Jorge Henrique Gualandi
organizador

ENSINO DE MATEMÁTICA
desafios e possibilidades

Bagai

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecária responsável: Aline Graziele Benitez CRB-1/3129

E52 Ensino de matemática: desafios e possibilidades [livro
1.ed. eletrônico] / organização Jorge Henrique Gualandi. –
1.ed. – Curitiba-PR: Editora Bagai, 2021.
E-Book.

Bibliografia.
ISBN: 978-65-89499-83-1

1. Álgebra – Estudo e ensino. 2. Matemática. I. Gualandi,
Jorge Henrique.

05-2021/80 CDD 512

Índice para catálogo sistemático:
1. Álgebra: Matemática 512

https://doi.org/10.37008/978-65-89499-83-1.24.05.21

ISBN 978-65-89499-83-1

Este livro foi composto pela Editora Bagai.

www.editorabagai.com.br
/editorabagai
/editorabagai
contato@editorabagai.com.br

Jorge Henrique Gualandi
organizador

ENSINO DE MATEMÁTICA:
desafios e possibilidades

Bagai

O conteúdo de cada capítulo é de inteira e exclusiva responsabilidade do(s) seu(s) respectivo(s) autor(es). As normas ortográficas, questões gramaticais, sistema de citações e referencial bibliográfico são prerrogativas de cada autor(es).

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este livro apresenta aos leitores importantes contribuições teórico-metodológicas indicando alternativas para o processo de ensino e aprendizagem de álgebra, bem como discussões acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica. Considera-se que os assuntos tratados neste livro são apropriados tanto como referência quanto para reflexões em grupos de estudos e de pesquisas em Educação Matemática. A presente obra é composta por 14 capítulos, resultados de pesquisas e práticas de professores que ensinam matemática.

No capítulo 1, "**Álgebra como integrante da cultura matemática do cidadão**", os autores Gabriel Loureiro de Lima e Barbara Lutaif Bianchini, a partir de uma pesquisa bibliográfica, trazem discussões com o próposito de situar o que se entende por Álgebra e argumentam em favor da Álgebra como um elemento que deveria fazer parte da cultura matemática de todo cidadão.

No capítulo 2, intitulado **"Estágio supervisionado: uma aula na perspectiva do ensino exploratório para construção do pensamento algébrico no ensino fundamental"** os autores Adriana Fátima de Souza Miola, Maria Gracilene de Carvalho Pinheiro e Evandro Vaz dos Santos, apresentam uma prática desenvolvida no estágio supervisionado em um curso de Licenciatura em Matemática, enquanto componente curricular essencial para formação de professores.

Tatiana Bonomo de Sousa e Maria Auxiliadora Vilela Paiva escrevem o capítulo 3, "**Padrões e generalizações no desenvolvimento do pensamento algébrico: (re) construção de saberes docentes na educação básica**" apresentam parte de uma pesquisa mais ampla que teve por objetivo investigar os saberes docentes (re) construídos por professores da educação básica, por meio do estudo de padrões e generalizações.

O capítulo 4, "**Aprendizagem de matemática financeira: uma proposta de trabalho para o ensino médio utilizando planilha eletrônica (broffice.org calc)"**, os autores Sória Pereira Lima Soares e Aldo Agustinho Alves, apresentam uma proposta pedagógica inovadora para aprendizagem de matemática financeira no ensino médio, e investigar seus efeitos.

Maritza Maria Lima de Almeida Souza, Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana e Sidnéia Almeida Silva, escrevem o capítulo 5, **"Da função afim à progressão aritmética: uma sequência de ensino"** apresentando uma proposta de trabalho em que estabelecem relações entre a função afim e as progressões aritméticas (P.A.).

No capítulo 6, **"Subsídios da teoria freiriana na análise de uma atividade de modelagem matemática no nono ano do ensino fundamental: uma releitura", os autores** Samuel Francisco Huf, Viviane Barbosa de Souza Huf, Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro e Dionísio Burak, apresentam uma proposta de trabalho envolvendo a modelagem matemática a partir de uma pesquisa exploratória.

Jorge Henrique Gualandi, Deborah Oliveira da Fonseca e Maria Rosana Soares, apresentam no capítulo 7, **"Trabalhando com a "torre de Hanói": uma proposta de sequência didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico"**, uma proposta de ensino, com objetivo de provocar a aprendizagem do aluno, desenvolvendo o pensamento, a percepção, o raciocínio, a compreensão, a linguagem, a comunicação, entre outros.

No capítulo 8, **"A sequência FEDATHI e o desenvolvimento algébrico no estudo da progressão aritmética (P.A)",** os autores Raimundo Nélio Rodrigues Ferreira, Alan de Souza Sampaio e Maria Suzana Pinheiro, apresentam uma proposta de trabalho que culmina no desenvolvimento do conceito e aplicações das progressões aritméticas.

O capítulo 9, intitulado **"O projeto aventuras currículo+ E a recuperação no ensino da matemática"**, os autores Júlio Antonio Tobias Cunha Barboza e Rosilene Batista de Oliveira, apresentam parte integrante dos dados de uma pesquisa concluída no curso de pós Graduação - Mestrado em Educação, cujo objetivo foi investigar como têm sido utilizadas as novas tecnologias no reforço escolar do ensino de Matemática, no âmbito do Projeto Aventuras Currículo+, nas escolas da rede estadual de ensino – Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SP – Diretoria de Taquaritinga.

No capítulo 10, intitulado **" Reflexões acerca das respostas dos alunos do 5º ano sobre ampliação e redução de figuras à luz da teoria dos registros de representação semiótica"** os autores Weverton de Barros Vieira e Natércia de

Andrade Lopes Neta, analisam os erros que ocorrem em tarefas de ampliação e redução de figuras com alunos do 5º ano do ensino fundamental, à luz da teoria das representações semióticas.

No capítulo 11, intitulado **“ Ensino-aprendizagem de equação de 1º grau via resolução de problemas: uma proposta para a sala de aula”**, os autores Amanda Cristina de Sousa, Marcelo Carlos de Proença e Wilian Barbosa Travassos, apresentam uma proposta de ensino para equação de 1º grau via resolução de problemas.

Marianna Cassa de Souza Santos e Jorge Henrique Gualandi, apresentam no capítulo 12, intitulado **“Um curso de formação continuada para professores que ensinam matemática: espaço propício para discussões acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico”**, um recorte de uma pesquisa de mestrado , em andamento, que visa responder a questão: de que forma as discussões estabelecidas em um curso de formação continuada (FC), para professores que ensinam matemática, podem contribuir para que esses sujeitos reflitam sobre suas práticas profissionais?

No capítulo 13, intitulado **“O ensino de análise: contribuições e perspectivas na formação dos professores de matemática do ensino básico”,** os autores Marcos dos Santos Ferreira e Tarcila Oliveira Matos Muniz, propuseram investigar o papel da disciplina Análise Real na formação inicial do professor de Matemática do ensino básico.

No capítulo 14, intitulado **“Padrões numéricos na tabuada: uma proposta didática”**, os autores Anderson Alves e Karina de Oliveira Castro, apresentam uma proposta de trabalho relacionando a tabuada e a generalização de padrões.

O organizador

ÁLGEBRA COMO INTEGRANTE DA CULTURA MATEMÁTICA DO CIDADÃO

Gabriel Loureiro de Lima[1]
Barbara Lutaif Bianchini[2]

INTRODUÇÃO

A ideia para a redação deste capítulo surgiu a partir de um estudo que realizamos tendo por base as produções do Grupo de Trabalho Educação Matemática no Ensino Superior (GT-04) da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) tratando da temática Álgebra. Observamos neste estudo (BIANCHINI; LIMA, 2021, no prelo) a preocupação dos autores em compreender o que se entende por Álgebra e discutimos em uma das seções do trabalho as considerações dos autores membros do GT a respeito deste aspecto. Estas foram subsidiadas por reflexões de Fiorentini et al. (1993), Pimm (1995), Usiskin (1995) e Lins e Gimenez (1997). Após apresentar essas ideias, sentimos a necessidade de articulá-las com as de outros pesquisadores da Educação Matemática em trabalhos dedicados a mesma temática, a saber: Unguru (1975), Freudenthal (1977), Garcia e Piaget (1989), Jones (1993), Sfard (1995) e Kluth (2004).

Percebemos que não há um consenso acerca da resposta à questão *o que é Álgebra*?, mas que nas reflexões visando respondê-la desempenham papel relevante as concepções daqueles que almejaram realizar esta tarefa e as relações que estabeleceram entre a Álgebra e a Aritmética. Observamos que os caminhos trilhados por estes autores foram: recorrer a um viés histórico; procurar definir a Álgebra tomando por base os objetos matemáticos que são normalmente abordados nas disciplinas tratando desta temática; caracterizar a Álgebra por sua dimensão estrutural e seus invariantes; conceber a Álgebra como o que é inerente a todas as diferentes áreas da Matemática. "As tentativas de respostas, por parte de distintos pesquisadores, à supracitada questão também iluminam a centralidade ocupada, na Álgebra, pela ideia de generalização e as divergências

1 Doutor em Educação Matemática (PUC-SP). Professor do Departamento de Matemática (PUC-SP). ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5723-0582

2 Doutora em Educação (Psicologia da Educação). ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0388-1985

de opiniões a respeito do papel da notação simbólica para a implementação de métodos algébricos" (BIANCHINI; LIMA, 2021, no prelo).

Bezerra, Ribeiro e Silva (2016) no artigo, de cunho teórico, *Mapeamento de Concepções de Álgebra: uma alternativa para compreender seus diversos significados*, também tiveram por objetivo "produzir um 'quadro de referência' acerca das diferentes compreensões de Álgebra na área da Educação Matemática" (p. 421). As discussões foram realizadas pelos autores a partir das ideias de Figueiredo (2007), Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), Lee (2001), Lins e Gimenez (2001), Ribeiro (2013) e Usiskin (1995). Como resultado da investigação, evidenciam-se seis diferentes categorias de Álgebra: Álgebra Inicial, Generalizações, Relação Funcional, Relação Estrutural, Modelagem e Manipulação e suas principais ideias/características.

Mas, por que diferentes autores se preocupam em tentar definir a Álgebra? Qual a importância de compreender as diferentes visões acerca do *que é Álgebra*? E qual a necessidade desta compreensão para um professor que atua na Educação Básica? Para auxiliar o leitor a compreender a relevância, para um professor do nível educacional citado, de reflexões como estas, voltamos nossa atenção para a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), cuja versão final foi homologada em dezembro de 2017. Por meio deste documento, são propostas cinco unidades temáticas (*Números*, *Álgebra*, *Geometria*, *Grandezas e Medidas*, *Probabilidade e Estatística*) correlacionadas que devem orientar o desenvolvimento, ao longo do Ensino Fundamental, de diferentes habilidades que podem ser exploradas com ênfases distintas dependendo do ano de escolarização.

Ao descrever a unidade temática Álgebra, afirma-se que esta

> [...] tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – **pensamento algébrico** – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar,

> interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações (BRASIL, 2017, p. 270).

Ainda mais, salienta-se que "nessa perspectiva, é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a Álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais" (BRASIL, 2017, p. 270). Mas, que Álgebra ensinar nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental? Que abordagem da Álgebra é mais efetiva para o desenvolvimento do pensamento algébrico? A nosso ver, responder a estas questões exige responder primeiramente a um outro questionamento: *O que é Álgebra?*

Segundo Teixeira Junior e Silveira (2020),

> [...] a resposta desta pergunta depende da experiência do usuário com esta palavra. Alguém que nunca viu essa palavra não terá noção alguma de qual seja a resposta, enquanto que um estudante dos anos finais do Ensino Fundamental talvez diria que Álgebra é "fazer contas com letras"; outro estudante, do Ensino Médio, talvez diria que Álgebra é "resolver equação"; um professor de Matemática acrescentaria a esta resposta outros conteúdos, como função, polinômios, corpos, anéis, etc. E assim a definição de Álgebra poderia se ampliar, segundo as visões de matemáticos, filósofos, educadores etc. (TEIXEIRA JUNIOR; SILVEIRA, 2020, p. 30).

Conforme reforça Doerr (2004), o próprio docente pode não ter clareza acerca de como responder à questão *o que é Álgebra?* e, consequentemente, não compreender qual a natureza deste campo de conhecimento ou, ainda, pode ter um entendimento desta questão diferente daquele dos pesquisadores, educadores matemáticos e desenvolvedores de currículos, o que refletirá na maneira como as noções da Álgebra serão por ele trabalhadas em sala de aula. Essa ideia é ratificada por Brown e Drouhard (2004), que fazendo referência a Drouhard e

Panizza (2003), salientam que a maneira como os professores ensinam Álgebra depende fortemente do que eles acreditam ser a Álgebra. Desta forma, poderão enfatizar conhecimentos procedimentais como sendo o cerne da Álgebra, em detrimento de aspectos conceituais, do emprego de contextos significativos e de atividades relacionadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes.

Em síntese, acreditamos que o objetivo de contribuir para a construção do pensamento algébrico de um estudante, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, conforme preconiza a BNCC, só terá chances de ser alcançado se houver, por parte do professor que precisará transpor as recomendações presentes neste documento para o contexto da sala de aula, uma real compreensão acerca das diferentes possibilidades de responder *o que é Álgebra?*

Diante desta problemática, nesse capítulo nossa intenção original era iluminar as ideias de outros autores que, implícita ou explicitamente, procuram responder à indagação: *o que é Álgebra*? e que não foram contempladas nos trabalhos realizados pelos membros do GT04, na investigação de Bezerra, Ribeiro e Silva (2016) e nem em Bianchini e Lima (2021, no prelo), nosso artigo anterior a respeito da temática. No entanto, ao realizar estudos visando redigir o capítulo, compreendemos que, mais do que discutir acerca do *que é Álgebra*? as concepções com as quais nos deparamos, nos permitiam também argumentar em favor da Álgebra como um elemento que deveria fazer parte da cultura matemática de todo cidadão e do pensamento algébrico como um dos componentes do pensamento matemático a ser também desenvolvido por todo cidadão. São dados que nos permitem defender esta ideia que apresentamos nas seções seguintes deste capítulo.

TRÊS CONCEITOS-CHAVE: PENSAMENTO MATEMÁTICO, PENSAMENTO ALGÉBRICO E CULTURA MATEMÁTICA

Ao optarmos por argumentar em favor da Álgebra como parte integrante da cultura matemática de todo cidadão e do pensamento algébrico como parte constituinte de seu pensamento matemático, entendemos ser fundamental para que o leitor possa compreender nossa linha de raciocínio, que tenha clareza a respeito do que entendemos por cultura, pensamento, pensamento matemático e cultura matemática.

Em pesquisas realizadas em parceria com as professoras Eloiza Gomes (Instituto Mauá de Tecnologia) e Patricia Camarena Gallardo (falecida em 2020, mas que atuou durante muitas décadas no Instituto Politécnico Nacional do México e desenvolveu o referencial denominado *Teoria A Matemática no Contexto das Ciências*), cujos resultados serão oportunamente publicados, nos dedicamos a estabelecer, por meio de reduções comparativas de definições formuladas por diferentes autores, as concepções de cultura, pensamento, pensamento matemático e cultura matemática que, a nosso ver, são as mais adequadas aos propósitos de nossas investigações as quais adotamos neste capítulo.

Compreendemos a *cultura* como um elemento essencial para o exercício, de maneira crítica e reflexiva, das atividades cotidianas, sociais e profissionais de qualquer cidadão e a concebemos como *um conjunto de conhecimentos, costumes, normas de comportamento, práticas, representações e símbolos*. O *pensamento*, por sua vez, que é mobilizado pelo cidadão em qualquer circunstância da vida que lhe exija compreender situações ou assuntos, fazer julgamentos e resolver problemas, *é o resultado de processos racionais do intelecto ou de abstrações da imaginação*.

O *pensamento matemático* é um tipo especial de pensamento, também necessário para muitas das atividades cotidianas, sociais e profissionais exercidas por um cidadão, e que, a nosso ver, pode ser entendido como *o resultado de processos racionais do intelecto ou de abstrações da imaginação realizados a partir da observação e reflexão científica de fenômenos de diferentes naturezas, por meio da sistematização e contextualização de conhecimentos matemáticos, da capacidade de perceber visualmente e espacialmente, representar, memorizar, pensar de maneira criativa, objetiva, lógica, analítica e crítica*. Pensar matematicamente é um dos aspectos que compreendemos como constituinte da *cultura matemática* de um cidadão, que, por sua vez, é *um conjunto de conhecimentos, habilidades e capacidades matemáticas que possibilitam a um indivíduo, aplicar e contextualizar os conhecimentos matemáticos, pensar matematicamente e utilizar a linguagem matemática para comunicar-se em diferentes contextos*.

Se entendemos o pensamento matemático como ingrediente da cultura matemática de um cidadão, sendo o *pensamento algébrico* um tipo especial de pensamento matemático, ele também está inserido na cultura matemática de um indivíduo. A concepção de pensamento algébrico que assumimos neste capítulo é a formulada pela educadora matemática canadense Carolyn Kieran em 2004 e que, segundo ela,

> [...] envolve o desenvolvimento de modos de pensar através de atividades para as quais o simbolismo da Álgebra pode ser usado como ferramenta, mas que não são exclusivas da Álgebra e que podem ser abordadas sem qualquer uso de simbolismo algébrico, tais como, analisar relações entre quantidades, detectar a estrutura, estudar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e predizer (KIERAN, 2004, p. 149).

Tendo esclarecido ao leitor o que entendemos por cada um dos conceitos por nós concebidos como chaves neste capítulo, passamos então a apresentar, nas próximas seções, as ideias que nos permitem subsidiar nossa visão de que a Álgebra está inserida na cultura matemática de um cidadão e o pensamento algébrico integra seu pensamento matemático que, por sua vez, também é um dos ingredientes de sua cultura matemática.

A ÁLGEBRA TANTO COMO ATIVIDADE HUMANA QUANTO COMO ARTEFATO CULTURAL

Demo-nos conta da possibilidade de defender a ideia de que a Álgebra constitui parte da *cultura matemática* de todo cidadão a partir das considerações da pesquisadora canadense Leslie Lee citadas por Kieran (2004). Ao entrevistar matemáticos, professores, estudantes e pesquisadores em Educação Matemática questionando-os a respeito *do que é Álgebra?* Lee (1997) obteve, entre outras respostas, que *Álgebra é uma Cultura*. Kaput, Blanton e Moreno (2008) detalham a ideia formulada por Lee (2001) a partir desta concepção: a Álgebra pode ser entendida como um *artefato cultural*, ou seja, algo recebido como parte de nossa herança cultural e que está inserido nos sistemas educacionais de diferentes países de forma consonante às culturas específicas de cada um desses locais.

Esse posicionamento é ratificado por Kendal e Stacey (2004) ao argumentarem que se a Matemática e particularmente a Álgebra podem ser concebidas como artefatos culturais, especialmente em contextos escolares, é de se esperar que os currículos de Álgebra de diferentes países interpretem esse campo de conhecimento de maneira articulada às suas culturas escolares. Os autores, visando ilustrar suas considerações, apresentam as visões de Álgebra que prevalecem em currículos de diferentes países:

> - Uma maneira de expressar generalidade e padrão (fortemente evidente na Colúmbia Britânica (província localizada no extremo oeste do Canadá), Inglaterra, Cingapura).
> - Um estudo de manipulação de símbolos e resolução de equações (Brasil, França, Alemanha, Hong Kong, Hungria, Israel, Itália, Federação Russa).
> - Um estudo das funções e suas transformações (França, Hungria, Israel, Japão, Holanda, EUA).
> - Uma maneira de resolver problemas (geralmente problemas com palavras) fora do alcance dos métodos aritméticos (República Tcheca, França, Hungria, Itália, Japão, Hong Kong, Cingapura).
> - Uma forma de interpretar o mundo por meio da modelagem de situações reais, de forma precisa ou aproximada (Quebec, Inglaterra, Holanda, Colúmbia Britânica).
> - Um sistema formal, possivelmente lidando com a teoria dos conjuntos, operações lógicas e operações em entidades diferentes de números reais (Cingapura, Hungria) (KENDAL; STACEY, 2004, p. 335).

Para Lins e Kaput (2004), uma das razões que dificultam responder de maneira única *o que é Álgebra?* é exatamente o fato de ela estar profundamente atrelada a "muitos fatores culturais e outros que variam amplamente entre as comunidades e até em seus interiores" (p. 48). Entre tais fatores culturais está a forma de pensamento dominante em determinada época que, certamente, terá influência na definição de Álgebra formulada em certo período, sob sob uma escola filosófica específica. Essa ideia é ilustrada por Moura e Souza (2005) que afirmam:

> Pensar a Álgebra, a partir de Diofanto, significa que devemos pensar os conceitos algébricos conectados ao objeto número, enquanto unidade. Ao mesmo tempo, pensar a Álgebra a partir de Euclides significa pensá-la a partir

> de aspectos geométricos, como, por exemplo, a imagem e a figura. Pensar sobre a Álgebra a partir do número e dos aspectos geométricos remete-nos a pensar sobre os entes, as coisas. Pensar a Álgebra, a partir de Viète, significa pensá-la a partir da propriedade do número [...]. Permite-nos pensar em espécies e não mais em entes, em coisas. As espécies contêm o número, a geometria e as propriedades do número. A natureza do pensamento de Viète é bem diferente da natureza do pensamento de Diofanto. A lógica de Diofanto é numérica, enquanto que a lógica de Viète é de espécies; é o que permite que as diversas áreas do conhecimento façam da Álgebra uma ferramenta (MOURA; SOUZA, 2005, p. 21-22).

No entanto, conforme salientam Kaput, Blanton e Moreno (2008), para Lee (2001), se concebermos a Álgebra apenas como artefato cultural e, portanto, como um conjunto herdado de conhecimentos, corremos o risco de abordá-la sem nos atermos à sua relação com as pessoas que a estudam ou a utilizam. Professores com essa visão podem, por exemplo, fazer referência à propriedade associativa da multiplicação como uma verdade absoluta da Matemática a respeito da qual não há preocupação em se conhecer como ela foi estabelecida ou de como os estudantes a aprendem ou não. Por esta razão, Lee (2001) entende ser necessário fundir a essa visão de Álgebra como artefato cultural outra ideia emergente das entrevistas por ela realizadas em 1997: *a Álgebra como atividade humana*.

Segundo Lee (1997), explícita ou implicitamente, a concepção de Álgebra como atividade humana permeia todas as respostas dadas por seus entrevistados que, de uma forma ou de outra, concebem a Álgebra como "uma atividade, algo que você faz, uma área de ação" (LEE, 1997 apud KIERAN, 2004, p. 22). Um dos entrevistados destaca que, no contexto escolar, "a Álgebra é muito mais sobre fazer; na realidade diz respeito a agir sobre objetos, com atenção maior sendo dada às transformações do que aos próprios objetos" (Idem).

Como destacam Kaput, Blanton e Moreno (2008, p. 7-8) com base em Lee (2001), a concepção de Álgebra como atividade humana está muito ligada à ideia de raciocínio e aqueles que a concebem desta forma "tendem a considerar as maneiras dos alunos de fazer, pensar e falar sobre Matemática como fundamentais. Para eles, a Álgebra emerge da atividade humana; depende dos seres humanos para sua existência, não apenas historicamente, mas também no presente" (p. 7-8).

Lee (2001) posiciona-se então favoravelmente a uma caracterização de Álgebra fundindo essas duas identidades mencionadas: a Álgebra como um artefato cultural e como certos tipos de atividades humanas, destacando ainda que, independentemente da visão considerada, deve-se ter clareza de que a Álgebra não é um corpo estático de conhecimento. Como salienta Kaput (2008) a partir das reflexões da autora, a Álgebra "evolui como um artefato cultural em termos dos sistemas de símbolos que incorpora (mais recentemente devido às tecnologias eletrônicas) e evolui como uma atividade humana conforme os alunos aprendem e se desenvolvem" (p. 7-8). O contínuo desenvolvimento da Álgebra, inclusive no contexto escolar, é um aspecto também reforçado por Teixeira Junior e Silveira (2019), que afirmam ser a Álgebra algo que se amplia com o tempo e com seus diversos usos, como acontece com a gramática.

Otte (2009, p. 52-53), a partir das ideias de Hamilton (1835), também ilumina a interface existente entre a Álgebra como atividade humana e como artefato cultural, ao afirmar que ela "é considerada um Instrumento, ou uma Linguagem ou uma Reflexão, assim como a facilidade de operação, ou expressão de simetria ou clareza de pensamento (o agir, o fazer ou o saber) é eminentemente apreciada e buscada por ela".

Conforme podemos observar a partir dos parágrafos anteriores, tanto Otte (2009) quanto Lee (2001) citada por Kaput (2008) e Kaput, Blanton e Moreno (2008) trazem à tona a questão da Álgebra como uma forma de raciocínio, de reflexão. Esta ideia está explicitamente presente também nos Princípios e Estândares da Matemática Escolar (NCTM, 2000) do Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos, nos quais defende-se uma "visão longitudinal da Álgebra como uma linha de pensamento e de resolução de problema" (KAPUT, 2008, p. 6-7). Saul (2001), por sua vez, salienta que a Álgebra é uma poderosa "ferramenta cognitiva" básica que contribui para a compreensão de abstrações em geral.

Os entrevistados por Lee (1997) além de se referirem à Álgebra como artefato cultural e como atividade humana, a consideram como uma forma de pensamento, concepção também compartilhada por Love (1986) para quem a

Álgebra diz respeito exatamente aos "modos de pensamento que são essencialmente algébricos - por exemplo, lidar com as quantidades ainda desconhecidas, inverter e reverter as operações, ver o geral no particular. Estar ciente desses processos e controlá-los é o que significa pensar algebricamente (LOVE, 1986 apud KIERAN, 2004, p. 25). Émile-Auguste Chartier, filósofo e professor francês, autor, sob o pseudônimo de Alain, de obras que influenciaram diferentes gerações, em seu *Propos sur l'éducation*, reunindo uma série de crônicas sobre Educação escritas por ele, caracteriza a Álgebra recorrendo a uma metáfora: *máquina de raciocínio*. Afirma que:

> Já que uma máquina de contagem é possível, uma máquina de raciocínio também é possível. E a Álgebra é uma espécie de máquina de raciocínio; você gira a manivela e obtém sem fadiga um resultado no qual o pensamento só chegaria com infinita dificuldade. A Álgebra parece um túnel; você passa sob a montanha, sem se preocupar com aldeias e caminhos sinuosos; quando se dá conta, está do outro lado e não viu nada (ALAIN (Émile-Auguste Chartier), 1932, p. 123).

Finalizada a apresentação dessa identidade dual da Álgebra como artefato cultural e como atividade humana, passamos, na sequência, a apontar os elementos que, na visão de diferentes autores, são essenciais à Álgebra.

OS ELEMENTOS ESSENCIAIS À ÁLGEBRA

Compreendemos que há uma série de elementos que são essenciais à Álgebra e, de alguma forma, teceremos comentários acerca de muitos deles nesta seção. No entanto, entendemos que há entre estes elementos, sem que haja qualquer hierarquia entre eles, quatro com importância capital para a Álgebra: a linguagem, o simbolismo, a abstração e a generalização. Iniciaremos por eles, portanto, nossas considerações nesta seção.

Nas entrevistas realizadas por Lee (1997) mencionadas na seção anterior, evidenciou-se também a concepção de Álgebra como uma *linguagem*. Esta ideia é ratificada por Teixeira Junior e Silveira (2019, p. 46) que caracterizam a Álgebra "como um jogo de linguagem, e que, por consequência, possui uma gramática". Os mesmos autores afirmam que a Álgebra deve ser considerada como "uma linguagem própria com sintaxe, semântica e pragmática que demandam um estudo sobre suas regras, vendo suas similitudes com outros jogos de linguagem como possibilidades de comparação, e não como sua compreensão em si" (TEIXEIRA JUNIOR; SILVEIRA, 2019, p. 48).

Segundo os pesquisadores Ponte, Branco e Matos (2009), os símbolos são objetos centrais na Álgebra e, conforme esta perspectiva, "este campo da Matemática seria então definido pelo uso que faz de uma linguagem própria – a linguagem algébrica. Deste modo, faz sentido encarar o trabalho em Álgebra como a manipulação dos símbolos e das expressões algébricas (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 8). Para Terquem (1827) apud Chevallard (1984, p. 62), "Álgebra é a arte de executar em quaisquer quantidades, por meio de signos gerais, todas as operações da Aritmética, e de representar, usando os mesmos signos, todas as relações entre essas quantidades".

Ponte, Branco e Matos (2009) ressaltam, no entanto, que apesar da indiscutível potencialidade do *simbolismo* para a Álgebra, é necessário que estejamos atentos para não atribuir aos símbolos toda a essência da Álgebra, desligando-se de referentes concretos no início do trabalho com vistas a desenvolver o pensamento algébrico, correndo-se o risco, desta forma, de torná-lo inacessível ao aluno. "É o que acontece quando se utiliza simbologia de modo abstrato, sem referentes significativos, transformando a Matemática num jogo de manipulação, pautado pela prática repetitiva de exercícios envolvendo expressões algébricas, ou quando se evidenciam apenas as propriedades das estruturas algébricas" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 8).

Este alerta em relação à ênfase que muitas vezes é dada ao simbolismo no trabalho com a Álgebra está presente também na obra de Charbonneau (1996) citada por Menezes (2006). O autor afirma que a Álgebra não pode ser entendida puramente como uma questão de simbolismo. Corrobora essa ideia salientando que: "embora seja possível gerar uma equação a partir dos dados que um problema algébrico nos fornece, reduzir a Álgebra ao simbolismo formal seria igualmente uma visão equivocada" (CHARBONNEAU, 1996 apud MENEZES, 2006, p. 105).

Para Menezes (2006, p. 108), "a Álgebra é síntese entre uma Matemática utilitária e de domínio mais concreto e a Matemática da abstração pura. É a síntese entre números e letras, que são os símbolos humanos mais poderosos, construídos ao longo da sua evolução histórica".

A questão da centralidade da *abstração* para a Álgebra é especialmente destacada por Ponte (2006) o qual afirma que "no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstratas, que tanto podem ser equações, inequações ou funções como podem ser outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos" (PONTE, 2006, p. 7). Teixeira Junior e Silveira (2019, p. 38) concebem a Álgebra como "a expressão máxima de abstração, generalização e até de universalização da Matemática". Saul (2001, p. 43), por sua vez, conceitua a Álgebra "como uma representação de generalizações na Aritmética e depois como um estudo de operações".

Convém salientar que, ao mesmo tempo em que na BNCC (BRASIL, 2017) preconiza-se o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade, Nasser (2013) argumenta que a habilidade de abstração também deve ser desenvolvida desde os anos iniciais. Uma vez que a abstração é um dos elementos essenciais da Álgebra, o trabalho com esta habilidade desde as mais tenras idades alinha-se às diretrizes estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular. Da mesma forma, a habilidade de *generalização*, outro componente essencial da Álgebra, também pode ser desenvolvida desde o ingresso das crianças na escola e uma prática que contribui para tal desenvolvimento "é explorar o reconhecimento de padrões desde os anos iniciais, o que mais tarde pode facilitar a introdução à Álgebra e na representação em linguagem algébrica de uma lei de formação" (NASSER, 2013, p. 893).

Outro aspecto essencial à Álgebra são as *relações*. Para Charbonneau (1996), em essência, a Álgebra é justamente "um caminho para manipular relações" (CHARBONNEAU, 1996 apud MENEZES, 2006, p. 105). Ainda na visão de Charbonneau (1996), essa ideia está associada a outra mais abrangente: "a de que existem relações entre números, ou entre magnitudes, ou ainda entre números e letras, de forma que a Álgebra poderia ser compreendida como uma 'ciência das relações'" (p. 105-106).

Mais uma noção fortemente associada à Álgebra é a de *quantidades*, especialmente a de quantidades desconhecidas que está presente, inclusive, no verbete escrito por D´Alembert para definir *o que é Álgebra* na *Encyclopédie* também conhecida como *Dicionário Razoado das Ciências, das Artes e dos Ofícios*, cujo primeiro volume foi lançado em 1751 e a publicação de volumes seguiu até 1772. Nesta obra, conforme apresentam Godoy e Leite (2018), D´Alembert afirma que:

> Álgebra é o método de realização do cálculo de toda sorte de quantidades em geral, representadas por signos de abrangência universal. [...] A Álgebra é, propriamente dizendo, o método de calcular quantidades indeterminadas, uma espécie de Aritmética por meio da qual calculam-se quantidades desconhecidas como se fossem conhecidas. Nos cálculos algébricos, considera-se como dada a grandeza procurada, o número, a linha ou qualquer outra quantidade [...] e caminha-se de consequência em consequência até que a quantidade suposta no início como desconhecida [...] torne-se igual a uma quantidade conhecida (GODOY; LEITE, 2018, p. 21).

Euler concebe a Álgebra de forma coincidente a esta concepção manifestada por D´Alembert na *Encyclopédie*. Em uma de suas obras, afirma que a Álgebra pode ser entendida como "a ciência que ensina como determinar quantidades desconhecidas por meio daquelas que são conhecidas" (EULER, 1840 apud SILVA, 2009, p. 39).

Passamos então a salientar, na próxima seção, a ideia de Álgebra como ferramenta para a resolução de problemas de diferentes áreas.

A ÁLGEBRA COMO UMA FERRAMENTA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DIFERENTES ÁREAS

A ideia de Álgebra como uma ferramenta é outra concepção presente nos dados coletados por Lee (1997) por meio de suas entrevistas com professores, conforme salienta Kieran (2004). Podemos perceber a partir da leitura de Menezes (2006), que o pesquisador Claude Janvier (1996) tem visão aderente a esta de alguns dos entrevistados de Lee, uma vez que, para ele, "o caminho fundamental para se entender e trabalhar com a Álgebra seria a modelização. A Álgebra como ferramenta para poder estabelecer relações, gerar modelos, operar" (MENEZES, 2006, p. 107). Guichard (2000), ao refletir acerca de se a Álgebra é um domínio ou uma linguagem, afirma que, em sua visão, ela "é uma linguagem que nos permite resolver problemas por meio de cálculos" (GUICHARD, 2000, p. 50).

No âmbito da própria Matemática, a Álgebra permite a resolução de problemas de diferentes domínios. A este respeito, conforme destacam Godoy e Leite (2018, p. 22), D´Alembert na *Encyclopédie* argumentava que "alguns autores também consideram a Álgebra como a ciência denominada Geometria Metafísica, em que as letras do alfabeto que são utilizadas, podem significar linhas ou números, ou seja, podem abordar problemas geométricos ou aritméticos". Essa ideia é explicitamente reforçada por Menezes (2006, p. 108) para quem a Álgebra é a "síntese entre a possibilidade de gerar modelos gerais e de resolver problemas de um contexto específico. Ela é síntese, enfim, entre vários domínios matemáticos: aritmética, geometria, funções etc.".

A potencialidade da Álgebra como ferramenta para a resolução de problemas não se restringe, de forma alguma, à Matemática. Kaput, Blanton e Moreno (2008) compreendem, neste sentido, "a Álgebra como aplicação de um agrupamento de linguagens de modelação dentro e fora da matemática" (p. 11). Cavalcanti e Santos (2010) também compreendem que a Álgebra é um "instrumento potencial para o estudo e desenvolvimento de outras ciências e das tecnologias" (p. 41) e, então, podemos finalizar esta seção ratificando as considerações de Rocha Falcão (1997) apresentadas por Menezes (2006) acerca da natureza dual da Álgebra como ferramenta de resolução de problemas e como objeto matemático.

CONCLUINDO… A ÁLGEBRA DEVE SER PARTE INTEGRANTE DA CULTURA MATEMÁTICA DE TODO CIDADÃO

Nesta última seção do capítulo, nosso objetivo será argumentar a favor de uma concepção de Álgebra como algo que deve pertencer à cultura matemática de qualquer cidadão. Conforme apresentamos anteriormente, entendemos a cultura matemática como um conjunto de conhecimentos, habilidades e capacidades matemáticas que possibilitam a um indivíduo: aplicar e contextualizar os conhecimentos matemáticos, pensar matematicamente e utilizar a linguagem matemática para comunicar-se em diferentes contextos. Esta cultura está, conforme salienta Paulo (2020, p. 32) a partir das ideias de Lins (1992), relacionada "ao conhecimento anterior que o sujeito traz consigo e que pode ser mobilizado na resolução de situações novas".

Para Abreu León et al. (2014), na cultura matemática de um indivíduo é que está a base de conhecimentos que lhe permite "aplicar a Matemática em situações fora do trabalho escolar e reconhecê-la como parte de sua vida" (p. 14). Os mesmos autores salientam que "a Matemática é parte fundamental da cultura e permeia toda a atividade humana, do trabalho científico às manifestações artísticas" (p. 18). Artigue (2004) inspirada em Steen (2002), alerta que "a cultura matemática de que os cidadãos atualmente precisam vai muito além da tradicional "contagem" [...] deve lhes permitir raciocinar em situações de risco e de incerteza, decifrando e sabendo analisar criticamente a avalanche de informações codificadas que recebe" (p. 6).

Essas ideias são consonantes com as de Abreu León et al. (2014. p. 42) para os quais a formação em Matemática não deve ser concebida como desconectada do restante do "desenvolvimento humano, mas sim uma parte integrante deste". É por essa razão que os autores defendem que a "divulgação e promoção da cultura matemática é uma tarefa urgente que pode modificar a percepção da matemática que se tem em diferentes setores da sociedade, que, com base em preconceitos e desconhecimento de sua importância, a rejeitam" (ABREU LEÓN et al., 2014, p. 15).

Especialmente em relação à Álgebra, Reinhardtsen (2012) recupera as ideias de Lee (1996) que a considera como uma parte da cultura matemática, não isoladas das demais culturas elementares desta área (como a Aritmética e a Geometria), e salienta que a atribuição de significado para a Álgebra "é mais facilmente desenvolvida no interior da cultura da matemática e, no processo de generalização, a linguagem simbólica da Álgebra está presente como uma ferramenta eficiente para expressar a generalidade" (p. 11). A mesma autora defende, segundo salienta Arriaga García (2008, p. 25) que, "ao apresentar a Álgebra como cultura, uma interação entre linguagem e conhecimento pode ser alcançada, em um processo gradual de aculturação algébrica que ocorrerá em sala de aula".

Em síntese, segundo nossa visão, podemos entender que um dos componentes da cultura matemática é a *cultura algébrica*, que compreendemos como *um conjunto de conhecimentos inerentes ao campo da Álgebra, de habilidades e capacidades que podem ser desenvolvidas a partir do trabalho, desde os anos iniciais, com as ideias fundamentais da Álgebra, as quais possibilitam a um indivíduo aplicar e contextualizar conhecimentos algébricos, pensar algebricamente e utilizar a linguagem algébrica para comunicar-se e resolver problemas em contextos matemáticos e extra matemáticos*. Neste sentido, concordamos com Lee (1996), citada por Machado e Almeida (2008, p. 51), que alerta para a importância de nos conscientizarmos acerca da forma como inserimos as primeiras ideias da Álgebra aos estudantes, uma vez que os significados a serem por eles construídos dependerão "em grande parte do ambiente algébrico para o qual os direcionamos, dos aspectos da cultura algébrica para os quais chamamos a atenção, assim como de suas primeiras experiências na Álgebra".

REFERÊNCIAS

ABREU LEÓN et al. Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM. *In*: **Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática en la UNAM (SUMEM)**, 2014, México. Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

ARRIAGA GARCÍA, G**. Procesos de generalización con estudiantes de 1° y 2° de secundaria de una escuela pública del distrito federal:** una propuesta de enseñanza. 2008. 80 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Pedagógica Nacional, México, 2008.

ARTIGUE, M. Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? **Educación Matemática**, Grupo Santillana México, Distrito Federal, México, v. 16, n. 3, p. 5-28, dic., 2004.

BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. A Álgebra e seu papel: reflexões a partir das produções do GT 04 da SBEM. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n.70, ago. 2021. No prelo.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar. 2. ed. rev. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC C_20dez_site.pdf. Acesso em: 22 de março de 2021.

BROWN, L.; DROUHARD, J-P. Responses to 'The Core of Algebra'. *In*: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (ed.). **The Future of the Teaching and Learning of Algebra - The 12th ICMI Study**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 35-40.

CAVALCANTI, J. D. B.; SANTOS, M. C. Al-jabr: duas ou três palavras sobre o nascimento de uma nova matemática. Associação dos Professores de Matemática - APM - Portugal. **Revista Educação e Matemática**, n. 107, p. 40-41, mar./abr., 2010.

CHARTIER, A. É. **Les dieux (1934).** 13e èd. Paris: Les Presses Universitaires de France, 1967. 202 p. Une édition électronique réalisée à partir du livre d'Alain, Propos sur l'éducation. Disponível em:http://classiques.uqac.ca/classiques/Alain/propos_sur_education/propos_sur_education.pdf. Acesso em: 30 de março de 2021.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college. Première partie - L'évolution de la transposition didactique. **Petit XII**, n. 5, p. 51 à 94, 1984. Disponível em: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/5x3_1570714298158-pdf. Acesso em: 30 de março de 2021.

DOERR, H. Teachers' Knowledge and the Teaching of Algebra. *In*: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (ed*.).* **The Future of the Teaching and Learning of Algebra - The 12th ICMI Study**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, p. 267-290, 2004.

GODOY, K. V.; LEITE, D. G. A classificação matemática de D'Alembert. **Revista Educação Matemática em Foco**, v. 7, n. 1, p. 1-37, 2018.

GUICHARD, J. P. Qu'est-ce que l'algèbre? Un domaine ou un langage? **L'algèbre au lycée et au college**, Montpellier: Publication de l'IREM de Montpellier, p. 40-57, 2000. Disponível em: https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/MO/IMO00004/IMO00004.pdf. Acesso em: 20 de março de 2021.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? *In*: J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (ed.). **Algebra in the Early Grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 5-17

KAPUT, J.; BLANTON, M.; MORENO, L. Algebra from a symbolization point of view. *In*: KAPUT, J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (ed.) **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 19-55.

KENDAL, M.; STACEY, K. Algebra: A World of Difference. *In*: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (ed*.).* **The Future of the Teaching and Learning of Algebra - The 12th ICMI Study**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 329-346.

KIERAN, C. The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. *In*: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (ed*.).* **The Future of the Teaching and Learning of Algebra - The 12th ICMI Study**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 21-33.

LINS, R.; KAPUT, J. The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field. *In*: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (ed*.).* **The Future of**

the Teaching and Learning of Algebra - The 12th ICMI Study. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 47-70.

MACHADO, S. D. A.; ALMEIDA, M. M. M. A generalização de padrão sob o ponto de vista de um professor de Matemática do Ensino Fundamental. **Perspectivas da educação matemática**, Campo Grande, MS, v. 1, n. 1, p. 41-54, jan./jun., 2008.

MENEZES, A. P. A. B. **Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à Álgebra na 6a série do Ensino Fundamental**. 2006. 259 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Centro de Educação, Recife, 2006.

MOURA, A. R. L.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **ZETÉTIKÉ,** CEMPEM, FE, UNICAMP, v. 13, n. 24, p.11-46, jul./dez., 2005.

NASSER, L. O papel da abstração no Pensamento Matemático Avançado. *In*: **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME).** Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. 2013. p. 892 -897.

OTTE, M. O Que é um Texto? (Parte 2). **Revista Educação Pública,** Cuiabá, v. 18, n. 36, p. 49-69, jan./abr. 2009.

PAULO, J. P. A. **Compreendendo formação de professores no âmbito do Modelo dos Campos Semânticos**. 2020. 294 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2020.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. *In*: I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (ed.). **Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores.** Lisboa: SEM-SPCE. 2006. p. 5-27.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. Álgebra no ensino básico. Lisboa: DGIDC. 2009.

REINHARDTSEN, J. **The introduction of Algebra.** Comparative studies of textbooks in Finland, Norway, Sweden and USA. 2012. 142 f. Dissertação (Mestrado) - University of Agder, Faculty of Technology and Sciences, Department of Mathematical Sciences, 2012.

RIBEIRO, A. J.; BEZERRA, F. J. B.; SILVA, R. L. Mapeamento de concepções de Álgebra: uma alternativa para compreender seus diversos significados. **Acta Scientiae**, Canoas, v.18, n.2, p. 419-434, maio/ago. 2016

SAUL, M. Algebra: What Are We Teaching. *In*: CUOCO, A. A. (Eds*.)*. **The Roles of Representation in School Mathematics**. National Council of Teachers of Mathematics, 2001. p. 35-43.

SILVA, C. M. S. O livro didático mais popular de Leonhard Euler e sua repercussão no Brasil. **Revista Brasileira de História da Matemática,** v. 9, n. 17, abr./set., 2009 p. 33-52. Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática.

SILVA, M. H. **Estudos das visões sobre Álgebra presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental em relação a Números e Operações.** 2006. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUCSP, São Paulo, 2006.

TEIXEIRA JUNIOR, V.; SILVEIRA, M. R. A. O ensino de álgebra e a filosofia de Wittgenstein: sobre regras e essência. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 29-49, 2020. Disponível em: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p29-49. Acesso em: 15 de março de 2021.

ESTÁGIO SUPERVISIONADO: UMA AULA NA PERSPECTIVA DO ENSINO EXPLORATÓRIO PARA CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Adriana Fátima de Souza Miola[3]
Maria Gracilene de Carvalho Pinheiro[4]
Evandro Vaz dos Santos[5]

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A importância do estágio supervisionado nos cursos de licenciaturas, enquanto componente curricular essencial para formação de professores, é ratificado por vários autores (PIMENTA; LIMA, 2011; AROEIRA; PIMENTA, 2018; SANTOS; COSTA; PEREIRA, 2018; ARAÚJO, 2020) que defendem nesse componente a possibilidade de elementos necessários para a construção da identidade profissional docente. Desse modo, o estágio supervisionado é um componente de profissionalização docente, como afirmam Pimenta e Lima (2011, p. 34): "[...] o estágio é o eixo central na formação de professores, pois é através dele que o profissional conhece os aspectos indispensáveis para a formação da construção da identidade e dos saberes do dia a dia".

