposta por Morgado et al (1991).

Figura 9: MTA do 5° ano

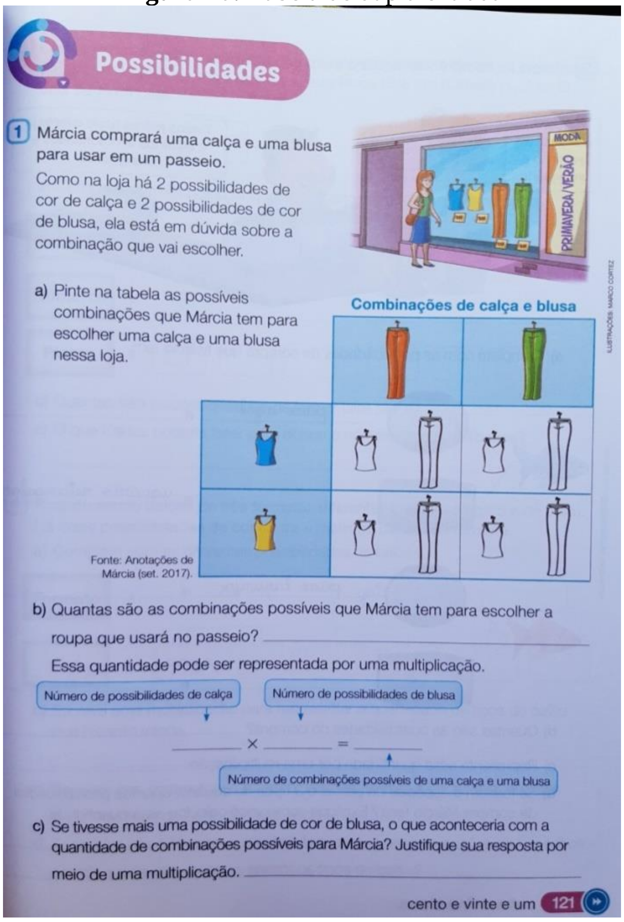
Fonte: autores

Habilidades:

> (EF05MA01) Ler, escrever e ordenar números naturais até a ordem das centenas de milhar com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal.
>
> (EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.
>
> (EF05MA25) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas, organizar dados coletados por meio de tabelas, gráficos de colunas, pictóricos e de linhas, com e sem uso de tecnologias digitais, e apresentar texto escrito sobre a finalidade da pesquisa e a síntese dos resultados.

A atividade a seguir, pertence às unidades temáticas: números e, probabilidade e estatística, habilidades EF05MA09 e EF05MA25. Nessa atividade, intitulada: possibilidades, temos explicitamente, elementos de Análise Combinatória. A atividade pede que sejam fornecidas as combinações, de calças e blusas, possíveis para Márcia comprar.

Figura 10: Tabela de dupla entrada



Possibilidades

1 Márcia comprará uma calça e uma blusa para usar em um passeio.
Como na loja há 2 possibilidades de cor de calça e 2 possibilidades de cor de blusa, ela está em dúvida sobre a combinação que vai escolher.

a) Pinte na tabela as possíveis combinações que Márcia tem para escolher uma calça e uma blusa nessa loja.

Combinações de calça e blusa

Fonte: Anotações de Márcia (set. 2017).

b) Quantas são as combinações possíveis que Márcia tem para escolher a roupa que usará no passeio?
Essa quantidade pode ser representada por uma multiplicação.

Número de possibilidades de calça

Número de possibilidades de blusa

× =

Número de combinações possíveis de uma calça e uma blusa

c) Se tivesse mais uma possibilidade de cor de blusa, o que aconteceria com a quantidade de combinações possíveis para Márcia? Justifique sua resposta por meio de uma multiplicação.

cento e vinte e um 121

Fonte: Moderna (2017, p. 121)

Explicitamente, temos a presença das combinações simples, aqui, introduzidas por meio do uso da tabela de dupla entrada, que nesta etapa de ensino, torna-se extremamente valiosa, uma vez que estamos trabalhando com uma pequena quantidade de dados.

