

MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Vetores e Geometria Analítica

Marcelo Henriques de Carvalho

Campo Grande, MS - 2009



MATEMÁTICA

LICENCIATURA



Disciplina

VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA

Módulo 1
VETORES

Módulo 2
GEOMETRIA ANALÍTICA

Marcelo Henriques de Carvalho

Campo Grande, MS - 2009



Este trabalho está licenciado com uma Licença Creative Commons - Atribuição-Compartilha Igual 4.0 Internacional.

INFORMAÇÕES SOBRE O MATERIAL

PREZADO ALUNO,

Você está de posse de um material auto-suficiente. Este livro foi concebido para que você adquira os fundamentos necessários do cálculo vetorial, da geometria analítica e da álgebra linear para os seus estudos posteriores, relativos à sua formação. O livro foi planejado para que você tenha uma formação de base sólida. Aconselhamos estudá-lo utilizando dois tipos de leitura: uma superficial ou de reconhecimento e outra profunda ou detalhada. A leitura superficial deverá ser a da leitura de cada capítulo, parágrafo, teorema, etc., todo de uma vez e sem a preocupação de uma compreensão detalhada, mas apenas com o objetivo de que você tenha uma visão do conjunto das ideias em questão.

Aconselhamos que você faça esta forma de leitura pelo menos duas vezes, em cada unidade. Tendo então obtido a ideia geral da unidade na qual está trabalhando, você deverá fazer leitura profunda ou detalhada, que é o estudo detalhado de cada aspecto do texto analisado, feito com calma e rigor, e só deverá finalizá-la quando a unidade analisada estiver totalmente compreendida, em seus mínimos detalhes. Para esta abordagem você deverá estar munido de uma lápis, borracha e papel. Experimente reproduzir o conteúdo da unidade, em detalhes, mas não de forma decorada e sim como resultado de seu aprendizado. Faça isso e você não se arrependerá do trabalho realizado. Acreditamos que sob a orientação dessas duas abordagens seu aprendizado ocorrerá de forma maximizada.

O livro é composto de dois módulos:

Módulo 1 – Vetores

Módulo 2 – Geometria Analítica

Em cada capítulo, cada seção é organizada em forma de definições, lemas, proposições, teoremas e corolários, muitos deles com demonstrações com certo nível de rigor. No entanto, devido aos objetivos programáticos dessa disciplina, algumas demonstrações foram omitidas, sem prejuízos ao seu aprendizado. O leitor mais ousado pode consultar a bibliografia recomendada, para entender

Sobre o Autor

Marcelo Henriques de Carvalho possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (1984), mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade de São Paulo (1988) e doutorado em Ciência da Computação pela Universidade Estadual de Campinas (1996). Pós-Doutorado pela University of Waterloo, Canadá (2004). Atualmente é professor da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Tem experiência na área de Ciência da Computação, com ênfase em Teoria dos Grafos e Algoritmos.

essas demonstrações, mas isso não é uma exigência para esse momento.

Este texto possui muitos exercícios resolvidos, de forma comentada, sobre os diferentes conteúdos abordados. A finalidade deles é apresentar um método de resolução, das diferentes questões que são propostas. Isso não impede que você desenvolva outras modalidades de resoluções. O importante é que o seu método seja logicamente consistente. Os exercícios propostos estão apresentados no final de cada seção (e não apenas no final de cada capítulo) com o intuito de facilitar ao leitor o emprego dos resultados e técnicas necessárias para resolvê-los.

Ao final, apresentaremos algumas referências como leitura alternativa, complementar e até suplementar, dos conteúdos em questão, onde você poderá encontrar outras visões sobre os mesmos assuntos tratados neste texto e, em muitos deles, você encontrará aplicações dos tópicos estudados. O contato com esses assuntos ajudará a ter uma idéia de como a Matemática evoluiu para estruturas mais complexas.

Desejamos a vocês sucesso em seus estudos.

Marcelo Henriques de Carvalho

PREFÁCIO

Geometria Analítica é o estudo da geometria pelo método cartesiano (René Descartes, 1596 – 1650), que consiste em associar equações aos entes geométricos (reta, plano, etc.), e através do estudo dessas equações, tirar conclusões (com auxílio da álgebra) a respeito destes entes geométricos.

Do ponto de vista da Geometria Analítica, conhecer ou determinar uma reta ou um plano, significa conhecer ou determinar sua equação. A Geometria Analítica encontra na Álgebra seu aliado mais importante. Não apenas a Álgebra Elementar, como também a Álgebra Vetorial. Os vetores desempenham um papel importante neste curso, como logo ficará evidente.

São pré-requisitos para este curso os resultados básicos da matemática elementar estudados no ensino médio. Espera-se também do leitor familiaridade com alguns conceitos da Álgebra Elementar, como determinantes, matrizes e sistemas lineares.

SUMÁRIO

MÓDULO 1

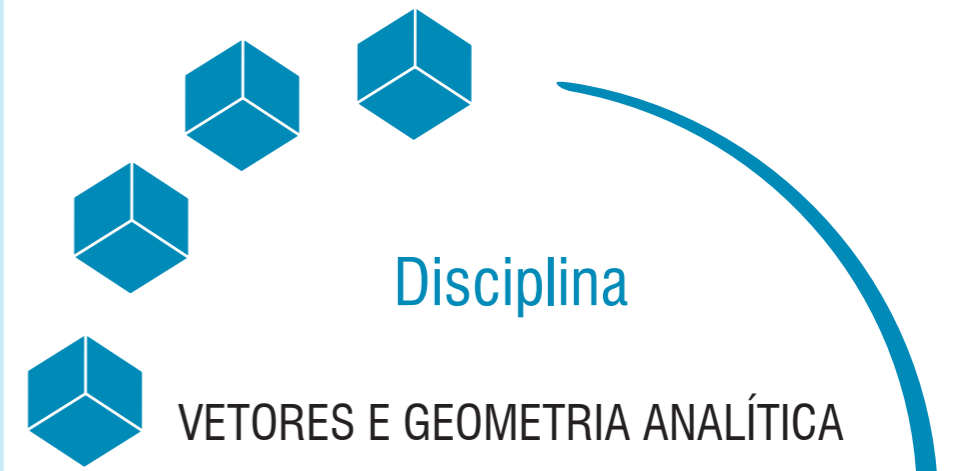
VETORES

	Informações sobre o material	3
	Prefácio	5
	Preliminares	13
	Origem da palavra “vetor”	13
	Direção e Sentido	13
	CAPÍTULO I	
1	Vetores	13
	Grandezas Escalares e Vetoriais	14
	Definição e conceitos básicos	15
	Representação Geométrica	15
	Notação	16
	Exercícios	18
	Igualdade de vetores	19
	Exercícios	21
	Módulo de um vetor	23
	Determinando o módulo de um vetor	24
	Exercícios	27
	CAPÍTULO II	
2	Produto escalar	28
	Definição e propriedades	28
	Vetores paralelos	30
	Exercícios	31
	Versor de um vetor	32
	Exercícios	33

CAPÍTULO III		
3	Soma de vetores	34
	Definição	34
	Regras dos Sinais	42
CAPÍTULO IV		
4	Produto interno	44
	Definição	44
	Produto Interno pelas Coordenadas	46
	Exercícios	47
	Vetores Perpendiculares	48
	Exercícios	50
	Projeção de um Vetor sobre outro	51
	Exercícios	53
	Outras propriedades do produto interno	53
	Exercícios	54
CAPÍTULO V		
5	Produto vetorial	56
	Definição e propriedades	56
	Exercícios	59
	Produto vetorial pelas coordenadas	59
	Preliminares	59
	Produto vetorial pelas coordenadas	61
	Exercícios	62
CAPÍTULO VI		
6	Produto misto	63
	Definição	63
	Exercícios	64
	Produto misto pelas coordenadas	64
	Exercícios	65
	Propriedades do Produto misto	65
	Exercícios	67
	Interpretação geométrica do produto misto	68
	Exercícios	69
	Referências	70

MATEMÁTICA

LICENCIATURA



Disciplina

VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA

Módulo 1

VETORES

Marcelo Henriques de Carvalho

Capítulo I

VETORES

Preliminares

O conceito de vetor surgiu na Mecânica com o engenheiro flamengo Simon Stevin, o “Arquimedes holandês” [7]. Em 1586, ele apresentou um problema da composição de forças e enunciou uma regra empírica para se achar a soma de duas forças aplicadas num mesmo ponto. Tal regra é conhecida hoje como regra do paralelogramo. Os vetores aparecem considerados como “linhas dirigidas” na obra publicada em 1797, por Gaspar Wessel, um matemático dinamarquês.

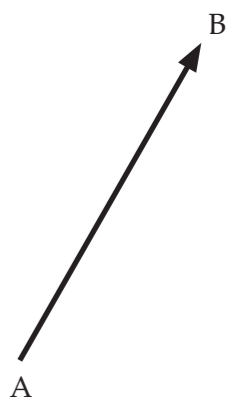
A sistematização da teoria vetorial ocorreu no século XIX com os trabalhos do irlandês William Hamilton (notavelmente precoce: aos 5 anos lia grego, latim e hebraico), do alemão Hermann Grassmann e do físico norte-americano Josiah Gibbs.

Origem da palavra “vetor”

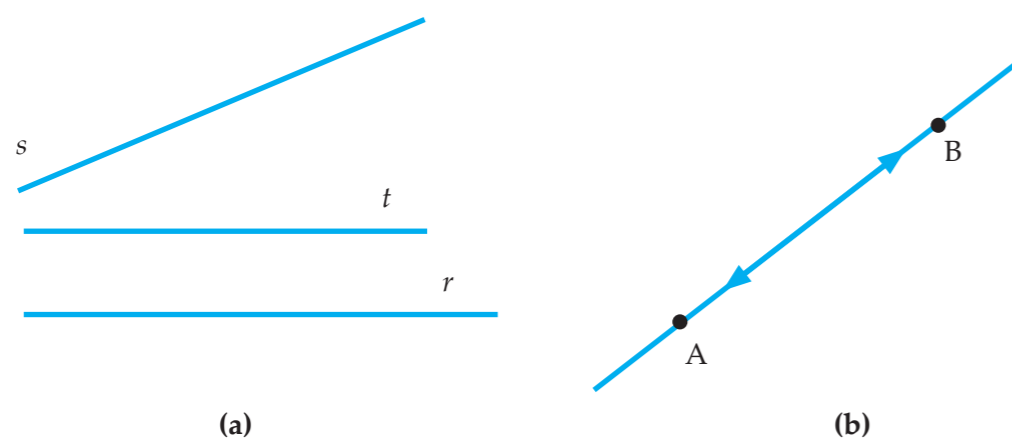
A palavra “vetor” provém do verbo latino *vehere*, que significa transportar, levar. Vetor é o particípio passado de *vehere*, significando transportado, levado, tentando representar que o ponto A é transportado até o ponto B.

Direção e Sentido

Antes de apresentarmos o conceito de vetor, precisamos ter bem clara as idéias de direção e sentido. A figura (a) a seguir apresenta três retas. A reta r determina, ou define, uma direção. A reta s determina outra direção, diferente da direção de r . Já a reta t , por ser paralela à r , possui a mesma direção de r . Assim, a noção de direção



é dada por uma reta e por todas as que lhe são paralelas. Quer dizer, *retas paralelas possuem a mesma direção*.