Nesse aspecto, advogamos que, por esse componente, o professor em formação tem a oportunidade de conhecer e vivenciar a realidade escolar, o contexto em que atuará, antecipando situações que poderão ocorrer em seu exercício profissional. Dentro desse processo formativo por meio dos estágios, as regências têm papel fundamental, pois podem propiciar reflexões relacionadas à prática docente, principalmente sobre as escolhas metodológicas.

Nesse sentido, este texto tem o objetivo de apresentarmos um relato de experiência sobre as contribuições da disciplina de Estágio Supervisionado para a formação de um licenciando em Matemática, durante uma aula de regência

3 Doutora em Educação Matemática (UFMS). Docente do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciência e Matemática (UFGD). ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4757-2554

4 Doutora em Educação Matemática (UNIAN). ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4240-5041

5 Licenciando em Matemática (FACET/UFGD). ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0035-4322

para uma turma do 8º ano do ensino fundamental, abordando a construção do pensamento algébrico.

O PENSAMENTO ALGÉBRICO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

As dificuldades na aprendizagem de conceitos matemáticos envolvem diversos conteúdos, principalmente os relativos à Álgebra. A dificuldade em expressar seus pensamentos na linguagem algébrica pode estar relacionada ao que Danyluk (1993, p. 40) já dizia:

> Ao ler um símbolo matemático, é preciso entender o significado atribuído a ele. O símbolo traduz uma ideia e se refere a alguma coisa. É importante que o leitor reconheça um símbolo e faça uso de notações adequadas para expressar ideias. Mas somente usar e reconhecer sinais indica que a pessoa tenha compreendido ou atribuído um significado para o mesmo. Isso pode ser considerado uma atividade mecânica se não houver compreensão.

Notamos durante o desenvolvimento da disciplina de Estágio que a álgebra, muitas vezes, é excluída, pois muitos alunos não conseguem compreendê-la e acabam realizando as atividades mecanicamente. Assim, entendemos que um trabalho que busque promover a generalização, o discurso de argumentação e sua expressão de acordo com a capacidade dos alunos pode levá-los a desenvolver o pensamento algébrico.

Segundo Blanton e Kaput (2005, p. 413), o pensamento algébrico é:

> Um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados a sua idade.

Os documentos oficiais sinalizam nessa direção ao orientar que o ensino de matemática deve garantir também “[...] a observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa” (BRASIL, 1998, p. 56).

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) reforça que o pensamento algébrico deve ser desenvolvido desde os primeiros anos de escolaridade, afirmando que "[...] o trabalho com a álgebra, no início da escolaridade, contribui para que os/as estudantes desenvolvam um tipo de raciocínio específico, denominado pensamento algébrico" (BRASIL, 2016, p. 278).

As escolhas metodológicas são fundamentais para propiciar o ensino de Álgebra e desenvolver efetivamente o pensamento algébrico nos alunos. Nesse contexto, este capítulo discute o decorrer de uma aula realizada em uma perspectiva que não priorizou a simples manipulação de regras, mas buscou construir conhecimentos algébricos pelos alunos participantes, estabelecendo conjecturas, manipulando expressões e levando-os a tirar suas próprias conclusões.

O CENÁRIO ONDE O ESTUDO SE DESENVOLVEU

O regulamento em vigência do estágio supervisionado do curso de Matemática da UFGD é normatizado pela Resolução CEPEC/UFGD n.º 53, de 1 de julho de 2010, e fundamenta-se no Parecer n.º CNE 28, de 2 de outubro de 2001, e nas Resoluções CNE n.º 2, de 19 de fevereiro de 2002, e n.º 2, de 1 de julho 2015.

O estágio supervisionado no curso se divide em: "I – Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental I (162 h/a), no 5º semestre do curso; Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental II (162 h/a), no 6º ano do curso; Estágio Supervisionado do Ensino Médio I (90 h/a), no 7º semestre do curso; e Estágio Supervisionado do Ensino Médio II (72 h/a), no 8º semestre do curso" (PPC, 2017, p. 22), sendo considerado uma disciplina curricular na qual os professores orientadores responsáveis têm uma carga horária de atividade de ensino. Cabe destacar que as disciplinas são regulamentadas pela Comissão de Estágio Supervisionado (COES).

O presente estudo ocorreu no ano de 2019, durante a realização da disciplina de Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental II, sendo metade de sua carga horária realizada nas escolas de ensino básico, nas turmas de oitavos e nonos anos. A regência foi desenvolvida, pelo terceiro autor, sob a orientação do primeiro e segundo autor deste texto, em uma instituição pública da rede estadual de Mato Grosso do Sul, localizada em uma região periférica do município de Dourados.

Para efetivar a regência foi necessário elaborar um plano de aula e optou-se pelo ensino exploratório, pois, segundo Canavarro (2011), nessa abordagem metodológica, a aprendizagem matemática ocorre a partir do trabalho com tarefas que propiciem o surgimento de ideias matemáticas, e que são sistematizadas em uma discussão coletiva. Nessa acepção, o professor não é o centro das atenções, ou seja, os alunos devem chegar aos resultados e elaborar suas próprias conclusões; a tarefa do professor é guiá-lo para que isso ocorra da melhor maneira possível e depois sistematizar de forma correta o pensamento do aluno.

Para a realização dessa metodologia na perspectiva do ensino exploratório, deve-se atender a alguns passos. O primeiro é a apresentação da tarefa, que consiste em organizar a turma e expor a tarefa. A segunda etapa é o desenvolvimento da tarefa, quando os alunos cumprem a tarefa e o professor acompanha-os e guia-os para o resultado desejado, com questionamentos e comentários. A terceira fase, denominada discussão coletiva, consiste em mostrar as diferentes resoluções a que os alunos chegaram. Nessa etapa, o professor age como mediador das apresentações, isto é, ele busca concessões entre o modo de resolver de cada aluno e o que o raciocínio deles tem em comum. A última fase é a sistematização, quando se esclarecem todas as dúvidas dos alunos e depois formalizam-se os conceitos, identificando-os na tarefa.

Diante da nossa compreensão acerca de cada uma dessas etapas, destacamos que a escolha por essa proposta metodológica se justifica, também, por propiciar o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois não prioriza a simples manipulação e o uso de regras, mas a construção de conhecimentos algébricos pelo estudante.

PLANEJANDO A AULA NA PERSPECTIVA DO ENSINO EXPLORATÓRIO

A tarefa que foi proposta para uma turma de oitavo ano visou explorar conceitos relacionados à resolução de equações do primeiro grau e sistemas lineares de duas variáveis. Buscando atender às exigências da perspectiva metodológica, segundo Stein *et al.* (2008), a tarefa deve ter elevado nível de demanda cognitiva para favorecer a investigação e a discussão de ideias matemáticas; portanto, não pode ser apenas de memorização ou de repetição de procedimentos.

Com base nessa compreensão, no planejamento da aula, considerou-se os seguintes objetivos: interpretar o problema; identificar as incógnitas; reconhecer e estruturar o sistema; introduzir duas formas de resolução de sistemas: método da substituição e o método da adição.

Tomando como referência esses objetivos, buscamos suporte para explorar o conteúdo em livros didáticos. Após a análise de várias possiblidades, selecionamos a atividade abaixo:

Figura 1 – Tarefa: o problema dos DVDs

Fonte: BIANCHINI (2015, p. 209).

A escolha dessa tarefa se deu por possibilitar explorá-la dentro da perspectiva metodológica adotada. Para isso, foram traçadas algumas possibilidades de resoluções e raciocínios que pudessem ser mobilizados pelos alunos, como mostra o quadro abaixo:

Quadro 1 – Ações previstas no plano de aula

Atividade dos alunos:
Ler o problema e identificar quais são as incógnitas.
Possíveis dificuldades:
Identificar quais são as incógnitas.
Atividades do professor:
Verificar se os alunos identificaram as incógnitas. O que eles não sabem é o número de DVDs que Ricardo e Cristina tem, então eles devem representar ambos separadamente, ficando, assim, com duas incógnitas.
Atividade dos alunos:
Interpretar o primeiro quadrinho e transformá-lo em uma equação.
Possíveis dificuldades:
Perceber que, ao montar a primeira equação, ele deve tirar 5 DVDs do total de DVDs de Cristina. Assim, o total de DVDs de Ricardo aumentará em 5, resultando na equação: C-5=R+5.
Atividades do professor:
Verificar se a escrita algébrica do aluno está certa; ver se a interpretação do aluno é coerente; induzi-lo para que compreenda o que se pede no primeiro quadrinho.
Atividade dos alunos:
Interpretar o segundo quadrinho e transformá-lo em uma equação.
Possíveis dificuldades:
Perceber que, ao montar a segunda equação, Cristina fica com 5 DVDs a mais que Ricardo, pois ela pega 5 DVDs dele; e que ela fica com o triplo de DVDs que restou. Sendo assim, como ela tirou 5 DVDs dele, ele ficou com menos 5 DVDs, resultando na equação: C+5=3(R-5).
Atividades do professor:
Verificar se a escrita algébrica do aluno está certa; ver se a interpretação do aluno é coerente; induzi-lo para que compreenda o que se pede no primeiro quadrinho.
Atividade dos alunos:
Montar o sistema e resolvê-lo da forma que tenha mais facilidade.
Possíveis dificuldades:
Manipular a equação de modo que eles possam resolvê-la; decidir um método de resolução.
Atividades do professor:
Auxiliá-los na manipulação e na resolução do sistema linear.

Fonte: Relatório de estágio (2019, p. 6).

Consideramos que o momento de planejar e pensar a tarefa é muito importante, pois, por meio dele, é possível refletir nos possíveis erros e diferentes resoluções, elaborar questionamentos que possam auxiliar o aluno e, ainda, fazer reflexões de como guiar o aluno a partir de um erro ou de um pensamento equivocado, favorecendo a compreensão dos conceitos explorados.

Cabe ressaltar que esse plano foi discutido coletivamente na disciplina de Estágio, em que se buscou elaborar estratégias para que os alunos pudessem construir um pensamento algébrico e não fugir dos objetivos previstos para a tarefa.

A AULA: INVERSÃO DE PAPEIS

Destacamos algumas falas que consideramos relevantes durante o desenvolvimento da tarefa em sala de aula, a qual contemplou as fases da metodologia adotada, apresentadas acima, e os momentos que julgamos importante para o professor em formação. A aula se deu como descreve o estagiário:

Quadro 2 – A regência

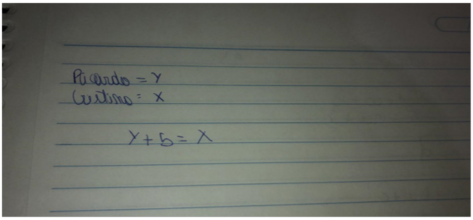
A regência foi aplicada no período da tarde, iniciando às 13h50 e finalizando às 15h30. Assim, **logo quando tocou o sinal para trocar de professor, já assumi meu papel**; entrei em sala e não deixei ninguém sair, pois sabia que isso podia trazer problemas, como o atraso no início da aula; em seguida, a professora supervisora chegou, ocorreu uma breve apresentação, tanto da minha professora do estágio supervisionado, quanto a minha, quando comuniquei aos alunos que eu iria ministrar aquela aula. A princípio, houve uma certa colaboração por parte dos alunos, até chegar ao momento de separar os grupos, eram vinte e quatro alunos; pedi para que formassem seis grupos, com quatro em cada um; a partir desse momento, começou um certo tumulto; então tive que intervir para controlar a turma. Logo ao iniciar a apresentação da tarefa, percebi que os alunos não estavam acostumados a tentar resolverem sozinhos; após a leitura da tarefa em voz alta, as perguntas dos alunos sobre a tarefa começaram antes mesmo da entrega da folha de resposta; então pedi que lessem novamente e que tentassem pensar em algum caminho para a resolução; sugeri que montassem primeiro a equação do primeiro quadrinho e depois a do segundo.

Fonte: Relatório de estágio (2019, p. 6, grifos dos autores).

Nesse relato, observamos que o estagiário já estava "vestindo a camisa", assumindo o papel de professor. Segundo Sarmento, Rocha e Paniago (2019), esses momentos proporcionados pelo estágio constituem a construção da identidade e de saberes e práticas da docência.

Durante a segunda fase, o desenvolvimento da tarefa, o estagiário aponta as dificuldades dos alunos: "Ao começar as resoluções, percebi uma grande dificuldade por parte dos alunos na interpretação do problema. Foi aí que o primeiro grupo me chamou, com a seguinte equação [...]" (RELATÓRIO DE ESTÁGIO, 2019, p. 8), exposta a seguir:

Figura 2 – Resolução dos alunos



Fonte: Relatório de estágio (2019, p. 8).

Observamos que a resolução está parcialmente correta. Sendo assim, apresentamos um diálogo, gravado em vídeo e áudio, entre o estagiário e um aluno para compreender o raciocínio do grupo e a intervenção realizada:

Quadro 3 – Diálogo entre estagiário e aluno

Professor: Mas não está faltando algo nessa expressão?

Aluno 1: Eu acho que não, pois ele [referindo-se a Ricardo, personagem do problema] ganhou 5, e a letra dele é "y", e depois ficou com o mesmo tanto que ela [referindo-se a Cristina, personagem do problema], que tem letra "x", então fica y+5=x.

Professor: Mas pensa comigo: você colocou que o Ricardo ganhou 5 DVDs, certo?

Aluno 1: Sim.

Professor: Só que foi a Cristina que deu para ele, então ela perdeu 5 DVDs também, e na sua equação você não registrou essa perda.

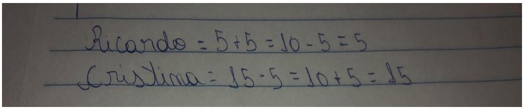
Aluno 1: Então ele ganhou 5 e ela perdeu 5; a expressão ficará y+5=x-5.

Fonte: Relatório de estágio (2019, p. 8).

Verificamos, nesse diálogo, um esforço do estagiário em se fazer compreender ao mesmo tempo que se pode aprender, conforme afirma Passerini (2007, p. 30), ao descrever que nas regências o acadêmico "[...] convive simultaneamente como professor, com a responsabilidade de ensinar, e como estudante, com a oportunidade de aprendizagem da docência".

De acordo com o estagiário, esse foi o único grupo que conseguiu chegar a essa expressão; os demais pensaram de uma maneira um pouco diferente, como é possível perceber na imagem da resolução a seguir, capturada do caderno de um dos alunos:

Figura 3 – Resolução dos alunos



Fonte: Relatório de estágio (2019, p. 9).

Ao analisar os registros do aluno, o estagiário notou que a resolução parecia estar errada, mas percebeu que havia ali alguma relação com o que se esperava do aluno para a tarefa. O estagiário afirmou ser aquele um caso recorrente, pois todos os grupos, com exceção do primeiro, pensaram da mesma maneira. Segundo ele, "[...] para ganhar tempo, expliquei de uma forma mais generalizada e me aproveitei dessa situação para transformar em uma discussão coletiva" (RELATÓRIO DE ESTÁGIO, 2019, p. 9).

Vejamos por meio do diálogo abaixo como se deu essa explicação:

Quadro 4 – Diálogo entre o professor e a turma

Professor: Todo mundo chegou nessa resolução?

Alunos: Sim.

Professor: Alguém sabe por que não está certa?

Alunos: Não.

Professor: O que nós queremos descobrir com o problema?

Alunos: A quantidade de DVDs que Ricardo e Cristina tem.

Professor: Então a gente não conhece a quantidade de DVDs que os dois tem; e, na resolução, vocês me disseram logo de cara que ela tinha 15 e ele 5, mas o pensamento de vocês não está completamente errado; primeiro vocês adicionaram 5 para o Ricardo, e diminuíram 5 para a Cristina; porém, não sabemos a quantidade inicial que cada um tem; então, é só substituir o valor dos números que vocês colocaram para cada um deles por letras, para representar a quantidade de DVDs que cada um tem. Então como fica a primeira parte?

Alunos: y+5 = x-5.

Professor: Exatamente. Agora, utilizando esse mesmo raciocínio, como fica a segunda parte?

Alunos: x+5= 3(y-5).

Professor: Exatamente.

Fonte: Relatório de estágio (2019, p. 9).

Entendemos que esses momentos em que o estagiário se coloca no papel de professor são situações propícias para levá-lo a reflexões do quanto ainda é necessário aprender para ensinar.

No quadro abaixo, destacamos falas a partir da tomada de decisão perante o encaminhamento na atividade, tendo em vista as fases a se cumprir dentro da proposta metodológica adotada:

Quadro 5 – As fases de discussão coletiva e sistematização

Devido à turma não ter conseguido interpretar o problema integralmente, e por estar muito tumultuada, decidi não levar os alunos para o quadro, e fiz a discussão coletiva com todos eles, como apresentada no Quadro 4. Para finalizar a aula, discuti como eles resolveram os sistemas. Esclareci que o primeiro método, o da adição, tem esse nome pelo fato de ter que somar as duas equações, a fim de eliminar uma incógnita, ficando apenas com uma, sendo assim possível de resolvê-la e, logo em seguida, achar o valor da segunda incógnita. O segundo método utilizado foi o da substituição, que, como já diz o próprio nome, consiste em isolar uma das incógnitas e depois substituir na outra equação, achando, assim, o valor de uma delas e, posteriormente, o valor da outra.

Fonte: Relatório de estágio (2019, p. 10).

As alterações ocorridas, referente ao que havia sido planejado, são naturais dentro do processo de ensino e aprendizagem, ainda que cause desconforto aos estagiários quando assumem a função de moderador. Conforme assinalam Fiorentini e Castro (2003, p. 122), "[...] essa inversão de papéis não é tranquila, pois envolve tensões e conflitos entre o que se sabe ou idealiza e aquilo que efetivamente pode ser realizado na prática".

DISCUSSÃO E ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Os momentos de participação e de regência durante os estágios oportunizam os futuros professores a ter contato com a realidade da sala de aula, que é onde ele pode se ver como professor, deparar-se com uma nova perspectiva, diferentemente de quando é apenas um aluno. De acordo com Passerini (2007, p. 30), "[...] nessa atividade ele convive simultaneamente como professor, com a responsabilidade de ensinar, e como estudante, com a oportunidade de aprendizagem da docência". Na função de professor, ele pode refletir sobre o que fez e, a partir disso, tirar conclusões e projeções futuras, como mostra o quadro abaixo:

Quadro 6 – Reflexões a partir da regência

Começando pelo fato de que os alunos não estão acostumados com esse tipo de metodologia, então pode haver algum tipo de preconceito e até uma falta de interesse por parte deles. Outro fator a ser destacado é a colaboração dos estudantes: devida à falta de interesse, muitas vezes a aula fica tumultuada, muita conversa, e isso prejudica muito, não só no desenvolvimento da aula, mas também na aprendizagem dos alunos. Porém, em contrapartida, essa metodologia, quando bem aplicada, estimula os alunos a buscar pela capacidade de interpretar e criar seus próprios raciocínios; sendo assim, ele não fica dependente do professor e vai se sair bem melhor ao se deparar com algumas ideias ou conceitos que exijam um pensamento mais aprofundado e quando o professor não estiver ao seu lado para auxiliá-lo. Então é preciso que o conceito algébrico seja muito bem estruturado desde as séries iniciais para que os alunos se apropriem dele de uma forma efetiva.

Fonte: Relatório de estágio (2019, p. 10).

Notamos que a escolha metodológica, o ensino exploratório, fomentou a discussão e a argumentação entre os grupos, incentivou a troca de ideias e levou os alunos a pensar algebricamente. Esse movimento representa, segundo Canavarro (2011, p. 111), "A ideia de que o desenvolvimento do pensamento algébrico se coaduna bem com uma organização de aula em que os alunos têm oportunidade de trabalhar automaticamente sobre a tarefa proposta e que posteriormente confrontam as suas produções". Por meio das falas, verificamos que o momento da regência foi fundamental para provocar reflexões e aprendizagens, por parte do estudante estagiário. De acordo com Sarmento, Rocha e Paniago (2019, p. 153) "essas aprendizagens perspectivam-se em práticas formativas que fomentam a reflexão, o questionamento e a investigação com vistas a estudar, analisar e problematizar".

O relato apresentado nos mostra que o estágio supervisionado é uma das experiências mais relevantes do curso de formação inicial, pois é quando o futuro professor conhece a realidade escolar em toda a sua complexidade; é o momento em que ele vivencia a sala de aula e analisa seu funcionamento, conhecendo os problemas a serem enfrentados, alguns desafios que são inerentes à profissão. Por meio desse relato, esperamos tenhamos contribuído, em alguma medida, para as discussões sobre. Esperamos que este relato tenha contribuído, em alguma medida, para as discussões sobre o ensino de álgebra na educação básica, assim como para a formação de professores de matemática.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Osmar Hélio Alves. **O estágio como práxis, a pedagogia e a didática: que relação é essa?** Revista Eletrônica de Educação, v. 14, 1-15, e3096048, jan./dez. 2020. DOI http://dx.doi.org/10.14244/198271993096. Disponível em: http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/3096/931. Acesso em: 18 abril. 2020.

AROEIRA, Kalline Pereira; PIMENTA, Selma Garrido (Orgs.). Didática e Estágio. Curitiba: Aprris, 2018.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 8º ano. 8. ed. São Paulo, SP: Moderna, 2015.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a Classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Parecer n.º 28**, de 2 de outubro de 2001. Brasília, DF: MEC/CNE, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Parecer n.º 2**, de19 de fevereiro de 2002. Brasília, DF: MEC/CNE, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Parecer n.º 2**, de1 de julho de 2015. Brasília, DF: MEC/CNE, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum**. 2. ed. Brasília, DF: MEC. 2016.

CANAVARRO, A. P. **Ensino exploratório da Matemática:** práticas e desafios. Lisboa, PT: Universidade Aberta, 2011.

DANYLUK, O. S**. Alfabetização Matemática**: o cotidiano da vida escolar. Caxias do Sul, RS: EDUCS, 1993.

PASSERINI, G. A. **O estágio supervisionado na formação inicial do professor de Matemática na ótica de estudantes do curso de licenciatura em Matemática da UEL**. 2007. 120 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

PIMENTA, S. G.; LIMA, M. S. L. **Estágio e docência**. 6. ed. São Paulo, SP: Cortez, 2011.

PPC. **Projeto Pedagógico de Curso de Licenciatura em Matemática**. Dourados, MS: UFGD, 2017.

RELATÓRIO DE ESTÁGIO. **Relatório de estágio apresentado à disciplina de Estágio Supervisionado Ensino Fundamental II na UFGD**. Dourados, MS, 2019.

SANTOS, Patrícia Ferreira dos; COSTA, Váldina Gonçalves da; PEREIRA, Diego Carlos. **Registros nos cadernos de estágio supervisionado: contribuições para a constituição da identidade profissional docente**. Revista Tempos e Espaços em Educação, Aracajú, v. 11, n. 27, out./dez. 2018. Disponível em: https://seer.ufs.br/index.php/revtee/article/view/7200. Acesso em: 20 de abril de 2021.

SARMENTO, T.; ROCHA, S. A.; PANIAGO R. N. Estágio curricular: o movimento de construção identitária docente em narrativas de formação. **Revista Práxis Educacional**, Vitória da Conquista, v. 14, n. 30, p. 152-177, out./dez. 2018.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M. S., HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.

UFGD. **Resolução CEPEC n.º 53**, de 1 de julho de 2010. Institui o Regulamento Geral dos Cursos de Graduação da UFGD. Dourados, MS: UFGD/CEPEC, 2010.

PADRÕES E GENERALIZAÇÕES NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: (RE) CONSTRUÇÃO DE SABERES DOCENTES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Tatiana Bonomo de Sousa[6]
Maria Auxiliadora Vilela Paiva[7]

INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos parte de uma pesquisa mais ampla que teve por objetivo investigar os saberes docentes (re) construídos por professores da educação básica, por meio do estudo de padrões e generalizações. O conteúdo de padrão e generalização, objeto de estudo da pesquisa, pode ser encontrado em várias pesquisas apresentadas no mapeamento realizado por Barqueiro (2016), as quais evidenciam a importância da presença de padrões e generalizações em todas as etapas da educação básica, e possibilitam a professores e alunos relacionarem os diversos aspectos do pensamento algébrico. Defende-se que o estudo do conteúdo de padrões e generalizações de forma problematizada e em um processo colaborativo possibilita ao professor estabelecer relações entre a linguagem aritmética e a geométrica e, enfatizar o conceito de variável e, por conseguinte, construir uma nova cultura matemática que contribui para a construção de uma nova concepção de Álgebra.

É notório que o ensino e aprendizagem de Álgebra está entre os desafios da matemática na educação básica. Surgem, a partir dos estudos e reflexões alguns questionamentos: Que estratégias são adotadas pelos professores ao iniciar conteúdos de Álgebra? Que saberes docentes sobre o conteúdo de padrões matemáticos e generalizações emergem em discussões coletivas? Como o uso

[6] Mestrado em Educação em Ciências e Matemática (IFES).
CV: http://lattes.cnpq.br/0319190887940607

[7] Pós-doutorado (UFRJ). Doutora em Matemática (PUC-RJ). Professora (CEFOR-IFES).
CV: http://lattes.cnpq.br/2158519313210506

de padrões matemáticos e generalizações podem contribuir no desenvolvimento do pensamento algébrico?

Dessa forma, com o intuito de trazer reflexões sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra, a formação continuada, aqui retratada, pautou-se em uma abordagem problematizada. Optamos por uma metodologia de formação que permitisse aos professores, coletivamente, com base em suas vivências ao longo do processo formativo (re)construírem saberes relacionados à Álgebra para o ensino, na medida que discutiam suas percepções sobre o tema, resolviam situações problemas sobre padrões e generalizações e traziam saberes das experiências de sala de aula.

Como forma de elucidar e teorizar os caminhos percorridos durante esta pesquisa, as seções seguintes serão constituídas de; uma breve discussão do significado de pensamento algébrico na perspectiva de alguns autores; os princípios e fundamentos teóricos que embasaram a formação de professores; os principais resultados das discussões coletivas que emergiram da prática docente e ao resolverem situações problemas, e, por fim, as considerações finais deste capítulo.

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA: DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Os estudos desenvolvidos por Miguel, Fiorentini e Miorim (1993) descrevem mudanças na educação algébrica no Brasil. Afirmam que as concepções da Álgebra, construídas ao longo da história, tinham como característica principal reduzir o pensamento algébrico à linguagem algébrica. No entanto, para eles, o pensamento algébrico é um tipo de pensamento que pode ser expresso por uma linguagem aritmética, geométrica ou algébrica.

Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), apresentam aspectos do pensamento algébrico, tais como:

> Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; Perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; Produzir mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produzir

> vários significados para uma mesma expressão numérica; Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; Transformar uma expressão aritmética em outra mais simples; Desenvolver algum tipo de processo de generalização; Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias; Desenvolver/criar uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2005, p. 5).

E afirmam que quando esses aspectos são mobilizados pelos alunos por meio de investigações matemáticas podem propiciar o desenvolvimento do pensamento algébrico nas aulas de matemática.

De acordo com esses autores, as tarefas envolvendo generalizações de padrões matemáticos devem ser utilizadas como ferramenta para auxiliar os professores nos processos de identificação, desenvolvimento e de caracterização desse pensamento. Optamos assim por trazer neste capítulo uma breve discussão do significado de pensamento algébrico na perspectiva de alguns autores.

Romulo Lins (1992), em seus estudos por meio da teoria dos campos semânticos buscou mostrar o significado da Álgebra ao ressaltar que um objeto matemático se torna conhecimento ao ser enunciado por um indivíduo, ou seja, o conhecimento não está no objeto, mas no significado dado pelo sujeito ao objeto.

Desse modo, pensar algebricamente é uma maneira de produzir significado para a Álgebra. Para o autor, o aluno está pensando algebricamente quando percebe as regularidades e consegue construir significado para as equações, inequações e objetos algébricos. Enfatiza ainda que é fundamental no desenvolvimento do pensamento algébrico que os alunos construam significado para símbolos, objetos e para a linguagem algébrica. Destaca que o aluno que resolve uma equação de forma mecanizada seguindo os modelos mostrados pelo professor, sem compreender o significado de cada operação realizada, não está pensando algebricamente.

Assim como Lins (1992), para Blanton e Kaput (2005), o aluno somente pensa algebricamente quando compreende ou constrói significado para as equações, expressões e objetos algébricos. Blanton e Kaput (2005) definem pensamento algébrico como um processo que alunos generalizam as apropriações matemáticas de um conjunto particular, estabelecem generalizações por meio de argumentações, e expressam-nas, cada vez mais apropriadas.

Nesse sentido, Blanton e Kaput (2005) consideram quatro formas de caracterizar o pensamento algébrico:

> A) (Aritmética Generalizada): uso da Aritmética como o domínio da expressão e formalização da generalização.
> B) (Pensamento Funcional): a generalização de padrões numéricos para descrever as relações funcionais.
> C) A modelação como um domínio para a expressão e a formalização das generalizações.
> D) A generalização sobre sistemas matemáticos abstratos do cálculo e das relações (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413).

As quatro formas de caracterizar o pensamento algébrico perpassam pela compreensão da aritmética generalizada, para o estabelecimento de relações funcionais até a modelação e a formalização das generalizações.

Realçamos também as considerações de os estudos de Mason (1996) sobre a generalização de padrões numéricos e geométricos com uma abordagem eficiente para a introdução à Álgebra. Em seu texto, ele dá tanta importância ao tema que descreve que a "generalização é o batimento cardíaco da matemática" (MASON, 1996, p. 65, tradução nossa). Em consonância com Mason (1996), consideramos que o estudo de padrões e generalizações possibilita, além da construção do pensamento algébrico, o desenvolvimento de vários conceitos matemáticos.

Para ampliar nossas discussões sobre as diferentes concepções da Álgebra apresentamos estudo de Ribeiro e Cury (2015, p. 45) sobre equações, possibilitando a observação de outros significados para o conceito de equação, chamando-os de *multisignificados* de equação. Os autores apresentam seis diferentes formas de conceber a equação:

> 1-*Intuitivo-pragmático*: o conceito de equação é concebido como intuitivo ligado a ideia de igualdade entre duas quantidades. [...] Busca pela solução predominantemente aritmética; 2-*Dedutivo-geométrico*: o conceito de equação ligado às figuras geométricas. Busca pela solução geométrica; 3-*Estrutural-generalista*: o conceito de equação é estrutural. [...] Na busca de soluções mais gerais; 4-*Processual-tecnicista*: o conceito de equação interpretada a partir de processos de resolução. Busca pela solução

> algébrica e aritmética; 5-*Estrutural-conjuntista*: o conceito de equação diretamente ligada à noção de conjunto; 6-*Axiomático-postulacional*: a equação concebida como uma noção mais primitiva no sentido como ponto, reta e plano (RIBEIRO; CURY 2015, p. 45).

Cada significado do conceito de equação, apresentado por Ribeiro e Cury (2015), apresenta diferentes perspectivas de reconhecer e de tratar uma equação. Ribeiro e Cury (2015) propõem um *diálogo* entre os significados das equações, utilizando que exploração de padrões, sejam numéricos ou geométricos, além de propiciar conexões entre a Álgebra e a Geometria e, entre a Geometria e a Aritmética, temos a possibilidade de ampliação do conceito de equação, possibilitando a construção de diferentes caminhos e abordagens de resolução.

PRINCÍPIOS QUE EMBASARAM A FORMAÇÃO

Os autores Ball, Thames e Phelps (2008), com base nas ideias de Shulman (1986,1987), apresentam uma teoria acerca do conhecimento matemático para o ensino. Também há autores que apresentam discussões sobre o processo de aprendizagem docente centrado no desenvolvimento do estudo do conceito, pautado, assim, em saberes que emergem das discussões coletivas, com vistas a Matemática para o ensino. (DAVIS, 2012, DAVIS, RENERT, 2014; DAVIS, SMMIT, 2006; RANGEL, GIRALDO, MENEZES e QUINTANEIRO 2017; PAIVA, 2018).

Nessa perspectiva, os princípios que regem a formação defendidos na pesquisa aqui apresentada foram

> i) Ser professor exige saberes próprios;
> ii) O contexto como espaço de produção de conhecimento;
> iii) Valorização da construção de saberes para o ensino articulados à prática profissional docente;
> iv) Discussões coletivas de conceitos propiciam que o coletivo e o individual não sejam dicotomizados; e
> v) Valorização do professor na construção de práticas matemáticas. (PAIVA, 2018, p. 61, tradução nossa).

Desse modo, consideramos a formação continuada como uma ação colaborativa, na qual se busca o compartilhamento de entendimentos sobre conceitos matemáticos a partir de discussões, reflexões e avaliações por meio do diálogo, na tentativa de contribuir para o desenvolvimento de saberes da docência.

Nessa perspectiva de investigação, a proposta foi formar um grupo de professores de Matemática que atuavam nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, de maneira que nas interações os professores compartilhassem seus conhecimentos e experiências da prática de modo que nas discussões coletivas (re) construíssem saberes acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico baseados em estudos e reflexões sobre padrões matemáticos e generalizações. Ou seja, (re) construir saberes próprios para o ensino da Álgebra que emergissem das discussões e reflexões coletivas.

Para isso foi ofertado aos professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental de uma rede municipal, a formação continuada denominada: Saberes Docentes da Álgebra, com 80 horas divididas em momentos presenciais e discussões e estudos no ambiente virtual de aprendizagem-*Moodle*, que valorizou processos reflexivos individuais e coletivos e saberes que emergiram nos diálogos.

Assim sendo, neste estudo foram organizadas situações problemas que permitissem que novas problematizações sobre Álgebra e o ensino da Álgebra emergissem. Vários foram as situações problemas propostas no sentido de problematizarmos o tema em estudo, no entanto, por questões de espaço, escolhemos trazer neste capítulo as discussões e reflexões de somente duas situações. Para tal, focaremos na primeira situação problema exigiu a visualização e resolução do padrão já pronto e a segunda explorou a construção e utilização do *geogebra.*

PROBLEMATIZANDO O ESTUDO DE PADRÕES, GENERALIZAÇÕES

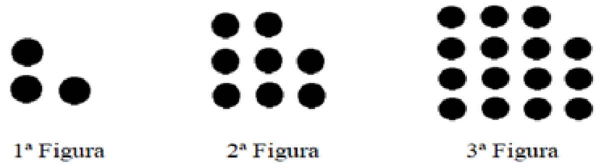
Antes de resolverem as situações problemas com os professores, realizamos um *Quiz* com intuito de investigar as percepções sobre conceitos da Álgebra que os professores tinham. Tivemos também na formação momentos em que os professores discutiram os principais aspectos do pensamento algébrico apresentados por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005). Essa parte do curso foi seguida de discussões e reflexões coletivas com os professores participantes, relacionadas aos saberes de Álgebra que eles compartilhavam.

Apresentamos a seguir na (Figura 1) a situação problema que teve por objetivo identificar aspectos e caracterizações do pensamento algébrico e aprofundar os conhecimentos sobre generalizações de padrões geométricos, numéricos, sequências e equações. Buscou-se avançar nas discussões de modo que os participantes explicitassem os saberes de cunho teóricos, práticos e metodológicos.

Figura 1- Padrões e generalizações

Situação Problema:

Observe a sequência de desenhos apresentada a seguir:



a)Quantas bolinhas tem a 4ª figura dessa sequência? Descreva como procedeu para encontrar a resposta.

b)É possível estabelecer um padrão para tal sequência? Em caso afirmativo, que padrão é esse?

Fonte: Adaptado de Souza e Pataro (2008, p. 27)

O professor R e a professora K foram ao quadro e colocaram as soluções abaixo. Neste momento eles explicaram e discutiram suas ideias com os demais professores.

Quadro 1- Soluções do Padrão da Sequência de Figuras

Solução 1-Professor R	**Solução 2-Professora K**
a)24 bolinhas, parte do entendimento que a primeira figura se comporta na base 2 como (b^2 -1) a próxima figura terá base 3, segue o padrão conforme a base.	a)4^2+4+4=24 bolinhas,
b) Sendo "n" o valor posicional da figura em uma sequência ordenada, cujos números são naturais e diferentes de zero, define-se b a base da figura por n+1. Para determinar a quantidade de pontos da figura, fazemos b^2-1. Logo, $(n+1)^2-1=n^2+2n+1-1=n^2+2n$.	b) Observei a regularidade nas figuras, um quadrado no meio mais uma linha horizontal e vertical de mesmo número do lado do quadrado; $1^2+1+1=3$ generalizando x^2+x+x $2^2+2+2=8$ x^2+2x $3^2+3+3=15$

Fonte: Organizado pelas pesquisadoras (2017)

As discussões relacionadas a essa situação problema se voltaram para o entendimento do valor atribuído à variável. No caso da solução 1, o professor explicou que o valor atribuído à variável "n" estava relacionado ao valor da posição da sequência de figuras apresentada na tarefa. Então, para encontrar a quantidade de bolinhas, o professor disse que bastava efetuar b^2-1, sendo b=n+1. A solução 2, de acordo com o relato dos professores, é mais compreensível para os alunos, pois surge a partir da observação do padrão geométrico, havendo uma transformação para a linguagem aritmética antes de se obter a linguagem algébrica.

Convém salientar também que os saberes emergentes da prática desses professores estão em consonância com as duas categorias mais comuns do pensamento algébrico nos anos iniciais da escola básica, segundo Blanton e Kaput (2005). Essas duas categorias são caracterizadas pelo uso da aritmética como o domínio da expressão e formalização da generalização caracterizada pela *aritmética generalizada* e a generalização de padrões numéricos para descrever as relações funcionais *pensamento funcional*.

A solução 1, segundo os professores, aborda categorias do pensamento algébrico menos usuais na escola básica devido à dificuldade apresentada pelos alunos, na qual ocorre uma modelação sobre sistemas matemáticos mais abstratos relacionados à formalização da generalização. De acordo com os professores, o pensamento algébrico categorizado como *aritmética generalizada* e *pensamento funcional* parece ser mais mobilizado e mais compreensível aos alunos da escola básica.

> Considero importante deixar o aluno expressar a regularidade por meio de uma linguagem mais natural, incentivar a desenvolver os casos particulares na representação numérica para que aos poucos consiga desenvolver a equação que representa o caso geral (Professora J, 2° encontro presencial em 04/07/2017).

O relato transcrito da professora J permite inferir que ela, em suas aulas, incentiva os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental a observarem o padrão matemático, realizarem comparações e se expressarem de forma aritmética para depois desenvolverem algum tipo de generalização. Essa postura vai ao encontro dos estudos de Mason (1996), que destaca a necessidade de desenvolver a consciência de ver a generalização no particular e ver o particular por meio do caso geral.

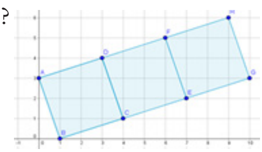
Ao final das discussões coletivas sobre a situação problema os professores demonstraram e expressaram o sentimento de estarem mais preparados para ensinar Álgebra na escola básica. Expressaram, também, que as discussões no curso de formação continuada lhes fizeram ver a importância do conteúdo de padrões e generalizações na formação do pensamento algébrico. Ademais, podemos perceber, que ocorreram aprendizagens e reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra.

PENSAMENTO ALGÉBRICO: GENERALIZAÇÃO DAS COORDENADAS DOS CENTROS DOS QUADRADOS NO *GEOGEBRA*

O objetivo dessa tarefa foi identificar aos saberes de Álgebra dos professores participantes que emergiam nas discussões ao utilizar o software *geogebra*. Segue abaixo a primeira situação problema e a descrição das interações e discussões.

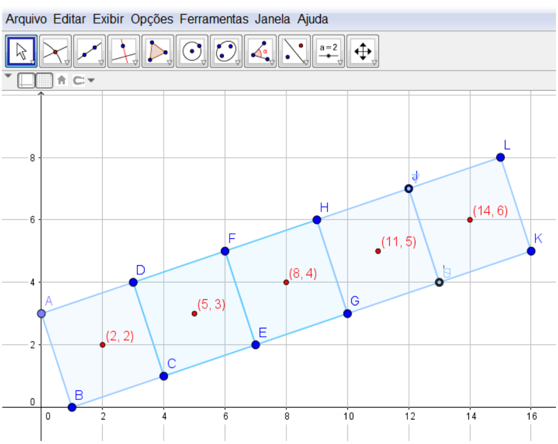
FIGURA 2: Generalização centros dos quadrados.

> Observe a figura sendo o 1°quadrado intercepta os eixos nos pontos (1,0) e (0,3), responda:
> a) Quais as coordenadas do centro do 3°, 4° e 5° quadrado?
> b) Qual a coordenada do centro do décimo quadrado?
> c) É possível descrever um padrão com o número do quadrado e as coordenadas do centro?
> Como se pode descrever este padrão?
> b) Quais as coordenadas do centro do trigésimo quinto quadrado? Figura1: fonte própria



Fonte: Adaptações Vale e Pimentel (2011, p. 102)

FIGURA 3: Padrão dos centros dos Quadrados.



Fonte: Organizado pelos pesquisadores (2017).

Na tarefa prática sobre padrões e generalizações desenvolvida na figura 1, os participantes usaram diferentes ferramentas do *geogebra* para determinar as coordenadas dos centros dos quadrados, tais como: circunferência, polígonos regulares, perpendiculares, diagonais, mediatriz e outras ferramentas básicas. Essa ação prática com a utilização do software *geogebra* apresenta a generalização de um padrão geométrico das coordenadas do centro dos quadrados X_n=3n-1 e Y_n=n+1. Para chegar a essa generalização, os professores construíram vários quadrados, de forma que produziram mais de um modelo aritmético no sentido de estabelecer comparações, perceber a regularidade, estabelecer representações, desenvolver linguagem algébrica que expressa o padrão e testá-lo.

Ao final dessa situação problema, perguntamos aos professores o caminho utilizado para identificar as coordenadas dos centros dos quadrados e quais tópicos matemáticos são abordados na mesma. Surgiram várias respostas diferentes, o que propiciou uma interação coletiva entre os participantes ao discutirem as trajetórias até se chegar à generalização do par ordenado. Nas discussões, os professores consideraram necessário mobilizar diversos conceitos da Álgebra e da Geometria. Observaram que nessa tarefa prática o significado atribuído para se conceber a equação da generalização do padrão dos pares ordenados está relacionado à busca de soluções mais gerais.

Segundo o estudo teórico realizado na primeira etapa, apresentados por Ribeiro e Cury (2015, p. 45), podemos inferir, por meio das discussões coletivas, que neste grupo de professores predomina o significado de equação categorizado como *dedutivo-geométrico e estrutural-generalista.* O conceito de equação *dedutivo-geométrico* está ligado a associação às figuras geométricas e o estrutural-generalista o conceito de equação é estrutural, se caracteriza na busca de soluções mais gerais.

Os professores observaram também a potencialidade de abordagem de alguns tópicos, tais como: leitura, interpretação e complemento de gráficos; coordenadas dos pontos; números inteiros relativos; relações numéricas; termos de uma sequência; termo geral; expressões numéricas; variável; expressões algébricas e função.

Além disso, com essas ações foi possível os professores mobilizarem diversos aspectos do pensamento algébrico apontados por Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), tais como: estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas, perceber as regularidades e desenvolver o processo de generalização. Conforme as discussões coletivas realizadas, eles destacaram que atividades semelhantes abordam de forma problematizada conhecimentos matemáticos importantes no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra escolar.

CONSIDERAÇÕES

Pode-se afirmar que os professores conseguiram, em sua maioria, (re) construir os conhecimentos relativos ao conteúdo de padrões e generalizações, visto que conceitos relacionados a estes conteúdos e ideias subjacentes foram aperfeiçoados e aprimorados. Desse modo, o trabalho reflexivo e as ações colaborativas, desenvolvidas durante os momentos da formação, a partir da resolução de situações problemas seguidos de discussões e reflexões, permitiram repensar a prática pedagógica de forma individual e coletiva. A formação propiciou a (re) construção dos saberes docentes a partir da compreensão dos professores sobre o pensamento algébrico, buscando romper com uma prática tradicional de ensino que privilegia somente a manipulação das letras.

REFERÊNCIAS

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge For Teaching: What makes it Special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARQUEIRO, G. **Achados sobre generalização de padrões ao "garimpar" pesquisas brasileiras de educação matemática.** 2016. 229 f. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.36, n.5, p. 412-46, 2005.

BRASIL. MEC. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC.** 2ª versão. Brasília, DF, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998, p. 133-157.

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. Relationships of knowledge and practice: teacher learning in communities. Review of Research in Education, London: Sage, n.24, p.249-305,1999.

DAVIS, B.; SIMMT, E. Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, n. 3, p. 293-319, 2006.

DAVIS, B.; RENERT, M. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge**. Educational Studies in Mathematics**, v. 82, n.2, p. 245- 265, 2012.

DAVIS, B.; RENERT, M. **The math teachers know:** profound understanding of emergent mathematics. New York: Routledge, p. 152, 2014.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**.** In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR, **Anais...** Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2005.

GIRALDO, Victor; RANGEL, Letícia; MENEZES, Fábio; QUINTANEIRO, Wellerson. (Re)construindo saberes para o ensino a partir da prática: investigação de conceito e outras ideias. In: IV Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática, 2017, Campinas. **Anais...** VI SHIAM. Campinas: CEPEM, p. 1-18, 2017.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. 1992. 330 f. Tese (Doutorado em Psicologia) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam**,** UK, 1992.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MASON, J. Expressing generality and roots of algebra. In: BEDNARZ, N; KIERAN, C; LEE, L. (ed.). **Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teaching**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 65-86, 1996.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Contribuição para um repensar... Educação Algébrica Elementar. **Proposições**, São Paulo, v. 4, n. 1, p.78-91. 1993.

PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela. Proeja's Classroom as a Teacher Training Space. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática-RIPEM**, v. 8, n. 2, p. 60-71, 2018.

RIBEIRO, A; CURY, H. Álgebra **para a formação do professor:** explorando os conceitos de equação e de função. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, (Coleção Tendências em Educação Matemática), 2015.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-27, 1987.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching.**Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SOUZA, J; Pataro, P.; **Vontade de saber matemática**: 7º Ano, Nova Ortografia. 3 eds. Editora FTD: Campinas, São Paulo, 2008.