Apesar do dispositivo denominado: tabela de dupla entrada, estar limitado ao uso de dois conjuntos, permitido apenas a formação de pares ordenados, ele se constitui, se utilizado de forma adequada, uma ampla porta de entrada para a compreensão do processo de escolha, que envolve as combinações simples, estudadas no Ensino Médio.

Em relação ao item b, temos a presença, implícita para o aluno, do Princípio Fundamental da Contagem – PFC. Embora não esteja sob o seu enunciado formal, normalmente visto nos livros didáticos, sua presença é reforçada pela multiplicação, que tem como fatores, as quantidades de elementos dos dois conjuntos. A compreensão desse princípio nesta etapa terá grande importância na generalização do PFC, dada a possibilidade de expansão de sua utilização para n conjuntos.

Figura 11: MTA do 6° ano

Fonte: autores

Habilidades:

> (EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

Figura 12: MTA do 7° ano

Fonte: autores

Figura 13: MTA do 8° ano

Fonte: autores

Habilidades:

(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Figura 14: MTA do 9° ano

Fonte: autores

Habilidades:

> (EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

CONSIDERAÇÕES

A elaboração do produto educacional teve como suporte as análises realizadas em nove livros aprovados pelos PNLD 2019, PNLD 2020 e que serão utilizados pelos próximos anos nas escolas públicas brasileiras, visto que o Plano Nacional do Livro e Material Didático em consonância com a BNCC têm como objetivo oportunizar aos alunos o desenvolvimento das mesmas habilidades, independentemente da unidade da federação ou das escolas que frequentam.

Neste sentido, em consonância com a Teoria da Transposição Didática, de Chevallard (2009), é que organizamos ao longo desse produto educacional os resultados de nossa pesquisa, de forma a identificá-los facilmente no texto da Base Nacional Comum Curricular – BNCC, pois, explicitamente, o Objeto de Saber escolhido para investigação no que diz respeito à sua vivência, após o processo transpositivo, na Educação Básica, aparece na BNCC – Ensino Médio e, por consequência nos livros didáticos da última etapa da Educação Básica.

Portanto, a identificação de elementos de Análise Combinatória nos livros didáticos do Ensino Fundamental, bem como a sua explicitação a partir das unidades temáticas e habilidades, poderá tornar mais simplificado o processo de Transposição Didática Interna, uma vez que algumas das noções necessárias à formação do raciocínio combinatório encontram-se ao longo da BNCC e que podem ser encontrado no nosso trabalho.

Por fim, salientamos que as habilidades relacionadas neste trabalho não são fixas, mas apenas uma das possibilidades de busca por informações úteis à criação de situações didáticas que possam conduzir o aluno a resgatar ideias e noções matemáticas já vista em suas vivências ao longo do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

BISOGNIN, E., TOLIO, F. B. **Um Estudo dos Princípios Aditivo e Multiplicativo por meio de Jogos** Ciência e Natura, Santa Maria v.39 n.3, 2017, Set - Dez, p. 723 – 737 Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM ISSN impressa: 0100-8307 - ISSN on-line: 2179-460X

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> . Acesso em: 21 de maio de 2020.

MODERNA, E. (org.). **Buriti mais matemática.** 1º ano Ensino Fundamental – Anos Iniciais - Editora responsável: Carolina Maria Toledo, 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2017.

MORGADO et al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

______. **Buriti mais matemática.** 2º ano Ensino Fundamental – Anos Iniciais - Editora responsável: Carolina Maria Toledo, 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2017.

______. **Buriti mais matemática.** 3º ano Ensino Fundamental – Anos Iniciais - Editora responsável: Carolina Maria Toledo, 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2017.

______. **Buriti mais matemática.** 4º ano Ensino Fundamental – Anos Iniciais - Editora responsável: Carolina Maria Toledo, 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2017.

______. **Buriti mais matemática.** 5º ano Ensino Fundamental – Anos Iniciais - Editora responsável: Carolina Maria Toledo, 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2017.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

SILVA, I.M. **A relação do professor com o saber Matemático e os conhecimentos mobilizados em sua prática.** Tese de doutorado, Universidade Federal do Pará, Belém - PA, 2014.