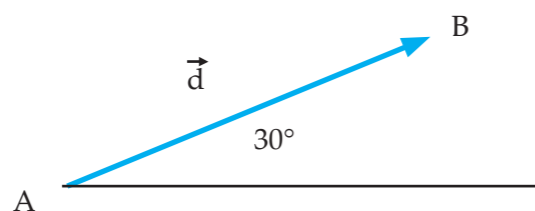


Na figura (b) a **direção** é definida pela reta que passa pelos pontos A e B. O deslocamento de uma pessoa nessa mesma direção pode ser feito de duas maneiras: no sentido de A para B ou no sentido contrário, de B para A. Portanto, *a cada direção podemos associar dois sentidos*. Além disso, só podemos falar em “sentidos iguais” ou “sentidos contrários” caso estejamos na mesma direção.

Grandezas Escalares e Vetoriais

Certas grandezas ficam determinadas apenas por um número real, acompanhado pela unidade correspondente. Por exemplo: 5kg de massa, 10m de área, 12cm de largura. Tais grandezas são chamadas de escalares. Outras grandezas necessitam além do número real, uma direção e de um sentido.

Quando você está se deslocando de uma posição para outra, basta dizer, por exemplo, que percorreu uma distância igual a 5m? Você precisa especificar, além da distância, a direção e o sentido em que ocorre este deslocamento.



Quando um objeto sofre um deslocamento de uma posição A para uma posição B, esta mudança de posição é definida pelo segmento de reta \overline{AB} orientado, que une a posição inicial com a final, denominado neste caso de **deslocamento**.

Observe que o deslocamento não fica perfeitamente definido se for dada apenas a distância percorrida (por exemplo, 5m); há necessidade de especificar a direção e o sentido do deslocamento. Estas grandezas que são completamente definidas quando são especificados o seu valor, direção e sentido, são denominadas grandezas **vetoriais**. Outras grandezas vetoriais são: velocidade, aceleração, força, campo magnético, etc.

Exercícios

1. São grandezas escalares todas as quantidades físicas a seguir, EXCETO:

- massa do átomo de hidrogênio;
- intervalo de tempo entre dois eclipses solares;
- peso de um corpo;
- densidade de uma liga de ferro;
- n.d.a.

2. Quando dizemos que uma bola está se deslocando na direção horizontal e para a direita, à uma velocidade de 20 m/s, estamos definindo a velocidade como uma grandeza:

- escalar
- algébrica
- linear
- vetorial
- n.d.a.

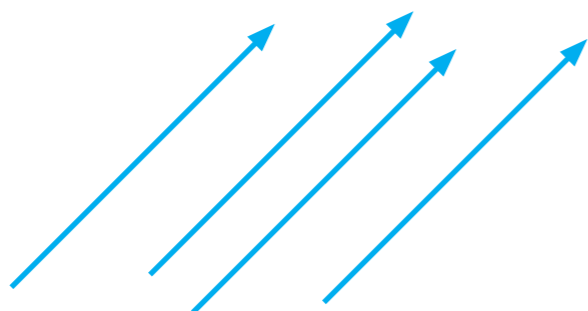
Definição e conceitos básicos

A representação matemática de uma grandeza vetorial é o **Vetor**, uma tripla constituída de uma direção, um sentido e um número não negativo chamado “módulo” que representa o seu comprimento. Em outras palavras, **vetor** é o conjunto de todos os segmentos orientados de mesma direção, de mesmo sentido e de mesmo comprimento.

Representação Geométrica

Segmentos orientados com mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento **representam o mesmo vetor**. Este fato é análogo

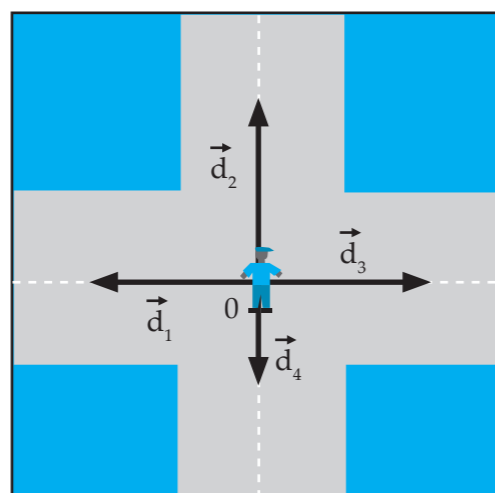
ao que ocorre com os números racionais e as frações. Duas frações representam o mesmo número racional se o numerador e o denominador de cada uma delas estiverem na mesma proporção. Por exemplo, as frações $1/2$, $2/4$ e $3/6$ representam o mesmo número racional.



Na figura acima tem-se um conjunto de segmentos orientados representando um único vetor, pois eles possuem o mesmo comprimento, direção e sentido. Um **segmento orientado** é um conjunto de pontos, ao passo que vetor é um conjunto de segmentos orientados com mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.

Notação

As notações mais comumente utilizadas para vetores são letras com uma seta acima apontada para a direita, como por exemplo: \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , ..., \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , ... Por exemplo:



Os vetores \vec{d}_1 e \vec{d}_2 têm a mesma direção, mesmo módulo, e sentidos opostos.

Os vetores \vec{d}_2 e \vec{d}_4 têm a mesma direção, módulos diferentes e sentidos opostos.

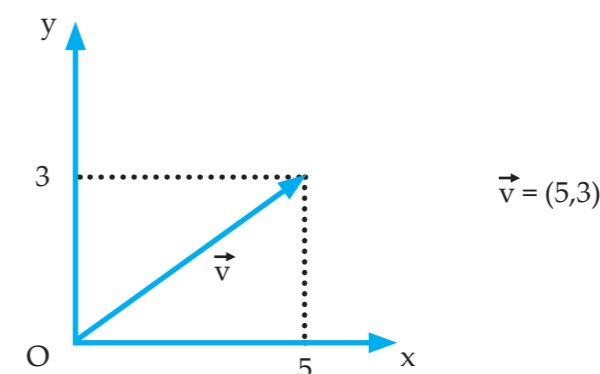
Os vetores \vec{d}_1 e \vec{d}_2 têm o mesmo módulo, direções e sentidos dife-

rentes.

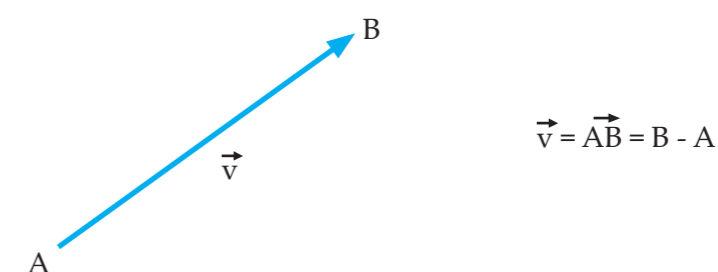
Os vetores \vec{d}_2 e \vec{d}_4 têm módulos, direções e sentidos diferentes.

As seguintes notações também são utilizadas:

a) Um vetor pode ser denotado por um par ordenado de números reais, por exemplo $\vec{v} = (x, y)$, onde x e y são as **coordenadas** ou **componentes** do vetor. Neste caso, assumimos que \vec{v} representa a extremidade do vetor. Nesta notação, a **origem do vetor** é sempre a origem do sistema de coordenadas, ou seja, o ponto $(0, 0)$. Por exemplo,



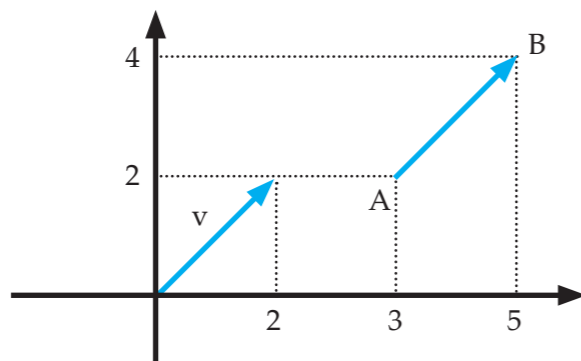
b) Se \vec{v} é um vetor com origem no ponto A e extremidade no ponto B, então \vec{v} também é denotado por \vec{AB} ou por $B - A$. Por exemplo,



Estas notações pode ser naturalmente generalizadas para espaços de dimensões maiores. Por exemplo, no espaço tridimensional um vetor é representado por uma tripla ordenada (x, y, z) .

Usualmente, quando estiver fixado o sistema de coordenadas, ao considerarmos um vetor, é mais conveniente tomarmos o representante cuja origem coincide com o sistema de coordenadas. Dado um vetor com origem no ponto A e extremidade no ponto B, o representante do vetor \vec{AB} com origem na origem do sistema de coordenadas é obtido subtraindo das coordenadas da extremidade B as coordenadas da origem A, razão pela qual também se escreve $\vec{AB} = B - A$.

Exemplo 1. Dado o vetor com origem no ponto $A = (3, 2)$ e extremidade no ponto $B = (5, 4)$, determinar o representante \vec{v} do vetor \vec{AB} com origem no ponto $(0, 0)$.



Solução. O vetor \vec{v} é dado por: $\vec{v} = B - A = (5, 4) - (3, 2) = (5 - 3, 4 - 2) = (2, 2)$.

Reciprocamente, dado um vetor $\vec{v} = (a, b)$ (com origem em $(0, 0)$) e um ponto $A = (x, y)$, a extremidade B do representante \vec{AB} de \vec{v} com origem no ponto A é dado por:

$$B = (a, b) + (x, y) = (a + x, b + y).$$

Exemplo 2. Dado o vetor $\vec{v} = (2, 2)$ e o ponto $A = (3, 2)$, determinar a extremidade B do representante de \vec{v} com origem no ponto A .

Solução. $B = (2, 2) + (3, 2) = (5, 4)$.

Exercício 1. Reproduza o exercício anterior graficamente, representando o vetor e os pontos A e B no plano cartesiano.

Exercícios

- Quais são os atributos de um vetor?
- Para cada valor de A e B abaixo, represente o vetor abaixo no plano cartesiano:

a) $A = (1, 2)$ e $B = (-1, 3)$	b) $A = (3, -2)$ e $B = (-3, -4)$
c) $A = (3, -2)$ e $B = (1, 5)$	d) $A = (4, 2)$ e $B = (-3, -4)$
e) $A = (0, 5)$ e $B = (-2, 4)$	f) $A = (3, -2)$ e $B = (7, 4)$
- Para cada um dos vetores do exercício (2), determine o representante com origem no ponto $(0, 0)$.
- Represente os vetores abaixo no plano cartesiano:

- a) $\vec{v} = (0, 2)$ b) $\vec{v} = (3, -2)$ c) $\vec{v} = (-3, -4)$
 d) $\vec{v} = (-2, 5)$

5. Para cada um dos vetores do exercício (4), determine o representante com origem no ponto $(4, -1)$.

6. Determinar a extremidade do segmento que representa o vetor $\vec{v} = (2, -5, 1)$ do espaço \mathbb{R}^2 , sabendo que sua origem é o ponto $A = (-1, 3, 1)$.

7. Calcular as coordenadas do ponto B com a qual incide a extremidade do vetor $\vec{v} = (3, -1, 4)$, se sua origem coincide com o ponto $A = (1, 2, -3)$.

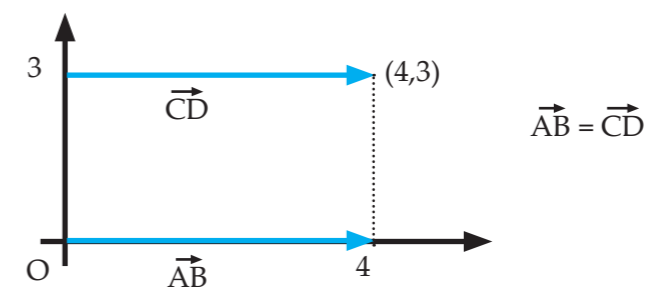
8. Calcular as coordenadas da origem do vetor $\vec{v} = (2, -3, -1)$, se sua extremidade coincide com o ponto $B = (1, -1, 2)$.