VALE, I.; BARBOSA, A.; BORRALHO, A.; BARBOSA, E.; CABRITA, I.; FONSECA, L.; PIMENTEL, T. **Padrões em matemática**: uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico.1. ed. Educação Hoje. Lisboa. Portugal, 2011.

APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA FINANCEIRA: UMA PROPOSTA DE TRABALHO PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO PLANILHA ELETRÔNICA (BROFFICE.ORG CALC)

Sória Pereira Lima Soares[8]
Aldo Agustinho Alves[9]

INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta uma proposta pedagógica inovadora para aprendizagem de matemática financeira no ensino médio, e investigar seus efeitos.

O modelo apresenta um mini-curso, onde serão trabalhados os conceitos fundamentais da matemática financeira, tendo a visualização como metodologia de ensino.

Escolhemos este tema, pois consideramos que a matemática financeira não é bem explorada no ensino médio, além de acreditarmos que é importante o aluno desenvolver uma atitude crítica frente aos discursos que lhe são apresentados como verdades inquestionáveis.

Consideramos que a abordagem de conteúdos de matemática financeira no ensino médio pode capacitar o aluno a entender melhor o mundo em que vive, tornando-o mais crítico ao assistir um noticiário, ao ingressar no mercado de trabalho, ao consumir, ao cobrar seus direitos e analisar seus deveres.

Por intermédio da matemática, existe ainda a possibilidade de provocar questionamentos sobre o abuso do poder econômico na aplicação de juros de dívidas e de alíquotas de impostos, por exemplo, podendo desta forma contribuir para que o aluno tenha uma postura mais crítica na vida.

Propomos uma abordagem visual para a matemática financeira, descentralizando o uso das fórmulas e regras. O objetivo desta proposta é verificar se um

8 Doutoranda em Ensino de Ciências e Matemática (Universidade Cruzeiro do Sul). Professora (IFPA). CV: http://lattes.cnpq.br/7189435766552237

9 Mestre em Matemática (UFAL). Professor (IFPA). CV: http://lattes.cnpq.br/6151168182222162

modelo que utiliza a visualização das operações financeiras por meio de planilha eletrônica (BrOffice.org Calc) facilita a compreensão da matemática financeira.

REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta sessão faremos uma breve abordagem sobre o emprego do computador na sala de aula e a potencialidade de se utilizar planilhas eletrônicas como ferramenta de apoio ao ensino de matemática financeira, com o objetivo de subsidiar a elaboração de uma proposta de ensino que utilize o BrOffice.org Calc como ferramenta de apoio ao processo de ensino aprendizagem.

Não é difícil identificar a importância que o computador possui atualmente na sociedade, e provavelmente continuará possuindo. No entanto, a velocidade com que essa inserção ocorre na Educação Matemática não é a mesma, e são várias as razões para que isso ocorra, o que é um problema, pois, segundo Borba e Penteado (2003, p. 87), "no momento em que os computadores, enquanto artefato cultural e enquanto técnica, ficam cada vez mais presentes em todos os domínios da atividade humana, é fundamental que eles também estejam presentes nas atividades escolares". O presente texto não pretende – nem conseguiria – esgotar o assunto, mas sim analisar alguns dos aspectos a serem considerados no momento de se decidir por utilizar recursos computacionais para ensinar e aprender Matemática.

Segundo Kenski (1997), a educação atualmente passa por um processo de renovação de espaços e de valores, tendo como ponto de partida todas as mudanças ocorridas na sociedade.

A escola, como instituição integrante e desencadeadora do saber sistematizado, não pode ficar à margem deste dinamismo. O tempo destinado à criação, à interpretação, à reflexão e à descoberta de novas tecnologias além de escasso, nem sempre é aproveitado de maneira racional. Contudo, fora da escola, alunos e professores estão constantemente em contato com tecnologias cada vez mais avançadas, onde a máquina transforma, modifica e até substitui as tarefas humanas. Esses professores e alunos vivem e atuam nesta realidade como cidadãos participativos, porém os professores não "conseguem" introduzir estas "novidades" dentro da escola, pois necessitam cumprir conteúdos programáticos exigidos.

É imprescindível que o professor perceba o valor e a importância dos recursos computacionais para o bom desempenho e eficácia do trabalho escolar. A tecnologia além de renovar o processo ensino-aprendizagem, propicia o desenvolvimento integral do aluno, valorizando o seu lado social, emocional, crítico, imaginário, deixando margens para exploração de novas possibilidades de criação.

Portanto, os recursos tecnológicos servem para explorar novas possibilidades pedagógicas e contribuir para uma melhoria do trabalho docente em sala de aula, valorizando o aluno como sujeito do processo educativo.

A busca de recursos tecnológicos ou não, para fazer com que a aprendizagem realmente aconteça, é um fator a ser seriamente considerado. O desenvolvimento tecnológico, nas últimas décadas, tem gerado transformações sociais com benefícios para a sociedade em geral. A tecnologia da informática, em particular, é o veículo que possibilita novas formas de experiência humana e novas relações.

A introdução dessa tecnologia nas instituições de ensino, como recurso didático e pedagógico, tem sido analisada e discutida por especialistas da área quanto a sua utilização no processo ensino-aprendizagem. Segundo Tajra (1998, p. 10), "[...] precisamos ficar atentos para economias do futuro para novas tendências e procurarmos, ao máximo, estar abertos para as mudanças de paradigma que se fizeram necessárias [...]". O futuro profissional deverá, portanto, ser motivado e estimulado para ações ativas, dinâmicas e de comunicações abrangentes e não para atividades rotineiras.

Gerações de computadores vêm se sucedendo, cada uma delas proporcionando mais recursos para que o uso do computador por meio do software possa ser realizado de forma sofisticada. Para Oliveira (1999, p. 68), "o aparecimento de programas educacionais, softwares, que possibilitam a manipulação de objetos, cria uma nova metodologia de ensino-aprendizagem que favorece o desenvolvimento da criatividade e da iniciativa do aluno".

Segundo Borges Neto (1998), o papel do computador no ensino de Matemática é apresentar um novo olhar sobre problemas antigos, por meio da manipulação e simulação que a máquina produz, mas o seu papel não termina aí. Ocorre que a aprendizagem pela via das novas tecnologias depende da formação que o professor possui para trabalhar de modo autônomo.

Afinal, caso este não esteja devidamente preparado para trabalhar com o uso do computador (o que geralmente sucede), ele torna as aulas extremamente formais com uso deste recurso. O desafio que os educadores enfrentam está relacionado à aplicação prática do computador, como elemento integrador do processo de ensino-aprendizagem e não como uma simples ferramenta que facilita ou automatiza cálculos (LÉVY, 1993).

A busca e construção do conhecimento se processam pela informação que hoje domina o mundo. Portanto, o estudante pode ser orientado a buscar e usar informações e não a memorizá-las. O computador é o instrumento que levará o aluno a selecionar informação, resolver problemas e aprender independentemente (VALENTE, 2002).

Percebe-se que o computador funciona como um gerador de mudanças no âmbito educacional dos últimos anos. O uso correto deste recurso tecnológico pode basear-se em conhecimento teórico-científico-pedagógico, que considere todos os componentes do processo ensino-aprendizagem e o papel da escola.

Outro ponto a ser analisado é que o computador manifesta os "erros" de forma menos traumática que as tradicionais, e normalmente eles são corrigidos. No computador o erro é um desafio, que automaticamente leva o sujeito a buscar novas descobertas e até mesmo formulando hipóteses (NOGUEIRA, 2002).

Apesar do potencial das planilhas eletrônicas no ensino da Matemática Financeira, sua utilização ainda é restrita, tendo em vista que a maioria dos livros sequer menciona essa possibilidade de utilização (CAMPOS FILHO, 2001).

Existem os que direcionam, parcialmente, a utilização das planilhas eletrônicas, como é o caso de Puccini (2004) que apresenta um capítulo específico sobre sua utilização em alguns tópicos do conteúdo. Existem os que, apesar de desenvolverem o estudo do conteúdo a partir de fórmulas e das calculadoras financeiras, direcionam também o ensino do conteúdo para usuários da planilha do Excel, como Shinoda (1998) que traz um disquete acompanhado do livro com exercícios a serem resolvidos com a utilização da planilha eletrônica.

Nossa proposta foi mostrar que o uso do computador para aprendizagem de Matemática Financeira abre novas possibilidades de estudo, e que somente com ele poderiam ser realizados de modo sintético, tanto conceitual quanto operacionalmente.

A decisão sobre utilizar ou não computador para aprendizagem em Matemática não depende somente de se avaliar se seria melhor utilizá-lo, ou não. É preciso definir objetivos, e, a partir daí, avaliar se o uso de recursos computacionais seria mais eficiente para atingi-los.

Ainda, é preciso considerar as pessoas que poderão utilizar esses recursos, pois a ausência de prática e uma possível não familiaridade com eles podem inviabilizar a proposta de trabalho, por mais significativos que tenham sido os resultados obtidos em outras oportunidades.

Por fim, segundo Borba e Penteado (2003, p. 17), "o acesso à informática deve ser visto como um direito" e "Assim, o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais, etc.".

O método de trabalho aqui apresentado está essencialmente vinculado ao uso de um recurso computacional específico, as planilhas eletrônicas. Dito isso, uma questão surge imediatamente: Por que estudar Matemática Financeira a partir delas seria interessante?

O estudo de Matemática Financeira, da maneira aqui proposta, prioriza o processo, e não o resultado final. A construção da planilha é tão importante quanto responder o que o enunciado solicita. Também merece destaque a fácil manipulação dos dados, ou seja, a facilidade de observar a variação.

Segundo Borba e Penteado (2003, p. 38), "as mídias informáticas associadas a pedagogias que estejam em ressonância com essas novas tecnologias podem transformar o tipo de matemática abordada em sala de aula". Ao explorar as possibilidades que somente uma planilha eletrônica oferece, e estudar Matemática Financeira com elas, não segue um roteiro pré-estabelecido pelo professor ou pela máquina, muito menos adaptando velhas rotinas.

É na sala de aula que os alunos constroem habilidades que os ajudam a organizar e processar as informações que recebem da mídia e de outros meios de comunicação. Por isso, eles necessitam de acesso ao mínimo possível de recursos para se integrarem aos novos tempos, pois, há a necessidade de levar os alunos a compreenderem a importância do uso da tecnologia e a acompanharem sua permanente renovação (BRASIL apud Silva e Sousa, 2009, p. 22), além de se propiciar o contato com jornais e revistas. Ao fazer isso, o professor consegue contribuir para que seus alunos sejam capazes de analisar essas informações e opinar de forma crítica sobre os assuntos do cotidiano.

Nesse contexto surgiu a iniciativa de trabalhar a construção de um material didático que pudesse auxiliar a aprendizagem de matemática financeira com o apoio da informática, como forma de contribuir para que os alunos do ensino médioconsigam aprender conteúdos básicos de matemática financeira com atividades voltadas para as aplicações práticas e a utilização de recursos tecnológicos. Com esse intuito, optamos pela planilha eletrônica BrOffice.org Calc, o mais utilizado nas escolas públicas, para que possamos elaborar uma proposta de ensino que promova uma aprendizagem mais significativa.

METODOLOGIA

O objetivo inicial de nossa pesquisa foi identificar como as ferramentas tecnológicas são utilizadas nas escolas do município de Conceição do Araguaia--PA, para que os resultados pudessem subsidiar a estruturação de uma proposta didática com a utilização de recursos tecnológicos. Para isso, em nosso trabalho de campo utilizamos um questionário semi-estruturado o qual chamamos de PRÉ e PÓS-Teste, pois também foramaplicados após a realização do mini-curso para constatar a evolução da aprendizagem desejada.

O questionário contou com oito questões objetivas e apenas duas subjetivas, para não tornar nosso instrumento de pesquisa cansativo, e visando facilitar a tabulação de dados e elaboração de gráficos para análises.

Os questionários foram respondidos pelos alunos do 3º Ano do ensino médio durante um tempo aproximado de quarenta e cinco minutos. A escola foi selecionada pelo maior número de alunos e por possuir laboratório de informática em sua estrutura física.

Durante o mini-curso buscou-se analisar situações problemas envolvendo matemática financeira utilizando as ferramentas do BrOffice.org Calc como método de visualização, para a melhor aprendizagem.

O material produzido sobre matemática financeira foi aplicado durante o horário regular de aula, com os estudantes de uma turma do terceiro ano do ensino médio da Escola Deocleciano Alves Moreira da rede estadual de ensino de Conceição do Araguaia-PA. Participaram 18 alunos, com idades entre 18 e 25 anos, e a carga horária semanal dedicada à matemática foi de 3h/aula.

O conhecimento prévio se resumia em como calcular um determinado percentual de certo valor multiplicando pelo número decimal correspondente a essa porcentagem. Esse trabalho com matemática financeira aconteceu nos dias 18, 21, 22 e 25 de outubro de 2010, com os alunos trabalhando em dupla, cada uma em um computador, utilizando o software Calc, parte integrante do pacote gratuito BrOffice.org.

As aulas tiveram dois formatos, essencialmente. No primeiro momento, ao iniciar o estudo de uma movimentação financeira, uma situação-problema era discutida coletivamente, onde era desenvolvida a rotina de programação que se aplicaria a essa movimentação. No segundo momento, os alunos divididos em duplas, trabalhavam em diversos exercícios propostos.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Uma comparação entre os resultados obtidos no pré-teste e pós-teste foi realizada para avaliar a evolução dos alunos após o trabalho realizado.

Esses resultados mostraram uma evolução no índice de êxito dos alunos entre o pré-teste e o pós-teste. Após interpretarem, compreenderem, visualizarem as planilhas e resolverem os problemas, o pós-teste mostrou que 64,28% dos alunos acertaram a letra “a” e 58,57% acertaram a letra “b” da primeira questão que tratava sobre a diferença entre montante de juros simples e montante de juros compostos.

Outro avanço significativo foi na questão sobre a função afim (juros simples) e exponencial (juros compostos), onde o pré-teste mostrou que apenas 31,42% e 34,28% dos alunos conseguiram fazer a identificação de maneira correta das funções afim e exponencial, respectivamente. E, ao construírem os gráficos no computador, realizarem os estudos e resolverem problemas relacionados à função afim e exponencial, os alunos desenvolveram sua compreensão e o pós-teste mostrou que cerca de 81% e 86% dos alunos associaram corretamente a função afim e exponencial, respectivamente, aos juros simples e compostos.

Tiveram ainda questões onde o pré-teste apontou que os alunos apresentavam um grande déficit em relação ao conteúdo de matemática financeira, não conseguindo resolver os problemas. No pós-teste a porcentagem de acertos nessas mesmas questõesatingiram os 61% e 54%, esse último rendimento parece baixo até ser comparado com o resultado do pré-teste que teve um índice de erro de 100%.

Investigamos também as opiniões dos alunos relacionadas à metodologia de ensino. Esses resultados mostraram uma evolução no índice dos alunos que consideraram o uso da resolução de problemas com a utilização das novas tecnologias como satisfatória para a aprendizagem entre o pré-teste e o pós-teste.

Podemos identificar a aceitação dos alunos em relação ao método proposto em nosso trabalho, após participarem do mini-curso utilizando planilhas eletrônicas 77,14% dos alunos revelaram que o sistema ajuda resolver problemas matemáticos.

E finalizando a análise dos dados coletados, percebemos que ocorreu a mudança de postura esperada, pois, 62,85% dos alunos no pós-teste demonstraram preferência por uma aula inovadora que utiliza recursos didáticos que facilitam a aprendizagem.

Esse é o ponto de partida para um ou mais espaços específicos para o ensino de Matemática. A Matemática deve contemplar a observação, a experimentação, a investigação e a descoberta, que ajudarão os alunos a fazerem reflexões, sendo o laboratório o meio ideal para explorar conceitos matemáticos e para descobri-los.

Em todos os setores da sociedade se observam mudanças em função do uso das novas tecnologias. A educação também tem experimentado mudança na sua forma de organização e produção, fazendo surgir novas formas de ensino-aprendizagem, pela inserção de novas tecnologias nas escolas.

A sociedade está exigindo do cidadão não só conhecimentos específicos, mas principalmente, novas maneiras de organizar o pensamento, de saber trabalhar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, que estão presentes em atividades no Laboratório de Informática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática financeira é um conteúdo que pode ser inserido, sem dificuldades, do ensino fundamental ao superior. Realizamos nesta proposta um estudo sobre a construção dos conceitos financeiros envolvendo capitalização simples, composta e desconto simples usando os recursos da planilha eletrônica do BrOffice.org Calc com a intenção de propor melhorias com relação à compreensão desse conceito.

O desconhecimento do Software não foi um fator negativo por ser de fácil compreensão. Nas aplicações observamos que os alunos se envolveram com as atividades, ficaram motivados em trabalhar no computador e aprenderam uma nova ferramenta para a resolução de problemas financeiros. As situações de aprendizagem foram elaboradas com objetivos específicos a serem atingidos, de forma a colocar os alunos diante de um problema a ser resolvido.

Algumas atividades foram mais simples e diretas, outras tiveram como objetivo despertar habilidades para selecionar informações, analisá-las e, a seguir, tomar decisões que exigiram procedimentos e forma de pensar financeiramente, porém todas as atividades favoreceram a aprendizagem de conceitos financeiros.

As atividades desenvolvidas em sala com a planilha do BrOffice.org Calc possibilitaram a abordagem de alguns enfoques que em um ambiente fora da planilha não seria tão claro e de rápida resolução como, por exemplo, a construção de tabelas e gráficos que possibilitam observação das variações sofridas por esses.

No que tange às finalidades, acreditamos ser preciso dar atenção a outro problema: a necessidade de uma formação adequada do professor para trabalhar o uso das novas tecnologias na educação, a fim de que os alunos possam se apropriar desse recurso.

REFERÊNCIAS

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BORGES NETO, H. et al. **O Ensino de matemática assistido por computador nos cursos de Pedagogia**. In. Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste, 13, 1998, Natal, RN. Anais. Natal: Editora UFRN, 1998.

CAMPOS FILHO, A. **Matemática Financeira com o uso das calculadoras HP12C, HP19BII, HP 17BII, HP10B**. São Paulo: Atlas, 2001.

KENSKI, V. M. **O Ensino e os recursos didáticos em uma sociedade cheia de tecnologias in Didática: O ensino e suas relações**. Ilma P. Alencastro Veiga (org.). Campinas SP. Papirus, 1997.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

NOGUEIRA, N. R. **Pedagogia dos Projetos: uma jornada interdisciplinar rumo ao desenvolvimento das múltiplas inteligências**. 3ª ed. São Paulo: Erica, 2002.

OLIVEIRA, R. **Informática educativa: dos planos e discursos à sala de aula**. Campinas, SP: Papirus, 1999.

PUCCINI, A. L. **Matemática Financeira Objetiva e Aplicada**. 7ª ed. São Paulo: Saraiva, 2004.

SILVA, M. F.; SOUSA, A. R. **Informática e Educação: aplicação de planilhas eletrônicas no ensino de funções**. Conceição do Araguaia: Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação. UEPA. 2009.

SHINODA, C. **Matemática Financeira para usuários do Excel**. São Paulo: Atlas, 1998.

TAJRA, S. F. **Informática na Educação**. São Paulo: Erica, 1998.

VALENTE, J. A. **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. Campinas, SP: Nied, 2002.

DA FUNÇÃO AFIM À PROGRESSÃO ARITMÉTICA: UMA SEQUÊNCIA DE ENSINO

Maritza Maria Lima de Almeida Souza[10]
Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana[11]
Sidnéia Almeida Silva[12]

INTRODUÇÃO

Durante a participação na disciplina de Álgebra Superior na perspectiva da Educação Matemática foi posposto o desenvolvimento de uma sequência de ensino que abordasse pelo menos uma das habilidades recomendadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e que pudesse contribuir com a aprendizagem de Matemática em instituições da educação básica.

A BNCC propõe que para o ensino de Matemática no ensino médio, tem-se, a necessidade de utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos. Pressupondo habilidades que podem favorecer os estudantes na interpretação e compreensão da realidade, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática.

Partindo dessa proposta, refletindo sobre a necessidade de utilizar estratégias e conceitos matemáticos, e a possibilidade do desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes, foi elaborada uma sequência de ensino, com o objetivo de utilizar situações hipotéticas e a dinâmica com a fita métrica[13] na associação de Função Afim ao desenvolvimento de Progressões Aritméticas.

A ideia de se trabalhar os conceitos de Função Afim com Progressões Aritméticas está prevista nas habilidades referentes ao eixo de Números e Álgebra, da BNCC que visa, segundo Brasil (2018, p. 543), "identificar e associar

---

[10] Mestre em Educação Matemática (UESC). CV: http://lattes.cnpq.br/7840194634308966

[11] Pós-doutorado em Didática da Matemática (Universidade de Lisboa). Doutora em Educação Matemática (PUC-SP). Professora (UESC). CV: http://lattes.cnpq.br/7240586669577145

[12] Mestre em Educação em Ciências e Matemática (UESC).
CV: http://lattes.cnpq.br/8406212395966274

[13] Dinâmica inspirada em atividades desenvolvidas pelo Caminhão da Ciência na Universidade Estadual de Santa Cruz.

progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas".

Com a finalidade de construir e desenvolver essa sequência de ensino em uma escola pública com estudantes do 2º ano do ensino médio é que foi pensada essa investigação, no intuito de responder o seguinte questionamento: como uma sequência de ensino baseada na associação da função afim com a progressão aritmética mobiliza a resolução dos estudantes diante de situações que envolvem esses conceitos?

APORTE TEÓRICO

Discutir Função Afim e Progressão Aritmética implica falar da álgebra, um objeto matemático que se faz presente desde os anos iniciais do ensino fundamental.

> Imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. (BRASIL, 2018, p. 268)

A álgebra, de acordo com Lins e Gimenez (1997, p. 137) "consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade"

Na educação básica, a álgebra deve ser vista com alguns cuidados. O que pode ser visto, como cita Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) que a introdução precoce e sem suporte concreto a uma linguagem simbólica abstrata pode funcionar como freio à aprendizagem significativa da Álgebra, bem como a não valorização ao modo de expressão simbólico-formal.

Uma forma de garantir o trabalho com elementos caracterizadores do pensamento algébrico é usar situações-problema. Os elementos caracterizadores desse pensamento perpassam pelo processo de mobilização da interpretação e da transposição da linguagem (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL,1993).

Com vistas a esse processo de mobilização, o NCTM (2000) elenca normas para a álgebra a ser ensinada nos 12 anos de escolarização da educação básica, caracterizando o que podemos compreender como pensamento algébrico:

> - Compreender padrões, relações e funções;
>
> - Representar e analisar situações e estruturas matemáticas, usando símbolos algébricos;
>
> - Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
>
> - Analisar a variação em diversas situações. (NCTM, 2000, p. 39)

As estruturas algébricas permitem a compreensão dos padrões e, nesse estudo se refere a compreensão da função do 1º grau e seu padrão observado na progressão aritmética (PA). A simbolização se refere a representação e o uso de símbolos utilizados para a mudança de linguagens, aqui a mudança de uma observação da disposição de números (numa fita métrica) para a linguagem com letras e números na soma dos termos de uma PA finita. O uso de modelos matemáticos (por exemplo, o uso da fórmula da soma de termos de uma PA finita) configura uma modelação. A compreensão da variação é inerente ao desenvolvimento do pensamento algébrico, pois possibilita compreender o comportamento e disposição de regularidades e de padrões das funções, mas não será possível estudar a variação da função do 1º grau em toda a sua amplitude.

No pensamento algébrico, como proposto por Ponte et al (2009), a atenção não é apenas para os objetos, mas principalmente às relações existentes entre eles, de modo a representar e raciocinar sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato. Dessa maneira, ao pensar o conteúdo de PA a partir da Função Afim, interessa um estudo e uma compreensão que mobilize esses conceitos em situações diversas.

Pensar a álgebra e o pensamento algébrico para além do simbolismo, inclui pensar as três vertentes para o pensamento algébrico como sugerido por Ponte et al (2009) que inclui o representar, raciocinar e resolver problemas. Nessa perspectiva, dinâmicas em sala de aula e o levantamento de situações hipotéticas podem ser uma alternativa. Essas atividades podem compor ações em uma sequência de ensino, como a proposta nesse capítulo. Sobre isso, Santana (2012, p. 79), define sequência de ensino como “um conjunto de situações elaboradas e dispostas de maneira que sejam abordados conceitos previamente selecionados para serem trabalhados”.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta é uma pesquisa intervencionista que pode contribuir para reduzir o distanciamento atual entre a academia e a prática profissional, produzindo resultados para aplicação prática imediata e fugindo do tecnicismo tradicional, uma vez que incorpora em seus resultados o conhecimento teórico e o método científico (ANTUNES; MENDONÇA NETO; VIEIRA, 2016).

Segundo Hatchuel (2000), a intervenção não é um meio de produzir conhecimento para ação, mas sim um processo constitutivo de ação. Dessa maneira, o conhecimento necessário a ser produzido e a ação devem estar juntos.

Na perspectiva da pesquisa intervencionista e, com o propósito de analisar como a sequência de ensino pode mobilizar a resolução dos estudantes diante de situações com os conceitos selecionados, assumimos o percurso metodológico: pré-teste, sequência de ensino; pós-teste (idêntico ao pré-teste); análise do desempenho nos testes. Participaram da pesquisa 32 estudantes do 2º ano do Ensino Médio Técnico em Administração de uma escola pública.

Os recursos utilizados na pesquisa foram os impressos do pré e pós-teste – situações com questionamentos a respeito do termo geral, elementos e descrição de uma PA – no desenvolvimento da sequência: fita métrica (com numeração de um dos lados decrescente e do outro crescente de cumprimento 1,50 metros, de modo que o número 1 ficava no verso do 150, o 2 no verso do 149 e assim por diante), clipes, papel, lápis, lousa e piloto.

Foi utilizado para coleta e produção de dados: a) instrumento com duas situações-problemas no pré-teste e no pós-teste; b) diário de campo do desenvolvimento da sequência de ensino. O instrumento do pré foi o mesmo do pós-teste, com duas situações hipotéticas, seguidas de espaço para registro das resoluções.

Para a análise, as questões foram divididas conforme o conceito: escrita da sequência; elementos; fórmula do termo geral. As resoluções foram analisadas individualmente, comparando o momento da intervenção, pré e pós-teste.

O pré-teste foi respondido por grupo, formado por quatro integrantes. Nesse momento, foi permitido que os grupos fizessem uso dos próprios cadernos e anotações de aulas.

A sequência foi desenvolvida em sete etapas num período de três aulas (150 minutos) com os estudantes divididos em oito grupos. Etapas: 1) dinâmica da fita métrica com os clipes; 2) outras situações com a fita métrica; 3) abordagem do conceito de função a partir da dinâmica; 4) construção de sequências a partir de Funções Afim; 5) formalização da PA no registro algébrico; 6) retomada da fita métrica e diálogo sobre a existência de PA no dia a dia; 7) resolução das situações pelos estudantes, utilizando os conceitos trabalhados na sequência.

Iniciou a dinâmica, da fita métrica com os clipes, escolhendo três estudantes. Dois seguraram a fita métrica e o terceiro fixou uma quantidade ***n*** de clipes ao longo da fita, colocando cada clipe em cima de um número. O estudante escolheu cinco clipes e, enquanto os distribuía sobre a fita, uma das pesquisadoras anotou em um papel o resultado da soma dos números que foi 755 (devido a multiplicação da quantidade de clipes, cinco, e o número **151),** e entregou para um dos estudantes que estava na sala.

Quando o estudante terminou de distribuir, foi solicitado que adicionasse todos os números que estavam sobre os clipes e seus correspondentes do lado oposto da fita. Questões: qual o valor da soma? Qual valor resulta ao adicionar os números que estão sob os clipes? Esses valores foram anotados na lousa, acompanhando o raciocínio do estudante que foi adicionando os valores onde estavam os clipes e o valor do lado oposto, com total de 755. Então, o estudante que recebeu o papel falou o resultado anotado. E, perceberam que o total e o valor anotado eram o mesmo.

O procedimento se repetiu mais algumas vezes juntamente com o questionamento de como se chegaria ao resultado, até que eles compreenderam que cada clipe, quando somado seus valores frente e verso, resultava em 151, e o resultado final era sempre 151 vezes o número de clipes. Ao serem questionados: qual o valor se tivesse 10 clipes sobre a fita? Rapidamente sinalizaram que seria 1510.

Com a primeira etapa concluída e tendo em vista que os estudantes já tinham percebido a relação entre a quantidade de clipes e , em que representava a quantidade de clipes, não foi necessário alongar a Etapa 2 com outras situações, pois compreenderam o "truque" por trás da dinâmica da fita.

Em seguida, iniciou-se a construção de sequências a partir de funções afim, onde partiu-se da Etapa 3 na formalização da ideia de Função Afim através da dinâmica da fita métrica. Levantou-se o questionamento: o que acontece quando se divide a soma pelo número de clipes? Será que posso dividir esses números? Com o uso da calculadora e do celular, os estudantes chegaram ao número 151 e verificaram o que acontecia toda vez que se realizava as divisões.

Em seguida, foram questionados fazendo o processo inverso da divisão; e quando os estudantes demonstraram segurança na relação entre a quantidade de clipes e o resultado, construiu-se a representação no registro algébrico.

Daí os estudantes foram questionados: a que se refere essa representação conforme o que estudaram e a natureza desse número ? A qual conjunto faz parte? Concluíram que era uma função do 1º grau, e que o era um número natural.

Na Etapa 4 ocorreu a construção de sequências numéricas a partir de Funções Afim. Isso foi possível tendo em vista que sequências numéricas podem ser definidas como função (LIMA, 2001).

Iniciando com a função $f(x)$ =$3x+2$, junto com os estudantes, foram construídas tabelas a partir de funções afim. A mesma era composta de duas colunas, uma para os valores de x e a outra para os valores de $f(x)$ correspondentes, com $x \in$ N.

Em seguida, escreveu-se de forma linear apenas os valores de encontrados e sugeriu-se que os estudantes observassem, fazendo questionamentos: tem alguma regularidade entre os números listados? O que acontece de determinado número da imagem para o próximo? Como se pode encontrar o valor de algum dos números sem usar a função?

Em seguida, pôde-se utilizar a função para formalizar e esclarecer o que é a razão da forma sugerida a seguir:

$f(1) - f(0) \ = -1 - 2 = -3$

$f(2) - f(1) \ = -4 - (-1) = -3$

...

$f(n) - f(n-1) \ = r$

Assim generalizamos que a diferença entre determinado termo (que não seja o primeiro) e seu antecessor, seria a razão.

Na Etapa 05, foi feita a formalização da PA no registro algébrico. Foi sugerida a mudança de nomenclatura, a partir do diálogo com os estudantes, deixando de chamar $f(1), f(2), \dots, f(n)$ e associando a cada valor de y a notação $a_1, a_2, \dots, a_n$. Desta maneira, supôs-se uma sequência cujos termos eram $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$ de razão igual a r, e retornou-se à ideia de a razão ser a diferença entre um termo e seu sucessor. Salientamos que o termo da PA pode ser escrito como o seu antecessor somado a razão. Sugeriu-se que primeiramente fizesse um exemplo numérico (utilizando o exemplo da tabela) e, depois, reescrevendo a expressão anterior:

$a_2 - a_1 = r \rightarrow a_2 = a_1 + r$

$a_3 - a_2 = r \rightarrow a_3 - (a_1 - r) = r \rightarrow a_3 = a_1 + 2r$

$\dots$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

Concluindo que o termo geral de uma PA é: $a_n = a_1 + (n-1)r$. E, dessa fórmula, tem-se que: a_n é o termo de ordem (*n-ésimo* termo); r é a razão; a_1 é o primeiro termo da PA e n posição do termo que deseja descobrir.

Retomando a fita métrica e dialogando sobre a existência de PA no dia a dia, iniciou a Etapa 6; se sugeriu a construção de uma sequência numérica a partir da fita métrica. Foram feitos questionamentos: (i) Qual o termo geral dessa PA? (ii) Qual o 10º termo dessa PA? (iii) Qual o 59º termo dessa PA? (iv) Qual a posição do termo que tem valor igual a 3020? (v) Como pensaram e resolveram cada situação? Usaram Função Afim ou PA?

Foi acrescentada a construção do termo geral (i) usando a PA, e que o termo é da forma $a_n = 151 + (n-1)151$.

No item (ii) usando a Função Afim mostrou-se que o décimo termo seria $f(10) = 151 * 10 = 1510$ e usando a PA, seria

$a_{10} = 151 + (10-1)151$

$a_{10} = 1510$

Após realizar a associação da Função Afim com a PA nos itens (i) e (ii), iniciou-se então o diálogo sobre a presença de PA em outras situações. Por exemplo, a periodicidade do ano eleitoral, do campeonato brasileiro de futebol, das olimpíadas, dentre outros. Utilizando a ênfase dos estudantes em copa do mundo, questionou-se qual seria o ano em que aconteceria 60º edição da copa do mundo.

Então foi proposta a construção de uma sequência que representasse os anos em que aconteceriam as copas. Sabendo que a primeira copa do mundo acontecera em 1930, tendo 1º termo 1930, foi possível construir a sequências com as datas seguintes, identificar a razão 4 e, a quantidade de 60 termos. Um estudante foi a lousa para calcular a_{60}. Usaram a ideia de que 60ª edição vai acontecer em 2166, e que a última copa ocorreu em 2018 e com o que foi discutidos em aula, calcularam e encontraram o resultado. Para concluir, foi apresentado o pós-teste.

A intervenção foi realizada no mesmo dia em que os estudantes responderam ao pré-teste e pós-teste e, para a construção da sequência de ensino consideramos que os estudantes tinham estudado, com o professor da turma, o conteúdo, assim priorizamos uma parte mais avançada do conteúdo.

DESENVOLVIMENTO

A análise foi realizada por tópicos, considerando as resoluções nos instrumentos (pré-teste, atividades da sequência e pós-teste) e três componentes do conteúdo de PA: escrita da sequência; identificação dos seus elementos; e, a fórmula do termo geral. As situações presentes no pré e pós-teste foram as seguintes:

Questão 1 (o caso da blogueira Taty). Tarefa: A blogueira Thaty criou uma página no Instagram para aumentar as vendas de bijuterias. Ela criou um sorteio. No primeiro dia que lançou o sorteio Thaty só tinha 30 seguidores, passou a ter 70 seguidores no segundo dia, no terceiro dia 110, no quarto dia 150, no quinto que foi o dia do sorteio, 190 seguidores. a) Fornecer uma sequência que represente a quantidade de seguidores da página de Thaty durante cinco dias. b) Investigar os elementos dessa sequência, a função associada aos termos, quantidade de elementos, razão entre eles. c) Determinar a quantidade de seguidores de Thaty, caso o sorteio durasse 10 dias.

Questão 2: (o caso de Luiz e a compra dos pães). Tarefa: Luiz separou R$ 38,00 para comprar pão durante o mês. Sabendo que ele compra R$ 1,50 de pão todos os dias. a) Organizar uma PA mostrando a quantia que resta após a compra diária de pães. b) Fornecer a quantia que Luiz ainda terá no 15º dia. c) Determinar o 1º dia em que ele não pôde comprar pão.

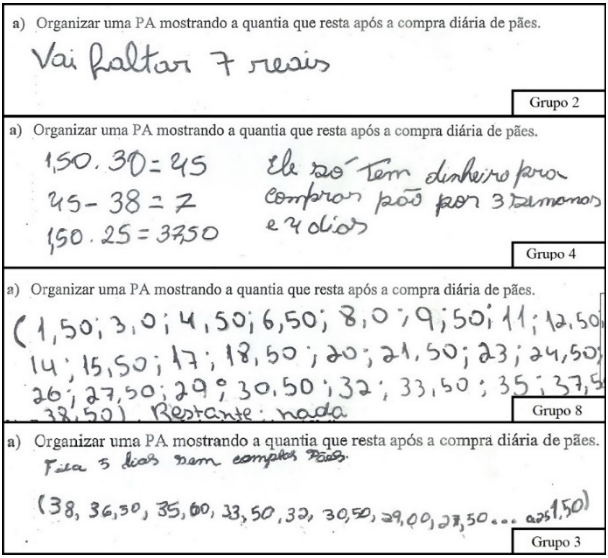
Tópico 1: Escrita da sequência numérica

Os itens 1) a) e 2) a) e, as sequências construídas no desenvolvimento da aula. Abordavam a escrita de uma sequência numérica.

O item1) a) solicita que os estudantes forneçam uma sequência que represente a quantidade de seguidores da página de Thaty durante cinco dias, no pré-teste houve sete acertos e um erro, nenhum grupo deixou em branco. Dentre os grupos que acertaram apenas quatro fizeram a representação totalmente correta e, três não utilizaram a representação correta de sequência.

Foi possível observar uma compreensão da situação, porém a representação feita por esses grupos não contempla a representação correta para uma sequência. O Grupo 1 e o Grupo 4 colocaram uma barra para representar cada termo (a quantidade de seguidores por dia), contudo o Grupo 1, escreve no denominador de 1 a 5 simbolizando os dias e o Grupo 4 usa 1D, 2D, ..., 5D para fazer a mesma simbolização. O Grupo 6 separa os termos da sequência por ponto e vírgula e, escreve a sequência até o décimo termo. Os estudantes possuíam uma ideia da forma de escrever a sequência, porém a formalização não estava contemplada.

A dificuldade em representar a sequência também foi notada no item 2) a), em que solicitava a organização de uma PA mostrando a quantia restante após a compra diária de pães. Nesse item, dos oito grupos, quatro deixaram em branco, três responderam errado (Ver Figura 1) e apenas um acertou.


a) Organizar uma PA mostrando a quantia que resta após a compra diária de pães.

Vai faltar 7 reais

Grupo 2

a) Organizar uma PA mostrando a quantia que resta após a compra diária de pães.

1,50 . 30 = 45
45 - 38 = 7
1,50 . 25 = 37,50

Ele só tem dinheiro pra comprar pão por 3 semanas e 4 dias

Grupo 4

a) Organizar uma PA mostrando a quantia que resta após a compra diária de pães.

(1,50; 3,0; 4,50; 6,50; 8,0; 9;50; 11; 12,50; 14; 15,50; 17; 18,50; 20; 21,50; 23; 24,50; 26; 27,50; 29; 30,50; 32; 33,50; 35; 37,5 38,50). Restante: nada

Grupo 8

a) Organizar uma PA mostrando a quantia que resta após a compra diária de pães.

Fica 5 dias sem comprar pães.

(38, 36,50, 35,00, 33,50, 32, 30,50, 29,00, 27,50 ... a25 1,50)

Grupo 3

Figura 1 - Soluções da questão 2 no item 'a'
Fonte: Acervo dos autores

Observa-se na Figura 1 que os estudantes dos grupos 2, 4 e 8 compreendem a situação, mas não registram a representação da sequência. O grupo 3, que escreveu a sequência corretamente listam oito termos da sequência, coloca reticências e escreve o último termo.

Embora o item 2) a) seja semelhante a anterior, solicitando que o estudante represente em forma de sequência uma determinada situação, a primeira obteve consideravelmente mais acertos e menos erros que esta, onde metade dos grupos deixou a questão em branco; é válido supor que eles tenham tido dificuldades na interpretação principalmente pelo fato da razão ser negativa, ou seja, PA decrescente.

A representação de uma sequência foi trabalhada na intervenção, como por exemplo, a sequência cujos termos eram o resultado da associação do número de clipes com a soma dos números da fita e seus versos, ou seja, a sequência finita representada por (151, 302, ..., 1510). Sequência infinita construída, cujos termos eram o valor funcional de $f(x) = 3x + 2$ para todo x natural, ou seja, (2, 5, 8, ...). E, a construção de uma sequência na lousa representando os anos das copas do mundo.

Na construção da sequência na lousa, feita pelos próprios estudantes, com identificação dos elementos da PA: primeiro termo, razão, não foi dada ênfase na representação correta da sequência, pois os estudantes escreveram de forma correta.

No pós-teste, observamos que os grupos avançaram positivamente no item 1) a). Embora em alguns casos, a representação tenha se mantido incorreta. Ao observar isso enquanto se analisava o pré-teste, recordamos que a escrita da sequência não foi algo explicitado no processo de intervenção e que poderia ter sido feito.

No item 2) a), algumas dificuldades se mantiveram; o Grupo 6 deixou a questão em branco, o Grupo 2 e Grupo 4 fizeram cálculos aleatórios sem relação com o solicitado e os Grupos 1, 5 e 7 fizeram a sequência, mas ainda com algumas dificuldades quanto a representação: falta de parênteses, separação entre os termos. Apenas o Grupo 3 fez corretamente, da mesma forma que havia respondido corretamente no pré-teste.

Tópico 2: Elementos da sequência

Os elementos da PA, que vamos discutir: identificação do primeiro termo, termo geral, razão e quantidade de elementos. Elementos explorados no item 1) b) e durante a intervenção.

Em 1) b) foi solicitado os elementos da sequência: quantidade de elementos; razão; e, a função associada aos termos da sequência. No pré-teste um grupo deixou em branco (grupo 01), um respondeu o número 40 (grupo 05) e seis grupos (02, 03, 04, 06, 07, 08) apresentaram a quantidade de termos e a razão, com um deles também representando o primeiro e quinto termo da sequência. É válido salientar que nenhum dos grupos registrou a função associada aos termos, o que caracteriza um desfalque em um dos tópicos do que a NCTM (2000) caracteriza como pensamento algébrico, o de compreender padrões, relações e funções. Como inicialmente os estudantes demonstraram ter conhecimento sobre a PA e o conceito de função, supomos que os conteúdos tenham sido abordados de maneira singular, sem haver conexão com outros conteúdos, inclusive entre si.

Durante a intervenção, a necessidade de identificar a função associada aos termos de uma sequência aconteceu quando os estudantes tentavam identificar o "truque" que estava por traz dos acertos das pesquisadoras ao revelar o valor da soma a partir da quantidade de clipes, ou seja, identificaram que a função associada era $f(x) = 151x$.. Depois de construída a sequência, (151, 302, ..., 1510), identificaram a razão $r = 151$,, o primeiro termo $a_1 = 151$, a quantidade de termos $n = 10$ e o termo geral usando a função $f(x) = 151x$ e a notação de PA, $a_n = 151 + (n-1)151$. Esse processo de identificação dos termos, também, aconteceu a partir da construção da sequência (2, 5, 8, ...) a partir da função $f(x) = 3x + 2$ e na sequência que representava os anos em que ocorreram a copa do mundo (1930, 1934, 1938, ...). Nessa última, foi identificado o primeiro termo, a razão e, foram convidados a fornecer o termo geral, e o *n-ésimo* termo quando o termo geral for $a_n = 2018$, ou seja, fornecer a edição em que ocorreu a copa de 2018.

A resolução coletiva, um estudante foi a lousa enquanto os colegas faziam sugestões sobre os procedimentos, em alguns momentos eles não sabiam como seguir, por exemplo, na linha em que tinham $2018 = 1930 + (n-1) * 4$, tiveram dúvidas pois, não sabiam fazer a operação com o parêntese e a multiplicação por -1. Para auxiliar, foram questionados sobre outras situações similares, exemplos com os números inteiros, compreenderam e retomaram a resolução com mais segurança.

No pós-teste, todos os grupos responderam o item 1) b). Cinco grupos responderam da mesma forma que fizeram no pré-teste. O Grupo 2 e 8 conseguiram escrever a função associada aos termos. No pré-teste o Grupo 8 respondeu sinalizando a razão, a quantidade de termos e que é uma PA; no pós-teste além de responder os demais elementos, o grupo descreve a função associada aos termos, conseguindo expressar uma característica do pensamento algébrico que é a compreensão das relações e funções a representação com a utilização de símbolos (NCTM, 2000), o que não ocorreu no pré-teste. Dois grupos demonstraram esse avanço no pensamento algébrico (Grupo 2 e 8) e os demais demonstraram algum tipo de avanço, não incluindo a função e sua relação com a representação com símbolos.

Tópico 3: A busca de elementos por meio do termo geral

As subtarefas 1) c), 2) b) e c) perguntavam sobre o termo geral. No item 1) c), pede o valor do décimo termo da sequência. Houve sete acertos e um erro, com nenhuma resposta em branco no pré-teste. O grupo 5 errou a questão, multiplicou o valor da razão (40) pela posição do elemento solicitado (10). Demonstrando não compreender a relação do padrão estabelecido para a construção da PA, o que não estabelece a característica do pensamento algébrico (NCTM, 2000).

Dos sete grupos que acertaram, cinco escreveram a sequência, não deixando outros registros que possibilitassem nossas análises. O grupo 7, que também acertou, iniciou a escrita da fórmula do termo geral, riscou essa escrita e registrou os dez termos da sequência. Mesmo listando os elementos que completam a sequência, eles remetem a função que estabelece o termo geral de uma PA, entretanto, não completam a escrita, o que nos conduz a interpretar que essa relação poderia ainda não estar estabelecida para os estudantes.

O Grupo 6 escreveu o décimo termo (390) a partir da fórmula do termo geral – o que era o nosso objetivo inicial; descrevem o décimo termo como a_n mas, não específicaram que se refere ao elemento da décima posição na sequência.

Para o item 2) b), no pré-teste foram observados cinco acertos e três grupos deixaram em branco. Mantendo o que aconteceu no item anterior, com seis respostas encontradas mediante a escrita da sequência, não utilizando a fórmula do termo geral.

Durante a intervenção foi trabalhado na lousa a determinação de um elemento da sequência por meio do termo geral, alguns estudantes foram a lousa e os demais participaram colocando suas opiniões, observamos que os estudantes avançaram na compreensão. O que foi confirmado no pós-teste, pois todos os grupos acertaram esse item, cinco deles registraram a fórmula do termo geral. Esse tipo de representação de situações matemáticas usando símbolos é uma característica do pensamento algébrico.

No pós-teste, seis grupos acertaram e dois erraram; podemos observar que não houve respostas em branco, todos tentaram resolver. Quanto aos dois grupos que erraram (grupo 5 e grupo 6), ver Figura 2.