Num primeiro momento, você pode achar complicado o conceito de vetor. Mas não se preocupe. Do ponto de vista prático, as coisas não são complicadas. Para descrever um vetor, **basta descrever um de seus representantes, que é um segmento orientado** (você pode fazer isso desenhando uma flecha, por exemplo).

Outro aspecto importante é a ampla liberdade que você tem na escolha do representante do vetor. Você só precisa respeitar o comprimento, a direção e o sentido – a posição é arbitrária.

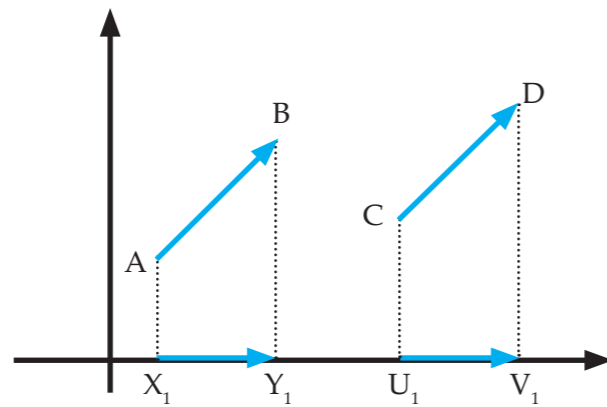
Igualdade de vetores

Dizemos que **dois vetores são iguais** se eles possuem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido. Em alguns casos particulares, não é difícil determinar se dois vetores são iguais por simples inspeção. Por exemplo, para os vetores \vec{AB} e \vec{CD} , onde $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (0, 3)$ e $D = (4, 3)$, é fácil verificar que $\vec{AB} = \vec{CD}$, pois eles têm o mesmo módulo, direção e sentido, como ilustrado na figura a seguir.



Mas como determinar a igualdade de vetores \vec{AB} e \vec{CD} no caso geral em que as coordenadas são pontos quaisquer do \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^n ? Uma forma bem simples de resolver este problema é analisar componente a componente do vetor de forma isolada. Vamos por exemplo considerar o problema no \mathbb{R}^2 (o tratamento é análogo para dimensões maiores).

Suponha que $A = (x_1, x_2)$, $B = (y_1, y_2)$, $C = (u_1, u_2)$ e $D = (v_1, v_2)$. Agora, vamos considerar a projeção dos vetores \vec{AB} e \vec{CD} no eixo x .



Note que, se $\vec{AB} = \vec{CD}$, as projeções de \vec{AB} e \vec{CD} no eixo x devem representar o mesmo vetor. Isto ocorre se, e somente se, $y_1 - x_1 = v_1 - u_1$. Analogamente, as projeções de \vec{AB} e \vec{CD} no eixo y também devem ter o mesmo comprimento. Por outro lado, caso as projeções de \vec{AB} e \vec{CD} não representem o mesmo vetor em alguma das componentes, podemos declarar que $\vec{AB} \neq \vec{CD}$. Resumindo o raciocínio acima, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.

Se $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $C = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $D = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ são pontos no \mathbb{R}^n então $\vec{AB} = \vec{CD}$ se, e somente se,

$$y_1 - x_1 = v_1 - u_1, \quad y_2 - x_2 = v_2 - u_2, \quad \dots, \quad y_n - x_n = v_n - u_n.$$

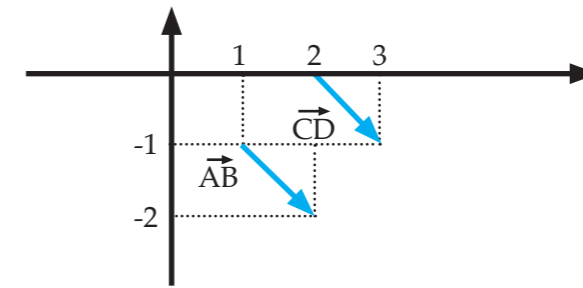
Exemplo 1. Para os pontos $A = (1, -1)$, $B = (2, -2)$, $C = (2, 0)$ e $D = (3, -1)$, podemos dizer que $\vec{AB} = \vec{CD}$?

Solução. Aplicando a regra acima, temos:

$$2 - 1 = 3 - 2 \quad \text{e} \quad (-2) - (-1) = (-1) - 0.$$

Portanto, $\vec{AB} = \vec{CD}$.

A representação gráfica de \vec{AB} e \vec{CD} está na figura a seguir.



Exemplo 2. Dados $A = (1, -1, 4, -7)$, $B = (2, -2, -3, -1)$, $C = (-2, 0, -4, -2)$ e $D = (3, -1, 1, -4)$, podemos dizer que $\vec{AB} = \vec{CD}$?

Solução. Para a terceira coordenada temos $-3 - 4 \neq 1 - (-4)$. Logo, $\vec{AB} \neq \vec{CD}$.

Terminaremos esta seção introduzindo algumas definições que serão estudadas com mais detalhes nos próximos capítulos, mas que por serem bem simples e intuitivas, podem ser exercitadas desde já.

O módulo de um vetor \vec{v} é denotado por $\|\vec{v}\|$. O vetor \vec{v} é **nulo** se $\|\vec{v}\| = 0$, e **unitário** se $\|\vec{v}\| = 1$.

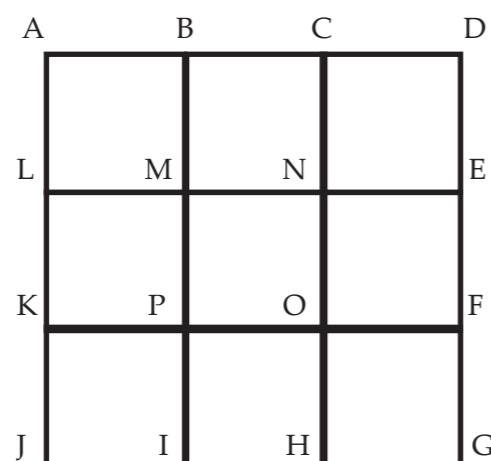
Para cada vetor não nulo \vec{v} existe um vetor $-\vec{v}$, chamado de **oposto** de \vec{v} , que possui o mesmo módulo e direção de \vec{v} , porém, de sentido contrário. Portanto, se $\vec{v} = \vec{AB}$ então $-\vec{v} = \vec{BA}$.

Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são **paralelos**, denotado por $\vec{u} \parallel \vec{v}$, se tiverem a mesma direção. Logo, $-\vec{v}$ é paralelo a \vec{v} . O vetor nulo é paralelo a qualquer vetor.

Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são **perpendiculares** (ou **ortogonais**), denotado por $\vec{u} \perp \vec{v}$, se o ângulo formado entre eles é de 90° .

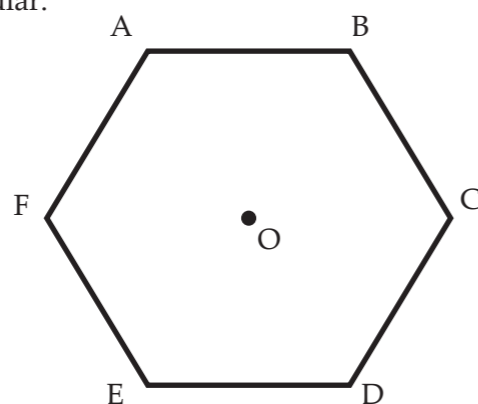
Exercícios

1. A figura a seguir é constituída de nove quadrados congruentes (de mesmo tamanho). Decidir se é verdadeira ou falsa, as afirmações a seguir.



- | | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| (a) $\vec{AB} = \vec{OF}$ | (b) $\vec{AM} = \vec{PH}$ | (c) $\vec{BC} = \vec{OP}$ |
| (d) $\vec{BL} = -\vec{MC}$ | (e) $\vec{DE} = -\vec{ED}$ | (f) $\vec{AO} = \vec{MG}$ |
| (g) $\vec{KN} = \vec{FI}$ | (h) $\vec{AC} \parallel \vec{HI}$ | (i) $\vec{JO} \parallel \vec{LD}$ |
| (j) $\vec{AJ} \parallel \vec{FG}$ | (k) $\vec{AB} \perp \vec{EG}$ | (l) $\vec{AM} \perp \vec{BL}$ |
| (m) $\vec{PE} \perp \vec{EC}$ | (n) $\vec{PN} \perp \vec{NB}$ | (o) $\vec{PN} \perp \vec{AM}$ |
| (p) $\ \vec{AC}\ = \ \vec{FP}\ $ | (q) $\ \vec{IF}\ = \ \vec{MF}\ $ | (r) $\ \vec{AJ}\ = \ \vec{AC}\ $ |
| (s) $\ \vec{AO}\ = 2 \ \vec{NP}\ $ | (t) $\ \vec{AM}\ = \ \vec{BL}\ $ | |

2. Utilizando seus conhecimentos de geometria, decida se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações referentes ao seguinte hexágono regular:



- | | | |
|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| (a) $\vec{FO} = \vec{OC}$ | (b) $\vec{OE} = \vec{OB}$ | (c) $\vec{OB} = \vec{OC}$ |
| (d) $\vec{OD} = \vec{OA}$ | (e) $\vec{OA} = \vec{DO}$ | (f) $\vec{OE} = -\vec{EO}$ |
| (g) $\vec{OC} = \vec{OF}$ | (h) $\vec{FC} = \vec{ED}$ | (i) $\vec{BC} = \vec{OD}$ |

3. Para os pontos A, B, C e D abaixo, determine se $\vec{AB} = \vec{CD}$.

- a) $A = (-1, 0)$, $B = (0, 3)$, $C = (3, 4)$ e $D = (5, 8)$.
 b) $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 3, 2)$, $C = (1, 0, 1)$ e $D = (2, 2, 4)$.

4. Mostre que os conjuntos seguintes de quatro pontos são vértices de um paralelogramo:

- a) $(0, 0, 0)$, $(1, 5, 2)$, $(6, -2, 4)$ e $(7, 3, 6)$
 b) $(1, 2, -3)$, $(5, 7, 2)$, $(-3, 12, 4)$ e $(1, 17, 9)$.

4. Dados os pontos $P = (1, 2, 4)$, $Q = (2, 3, 2)$ e $R = (2, 1, -1)$, determinar as coordenadas de um ponto S tal que P, Q, R e S sejam vértices de um paralelogramo.

5. Decidir se é verdadeira ou falsa as afirmações, onde \vec{u} e \vec{v} são vetores:

- a) se $\vec{u} = \vec{v}$ então $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$
 b) se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ então $\vec{u} = \vec{v}$
 c) se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ então $\vec{u} = \vec{v}$
 d) se $\vec{u} = \vec{v}$ então $\vec{u} \parallel \vec{v}$
 e) se $\vec{AB} = \vec{CD}$ então ABCD formam um paralelogramo
 f) se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ então $\vec{v} = \vec{u}$ ou $\vec{v} = -\vec{u}$.

Módulo de um vetor

Como vimos, fixada uma unidade de comprimento, a cada segmento orientado pode-se associar um número real não negativo, que é a medida do segmento em relação àquela unidade. A medida do segmento orientado é o seu comprimento ou seu **módulo**. Em outras palavras, o módulo de um vetor \vec{v} , denotado por $\|\vec{v}\|$, é um número não negativo que representa o comprimento de \vec{v} . Por exemplo, o comprimento do vetor \vec{v} , representado na figura a seguir é 4.



Logo, o vetor nulo tem coordenadas $(0,0)$ em \mathbb{R}^2 , ou $(0,0,0)$ em \mathbb{R}^3 , etc. O vetor nulo é comumente denotado por \vec{O} .

Claramente, o módulo de um vetor satisfaz as seguintes propriedades:

$$\|\vec{v}\| \geq 0$$

$$\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{O}$$

Determinando o módulo de um vetor

Mas como determinar o módulo de um vetor?