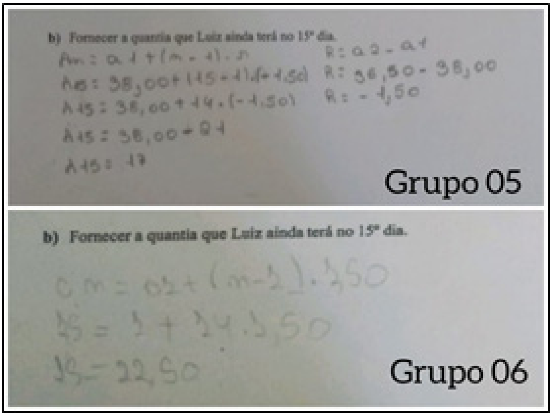


Figura 2: respostas dos grupos 5 e 6 no pós-teste
Fonte: acervo dos autores

Observe na Figura 2 que o Grupo 6 preencheu a fórmula de maneira equivocada, considerando o a_1 como sendo 1, onde deveria ser 38, que era o valor que Luiz tinha inicialmente para comprar pão; e, o Grupo 5 errou ao efetuar uma operação, mas a estrutura também estava correta. Esses resultados indicam que os estudantes passam a utilizar a relação estabelecida para a construção da PA, o que pode proporcionar desenvolvimento do pensamento algébrico.

Quanto a última tarefa, item 2) c), três grupos acertaram no pré-teste, quatro grupos deixaram em branco e um grupo errou. A questão solicitava o primeiro dia em que Luiz não pôde comprar pão; para resolvê-la, era necessário utilizar a fórmula do termo geral considerando o a_n como 0, visto que o objetivo era encontrar o dia em que não se poderia comprar pão.

No pós-teste, sete grupos acertaram e o Grupo 1 errou. A maioria não deixou registro da resposta; supomos que isso pode ser justificado, por estar no final da terceira aula, o tempo ter sido aproveitado de maneira bastante intensa e, os estudantes aparentavam cansaço.

Avaliando como um todo, pudemos notar um bom avanço dos grupos, principalmente do grupo 5, que acertou uma questão no pré-teste e cinco no pós-teste.

CONSIDERAÇÕES

Os resultados dessa pesquisa foram organizados a partir da resolução das situações problemas no pré-teste e no pós-teste, juntamente com as observações durante o desenvolvimento da sequência de ensino.

Os resultados apontam um avanço na mobilização dos estudantes nas resoluções do pós-teste e associamos esse avanço ao desenvolvimento da sequência de ensino baseada no uso de uma relação visualizada com o auxílio das medidas na fita métrica e na associação da função afim à progressão aritmética. Percebemos a compreensão dos estudantes de que os termos da sequência eram determinados pelos valores que a função assumia para determinado valor, mas não conseguiram perceber o processo inverso de fornecer a função que representava os termos de uma dada PA. Porém, notamos que o fato de a resolução ser em grupo dificultou a análise com mais precisão sobre a mobilização desses estudantes individualmente.

Tendo em vista que algumas dificuldades se mantiveram no pós-teste, compreendemos a necessidade de um momento posterior, de modo a retomar os itens que os estudantes demonstram dificuldades em resolver. Além de uma análise do pré-teste antes de ser feita a intervenção. Como esse trabalho foi desenvolvido em final de um ano letivo, não foi possível retornar ao colégio e discutir com a turma os avanços e dificuldades. Contudo, recomendamos que essa sequência de ensino seja desenvolvida em salas de aula e continuado o trabalho para sanar as dúvidas ou dificuldades que os estudantes possam apresentar. Além do desenvolvimento de pesquisas futuras que possam estudar o desdobramento do trabalho com a sequência de ensino da fita métrica. Esperamos que esse trabalho inspire professores e contribua com seu trabalho pedagógico.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, M. T. P.; MENDONÇA NETO, O. R.; VIEIRA, A. M. Pesquisa intervencionista e mestrados profissionais: perspectivas de sua prática nos cursos da área de gestão. *Indagatio Didactica*, 8 (3), 53-68, 2016. Disponível em < https://proa.ua.pt/index.php/id/article/view/2569>. Acesso em 17 de novembro de 2019.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. *Revista Quadrimestral Pro-Posições*. Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, v. 4, n. 1, p. 79–91, mar. 1993.

HATCHUEL, A. Intervention research and the production of knowledge. In: CERF, M (et al.) Cow up a Tree. Knowing and Learning for Change in Agriculture. *Case studies from Industrialised Countries*. Paris: INRA, p. 55-68, 2000.

LIMA, E. L. *Exame de textos*: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J. Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas, SP. Papirus, 1997.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and standards for school mathematics: An overview*. Reston, VA: Author, 2000.

PONTE, J. P.; BRANCO, N; MATOS, A. Álgebra no ensino básico. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC, 2009. Disponível em <http://hdl.handle.net/10451/7105>. Acesso em 03 de dezembro de 2019.

SANTANA, E. R. dos S. *Adição e subtração*: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante? Ilhéus: Editus, 2012.

SUBSÍDIOS DA TEORIA FREIRIANA NA ANÁLISE DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA RELEITURA

Samuel Francisco Huf[14]
Viviane Barbosa de Souza Huf[15]
Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro[16]
Dionísio Burak[17]

INTRODUÇÃO

Atualmente, ainda percebe-se que as escolas, em maior parte, persistem em manter um sistema educativo a qual Freire (1987) denominou "educação bancária". Nesse sistema, o poder de criação dos estudantes é minimizado, seu pensamento crítico não é incentivado, para que assim, segundo Freire (1987) se mantenha o interesse dos opressores, cabendo aos estudantes apenas memorizar os conteúdos sem que para eles tenha sentido.

Diante do exposto, entende-se que a Modelagem Matemática[18] na Educação Matemática tem forte potencial para direcionar um ensino e aprendizagem com vistas aos interesses dos estudantes, possibilitando um rompimento com a "educação bancária". Uma vez que na concepção adotada, a Modelagem parte de dois princípios: 1) considera sempre o interesse dos envolvidos; e, 2) a

[14] Doutorando em Ensino de Ciência e Tecnologia (UTFPR/Ponta Grossa-PR). ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5917-7746

[15] Doutoranda em Ensino de Ciência e Tecnologia (UTFPR/Ponta Grossa-PR). ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2561-3159

[16] Doutora em Educação Científica e Tecnológica (UFSC). Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia (UTFPR/Ponta Grossa-PR). ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3313-1472

[17] Doutor em Educação (UNICAMP). Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (UNICENTRO). ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1345-1113

[18] Para evitar repetições quando nos referirmos a "Modelagem" [primeira letra em maiúscula] estamos nos referindo a Modelagem Matemática na Educação Matemática ou a concepção adotada. Quando escrevemos "modelagem" [em minúsculo] referimos a atividades ou práticas realizadas em sala de aula.

coleta de dados, quando possível, deve ser realizada no local em que reside esse interesse. (BURAK, 2017).

Segundo a concepção de Burak (2017) o desenvolvimento de uma atividade de modelagem é direcionada por cinco etapas: Escolha do tema; Pesquisa exploratória; Levantamento do(s) problema(s); Resolução do(s) problema(s) e desenvolvimento dos conteúdos matemáticos; e, Análise crítica das soluções. Esses encaminhamentos desde a escolha do tema convergem para o que é denominado por Freire (1987) de educação dialógica, essencial para a prática educativa com vistas à libertação dos estudantes. Libertação por meio do diálogo, desde na escolha dos conteúdos programáticos, em que o os estudantes e o educador não seguem o que lhe é imposto, uma vez que os conteúdos emergem dos problemas levantados com base na pesquisa realizada a partir do tema de interesse dos estudantes.

Com base nessa breve apresentação inicial, neste capítulo busca-se discorrer a respeito de uma atividade de modelagem realizada com estudantes de um Nono ano do Ensino Fundamental de uma escola do interior do Paraná. A atividade mencionada está descrita na dissertação[19] do primeiro autor e já foi analisado no viés de relações com abordagens no processo de ensino e aprendizagem[20]. A questão que direciona a investigação é: Em quais momentos da atividade de modelagem desenvolvida é possível perceber relações com excertos da teoria de Paulo Freire?

A partir da introdução este capítulo apresenta os encaminhamentos metodológicos, as descrições da atividade e aproximação com a Teoria de Paulo Freire. A atividade de modelagem desenvolvida com o tema “impostos” possibilitou romper com um ensino baseado na “educação bancária” e caminhar ruma a uma “educação dialógica” com vistas aos princípios da pedagogia da autonomia, por meio da qual, do ponto de vista do ensino de Matemática, foi possível aos estudantes a percepção do real significado da adoção de uma incógnita “x” em problemas resolvidos com a álgebra. Por fim, apresenta as considerações.

[19] Link da dissertação disponível em <http://tede.unicentro.br:8080/jspui/bitstream/tede/549/4/SAMUEL%20FRANCISCO%20HUF.pdf> Acessado em 04 de maio de 2021.

[20] Link do artigo publicado disponível em <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2017v12n2p163/36378> Acessado em 04 de maio de 2021.

METODOLOGIA

O presente capítulo embasou-se em uma pesquisa qualitativa interpretativa. A coleta dos dados, a partir de uma atividade de modelagem realizada com estudantes de um Nono Ano do Ensino Fundamental, se deu por meio de gravações em áudios, fotos e dos materiais escritos dos estudantes. O tratamento dos dados seguiu as orientações de Bogdan e Biklen (1994).

O desenvolvimento da atividade de modelagem, em sala, seguiu as etapas propostas por Burak (2017): A escolha do tema; Pesquisa exploratória; Levantamento dos problemas; Resolução dos problemas e desenvolvimento do conteúdo matemático; e, Análise crítica das soluções. Adota-se trabalhar nessa concepção de Modelagem por identificar-se com as etapas mencionadas. A partir dos encaminhamentos em cada etapa é que busca-se em quais momentos, da atividade, é possível perceber relações com excertos da Teoria de Paulo Freire?

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE E APROXIMAÇÃO COM A TEORIA DE PAULO FREIRE

Para uma educação com autenticidade Freire (1987) destaca a necessidade de interação do professor com os estudantes, sendo fruto dessa interação os conteúdos programáticos, por meio de um universo temático ou temas geradores. Na atividade de modelagem, inicialmente, o tema imposto foi escolhido por um grupo de três estudantes, na sequência despertou o interesse de todos os estudantes da classe que se envolveram em discussões a respeito do destino dado aos impostos cobrado no Brasil.

As discussões, desde o início, possibilitaram o rompimento com a "neutralidade da educação" tal neutralidade apontada por Freire (1996) como a que habilita os estudantes "[...] para práticas apolíticas, como se a maneira humana de estar no mundo fosse ou pudesse ser uma maneira neutra" (FREIRE, 1996, p. 38).

Em sala, essas discussões contribuíram para a formação de estudantes/cidadãos mais conscientes e críticos em suas ações. A interação entre os estudantes culminou na percepção de possibilidades para a destinação dos impostos arrecadados pelo Estado, juntos os estudantes chegaram ao consenso que os impostos devem ser aplicados no bem-estar social, em áreas como saúde, educação, segurança e transporte, dentre outras. No entanto, está destinação muitas vezes tem sido desviada pela ação de políticos que pressão o bem pessoal e individual em detrimento do bem comum, esses apontamentos vieram ao encontro do que Freire (1996) destaca:

> Nada, o avanço da ciência e/ou da tecnologia, pode legitimar uma "ordem" desordeira em que só as minorias do poder esbanjam e gozam enquanto às maiorias em dificuldades até para sobreviver se diz que a realidade é assim mesmo, que sua fome é uma fatalidade do fim do século (FREIRE, 1996, p. 39).

Essas palavras de Freire corroboram, também, com a análise de outro questionamento que emergiu nas discussões: "Por que a maior parte dos serviços públicos é precária? Uma pessoa doente que necessita de um acompanhamento médico especializado deve ficar dias, meses e até mais de ano em filas de espera por atendimento do S.U.S (Sistema Único de Saúde)". (HUF e BURAK, 2017, p. 166).

As respostas a esse questionamento direcionaram-se pela unanimidade dos estudantes "*A destinação dada ao dinheiro arrecadado pelos impostos não está tendo o fim esperado*". Em continuação ao diálogo, os estudantes mencionaram escândalos de corrupção envolvendo o dinheiro público, bastante noticiado pelas mídias na época. Com as palavras dos estudantes, destacamos *"O dinheiro público escorre por canos* [embasados em divulgações da mídia] *enquanto seres humanos morrem esperando por tratamento médico, seres humanos vivem com restos de lixões, seres humanos morando em rua e embaixo de pontes"*.

Percebe-se a angústia dos estudantes por um mundo melhor e a revolta com o sistema político brasileiro. Se "Ensinar exige respeito aos saberes dos educandos" (FREIRE,1996, p. 15), os professores precisam, quando possível, acatar a visão que os estudantes têm da realidade e a partir dessa visão buscar relações com os conteúdos disciplinares.

> Por isso mesmo pensar certo coloca ao professor ou, mais amplamente, à escola, o dever de não só respeitar os saberes com que os educandos, sobretudo os das classes populares, chegam a ela – saberes socialmente construídos na prática comunitária – mas também, como há mais de trinta anos venho sugerindo, discutir com os alunos a

> razão de ser de alguns desses saberes em relação com o ensino dos conteúdos. (FREIRE, 1996, p. 15).

Nesse encalço, alguns estudantes com vistas no que a mídia noticiava em 2015 apontam como possível saída à destituição da presidência da república. Como "a Modelagem na perspectiva assumida incentiva as discussões, os debates, as ideias com o objetivo de formar cidadãos mais autônomos" (HUF e BURAK, 2017, p. 166) o que lhe aproxima aos ideais defendidos por Paulo Freire para uma educação mais libertadora. Em busca de tornar os estudantes mais críticos a respeito da política brasileira os questionamos: "O Brasil é governado por apenas uma pessoa? Será que só essa pessoa é a responsável por tudo de ruim que acontece? Essas indagações provocaram intensos debates na sala de aula." (ibid).

A partir desse questionamento os estudantes concluíram que "o *presidente da República não administra sozinho, pois tem deputados, senadores, governadores, prefeitos e vereadores. Embasando-se em reportagens apontam alguns políticos ligados à corrupção*". (ibid).

Ao prosseguir para a etapa da pesquisa exploratória, o grupo de estudantes encontrou uma reportagem publicada na revista Super Interessante, edição 317 de 2013, a qual abordava "Por que tudo no Brasil custa tão caro". A reportagem apresentava um comparativo de preços de alguns produtos para o consumidor no Brasil e para o consumidor em outros países. E, na capa da revista, já menciona "Os impostos são parte do problema, e claro. Mas não é só isso. Governo e empresas têm culpa. E, com todo o respeito você também".

Com relação a essa afirmação os estudantes foram questionados: Os impostos e o governo têm uma relação direta, mas e das empresas e dos consumidores qual a culpa?

Em consenso os estudantes compreenderam que a culpa é das empresas por almejar e buscar cada vez mais lucros e, dos próprios consumidores, por adquirir os produtos pelos preços que lhes são ofertados. A culpa também é resultante do pensamento consumista impregnado na sociedade capitalista.

Com relação aos impostos, a reportagem menciona que no Brasil, para um produto sair de fábrica, incidem sobre ele 12% de ICMS, 9,25% de PIS e COFINS e mais 3,4% de outros impostos. Com relação a produtos eletrônicos importados incidem impostos ainda maiores, um celular Samsung Galaxy SIII, usado como exemplo na reportagem, nos EUA, custa R$ 650,00, aqui no Brasil custa pelo menos R$ 2.048,00. Com relação a esse produto a reportagem menciona que grande parte da culpa é dos impostos, pois nos EUA, sobre esse produto, incide em média 7% de impostos enquanto que aqui no Brasil gira em torno de 40%.

A partir dos dados da reportagem acrescido de mais algumas informações buscadas na *internet*, o grupo seguiu para a etapa do levantamento dos problemas. Nessa etapa se propuseram realizar uma comparação entre o preço de alguns produtos, da mesma marca, aqui no Brasil, comparados com os preços praticados nos EUA e na China. Está comparação é apresentada na Imagem a seguir:

Imagem 1: Comparação entre preços realizada pelos estudantes em 2015

País	Produto	Preço	
Brasil	Carrinho de bebê	R$ 999,00	
	Camiseta Hollister	R$ 79,00	Total
	Ipod 32GB	R$ 1.999	R$ 3.736
	Perfume CK One	R$ 169,00	
	calça Diesel	R$ 490,00	
EUA	Carrinho de Bebê	R$ 530,44	
	Camiseta Hollister	R$ 38,30	Total B
	Ipod. 32 GB	R$ 1176,79	R$ 2.198,72
	Perfume CK One	R$ 82,50	
	Calça Diesel	R$ 370,69	
China	Carrinho de bebê	R$ 343,14	
	Camiseta Hollister	R$ 47,19	Total C
	Ipod .32 GB	R$ 599,00	R$ 1269,23
	Perfume CK One	R$ 79,90	
	Calça Diesel	R$ 200,00	

Fonte: Dados dos estudantes (2015)

Por meio das informações sistematizadas na Imagem 1 os estudantes do grupo se propuseram a buscar, em percentual, quanto um brasileiro paga a mais por suas compras em relação aos dois países mencionados? Também, se propuseram a calcular quanto de imposto uma empresa fabricante paga ao produzir, por exemplo, o carrinho de bebê?

Definidos esses problemas os estudantes seguem para a etapa da **resolução e desenvolvimento do conteúdo matemático.** Após discussões no grupo, recordam de razão e proporção e mencionam o cálculo de porcentagem de um valor por meio de regra de três simples, que haviam aprendido no ano anterior.

O todo equivale a 100%

A parte que buscamos equivale a x.

Assim, o todo está para a parte que buscamos da mesma forma que 100% está para x.

$$\frac{todo}{parte\ que\ buscamos} = \frac{100\%}{x}$$

Ao usar esse raciocínio, por exemplo, analisando os valores correspondente a comparação de Brasil e EUA, os estudantes encontraram:

$$\frac{3736}{2198{,}72} = \frac{100\%}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 58{,}85\%$$

E, de início, o quiseram ter como resultado para o primeiro problema. Assim, o professor/pesquisador solicitou que calculassem 58,85% sobre 2198,27, pois, se é essa a porcentagem que o brasileiro paga a mais que os americanos, nos produtos considerados, o resultado teria que ser 3736.

Ao realizarem os cálculos determinaram que 58,85% de 2198,27 é, aproximadamente, 1293,68. E, somando 2198,27 com 1293,68 encontraram 3497,95. Novamente o professor/pesquisador questionou: É esse o resultado esperado. Em consenso os estudantes ficam intrigados, pois, como poderia não ser o valor esperado? Uma vez que os cálculos estavam todos corretos.

O professor/pesquisador ao compreender que [...] ensinar não é *transferir conhecimento*, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção." (FREIRE, 1996, p.12), e buscando valorizar o conhecimento dos estudantes, os auxiliou adaptando problemas relacionados e de mais fácil entendimento. Essa adaptação ao problema original denota um encaminhamento diferenciado da forma tradicional para o ensino e aprendizagem de conteúdos relacionados a álgebra, por meio do qual foi valorizado o protagonismo dos estudantes enquanto coparticipantes do processo de ensino e aprendizagem, isso é possibilitado na concepção de Modelagem Matemática adotada. O entendimento do ensino na forma tradicional que se faz referência é o qual o professor apresenta o conteúdo, exemplos e exercícios para fixação.

Diante disso o problema foi adaptado pelo professor/pesquisador: *Se sou dono de uma loja, e compro uma calça no atacado por R$ 100,00 e a vendo por R$ 200,00, qual a porcentagem de lucro sobre o preço de compra?*

Os estudantes perceberam que se o valor dobrou então o percentual é de 100%. Diante disso, foram novamente questionados: *E se fosse vendida por R$150,00, em percentual, quanto de lucro teria?* Os estudantes compreenderam que se aumentou 50 em 100 então o lucro é de 50%. Então, o professor/pesquisador solicitou que sistematizassem por meio de cálculos o raciocínio.

Um dos estudantes do grupo explica: *R$100 é o preço de custo, 50% de R$100,00 é R$50,00, então, somando temos R$ 150,00.* E, apresenta uma expressão, da forma:

$$(100 + \frac{50}{100} \times 100 = 150)$$

PP: *Da expressão apresentada, suponhamos que não saibamos que é 50/100 então a chamamos de um percentual desconhecido, ou seja, x%. Como determinar esse valor desconhecido?*

$$(100 + \frac{X}{100} \times 100 = 150)$$

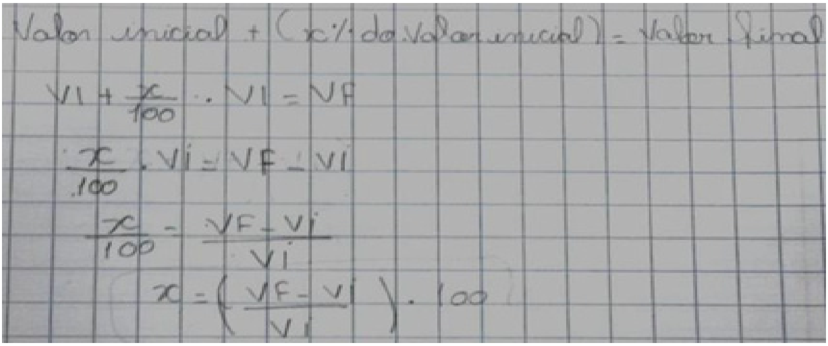
Junto, os estudantes no grupo, isolam a incógnita e apresentam como solução:

$$x = \left(\frac{150-100}{100}\right) \times 100$$

PP: *Se chamarmos o preço de compra de valor inicial e o preço de venda de valor final, podemos estabelecer uma expressão matemática para trabalhar com qualquer situação.*

Assim, os estudantes com o auxílio do professor/pesquisador elaboraram a expressão conforme imagem a seguir:

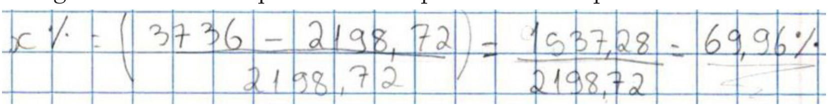
Imagem 2: Dedução de expressão matemática para o cálculo de acréscimo percentual



Fonte: Anotações dos estudantes (2015)

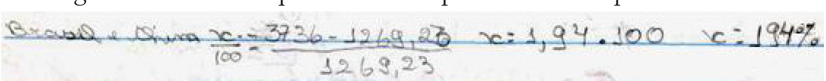
Deduzida a expressão da Imagem 2 os estudantes foram instruídos realizar a comparação dos preços que buscavam no início da atividade. Assim, estabelecem que valor inicial, na comparação seria o menor valor, e valor final o maior valor. Realizando as substituições na expressão determinaram o percentual que os brasileiros pagam a mais quando comparado aos americanos (Imagem 3) e aos chineses (Imagem 4).

Imagem 3: Percentual que o brasileiro para a mais comparada ao americano.



Fonte: Anotações dos estudantes (2015)

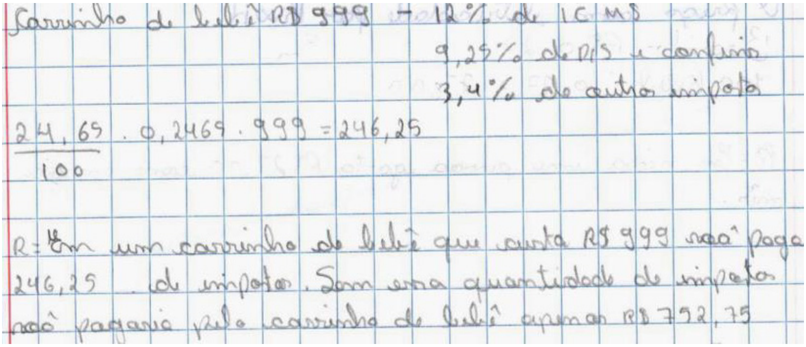
Imagem 4: Percentual que o brasileiro para a mais comparada ao chinês.



Fonte: Anotações dos estudantes (2015)

Com relação aos de impostos que uma empresa fabricante, aqui no Brasil, paga ao produzir o carrinho de bebê em questão, os estudantes, com auxílio de calculadora, apresentaram a resolução conforme a Imagem 5.

Imagem 5: Cálculo do total de imposto pago na produção do carrinho de bebê considerado pelos estudantes.


Carrinho de bebê R$ 999 + 12% de ICMS
9,25% de PIS e Confins
3,4% de outros impostos
24,65/100 . 0,2465 . 999 = 246,25
R: Em um carrinho de bebê que custa R$ 999 nós paga 246,25 de impostos. Sem essa quantidade de impostos nós pagaria pelo carrinho de bebê apenas R$ 752,75

Fonte: Anotações dos estudantes (2015)

Finalizadas as resoluções a próxima etapa é a **análise crítica das soluções,** conforme Klüber e Burak (2008, p.22) nessa etapa os estudantes analisam os resultados encontrados e refletem sobre os mesmos o que pode "ensejar a melhoria das decisões e ações, contribuindo, dessa maneira, para a formação de cidadãos participativos, que auxiliem na transformação da comunidade em que participam".

Assim, os estudantes buscaram comprovar os resultados encontrados para Brasil e EUA validando se R$ 2198,72 + 69,91% de 2198,72 resultaria em R$ 3736,00. E, para Brasil e China validando se R$ 1269,23 + 194% de 1269,23 resultaria, também, em R$ 3736,00. No entanto, os valores encontrados foram respectivamente R$ 3735,84 e R$ 3731,53, valores próximos a R$ 3736,00, mas não igual. Essa diferença foi ocasionada devido aos arredondamentos empregados durante as operações.

Fez parte das análises um questionamento realizado pelo professor/pesquisador: *O que faz os preços chineses serem tão baixos quando comparados aos do Brasil e até mesmo dos EUA?*

Os estudantes amparados em conteúdos estudados com o professor de geografia destacaram como principal agente, as condições de trabalho, nos setores de produção, regidas por meio de contratos de trabalho. Essa corroboração dos estudantes mostrou que de forma natural atividades de modelagem matemática, segundo a perspectiva de Burak (2017), se mostram receptivas em propiciar um trabalho interdisciplinar em sala de aula.

Com relação aos impostos sobre o carrinho de bebê os estudantes foram questionados se não pagassem os impostos a valor do mesmo seria R$ 752,75. De imediato afirmaram que sim. Então, o professor/pesquisador solicitou que relessem parte da reportagem que mencionava que os 24,65%, utilizado pelos estudantes nos cálculos, referia-se apenas ao imposto pago na linha de produção. Sobre esse produto, ainda, incidem novos impostos uma vez que os lojistas pagam mais impostos no vender ao consumidor final, isso sem mencionar os impostos sobre o transporte dos produtos.

Ao finalizar as discussões o professor pesquisador novamente os questiona: *Afinal, quem é que paga todos esses impostos, uma vez que as empresas e as lojas também precisam ter lucro?* Em consenso, os estudantes compreendem que tudo cai para o consumidor. Motivo pelo qual os trabalhadores e consumidores devem lutar sempre para que o dinheiro arrecadado pelo Estado por meio dos impostos seja aplicado em prol do bem comum da nação.

CONSIDERAÇÕES

Ao refletirmos a respeito da atividade prática de modelagem matemática descrita, compreende-se o potencial que a modelagem na concepção adotada tem para impulsionar uma transformação no ensino e na aprendizagem com vistas ao rompimento da educação denominada por Paulo Freire de "educação bancaria".

No decorrer das etapas da atividade foi possível constatar a presença do diálogo, o que converge para o que Freire (1987) chama de educação dialógica na qual o estudante deve assumir-se como sujeito do ato de estudar, com postura crítica e sistemática. No entanto, para conhecer é preciso o outro, desse ponto decorre que o conhecimento é um processo dialógico que ocorre por meio de interação, professor e estudante, estudante e estudante, ambos aprendemos com a interação, o que foi propiciado com a atividade de modelagem apresentada.

Durante a atividade o professor/pesquisador ao valorizar o conhecimento que os estudantes possuíam direcionou como mediador os encaminhamentos das ações como destaca Freire (1987) não sendo autoritário, manipulador, opressor e domesticador, o que propiciou um ambiente de ensino e aprendizagem com muitas discussões e trocas de saberes. Dessas discussões, outra forma para o ensino e a aprendizagem de álgebra, diferente do enfoque tradicional, ganhou significado, uma vez que fez sentido para os estudantes o significado da incógnita "x" nos problemas solucionados.

Também, foi possível constatar que os encaminhamentos direcionaram-se aos princípios metodológicos do ensino presentes na pedagogia da autonomia os quais se enunciam em: não há docência sem discência (ensinar inexiste sem o aprender); ensinar não é transferir conhecimento (deve ser criar possibilidades para sua própria construção); ensinar é uma especificidade humana.

Sob a perspectiva de Paulo Freire olhar para a atividade de modelagem matemática realizada com o tema impostos possibilitou perceber o quanto ela se tornou rica para a formação de um estudante mais crítico quanto ao sistema em que ele faz parte. Trabalhar com o tema impostos, quando se mostra do interesse dos estudantes, é sempre atual no meio escolar e pode seguir outros caminhos conforme o direcionamento de cada professor, mostrando dessa forma um caminho aberto para novas pesquisas.

AGRADECIMENTO

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto editora, 1994.

BURAK, D. Modelagem na Perspectiva da Educação Matemática: um olhar sobre seus fundamentos. **Unión-Revista Iberoamericana de Educacion Matemática**, n. 51, 2017.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido.** 17ª. Ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

______. **Pedagogia da Autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 25º. Ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

HUF, S. F.; BURAK, D. Modelagem Matemática e relações com abordagens no processo de ensino e aprendizagem no contexto do tema imposto. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 12, n. 2, p. 163-175, 2017.

KLÜBER, T. E; BURAK, D. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 10, n. 1, 2008.

TRABALHANDO COM A "TORRE DE HANÓI": UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Jorge Henrique Gualandi[21]
Deborah Oliveira da Fonseca[22]
Maria Rosana Soares[23]

INTRODUÇÃO

Entende-se que o objetivo do ensino é provocar a aprendizagem do aluno, desenvolvendo o pensamento, a percepção, o raciocínio, a compreensão, a linguagem, a comunicação, entre outros. É importante que o aluno seja incentivado, se envolva em sua aprendizagem e construa conhecimentos com o espírito investigativo e criativo.

O ensino de matemática, conforme orienta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), deve trabalhar cinco unidades temáticas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística. Destaca-se a álgebra que está presente desde os anos iniciais do ensino fundamental até o ensino médio. Ela tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno (BRASIL, 2018).

Na etapa do ensino fundamental, o pensamento algébrico é "[...] essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos" (BRASIL, 2018, p. 270). Para tanto, a BNCC aponta que é necessário que o aluno identifique regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas. Já na etapa do ensino médio, o aluno precisa, entre outras, ser capaz de

---

[21] Doutor em Educação Matemática (PUC-SP). Professor (IFES) e credenciado do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores (UFES).
CV: http://lattes.cnpq.br/3386420572368441

[22] Especialista em Metodologia do Ensino de Matemática (FAVENI).
CV: http://lattes.cnpq.br/6342260642340949

[23] Doutora em Educação Matemática (PUC-SP). CV: http://lattes.cnpq.br/1652375515097642

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 531).

A BNCC evidencia a necessidade de trabalhar com regularidades e padrões para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Este, segundo as pesquisas de Ponte (2006), estuda as estruturas, a simbolização, a modelação e a variação, valorizando a representação, o raciocínio, a generalização e a abstração sobre os objetos matemáticos e suas relações. Assim:

> Uma forma de garantir que o trabalho com a Álgebra esteja presente em todos os anos da educação básica é desenvolver situações de ensino e aprendizagem envolvendo as ideias de regularidade, generalizações de padrões e propriedades de igualdade, por meio de tarefas exploratórias (GUALANDI, 2019, p. 53).

Para complementar essa ideia, Favero e Manrique (2021), com base nos estudos de Blanton e Kaput (2005), destacam o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de tarefas que abordam padrões e regularidades, nas quais os alunos possam prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos e identificar e descrever padrões numéricos e geométricos. Com isso, é imprescindível que o professor de matemática conheça, entenda e proporcione o estudo de regularidades e padrões em todas as etapas de ensino.

De acordo com Ponte (2009, p. 170), regularidade refere-se à relação que existe entre os objetos, e padrão é "[...] a unidade de base que eventualmente se replica, de forma exatamente igual ou de acordo com alguma lei de formação". O autor indica o estudo dos padrões numa perspectiva exploratória e investigativa, e, de acordo com Gualandi (2019), o ensino de matemática, com base nas regularidades, promove a observação, a generalização e a síntese, bem como a criatividade e o envolvimento do aluno com os processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA).

Dreyfus (2002, p. 30, tradução nossa) afirma que o "[...] Pensamento Matemático Avançado consiste em uma grande variedade de processos de componentes em interação", entre os quais o autor destaca os processos de representação e abstração. Na representação, utiliza-se a matemática para representar um objeto de forma mental ou simbólica, incorporando suas características. No processo de abstração, o aluno constrói suas estruturas mentais por meio de estruturas matemáticas, as propriedades e relações entre objetos matemáticos.

O autor apresenta dois subprocessos da abstração: a generalização e a sintetização. A generalização consiste em "[...] induzir a partir de particularidades, identificar pontos em comum, expandir domínios de validade" (p. 35, tradução nossa), além de permitir resultados de longo prazo. A sintetização é a conexão de ideias matemáticas que possibilitam expressar um padrão a partir de uma sentença algébrica. Tais processos são importantes para aproximar o aluno do trabalho de um matemático, numa perspectiva de construção do conhecimento matemático. Nesse sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 23) enfatizam que

> [...] o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor.

A partir daí, o desafio do professor é a busca de métodos e instrumentos que auxiliem o processo de ensino e aprendizagem, de forma a promover o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio do trabalho com regularidades e padrões que valorizem o PMA. Uma das possibilidades é o material didático (MD), que, de acordo com Lorenzato (2012, p. 18), "[...] é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem", sendo, pois, um livro, uma calculadora, um jogo, um material manipulável, entre outros.

Evidencia-se o material manipulável (MM), definido por Reys (1982), conforme apresenta Vale (2002), como objetos que possibilitam ao aluno "[...] sentir, tocar, manipular e movimentar" (p. 5) e promovem, no processo de ensino e aprendizagem, a motivação, a passagem do concreto para o abstrato e a participação ativa do aluno. Semelhantemente a essa concepção, Camacho (2013, p. 23) conceitua os MM como

> [...] objetos intuitivos e dinâmicos que visam a compreensão de diversos conceitos, tendo como finalidade motivar e auxiliar o aluno na concretização das tarefas

> propostas, em qualquer fase de desenvolvimento, onde, através do contato direto com o objeto, o aluno entrega-se intuitivamente ao processo de descoberta, adquirindo destrezas na interiorização, estruturação e compreensão de conceitos.

Sendo assim, o uso do MM permite desenvolver a matemática por meio da manipulação, exploração, investigação e construção de ideias matemáticas, considerando "[...] o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização" (SANTOS; GUALANDI, 2016, p. 4).

Vale (2002) e Camacho (2013) enfatizam a importância do trabalho com MM, pois propicia a interação do aluno com o objeto, entre os alunos e dos alunos com o professor, proporcionando um espaço para a troca de conhecimentos e experiências em um ambiente colaborativo. Infere-se, então, que cabe ao professor o devido planejamento, sendo criativo e inovador, pensando em tarefas dinâmicas que promovam o desenvolvimento da matemática por meio de tarefas que abordem o MM.

DESENVOLVIMENTO DA PROPOSTA DE TRABALHO

Nesta seção, apresentam-se o MM, denominado "Torre de Hanói", e uma proposta de sequência didática (SD) com sua utilização. De acordo com Zabala (1998), uma SD constitui "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos" (p. 18). Desse modo, compreende-se que, ao trabalhar com uma SD envolvendo situações pensadas e organizadas com base em leituras e investigações, pode proporcionar aos estudantes o desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme destacado em Brasil (2018).

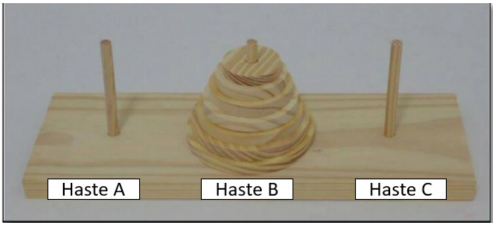
A seguir descreve-se o contexto da "Torre de Hanói", bem como a lenda que a envolve e as etapas da SD.

A "Torre de Hanói" é um jogo que foi criado, em 1883, pelo matemático francês Edouard Lucas [1842-1891] (TAHAN, 1974, p. 137). Ilustra-se, a seguir, a lenda do "fim do mundo", também associada por Lucas (1883) como a lenda da "Torre de Hanói".

LENDA DA "TORRE DE HANÓI"

Quando Deus criou o mundo, colocou, no templo de Benares, o jogo de Hanói com 64 andares de ouro. Por determinação de Brama, os sacerdotes ficaram encarregados de transportar a Torre de ouro da haste A para a haste C, podendo usar a haste B como apoio, de acordo com as regras do jogo. Os movimentos, desde o princípio do mundo, são feitos pelos sacerdotes noite e dia, sem parar. Segundo a crença dos hindus, a terminação desse jogo vai assinalar o fim do mundo [...] (TAHAN, 1974, p. 140). Na figura 1, apresenta-se a ilustração do jogo "Torre de Hanói".

Figura 1: Jogo "Torre de Hanói".



Fonte: Acervo do laboratório de ensino de matemática (LEM) do Ifes –*campus* Cachoeiro de Itapemirim.

O trabalho dos monges consistia em transportar toda a pilha dos 64 discos para um dos outros pinos.

Segundo Sá (2010), o jogo consiste no seguinte:

a. Movimentar os discos de um pino para outro, um de cada vez, mexendo apenas no que estiver na parte de cima da pilha (p. 72).

b. Um disco jamais pode ficar em cima de um outro menor.

Conta a lenda que, quando eles terminassem o trabalho, seria o fim do Universo (p. 73).

Diante disso, o jogo consiste em uma base de madeira em que estão firmadas três hastes verticais e "n" discos de madeira, de diâmetros diferentes, furados no centro. Em uma das hastes se encontram os discos, de maneira que nenhum disco esteja sobre outro de diâmetro menor. O objetivo, então, é transferir os discos de uma haste para outra, um por vez, com a quantidade mínima de movimentos, observando a regra mencionada e podendo utilizar a outra haste como apoio.

Esse material, além de poder ser adquirido em lojas, pode ser construído. Assim, destaca-se um dos trabalhos realizados no LEM do Ifes *campus* Cachoeiro, coordenado pelo primeiro autor, que promove construções e adaptações de MD para o uso na educação básica, na formação inicial e na formação continuada de professores que ensinam matemática. O MD em questão pode ser adaptado, por exemplo, com uso de papelão e EVA. Com isso, a "Torre de Hanói" apresenta-se acessível para práticas docentes, podendo esse MD ser usado em todos os níveis de ensino e de diferentes formas, bem como incentivar o processo de aprendizagem dos alunos e o desenvolvimento da matemática. Apesar de ser um jogo, o MD pode ser utilizado como um MM numa perspectiva investigativa.

PROPOSTA DE TRABALHO

Neste tópico, são detalhadas as etapas que buscam potencializar o ensino da álgebra por meio de um ambiente colaborativo em que os alunos possam desenvolver ideias matemáticas.

1ª etapa: Conhecendo o MM

No primeiro momento, para que os alunos conheçam o MM "Torre de Hanói", propõe-se:

- Dividir os sujeitos em duplas, no intuito de promover interações entre eles e, dessa forma, proporcionar a troca de ideias.
- Entregar um jogo "Torre de Hanói" a cada dupla, para a familiarização com as peças e movimentos. É importante que, nesse momento, o professor fale sobre a lenda, podendo interessar aos alunos e motivar seu envolvimento.
- Reforçar as regras que acompanham o material. Para facilitar o desenvolvimento da proposta, o professor orientará os alunos para que comecem

a transferir um disco de uma haste para outra, depois dois discos e assim sucessivamente, para que entendam as regras do jogo.

Nesse momento, solicita-se aos integrantes das duplas que preencham a tabela 1, denominada número de discos e quantidades de movimentos realizados.

Tabela 1: Número de discos e quantidade de movimentos realizados.

Número de discos	Número de movimentos encontrados
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Fonte: Acevo do LEM (2019).

Após cada dupla preencher a tabela 1, o professor conduzirá uma discussão acerca dos movimentos encontrados pelas duplas, organizando, no quadro, um painel. Assim que as discussões forem estabelecidas e sistematizadas, o professor solicitará às duplas que retornem ao jogo e manipulem os discos, com o propósito de encontrar o número mínimo de movimentos na transposição dos discos da haste A para a haste C, podendo usar a haste B como apoio. Nesta fase, os alunos vão preencher a tabela 2.

Tabela 2: Número mínimo de movimentos

Número de discos	Número mínimo de movimentos
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Fonte: Acevo do LEM (2019).

Depois de as duplas terem preenchido a tabela 2, será feito um painel com o número mínimo de movimentos encontrados. Espera-se que os alunos indiquem a seguinte sequência de movimentos mínimos (1, 3, 7, 15, 31, 63).

Almeja-se que, nesse primeiro contato, os alunos identifiquem uma regularidade de movimentos. Com isso, mobiliza-se o desenvolvimento das capacidades de observação, raciocínio e generalização, que propõem Brasil (2018), Ponte (2006) e Gualandi (2019).

2ª etapa: Trabalhando com o MM

Nesta etapa, promove-se uma tarefa na qual se trabalham a observação de regularidade, a generalização de padrão e a representação algébrica, com o objetivo de proporcionar o desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme orienta a BNCC (BRASIL, 2018), e do envolvimento com processos do PMA (DREYFUS, 2002). Apresenta-se, a seguir, a proposta de SD elaborada com base na MD "Torre de Hanói".

Solicita-se às duplas que, de posse da tabela 2 preenchida, observem e investiguem os seguintes questionamentos e escrevam suas conclusões.

1- Observe e analise a quantidade mínima de movimentos dos discos e escreva suas conclusões.

2- Se a quantidade de discos a serem transferidos fosse 7, quantos movimentos, no mínimo, seriam necessários?

3- Há uma quantidade de discos que permita realizar um total de 512 movimentos? Explique.

4- É possível estabelecer uma relação matemática entre a quantidade de discos e a quantidade de movimentos? Explique.

5- Uma forma de representar algebricamente um número qualquer é nomeando-o de enésimo termo, ou seja, **número *n***. Quantos movimentos serão necessários para movimentar ***n*** discos, com ? Como obtiveram a resposta?

3ª etapa: Aprofundando o conhecimento matemático

Neste momento, valoriza-se o trabalho envolvendo sequência numérica. Solicita-se aos alunos que escrevam a sequência numérica que representa a quantidade mínima de movimentos.

Espera-se que os sujeitos identifiquem a seguinte sequência (1, 3, 7, 15, 31, 63, 127...). Observa-se que esses números podem ser obtidos de uma regularidade. Assim:

i = 1 (ii) 3 = 1 + 2 (iii) 7 = 1 + 2 + 4 (iv) 15 = 1 + 2 + 4 + 8

v Escreva os números 31, 63 e 127 usando somas como as exemplificadas nos itens (i), (ii), (iii) e (iv).

Segundo Trotta (1988, p.36), chama-se de *progressão geométrica* (PG) qualquer sequência na qual cada termo, a partir do segundo, resulta da multiplicação do termo anterior por uma dada constante. Esta é denominada *razão* da *progressão geométrica* e indicada por *q*. Logo, numa PG de razão q, tem-se:

$$a_k = a_{k-1}.q, (para k \geq 2)..$$

$$q = \frac{a_k}{a_{k-1}}$$

De acordo com Trotta (1988, p. 40), o termo geral de uma PG é tal que:

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$, em que:

- a_n $corresponde\ ao\ valor\ de\ um\ termo\ qualquer, para\ n \geq 1;$
- a_1 $corresponde\ ao\ valor\ do\ primeiro\ termo;$
- $n\ corresponde\ a\ posição\ de\ um\ termo\ qualquer, sendo\ n \geq 1;$
- $q\ corresponde\ a\ razão\ da\ PG.$

Trotta (1988, p. 50) apresenta a fórmula que permite calcular a soma dos *n* termos de uma PG não constante ($q \neq 1$), conhecendo-se o primeiro termo e a razão é dada por:

$$S_n = a_1.\frac{(q^n - 1)}{q - 1}, para\ q \neq 1.$$

Sendo:

$$S_n \text{ corresponde a soma dos } n \text{ primeiros termos, para } n \geq 1;$$
$$a_1 \text{ corresponde ao valor do primeiro termo};$$
$$q \text{ corresponde a razão da } PG;$$
$$n \text{ corresponde a posição de um termo qualquer, sendo } n \geq 1.$$

Após uma explanação acerca das progressões geométricas, solicita-se às duplas que investiguem a seguinte questão: Usando argumentos de PG, escreva a soma dos movimentos mínimos para transpor os 9 primeiros discos da haste A para a haste C da "Torre de Hanói". Generalize para os "n" discos.

Espera-se que as duplas desenvolvam a investigação, encontrando os seguintes resultados:

a. para os 9 primeiros discos, tem-se:

A quantidade de movimentos mínimos de uma determinada quantidade de discos pode ser obtida por meio da soma dos termos de uma PG. Por exemplo, para obter a quantidade mínima de movimentos para 4 discos, pode-se somar 1 + 2 + 4 + 8 = 15 movimentos. Ou seja, a soma dos 4 primeiros termos de uma PG, cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é 2.

Assim, para encontrar a quantidade de movimentos mínimos para 9 discos, pode-se usar a seguinte soma: $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + a_9$.