Bem! O **módulo** é o comprimento do vetor. Se as coordenadas da origem e extremidade do vetor são fornecidas, para determinar o módulo basta calcular a distância entre esses dois pontos. Para certos casos simples, como vetores horizontais e verticais, esse cálculo é imediato. Por exemplo, se a origem de um vetor \vec{v} tem coordenadas $(0,0)$ e a extremidade $(7,0)$, é fácil ver que $\|\vec{v}\| = 7$. Caso as coordenadas de \vec{v} sejam $(0,0)$ e $(0,5)$, também é muito fácil ver que $\|\vec{v}\| = 5$.

Exercício 1. Determine o módulo do vetor v cuja origem é $(3,0)$ e extremidade é $(0,4)$.

Sugestão. Aplique o teorema de Pitágoras considerando o triângulo formado pelos dois pontos acima e pela origem $(0,0)$.

Mas como determinar o módulo de um vetor no caso geral em que a origem e extremidade são pontos quaisquer no \mathbb{R}^n ? Podemos fazer isso recorrendo à fórmula da distância entre dois pontos. Por exemplo, a distância entre dois pontos em \mathbb{R}^2 é dada pelo seguinte:

Dados dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ em \mathbb{R}^2 , a **distância d entre P e Q** é dada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Utilizando esta fórmula, temos o seguinte resultado:

Para um vetor \vec{PQ} no \mathbb{R}^2 com origem $P = (x_1, y_1)$ e extremidade $Q = (x_2, y_2)$, o módulo de \vec{PQ} é

$$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

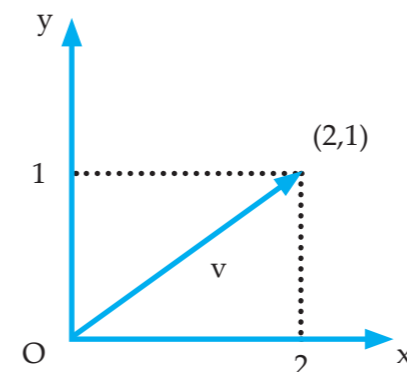
No caso particular em que a origem do vetor é a origem do sistema de coordenadas, a fórmula acima fica mais simples:

Para um vetor $\vec{v} = (a,b)$ em \mathbb{R}^2 , o módulo de \vec{v} é:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. Determine o módulo do vetor $\vec{v} = (2,1)$.



Solução.
 $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Exemplo 2. Calcule o módulo do vetor em \mathbb{R}^2 onde $P = (-1,2)$ e $Q = (5,5)$.

Solução.

$$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Observação: É importante ressaltar que todas as fórmulas acima são naturalmente generalizadas para o espaço n -dimensional. Por exemplo,

Para um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ em \mathbb{R}^n , o módulo de \vec{v} é

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Exemplo 3. Calcule o módulo do vetor $\vec{v} = (5,8,-2)$.

Solução: $\|\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 8^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 64 + 4} = \sqrt{93}$

Exemplo 4. Para os pontos $P = (1, -1, 1)$, $Q = (2, -2, 2)$, $R = (2, 0, 1)$ e $S = (3, -1, 2)$, $\|\vec{PQ}\| = \|\vec{RS}\|$?

Solução.

$$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{(2-1)^2 + ((-2)-(-1))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

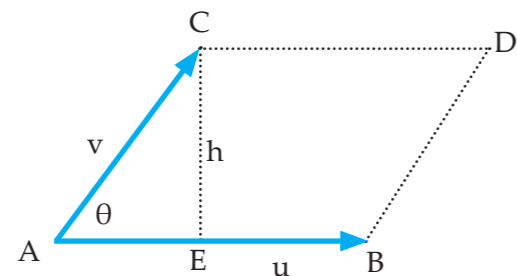
$$\|\vec{RS}\| = \sqrt{(3-2)^2 + ((-1)-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Logo, $\|\vec{PQ}\| = \|\vec{RS}\|$.

O exemplo seguinte será utilizado na definição de produto vetorial

no capítulo 5. Por isso, recomendamos atenção especial em seu estudo.

Exemplo 5. Calcule a área do paralelogramo determinado por dois vetores \vec{u} e \vec{v} .



Solução. A altura h indicada é a medida do cateto \vec{CE} do triângulo ACE e vale $\|\vec{AC}\| \cdot \text{sen}\theta$, ou seja,

$$h = \|\vec{v}\| \cdot \text{sen}\theta$$

Assim, a área (base \times altura) do paralelogramo vale $\|\vec{AB}\| \cdot h$, ou seja,

$$\text{Área} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \text{sen}\theta$$

Exemplo 6. Determine o versor do vetor $\vec{v} = (0, 3, 4)$.

Obs. Se \vec{v} é um vetor não-nulo, o vetor $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é chamado **versor** de \vec{v}

Solução. $\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + (3)^2 + (4)^2} = \sqrt{0+9+16} = \sqrt{25} = 5$

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(0, 3, 4)}{5} = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Exemplo 7. Determine a de modo que o vetor $\vec{v} = (6, a, 0)$ tenha módulo 10.

Solução. $\|\vec{v}\| = 10 \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{6^2 + (a)^2 + (0)^2} = \sqrt{36 + a^2 + 0} =$
 $= 10 \Rightarrow 36 + a^2 = 100 \Rightarrow 100 - 36 = 64 \Rightarrow a = \pm 8$

Exemplo 8. Determine um vetor paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 2)$ e que tenha módulo 3.

Solução. Vamos determinar o versor de $\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(2, 1, 2)}{\sqrt{2^2 + (1)^2 + (2)^2}} =$
 $= \frac{(2, 1, 2)}{\sqrt{9}} = \frac{(2, 1, 2)}{3}$

O vetor procurado \vec{x} será o versor multiplicado por ± 3 .

Logo: $\vec{x} = (\pm 2, \pm 1, \pm 2)$

Exercícios

1. Calcule o módulo dos seguintes vetores:

- a) $\vec{v} = (2, 3)$ b) $\vec{v} = (3, -4)$
 c) $\vec{v} = (1/2, 3/4, 1)$ d) $\vec{v} = (-2, -3, 4)$.

2. Calcular o perímetro do triângulo formado pelos vértices $A = (-1, 2, 3)$, $B = (3, 1, 2)$ e $C = (1, -1, -1)$.

3. O triângulo de vértices $A = (-3, 2, -1)$, $B = (2, 2, -3)$ e $C = (-3, 6, -2)$ é equilátero, é isósceles ou é escaleno?

4. Mostre que o ponto $A = (2, 2, 3)$ é equidistante dos pontos $B = (1, 4, -2)$ e $C = (3, 7, 5)$.

5. Obter um ponto P do eixo das abscissas equidistante dos pontos $A = (2, -3, 1)$ e $C = (-2, 1, -1)$.

6. Encontre o valor de a tal que o vetor \vec{AB} tenha módulo 3. Supondo que as coordenadas de A e B são: $A = (2a, 0, 3)$ e $B = (1, a, -1)$.

7. Para cada caso abaixo, calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} , sabendo que a medida do ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} é θ .

- a) $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$, e $\theta = 60^\circ$
 b) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$, e $\theta = 30^\circ$
 c) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, e $\theta = 90^\circ$
 d) $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2\|\vec{u}\|$, e $\theta = 60^\circ$

Capítulo II

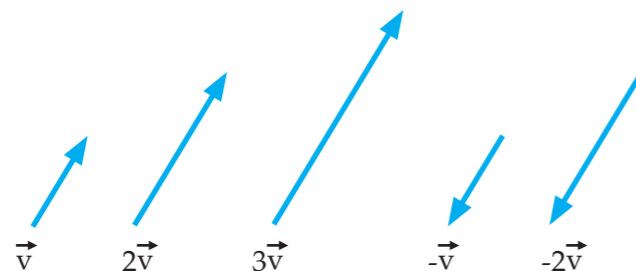
PRODUTO ESCALAR

Definição e propriedades

O produto de um vetor \vec{v} por um número real k (também chamado de escalar) é um vetor, denotado por $k\vec{v}$, que possui as seguintes propriedades:

- O módulo de $k\vec{v}$ é igual ao módulo de \vec{v} multiplicado por $|k|$, ou seja, $|k\vec{v}| = |k| \cdot \|\vec{v}\|$;
- $k\vec{v}$ possui a mesma direção de \vec{v} ;
- $k\vec{v}$ possui o mesmo sentido de \vec{v} se $k > 0$, e possui sentido oposto ao de \vec{v} se $k < 0$. Além disso, $k\vec{v}$ é o vetor nulo se $k = 0$ ou $\vec{v} = 0$.

Geometricamente falando, o produto de \vec{v} pelo escalar k é uma operação que “estica” ou “encurta” o vetor \vec{v} , ou ainda, inverte o sentido de \vec{v} , no caso em que $k < 0$, como ilustra a figura a seguir.



Alguns casos particulares:

- $0\vec{v} = \vec{0}$, por definição.
- $k\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
- $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$, o oposto de \vec{v} .

No estudo dos vetores, boa parte dos resultados possui demonstrações com certo grau de detalhes e abstrações. A fim de preservar a objetividade e a clareza da exposição (e também para não assustar o leitor), optamos por omitir tais demonstrações.

Lema 1. Se $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ é um vetor do \mathbb{R}^n então $k\vec{v} = k(v_1, v_2, \dots, v_n) = (kv_1, kv_2, \dots, kv_n)$.

Exercícios resolvidos.

Exercício 1. Calcule o vetor oposto ao vetor $\vec{v} = (2, -4, 7)$.

Solução. O vetor oposto a \vec{v} é $(-\vec{v}) = (-1)\vec{v} = (-1)(2, -4, 7) = (-2, 4, -7)$.

Exercício 2. Prove que, se $\alpha \neq 0$, então $\alpha\vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{w}}{\alpha}$.

Solução. Multiplicando ambos os membros de $\alpha\vec{v} = \vec{w}$ por $\frac{1}{\alpha}$, obtemos

$$\alpha\vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\alpha\vec{v} = \frac{1}{\alpha}\vec{w} \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\vec{v} = \frac{1}{\alpha}\vec{w} \Rightarrow 1\vec{v} = \frac{1}{\alpha}\vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{w}}{\alpha}$$

Exercício 3. Prove que $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$, então $\vec{b} = (\vec{a} - \vec{c}) / 2$.