Com o auxílio da soma da PG, tem-se: $S_n = a_1 . \frac{(q^n - 1)}{q - 1}, para q \neq 1$.Neste caso, n = 9, pois procura-se a soma dos 9 primeiros termos.

$$S_9 = 1 . \frac{(2^9 - 1)}{2 - 1}$$
$$S_9 = \frac{1 . (512 - 1)}{1}$$
$$S_9 = 511$$

Portanto, a quantidade mínima de movimentos para deslocar os 9 primeiros discos da haste A para a haste C corresponde a 511 movimentos.

b. para os "n" primeiros discos, tem-se:

$$S_n = a_1 . \frac{(q^n - 1)}{q - 1}, para\ q \neq 1.$$

$$S_n = 1 . \frac{(2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$S_n = 2^n - 1, para\ n \geq 1.$$

4ª etapa: Ampliando ideias

A tarefa apresentada na terceira etapa pode ser desenvolvida com alunos do curso superior, seja na formação de professores, seja em cursos que estudam o Princípio da Indução Finita (PIF), mediante uma organização matemática formal. De acordo com Corrêa (2008, p. 18), "esse princípio é utilizado quando surgem afirmações que envolvam números naturais. Defronta-se, então, com a questão de saber se tais afirmações são verdadeiras para todo número natural $n \geq n_0$, em que "$n_0 \in N$".

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

Moreira, Martínez e Saldanha (2012) salientam a seguinte ideia conceitual para o PIF:

Seja P uma propriedade satisfeita por um conjunto de númerose suponha-se que:

(i) o número n_0 satisfaz a propriedade *P*, então $P(n_0)$ é verdadeira; e

(ii) se um número natural k tal que $n_0 \leq k \leq n$ satisfaz a propriedade *P*, então $n + 1$ também satisfaz a propriedade *P*, logo $P(n + 1)$ também é verdadeira.

Como base da indução representada em (i), verifica-se que, para o valor inicial $n = n_0$, a propriedade é válida. O passo indutivo, representado em (ii), consiste em utilizar *P(n), pois* a chamada hipótese de indução é utilizada para provar que $P(n + 1)$ é válida. Uma vez verificados a base e o passo indutivo, tem-se uma "cadeia de implicações", de modo que *P(n)* é verdadeira para todo natural $n \leq n_0$ (p. 2).

No intuito de proporcionar aos estudantes o contato com o PIF, propõe-se o seguinte: Quantos movimentos, no mínimo, são necessários para movimentar 8 discos?

$$S_n = 2^n - 1, para\ n \geq 1.$$

$$S_8 = 2^8 - 1$$

$$S_8 = 255$$

Resposta: Para movimentar 8 discos, são necessários, no mínimo, 255 movimentos.

Observa-se que o número 255 pode ser escrito a partir da soma dos 8 primeiros termos de uma PG de razão 2 e primeiro termo 1. Assim, 255 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128.

Pode-se indicar a soma dos primeiros *n* termos dessa PG por:

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + $2^{n-1} = 2^n - 1$, com $n \in N - \{0\}$.

Mostre, pelo PIF, que a proposição é verdadeira.

1º passo: Verificar a base da indução, ou seja, verificar que P(1) é verdadeira para o valor inicial. P(1): 1 = $2^1 - 1$ (verdadeiro).

2º passo: Estabelecer a hipótese de indução, ou seja, supor que a proposição é verdadeira para um número natural *k*, $1 \leq k \leq n$.

$$P\ (k):\ \underbrace{1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1}_{Hipótese\ de\ Indução}$$

3º passo: Usar a hipótese de indução para provar que P (k + 1) é verdadeira para todo $n \in N - \{0\}$.

$$\underbrace{1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{k-1}}_{Hipótese\ de\ Indução} + 2^{k+1-1} = 2^{k+1} - 1$$

Utilizando a hipótese de indução $(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1)$, substituir $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{k-1}$ por $2^k - 1$:

$$\underbrace{1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{k-1}}_{Hipótese\ de\ Indução} + 2^{k+1-1} = 2^{k+1} - 1$$

$$2^k - 1 + 2^{k+1-1} = 2^{k+1} - 1$$

Desenvolver a soma $2^k - 1 + 2^{k+1-1}$ para mostrar que corresponde a $2^{k+1} - 1$, comprovando a validade da proposição.

$$2^k - 1 + 2^{k+1-1} = 2^{k+1} - 1$$

$$2^k - 1 + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

$$2^k + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

$$2.2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

$$2^{k+1} - 1 = 2^{k+1} - 1$$

Logo, tem-se que $2^{k+1} - 1 = 2^{k+1} - 1$, verificando, assim, que a proposição é verdadeira, como se queríamos provar (*c.q.p.*).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitas são as possibilidades para o ensino da matemática, para concretizar as orientações estabelecidas em documentos oficiais, como a BNCC (BRASIL, 2018). É papel do professor articular essas a teorias da Educação Matemática e abordagens metodológicas. Destaca-se, assim, a necessidade da pesquisa, investigação, planejamento e criatividade, ao elaborar sequências didáticas, considerando o contexto de sala de aula, que colaborem para a aprendizagem da matemática.

O trabalho com MM atrelado aos processos do PMA, numa perspectiva investigativa e exploratória, pode contribuir significativamente para o desenvolvimento do pensamento algébrico e para uma aprendizagem ativa. Na primeira e na segunda etapa da proposta relatada, que podem ser aplicadas no ensino fundamental e no ensino médio, o aluno pode observar, raciocinar, representar, generalizar e sintetizar uma ideia matemática, bem como compreender o sentido e significado do símbolo, importante para o desempenho em álgebra.

O professor pode, no ensino médio, desenvolver até a terceira etapa, para aproximar os alunos de uma linguagem matemática mais formal, em concordância com Brasil (2018). A quarta etapa é proposta principalmente para a formação de professores de matemática, na qual se pode elevar o nível de complexidade para a demonstração, levando o sujeito de aprendizagem a verificar e comprovar a veracidade do objeto matemático. Isso é importante para seus saberes docentes e para o desenvolvimento dos processos do PMA (DREYFUS, 2002).

Enfatiza-se o trabalho com regularidades e padrões na álgebra, buscando o desenvolvimento do pensamento algébrico, bem como se propõe estender a outros campos da matemática. Neste trabalho, o aluno é desafiado a aprender investigando, descobrindo relações, desenvolvendo a linguagem, argumentando e construindo conhecimentos matemáticos.

Portanto, incentiva-se o desenvolvimento de propostas pedagógicas que contribuam para o processo de ensino e aprendizagem de matemática, bem como a disseminação dos resultados dessas práticas. Assim, podem-se promover, de forma contínua, reflexões, pesquisas e ações com vistas à melhor formação matemática, em todos os níveis de ensino.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 7 mar. 2021.

CAMACHO, M. S. F. P. **Materiais Manipuláveis no Processo Ensino/Aprendizagem da Matemática**: Aprender explorando e construindo. 2013. 91 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário) – Universidade da Madeira, Portugal, 2013. Disponível em: <https://digituma.uma.pt/handle/10400.13/373>. Acesso em: 4 mar. 2021.

CORRÊA, F. J. S. A. **Introdução à Análise Real**. Belém: UFPA, Faculdade de Matemática, Matemática a Distância, Belém, 2008.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, David (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Netherland: Kleuwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

FAVERO, D. C. B. P.; MANRIQUE, A. L. A abordagem do pensamento algébrico da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**. Florianópolis, v. 16, p. 1-17, jan./dez. 2021.

GUALANDI, J. H. **Os reflexos de uma formação continuada na prática profissional de professores que ensinam matemática**. 2019. 167 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2019.

LORENZATO, S. (Org.). O **Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 3. ed. Campinas-SP: Autores Associados, 2012.

MOREIRA, C. G. T. A.; MARTÍNEZ, F. E. B.; SALDANHA, N. C. **Tópicos de Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PONTE, J. P. Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino--aprendizagem da Matemática e na formação de professores. In: VALE, I; BARBOSA, A. (Org.). **Padrões**: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo – Projecto Padrões, 2009. p. 169-175.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. In: VALE, I. et al. (Eds.). **Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores.** Lisboa: SEM-SPCE, 2006. p. 5-27.

SÁ, I. P. **A Magia da Matemática**: Atividades Investigativas, Curiosidades e História da Matemática. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2010.

SANTOS, R.; GUALANDI, J. H. Laboratório de Ensino de Matemática: O uso de materiais manipuláveis na formação continuada dos professores. In: **XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2016, São Paulo. Anais do XII ENEM. 2016. p. 1-12.

TAHAN, Malba. **A matemática na lenda e na história**. Rio de Janeiro: Bloch Editores, 1974.

TROTTA, F. **Matemática por assunto**. Volume 2. São Paulo: Scipione Ltda., 1988.

VALE, I. **Materiais Manipuláveis**. 1. ed. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, 2002.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Trad. Ernani F. da F. Rosa – Porto Alegre: Artmed, 1998.

A SEQUÊNCIA FEDATHI E O DESENVOLVIMENTO ALGÉBRICO NO ESTUDO DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A)

Raimundo Nélio Rodrigues Ferreira[24]
Alan de Souza Sampaio[25]
Maria Suzana Pinheiro[26]

INTRODUÇÂO

No estudo da progressão aritmética (P.A), geralmente iniciamos com a definição e exposição de fórmulas e propriedades, para que em seguida os alunos resolvam exercício de aplicações. No entanto como professores do Ensino Médio, percebemos as dificuldades apresentadas pelos discentes em representar e relacionar os dados das questões, com as variáveis envolvidas nas fórmulas já deduzidas desse conteúdo matemático. Ou seja, isso requer do aluno um certo domínio de álgebra, sendo esta muitas vezes, não explorada da forma apropriada.

A respeito da utilização de linguagens para representarmos uma situação, esta constitui como uma das competências gerais na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), (BRASIL, 2017):

> Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual – motora, como Libras e escrita), corporal, visual, sonora e digital, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo (BRASIL, 2017, p. 9–10).

Nesse contexto de representação, percebemos que quando os discentes se deparam com situações nas quais precisam calcular um determinado termo,

---

[24] Mestre em Matemática (UECE). Professor de Matemática da EEEP José Maria Falcão. CV: http://lattes.cnpq.br/7852835450910470

[25] Mestre em Matemática (UECE). Professor de Matemática da EEM Governador Adauto Bezerra. CV: http://lattes.cnpq.br/3038488839740368

[26] Mestre em Matemática (UECE). Professora da EEM Joaquim José da Costa. CV: http://lattes.cnpq.br/2258688426322877

descobrem o padrão e se utilizam disso para o cálculo dos demais. Essa estratégia de resolução no início da abordagem do estudo da P.A é fundamental, pois demonstra a compreensão da definição, mesmo recorrendo na maioria das vezes a um processo longo. A partir disso, devemos criar situações, através de metodologias que possam explorar o desenvolvimento algébrico desse conteúdo para que possamos compreender as fórmulas expressas na teoria, como forma de facilitar as resoluções das tarefas propostas.

Na busca de metodologias voltadas para essa temática, com o intuito de contribuirmos nos processos de ensino e de aprendizagem, conhecemos a metodologia de ensino Sequência Fedathi, como alternativa metodológica na qual se evidencia a mediação do professor como sua essência, fortalecendo uma prática pedagógica-dialogada e investigativa entre alunos e professores.

Essa metodologia foi abordada em (Ferreira, 2018) no que se refere a sua dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), intitulada "A Sequência Fedathi como proposta de mediação do professor no ensino dos números inteiros". A partir disso, tivemos interesse também em vivenciá-la, no desenvolvimento algébrico da progressão aritmética.

Assim, este trabalho tem como base a seguinte questão norteadora: Que sessões didáticas podem ser vivenciadas sob a metodologia de ensino Sequência Fedathi para minimizar ou sanar dificuldades com as progressões aritméticas? E temos como objetivo a elaboração de sessões didáticas para ser vivenciadas, sob a metodologia de ensino Sequência Fedathi, que possam contribuir na compreensão do desenvolvimento algébrico desse conteúdo. Pautadas em situações de análise e reflexão mediadas pelo professor, possibilitando para os alunos a observação de padrões e não exigindo dos discentes a memorização da regra construída sem nenhum significado.

Um currículo que atenda novas práticas pedagógicas procura tornar o educando um indivíduo reflexivo, participativo e crítico na construção do conhecimento. Nesse aspecto, o ensino de Matemática constitui um problema a ser superado na educação básica, ao enfatizarmos um ensino mecanizado, com memorização de regras para aplicação, desconsiderando o conhecimento prévio do aluno.

Assim, considerando os problemas existentes no ensino da progressão aritmética, em sua parte algébrica, apresentamos a metodologia de ensino Sequência Fedathi como alternativa metodológica de ensino, de autoria do professor Hermínio Borges Neto, matemático e pesquisador da área de Educação Matemática, da Universidade Federal do Ceará (UFC). Segundo Borges Neto et.al (2013) essa metodologia propõe que o aluno deve reproduzir os passos que um matemático realiza quando se depara com um problema, abordando dados, traçando estratégias, testando resultados encontrados, analisando possíveis erros e na constatação destes, corrige-se e elabora um modelo.

Para Sousa (2015), a Sequência Fedathi está organizada em três níveis: *preparação,* momento da organização da experimentação pelo docente; *vivência*, fase da execução do plano, compreendendo quatro etapas: tomada de posição, maturação, solução e prova; e *análise*, correspondendo à avaliação do trabalho do professor na aula.

A *preparação,* primeiro nível de desenvolvimento da Sequência Fedathi, trata-se do planejamento de sua vivência, quando o professor se organiza no sentido material (análise do ambiente) e intelectual (análise teórica) visando o cumprimento das etapas da aula. A organização no sentido material, refere-se a escolha do local em que a aula ocorrerá, selecionando os recursos didáticos que serão utilizados como ferramentas, para o aprimoramento das atividades desenvolvidas.

Em relação à análise teórica, segundo Sousa (2015), trata-se do estudo do professor acerca do conteúdo que irá trabalhar, levando em consideração a organização do que pretende ensinar, o *plateau* dos alunos a respeito do assunto e o conhecimento do docente para com o tema. De acordo com o mesmo autor, a palavra *plateau*, na Sequência Fedathi, corresponde identificar o conteúdo considerado como pré-requisito a ser trabalhado para a compreensão do novo saber que o professor irá abordar, ou seja, é o nivelamento ou base de equilíbrio do aluno. Nessa perspectiva, segundo Bezerra (2018), a ideia não é trabalhar o conteúdo, acelerando o ritmo dos que tem mais dificuldades, buscando uma igualdade com aqueles que dominam, pois isso é inviável, tendo em vista a heterogeneidade presente nas turmas, além desta ser necessária para o ensino.

Após a preparação, temos em seguida a *vivência*, o segundo nível da Sequência Fedathi, referindo-se ao desenvolvimento e/ou execução do plano de aula ou sessão didática. Nesse nível destacamos a execução das quatro etapas interdependentes e sequenciadas, quais são: tomada de posição, maturação, solução e prova. Ao concluirmos a execução dessas quatro etapas, passamos para o terceiro e último nível da Sequência Fedathi, denominado de *análise*, referindo-se a autoavaliação do professor, sua prática, postura e atuação, tomando como referência os dois níveis anteriores, ou seja, a sua preparação e vivência. Descrevemos agora, as etapas que constituem a *vivência* ou o segundo nível da Sequência Fedathi.

Na primeira etapa, *tomada de posição*, segundo Souza (2010) é apresentado para o aluno um problema desafiador e que esteja no nível deles, para ser explorado e abstraído do seu contexto particular, para mais adiante, apresentá-lo em um modelo matemático genérico. A etapa seguinte, denominada de *maturação*, é o momento em que o discente procura identificar e compreender as variáveis envolvidas no problema proposto, traçando estratégias que o leve a uma solução e fazendo indagações que os auxiliem na resolução. Porém, segundo Borges Neto et al., citado por Souza (2013), diante das perguntas o professor deve adotar a postura mão-no-bolso, denominada pelo próprio autor, quando o docente não apresenta resposta pronta ou direta, mas induz o aluno a pensar, a criar estratégias.

Na terceira etapa, chamada de *solução*, de acordo com Souza (2013) modelos de resolução serão elaborados pelo próprio aluno, para que os ajudem a encontrar o que está sendo solicitado no problema. Não há um modelo padrão a ser organizado, podendo ser expresso em linguagem escrita, verbal ou matemática, com representações por meio de desenhos, gráficos ou esquemas. Logo após inicia-se a *prova*, constituindo a quarta e última fase da Sequência Fedathi. Nesse momento, segundo Menezes (2018) o professor exibirá a solução correta do problema proposto, fazendo uma conexão com o conhecimento que planejou ensinar, através de um modelo geral, tornando este também aplicável em outras situações-problemas, ou seja, buscando uma generalização, não se limitando apenas a situação proposta.

Enfim, a metodologia da Sequência Fedathi, de acordo com Sousa (2015), provoca uma mudança de postura em nossa prática docente, proporcionando momentos investigativos, partindo de problemas, utilizando perguntas, induzindo o aluno a pensar, refletir, analisar e verificar suas afirmações ou soluções, criando um ambiente de investigação e consequentemente de aprendizagem significativa.

DESENVOLVIMENTO

Para realização desse trabalho utilizamos como metodologia os princípios da pesquisa qualitativa (BOGDAN e BIKLEN, 1994); do tipo bibliográfica (FIORENTINI; LORENZATO, 2007), identificando livros e outras produções científicas acerca do ensino de álgebra na Educação Básica e da Sequência Fedathi, nossos principais temas de estudo; e explicativa, na busca de esclarecer que fatores podem contribuir para a explicação de um fenômeno, de uma situação (COSTA; COSTA, 2004), no caso o ensino da progressão aritmética de forma investigativa e compreensiva.

Para tanto, fizemos inicialmente uma pesquisa bibliográfica com o intuito de aprofundar nossos conhecimentos acerca da Álgebra na educação básica, as dificuldades enfrentadas no seu ensino, bem como saber sobre que pesquisas foram feitas nos últimos anos, no sentido de buscar a superação dessas dificuldades. A atividade seguinte consistiu na preparação e elaboração de sessões didáticas para o ensino da progressão aritmética (P.A) com o uso da Sequência Fedathi, metodologia que também pode ser utilizada no planejamento de aulas com outros conteúdos de Matemática.

Destacamos no quadro a seguir, exemplo de uma sessão didática sobre progressão aritmética, elaborada à luz da metodologia de ensino Sequência Fedathi.

QUADRO 1 – EXEMPLO DE SESSÃO DIDÁTICA SOBRE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

<u>IDENTIFICAÇÃO</u> - <u>INSTITUIÇÃO</u>: (Nome da Escola) - <u>PROFESSOR</u>: (Nome do professor) - <u>NÍVEL / MODALIDADE DE ENSINO</u>: 1º ano do Ensino Médio - <u>DISCIPLINA</u>: Matemática - <u>TURMA</u>: 1º ANO - <u>DATA</u>: - <u>TEMPO DIDÁTICO</u>: 1h 40min

OBJETIVOS:

Gerais:

- Compreender a definição de progressão aritmética e a importância desta no cotidiano, através de diferentes situações em que estejam presentes variados contextos e nos quais surja a necessidade da utilização desse conteúdo.

Específicos:

- Reconhecer uma progressão aritmética;
- Determinar um termo qualquer de uma P.A, a partir do primeiro termo e da razão;
- Representar genericamente uma P.A;

CONTEÚDO/TEMA: Progressão aritmética

CONHECIMENTOS PRÉVIOS / PRÉ-REQUISITOS DOS ALUNOS:

- Saber operações básicas como adição e subtração;
- Ter conhecimento sobre função.

COMPORTAMENTOS ESPERADOS DOS ALUNOS:

- Na abordagem da situação-problema como atividade introdutória referente a progressão aritmética, possíveis dificuldades que poderão surgir: interpretação da situação-problema proposta pelo professor; representar algebricamente a situação proposta.

NECESSIDADES DO PROFESSOR:

- Desenvolver a aula com estrutura baseada nos princípios, níveis e etapas da Sequência Fedathi;
- Elaborar perguntas e/ou contraexemplos que poderão ser feitas como forma de mediação;
- Fazer o levantamento de possíveis perguntas ou questionamentos que poderão ser feitos pelos alunos;
- Adotar a postura mão-no-bolso, ou seja, não fornecer respostas prontas ou diretas para as dúvidas, perguntas ou questionamentos dos discentes;
- Propor situações-problema do cotidiano que explorem progressão aritmética.

AMBIENTE: Sala de aula.

PREPARAÇÃO DO AMBIENTE:

- O professor disponibilizará folhas que serão entregues para cada aluno, contendo a situação proposta para resolução;
- Na sala também devem ser disponibilizados os seguintes materiais: lápis, caneta, marcadores para quadro branco, dados, réguas, notebook e data show.

TOMADA DE POSIÇÃO / APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA:

Acordo Didático:

- As equipes serão formadas por quatro componentes de forma voluntária para a discussão e resolução da situação-problema proposta pelo professor;
- Comentar com a turma sobre a necessidade da participação de todos na discussão;
- Durante a resolução da atividade não deve haver interação entre os grupos;
- O trabalho em equipe será realizado no tempo de 30 minutos;
- Depois que cada equipe concluir a sua resolução, será feita a apresentação dos resultados;
- Será selecionado um representante de cada grupo para apresentar os resultados encontrados;
- No momento em que o representante estiver apresentando os resultados, os demais componentes da equipe poderão complementar sua fala;
- O professor ficará acompanhando e mediando o trabalho com a utilização de perguntas;
- Expectativas do professor: a participação ativa dos alunos nas atividades, mantendo respeito e cumprimento daquilo que lhe foi proposto;
- O que os alunos podem esperar do professor: que o professor acompanhe atentamente às estratégias apresentadas por eles durante a resolução da atividade, auxiliando-os com esclarecimentos sobre as dúvidas que forem surgindo, para que consigam desenvolver a tarefa e chegar à solução, possibilitando a aprendizagem.

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA:

Pedro recebeu por mês, de seu pai, durante um ano, uma quantia em dinheiro que varia a cada mês. No 1º mês recebeu 4 reais, no 2º mês 10 reais, no 3º mês 16 e assim por diante, sempre aumentado em valor constante para o mês seguinte. Considere que Pedro não tenha gastado nada e que tenha guardado cada uma dessas quantias. No final do ano, quando recebeu a quantia do 12º mês, quanto Pedro terá no total?

MATURAÇÃO/DEBRUÇAMENTO:

- Resolução da situação-problema nas equipes;
- Mediação do professor com a utilização de perguntas e/ou contraexemplos;
- A postura mão-no-bolso, adotada pelo professor;
- Observação das atitudes e comportamentos dos alunos, durante o trabalho em equipe;
- O professor como incentivador dos discentes, na criação das estratégias;
- A valorização do trabalho investigativo;
- O docente não irá mencionar, neste momento, nenhuma fórmula do estudo da PA

.

SOLUÇÃO / APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS:

- Organização da sala em um semicírculo;
- Socialização das soluções, realizada pelos representantes de cada grupo;
- Questionamentos do professor acerca das soluções;
- Entrega dos registros ao professor.

PROVA/FORMALIZAÇÃO:

- Verificações das soluções que foram apresentadas pelos alunos;

- O professor fará a formalização das soluções apresentadas, utilizando-se do desenvolvimento algébrico para representar a situação-problema, fazendo uma conexão do que foi apresentado pelos alunos, com o saber matemático que pretende ensinar.

- A vivência da atividade proposta terá como intuito levar o aluno a compreender as representações algébricas utilizadas para cada elemento da situação proposta, a respeito das fórmulas deduzidas para o estudo da progressão aritmética, criando assim um modelo geral que possa resolver não só esse problema, mas também outros.

RECURSOS COMPLEMENTARES:

- **Sugestões de fontes de pesquisa para o professor:** LIVROS: Sequência Fedathi: Uma proposta pedagógica para o ensino de Matemática e Ciências (SOUSA *et al.* , 2013);.SITE: https://www.somatematica.com.br

- **Sugestões de fontes de pesquisa para o aluno:** LIVROS: Matemática (Paiva, 2009); SITE: https://portaldosaber.obmep.org.br

AVALIAÇÃO:

- Retomada dos principais momentos da aula;

- Entrega de exercícios para os alunos resolverem em casa;

- Utilização de perguntas, oralmente, sobre o conteúdo progressão aritmética, como forma de verificar a aprendizagem.

ANÁLISE:

Nesse momento o professor avaliará a sua aula, levando em consideração a forma de como foi abordado o ensino progressão aritmética, tendo como referência os níveis e etapas da Sequência Fedathi. Além de analisar o tratamento dado às dificuldades que foram surgindo, comportamentos e erros dos alunos, bem como a postura e atitudes tomadas por ele, verificando se sua mediação através do uso da pergunta e/ou contraexemplos motivou os discentes a fazerem reflexões sobre suas dúvidas e afirmações.

Fonte: Elaborado pelos autores (2021)

Durante a vivência das sessões didáticas utilizaremos perguntas como forma de interligar o conhecimento prévio dos alunos ao conteúdo que pretendemos abordar, os estimulando a fazer reflexões, criar estratégias e estabelecer hipóteses.

Teremos como referência os tipos de pergunta, de acordo com Sousa (2015), classificadas em: pergunta de rotina (feita costumeiramente na sala, como forma de orientar, comunicar ou solicitar); pergunta investigativa ou de investigação (leva o aluno a raciocinar sobre o problema proposto); pergunta diagnóstica (identifica o nível de conhecimento da turma); contraexemplo (pergunta ou apresentação de um exemplo oposto que contradiz algo que o discente afirmou ou questionou, para que este possa refletir) e a pergunta de avaliação ou avaliativa (verifica se o aluno está obtendo uma aprendizagem satisfatória).

CONSIDERAÇÕES

A proposta apresentada, a partir de sessões didáticas, para o estudo da progressão aritmética, com a utilização de situações-problema e vivência da Sequência Fedathi, teve como propósito auxiliar o professor para uma abordagem que julgamos ser eficaz no estudo dessa temática. A respeito da organização das sessões didáticas, pautadas nessa metodologia, consideramos essa proposta como desafiadora, pelo fato de os alunos normalmente presenciarem frequentemente aulas expositivas no ensino desse conteúdo.

Compreendemos por meio das sugestões de sessões didáticas, elaboradas segundo as etapas da Sequência Fedathi, que o estudo da progressão aritmética deve ser feito pelo aluno, com a mediação do professor. Antes de qualquer abordagem conceitual em sala de aula, o docente deve diagnosticar sobre os conhecimentos prévios do discente a respeito da temática em questão. Inicialmente, é recomendável a exploração de situações-problema do próprio cotidiano do estudante, para depois partir para a construção das fórmulas através do desenvolvimento algébrico.

Ainda, diferentemente da abordagem tradicional, enfatizamos nas sugestões de sessões didáticas, a importância do momento destinado para a resolução do problema, pelos alunos, ocorrendo discussões, criando estratégias de soluções para depois apresentá-las. Essas discussões são de fundamental importância, pois os discentes passam a conhecer diferentes métodos utilizados e a defender suas conjecturas perante a turma, em que o professor não lhes forneça respostas prontas ou apresente regras e fórmulas sem quaisquer questionamentos.

O capítulo apresenta uma forma diferenciada de abordar o estudo da progressão aritmética, a partir de sessões didáticas, pautadas na Sequência Fedathi, para ser vivenciadas no intuito de verificarmos a contribuição destas na compreensão deste conteúdo.

Em relação a estes pré-requisitos do professor, a escolha para a vivência dessa metodologia poderá sofrer resistência, por parte do profissional, tendo em vista que o docente tende a executar o que teoricamente julga ser mais fácil, ou seja, considera mais cômodo lecionar sem ser preciso organizar uma estrutura de aula nestes moldes, alegando a própria falta de tempo como fator de impedimento.

Dessa forma, prefere, a partir da exposição do conteúdo, apresentar toda construção abstrata que envolve a progressão aritmética, ditando regras e fórmulas, sem nenhum questionamento, como se fosse algo óbvio para aceitação.

Portanto, esperamos que as sugestões de sessões didáticas pautadas na metodologia de ensino da Sequência Fedathi possam subsidiar a prática do professor no processo de ensino-aprendizagem, ocasionando um rompimento do modelo de ensino apenas expositivo, mostrando a importância do protagonismo do aluno na construção do seu conhecimento. Em nossa prática docente temos procurado vivenciar os princípios da Sequência Fedathi.

Antes desta pesquisa, geralmente, iniciávamos nossas aulas realizando, de imediato, a exposição completa do conteúdo, visando, principalmente, o cumprimento do currículo escolar. Não havia momentos para discussões a respeito de situações-problemas, alegando a perca de tempo para eventuais investigações, às vezes até começando com um problema, mas apresentando logo a resposta, sem proporcionar aos alunos a oportunidade de pensar, de buscar a solução. A partir desse trabalho, percebemos a necessidade da mudança de postura em nossa prática docente, principalmente quanto à mediação, no sentido de proporcionar momentos investigativos. Nesse sentido, é importante que o que propomos neste trabalho seja utilizado em nossa própria organização didática.

Após o conhecimento da Sequência Fedathi e desenvolvimento deste trabalho, mesmo que de forma ainda incipiente, procuramos adotar uma postura mediadora em nossa prática docente, partindo de problemas, usando perguntas sobre a situação apresentada, induzindo o aluno a pensar, refletir, analisar e verificar suas afirmações ou soluções, proporcionando um ambiente de investigação e consequentemente de aprendizagem significativa.

A partir deste trabalho, entendemos a Sequência Fedathi como metodologia que vem a contribuir para o avanço nos estudos referentes à Educação Matemática, retratando um ensino de Matemática vinculado a vida prática e da relação com as diversas áreas do conhecimento humano.

Temos a consciência de que é imprescindível que essa metodologia seja utilizada em nossa ação docente, vivenciando seus níveis e etapas no planejamento de nossas aulas do Ensino Médio. Assim, o que está sendo proposto neste trabalho será pautado em nossa própria organização didática e poderá ser utilizado como referência para outros profissionais docentes, a começar pelo nosso local de trabalho.

Ressaltamos que apesar desta pesquisa ter enfoque no ensino da progressão aritmética, as discussões referentes à Sequência Fedathi, incluindo postura e mediação docente, elaboração das sessões didáticas, podem ser apreciadas por professores de qualquer outra disciplina.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, A. M. A. O plateau como elemento de reflexão e melhoria das práticas escolares. *In*: BORGES NETO, Hermínio. Sequência Fedathi: **Fundamentos**. Curitiba: CRV, 2018. Cap. 8, p. 67-72.

BOGDAN, R.; BIKLEN, R. **Investigação qualitativa em educação**. Portugal: Porto, 1994.

BORGES NETO, H. *et al* (Org.). **Sequência Fedathi:** uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza: UFC, 2013. 184 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

COSTA. M. F. da; COSTA, M. de F. B. da. **Projeto de pesquisa**: entenda e faça. 5. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2004.

FERREIRA, R. N. R. **A sequência Fedathi como proposta de mediação do professor no ensino dos Números Inteiros.** 2018. 99f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional), Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, Universidade Estadual do Ceará, Quixadá, 2018.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2007. (Coleção Formação de Professores).

MENEZES, Daniel Brandão. **O ensino do cálculo diferencial e integral na perspectiva da Sequência Fedathi**: caracterização do comportamento de um bom professor. 2018. 128f. Tese (Doutorado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

SOUSA, F. E. E. de. **A pergunta como estratégia de mediação didática no ensino de matemática por meio da Sequência Fedathi**. 2015. 282 f. Tese (Doutorado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

SOUZA, M. J. A. **Sequência Fedathi**: apresentação e caracterização. *In*: SOUSA, F. E. E. de *et al*. (Org.). Sequência Fedathi: uma proposta para o ensino de matemática e ciências. Fortaleza: UFC, 2013.

SOUZA, Maria José Araújo. **Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da geometria mediada por tecnologias digitais**. 2010. 231 f. Tese (Doutorado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.

Nota: parte deste capítulo foi publicado nos anais do evento SEMINÁRIO DOCENTES 2020. Com o título: "SEQUÊNCIA FEDATHI E O ENSINO DOS NÚMEROS INTEIROS". (Seminário).

O PROJETO AVENTURAS CURRÍCULO+ E A RECUPERAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Júlio Antonio Tobias Cunha Barboza[27]
Rosilene Batista de Oliveira[28]

INTRODUÇÃO

Apresentamos, neste capítulo, parte integrante dos dados de uma pesquisa concluída no curso de Pós Graduação - Mestrado em Educação, cujo objetivo foi investigar como têm sido utilizadas as novas tecnologias no reforço escolar do ensino de Matemática, no âmbito do Projeto Aventuras Currículo+, nas escolas da rede estadual de ensino – Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SP – Diretoria de Taquaritinga, a partir das percepções[29] dos docentes. Essa pesquisa analisou o Projeto Aventuras Currículo+, que está inserido na plataforma do Projeto Currículo+, e volta-se para a recuperação intensiva da aprendizagem, onde habilidades estruturantes são trabalhadas de forma "gamificada[30]"; utilizando a tecnologia como aliada ao ensino.

Esta pesquisa torna-se relevante pela originalidade de seu objeto de estudo, o Projeto Aventuras Currículo+, considerando-se que há poucos trabalhos sobre o tema: Ensino de matemática e reforço escolar na Educação Básica. Assim, a pesquisa justifica-se pela pertinência ao abordar as novas tecnologias, com vistas à análise da aprendizagem no reforço escolar, a partir de uma proposta recente de política pública educacional da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo - SEE/SP.

O aporte teórico dessa pesquisa assentou-se em estudos sobre a tecnologia na educação e nas pesquisas críticas e pós-críticas sobre o currículo escolar. A

---

27 Mestre em Educação Escolar (CUML). CV: http://lattes.cnpq.br/4658554708359469

28 Doutora em Educação Escolar (UNESP). CV: http://lattes.cnpq.br/5950375852030514

29 Percepções: Percepção é o substantivo feminino com origem no latim *perceptione* e que descreve o ato, efeito ou capacidade de perceber alguma coisa. Disponível em: https://www.significados.com.br/percepcao/ Acesso em: 30 dez. 2016.

30 Gamificada: é o uso de mecânicas e dinâmicas de jogos para engajar pessoas, resolver problemas e melhorar o aprendizado motivando ações e comportamentos em ambientes fora do contexto de jogos. Disponível em: https://www.edools.com/o-que-e-gamificacao/ Acessado em 19/06/2016.

coleta de dados foi realizada com professores do Ensino Fundamental II que atuaram no projeto, por meio de uma entrevista qualitativa e semiestruturada. Entende-se que a partir dos dados colhidos emanam as percepções e vozes destes docentes que se sentiram empenhados e motivados em participar das entrevistas. Enfim, acreditamos que esta análise contribui para uma discussão sobre a utilização das novas tecnologias no reforço do ensino de matemática e suas implicações.

ALGUNS FATORES RELEVANTES QUE INTERFEREM NA CONDUÇÃO DA APRENDIZAGEM E A EXPERIMENTAÇÃO PARA O USO DAS TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Diante do exposto, e com o intuito de aprofundar o estudo sobre o tema proposto, a primeira etapa dessa pesquisa tratou da execução de uma revisão bibliográfica, a qual pôde salientar três pontos relevantes e abordados por pesquisas referentes ao tema: Reforço escolar e ensino de matemática. Destacamos esses pontos.

(1) A dificuldade que o professor tem tanto para se apropriar da materialidade de objetos tecnológicos, como para conseguir transmitir um conhecimento através destas ferramentas, dificuldade esta corroborada por Marcolla (2012, p. 13):

> Assim, entende-se que a apropriação das tecnologias não depende só do interesse e disponibilidade docente para tal. Não basta possuir o computador conectado à internet e o professor levar o aluno para o laboratório de informática ou à sala de vídeo; é preciso o envolvimento do professor e alunos para construírem uma outra forma de lidar com os conhecimentos, com ou sem tecnologias. [...]. Assim, a apropriação das TIC na escola perpassa pela superação e ruptura de hábitos, rotinas, ritmos e práticas que, ao longo do tempo, foram consolidadas e tornaram-se marcos de referência de uma cultura escolar. Além disso, esse movimento exige, também, uma mudança na apropriação pelos docentes das ferramentas tecnológicas que possibilitam a mediação entre professor, alunos e conhecimento, de tal modo que outras maneiras

> de comunicação entre os sujeitos escolares sejam possíveis, considerando a realidade dinâmica, fluida e incerta que hoje se vive.

(2) Também se observou o medo que os alunos sentem da matemática, considerada uma matéria de difícil aprendizagem, o que contribui para um comportamento de desmotivação por parte do estudante para com o aprendizado e o leva, consequentemente, ao fracasso escolar; conforme pontuam Imenes e Lelis (1997, p. 6 apud ZACARIAS, 2008, p. 13):

> Todos conhecem o medo da Matemática. Ele pode até ter diminuído, pois, com o mundo em mudança, o ensino naturalmente progride. Mas, mesmo hoje, a Matemática ensinada de maneira tradicional é a disciplina que apresenta o mais baixo desempenho dos alunos e é, ainda, a que mais reprova. Isto acontece no Brasil e no mundo inteiro!

(3) Por fim, percebe-se, juntamente, o lento caminhar na formação docente direcionada à utilização das novas tecnologias no ensino de matemática, como vemos em Silva (2003 apud SOUZA; MANHAES, 2007, p. 161):

> Mesmo sem ter acesso às mais diversas tecnologias, o professor tem que saber o que é cibercultura, sociedade da informação, sociedade digital, [...], ou seja, ele tem que ter consciência do que é a sociedade contemporânea para que ele possa atuar na mesma. Caso isto não aconteça, o professor estará cada vez mais distante do seu alunado e, desta forma, a escola se tornará cada vez mais chata.

Ainda nas palavras de Souza e Manhaes (2007, p. 165):

> A importância que isto representa na formação do professor traz contribuições não somente à escola, mas à sociedade na qual a mesma está inserida, uma vez que a integração dos professores em uma nova ação docente mediada pelas tecnologias gera o desejo de participar do processo de intercâmbio de conhecimentos, a vontade de apresentar contribuições originais, transmitir e trocar ideias, de forma cooperativa e aberta. [...] Pois segundo Lévy (1993), "quem aprende mais e mais depressa são as crianças mais novas". Isto ocorre porque elas têm um instinto de curiosidade, de busca, não sentem medo de errar e são mais abertas a receber aquilo que para elas é

> novidade. Talvez, seja isto que esteja faltando aos professores: coragem e não ter medo de errar.

Não fossem suficientes esses três pontos citados, acrescenta-se, ainda, segundo Borba e Penteado (2012, p. 15), "o computador, portanto, pode ser um problema a mais na vida já atribulada do professor, mas pode também desencadear o surgimento de novas possibilidades para o seu desenvolvimento como um profissional da educação".

Portanto, mediante todos esses fatores impeditivos, acreditamos que vale a pena correr o risco e entender se essa proposta é capaz de proporcionar um ensino significativo da disciplina de matemática a alunos considerados excluídos do sucesso educacional? E em exclusivo por apresentarem dificuldades durante o processo de ensino-aprendizagem.

NOVAS TECNOLOGIAS E AS EXPECTATIVAS SOBRE SEU USO NO APRENDIZADO DE MATEMÁTICA

O Projeto Currículo+ é uma plataforma online de conteúdos digitais, (vídeos, videoaulas, jogos, animações, simuladores e infográficos), implantados pelo Programa "Novas Tecnologias – Novas Possibilidades", articulado junto ao currículo do estado de São Paulo, cujas ações estão em consonância com o Programa Educação – Compromisso de São Paulo, por meio da Resolução SE Nº 11, de 17 de março de 2015. Esse documento nos permite entender sua dinâmica e, posteriormente, o seu uso nas escolas da rede estadual de ensino paulista. É válido mencionar que o Projeto Aventuras Currículo+, ao propor o uso das novas tecnologias e dos objetos digitais [31]na condução das suas atividades, tem como principal propósito complementar a ação do professor em sala de aula permitindo, assim, facilitar e propiciar o aprendizado daquilo que o aluno não consegue aprender nas aulas regulares.

Entende-se que o Projeto favorece, assim, uma atmosfera de aprendizagem e, compreende-se, então, que esta proposta é motivadora, considerando

[31] Objetos digitais: São recursos que apoiam a prática pedagógica, como jogos, animações, simuladores e videoaulas. Disponível em: http://porvir.org/objetos-digitais-de-aprendizagem/. Acesso em: 16 out. 2016.

a sua materialidade tecnológica, bem como a possibilidade do espaço virtual adentrar a sala de aula.

No entanto, por meio das percepções dos docentes poderemos conhecer de que forma esta proposta se consubstancia, bem como pode proporcionar um ensino significativo da disciplina a alunos considerados excluídos do sucesso educacional, uma vez que estes, por meio do método tradicional de transmissão de informações, apresentam dificuldades e problemas no processo de ensino-aprendizagem.

Considerando o tema: Ensino de matemática por meio do uso da tecnologia na educação, aplicado especificamente no reforço escolar, o Projeto Aventuras Currículo+ nas escolas da rede estadual de ensino deve ser entendido a partir das questões e discussões sobre política curricular. Suas evidências, em nossa análise, assentam-se em uma visão processual e pós-crítica do currículo, à qual deve-se levar em consideração que o reforço escolar é um momento de extrema complexidade no que diz respeito à relação professor-aluno, bem como também a inserção e utilização de novas tecnologias nesta relação.

Entendemos que os professores encontram, nas salas de aulas, alunos cada vez mais familiarizados com os recursos de comunicação digital. Em contrapartida, devem ser consideradas as diferentes relações que se estabelecem no uso destes objetos; compreendemos que estes permitem não somente a quebra da passividade dos alunos no processo de ensino e aprendizagem, como ampliam as probabilidades de sucesso escolar, uma vez que estes alunos passam, agora, a serem vistos não mais como fracassados, mas sim como diferentes; não desiguais, mas carentes de estímulo e estabilidade. Assim, é importante oferecer a estes alunos todas as oportunidades de caminhos e percursos por meio dos quais melhor mostrarão seus rendimentos, uma vez que, não estavam em consonância com os resultados esperados para alcançar a aprendizagem em matemática, ou seja, diferentes em relação aos outros, situando-se em condições opostas à situação de sucesso escolar no sistema tradicional de ensino.

Partimos, então, da necessidade de dar “voz” aos professores acerca da utilização das novas tecnologias na escola e, em especial, compreendermos o uso destas no reforço escolar por meio do Projeto Aventuras Currículo+.

O PROJETO AVENTURAS CURRÍCULO+ NAS ESCOLAS ESTADUAIS

A Resolução SE nº 11, de 17 de março de 2015 dá as providências correlatas, de maneira a oportunizar aos alunos a possiblidade de aprender com formas diversas e em ritmos distintos. Essa enfatiza que não existem alunos incapazes, bem como apresenta as variadas condições e os diferentes caminhos a serem disponibilizados no processo ensino-aprendizagem.

Esse projeto foi desenvolvido para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e a todas as séries do Ensino Médio; sua finalidade foi promover ações de recuperação contínua de aprendizagem mediante o desenvolvimento de competências e habilidades estruturantes nas disciplinas de língua portuguesa e matemática.

Portanto, o Projeto vem complementar a ação do professor em sala de aula, permitindo, assim, facilitar e propiciar o aprendizado daquilo que não se conseguiu aprender e nem ensinar nas aulas regulares.

Sua base assenta-se na estrutura gamificada, isto é, missões a serem cumpridas por intermédio de narrativas que irão render bônus importantes para o sucesso da tarefa. Nesta missão e, em especial em alguns jogos, a carta de orientação para o professor destaca a importância de sua participação como estrategista, no sentido de alcançar o sucesso da atividade. "Alunos protagonistas requerem professores protagonistas!", diz a Carta do Professor (Currículo+, p. 2).

ORGANIZAÇÃO E SELEÇÃO DOS DADOS COLETADOS

Com relação aos dados coletados, a pesquisa foi desenvolvida como uma pesquisa qualitativa, aos quais Alves-Mazzoti e Gewandsznajder (1998, p. 131), pontuam

> A principal característica das pesquisas qualitativas é o fato de que estas seguem a tradição "compreensiva" ou interpretativa. Isto significa que estas pesquisas partem do pressuposto de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores e que seu comportamento tem sempre um sentido, um significado

> que não se dá a conhecer de modo imediato, precisando ser desvelado.

Assim, no ano de 2016 foram entrevistados cinco docentes, dentre um total de 11 participantes convidados a se envolverem na pesquisa, que lecionaram a disciplina de matemática no Ensino Fundamental II da Educação Básica, da SEE/SP, na Diretoria de Ensino da Região de Taquaritinga – SP. Ressaltamos, também, que todos os cinco docentes entrevistados participaram do Projeto de Reforço Aventuras Currículo+ e aplicaram a proposta em suas aulas.

Organizamos os dados da pesquisa em diferentes categorias de análise, construídas *a priori*, de acordo com o referencial teórico base da pesquisa. Neste trabalho, apresentaremos os dados e os resultados discutidos na categoria intitulada “O Projeto de reforço Aventuras Currículo+ e a recuperação do ensino da Matemática”.

A análise desta categoria ramifica-se em dois questionamentos feitos aos professores:

1º - A opinião do docente sobre quando o aluno necessita de reforço no ensino de Matemática e, quem é este aluno.

2º - A opinião do docente sobre se o Projeto Aventuras Currículo+ atingiu o objetivo de recuperar o aluno de reforço.

Vamos as estas análises:

De acordo com o docente n° 2, há algumas limitações que identificam o aluno que necessita de reforço em matemática. Suas palavras são:

> “No meu modo de ver, o aluno que precisa de reforço é o aluno que não consegue as quatro operações básicas, principalmente porque ele não consegue entender, ele não consegue captar que a matemática, ela é uma corrente; eu pelo menos entendo assim. Então, se ele tem o básico ele consegue avançar, e quando a criança não tem o básico dificilmente a gente consegue avançar alguma coisa com ela, e cobrar ela do que ela não sabe, do que ela ainda não tem, a habilidade que ela não conquistou, então é... Pra mim... É o aluno que não... No meu modo de pensar, é o aluno que não tem pelo menos as quatro operações básicas formuladas pra ele poder trabalhar o restante.”