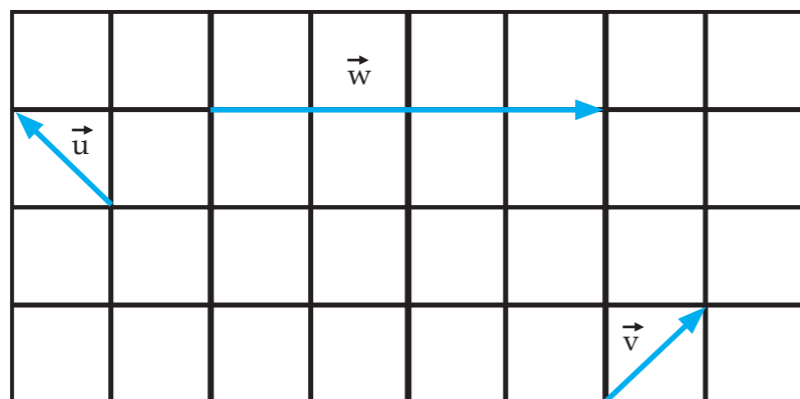
Solução.

$$\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \vec{a} - \vec{c} = 2\vec{b} + \vec{c} - \vec{c} \Rightarrow \vec{a} - \vec{c} = 2\vec{b} + (\vec{c} - \vec{c}) \Rightarrow \vec{a} - \vec{c} = 2\vec{b}$$

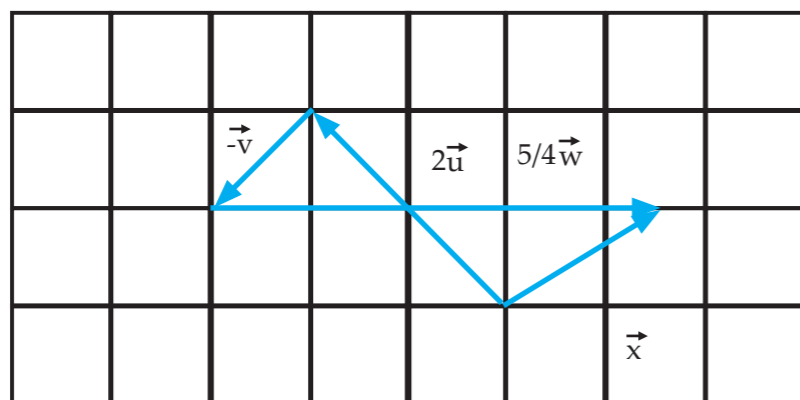
Do exercício anterior temos que

$$2\vec{b} = \vec{a} - \vec{c} \Rightarrow \left(2\frac{1}{2}\right)\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c}) \Rightarrow \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c})$$

Exercício 4. Sendo \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} representado na figura, represente $\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} + 5/4\vec{w}$ por uma flecha de origem O.



Solução.



Vetores paralelos

Dois vetores \vec{v} e \vec{w} são paralelos (denotado por $\vec{v} \parallel \vec{w}$) se eles possuem a mesma direção. Por exemplo, os cinco vetores da figura anterior são todos paralelos. Mais precisamente, **\vec{v} e \vec{w} são paralelos se um deles é múltiplo escalar do outro**, ou seja, se existe um real α tal que $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{w}$. O parágrafo seguinte reescreve esta definição enfatizando os detalhes mais importantes:

Se $\vec{v} \parallel \vec{w}$ então existe um real α tal que $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{w}$. Além disso, se $\vec{v} \neq \vec{0}$ então $\alpha > 0$ se \vec{v} e \vec{w} têm o mesmo sentido e $\alpha < 0$ caso contrário.

Exemplo 1. Os vetores \vec{u} e \vec{v} são paralelos, $\|\vec{u}\| = 30$ e $\|\vec{v}\| = 50$. Então podemos escrever $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$. Determine α nos casos:

a) \vec{u} e \vec{v} têm o mesmo sentido.

b) \vec{u} e \vec{v} têm sentido contrário.

Solução. Como $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$, temos $\|\vec{v}\| = \|\alpha \cdot \vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$. Logo,

$$|\alpha| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} = 50/30 = 5/3 \therefore \alpha = \pm 5/3$$

a) Como \vec{u} e \vec{v} têm o mesmo sentido, $\alpha > 0$. Logo, $\alpha = 5/3$.

b) Como \vec{u} e \vec{v} têm sentido contrário, $\alpha < 0$. Logo, $\alpha = -5/3$.

Exemplo 2. No exemplo acima, pode-se também escrever $\vec{u} = \beta \cdot \vec{v}$. Determine β sabendo que \vec{u} e \vec{v} têm sentido contrário.

Resposta. $\beta = -5/3$

Exemplo 3. É dado um vetor \vec{u} de módulo 5. Determine um vetor \vec{v} de módulo 10, paralelo e de mesmo sentido que \vec{u} .

Solução. Como $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$, temos $\|\vec{v}\| = \|\alpha \cdot \vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$. Logo,

$$|\alpha| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} = 10/5 = 2 \therefore \alpha = \pm 2$$

Como \vec{u} e \vec{v} têm o mesmo sentido, $\alpha > 0$. Logo, $\alpha = 2$.

Portanto, $\vec{v} = 2\vec{u}$.

Exercícios

1. Dados $A = (-1, -1, 0)$ e $B = (3, 5, 0)$, determinar o ponto P tal que $\vec{AP} = 2/3 \vec{AB}$.

2. Verificar se são colineares os pontos:

a) $A = (3, 1, 5)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (4, 2, 9)$

b) $A = (-1, -5, 0)$, $B = (2, 1, 3)$ e $C = (-2, -7, -1)$

c) $A = (2, 1, -1)$, $B = (3, -1, 0)$ e $C = (1, 0, 4)$

3. Calcular as coordenadas dos pontos que dividem em três partes iguais o segmento de reta que une os pontos $(5, -1, 7)$ e $(-3, 3, 1)$.

4. É dado um vetor \vec{u} de módulo 3. Determine um vetor \vec{v} de módulo 30, paralelo a \vec{u} e de sentido contrário ao de \vec{u} .

5. Sabendo que o ponto $P = (x, 4, z)$ pertence ao segmento de extre-

midades $A = (7, 2, 1)$ e $B = (10, 5, 7)$, calcular os valores de x e z .

Versor de um vetor

O **versor** de um vetor não nulo \vec{v} , denotado por $\text{vers}(\vec{v})$, é o vetor unitário que tem a mesma direção e sentido de \vec{v} . O versor de um vetor é obtido por:

$$\text{vers}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

Observação. $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ significa $\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$.

Para entender por que $\text{vers}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, podemos proceder como no exemplo 2 da seção anterior da seguinte forma: como $\text{vers}(\vec{v})$ tem a mesma direção e sentido de \vec{v} , temos

$$\text{vers}(\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}, \text{ com } \alpha > 0.$$

Daí vem que, $\|\text{vers}(\vec{v})\| = \|\alpha \cdot \vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$.
Logo,

$$|\alpha| = \frac{\|\text{vers}(\vec{v})\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Como $\alpha > 0$ e $\|\text{vers}(\vec{v})\| = 1$, temos

$$\alpha = |\alpha| = \frac{1}{\|\vec{v}\|}$$

$$\text{Portanto, } \text{vers}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

Exercício 1. Dado um vetor \vec{v} , qual é o vetor unitário que tem a mesma direção e mesmo sentido do vetor \vec{v} ?

Solução. O vetor $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Exemplo 2. Calcular o versor do vetor $\vec{v} = (\sqrt{2}, -4, 3)$.

$$\text{Solução. } \text{vers}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \vec{v}$$

$$\text{Logo, } \text{vers}(\vec{v}) = \frac{\sqrt{3}}{9} (\sqrt{2}, -4, 3) = \left(\frac{\sqrt{6}}{9}, -\frac{4\sqrt{3}}{9}, \frac{3\sqrt{3}}{9} \right)$$

Exercícios

1. Determine o versor dos seguintes vetores:

- a) $(6, -2, -3)$ b) $(3, 4, -12)$

2. Verificar se os seguintes vetores são unitários:

- a) $(1, 1, 1)$
b) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$

3. Calcule o versor de um vetor nos seguintes casos:

- a) $\|\vec{v}\| = 10$
b) $\|\vec{v}\| = 1/5$

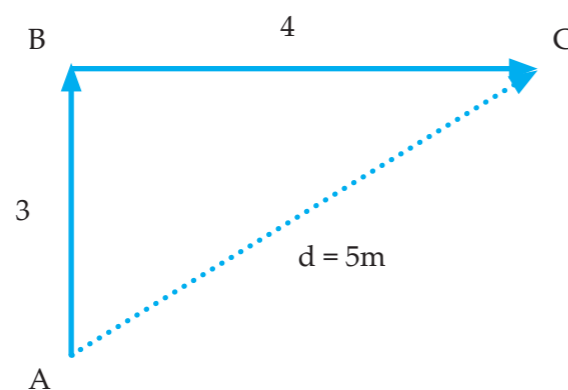
3. É dado um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$. Determine um vetor \vec{v} de módulo 5, paralelo e de mesmo sentido que \vec{u} .

Capítulo III

SOMA DE VETORES

Definição

A operação de soma de vetores pode ser motivada pela seguinte situação: Suponha que você encontra-se inicialmente em uma posição A e realizou os seguintes deslocamentos: 3m na direção vertical, no sentido de baixo para cima atingindo a posição B, e 4m na direção horizontal, no sentido da esquerda para a direita atingindo a posição C. Qual o deslocamento resultante em relação à posição inicial? Ou, em outras palavras, a quantos metros você está da posição inicial? Note que o deslocamento resultante não é simplesmente a soma algébrica (3+4) dos deslocamentos. Na verdade, ele pode ser obtido da seguinte forma:



Colocando a origem do segundo vetor coincidindo com a extremidade do primeiro vetor, o vetor resultante é aquele que “fecha” o triângulo (origem coincidente com a origem do primeiro e extremidade coincidente com a extremidade do segundo).

O valor d do deslocamento resultante pode ser obtido neste caso

pela simples aplicação do Teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Motivados por este exemplo, definimos a soma de vetores da seguinte forma:

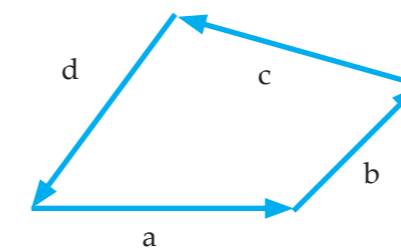
Definição: A soma dos vetores \vec{v} e \vec{w} , denotada por $\vec{v} + \vec{w}$, é obtida posicionando-se inicialmente a origem de \vec{w} na extremidade de \vec{v} . A origem do vetor $\vec{v} + \vec{w}$ é a origem de \vec{v} e a extremidade de $\vec{v} + \vec{w}$ é a extremidade de \vec{w} .

A soma de $n > 2$ vetores é definida de forma análoga, considerando imagens geométricas dos vetores de modo que a extremidade de cada vetor coincida com a origem do vetor seguinte; o vetor soma é o vetor que “fecha” a poligonal.

Pela definição de soma de vetores, as seguintes **propriedades** são imediatas:

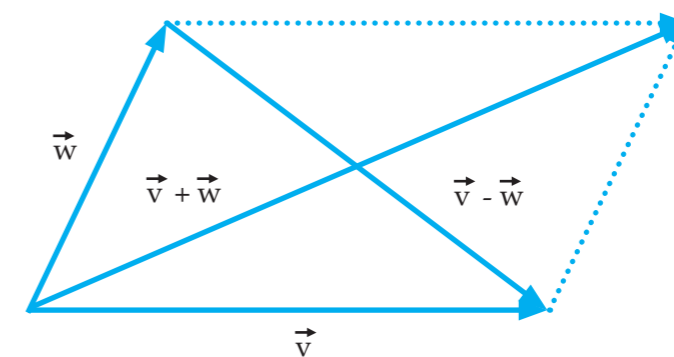
- $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} = \vec{0} + \vec{v}$. Em particular, $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$
- $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

Exemplo 1. Na figura abaixo, determine o vetor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.



Solução: $\vec{s} = \vec{0}$

A **subtração** dos vetores \vec{v} e \vec{w} é definida por: $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$. A figura abaixo mostra como podemos interpretar geometricamente a soma e a subtração de vetores. Esta figura é comumente chamada de “regra do paralelogramo” para soma e subtração de vetores.

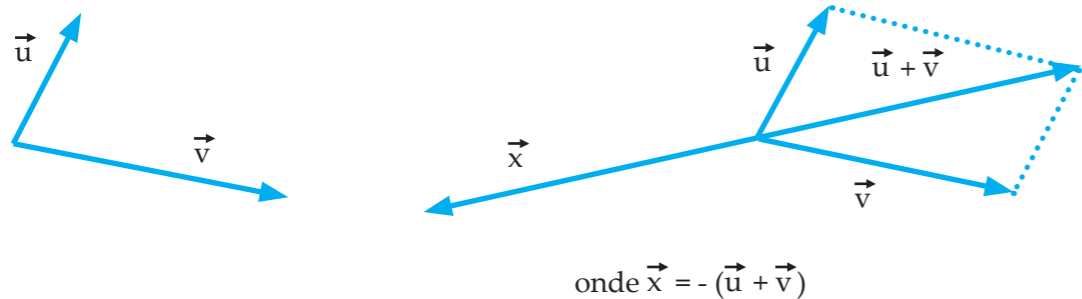


Exercício 1. Dados os vetores \vec{v} e \vec{w} da figura acima, construir os seguintes vetores:

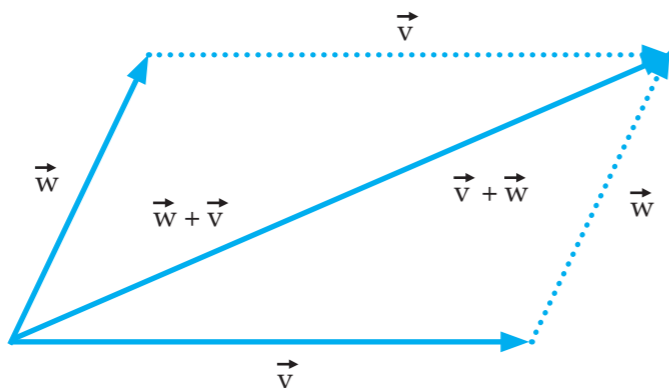
- a) $\vec{v} + \vec{w}$ b) $\vec{v} - \vec{w}$ c) $\vec{w} - \vec{v}$ d) $-\vec{v} - \vec{w}$

Exemplo 2. Dados os vetores \vec{u} e \vec{v} abaixo, determinar o vetor \vec{x} tal que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$

Solução



É interessante observar que podemos utilizar as definições geométricas acima para provar leis da álgebra vetorial. Por exemplo, a figura abaixo ilustra a comutatividade da adição de vetores: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$.



Sob o ponto de vista algébrico, a soma de vetores é feita da seguinte forma:

Lema 3: Se $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ são vetores em \mathbb{R}^n , então:
 $\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$.

Prova: Por definição de soma de vetores, $\vec{v} + \vec{w}$ é obtido colocando a origem de w na extremidade de \vec{v} . Isto implica que o valor de $\vec{v} + \vec{w}$, para cada componente i é $\vec{v}_i + \vec{w}_i$.

O seguinte teorema resume mais completamente as propriedades básicas da soma de vetores:

Teorema 3: Para quaisquer vetores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} , e escalares k e l , temos as seguintes propriedades:

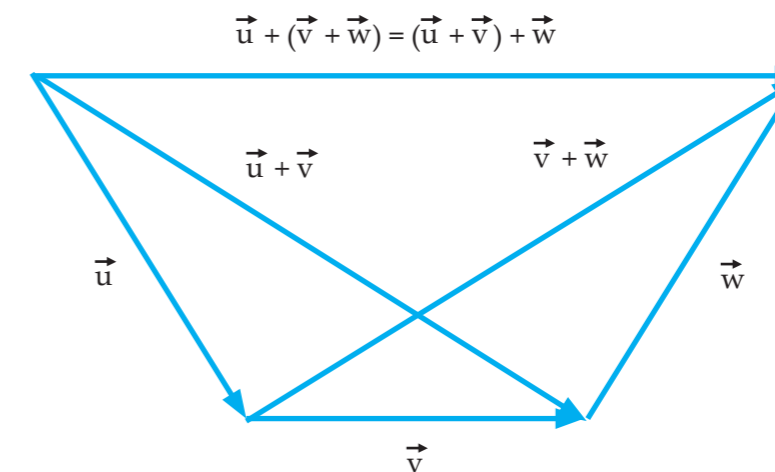
- | | |
|--|-----------------|
| a) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ | comutativa |
| b) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ | associativa |
| c) $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} = \vec{0} + \vec{v}$ | elemento neutro |
| d) $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ | Inverso aditivo |
| e) $k(l\vec{v}) = (kl)\vec{v}$ | associativa |
| f) $k(\vec{v} + \vec{w}) = k\vec{v} + k\vec{w}$ | distributiva |
| g) $(k+l)\vec{v} = k\vec{v} + l\vec{v}$ | distributiva |

Prova: Não apresentaremos provas para todas as propriedades acima, para não estender muito o texto. Como ilustração, apresentaremos duas provas, uma analítica e uma geométrica no espaço \mathbb{R}^2 para a propriedade (b).

Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2)$ vetores em \mathbb{R}^2 . Então

$$\begin{aligned} \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) &= (u_1, u_2) + ((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) \\ &= (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\ &= (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2) \\ &= ((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) + (w_1, w_2) \\ &= (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \end{aligned}$$

A figura abaixo fornece uma prova geométrica da mesma propriedade.



As propriedades sobre adição de vetores e multiplicação por escalar permitem a manipulação de expressão envolvendo vetores como na álgebra usual.

Por exemplo, se

$$2\vec{x} + \vec{u} = \vec{v}, \text{ então}$$

$$2\vec{x} = \vec{v} - \vec{u}.$$

Logo

$$\vec{x} = 1/2 (\vec{v} - \vec{u}).$$

Exemplo 3. Sejam $\vec{v} = (2, 1, -1)$ e $\vec{w} = (3, -4, 2)$ vetores do \mathbb{R}^3 .

a) Determine $\vec{v} - \vec{w}$.

Solução. $\vec{v} - \vec{w} = (2 - 3, 1 - (-4), -1 - 2) = (-1, 5, -3)$.

b) Determine $3\vec{v} + 2\vec{w}$.

Solução. $3\vec{v} + 2\vec{w} = (6, 3, -3) + (6, -8, 4) = (12, -5, 1)$.

c) Encontre o vetor \vec{u} tal que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.

Solução. $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v} = (3, -4, 2) - (2, 1, -1) = (1, -5, 3)$.

d) Encontre o vetor \vec{u} tal que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

Solução. $\vec{u} = -\vec{v} - \vec{w} = -(2, 1, -1) - (3, -4, 2) = (-5, 3, -1)$.

Exemplo 4. Dados os pontos A e B do espaço \mathbb{R}^n , determine o ponto médio do segmento \overline{AB} .

Solução. Considere o vetor \vec{v} com origem na origem do sistema de coordenadas e extremidade A, e o vetor \vec{AB} (Note que as coordenadas de \vec{v} são as mesmas de A). Utilizando soma de vetores, temos que o ponto médio M do segmento \overline{AB} é dado por

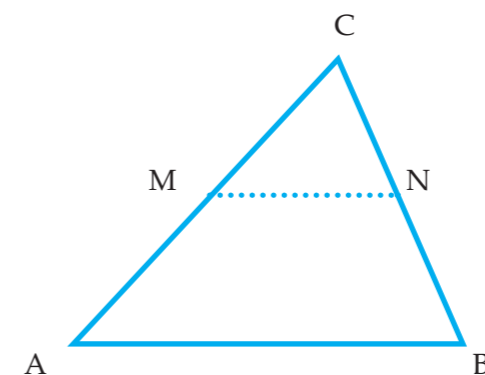
$$M = \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{AB} = A + \frac{1}{2} (B - A) = \frac{1}{2} (B + A)$$

Exercício 1. Dados os pontos X e Y do espaço \mathbb{R}^n , determine o ponto P do segmento \overline{XY} cuja distância ao ponto X é o dobro da distância ao ponto Y.

O exemplo a seguir estabelece uma importante propriedade da geometria plana.

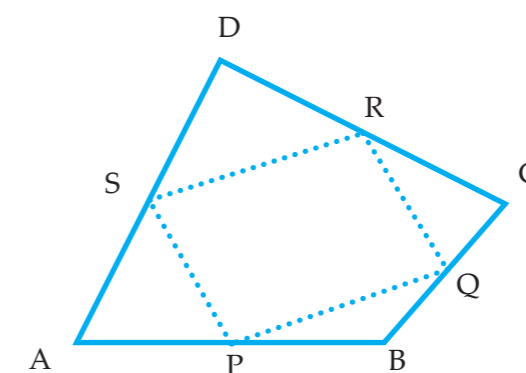
Exemplo 5. Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

Solução. Sejam A, B e C os vértices de um triângulo, M e N os pontos médios dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , respectivamente. Vamos mostrar que $\overline{MN} = 1/2 \overline{AB}$.



$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \overline{MC} + \overline{CN} \\ &= 1/2 \overline{AC} + 1/2 \overline{CB} \\ &= 1/2 (\overline{AC} + \overline{CB}) \\ &= 1/2 \overline{AB} \end{aligned}$$

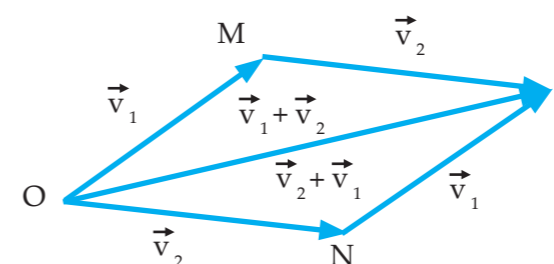
Exemplo 6. Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.



Solução. Considere o triângulo ABC. Pelo exercício anterior temos que $\overline{PQ} = 1/2 \overline{AC}$. Analogamente, considerando o triângulo ACD, temos que $\overline{SR} = 1/2 \overline{AC}$. Logo, $\overline{PQ} = \overline{SR}$. Analogamente, $\overline{PS} = \overline{QR}$. Portanto, o quadrilátero PQRS é um paralelogramo.

Note que apenas o fato de $\overline{PQ} = \overline{SR}$ (no exemplo anterior) garante que PQRS é um paralelogramo.

Exemplo 7. Mostre que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$.



Solução.

A partir de O temos:

$$O + \vec{v}_1 = M \Rightarrow \vec{v}_1 = M - O$$

$$M + \vec{v}_2 = P \Rightarrow \vec{v}_2 = P - M$$

$$\text{Logo, } \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = M - O + P - M = P - O \quad (1)$$

$$O + \vec{v}_2 = N \Rightarrow \vec{v}_2 = N - O$$

$$N + \vec{v}_1 = P \Rightarrow \vec{v}_1 = P - N$$

$$\text{Logo, } \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = N - O + P - N = P - O \quad (2)$$

$$\text{Comparando (1) e (2), temos } \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$$

Exemplo 8. Mostre que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$.

Solução.

Temos $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$, seja o vetor $\vec{v} = \vec{OP} = P - O$, então

$$\vec{0} + \vec{v} = P \Rightarrow \vec{v} = P - O$$

$$P + \vec{0} = P \Rightarrow \vec{0} = P - P$$

$$\text{Logo, } \vec{v} + \vec{0} = P - O + P - P = P - O = \vec{v} \quad (1)$$

$$O + \vec{0} = 0 \Rightarrow \vec{0} = 0 - 0$$

$$\vec{0} + \vec{v} = P \Rightarrow \vec{v} = P - O$$

$$\text{Logo, } \vec{0} + \vec{v} = 0 - 0 + P - 0 = P - O = \vec{v} \quad (2)$$

$$\text{Comparando (1) e (2), temos } \vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v}.$$

Exemplo 9. Mostre que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.

Solução.

Temos $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$, seja o vetor $\vec{v} = \vec{OP} = P - O$, então

$$\vec{0} + \vec{v} = P \Rightarrow \vec{v} = P - O$$

$$P + (-\vec{v}) = 0 \Rightarrow -\vec{v} = 0 - P$$

$$\text{Logo, } \vec{v} + (-\vec{v}) = P - 0 + 0 - P = 0 - 0 = \vec{0}$$

Exercícios

1. Dados $\vec{v} = (-1, 5, -2)$ e $\vec{w} = (3, 1, 1)$, determine:

(a) $\vec{v} - \vec{w}$

(b) $-2\vec{v} - 4\vec{w}$

(c) encontre o vetor \vec{u} tal que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (1, 0, 0)$.