Entendemos que o Projeto Aventuras Currículo + permite a realização de atividades menores por meio de experimentações e simulações. Sabemos também que estas experimentações e simulações têm por objetivo final a realização de uma grande missão dentro do próprio projeto. Enfim, entendemos que o aprendizado se realiza de forma contextualizada, por etapas, refletindo uma construção, coordenação e possível desenvolvimento de esquemas, assim como progredindo para o entendimento das estruturas lógicas matemáticas mais complexas.

Percebemos que as atividades desenvolvidas de forma interativa vão na contramão do currículo tecnocrático, pois, de acordo com a percepção dos professores, tais atividades deverão ser pontuais no sentido de respeitar a subjetividade dos alunos, contribuindo assim, para o aprendizado, ou seja, realizando o resgate de assuntos ainda não dominados, de forma que se restabeleça a autoconfiança dos alunos ao serem reforçados e, ao mesmo tempo, otimizando a motivação para aprender, afinal, segundo Boruchovitch e Bzuneck (2009, p. 9), "trata-se de alunos nos quais é preciso reverter uma história de socialização que os precipitou numa condição incompatível com a aprendizagem".

Vejamos o que diz o relato do docente 03:

> "O aluno que normalmente precisa é aquele aluno que tem um problema de desenvolver a habilidade, a competência na sala de aula. O projeto, ele veio porque ele consegue trabalhar um mesmo conteúdo da sala de aula; só que o aluno, ele consegue focar isso como um aprendizado diferenciado pra ele. Então, ali, ele não se sente tão cobrado, ele sabe que ele está aprendendo, mas ele sabe que se, ali, ele errar os outros também vão errar e ninguém vai ser cobrado por causa disso. Então eu acho muito interessante por isso: a habilidade que, às vezes, ele não consegue desenvolver na sala de aula, ele consegue desenvolver com o uso da tecnologia."

Com o aporte teórico de Silva (2015, p. 15) sabemos que o currículo é "sempre o resultado de uma seleção: de um universo mais amplo de conhecimentos e saberes seleciona-se aquela parte que vai constituir, precisamente, o currículo". Para ele, o currículo ampara-se em responder "qual é o tipo de ser humano desejável".

Relacionando a construção do currículo da matemática, o trabalho de Godoy (2011), a partir de uma visão educacional da matemática crítica, numa perspectiva pós-crítica de currículo, destaca que:

> Desconfiar dos porquês destes e não de outros conhecimentos, métodos de ensino e aprendizagem, finalidades e objetivos da sua disciplina escolar; desconfiar do modo como a sua disciplina se relaciona com as questões do poder, da inclusão e da exclusão dos sujeitos na escola e na sociedade, e com as outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana. (GODOY, 2011, p. 179)

Enfim, sabemos que ao partirmos desta consideração compreenderemos que os conteúdos trabalhados pelo Projeto Aventuras Currículo + foram construídos e organizados para aqueles alunos que não conseguiram alcançar os resultados esperados na sala de aula regular. Agora, por meio de uma nova seleção e organização curricular, estes alunos têm uma nova oportunidade; pode recuperar o aprendizado da leitura, o aprendizado da interpretação, o aprendizado inerente aos saberes matemático e finalmente podem inserir-se no mundo social. Acredita-se que esses alunos, ao passarem pelo processo de recuperação, poderão viver de igual para igual, juntos a todos do seu ambiente público, e, portanto, farão parte deste círculo obtendo os mesmos direitos e as mesmas chances para lograrem o sucesso na vida.

Ao visualizar esta situação, por meio da perspectiva de uma educação crítica e uma visão pós-crítica, Kelner (2013, p. 117) realça que:

> Capacitar os indivíduos a adquirir um alfabetismo crítico em relação à publicidade e a outras formas de cultura popular significa favorecer competências emancipatórias [...]. Além disso, também nos fornece habilidades que nos capacitam a ler as tendências atuais na sociedade e a observar as mudanças que são importantes.

Ainda, no contexto desta análise, vejamos o depoimento do docente nº 3:

> "Na verdade o aluno que necessita de conhecimento a mais de matemática, ele também necessita dos outros, porque, na verdade, ele já tem dificuldades nas várias áreas e, a matemática, ela simplesmente é uma delas a mais."

A este relato, e por meio dos estudos de Borba e Penteado (2012), podemos acrescentar que a inserção das tecnologias da informação no ambiente escolar tem sido vista como potencializadora e desempenha a função de quebrar a disciplinaridade e impulsionar a interdisciplinaridade nas escolas.

Enfim, entende-se que o reforço da matemática pode motivar a aprendizagem de outras disciplinas e vice-versa.

Ainda, ao analisarmos as percepções evidenciadas pelos docentes, e na tentativa de entrelaçar todos os relatos de forma a costurar os dados colhidos na pesquisa, para exprimir uma visão geral, observamos que os docentes deixam claro que o saber matemático não pode ser privilégio somente de poucos alunos, conforme Carvalho (2011) pontua e, especialmente, não pode ser privilégio dos “queridinhos das salas”, tidos como inteligentes, geralmente de temperamento mais dócil, e que conseguem se enquadrar nos anseios da sociedade educacional, simplesmente porque realizam suas atividades escolares.

Ainda sobre esta situação, citamos o relato de um docente que explana a satisfação do aluno do reforço, quando este realmente aprende: “Professora agora eu consigo, professora eu estou enxergando o que antes eu não conseguia, eu não sabia, eu não entendia, então é... Eu achei muito bacana”.

Ao buscar uma possível compreensão sobre essas informações, através dos estudos de Boruchovitch e Bzuneck (2009) podemos enfatizar que houve, pela análise dos docentes entrevistados, uma melhor participação dos alunos em sala de aula.

Vejamos mais relatos:

> Docente 03 - “Alunos que chegavam com muita vontade para o curso esperavam isto durante a semana inteira pra estar ali e dar continuidade nas missões deles. Então eu acredito que o diferencial que é o que atrai eles.”
>
> Docente 05 - “Ele conseguia recuperar o aluno sim, porque o trabalho dele é diferenciado e ele trabalha de acordo com aquilo que o aluno gosta, com inovações tecnológicas.”

Na análise desta situação, ainda apoiados nos estudos de Boruchovitch e Bzuneck (2009) entendemos que a motivação em sala de aula pode contribuir para que se alcance o sucesso escolar:

> Quem observa um aluno pouco interessado nos conteúdos e atividades escolares pode, à primeira vista, atribuir essa falta de motivação a fatores emocionais, familiares, econômicos, a características de personalidade, preferência por outras situações não ligadas à escola, como jogos, cinema, música, entre outros. No entanto, a motivação de um aluno e suas causas não é um assunto que se limite à família, a ele próprio ou a outras condições fora da situação escolar. O que ocorre normalmente é uma combinação de fatores, resultando num sistema de interações multideterminadas. De maior relevância é o que acontece dentro da escola e da própria classe. Boruchovitch e Bzuneck (org) (2009, p. 78)

Ao perguntamos sobre a simulação e sua relação com o sucesso educacional, destacamos a fala do docente 04:

> "Como eu trabalhei com o Ensino Fundamental, ele até atinge, mas ele trabalha assim, quatro operações, figuras, então, neste ponto, ele até atinge, mas ele precisaria ser um pouquinho mais aprofundado. Porque as atividades são diversificadas, e as atividades em formas de jogos fazem com que o aluno raciocine."

Portanto, observamos que o Projeto Aventuras Currículo+ vem ao encontro de um real sentido da educação consciente do panorama social, o que podemos evidenciar nas palavras de Santomé (2013, p, 160-161):

> Uma instituição escolar que não consiga conectar essa cultura juvenil que tão apaixonadamente os/as estudantes vivem em seu contexto, em sua família, com suas amigas e seus amigos, com as disciplinas acadêmicas do currículo, está deixando de cumprir um objetivo adotado por todo mundo, isto é, o de vincular as instituições escolares com o contexto, única maneira de ajudá-los/as a melhorar a compreensão de suas realidades e a comprometer-se em sua transformação.

Sabemos que o objetivo do reforço é a recuperação do aluno, e, na percepção dos docentes entrevistados, esta é alcançada devido aos jogos, às atividades diversificadas e utilizadas no Projeto Aventuras Currículo+, o que é reiterado nas palavras de Gravina e Santarosa (1999, p. 80), quando mencionam que:

> O recurso de simulação permite a realização de experimentos [...] permite que alunos, ainda sem grande formação matemática, explorem fenômenos de natureza matemática complexa, mas que do ponto de vista puramente qualitativo são fecundos "germes" de ideias matemáticas, como por exemplo, as simulações de crescimento populacional e mais geralmente de sistemas dinâmicos.

As falas dos docentes entrevistados mostram as vantagens de utilização das novas tecnologias no reforço de matemática, vejamos o depoimento do docente 02 que nos diz se o projeto atinge realmente o objetivo de recuperar o aluno de reforço:

> "Ele atinge, não sei dizer ao certo se cem por cento, mas nós tínhamos alunos que a gente falava, pensava se, nossa! Caso perdido! A gente tentava fazer o possível e o impossível em sala de aula, entre aspas, este "impossível", porque numa sala de quarenta é difícil você tentar recuperar cinco, dez, quinze, então vai variando de acordo com a sala, [...] agora...com poucos alunos dentro da sala você consegue dar mais atenção pra eles, então, às vezes, a perguntinha que ele faz, você consegue voltar, você consegue sentar ao lado da criança, você consegue fazer com que ela entenda e como... Como eu estou falando, com a plataforma, às vezes, você conseguia mostrar pra ele, através de um joguinho, ou com aquela tecnologia que a gente tinha mesmo na calculadora, mostrar pra ele a função, então ele consegue desenvolver e na sala de aula nós não temos todo... Todo esse apoio, nós temos quarenta, quarenta e tantos numa sala de aula, não tem condição de a gente atender a todo mundo."

O docente 03 diz:

> "Porque no projeto, a gente consegue ir até o aluno, por aluno mostrar pra ele qual é a dificuldade que ele está tendo no momento... E, às vezes, na sala de aula, a gente não consegue identificar por causa da quantidade de aluno. [...] Então, naquele momento a gente não fala assim pra ele - daqui a pouco eu vou aí ver o que está acontecendo... Não, a gente consegue identificar o erro e já ali a gente consegue instruir ele de que forma ele tem que operar."

Observamos, por conseguinte, que, nas percepções dos docentes participantes, o Projeto Aventuras Currículo + aponta para ações e reabilitações de sucesso educacional.

CONCLUSÃO

Na análise dos dados, e mediante uma percepção geral dos depoimentos dos docentes referentes à pesquisa, entendemos que o projeto atingiu suas expectativas, contribuindo, assim, para a recuperação escolar daqueles alunos que, por meio somente das aulas tradicionais, ficariam impossibilitados de atingirem o sucesso escolar.

Também entendemos que os docentes compreenderam as novas tecnologias, apresentadas pelo Projeto Aventuras Currículo+, como instrumento facilitador da aprendizagem, sendo estas novas tecnologias motivadoras e capazes de auxiliar na recuperação dos alunos com dificuldades em matemática.

Aqui, também destacamos que a partir do ano de 2016, mediante as novas orientações e direcionamentos da política educacional, o projeto passou a ser realizado não mais com a contratação de professores específicos; a sua realização passou a se desenvolver com a participação do professor regular de sala de aula e este passou a assumir a responsabilidade pela condução do projeto em sua unidade escolar.

Em nossas análises, entendemos que este formato contribuiu, ao longo desses anos, para que não houvesse mais incentivo e principalmente professores aptos para a realização do mesmo.

Outro fato importante é que o projeto ainda se encontra disponível via WEB e, em tempos de Covid 19 (Corona vírus), pode ser um suporte imenso para o aprendizado de nossas crianças que estão em casa por motivo da pandemia.

Infelizmente, não tivemos nenhum conhecimento de que o mesmo tenha sido alavancado, tenha sido priorizado, por parte da SEE/SP, com vistas ao seu uso como estratégia principal para atingir nossos estudantes, substancialmente no que tange a este momento delicado em que vivemos essa quarentena educacional.

REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTTI, Alda J; GEWANDSZNAJDER, Fernando. **O Método nas ciências naturais e sociais:** Pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, 1998.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2012. 5ª Ed, 100 páginas.

BORUCHOVITCH, Evely; BZUNECK, José Aloyseo (Organizadores). **A motivação do aluno:** Contribuições da psicologia contemporânea. 4. Ed. Petrópolis: Vozes, 2009.

Carta do Professor (Currículo+, p.2). Disponível em: http://aventuras.educacao.sp.gov.br/mod/lesson/view.php?id=384. Acesso em: 05 nov. 2016.

CARVALHO, Dione Luchesi. **Metodologia do Ensino da Matemática.** 4ª Ed. São Paulo: Cortez Editora, 2011. 120 páginas.

Currículo+. Disponível em: http://curriculomais.educacao.sp.gov.br/sobre-o-curriculo--mais/ Acesso em: 07 nov. 2016.

GODOY, Elenilton Vieira. **Currículo, cultura e educação Matemática:** Uma aproximação possível? Tese de Doutorado. São Paulo: USP - SP / Faculdade de Educação, 2011.

GRAVINA, M. A; SANTAROSA, L. M.C. **A Aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados.** Universidade Federal do Rio Grande do Sul: *Informática na Educação: teoria & prática*, 1999. V. 2; nº 1. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/InfEducTeoriaPratica/article/view/6275/3742>. Acesso em: 14 mar. 2016.

IMENES, L. M. P.; LELLIS, M. **Matemática.** São Paulo: Scipione, 1997. Pág. 6. In: ZACARIAS, Sandra Maira Zen. **A matemática e o fracasso escolar:** Medo, mito ou dificuldade. Dissertação de Mestrado. Presidente Prudente: UNOESTE – SP, 2008. p. 13.

KELLNER, Douglas. **Lendo imagens criticamente:** Em direção a uma pedagogia pós-moderna**.** In: SILVA, Tomaz Tadeu; (org.): **Alienígenas na sala de aula –** Uma introdução aos estudos culturais em educação**.** Petrópolis: Editora Vozes, 2013. 237 páginas.

LÉVY, P. **As Tecnologias da Inteligência:** O futuro do pensamento na era da Informática (Trad. COSTA, C.I). São Paulo: Editora 34, 1993. p. 7-19.

MARCOLLA, Valdinei. **A apropriação das tecnologias de informação e comunicação por professores nas práticas pedagógicas.** IX ANPED SUL – 2012. p. 13.

RESOLUÇÃO SE Nº 11, de 17 de março de 2015. Institui o Projeto Aventuras Currículo+ nas escolas da rede estadual de ensino e dá providências correlatas. – SEE - SP

SANTOMÉ, J. T.; **As culturas negadas e silenciadas no currículo.** In: SILVA, Tomaz Tadeu; (org.): **Alienígenas na sala de aula** – Uma introdução aos estudos culturais em educação Petrópolis: Editora Vozes, 2013. 237 páginas.

SILVA, Tomaz Tadeu. **Documentos de identidade –** Uma introdução às teorias do currículo. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2015. 154 páginas.

SILVA, 2003. Programa Salto para o Futuro – série: **Integração das mídias. Canal TV Escola**. Programa veiculado dia 20 de novembro de 2003 no horário das 11:00 às 12:00 horas. In: SOUZA, Carlos Henrique Medeiros; MANHAES, Fernanda Castro. **As tics e a (re) descoberta do conhecimento pela "alfabetização tecnológica docente",** *Revista da Faculdade de Educação*, 2007. Disponível em: http://www2.unemat.br/revistafaed/content/vol/vol_7_8/artigo_7_8/151_167.pdf. Acesso em 14 mar. 2016.

SOUZA, Carlos Henrique Medeiros; MANHAES, Fernanda Castro. **As tics e a (re) descoberta do conhecimento pela "alfabetização tecnológica docente",** *Revista da Faculdade de Educação*, 2007. Disponível em: http://www2.unemat.br/revistafaed/content/vol/vol_7_8/artigo_7_8/151_167.pdf. Acesso em 14 mar. 2016.

Nota: Instituição Financiadora: (SEE/SP) – Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

REFLEXÕES ACERCA DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS DO 5º ANO SOBRE AMPLIAÇÃO E REDUÇÃO DE FIGURAS À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Weverton de Barros Vieira[32]
Natércia de Andrade Lopes Neta[33]

INTRODUÇÃO

A representação semiótica de um objeto matemático é uma forma de interpretação que permite conceituar um objeto e representá-lo de outra forma. Silva, Prando e Gualandi vêm relatar que essas representações "são essenciais para a vida cognitiva do pensamento, desempenhando grande papel na comunicação, no desenvolvimento das representações mentais e produção de conhecimento" (2020, p. 4).

Duval (2010) diz que na matemática podemos representar um objeto através dos sistemas de numeração, das escritas algébricas e formais, das representações gráficas, língua materna, entre outras formas de representar. Raymond Duval formulou uma teoria sobre essas representações semióticas, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRSS), onde afirma que a aprendizagem de um objeto matemático só é verificada quando esse objeto é registrado em pelo menos duas representações semióticas. Duval (2010, p. 15) afirma que "a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas".

No fazer matemático, esses registros podem ser categorizados em representação discursiva, como na língua natural ou em sistemas de escritas numéricos, representação não discursiva como uma linguagem gráfica, em registros

[32] Licenciando em Matemática (UNEAL). Professor dos anos iniciais do agreste alagoano. CV: http://lattes.cnpq.br/0462248337609534
[33] Doutora em Ciências da Educação (UC - Portugal). Professora Adjunta (UNEAL). CV: http://lattes.cnpq.br/4880247640523667

multifuncionais que não são algoritmizáveis e em registros monofuncionais algoritmizáveis.

A beleza matemática é que esses registros podem ser tratados e convertidos para outra representação semiótica a todo o momento, é essa articulação que é fundamental para que o objeto seja apreendido pelo aluno (SILVA, PRANDO E GUALANDI, 2020, p. 4).

Duval (1995 *apud* Almouloud 2010) relata que a aprendizagem se baseia na consciência que a representação semiótica se trata de um discurso diferente do pensamento natural e complementa que a aprendizagem "somente ocorre numa articulação de dois registros, dos quais um é a utilização pelo aluno da linguagem natural (registro discursivo) (2010, p. 127)" e que "surge da interação entre a representação não discursiva produzida e a do discurso expresso.

Almouloud diz que:

> Falar de registro de representação semiótica, da conversão e da coordenação de registros significa colocar em jogo o problema da aprendizagem e disponibilizar ao professor instrumentos que deverão ajudá-lo a tornar mais acessível a compreensão da matemática. (2010, p. 125)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) determina que a criança deve desenvolver durante sua passagem nos anos iniciais do ensino fundamental uma sistematização de suas vivências com números, formas e espaço (BRASIL, 2018). A aprendizagem deve ser muito mais do que apenas o cálculo das operações fundamentais, mas também a significação por parte do aluno com os objetos matemáticos com a sua realidade e suas aplicações. A BNCC discorre que

> O processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem". (BRASIL, 2018, p. 279)

Logo é importante que o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental seja concebido como um processo em que o aluno seja protagonista.

Provocar o interesse da turma em sala é um dos maiores desafios dos professores de matemática e esse problema vem de um longo histórico de uma pedagogia tradicionalista e expositiva em que o professor passa o conteúdo no quadro e o aluno, como forma de mostrar o que aprendeu, responde mecanicamente exercícios de aplicação repetitivos. Como afirmam Silva, Moreira e Ferreira (2015) a tradicional aula expositiva, muitas vezes metódica e enfadonha, não despertam atração entre os estudantes e disciplina.

O ensino da matemática precisa se modernizar juntamente com a realidade tão dinâmica na qual estamos hoje. Vivemos em um contexto onde o aluno tem muitas possibilidades e distrações. Por isso, o ensino tradicional que coloca o aluno em uma posição de aprendizagem passiva deve ser repensado para uma metodologia mais construtivista. É necessário centralizar o aluno, o tornando protagonista no processo de aprendizagem e fazendo com que ele tenha um papel mais ativo.

Silva e Valente (2013) destacam que está a emergir um novo modo de pensar o papel do professor no processo educativo: a criança deve ser o centro do ensino. E para isso é necessário fugir do método tradicionalista de lousa, livro e caderno do ensino matemático e o professor deve buscar outros recursos educacionais que permitam instigar e provocar os alunos para que eles possam refletir, produzir, acertar e errar. Cabe ao professor fazer o papel de mediador entre aluno e conhecimento e ressignificar os acertos e os erros das produções de seus alunos.

A matemática, como disciplina escolar, é conceituada pelos alunos como uma matéria difícil devido às muitas reprovações. Um fator que compõe essa visão é a frustração que os alunos sentem no processo de aprendizagem. Como o ensino da matemática é um processo em que são propostas muitas tarefas, os alunos que não possuem afinidade natural com a disciplina já internalizam um sentimento de que não são capazes de aprender. Tal sentimento é obtido desde os anos iniciais e acumulado ano após ano da vida escolar do aluno.

Teixeira (1997) descreve que o erro é visto como fracasso ou insucesso e produz no comportamento efeitos de punição. Já para Duval (2003), o erro do aluno é uma não compreensão do objeto matemático estudado já que ele não consegue representar o objeto de mais de uma forma.

Por outro lado, o professor muitas vezes não entende o porquê de determinados alunos não conseguirem resolver as tarefas propostas visto que eles estão munidos do mesmo conhecimento ministrado para os alunos que conseguem. Assim, o professor não considera o contexto particular e a bagagem de vida que cada aluno trás para a sala de aula e atribui o erro ao não comprometimento do aluno com a disciplina.

Teixeira (1997) diz que "Compreender a construção do conhecimento depende não só de observar o processo, como também de transformá-lo" (p. 1). Essas ideias estão relacionadas com a TRRS sobre múltiplas óticas já que, como diz Garcez (2016), a construção do conhecimento matemático é a união das ações de representar, tratar e converter.

Na pedagogia tradicional, o erro é algo a ser evitado. Portanto, o professor, segundo Spinillo (2014), apoia-se na ideia de que os erros podem ser eliminados com o simples ato de apagar o que foi feito no quadro, no caderno ou no livro de exercícios. Algumas vezes, não há por parte do professor uma análise ao erro do aluno, pois o professor pode prever que o erro do aluno está condicionado ao não interesse do estudante com sua matéria. Tal perspectiva gera a ideia de que a principal função do professor é corrigir erros.

Contudo, o erro do aluno precisa de atenção do professor, ele é provocado por fatores aleatórios ou está inerte ao processo de produção de conhecimento por parte do aluno? Spinillo (2014) diz que os erros, assim como os acertos, são formas de raciocinar que revelam os limites e as possibilidades do pensamento frente a um dado objeto de conhecimento, no caso, os conceitos matemáticos. Assim, é fundamental a análise de erros para que estes se tornem uma fonte de reflexão para que o professor possa reestruturar sua metodologia de ensino partindo de que o fato de errar está mais associado ao processo de construção de conhecimento.

DESENVOLVIMENTO

O trabalho foi realizado com o objetivo de analisar os erros que ocorrem em tarefas de ampliação e redução de figuras com alunos do 5º ano do ensino fundamental, à luz da teoria das representações semióticas. Buscamos entender, conforme cita Duval, as "capacidades do sujeito" mobilizadas para ter acesso aos objetos (Duval, 2011, p. 16) e para construir o pensamento algébrico a partir das generalizações das atividades de ampliação.

Para isso, foram propostas duas tarefas após um momento de explicação e debate sobre ampliação e redução de figuras, ou seja, utilizamos a linguagem materna, a linguagem gráfica e a linguagem numérica, para observar a possibilidade de desenvolver o pensamento algébrico nestes alunos.

Este tema foi escolhido, pois houve o interesse em analisar se os alunos conseguiriam demonstrar (linguagem gráfica) de modo intuitivo noções de regra de três e proporcionalidade (linguagem numérica e algébrica). A ampliação também possibilita a percepção de como esses alunos trabalham o conceito de soma e multiplicação. A capacidade do aluno em conseguir realizar estas representações em linguagens distintas, como defende a teoria de Duval, é o que denota a compreensão do objeto matemático. Garcez relata que:

> O pensamento algébrico diz respeito à simbolização (representar e analisar situações matemáticas, usando símbolos algébricos), ao estudo de estruturas (compreender relações e funções) e à modelação. Implica conhecer, compreender e usar os instrumentos simbólicos para representar o problema matematicamente, aplicar procedimentos formais para obter um resultado e poder interpretar e avaliar esse resultado. (GARCEZ, 2016, *apud* PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 22).

O trabalho foi aplicado num colégio da rede privada no município de Arapiraca, Alagoas, em duas turmas de 5º ano do ensino fundamental. Os procedimentos descritos abaixo foram os mesmos em ambas as turmas.

Primeiramente, foi trabalhado com estes alunos uma aula expositiva onde se foi falado sobre ampliação e redução de imagens. Com o auxílio de um *chromebook* e um *datashow* foi mostrado aos alunos uma figura na ferramenta clip-art do editor de texto Word e foi feita uma ampliação da imagem, alongando apenas no sentido horizontal. Então foi provocado à turma se a imagem manteve ou não a mesma forma. Os alunos responderam que não e falaram em suas respostas que a imagem ficou “menos bonita”, “feia”, “mais grossa”, “amassada” e “atropelada”. Em seguida, a abertura da imagem foi feita no sentido vertical e novamente foi perguntado à turma se o formato da imagem se alterou.

Houve o consenso de que a imagem teve sua forma alterada e "ficou esticada", "comprida", "pescoço grande".

Para concluir, foi feita a ampliação no sentido diagonal e a turma foi questionada se agora, assim, a imagem teve alteração em sua forma. A resposta de todos foi que não. Após a socialização, ficou claro de que a imagem quando ampliada ou reduzida no sentido diagonal não tem sua forma alterada, pois a alteração de tamanho da figura é feita de forma uniforme nos sentidos horizontal e vertical.

Após isso, foi perguntado à turma o que significa ampliar uma imagem (linguagem materna). As respostas dadas foram que a ampliação deixa a figura "maior", "mais longa", "mais bonita". É importante que no momento expositivo da aula, os alunos sejam provocados acerca do objeto de estudo para verificar se eles tinham algum conhecimento sobre o assunto porque "a análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados ou como podemos ter acesso a eles por nós mesmos" (DUVAL, 2011, p. 15), e quando os alunos respondem, argumentam, eles acabam utilizando da representação discursiva e fazendo associações conceituais a partir do que elas acreditam.

Com a noção de ampliação firmada, a turma foi questionada em que ferramentas da realidade deles esse conceito matemático é utilizado e a resposta de grande parte dos alunos foi no zoom das câmeras de seus celulares.

Passada a contextualização e num momento prévio à aplicação da atividade na malha quadriculada, foi exposto aos alunos como se amplia uma figura em um papel com essa característica, especificamente usando a estratégia de ampliar quadrado a quadrado da figura original.

Após a explanação, os alunos receberam uma folha quadriculada com a impressão de um polígono para que eles o ampliassem numa proporção três vezes maior. Esta primeira tarefa tratava de uma ampliação em 3 vezes de uma determinada figura em papel quadriculado (linguagem gráfica). O enunciado do exercício foi elaborado a partir da referência a uma semirrealidade do aluno, com o conteúdo matemático associado a uma contextualização fictícia, mas associada a situações vividas por outras pessoas ou outras comunidades.

Na aula posterior, foi feita uma exposição sobre como ampliar uma figura em espaço em branco usando régua e lápis. Foi averiguado no momento da explicação que alguns alunos tinham dificuldade em fazer medições com a régua, principalmente para marcar números decimais. Um breve momento da aula foi então dedicado a elucidar como realizar essas medições. A segunda tarefa proposta nesta aula instruiu o aluno a ampliar a mesma figura na mesma proporção da primeira atividade em um espaço em branco numa folha A4 (linguagem numérica e algébrica). O aluno teve a sua disposição régua para fazer as medições que julgou serem necessárias. O texto da questão foi elaborado como referência a matemática pura, numa solicitação direta de "Amplie a imagem abaixo em três vezes".

Após a finalização das tarefas, os alunos socializaram seus trabalhos. Questionados se a atividade foi mais fácil do que na malha quadriculada, o consenso foi de que esta atividade utilizando a régua é mais difícil, pois é necessário fazer várias medições e operações multiplicativas. No fim, todos os trabalhos foram recolhidos.

No geral, 29 alunos participaram da pesquisa, sendo 15 alunos da Turma "A" e 14 alunos da turma "B". Por motivos de ausência nos dias de aplicação, alguns alunos participaram de apenas uma das tarefas. A turma "A" é a sala com os alunos considerados menos avançados cognitivamente, enquanto a turma "B" é a sala com os alunos considerados avançados.

Na malha quadriculada, foram consideradas como corretas as ampliações sem nenhum equívoco, enquanto na atividade produzida no papel A4 foram consideradas corretas as ampliações com poucos erros de medida.

Verificou-se nas produções dos alunos muitas ampliações feitas numa escala maior que instruída no sentido horizontal. Esses alunos têm um padrão de ampliação que é aumentar a largura da figura, para Duval "um signo, ou representação é algo que está para alguém com alguma finalidade e em relação a algum aspecto ou capacidade" (DUVAL, 2011, p. 32), provavelmente essa deve ser a forma como estes estudantes internalizaram a definição de ampliação de figuras. Isso remete ao momento pré-tarefas onde quando provocados a maioria dos alunos falaram que ampliar uma figura é "deixar mais longa" (linguagem materna).

Abaixo iremos ver as produções realizadas por um aluno que será identificado como Arapiraca.

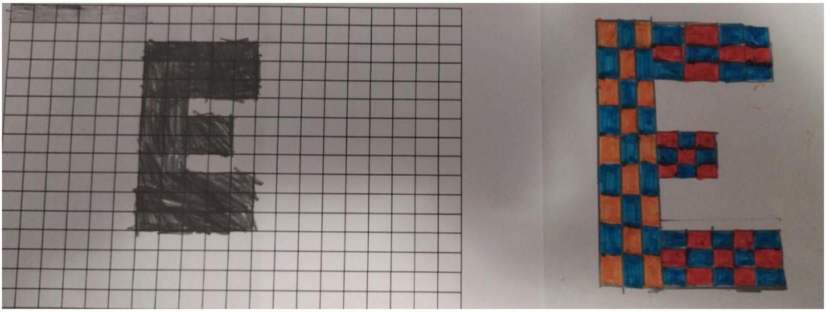


Figura 1 - Ampliação em Malha Quadriculada e Papel A4 de Arapiraca
Fonte: Autoria Própria

Arapiraca mostra em seu trabalho que tem uma boa noção de proporcionalidade e de semelhança, porém ela não consegue compreender as instruções. Nota-se na Figura 1 que seu desenho é sim semelhante e proporcional com o que foi proposto pela atividade, porém não na escala solicitada, o que mostra que para este aluno é muito mais um problema de multiplicação do que de ampliar a figura. Na tarefa no espaço em branco, Terra teve sucesso em sua ampliação, como nota-se também na Figura 1.

Podemos dizer que o aluno constrói uma representação semiótica no momento que ele consegue formar uma representação identificável com a figura original, tem noção do percurso utilizado para ampliar e consegue converter uma representação para outra.

Assim como o aluno Arapiraca, vários outros estudantes também quadricularam suas produções realizada no espaço em branco o que denota que alguns estudantes não conseguem desvincular seus registros de representação semiótica ao remeterem novas realizações à tarefa original.

Alguns alunos na tarefa realizada na folha A4 não usaram a régua em suas realizações mesmo com a ferramenta disponível. Um aluno, com comportamento dispersivo durante a atividade, chegou a desenhar os instrumentos de medida, régua e esquadro, mas não conseguiu relacioná-lo com o comando dado. Para Almeida e Silva (2018, p. 701):

> não é possível compreender e operar diretamente com os objetos matemáticos, havendo a necessidade de signos para se ter acesso a eles. Estes signos são, por um lado, meios para pensar sobre objetos e relações matemáticas e, por outro, produtos de tais pensamentos.

Ou seja, o aluno sabe relacionar os instrumentos (que ele representa como signos) ao que deve fazer, mas não possui a habilidade de utilizá-los.

Verifica-se a seguir as tarefas realizadas por um aluno que será nomeado de Alagoas.

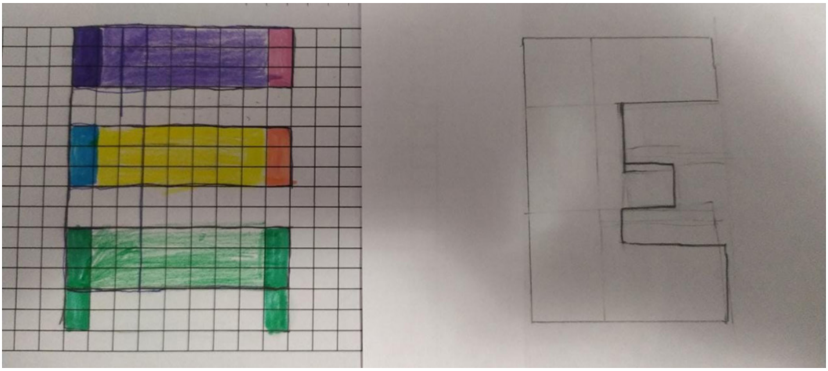


Figura 2 - Ampliação em Malha Quadriculada e Papel A4 de Alagoas
Fonte: Autoria Própria

Alagoas inicialmente ampliou a figura em duas vezes, porém no desenvolvimento notou o erro e tentou corrigir sem obter êxito. Provavelmente se frustrou ao não conseguir corrigir e como visto na figura 2, não pintou o traço vertical da figura. Nota-se também que o aluno não percebeu que o traço central horizontal é menor que os outros dois. Percebe-se, no entanto, que ela conseguiu ampliar a atividade corretamente nos dois sentidos, logo, a linguagem gráfica foi representada.

Na segunda produção, Alagoas também iniciou seus traços com alguns erros, mas mostrou muita vontade em acertar e corrigiu com êxito. Observa-se, na figura 2, que ele ampliou corretamente o traço vertical e os traços horizontais da extremidade com um pequeno erro de medição com a régua no traço inferior. Porém, ele mostrou dificuldade em completar o desenho na parte central, cometendo muitos erros o que acabou frustrando o aluno que se apressou em finalizar a produção o mais rápido possível. Logo, percebemos que a representação numérica da ampliação foi em partes alcançada, mas ele não conseguiu relacionar os produtos com a figura, não conseguiu abstrair.

Alguns alunos tiveram um desempenho mais assertivo demonstrando boa linguagem gráfica com pequenos erros de medição provocados por falta de habilidade com os instrumentos de medição. Alguns erros como, por exemplo, confundir 3,3 cm com 3,03 cm na hora de realizar a medida de um traço ou erros de alinhamento de ângulos puderam ser vistos nas análises das tarefas. Outros alunos realizam as ampliações apenas ampliando o tamanho do traço e não a figura como um todo, proporcionalmente. Estes estudantes demonstram que tem uma linguagem numérica firmada, porém uma linguagem gráfica pouco desenvolvida.

CONSIDERAÇÕES

De acordo Duval (2003, p. 14) “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”. Analisando as resoluções das atividades aplicadas, nota-se que alguns alunos representam pela linguagem materna que a ampliação de uma figura é deixar a “figura mais longa”, por exemplo. É razoável então que quando provocados a registrar a figura em outra representação semiótica que esta representação esteja presente, e não a noção matemática de proporcionalidade.

Outros alunos possuem boa compreensão do objeto matemático na linguagem materna, porém não possuem um pensamento algébrico e numérico, firmemente, desenvolvidos e erram ao realizar suas representações semióticas utilizando os instrumentos ofertados a eles. Isso demonstra então, segundo a Teoria dos Registros das Representações Semióticas, que estes alunos não compreenderam o objeto matemático estudado. Para Duval (2012, p. 3) “as representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática”, desta forma a análise destes registros pelo professor é imprescindível para verificar a aprendizagem de seus alunos. Talvez o uso frequente destes instrumentos de medida possa facilitar a compreensão de conceitos sobre proporcionalidade.

Mesmo com a separação cognitiva entre as turmas imposta pela escola onde o trabalho foi aplicado, verifica-se que este não foi um fator determinante e que em ambas as turmas há resultados gerais semelhantes.

Se existe a representação de que a turma que possui o cognitivo considerado menos desenvolvido não tem compromisso com o sucesso em suas produções, talvez isso tenha os deixado mais livres durante o processo de produzir, experimentar, acertar e errar, e em comparação com a turma considerada desenvolvida – que acaba tendo sobre os alunos a pressão de sempre acertar – não encontramos diferenças significativas na aprendizagem.

A maioria dos alunos demonstra não compreender completamente o objeto matemático estudado, pois não conseguiram realizar os dois registros semióticos de forma correta.

Verifica-se que uma fonte de erro da maioria dos alunos é oriunda já da linguagem materna. É preciso que o professor consiga conceituar corretamente o objeto matemático já nesta representação, para que o aluno não tenha dificuldades para converter em outras representações como aconteceu na produção na malha quadriculada em que a grande maioria dos alunos ampliou a figura apenas numericamente já que para eles ampliar era "alongar" o comprimento da figura apenas. Já os alunos que tiveram um desempenho mais assertivo, é preciso apenas desenvolver e firmar conceitos básicos como o uso de instrumentos de medição e nas operações multiplicativas.

O trabalho teve um resultado satisfatório, pois se identificou que uma grande fonte de erros por parte dos alunos ao fazerem as conversões de representação semiótica é advinda de conceitos matemáticos firmados já na linguagem materna dos estudantes. É necessário se realizar um aprofundamento maior sobre a formação de conceitos matemáticos no pensamento natural e como o professor pode criar estratégias em cima destas representações que os alunos trazem para sala de aula para um bom desenvolvimento da aprendizagem matemática dos estudantes.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. **Abordagens Semióticas em Educação Matemática**. Bolema, Rio Claro, v. 32, n. 61, p. 696-726, ago. 2018.

ALMOULOUD, S. Registros de Representações Semióticas e Compreensão de Conceitos Geométricos. (2010). In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Editora Papirus, 2003. p. 11-34.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma entrar no modo matemático de pensar**: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**: R. Eletr. De Edu. Mat. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012.

GARCEZ, T. I. G. M. **O Raciocínio Proporcional no Quadro do Pensamento Algébrico**: Uma experiência de ensino no 6º ano Universidade de Lisboa, Instituto de Educação (IE) Dissertações de Mestrado, 159 páginas 2016.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. Álgebra no Ensino Básico. 2009. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/7105 Acesso: fev. 2021

SILVA, I. B.; PRANDO, G.; GUALANDI, J. H., **Contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica Para a Análise do Capítulo de Funções de um Livro Didático.** 2020. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/1451/1659 Acesso: Mar. 2021.

SILVA, L. B.; FERREIRA, L. L.; MOREIRA F. M. B. **Modelagem Matemática**: Reflexões teóricas e Aplicações. Juiz de Fora. 2015.

SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R. **Uma Breve História do Ensinar e Aprender Matemática nos Anos Iniciais**: Uma Contribuição Para a Formação de Professores. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.15, Número Especial, p. 857-871, 2013.

SPINILLO, A. G. **O Erro no Processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática**: Errar é Preciso?. UFPE. 2014.

TEIXEIRA, L. R. M. **A análise de erros: uma perspectiva cognitiva para compreender o processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos**. In: Nuances - Vol. III - setembro de 1997, p. 47-52.

ENSINO-APRENDIZAGEM DE EQUAÇÃO DE 1º GRAU VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PROPOSTA PARA A SALA DE AULA

Amanda Cristina de Sousa[34]
Marcelo Carlos de Proença[35]
Wilian Barbosa Travassos[36]

INTRODUÇÃO

Pesquisas realizadas no campo da aprendizagem da álgebra têm constatado dificuldades de alunos do Ensino Fundamental na resolução de problemas. Na pesquisa de Pimentel (2010), alunos do 8° ano do Ensino Fundamental possuíam dificuldades para articular os símbolos algébricos bem como atribuí-los sentido, sobretudo, impulsionado pela forte tendência em resolver as atividades apenas pela aritmética utilizando em especial o Método de Tentativa e Erro.

Na pesquisa de Manoel e Balieiro Filho (2013), as dificuldades de 32 alunos do 8° ano do Ensino Fundamental na resolução de atividades envolvendo o conteúdo equações e inequações estiveram relacionadas à interpretação e à tradução de problemas, que, neste caso, foi transitar da língua materna para a linguagem matemática. No estudo de Gil e Felicetti (2016) com alunos do 8° ano do Ensino Fundamental, mostrou que um percentual de 40,62% de um total de 32 de alunos tiveram poucas condições no que se refere ao uso de seus conhecimentos, de identificar bem como expressar regularidades presentes em sequências na forma algébrica.

Tendo em vista esses estudos sobre as dificuldades dos alunos ao se envolverem com a álgebra em processo de resolução de problemas, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) sugere que se deva

---

[34] Graduanda em Matemática (UEM). CV: http://lattes.cnpq.br/4164527696848341

[35] Doutorado em Educação para a Ciência (UNESP). Professor adjunto do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática (UEM). CV: http://lattes.cnpq.br/9198626057262085

[36] Doutorando em Educação para a Ciência e a Matemática (UEM). Professor Colaborador do Departamento de Matemática (UNESPAR). CV: http://lattes.cnpq.br/9754819021432267

levar os alunos a desenvolverem suas habilidades e competências para resolver problemas nos diversos conteúdos, sobretudo, os que envolvem álgebra.

Entretanto, na BNCC não há uma clara indicação sobre os modos de conduzir um ensino por meio da resolução de problemas, o que pode levar o professor a entender a resolução de problemas como uma simples ação de resolver problemas por meio da matemática, direcionando seus alunos à mera aplicação.

Desse modo, seguindo a indicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) sobre o uso do problema como ponto de partida e alicerçado nas cinco ações de ensino de Proença (2018) para a condução desse uso, apresentamos uma proposta de ensino para abordar o conteúdo de equações do 1º grau com uma incógnita, a qual foi decorrente de uma pesquisa que realizamos sobre esse conteúdo.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA VISÃO DE PROENÇA (2018)

Dois aspectos que devem ser compreendidos para efetivamente realizar um ensino que aborde a resolução de problemas seriam: definir o que vem a ser um problema na matemática; e como resolvê-lo. Para Proença (2018, p. 17), uma situação matemática se torna um problema quando "[...] a pessoa precisa mobilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente para chegar a uma resposta". Por outro lado, para o autor, os exercícios são considerados como aqueles que envolvem o uso direto de fórmulas ou regras matemáticas com o objetivo de chegar rapidamente à resposta, um processo 'mecanizado'.

Assim, o segundo aspecto refere-se a como se resolve um problema. Proença (2018), baseado na síntese feita por Brito (2006) sobre o processo de resolução de problemas, apresentou seu entendimento para as quatro etapas: representação, planejamento, execução e monitoramento.

Etapa de representação: esta etapa caracteriza o processo de compreensão do problema, no qual o solucionador constrói uma representação mental da situação. Para isso, utiliza-se dos conhecimentos linguísticos, relacionados à língua portuguesa para compreensão do contexto e ações envolvidas nesse contexto. Utiliza-se, principalmente, dos conhecimentos semânticos, relacionados aos significados dos termos e simbologias próprias da matemática que constam do enunciado da situação. Por fim, também ocorre que o solucionador deve utilizar seu conhecimento esquemático, relacionado a natureza da situação a ser resolvida no sentido do tipo de área/conteúdo matemático que o compõe: se é referente à geometria, à álgebra, à aritmética etc.

Etapa de planejamento: nesta etapa, o solucionador elaborará uma estratégia coerente de solução, e para isso, utilizará do uso do conhecimento estratégico de modo a realizar a tradução da língua materna (enunciado de um problema) para a linguagem matemática, envolvendo assim outros tipos de conhecimentos, conforme a estratégia elaborada.

Etapa de execução: nesta etapa o solucionador coloca em prática toda estratégia elaborada. Dessa forma, "trata-se, assim, de domínio do conhecimento procedimental, o que revelaria a habilidade da pessoa para o uso de seu pensamento lógico no estabelecimento de relações quantitativas e espaciais" (PROENÇA, 2018, p. 28).

Etapa de monitoramento: neste momento, o solucionador analisará a resposta em que se chegou bem como em todo o processo até ela, incluindo as operações, as propriedades, as estratégias e até mesmo a compreensão do problema assim como o que é pedido no problema: "demonstra habilidade matemática para apresentar racionalidade de uma solução" (PROENÇA, 2018, p. 28).

Diante desses dois aspectos, para que o professor possa envolver os alunos na resolução de problemas, Proença (2018) apresentou o Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP), constituído de cinco ações, a saber: *escolha do problema, introdução do problema, auxílio aos alunos durante a resolução, discussão das estratégias dos alunos e articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo.*

Escolha do problema: esta ação é primordial no processo de ensino de um conteúdo no EAMvRP, pois, em parte, é o que determinará que a situação seja reconhecida como um problema pelos alunos. Nesse sentido, Proença (2018) destaca três aspectos importantes que devam ser considerados na escolha de um problema. O primeiro, e também principal, implica em selecionar uma situação que direcione os alunos a utilizar conhecimentos adquiridos anteriormente, durante a escolarização, para assim resolver a situação matemática. O segundo consiste em direcionar os alunos ao envolvimento de modo que construam o conteúdo/conceito/assunto a ser introduzido, e dessa forma envolve a construção de um conceito em si por exemplo, ou de uma fórmula/expressão matemática por meio de um processo de generalização. Já o terceiro aspecto é oriundo dos anteriores, na qual "[...] busca propiciar condições para que os alunos estabeleçam relações entre os conhecimentos matemáticos utilizados e entre estes e o novo conhecimento (PROENÇA, 2018, p. 46). Desse modo, o referido autor destaca a importância de trabalhar com situações (possíveis problemas) de modo que admitam mais de uma estratégia para serem resolvidos, além de mais de uma resposta. Para tal, é importante que após a escolha da situação matemática (retirada na íntegra de algum texto/livro, elaborada ou reelaborada) se faça a previsão das possíveis estratégias de resolução.

Introdução do problema: Nesta ação, ocorre a divisão dos alunos de modo a formarem grupos, uma vez que isso permite a discussão de ideias e estratégias entre os estudantes. Após os alunos formarem os grupos, o professor se encarrega de distribuir uma situação (possível problema) para cada grupo, para que assim possam discutir entre eles. É neste momento que os alunos podem reconhecer a *situação* como algo que necessita da mobilização de seus conhecimentos prévios na busca de um caminho que ainda não conhecem, o que a confere como um *problema*.

Auxílio aos alunos durante a resolução: Nesta ação, o professor exerce o papel de auxiliar os grupos observando, incentivando e direcionando o processo resolutivo de modo a desenvolver a aprendizagem e a autonomia dos alunos. Ao realizar esse auxílio, é possível que o professor constate que os grupos (ou algum grupo) não conseguem encontrar um caminho de resolução. Se mesmo com o auxílio do professor isso acontecer, é importante direcioná-los a uma das estratégias previamente elaboradas, cujo planejamento deve ocorrer na primeira ação do EAMvRP. O professor deve incentivar os alunos a tentar resolver o problema, levando-os a seguir um caminho em que possam participar do processo de resolução, e não um em que o professor simplesmente resolva o problema por eles.

Discussão das estratégias dos alunos: Neste momento, o professor convida os grupos a exporem na lousa a resolução do problema de modo a promover a socialização das resoluções. Busca-se favorecer uma avaliação do processo que foi empregado em cada resolução, em termos das etapas de resolução (representação, planejamento, execução e monitoramento). Assim, "[...] o professor deve apontar as dificuldades que tiveram e os equívocos cometidos em uma resolução inadequada" (PROENÇA, 2018, p. 52). Na etapa de representação por exemplo, onde se compreende o problema, é possível esclarecer o mal uso dos conceitos bem como possíveis incompreensões na linguagem. Por fim, deve-se levar os alunos a analisar a plausibilidade da resposta com base no contexto da pergunta, e sobretudo, estimulá-los a sintetizarem o que aprenderam.

Articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo: nessa última ação, o principal objetivo é fazer uma articulação entre os conhecimentos e estratégias apreendidos ao conteúdo/conceito/assunto que foi trabalhado. Nesse momento, o papel do professor é utilizar pontos centrais de uma estratégia e tentar relacioná-la ao conceito e/ou a uma expressão matemática (fórmula, algoritmo etc.). Caso não seja possível tal articulação, pode-se apresentar a resolução do problema de forma direta aos alunos.

PROPOSTA DE EAMvRP AO CONTEÚDO DE EQUAÇÃO DE 1º GRAU

A proposta de ensino corresponde ao Ensino-aprendizagem de equação de 1º grau via resolução de problemas, a qual deve ser implementada a alunos que irão estudar pela primeira vez esse conteúdo, que, segundo a BNCC (2018), deve ocorrer no sétimo ano. O tempo a ser destinado fica em torno de cinco a sete horas-aula. A seguir apresentamos a condução das aulas ao longo das cinco ações de ensino de Proença (2018).

Na *escolha do problema*, selecionamos dois possíveis problemas de modo que possibilite aos alunos o uso de seus conhecimentos prévios. As duas situações a serem utilizadas foram aproveitadas na sua totalidade, ou seja, na íntegra, as quais são as seguintes:

> **Situação 1:** João, Paulo e Carlos têm, juntos, 72 figurinhas. Paulo tem o dobro de figurinhas de João e Carlos tem o triplo de figurinhas de João. Quantas figurinhas tem cada um? (ALMEIDA; SANTOS, 2014, p. 5).

Situação 2: Ao ser perguntado sobre sua idade, Paulo respondeu: o dobro da minha idade quatro anos atrás é igual a minha idade daqui a dezoito anos. Qual a idade atual de Paulo?" (ALMEIDA; SANTOS, 2014, p. 6).

A primeira situação proposta caracteriza-se pelo tipo 'partilha'. Este tipo "tem um grau de dificuldade alto, tendo em vista que seu caráter de congruência, no momento de conversão, é considerado muito baixo" (ALMEIDA; SANTOS, 2014, p. 13), ou seja, a passagem do enunciado do problema para a linguagem matemática se torna complexa devido a estrutura do problema, tal como a linguagem (significado de palavras) e a ordem em que os dados aparecem.

A segunda situação proposta é do tipo 'transformação', a qual possui um grau de dificuldade maior, visto que não contém nenhum valor inicial e final, dificultando, assim, sua resolução pelos alunos e, por isso, necessita de um maior direcionamento e apoio por parte do professor (ALMEIDA; SANTOS, 2014).

Nos quadros 1 e 2 a seguir, são apresentadas algumas estratégias que foram previstas para apoiar o professor sobre as possibilidades que podem surgir em sala de aula, bem como para fazer a articulação ao conteúdo de equação de 1º grau.

Quadro 1 - Possíveis estratégias a serem utilizadas pelos alunos no problema 1.

Possíveis estratégias para se resolver a situação 1	
Explicação da resolução	**Estratégia**
O estudante poderá notar que a diferença de quantidade entre as pessoas cresce de forma igual, já que Paulo tem o dobro e Carlos o triplo de figurinhas que João, assim os estudantes pegam o total e divide por 3.	$\frac{72}{3} = 24$ Encontrando o valor de figurinhas de Paulo, já que João + Paulo= Carlos. Para encontrar o valor de João basta dividir o valor encontrado para Paulo por dois, obtendo: $\frac{24}{2} = 12$ E para encontrar o valor para Carlos: $12 + 24 = 36$ Assim, João tem 12 figurinhas, Paulo 24 e Calos 36.

O estudante passará a linguagem verbal para a linguagem algébrica.	J+P+C=72 sendo J= João, P= Paulo e C= Carlos. Logo viu que P=2J e C=3J. Substituindo: J+2J+3J=72 6J=72 dividindo de ambos os lados 6 temos: J=12
Na forma direta e matemática.	$x + 2x + 3x = 72 \leftrightarrow$ $6x = 72 \leftrightarrow$ $x = 12$ Assim sendo, João tem 12 figurinhas, Paulo o dobro que é igual a 24 e Carlos o triplo que é igual a 36.
Pelo método de tabela, os alunos iriam dobrando e triplicando o valor de figurinhas de João para achar o valor de figurinhas de Paulo e Carlos respectivamente e em seguida somando esses valores, até chegarem ao total de figurinhas fornecida no contexto do problema.	(tabela abaixo)

João	Paulo	Carlos	Total de figurinhas
1	2	3	6
2	4	6	12
3	6	9	18
4	8	12	24
⋮	⋮	⋮	⋮
10	20	30	60
11	22	33	66
12	24	36	72

Fonte: Os autores.

Quadro 2 - Possíveis estratégias a serem utilizadas pelos alunos situação 2.

Possíveis estratégias para se resolver a situação 2	
Explicação da resolução	**Estratégia**
Os alunos podem interpretar de forma equivocada, sendo: "o dobro da minha idade quatro anos atrás" → 2x-4 "Minha idade daqui a dezoito anos" → x+18 Essa maneira está equivocada, em razão que, na parte em que o aluno interpretou dobro da idade de Paulo 4 anos atrás, como era o dobro da idade de Paulo 4 anos atrás, era a idade dele "x" menos 4 e depois realizaria a multiplicação para se achar o dobro desta idade.	Juntando as informações obtidas em uma só expressão de acordo com a situação $2x - 4 = x + 18 \leftrightarrow$ $-x + 2x - 4 = x - x + 18 \leftrightarrow$ $+4 + x - 4 = +18 + 4 \leftrightarrow$ $x = 22$

Outra maneira que os alunos poderão resolver o problema, é por tentativa e erro. Assim sendo, eles podem pensar o seguinte: “Que número menos 4 multiplicado por 2 é igual a esse número mais 18?” Assim, eles colocariam números aleatórios até chegar ao resultado esperado	$$(n-4)2 = n+18$$ Para n =5: $$(5-4)2 = 5+18$$ 2≠23 errado! Para n=15: $$(15-4)2 = 15+18$$ 22≠33 errado! ⋮ Para n=26: $$(26-4)2 = 26+18$$ 44=44 correto!
Na forma direta e matemática.	$2(x-4) = x+18 \leftrightarrow$ $2x-8 = x+18 \leftrightarrow$ $+8+2x-8 = x+18+8 \leftrightarrow$ $-x+2x = x-x+26 \leftrightarrow$ $$x = 26$$ Chegando assim, na idade atual de Paulo, no qual é 26 anos.

Fonte: Os autores.

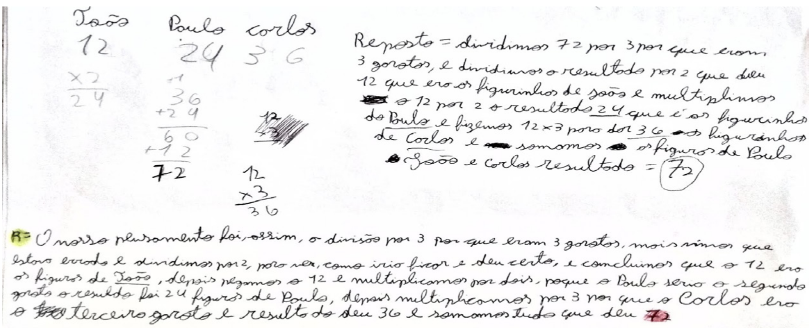
Na *introdução do problema*, devem ser formados grupos entre os alunos para que assim seja entregue a primeira situação para resolverem. Posteriormente, dado um tempo após as resoluções, são entregues a eles a segunda situação. Nesta ação, o professor deve incentivá-los a resolverem da maneira que mais acharem conveniente, debatendo suas ideias e pontos de vista.

Na ação de *auxílio aos alunos durante a resolução*, o professor deve observar, incentivar e direcionar os alunos no processo de resolução dos dois problemas, em termos de esclarecer dúvidas, tais como: O que significa dobro? O que significa triplo? Posso utilizar uma letra para representar as ideias? Ou até mesmo incompreensões quanto ao que se pede no problema. Deste modo, o professor deve orientá-los quanto as suas dúvidas sem que ‘entregue’ a resposta ou estratégia correta de maneira direta.

Na ação de *discussão das estratégias dos alunos*, deve-se solicitar que um representante de cada grupo exponha na lousa a sua resolução. Com essa ação, cria-se um ambiente de socialização das estratégias no qual debate-se os conhecimentos utilizados pelos grupos para determinar uma solução para o problema, evidenciando nesse processo os acertos e equívocos. O mesmo procedimento deve ser realizado em seguida com a segunda situação que foi fornecida aos alunos. Neste momento, poderão ter grupos com estratégias semelhantes bem como grupos que não conseguiram montar nenhuma estratégia para resolver o problema ou erros durante o processo. Assim, o professor deve discutir sobre cada estratégia utilizada com base nas etapas de resolução de problemas (representação, planejamento, execução e monitoramento), visando identificar as dificuldades e (re)construir os conhecimentos que a atividade propicia.

No EAMvRP para equação de 1º grau com uma incógnita que fizemos em sala de aula a 34 alunos do 8° ano do Ensino Fundamental, separados em sete grupos, identificamos algumas estratégias na ação de *discussão das estratégias dos alunos* (SOUSA; PROENÇA, 2019). Para as resoluções à ‘situação 1’, quatro grupos utilizaram o Método Tentativa e Erro (Figura 1) e três grupos realizaram o Método de Tabela (Figura 2).

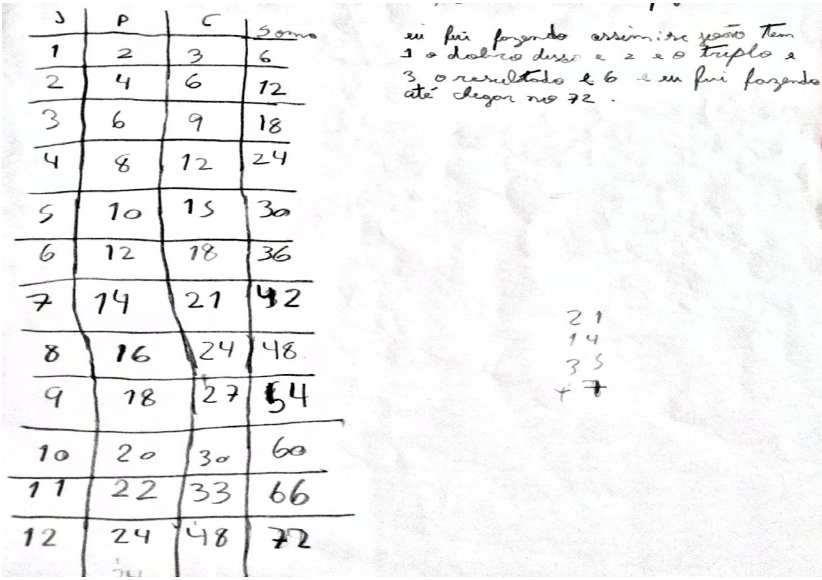
Figura 1 - Estratégia Tentativa e erro do Grupo 4 para resolver a situação 1.



Fonte: Sousa e Proença (2019, p. 441).

Como observa-se na Figura 1, os alunos do Grupo 4 resolveram a situação 1, utilizando-se do processo inverso, ou seja, a situação relata que Paulo e Carlos têm, respectivamente, o dobro e o triplo de figurinhas que João tem e, sobretudo, que quando somadas as figurinhas dos três, tem-se um total de 72 figurinhas. Desse modo, os alunos dividiram 72 por 3, obtendo como resultado 24, que o dividiram por 2, tendo como resultado o valor de 12 figurinhas para João. Após encontrarem o número de figurinhas que João tinha, eles duplicaram e triplicaram seu valor, determinando assim quantas figurinhas Paulo e Carlos tinham, respectivamente. Neste caso, os alunos do Grupo 4 determinaram corretamente a resposta do Problema 1.

Figura 2 – Estratégia do Método de tabela do Grupo 7 para resolver a situação 1.

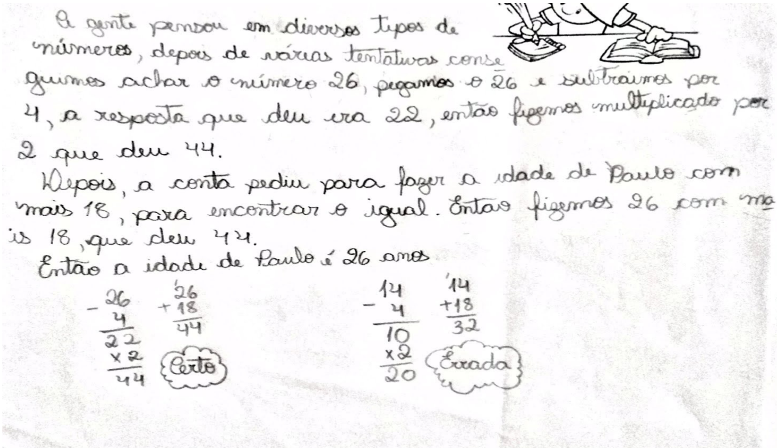


Fonte: Sousa e Proença (2019, p. 441).

Neste exemplo, apresentado na Figura 2, os alunos do Grupo 7 utilizaram o Método de Tabela para determinarem a resposta da situação 1. Primeiramente, o grupo estipula um valor para João, anotando em seguida o dobro e triplo deste valor para acharem respectivamente os valores de Paulo e Carlos na segunda e terceira coluna. Já na quarta coluna é realizado a soma dos valores desta linha para validar está soma (soma das idades de João, Paulo e Carlos) ao resultado de 72. Esse processo foi realizado 12 vezes até que se chegou a uma igualdade entre os valores, conforme condição estabelecida no enunciado do problema.

Para as resoluções da 'situação 2', cinco grupos resolveram pelo Método de Tentativa e Erro (Figura 3). Ao contrário disso, identificamos que dois grupos não conseguiram propor um caminho de resolução que chegasse na resposta, mesmo com apoio do professor.

Figura 3 - Estratégia por tentativa e erro do Grupo 3 para resolver a situação 2.



Fonte: Sousa e Proença (2019, p. 442).

Nota-se, por meio da Figura 3, que o grupo supôs vários valores e analisou-os conforme o contexto do problema. Quando obtiveram o valor de 26, realizaram os cálculos de acordo com às condições especificadas no enunciado da situação e viram que a igualdade de valores postas era válida, determinando corretamente a resposta da situação 2.

Tendo em vista essas resoluções acima, na última ação, a de *articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo*, busca-se articular as estratégias utilizadas pelos grupos permitindo evidenciar a estrutura de uma equação de 1° grau.

- Para a 'situação 1' – pode ser utilizada a tabela (Figura 2) para evidenciar tal estrutura, mostrando que ao alterar o valor de uma coluna, consequentemente a outra também muda. Assim, os alunos podem notar que o valor atribuído a Paulo e Carlos dobra e triplica, respectivamente, o valor de João. Essas ações são encaminhadas para a seguinte generalização: $J + 2J + 3J = 72$. Realizando os cálculos, chegamos que '$6J = 72$' e, por fim, mostramos diretamente que '$J = 12$'. Dessa forma, tem-se como resposta: João tem 12 figurinhas, Paulo tem 24 figurinhas e Carlos tem 36 figurinhas. Neste momento, devemos explicar aos alunos que '$6J = 72$' é uma equação de primeiro grau, ou seja, o conteúdo novo que será trabalhado a partir de então. Explicamos, assim, que se trata de uma forma algébrica que, geralmente, por convenção, é apresentada pelo uso da letra 'x'. Em seguida, fazemos apenas a mudança de letra, ficando '6x= 72'. Logo depois, resolvemos essa equação de primeiro grau pelo procedimento da balança, explicando seu funcionamento aos alunos, obtendo, assim, 'x = 12'.

- Para a 'situação 2' – apesar da previsão das estratégias (Quadro 2), não conseguimos estabelecer de antemão uma forma de articulação, o que poderia ocorrer, segundo previsto por Proença (2018). Mesmo no ensino que realizamos em sala de aula, na estratégia de "tentativa e erro" (Figura 3) que foi a única utilizada pelos grupos, destacamos que não conseguimos tecer uma articulação de algum ponto da sua estrutura à forma de equação de 1º grau. Neste caso, apresentamos o conteúdo diretamente aos alunos pela apresentação direta da forma algébrica pretendida (a equação e sua forma de resolução): retomamos que por convenção adotamos a letra 'x', de modo que construímos a equação '2(x – 4) = x + 18', por meio do enunciado da situação, e, em seguida, após uso da propriedade distributiva em '2(x – 4)', obtendo a expressão '2x – 8', utilizamos o procedimento da balança e encontramos o valor 'x = 26', sendo dada a resposta (Resposta: Idade atual de Paulo é 26 anos) (SOUSA; PROENÇA, 2019).

CONSIDERAÇÕES

Apresentamos aqui uma maneira de conduzir o ensino de equações de 1° grau no viés do EAMvRP, pautado nas cinco ações de Proença (2018). Tem-se, assim, uma forma de ensinar que podemos indicar como importante ao professor para que possa introduzir os conteúdos em sala de aula antes mesmo de formalizá-los. Com isso, é possível valorizar os conhecimentos prévios dos alunos e as estratégias que vierem a propor. Mais do que isso, pode-se levar os alunos a abstraírem a ideia matemática de equação envolvida por meio da articulação entre as representações dos alunos e a forma estrutural de equação de 1º grau. Portanto, apesar de às vezes não ser possível uma articulação clara, entendemos que todo trabalho por meio das cinco ações do EAMvRP ajuda a evitar o ensino tradicional, de mera aplicação de conteúdos, o que favorece o processo construtivo de conceitos, dando voz e autonomia aos alunos, possibilitando-lhes o engajamento entre os colegas bem como a discussão de pontos de vistas divergentes.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Jadilson Ramos de; SANTOS, Marcelo Câmara dos. Análise dos problemas propostos para o ensino de equações polinomiais de 1° grau com uma incógnita nos livros didáticos de matemática. **Boletim Gepem**, n. 64, jan./jun., p. 3-17, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Brasília, DF, 2018.

BRITO, Márcio Regina Ferreira de. (Org.). **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas: Alínea, 2006, p. 13-53.

GIL, Katia Henn; FELICETTI, Vera Lucia. Reflexões sobre as dificuldades apresentadas na aprendizagem da álgebra por estudantes da 7ª série. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Sergipe, v.1, n. 1, p. 19- 35, 2016.

MANOEL, Silmara Cristina; BALIEIRO FILHO, I. F. **A**s dificuldades dos alunos 8º ano do Ensino Fundamental na compreensão de equações e inequações. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba. **Anais do XI ENEM**, 2013.

PIMENTEL, Danilo Eudes. **Metodologia da resolução de problemas no planejamento de atividades para a transição da aritmética para a álgebra**. 2010. 133 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas e Tecnologia) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

PROENÇA, Marcelo Carlos de. **Resolução de problemas:** encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de matemática em sala de aula. Maringá: Eduem: 2018.

SOUSA, Amanda Cristina de; PROENÇA, Marcelo Carlos de. Uma proposta de ensino de equação de 1. º grau com uma incógnita via resolução de problemas. **Revista Prática Docente**, v. 4, n. 2, p. 431-451, 2019.

Nota: o capítulo é decorrente da pesquisa de Sousa e Proença (2019), desenvolvida em sala de aula com foco no ensino via resolução de problemas.

UM CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA: ESPAÇO PROPÍCIO PARA DISCUSSÕES ACERCA DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Marianna Cassa de Souza Santos[37]
Jorge Henrique Gualandi[38]

INTRODUÇÃO

Este capítulo trata de parte de uma pesquisa de mestrado em andamento, do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores (PPGEEDUC), da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) *campus* de Alegre. A pesquisa surge de forma a respondermos à questão: De que forma as discussões estabelecidas em um curso de formação continuada (FC), para professores que ensinam matemática, podem contribuir para que esses sujeitos reflitam sobre suas práticas profissionais?

A formação de professores é, hoje, um tema amplamente pesquisado e debatido quando se trata de educação, com o objetivo de pensar sua estrutura, assinalar críticas ou sugerir propostas. Essa formação acontece desde os cursos de graduação, na forma inicial, e estende-se por toda a carreira do professor de forma continuada, por meio de cursos, rodas de discussões, palestras, oficinas, encontros e outros. É interessante que o professor esteja em constante formação, buscando refletir, revisar, aperfeiçoar e ampliar seus conhecimentos e suas práticas, pois esse profissional está inserido em uma sociedade que necessita de atualizações de conhecimentos. Mediante a vivência de sua profissão, do contato com outros professores, das discussões de forma coletiva e reflexiva, o

[37] Mestranda em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores (UFES). CV: http://lattes.cnpq.br/5760276777597542

[38] Doutor em Educação Matemática (PUC-SP). Professor (IFES) e credenciado do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores (UFES). CV: http://lattes.cnpq.br/3386420572368441

professor continua sua formação. Vale e Pimentel (2013, p. 100) enfatizam que a aprendizagem contínua do professor

> [...] envolve a aprendizagem ao longo da vida, não duma forma individualista, mas de cooperação e responsabilidade partilhada, e ainda a reflexão crítica e a investigação da prática profissional. O desenvolvimento profissional é um meio que permite ao professor aprender por períodos alargados de tempo, superando a perspectiva tradicionalista da união de dois momentos disjuntos: a formação inicial e depois, mais tarde, reciclagens ou aperfeiçoamentos.

Para esta pesquisa, baseou-se em discussões sobre a FC dos professores que ensinam matemática, relacionando-as com o desenvolvimento do pensamento algébrico e a generalização de padrões nos anos iniciais do ensino fundamental, com o objetivo de investigar se um curso de formação continuada com discussões acerca do pensamento algébrico para professores que ensinam matemática proporciona reflexões sobre suas práticas profissionais. Para atender a esse objetivo, será ofertado um curso de FC para professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, a fim de provocar reflexões sobre o desafio de ensinar a matemática no que concerne ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Para Araújo (2008, p. 344), "a álgebra ainda não tem significado para muitos alunos, que se preocupam em gerar estratégias para memorizar dados e aplicar fórmulas que serão logo esquecidos, sem que cheguem a desenvolver o pensamento algébrico".

A escolha do tema acerca do pensamento algébrico e a generalização de padrões para a pesquisa ocorrem por alguns fatores, como a importância de desenvolver esses conhecimentos ainda nos anos iniciais do ensino fundamental, para a compreensão de conteúdos que são base da matemática para todos os anos seguintes da escolarização do aluno. Cabe enfatizar que, na Base Nacional Comum Curricular [BNCC] (BRASIL, 2018), na unidade temática "Álgebra", se encontram, desde o 1º ano do ensino fundamental, os padrões e sequências como objeto de conhecimento. Entre as habilidades, já no primeiro ano do ensino fundamental, podemos citar a (EF01MA10)[39]: "Descrever, após

[39] Código que representa determinada habilidade estabelecida pela BNCC. O primeiro par de letras indica a etapa de ensino fundamental, enquanto o de números indica o ano a que se refere

o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras" (p. 275). Destaca-se, no quadro 1, todas as habilidades descritas na BNCC a serem desenvolvidas nos anos iniciais do ensino fundamental, dentro da unidade temática da álgebra.

Quadro 1: Habilidades a serem desenvolvidas nos anos iniciais do ensino fundamental na unidade temática álgebra.

ANOS	HABILIDADES
1º	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida. (EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
2º	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida. (EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos. (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
3º	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes. (EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
4º	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural. (EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades. (EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas. (EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um dos termos. (EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.

a habilidade; o segundo par de letras indica o componente curricular, enquanto o último par de números indica a posição da habilidade na numeração sequencial do ano. EF01MA10: décima habilidade do componente curricular de matemática do primeiro ano do ensino fundamental.

5º	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido. (EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: BNCC (2018).

A BNCC em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais [PCNs] (BRASIL, 1997), enfatizam o uso de tarefas[40] que proporcionam discussões acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico que perpassam por todos os níveis de ensino, pois

> Os adolescentes desenvolvem de forma significativa a habilidade de pensar 'abstratamente', se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de álgebra mais sólida e rica em significados (BRASIL, 1997, p. 117).

Nesse sentido, Soares (2018, p. 43) destaca a necessidade de provocar o desenvolvimento do pensamento algébrico nos estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental, para que essa temática seja trabalhada desde o início dos estudos dos alunos, recorrendo aos conhecimentos informais deles:

> Dever-se-ia integrar a aprendizagem de Álgebra com a de outros assuntos (estendendo e aplicando conhecimentos matemáticos); abarcar as várias formas de pensamento algébrico (aplicando conhecimento matemático); acontecer com base em saberes que os estudantes já possuem, de tal maneira que reflitam sobre o que aprendem e articular o que sabem; e, por fim, incentivar a aprendizagem e a construção de relações que possibilitem a compreensão.

---

40 Entende-se tarefa como "um segmento de atividades da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular" (STEIN; SMITH, 2009, p. 22).

É importante considerar os conhecimentos que os estudantes já possuem, pois é uma forma de tornar a aprendizagem significativa, motivando o aluno e contextualizando as aulas. Entendendo a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais do ensino fundamental, como base para aprendizagem na disciplina de matemática em etapas seguintes, acredita-se ser um contribuinte para o professor desenvolver as habilidades conforme apresenta a BNCC e os PCNs, utilizando metodologias e recursos que os auxiliem, conforme citados por Soares (2018).

Destacam-se, a seguir, as possibilidades que surgem na acepção de Vale e Pimentel (2015, p. 168), ao trabalhar com essa temática:

> A profundidade e variedade das conexões que os padrões possibilitam com todos os tópicos da matemática conduz à consideração deste tema como transversal em toda a matemática escolar, quer para preparar os alunos para aprendizagens posteriores, quer no desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas e comunicação.

A álgebra é base para diversos ramos da matemática, por isso é necessário que os alunos desenvolvam o pensamento algébrico para não terem dificuldades futuras que prejudiquem seu desempenho escolar nessa disciplina. Trabalhar o desenvolvimento do pensamento algébrico proporciona benefícios ao aluno, o que é enfatizado por Vale e Pimentel (2005, p. 16), ao destacar que os processos de desenvolvimento do pensamento algébrico podem:

> • contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da matemática por parte dos alunos;
>
> • experienciar o poder e a utilidade da matemática e desenvolver o conhecimento sobre novos conceitos;
>
> • evidenciar como os diferentes conhecimentos matemáticos se relacionam entre si e com outras áreas do currículo;
>
> • promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos tornando-os bons solucionadores de problemas e pensadores abstractos;
>
> • melhorar a compreensão do sentido do número, da álgebra e de conceitos geométricos.

Desse modo, Gualandi (2019, p. 50) ressalta que o trabalho com “generalização de padrões perpassa por todos os níveis de ensino” e configura uma oportunidade para estimular no aluno a capacidade de observação, interpretação, generalização e síntese, além de usar, de forma criativa, os símbolos matemáticos. Vale e Pimentel salientam:

> A integração de atividades que envolvem padrões no currículo da Matemática escolar é uma das vias para que todos os estudantes descubram conexões entre vários tópicos, desenvolvam a sua capacidade de comunicar matematicamente e aumentem o seu desempenho na resolução de problemas (VALE e PIMENTEL, 2005, p. 19).

Entende-se que o desenvolvimento do pensamento algébrico pode gerar benefícios para o aluno, que, muitas vezes, tem um baixo desempenho durante a trajetória escolar na disciplina Matemática, que pode ser justificada por dificuldades relacionadas à não oportunidade de desenvolver e experienciar o trabalho com generalizações de padrões. Ponte (2005, p. 37) considera que "uma das vias para promover o pensamento algébrico é o estudo de padrões e regularidades", uma vez que o pensamento algébrico diz respeito às estruturas, à simbolização e ao estudo da variação (GUALANDI, 2019) e, segundo o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000, p. 37), "compreender padrões, relações e funções faz parte do estudo das estruturas".

Compreende-se, portanto, que o desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio da generalização de padrões, é um pilar no ensino de matemática, que perpassa a temática da álgebra, visto que são conhecimentos e habilidades desenvolvidas que pode proporcionar a compreensão e realização de atividades em diversas temáticas.

DESENVOLVIMENTO

No intuito de responder ao problema de pesquisa apresentado e alcançar o objetivo – investigar se um curso de formação continuada com discussões sobre pensamento algébrico para professores que ensinam matemática proporciona reflexões sobre suas práticas profissionais –, será feito um estudo qualitativo, baseando-se nas características definidas por Bogdan e Biklen (1994):

> • a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal (p. 47);

> • é descritiva. [...] Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registos oficiais (p. 48);
>
> • os investigadores interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos (p. 49);
>
> • os investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva (p. 50);
>
> • o significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas (p. 50).

Entende-se que o estudo de caso é o tipo de pesquisa em que se enquadra a presente investigação. De acordo com Ponte (1994), o estudo de caso, tem sido muito utilizado em pesquisas da educação matemática para diversos focos, como as práticas profissionais de professores e sobre os programas de formação inicial e continuada de professores. O autor descreve tal tipo de investigação como aquela

> [...] que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse (PONTE, 1994, p. 2).

Os sujeitos da pesquisa serão professores atuantes nos anos iniciais do ensino fundamental na rede pública municipal de ensino da cidade de Cachoeiro de Itapemirim-ES. A escolha por esse perfil de sujeitos é baseada no fato de serem esses profissionais que estão em contato com os alunos no primeiro momento destinado ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental.

Devido à pandemia da covid-19, que afeta todo o mundo neste momento, o curso de FC proposto será realizado a distância, sendo composto por seis encontros síncronos, em que todos os participantes realizarão simultaneamente o curso mediante discussões, leituras e reflexões imediatas e atividades a serem realizadas de forma assíncrona, totalizando 60 horas de estudos. Durante o curso proposto, vamos estudar documentos oficiais, como a Base Nacional Comum

Curricular, realizar estudos teóricos acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental, proceder à análise e reflexão acerca de tarefas que proporcionem o desenvolvimento do pensamento algébrico, propor discussões acerca da elaboração e aplicação de tarefas e realizar oficinas com material didático (MD). De acordo com Lorenzato (2012, p. 18), os MD compreendem os "[...] instrumentos úteis ao processo de ensino e aprendizagem".

O curso de FC e as análises dessa FC serão desenvolvidos de acordo com os pressupostos da engenharia didática (ED). A engenharia didática é uma metodologia de pesquisa experimental que tem sido utilizada em investigações sobre o ensino/aprendizagem de algum determinado conceito. Segundo Machado (2012, p. 233), essa metodologia "se constituiu com a finalidade de analisar as situações didáticas objeto de estudo da Didática da Matemática".

Dessa forma, serão utilizados pressupostos da engenharia didática para esta pesquisa, definidos em quatro fases, a saber:

i. análises preliminares: nesta fase, busca-se embasar teoricamente a engenharia didática e os conceitos a serem trabalhados na atividade proposta; o objetivo de cada pesquisa determinará se as análises serão mais ou menos profundas;

ii. concepção e análise a *priori*: baseado nas análises teóricas feitas na primeira fase, o pesquisador determinará as variáveis pertinentes; é uma fase que se utiliza da descrição e da previsão por meio de hipóteses levantadas, que serão utilizadas na validação a ser feita na última fase;

iii. experimentação: é o momento da prática, quando o pesquisador aplicará a engenharia didática com os sujeitos determinados;

iv. análise *a posteriori* e validação: esta fase utiliza todos dados coletados durante a experimentação, por meio de observação, das produções feitas pelos sujeitos ou de outros instrumentos utilizados; os dados serão tratados e selecionados para que seja feita a análise a posteriori; finalmente, serão confrontadas as análises a priori e a posteriori, com o propósito de validar, ou não, as hipóteses levantadas na segunda fase: "[...] a validação, na engenharia didática, é essencialmente interna e esse fato constitui uma das originalidades desse método" (MACHADO, 2012, p. 242).

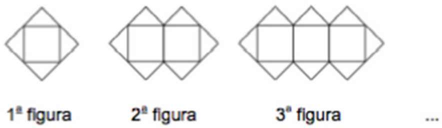
Portanto, na primeira etapa de elaboração, estão sendo selecionadas as tarefas a serem estudadas no curso e feitas as análises preliminares e as análises *a priori*. A análise *a priori* de cada tarefa contém a justificativa de sua escolha baseada nas habilidades descritas na BNCC, e as variáveis didáticas importantes para a resolução da tarefa. Entende-se que variável didática

> [...] é uma variável cujos valores podem ser alterados pelo professor e cujas modificações podem provocar sensivelmente o comportamento dos alunos em termos de aprendizagem, assim como provocar procedimentos ou tipos de resposta distintos. É apoiando-se na escolha judiciosa dessas variáveis que podemos provocar aprendizagens significativas, visando fazer emergir nos alunos novos conhecimentos como ferramentas necessárias para resolver um problema (ALMOULOUD, 2016, p. 121-122).

Na análise *a priori*, apresentam-se possíveis soluções para cada tarefa selecionada, as quais, posteriormente na fase da análise *a posteriori*, serão confrontadas com as soluções apresentadas pelos sujeitos da pesquisa. No quadro 2, descreve-se uma das tarefas selecionadas para realização do curso com a respectiva justificativa da escolha da tarefa e as variáveis didáticas e sua análise *a priori*.

Quadro 2: Composição de quadrados e triângulos.

Observe a seguinte sequência de figuras que são formadas por triângulos e quadrados:



a) Desenhe a próxima figura.

b) Quantos quadrados e quantos triângulos terá a 5ª figura? E a 6ª?

c) Escreva uma sequência numérica para representar a quantidade de triângulos de cada figura.

d) Terá alguma figura composta por exatamente 25 triângulos? Explique como chegou a essa conclusão.

e) Para representar a quantidade de triângulos que compõe uma figura qualquer, pode-se chamá-la de **enésima figura** ou **figura n**. Escreva uma forma para representar a quantidade de triângulos da **enésima figura** dessa sequência.

Fonte: Adaptado de Barbosa, Borralho, Cabrita, Fonseca, Pimentel e Vale (2008).

Justificativa: A escolha dessa tarefa ocorreu, pois entendemos que ela contribui no desenvolvimento das habilidades descritas na BNCC, a saber:

(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.

(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.

(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas por meio de palavras, símbolos ou desenhos. **(EF02MA11)** Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

Para essa tarefa, destacamos as seguintes **variáveis didáticas**: figuras geométricas, disposição dos triângulos nos quadrados, quantidade de quadrados e triângulos em cada figura.

Possíveis soluções ou análise a priori:

a) Desenhe a próxima figura.

Estratégia 1: O sujeito observa a sequência e verifica que é formada por quadrados e triângulos e que, a cada figura, aumenta um quadrado e dois triângulos e, após essa observação, desenha uma figura com quatro quadrados e dez triângulos.

b) Quantos quadrados e quantos triângulos terá a 5ª figura? E a 6ª?

Estratégia 1: O sujeito observa a sequência e verifica que a quantidade de quadrados corresponde à posição na qual a figura está representada. Assim, a 1ª figura possui um quadrado, a 2ª dois quadrados, a 3ª três quadrados e assim sucessivamente, de forma a concluir que a 5ª figura possui cinco quadrados e a 6ª seis quadrados. Observa-se também que a 1ª figura possui quatro triângulos, a 2ª seis triângulos e a 3ª oito triângulos, concluindo que o número de triângulos de cada figura corresponde ao dobro da posição que ela ocupa mais duas unidades. Assim, a 5ª figura possui 12 triângulos e a 6ª 14 triângulos.

c) Escreva uma sequência numérica para representar a quantidade de triângulos de cada figura.

Estratégia 1: Os sujeitos observam os padrões representados nas figuras e indicam que a sequência que representa a quantidade de triângulos de cada figura é indicada por: (4, 6, 8, 10, 12, 14, ...).

d) Terá alguma figura composta por 25 triângulos? Explique como chegou a essa conclusão.

Estratégia 1: Os sujeitos observam que a sequência que representa o número de triângulos é formada apenas por números pares; logo, não haverá uma figura exatamente com 25 triângulos.

e) Para representar a quantidade de triângulos que compõe uma figura qualquer, pode-se chamá-la de **enésima figura** ou **figura n**. Escreva uma forma para representar a quantidade de triângulos da **enésima figura** dessa sequência.

Estratégia 1: Os sujeitos, com base na resposta correta ao item b, isto é, na percepção de que o número de triângulos é dado pelo dobro do número que indica a posição da figura mais duas unidades, poderá sintetizar a situação expressando:

Se a posição da **enésima figura** é representada por **n** e se o número de triângulos que a compõem pode ser representado pelo dobro da posição da figura mais dois, então a **enésima figura** possui **2n + 2** triângulos, com

No decorrer da FC, os sujeitos serão convidados a resolver as tarefas, bem como adaptá-las ao nível de suas turmas e aplicar a seus alunos, para que, no encontro seguinte, esses sujeitos socializem as tarefas adaptadas e as resoluções de seus alunos, para que se estabeleça uma discussão acerca das apresentações de cada sujeito. Depois serão efetivadas a análise a posteriori, a confrontação com a análise a priori e a institucionalização de cada tarefa proposta

CONSIDERAÇÕES

Conforme descrito anteriormente, esta pesquisa encontra-se em andamento, tendo sido feita a necessária revisão bibliográfica e selecionadas as tarefas a serem trabalhadas na FC, como também pensadas e detalhadas suas análises *a priori*, que são as primeiras fases da ED.

À vista disso, como resultados parciais após a revisão bibliográfica feita, pode-se concluir que a FC é importante para o desenvolvimento profissional do professor e para sua autoformação e ser possível uma FC refletir positivamente em suas aulas, podendo contribuir para o desenvolvimento de aulas mais dinâmicas e promover maior participação dos alunos.

Feitas as análises a priori das tarefas selecionadas a serem trabalhadas na FC, percebe-se que, ao promover discussões acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental, pode proporcionar melhor entendimento dos alunos, contribuindo para a aprendizagem em matemática, durante os anos de sua trajetória escolar. Observa-se também que uma mesma tarefa pode ser elaborada, desenvolvida e adaptada para os diversos anos escolares, basta que, em cada momento, o professor discuta a tarefa de acordo com o nível de cada turma e os objetivos a serem alcançados, visando desenvolver as habilidades indicadas na BNCC para cada ano do ensino fundamental.

Espera-se, como futuras respostas, a participação ativa dos professores, compartilhando suas experiências, refletindo e discutindo sobre suas práticas profissionais, a fim de compreender a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental. Entende-se o curso de FC como uma oportunidade para que os sujeitos conheçam mais os documentos oficiais, referenciais teóricos e metodologias, no intuito de contribuir para suas práticas profissionais e refletir sobre o desempenho escolar de seus alunos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v. 11, n. 2, p. 109-141, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p109>. Acesso em: 19 dez. 2020.

ARAUJO, E. A. D.; Ensino de álgebra e formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331-346, 2008.

BARBOSA, L.; BORRALHO, A.; CABRITA, I.; FONSECA, L.; PIMENTEL, T.; VALE, I. Padrões no Currículo de Matemática: Presente e Futuro. In: Luengo, R.; Alfonso, B.; Camaho, M. e Nieto, B. (Eds.). **Investgación en Educación Matemática**, Badajoz: SEEM e SEIEM, p. 477-493, 2008.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Teimo Mourinho Baptista. Porto (Portugal): Porto, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, v. 3. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

GUALANDI, J. H. **Os reflexos de uma formação continuada na prática profissional de professores que ensinam matemática**. Tese (doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

LORENZATO, S. (Org). **O Laboratório de Ensino de matemática na Formação de Professores**. Campinas-SP, Autores Associados. 3. ed. 2012.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo, EDUC, 2012. p. 233-247.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA (USA): NCTM, 2000.

PONTE, J. P. O estudo de caso na investigação em educação matemática. **Quadrante**, v.3, n.1, p. 3-18, 1994.

PONTE, J. P. Álgebra no currículo escolar. **Revista Educação e Matemática**, Portugal, n. 85, p. 36-42, 2005.

SOARES, S.M. **Pensamento Algébrico: quais elementos são identificados por professores de Matemática em atividades com este foco?** 2018. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão. **Revista Educação e Matemática**. Lisboa, n.105, 2009, p. 22-28.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. **Revista Educação e Matemática**. Lisboa, n. 85, p. 14-20, 2005.

VALE, I.; PIMENTEL, T. O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores. **Da investigação às práticas**. v. 3, n. 2, p. 98-124, 2013.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões Visuais, Generalização e Raciocínio. In: MACHADO, S.D.A.; BIANCHINI, B.L.; MARANHÃO, M.C.S.A. (Orgs.). **Teoria elementar dos números**: da educação básica à formação dos professores que ensinam matemática. São Paulo: Iglu, 2015. p. 167-198.

O ENSINO DE ANÁLISE: CONTRIBUIÇÕES E PERSPECTIVAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO

Marcos dos Santos Ferreira[41]
Tarcila Oliveira Matos Muniz[42]

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o Conselho Nacional de Educação (CNE) realizou algumas alterações nos currículos dos cursos de licenciatura no país. Essas alterações, a exemplo das Resoluções CNE/CP 1/2002 e CNE/CP 2/2002, promoveram diversas discussões e consequentemente mudanças nos Programas de Formação de Professores da Educação Básica. Ressaltamos, entretanto, que esse movimento nas licenciaturas surgiu um pouco antes, e foi proveniente da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN nº 9394/96). Dentre algumas discussões que se destacaram nesse novo cenário dos cursos de licenciatura no país, citamos o papel que determinadas disciplinas exercem na formação inicial do professor e a necessidade de haver uma articulação adequada entre as disciplinas específicas e as disciplinas didático-pedagógicas nesse processo de formação.

Nesse capítulo investigamos o papel da disciplina Análise Real na formação inicial do professor de Matemática do ensino básico. O ensino de análise nos cursos de licenciatura em Matemática é um tema que divide opiniões e apresenta algumas questões a serem discutidas. Esse tema já foi discutido em algumas pesquisas, as quais destacamos Reis (2001), Moreira, Cury e Vianna (2005), Bolognezi (2006), Lima e Dias (2010), Amorim (2011), Otero-Garcia (2011a) e Martines (2012).

[41] Doutor em Matemática (UNICAMP). Professor (UESC). CV: http://lattes.cnpq.br/7976045409154094

[42] Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia (UESC). Professora (UNIME). CV: http://lattes.cnpq.br/5834283034031897

Nossa pesquisa consistiu em duas etapas: na primeira fizemos um estudo bibliográfico de algumas produções nacionais que discutiram o ensino de análise no contexto da formação de professores do ensino básico. Nosso intuito foi identificar as principais questões discutidas nesses trabalhos e, consequentemente, termos uma visão mais profunda sobre nossas inquietações relacionadas a esse tema. Na segunda etapa, fizemos uma análise do Projeto Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática da UESC visando discutir alguns aspectos relacionados à disciplina

Análise Real nesse curso, dando ênfase às seguintes temáticas: objetivos, ementa e organização da disciplina na matriz curricular, articulação entre teoria e prática na disciplina Análise Real e formação dos professores que ministram essa disciplina.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A primeira etapa de nossa pesquisa, um estudo bibliográfico sobre o ensino de análise, pode ser considerada como uma pesquisa do tipo qualitativa. Para obtenção dos trabalhos científicos relacionados ao ensino de análise fizemos uso dos bancos de dissertações e teses da CAPES[43], UNESP[44] e USP[45] e dos portais virtuais dos seguintes periódicos: Boletim de Educação Matemática[46] e Revista Zetetiké[47]. Ao todo selecionamos 11 trabalhos para análise os quais apresentamos no quadro abaixo com suas respectivas temáticas:

Quadro 1 – Pesquisas relacionadas à Análise Matemática e ao seu ensino

Temática	Autores
Contexto histórico da Análise e de seu ensino	Batarce (2003); Lima e Dias (2010).
Análise e a formação de professores	Bolognezi (2006); Martines (2012).
Ensino de Cálculo e Análise	Reis (2001); Ávila (2002); Amorim (2011).
Análise na licenciatura	Moreira, Cury e Vianna (2005).

[43] http://capesdw.capes.gov.br/capesdw/

[44] http://www.unesp.br/portal#!/cgb/bibliotecas-digitais/cthedra-biblioteca-digital-teses/

[45] http://www.teses.usp.br/

[46] http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema

[47] http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/

Trajetória da disciplina Análise e um estado do conhecimento sobre seu ensino	Otero-Garcia (2011a); Otero-Garcia (2011b); Baroni, Otero-Garcia (2011).

Fonte: Dados da Pesquisa.

A segunda etapa de nossa pesquisa, uma análise do Projeto Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática da UESC, é caracterizada como sendo uma pesquisa qualitativa do tipo análise documental, salvo quando utilizamos alguns dados para representar os Quadros 2 e 4. Nesse caso, nossa principal fonte de dados foi o Projeto Pedagógico do referido curso. Segundo Lüdke e André (1986, p. 38) "[...] a análise documental pode se constituir numa técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema".

FORMAÇÃO DO PROFESSOR E O ENSINO DE ANÁLISE

Nos trabalhos de Moreira e David (2003; 2005a), Fiorentini (2005) e Lins (2005) os autores discutem o processo de formação inicial do professor de matemática, o trabalho docente dos formadores de professores nos cursos de licenciatura e a prática docente dos professores de matemática na escola básica. Algumas questões que se destacam nesses trabalhos são: as relações entre os tipos de conhecimentos presentes na formação e prática do professor, o papel que as disciplinas específicas exercem na formação (matemática e pedagógica) do futuro professor e a existência de disciplinas específicas totalmente desarticuladas com a prática docente do futuro professor.

Segundo Lins (2005) a falta de articulação de algumas disciplinas específicas nos cursos de licenciatura em Matemática com a prática docente do futuro professor apresenta um grande desafio na Educação Matemática. Lins afirma que, na literatura, não há uma quantidade significativa e sólida de resultados mostrando o real efeito de disciplinas como Álgebra, Análise e Cálculo na prática do professor de Matemática. Moreira, Cury e Vianna (2005) corroboram com Lins ao relatarem que o conhecimento matemático, em sua abordagem tradicional (através da sistematização lógico-formal-dedutiva), não é capaz de dar conta das questões que se colocam para o professor em sua prática pedagógica.

Em meio às questões recorrentes envolvendo a necessidade de haver uma articulação adequada entre formação específica e formação pedagógica visando a prática docente do futuro professor em sua formação inicial, alguns pesquisadores vêm se dedicando em trabalhos relacionados ao papel que determinadas disciplinas específicas exercem na formação do futuro professor de matemática, os quais citamos: Moreira, Cury e Vianna (2005), Bolognezi (2006), Ciani, Ribeiro e Júnior (2006), Martines (2012) e Santos e Morelatti (2013).

No caso específico da disciplina Análise Real nos cursos de licenciatura em Matemática, tema de estudo do presente capítulo, as pesquisas de Reis (2001), Moreira, Cury e Vianna (2005) e Martines (2012) apontam para a importância dessa disciplina nos cursos de licenciatura em Matemática. Vale ressaltar, entretanto, que nenhum desses trabalhos mostram explicitamente como a disciplina Análise Real contribui na prática docente do futuro professor de Matemática.

A pesquisa de Bolognezi (2006, p. 90-91), feita através da análise de uma proposta curricular de um curso de Matemática (licenciatura e bacharelado) de uma universidade pública do Paraná e por meio de questionários com alunos e professores desse curso e com professores da rede básica de ensino, mostra "[...] que a disciplina Análise Matemática pouco ou nada tem contribuído para o aluno do curso de licenciatura em Matemática no desempenho de sua futura docência [...]" e ainda ressalta que essa disciplina favorece mais a formação do bacharel do que a do licenciado em Matemática.

Reforçando os resultados obtidos pela pesquisa de Bolognezi (2006), o trabalho de Ciani, Ribeiro e Júnior (2006), realizado com egressos do curso de licenciatura em Matemática da UNIOESTE[48], campus de Cascavel, mostra que disciplinas como Análise Matemática não deveriam integrar a grade curricular de um curso de formação de professores do ensino básico, pois na opinião dos egressos, não há uma transposição direta dessa disciplina com o campo de atuação profissional do professor. Para os entrevistados, a disciplina Análise Matemática é somente proveitosa para os alunos que pretendem lecionar no Ensino Superior ou aqueles que desejam seguir seus estudos de pós-graduação em Matemática.

Como pudemos analisar, através dos trabalhos que citamos, não existem resultados sólidos a respeito da importância da disciplina Análise Real nos

48 Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

cursos de formação de professores do ensino básico. Como já mencionamos, as pesquisas relacionadas ao ensino de análise são relativamente recentes e pequenas.

ANÁLISE DO PROJETO PEDAGÓGICO

De acordo com o Projeto Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática da UESC a disciplina Análise Matemática I faz parte do grupo das disciplinas do currículo mínimo e se enquadra no Eixo Temático 01 – Formação Básica: Saberes da Matemática e conhecimentos gerais. De acordo com o Projeto Pedagógico do curso, as disciplinas desse eixo:

> [...] devem proporcionar ao futuro professor uma formação ampla e consistente nas diversas áreas da matemática, tais como aritmética, álgebra, geometria e cálculo. A estes conhecimentos somam-se ainda as contribuições de outras ciências que historicamente mantêm um diálogo com a matemática, como é o caso da ciência da computação, da física e da estatística. Estes saberes são fundamentais para que o licenciando aprenda a lidar com elementos de saber matemático e de conhecimentos gerais construídos e aceitos como válidos através de negociação e argumentação científica[...] (PROJETO PEDAGÓGICO, 2006, p. 36)

Não há evidências claras no Projeto Pedagógico que justifiquem o fato da disciplina Análise Matemática I compor a estrutura curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UESC e nem objetivos dessa disciplina nesse curso. Entretanto, encontramos alguns indícios para tal fato que julgamos relevantes. Um desses indícios se encontra no objetivo do curso:

> O Curso de Licenciatura em Matemática visa preparar o profissional que pretende dedicar-se ao ensino de Matemática para atuar na Educação Básica, além de proporcionar essa formação, o graduando poderá continuar os seus estudos em nível de pós-graduação *lato e strictu sensu*, em Matemática, Educação Matemática ou área a fins, o que lhes permitirá atuar também no magistério superior, bem como contribuir com ações de melhoria em sua prática pedagógica no ensino fundamental e médio. (PROJETO PEDAGÓGICO, 2006, p. 31)

Como um dos objetivos secundários do curso de Licenciatura em Matemática da UESC é proporcionar ao graduando a continuidade de seus estudos em nível de pós-graduação *strictu sensu* em Matemática, entendemos que a disciplina Análise Matemática I é importante nesse curso pois, essa disciplina, nas graduações em Matemática, é a que mais fornece aos alunos um embasamento teórico para cursarem as disciplinas básicas nos cursos de pós-graduação em Matemática no Brasil, além de servir, na maioria desses programas, como disciplina de nivelamento para ingresso nos cursos de Mestrado em Matemática.

Quanto a organização da disciplina Análise Matemática I no curso de Licenciatura em Matemática da UESC, de acordo com o mapa curricular observamos que essa disciplina é ofertada regularmente no 5º semestre do curso, possui carga horária total 90 horas (6 créditos), sendo 75 horas de natureza teórica e 15 horas destinadas para prática de ensino, e que não há pré-requisitos para cursá-la.

Inicialmente, demonstramos nossa preocupação pelo fato de não haver pré-requisitos para cursar essa disciplina. É um fato, pela nossa experiência enquanto discente e docente, que é recomendável que o graduando em Matemática (licenciatura ou bacharelado) tenha cursado, independente do aproveitamento, algumas disciplinas de Cálculo e Álgebra antes de cursar uma disciplina de Análise. No próprio curso de Bacharelado em Matemática da UESC, essas disciplinas são pré-requisitos da disciplina Análise I (equivalente a disciplina Análise Matemática I da licenciatura).

Outro fato que merece destaque é o que se refere a carga horária da disciplina Análise Matemática I. Das 90 horas totais de sua carga horária, 15 horas são destinadas à prática de ensino. Observamos esse fato positivamente, pois isso mostra, teoricamente, que a disciplina Análise Matemática I atende algumas recomendações das Resoluções e Pareceres do CNE que se referem a necessidade da articulação entre teoria e prática no processo de formação inicial do professor. Entretanto, não sabemos como essa articulação é feita na prática, pois o curso de Matemática da UESC não dispõe de um Programa de Disciplina padrão para cada componente curricular. Além disso, na ementa da disciplina Análise Matemática I, como apresentaremos, não existe um tópico destinado para o professor articular os conteúdos trabalhados nessa disciplina com conteúdos do ensino básico.

Ainda a respeito da relação entre teoria e prática no ensino de análise na licenciatura, observamos no Projeto Pedagógico que as disciplinas que dão conta da articulação entre conhecimentos matemáticos e os conhecimentos pedagógicos no curso pertencem ao Eixo Temático 03 e são: Estágio Supervisionado em Matemática I, II, III e IV e Pesquisa em Ensino de Matemática I e II. Essas disciplinas estão distribuídas entre o 6º e 9º período do curso. Analisando as ementas dessas disciplinas em (PROJETO PEDAGÓGICO, 2006, p. 77-79), observamos que as disciplinas Estágio Supervisionado em Matemática I, II e IV apresentam o seguinte tópico em comum: "[...] Articulação entre os conteúdos das disciplinas dos Eixos 1, 2 e 3 (formação básica, formação para docência e prática profissional)." Como a disciplina Análise Matemática I se enquadra no Eixo 1 e ela é uma disciplina do 5º semestre, percebemos que existe a possibilidade de haver uma articulação entre os conteúdos abordados nessa disciplina com conteúdos da Matemática Básica em um desses Estágios.

Passemos agora a tratar da ementa da disciplina Análise Matemática I. No trabalho de Moreira, Cury e Vianna (2005) os autores analisam as respostas de matemáticos brasileiros a respeito de um questionário sobre ementa, referências bibliográficas e o papel da disciplina Análise Real nos cursos de formação de professores de Matemática do ensino básico. Com relação ao primeiro quesito, os entrevistados tinham que assinalar itens que eles julgassem que deveriam ser trabalhados numa disciplina de Análise Real em cursos de licenciatura em Matemática. Os itens mais assinalados foram:

Quadro 2 – Itens com maiores percentagens

Itens assinalados	**%**
Sequências e séries de números reais	93,5
Continuidade de funções reais de variável real	93,5
Derivada de funções reais de variável real	93,5
O conjunto dos números reais como corpo ordenado completo	87,1
Integral (Riemann) de funções reais de variável real	83,9

Fonte: (Moreira, Cury e Vianna, 2005, p. 16).

Aparentemente, essas respostas refletem naturalmente o que é tratado num curso inicial de Análise Real em cursos de licenciatura, com exceção do último item que não é tão comum. Não temos dúvidas que *Números Reais* é um dos conteúdos que mais contribuem na formação matemática do futuro professor, além de ser o principal alicerce na Análise Matemática. Porém a abordagem como esse conteúdo é trabalhado divide opiniões entre professores e pesquisadores dos cursos superiores de Matemática. Há quem prefira apresentar os Números Reais como sendo um corpo ordenado completo mediante Axiomas, dando um salto na passagem dos números racionais para os números reais. Outros, porém, preferem construir o conjunto dos Números Reais a partir do conjunto dos Números Naturais, explicando detalhadamente cada etapa dessa construção.

Com relação a ementa da disciplina Análise Matemática I no curso de Licenciatura em Matemática da UESC, essa é composta pelos seguintes conteúdos:

Quadro 3 – Ementa da disciplina Análise Matemática I

Conteúdos	Conjuntos finitos e infinitos Números reais Sequências e séries numéricas Limite e continuidade de funções Derivadas

Fonte: (Projeto Pedagógico, 2006, p. 59).

Como observamos, a ementa da disciplina Análise Matemática I pouco difere da ementa sugerida pelos matemáticos entrevistados por Moreira, Cury e Vianna (2005). Acreditamos que, ao inserir o conteúdo *Noções de Topologia da Reta,* ou um equivalente, na ementa do Quadro 3, essa tornaria aceitável num curso de licenciatura em Matemática, pois além de contemplar conteúdos matemáticos do ensino básico esta aproximaria o licenciando de disciplinas básicas estudadas em cursos de pós-graduação em Matemática. A única ressalva que fazemos é novamente acerca dos *Números Reais*. Nesse tópico deveria estar explícito a abordagem a ser trabalhada, dando ênfase às necessidades do futuro professor em sua prática docente, com menos rigor e abstração.

A formação do professor de Análise é uma das questões críticas levantadas por Otero-Garcia (2011a) acerca do ensino de análise nos cursos de formação de professores de Matemática. De fato, a maioria dos professores que ministram essa disciplina nos cursos de Matemática são mestres ou doutores em Matemática Pura ou Aplicada. No caso particular da UESC, temos o panorama:

Quadro 4 – Perfil dos docentes que ministraram a disciplina Análise Matemática I no curso de Licenciatura em Matemática da UESC no período 2006-2013

	GRADUAÇÃO	MESTRADO	DOUTORADO
DOCENTE 1	Bacharelado em Matemática	Matemática	Não possui
DOCENTE 2	Bacharelado em Matemática	Matemática	Não possui
DOCENTE 3	Bacharelado em Matemática	Matemática	Não possui
DOCENTE 4	Licenciatura em Matemática	Matemática	Matemática Aplicada
DOCENTE 5	Licenciatura em Matemática	Matemática	Não possui
DOCENTE 6	Bacharelado em Matemática	Matemática	Matemática
DOCENTE 7	Licenciatura em Matemática	Matemática	Matemática
DOCENTE 8	Bacharelado em Matemática	Matemática	Não possui

Fonte: Colegiado do curso de Matemática da UESC.

Como mostra o Quadro 4, dentre os professores que ministraram a disciplina Análise Matemática I nos últimos anos, 37,5% são licenciados em Matemática enquanto que 62,5% são bacharéis em Matemática. O Quadro 4 ainda mostra que todos os professores são mestres em Matemática e que, dentre os doutores, prevalecem os que se doutoraram em Matemática. Entretanto, como um professor com esse perfil, que teoricamente desconhece de conteúdos pedagógicos, pode ministrar disciplinas em cursos de formação de professores?

Nesse contexto, reforçando nosso questionamento, Vasconcelos (1996, p.1) citado por Reis (2001, p. 81) indaga:

> A grande questão está em determinarmos até que ponto (e até quando) se pode permitir que o "professor" universitário, aquele sem qualquer formação pedagógica, aprenda a ministrar aulas por ensaio e erro, desconsiderando o caráter nobre do sujeito com o qual trabalha: o aluno. Além de desconsiderar também que ministrar aulas envolve o domínio de técnicas específicas e um tipo de competência profissional, a pedagógica, que deve ser

> aprendida e desenvolvida como qualquer outra competência e não simplesmente ser considerada como um dom.

Colaborando com essa discussão, a respeito da formação do professor de Matemática nos cursos superiores, em especial na licenciatura, ao refletir por outros caminhos Otero-Garcia questiona:

> [...] se o doutor em matemática, ou num sentido mais geral, o professor universitário que não teve formação pedagógica, não teria condições plenas de ministrar uma disciplina de matemática para um curso de graduação ou, em particular, para um curso de licenciatura em matemática, quem teria? Um educador matemático? (OTERO-GARCIA, 2011a, p. 124)

Essa questão se intensifica ainda mais quando percebemos que os professores das disciplinas específicas também exercem um papel na formação do futuro professor. Segundo Fiorentini (2005, p. 110), boa parte dos professores que ministram disciplinas específicas nos cursos de Matemática acreditam que ensinam apenas conceitos e procedimentos matemáticos, eles "[...] não percebem que, além da Matemática, ensinam também um jeito de ser pessoa e professor, isto é, um modo de conceber e estabelecer relação com o mundo e com a Matemática e seu ensino [...]".

Lins (2005) corrobora com Fiorentini, ao dizer que

> Por mais que se afirme que um curso de Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, é apenas um curso de conteúdo matemático, não se pode negar que este curso oferece para os alunos – como acontece em qualquer outro curso – um certo modelo de aula, um modelo de como ensinar Matemática – incluindo-se aí as razões para se ensinar Matemática (a um professor). (LINS, 2005, p. 118)

A bem (ou mal) da verdade é que muitos desses professores – principalmente os que ensinam disciplinas específicas – ainda possuem um pensamento dicotomizado acerca do ensino e do papel das disciplinas específicas e didático-pedagógicas nos cursos de formação de professores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As pesquisas sobre o ensino de Análise nos cursos de formação de professores do ensino básico são relativamente recentes, segundo Otero-Garcia (2011a) começaram essencialmente no início da década de 2000. Além disso, ainda é pequena a quantidade de trabalhos publicados sobre esse tema, bem como é pequena a participação de pesquisadores envolvidos nessa problemática. Dos estudos que analisamos, podemos afirmar que ainda não existe uma convergência de resultados consistentes sobre o papel da disciplina Análise nos cursos de formação de professores de Matemática.

Com respeito a análise do Projeto Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática da UESC pudemos constatar que, mesmo implícito, existem evidências que justifiquem a composição da disciplina Análise Matemática I nesse curso e que essa disciplina contribui com alguns objetivos secundários desse curso. Constatamos ainda que em sua carga horária total está prevista uma carga horária dedicada à prática de ensino. Isso sem dúvida é um fato bastante relevante, pois permite ao graduando o exercício da articulação entre os conhecimentos matemáticos estudados na disciplina com a sua futura prática docente na escola. Aliado a isso, as disciplinas de Estágio Supervisionado em Matemática I, II e IV também permitem esse exercício de articulação no processo de formação de professores. A questão que levantamos é: como essa articulação vem sendo realizada, caso seja de fato realizada? Pretendemos futuramente trabalhar com esse questionamento no âmbito da UESC.

Outra questão que levantamos é o fato da disciplina Análise Matemática I não exigir pré-requisitos em sua matriz curricular. Essa questão, entretanto, acreditamos não oferecer grandes dificuldades para ser resolvida. Com respeito a ementa da disciplina Análise Matemática I, constatamos que essa preenche algumas lacunas presentes na formação matemática do futuro professor e ainda contribui para o prosseguimento de estudos dos licenciados em Matemática em nível de pós-graduação. Por fim, ressaltamos que a formação dos professores que ensinam a disciplina Análise nos cursos de licenciatura em Matemática é uma questão de grande importância a ser investigada e que boa parte dos problemas relacionados ao ensino de Análise podem ser resolvidos se esses professores forem mais inteirados e comprometidos com aspectos relacionados ao exercício docente nos diversos níveis de ensino.

REFERÊNCIAS

AMORIM, L. I. F.. **A (re) construção do conceito de limite do cálculo para análise**: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática. 2011. 134f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UFOP, Ouro Preto, 2011.

ÁVILA, G.. **Cálculo das Funções de uma Variável**. Rio de Janeiro: LTC Editora S. A., 2002.

BARONI, R. L. S e OTERO-GARCIA, S. C.. Uma constatação e várias questões sóbre o ensino de análise. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM, 2011, Recife. **Anais**...Recife, 2011.

BATARCE, M. S.. **Um Contexto Histórico para Análise Matemática para uma Educação Matemática**. 2003. 52f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UNESP, Rio Claro, 2003.

BOLOGNEZI, R. A. L.. **A Disciplina de Análise Matemática na Formação de Professores de Matemática para o Ensino Médio.** 2006. 109 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

BRASIL. **Conselho Nacional de Educação.** Parecer CNE/CES 1.302/2001, de 6 de novembro de 2001. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Brasília: CNE, 2001.

______. **Conselho Nacional de Educação**. Resolução CNE/CP 01/2002, de 18 de fevereiro de 2002. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. Brasília: CNE, 2002.

______. **Conselho Nacional de Educação**. Resolução CNE/CP 02/2002, de 18 de fevereiro de 2002. Institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior. Brasília: CNE, 2002.

BRASIL**. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei número 9394, 20 de dezembro de 1996.

CIANI, A. B.; RIBEIRO, D. M.; JÚNIOR, M. A. G. Formação de Professores de Matemática: um Ponto de Vista de Egressos. In: **Anais do IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática, Caixias do Sul**: Universidade de Caixias do Sul, 2006.

FIORENTINI, D.. A Formação Matemática e Didático-Pedagógica nas Disciplinas da Licenciatura em Matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, Campinas, n. 18, p. 107-115, 2005.

LIMA, E. B.; DIAS, A. L. M.. A Análise Matemática no Ensino Universitário Brasileiro: a Contribuição de Omar Catunda. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 23, n. 35, p. 453-476, abr. 2010.

LINS, R. C.. A formação pedagógica em disciplinas de conteúdo matemático nas licenciaturas em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, Campinas, n. 18, p. 117-123, jun. 2005.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A.. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

MARTINES, P. T.. **O papel da disciplina de análise segundo professores e coordenadores**. 2012. 118 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro, 2012.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S.. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetiké**, Campinas, v. 11, n. 19, p. 57-80, 2003.

______. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. **Revista brasileira de educação**. Rio de Janeiro, n. 28, p. 50-62, 2005a.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que Análise Real na Licenciatura? **Zetetiké**, Campinas, n. 23, p.11-42, 2005.

OTERO-GARCIA, S. C.. **Uma Trajetória da Disciplina de Análise e um Estado do Conhecimento sobre seu Ensino**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro, 2011a.

______. Questões críticas em ensino de análise matemática. In: X Congresso Nacional de Educação. Paraná, 2011. **Anais**...Paraná, 2011b.

PROJETO ACADÊMICO CURRICULAR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA da Universidade Estadual de Santa Cruz. Disponível em: http://www.uesc.br/cursos/graduacao/licenciatura/matematica/projeto_academico_curricular.pdf

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise**: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos. 2001. 302f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, UNICAMP, Campinas, 2001.

SANTOS, D. M. F.; MORELATTI, M. R. M.. A Álgebra no Projeto Pedagógico de um Curso de Licenciatura em Matemática: Implicações Pedagógicas. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2013, Curitiba. **Anais**...Curitiba, 2013.

VASCONCELOS, M. L. M. C. **A Formação do Professor de Terceiro Grau**. São Paulo: Pioneira, 1996.

PADRÕES NUMÉRICOS NA TABUADA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA

Anderson Alves[49]
Karina de Oliveira Castro[50]

INTRODUÇÃO

É consenso entre os professores de matemática que os alunos, de forma geral, apresentam dificuldades ao lidar com a Álgebra (estudo efetivo de notações simbólicas com linguagem própria), e associam tais dificuldades ao complexo grau de abstração desse novo domínio de conhecimento em relação aos estudos anteriores (a Aritmética).

Com a implementação do novo currículo brasileiro, norteado pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018), surge a partir de então, a inserção da Álgebra desde o início da escolaridade, com alunos de 6 a 12 anos de idade, tendo por objetivo minimizar o processo de transição entre os dois domínios, por considerar nessa perspectiva de que a partir da aritmética, temos um estudo exploratório do Pensamento Algébrico, e por consequência a Álgebra formal nos anos subsequentes.

Esse modelo de algebrização do currículo emerge a partir do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), que são pesquisas que se nutrem da proposta de "Early Algebra", no qual é referência na literatura, e instrumento norteador para os currículos de diversos países, como Portugal, no qual o documento brasileiro, BNCC (2018), faz consideráveis aproximações, em particular ao trabalho desenvolvido por Ponte, Matos e Branco (2009).

Nesse sentido, julgamos que tal mudança provocará transformações significativas no pensamento algébrico dos estudantes e, ainda, exigirá do professor maior capacidade de análise dessa unidade temática, uma das cinco propostas pelo novo currículo (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Pro-

---

[49] Mestre em Educação Matemática (UNIAN/SP). Professor da rede municipal de Educação (Itanhaém-SP). CV: http://lattes.cnpq.br/3866692012067646

[50] Doutoranda Educação Matemática (UNIAN/SP). Professora da rede municipal de Educação (Cataguases-MG). CV: http://lattes.cnpq.br/9634238955220127

babilidade e Estatística). De fato, pede a BNCC que cada uma dessas unidades receba ênfase diferente em todos os anos de escolarização.

Esse tema_ Álgebra_ acompanha nossa trajetória acadêmica há algum tempo, ressaltando inclusive, que tivemos em oportunidades anteriores a publicação de um trabalho sobre o pensamento e o raciocínio algébrico empregado por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental no estudo de Funções (idade entre 11 e 12 anos). Os dados indicaram que, naquela época, em 2011, os alunos demonstraram estar em estágio intuitivo no trato com leis matemáticas, o que os impediu de dar um tratamento simbólico a elas CASTRO e RODRIGUES, 2011). É nosso interesse, portanto, verificar de que forma as novas habilidades propostas pela BNCC terão impacto no universo da sala de aula. Assim surgiu a motivação do trabalho que ora apresentamos.

O texto da BNCC cita como ideias fundamentais que compõem a Matemática: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. No tocante ao universo da Álgebra, julgamos que lidar com a generalização é preponderante e favorece o desenvolvimento da noção de variação.

Sobre as variáveis, é conveniente analisar o que diz Caraça (2010). Para o autor, no desenvolvimento da ideia de Função, foi preciso criar um instrumento matemático que fosse suficiente para estudar as variações de quantidade descritas nas leis quantitativas. Para isso, ele aponta como tais leis podem ser traduzidas, e pela forma como as grandezas se correspondem. O autor cita o exemplo da queda de corpos no vácuo, e apresenta uma tabela que, segundo sua concepção, dá apenas uma ideia da referida lei (Tabela 1).

Tabela 1 - Valores para a lei da queda de corpos no vácuo

Tempos (em segundos)	0	1	2	3	4	5
Espaços (em metros)	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5

Fonte: CARAÇA, 2010, p. 118.

Caraça (2010) mostra-nos, na Tabela 1, dois conjuntos postos em correspondência. Assim, a lei da queda dos corpos no vácuo está em correspondência entre o conjunto tempo e o conjunto espaço. O instrumento matemático apropriado ao estudo das leis quantitativas deve conter, essencialmente, a correspondência entre dois conjuntos. A ideia de variável aparece, então, como artifício para o aperfeiçoamento da formalização do conceito. Assim, foi necessária a criação de uma representação simbólica para os conjuntos que serão correspondidos, do contrário "[...] *teríamos sempre que estar presos a tabelas de resultados particulares e não obteríamos a generalidade conveniente.*" (CARAÇA, 2010, p. 119).

Com este exemplo, queremos mostrar, de maneira contundente, todo o poder contido no trato simbólico das leis matemáticas e a urgência no trabalho com suas ideias. Aqui inserimos a noção de generalização como instrumento basilar capaz de desenvolver a ideia de variável, fundamental na Matemática, como dito anteriormente. É, portanto, a ideia de generalização que receberá nossa atenção daqui por diante.

Definimos a problemática nesse contexto como sendo a investigação sobre a forma com que os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental utilizam a ideia de generalização, se intervenções didáticas podem facilitar a construção deste novo modo de pensar e, em caso positivo, quais são elas.

Para isso, consideramos as seguintes questões: 1) Qual a relação entre a ideia de generalização e o conteúdo matemático que está sendo trabalhado? 2) Como associar o processo de generalização em Álgebra elementar considerando a passagem da Aritmética para a Álgebra?

Para tratar dessas questões, o objetivo da pesquisa constitui-se em investigar as possíveis intervenções didáticas que podem ser realizadas no Ensino Fundamental - anos iniciais (alunos de 6 a 10 anos).

DESENVOLVIMENTO

Considerando que a nova proposta curricular representa uma relação institucional no sentido de Chevallard (2015), escolhemos como referencial teórico da pesquisa a Teoria Antropológica do Didático (TAD), em particular as noções de relação institucional, relação pessoal, praxeologia, segundo Chevallard (2002) e ostensivos e não ostensivos conforme Chevallard (1994).

A respeito da TAD, Chevallard desenvolveu sua teoria destacando as relações entre os objetos, o indivíduo e as instituições, nesse contexto o autor representa cada ente por uma letra, sendo: objeto (o), indivíduo (x) e instituição

(*I*). A primeira noção fundamental é a de objeto (*o*), onde Chevallard considera que toda entidade tanto material quanto imaterial, simples ou complexa, minúsculo ou imenso, são entendidas como objetos. Portanto, uma obra de Machado de Assis, uma sequência dos números pares, um livro didático, assim como uma pessoa, logo, Tony Ramos também é um objeto.

A segunda noção fundamental considerada pelo autor é a de relação pessoal. Partindo da premissa de que quando um indivíduo (*x)* conhece um objeto (*o*), então, esse indivíduo (*x*) tem relação pessoal com esse objeto (*o*), ou seja, se Carlos é capaz de perceber o padrão da sequência dos números pares, logo, o indivíduo (Carlos) tem relação pessoal com o objeto matemático sequência dos números pares.

Nesse sentido, se fossemos capazes de ter acesso a tudo que um indivíduo conhece, acessando assim o seu universo cognitivo, teríamos em pauta, portanto, o conjunto de todos os objetos com os quais esse indivíduo interage, se relaciona, pensa, sonha e fala sobre esses objetos. Levando em consideração portanto, que a ideia de objeto para o autor transcende os domínios intelectuais, quando se entende, que um indivíduo qualquer pode ter relação pessoal com um instrumento musical, esporte de luta, diferentes culturas etc.

A ideia de Instituição (*I*), apresentada pelo autor também como noção fundamental dessa teoria, justifica sua importância, ao considerarmos que um objeto qualquer apenas sobrevive porque um instituição o reconhece como necessário e, portanto, fala-se, discute-se e aprende-se sobre esse objeto, nessa tal instituição, na qual, evidentemente o indivíduo (*x*) e objeto (*o*) se relacionam, *R(x, o)*. Segundo o teórico, numa instituição (*I*) há pelo menos um indivíduo e um conjunto de objetos, a relação desse indivíduo com essa instituição e um conjunto de objetos na qual sobrevive nessa instituição é a raiz da relação institucional (Chevallard, 2002).

Bosch e Chevallard (1999) desenvolvem a noção de praxeologia mostrando que essa é a maneira de fazer com que tarefas (T) sejam executadas, sendo essa maneira denominada de técnica (τ) pelos referidos autores. O saber fazer associa tarefa e técnica, de forma que há a necessidade da presença de um ambiente tecnológico-teórico. Chevallard, portanto, chama de praxeologia o sistema formado por tarefa, técnica, tecnologia e teoria. A tecnologia (θ) faz com que a técnica seja compreensível e a teoria (Θ) embasa e esclarece a tecnologia.

Outro referencial que adotamos diz respeito ao conceito de ostensivo e não ostensivo, também apresentado por Chevallard (2002). O autor nos mostra que há objetos que assumem uma forma material, que podem ser manipulados não só pelo sentido tátil estrito, como uma régua, por exemplo, mas também por sentido mais amplo, como por gestos, pelo olhar. Dessa forma, uma caneta, um gesto descritivo, palavras, desenhos, são classificados pelo autor como ostensivos. Em contrapartida, ideias, conceitos, só podem ser evocados pela manipulação dos ostensivos associados. Temos aí os objetos não ostensivos, segundo a definição do autor.

Assim, podemos inferir que os objetos matemáticos são, em essência, classificados como não ostensivos, os quais só podem ser acessados pela utilização dos ostensivos associados. Então, as ideias fundamentais que compõem a Matemática, e que foram citadas na introdução desse trabalho, carecem de sua manipulação na forma de definições, representações em forma de desenho, gráfico, tabelas etc.

Bosch e Chevallard (1999) afirmam que não existem ostensivos sem não ostensivos, ainda que os primeiros possam ser diretamente acessíveis aos sentidos. Segundo eles, nossa relação com os objetos ostensivos são o resultado de uma aprendizagem, uma construção institucional. Há, portanto, a existência de uma dialética entre esses objetos já que a manipulação dos ostensivos é feita por meio dos não ostensivos e, em contrapartida, estes últimos são evocados com a ajuda dos primeiros.

Em harmonia com o objetivo e o referencial teórico escolhido, a metodologia da pesquisa é qualitativa, utilizando os métodos da pesquisa documental, de acordo com Lüdke e André (2013). Este método consiste na análise de documentos contemporâneos e/ou retrospectivos considerados cientificamente autênticos e do estudo de caso. Conforme essas autoras, no estudo de caso os pesquisadores partem de pressupostos teóricos iniciais e estão constantemente atentos a novos elementos que possam surgir para discutir a problemática em foco.

Assim, o documento analisado neste trabalho foi a BNCC e suas indicações para a introdução à Álgebra no Ensino Fundamental - anos iniciais. Isto nos auxiliou a construir um instrumento diagnóstico para os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental - anos finais, objeto do estudo deste capítulo.

A respeito deste documento oficial, sua análise nos permitiu identificar que, em primeiro lugar, houve ampliação no número de unidades temáticas: de quatro para cinco, além de uma diversificação. As unidades anteriores eram: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Já os temas atuais são: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.

Notamos, com clareza, que o tema Álgebra aparece como temática única, o que não ocorria antes. Probabilidade também surge designado como tema principal, no lugar de Tratamento da Informação. Álgebra, Probabilidade e Estatística eram trabalhadas implicitamente nos outros temas por meio da articulação dos conceitos e noções relacionados aos outros quatro temas. Cabe destacar que, anteriormente, tais ideias podem não ter sido tratadas nessa articulação.

Ainda em relação à BNCC, nos anos iniciais, foi possível observar que os objetos de conhecimento indicados podem ser considerados como tipos de tarefas gerais para as quais podemos construir tarefas específicas, considerando os conhecimentos prévios dos alunos, ou seja, em função dos ostensivos e não ostensivos em jogo nessas tarefas.

Para exemplificar, citamos a seguir o objeto de conhecimento considerado como tipo de tarefa geral pela BNCC nos anos iniciais:

1) Identificar padrões figurais e numéricos.

2) Descrever regras utilizadas em sequências recursivas.

Esses dois objetivos possibilitam construir diversas tarefas, mas julgamos ser preciso não perder de vista que esses alunos estão em processo de alfabetização, logo, o enunciado pode ser feito por meio dos ostensivos figural e numérico. É necessário levar em conta, ainda, que, se quisermos atingir toda a classe, as respostas podem ser dadas apenas utilizando o ostensivo oral, em particular quando consideramos as sequências numéricas. Certamente alguns alunos mais avançados poderão já dominar a escrita dos números.

Metodologicamente, nessa perspectiva, aplicamos um teste diagnóstico em um grupo de 20 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental - anos finais, exatamente na fase de transição entre os anos iniciais e finais. Este teste, concebido pela segunda autora deste capítulo e professora da turma, continha dois tipos de tarefas que consistiam em: 1) "Encontrar o padrão numérico das tabuadas do 2, 3, 4 e 5". 2) Encontrar uma relação entre duas grandezas".

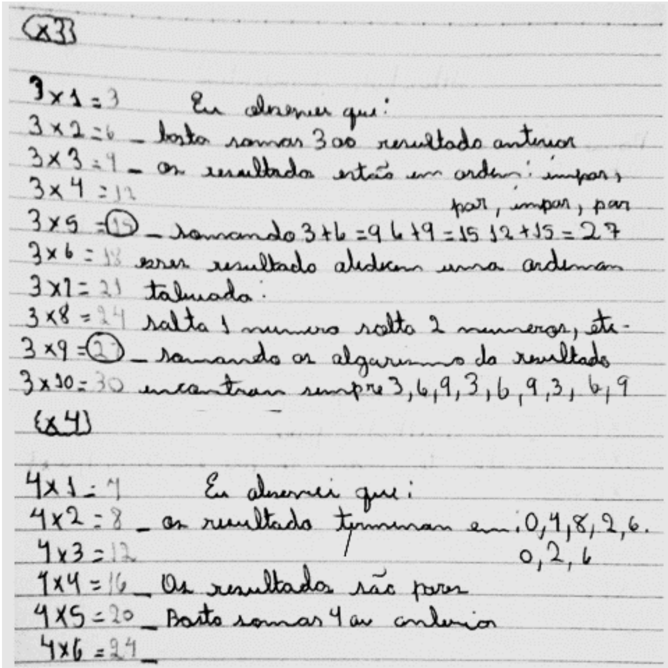
Para essa faixa etária, julgamos que trabalhar com a generalização por meio de regularidades presentes na Aritmética poderiam nos dar pistas sobre o raciocínio dos estudantes. Portanto, ocorreu-nos a hipótese de que a análise dos padrões numéricos presentes na tabuada poderia facilitar o encadeamento de ideias de generalização por parte da turma. Com efeito, a relação pessoal que os alunos desse nível mantêm com as tabelas favorece a manipulação dos ostensivos e não ostensivos que se pretende verificar.

A tarefa relacionada à tabuada foi: Construa as tabuadas do 2, 3, 4 e 5 e encontre o padrão numérico. A técnica esperada era a da observação das regularidades existentes em cada caso, utilizando a multiplicação e a soma de parcelas iguais. A tecnologia corresponde à operação de multiplicação e adição de parcelas iguais. A teoria está associada às operações de multiplicação e adição de números naturais e suas propriedades. Ver Figuras 1.

A tarefa que tratou a relação entre duas grandezas foi:

O problema das camisas penduradas: indique o número de pregadores necessários para pendurar o número de camisas pedida. A técnica esperada era a da observação das regularidades existentes em cada caso, utilizando o desenho como forma de generalização. A tecnologia são as leis matemáticas. A teoria está associada à generalização. Ver Figura 2.

Figura 1. Protocolo de uma resposta da primeira tarefa

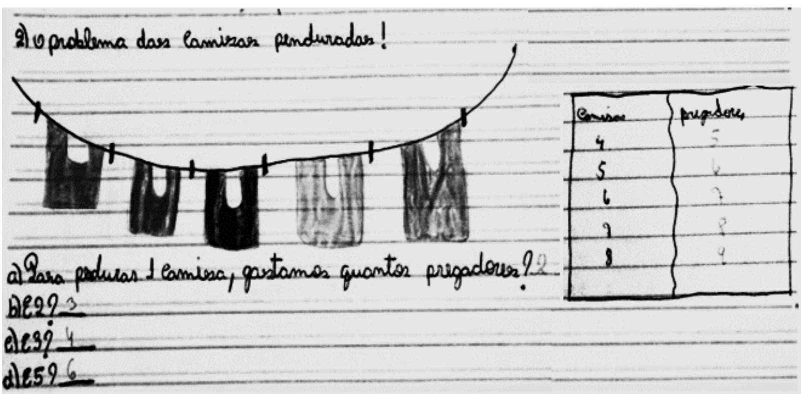

(x3)

3x1=3 Eu observei que:
3x2=6 _ basta somar 3 ao resultado anterior
3x3=9 _ os resultados estão em ordem: impar, par, impar, par
3x4=12
3x5=15 _ somando 3+6=9 6+9=15 12+15=27
3x6=18 esses resultados obedecem uma ordem na tabuada:
3x7=21
3x8=24 salta 1 numero salta 2 numeros, etc.
3x9=27 _ somando os algarismos do resultado
3x10=30 encontram sempre 3,6,9,3,6,9,3,6,9

(x4)

4x1=4 Eu observei que:
4x2=8 _ os resultados terminam em: 0,4,8,2,6. 0,2,6
4x3=12
4x4=16 _ Os resultados são pares
4x5=20 _ Basta somar 4 ao anterior
4x6=24 _

Figura 2. Protocolo de uma resposta da segunda tarefa



CONSIDERAÇÕES

Levando em conta a nova proposta da BNCC, portanto um documento de âmbito nacional, a Álgebra merece destaque em forma de uma temática tida como prioritária ao lado de outras quatro. É a primeira vez que tal fato ocorre no país, daí imaginarmos as implicações que essa proposta terá no currículo e seus desdobramentos como, por exemplo, nos livros didáticos, na metodologia dos professores e, principalmente, nos anos iniciais já que, aí sim, teremos algo inédito.

Por isso, julgamos positivo o trabalho com padrões numéricos e a investigação a respeito do pensamento algébrico dos estudantes nesta faixa etária, uma vez que até o 5º ano eles não tiveram contato com essas ideias, a julgar pela proposta curricular em voga até então. Queremos defender a aplicação de atividades até então corriqueiras para os alunos, como a construção de tabuadas _ *relação pessoal* _ mas que tenham embutidas novos objetivos e recebam tratamento diferenciado pelo professor.

Ao propor a construção da tabuada, a turma recebeu a tarefa com tranquilidade, julgando-a bem simples. À medida que a professora fazia os questionamentos e os levava a descobrir padrões nos resultados, os alunos ficaram bastante interessados. É preciso esclarecer que o uso do *ostensivo oral* verificou-se mais adequado a esta turma, embora alguns alunos generalizassem de forma escrita.

Os resultados encontrados mostram que os alunos do 6º ano foram capazes de identificar implicitamente que, na tabuada, a multiplicação corresponde a uma soma de parcelas iguais, que os resultados para a tabuada do dois são sempre números pares; para a tabuada do cinco, os alunos verificaram que os resultados terminam em 0 e 5. Outros padrões ligados aos algarismos finais dos resultados também foram mencionados.

Para a segunda tarefa, que pedia uma generalização com relação ao número de pregadores e o número de camisas, a turma também se mostrou bastante receptiva às novas ideias. Mais uma vez o trabalho com o *ostensivo oral* foi bastante rico e significativo, demonstrando que os alunos dessa faixa etária têm muito a contribuir se forem instigados de maneira conveniente e com tarefas que levem em consideração a *relação pessoal* do indivíduo com o objeto (Chevallard, 2002).

Neste capítulo buscamos investigar as possíveis relações entre a ideia de generalização e o conteúdo trabalhado, neste caso, a tabuada de multiplicação. Além disso, procuramos analisar a passagem da Aritmética para a Álgebra. Nosso objetivo em sentido geral é investigar determinadas intervenções didáticas que possam ser realizadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Portanto, julgamos conveniente aplicar uma atividade em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, uma vez que estes alunos findaram no ano anterior o primeiro ciclo desta fase e ingressam agora nos anos finais. Procuramos pesquisar se atividade aplicada seria adequada a nossos objetivos.

Para isso, levamos em conta um tipo de tarefa geral indicada na BNCC. A Base Nacional Curricular Comum é um documento oficial implementado desde 2018 no Brasil e traz a orientação do trabalho com a Álgebra desde o primeiro ano do Ensino Fundamental (6-7 anos de idade), fato inédito na educação do país e que parece seguir os mesmos moldes de Portugal, conforme já afirmamos anteriormente.

Os resultados da pesquisa _ analisados segundo a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e seus elementos, concebidos por Chevallard, mostram que os alunos foram capazes de encontrar um padrão para uma sequência numérica formada por múltiplos de um número natural. Podemos também considerar que esses mesmos alunos já dispõem de elementos associados ao pensamento algébrico, o que precisa ser incentivado e trabalhado mais especificamente. Importa considerar, também, que os *ostensivos* usados foram as tabuadas, desenhos e tabelas. Além do mais, o trabalho com a oralidade mostrou-se muito eficaz, dando pistas dos rudimentos do pensamento aritmético e algébrico dos alunos.

De fato, podemos inferir que já nas anos iniciais é produtiva a aplicação de tarefas que busquem a introdução do raciocínio algébrico dos estudantes, levando-nos a defender este tipo de metodologia. Como vimos na introdução deste capítulo, a ideia de variável é basilar na matemática e precisa ser levada em consideração desde as séries iniciais uma vez que seu desenvolvimento é gradual e complexo, passando pelas noções de generalização.

Concluímos, portanto, que:

- A tarefa com padrões numéricos utilizando as tabuadas de multiplicação favoreceu o trabalho com a ideia de generalização.
- A utilização da tabuada beneficiou a relação pessoal do estudante com o objeto estudado.
- O uso dos ostensivos seguintes foi muito apropriado à turma: tabuada, desenhos, tabelas.

- O ostensivo oral permitiu a participação de todos os estudantes.

Conjecturamos que, para alunos mais jovens, esta atividade pode ser adaptada. O teste diagnóstico indica, ainda, que para esse grupo de alunos já se pode introduzir a linguagem algébrica distinguindo variável e incógnita. Certamente, para isso é necessário um trabalho específico e exaustivo, tendo em vista a entrada de novos ostensivos, ou seja, as letras.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. BNCC, 2018.

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. (1999). **La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs objet d'estude et problematiqe. Recherches en didactique des mathématiques**. Vol. 19, no 1, p. 77-124.

CARAÇA, B. J. Conceitos fundamentais da Matemática. Lisboa: Gradiva, 2010.

CASTRO, K. O., RODRIGUES, C. K. O pensamento e o raciocínio algébrico no estudo de Função na Educação Básica. In: XIII CIAEM, Recife, Brasil, 2011.

CHEVALLARD, Y. **Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique**,1994. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125. Acesso em: 20 abr. 2021.

CHEVALLARD,Y. **Organiser l'étude .**Structures & Functions. 2002. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_1.pdf. Acesso em: 20 abr. 2021.

CHEVALLARD, Y. **Pour une approche anthropologique du rapport au savoir.**2015. Dialogue 155 – Réussir, du collège au lycée : quelle approche des savoirs ? Acesso em: 20 abr. 2021.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2013. São Paulo: EPU.

NCTM/National Council of Teachers of Mathematics .2000. **Principles and standards for school mathematics: An overview.** Reston, VA: Author.

PONTE, J. P., MATOS, A., & BRANCO, N. (2009). Álgebra no ensino Básico. 2009.

SOBRE O ORGANIZADOR

Jorge Henrique Gualandi

Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Carangola/ Universidade do Estado de Minas Gerais – FAFILE/UEMG. Especialista em Matemática e Estatística pela Universidade Federal de Lavras - UFLA e em Metodologia do Ensino da Matemática, pela AVM-Faculdades Integradas do Rio de Janeiro - RJ, Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC-MG e doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP. Atualmente é professor do Ifes - Instituto Federal do Espírito Santo - Campus Cachoeiro de Itapemirim. Professor credenciado do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores da Universidade Federal do Espírito Santo - UFES - Campus de Alegre. Membro do grupo de pesquisa GPEA- Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica - PUC/SP, membro do grupo de pesquisa GEPEM-ES - Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática do Espírito Santo e líder do grupo de pesquisa GPEMES - Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática do Espírito Santo. Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em Fundamentos de Matemática e Ensino de Álgebra. Possuindo experiência em Formação Inicial e Continuada para Professores que Ensinam Matemática.

CV: http://lattes.cnpq.br/3386420572368441

ÍNDICE REMISSIVO

Este livro foi composto pela Editora Bagai.

www.editorabagai.com.br /editorabagai

/editorabagai contato@editorabagai.com.br