(d) existe um escalar m tal que $m(\vec{v} + 2\vec{w}) = (0, 0, 1)$?

Se sim, determine-o.

2. Dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} , construir os seguintes vetores:

a) $3\vec{u}$

b) $-1/2\vec{v}$

c) $2\vec{u} + 1/3\vec{v}$

d) $1/2\vec{u} - 3\vec{v}$

3. Determinar o vetor \vec{x} , tal que $5\vec{x} = \vec{u} - 2\vec{v}$, sendo $\vec{u} = (-1, 4, -15)$ e $\vec{v} = (-3, 2, 5)$.

4. Calcular os módulos da soma e da diferença dos vetores $\vec{u} = (3, -5, 8)$ e $\vec{v} = (-1, 1, -4)$.

5. Sendo A, B, C, D vértices consecutivos de um paralelogramo, calcular as coordenadas do vértice D. Dados: A = (1, 3), B = (5, 11) e C = (6, 15).

6. Sendo A = (2, -5, 3) e B = (7, 3, -1) vértices consecutivos do paralelogramo ABCD e M = (4, -3, 3) o ponto de intersecção das diagonais, determinar os vértices C e D.

7. Num triângulo ABC, tem-se $\vec{AB} = \vec{u}$ e $\vec{AC} = \vec{v}$. Construir os seguintes vetores:

a) $\frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}$

b) $\frac{\vec{u} - \vec{v}}{2}$

c) $\frac{\vec{v} - \vec{u}}{2}$

d) $\frac{-\vec{u} + \vec{v}}{2}$

8. Dados dois vetores perpendiculares \vec{u} e \vec{v} tais que $\|\vec{u}\| = 5$ e $\|\vec{v}\| = 12$, calcular

a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$

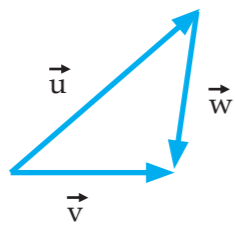
b) $\|\vec{u} - \vec{v}\|$

9. Quais condições devem satisfazer os vetores \vec{u} e \vec{v} para que se tenham as seguintes relações:

- a) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ b) $\|\vec{u} + \vec{v}\| > \|\vec{u} - \vec{v}\|$
 c) $\|\vec{u} + \vec{v}\| < \|\vec{u} - \vec{v}\|$

10. Quais condições devem satisfazer os vetores \vec{u} e \vec{v} para que o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ divida o ângulo formado por \vec{u} e \vec{v} em dois ângulos iguais?

11. Os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} formam um triângulo conforme a figura abaixo. Se $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (3, 0, 3)$ então qual o valor de \vec{w} ?



Resp: $\vec{w} = (-2, 2, -3)$.

12. Determinar os três vértices de um triângulo sabendo que os pontos médios de seus lados são $M = (5, 0, -2)$, $N = (3, 1, -3)$ e $P = (4, 2, 1)$.

Sugestão: observe o Exercício 1.

13. Mostre que as diagonais de um paralelogramo se cruzam em seus pontos médios:

Sugestão: Seja P o ponto médio de AC. Logo, $\overline{AP} = \overline{PC}$. Agora mostre que P também é o ponto médio de \overline{BD} , ou seja, $\overline{BP} = \overline{PD}$.

$$\overline{BP} = \overline{BC} + \overline{CP} = \dots$$

Regras dos Sinais

Quaisquer que seja o escalar α e o vetor \vec{v} , valem as igualdades:

- a) $(-\alpha)\vec{v} = -(\alpha\vec{v})$
 b) $\alpha(-\vec{v}) = -(\alpha\vec{v})$
 c) $(-\alpha)(-\vec{v}) = \alpha\vec{v}$

De fato:

a) devemos concluir que $(-\alpha)\vec{v}$ é o vetor oposto de $\alpha\vec{v}$. Assim basta provar que a soma destes é o vetor nulo ($\vec{0}$).

$$(-\alpha)\vec{v} + (\alpha\vec{v}) = (-\alpha + \alpha)\vec{v} = \vec{0}\vec{v} = \vec{0}$$

b) do mesmo modo $\alpha(-\vec{v}) + \alpha\vec{v} = (-\vec{v} + \vec{v})\alpha = \vec{0}\alpha = \vec{0}$

c) aplicando a) e b), obtemos $(-\alpha)(-\vec{v}) = -[\alpha(-\vec{v})] = -[-(\alpha\vec{v})] = \alpha\vec{v}$

Capítulo IV

PRODUTO INTERNO

Definição

Observe que o resultado das duas operações com vetores anteriormente estudados (o produto de vetor por escalar e a soma de vetores) é um vetor. Na operação que definiremos agora, chamada de **produto interno de vetores**, o resultado será um escalar, ou seja, um número real. Entre outras aplicações, o produto interno será útil para determinar a posição relativa entre dois vetores. Mais precisamente, utilizando o produto interno poderemos determinar se dois vetores são paralelos ou se o ângulo formado entre eles é agudo, reto ou obtuso.

Definição. O produto interno entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} , denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é definido como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$$

onde θ é o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .

Teorema 1. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sabendo que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 6$ e a medida do ângulo θ entre \vec{u} e \vec{v} é 60° .

Solução. Pela definição de produto interno, temos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 6 \cdot 1/2 = 12$.

Exercício 1. Idem ao exercício anterior, onde $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 7$ e a medida do ângulo θ entre \vec{u} e \vec{v} é 90° .

Exemplo 2. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sabendo que \vec{u} e \vec{v} são versores e a medida do ângulo θ entre \vec{u} e \vec{v} é 60° .

Solução. Como \vec{u} e \vec{v} são versores, logo $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$. Pelo Teorema 1, temos $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1/2$.

As seguintes propriedades decorrem imediatamente da definição acima, para quaisquer vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , e escalar k :

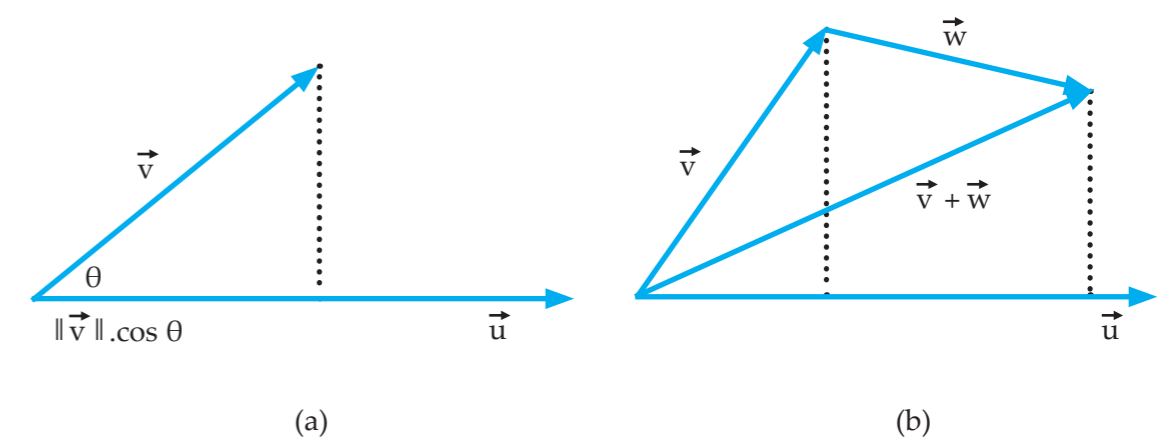
- O produto interno é associativo, ou seja, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- $(k\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (k\vec{w}) = k(\vec{v} \cdot \vec{w})$
- $\vec{v} \cdot \vec{0} = 0 = \vec{0} \cdot \vec{v}$

Outra propriedade importante, mas não tão imediata, é que o produto interno é distributivo em relação à soma de vetores. Mais precisamente,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

Uma justificativa geométrica para esta propriedade é a seguinte: observe inicialmente que $\|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$ representa o módulo da projeção do vetor \vec{v} sobre o vetor \vec{u} , como ilustrado na figura (a) a seguir.



A propriedade $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ é válida porque a projeção da componente do vetor $\vec{v} + \vec{w}$ sobre o vetor \vec{u} é a mesma que a soma das projeções dos vetores \vec{v} e \vec{w} separadamente, como ilustrado na figura (b) acima.

Exercícios

1. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sabendo que \vec{u} e \vec{v} são versores e a medida do ângulo θ entre \vec{u} e \vec{v} é:

- a) 0° b) 30° c) 45° d) 90°
 e) 120° f) 150° g) 180° h) 270°

Produto Interno pelas Coordenadas

Uma forma alternativa e muito útil é calcular o produto interno em termos das coordenadas dos vetores \vec{u} e \vec{v} . Isto pode ser feito da seguinte forma: sejam, por exemplo, $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ e $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ vetores do \mathbb{R}^3 . Consideremos os vetores unitários $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Como esses vetores têm módulo 1 e são ortogonais entre si, temos:

- $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$ e
- $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0$

Podemos então escrever \vec{u} e \vec{v} como:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{u}_3 \cdot \vec{e}_3 \quad \text{e} \quad \vec{v} = \vec{v}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{v}_3 \cdot \vec{e}_3$$

Aplicando a distributividade do produto interno em relação à soma de vetores, temos:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{u}_3 \cdot \vec{e}_3) \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{v}_3 \cdot \vec{e}_3) \\ &= \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_2 \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{u}_3 \cdot \vec{v}_3 \cdot \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \\ &= \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_2 + \vec{u}_3 \cdot \vec{v}_3 \end{aligned}$$

Verificamos facilmente que o argumento acima pode ser generalizado para quaisquer dois vetores do \mathbb{R}^n , de forma que podemos expressar o seguinte resultado.

Teorema 2. Se $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ e $\vec{w} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n)$ são vetores no \mathbb{R}^n , o produto interno de \vec{v} e \vec{w} é dado por:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{w}_2 + \dots + \vec{v}_n \cdot \vec{w}_n$$

Exemplo 2. Se $\vec{v} = (4, -2, 3)$ e $\vec{w} = (-2, 0, 1)$ então

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 4 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 1 = -5.$$

Exemplo 3. Qual o ângulo θ entre os vetores $\vec{v} = (2, 1, -1)$ e $\vec{w} = (3, -4, 1)$.

Solução. Como $\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 = 1$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{6}$ e $\|\vec{w}\| = \sqrt{26}$, temos

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{26}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{39}} \cong 0.08 \Rightarrow \theta = 85,41^\circ$$

Exercícios

1. Determine o ângulo entre os vetores \vec{v} e \vec{w} .

- a) $\vec{v} = (5, 1, -2)$ $\vec{w} = (4, -4, 3)$
 b) $\vec{v} = (7, 2, -10)$ $\vec{w} = (2, 6, 4)$
 c) $\vec{v} = (2, 1, 4)$ $\vec{w} = (1, -2, 0)$
 d) $\vec{v} = (4, 2, -1)$ $\vec{w} = (8, 4, -2)$

2. Determine m sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, m+2)$ é 60° .

3. Calcular n para que seja de 30° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, n, 2)$ e $\vec{v} = (0, 1, 0)$.

4. Determinar o vetor \vec{v} paralelo ao vetor $\vec{u} = (1, -1, 2)$, tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -18$.

5. Determinar o vetor \vec{v} colinear ao vetor $\vec{u} = (-4, 2, 6)$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{w} = -12$, onde $\vec{w} = (-1, 4, 2)$.

6. Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 10cm. Calcular o produto interno dos vetores \vec{AB} e \vec{AC} .

7. Os lados de um triângulo retângulo ABC (ângulo reto em A) medem 5, 12 e 13. Calcular $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BA} \cdot \vec{BC} + \vec{AC} \cdot \vec{CB}$

8. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações:

- a) Se $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ para todo \vec{v} então $\vec{w} = \vec{0}$
 b) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$

9. Sendo $\vec{u} = (1, 4, 1)$ e $\vec{v} = (0, 1, -8)$, calcule:

- a) $\vec{u} \cdot \vec{0}$ b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ c) $\vec{v} \cdot \vec{u}$ d) $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u}$
 e) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

10. Sabendo que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 1$ e $\vec{v} \cdot \vec{w} = 7$, calcule:

- a) $4\vec{u} \cdot (2\vec{v} + 3\vec{w})$ b) $(5\vec{u} - 4\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{w})$

Vetores Perpendiculares

Dois vetores não nulos são **perpendiculares** (ou **ortogonais**) se o ângulo entre eles é 90° . Escrevemos $\vec{v} \perp \vec{w}$ para indicar que \vec{v} e \vec{w} são perpendiculares. Como $\cos 90^\circ = 0$, temos a seguinte consequência do teorema 1.

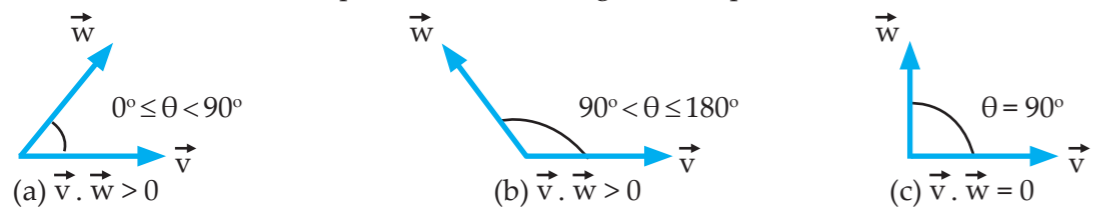
Corolário 1. Sejam \vec{v} e \vec{w} vetores não nulos. Então $\vec{v} \perp \vec{w}$ se e somente se $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Na verdade, podemos generalizar o resultado acima da seguinte forma. Como $\cos \theta > 0$ para $0^\circ < \theta < 90^\circ$ e $\cos \theta < 0$ para $90^\circ < \theta < 180^\circ$, temos:

Corolário 2: Se θ é o ângulo entre os vetores não nulos \vec{v} e \vec{w} , então:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{cases} > 0 & \text{para } 0^\circ < \theta < 90^\circ \\ 0 & \text{para } \theta = 90^\circ \\ < 0 & \text{para } 90^\circ < \theta < 180^\circ. \end{cases}$$

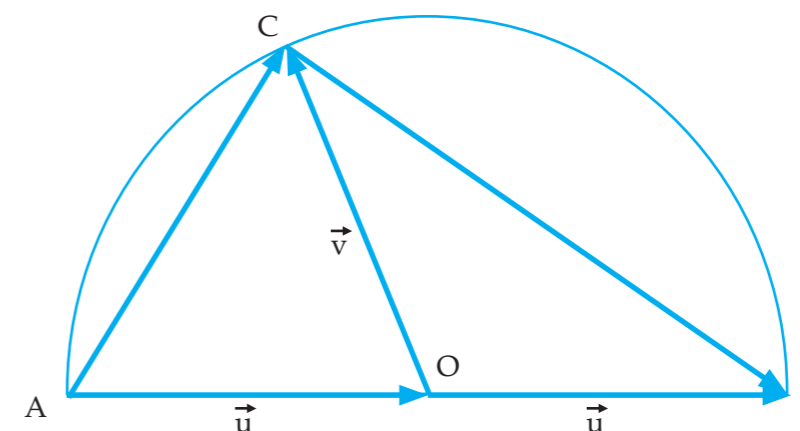
O Corolário 2 nos permite, portanto, decidir se o ângulo entre dois vetores é agudo, reto ou obtuso, dependendo se o produto interno for positivo, zero ou negativo, respectivamente.



Exemplo 3. Os vetores $\vec{v} = (-1, 5, -2)$ e $\vec{w} = (3, 1, 1)$ são perpendiculares?

Solução. O produto interno de \vec{v} e \vec{w} é: $\vec{v} \cdot \vec{w} = (-1) \cdot 3 + 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 0$. Portanto, $\vec{v} \perp \vec{w}$.

Exemplo 4. Considere um triângulo ABC inscrito em uma circunferência onde um de seus lados, digamos \overline{AB} , é uma diagonal da circunferência. Mostre que ABC é retângulo, ou seja, o ângulo no vértice C é reto.

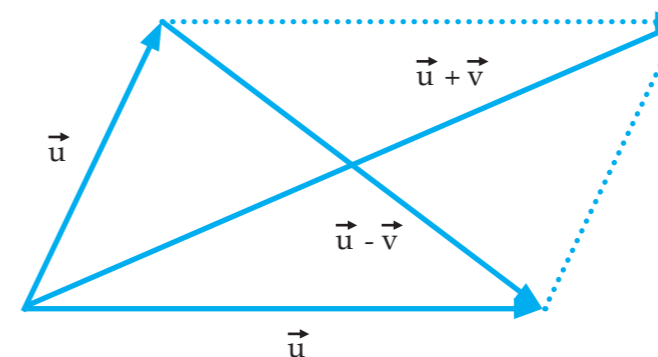


Solução. Considere o centro O da circunferência e os vetores \vec{u} e \vec{v} como indicados na figura. Como \vec{u} e \vec{v} são raios da circunferência, eles têm o mesmo módulo. Os lados \overline{AC} e \overline{CB} do triângulo podem ser escritos como $\vec{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{CB} = \vec{u} - \vec{v}$. O produto interno desses dois vetores é:

$$\vec{AC} \cdot \vec{CB} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0.$$

Logo, $\vec{AC} \perp \vec{CB}$, ou seja, o triângulo ABC é retângulo em C.

Exemplo 5. Mostre que as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares se, e somente se, o paralelogramo é um losango.



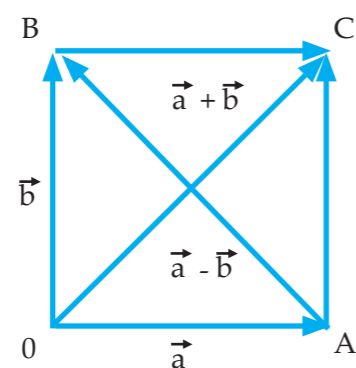
Solução. Dado um paralelogramo determinado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} , suas diagonais são representadas pelos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$. Para que as diagonais sejam perpendiculares, devemos ter $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$. Mas,

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$$

Portanto, as diagonais são perpendiculares se, e somente se, $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$, ou seja, se e somente se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. Isto significa que o paralelogramo é um losango (todos os lados são do mesmo tamanho).

Exemplo 6. Sendo os vetores \vec{a} e \vec{b} perpendiculares e $|\vec{a}| = 5$ e $|\vec{b}| = 12$, determine $|\vec{a} + \vec{b}|$ e $|\vec{b} - \vec{a}|$.

Solução.



Se $\theta = 90^\circ$ então $\cos \theta = 0$.

Pela lei dos cossenos temos:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ - \theta)}$$

mas como $\cos \theta = 0$, ficamos com $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}$. Pois o paralelogramo é retângulo e suas diagonais são iguais.

Assim

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Exercícios

1. Os vetores e a seguir são perpendiculares?

a) $\vec{v} = (8, 4, 3)$ $\vec{u} = (-2, 1, 4)$

b) $\vec{v} = (6, 0, 4)$ $\vec{u} = (0, 2, -1)$

c) $\vec{v} = (-4, 2, 1)$ $\vec{u} = (1, 2, 0)$
 d) $\vec{v} = (1, 1, -1)$ $\vec{u} = (-1, 1, 1)$

2. Para quais valores de c os vetores $(c, 1, 1)$ e $(-1, 2, 0)$ são perpendiculares?

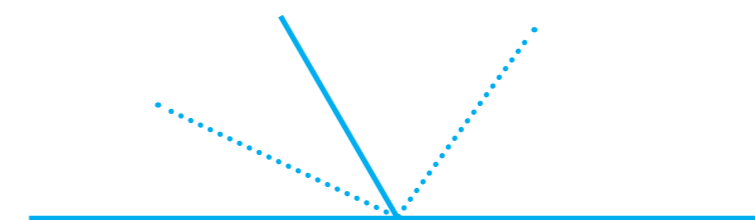
3. Determinar o vetor \vec{v} ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2, -3, -12)$ e colinear ao vetor $\vec{w} = (-6, 4, -2)$.

4. Mostre que os pontos $A = (5, 1, 5)$, $B = (4, 3, 2)$ e $C = (-3, -2, 1)$ são vértices de um triângulo retângulo.

5. Qual o valor de x para que os vetores $\vec{u} = (x, 5, -4)$ e $\vec{v} = (x+1, 2, 4)$ sejam ortogonais?

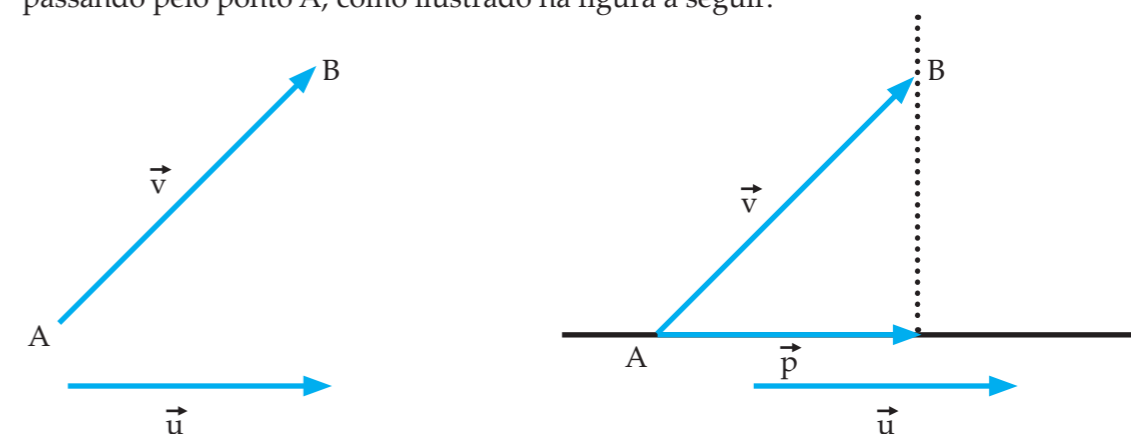
6. Verificar se o triângulo ABC é retângulo, onde $A = (2, 1, 3)$, $B = (3, 3, 5)$ e $C = (0, 4, 1)$.

7. Mostre que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares são perpendiculares.



Projeção de um Vetor sobre outro

A **projeção ortogonal** de um vetor $\vec{v} = \vec{AB}$ sobre um vetor não nulo \vec{u} é o vetor \vec{p} obtido pela projeção de \vec{v} sobre a reta paralela a \vec{u} passando pelo ponto A, como ilustrado na figura a seguir.



O vetor \vec{p} é chamado de **projeção ortogonal de \vec{v} sobre \vec{u}** e é denotado por $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$.

Exercício Proposto 1. Determine a projeção ortogonal de \vec{v} sobre \vec{u} no caso em que \vec{v} é versor e o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} é:

- a) 0° b) 60° c) 90° d) 180°

Vejam agora como calcular a projeção ortogonal no caso geral. Note que a projeção ortogonal \vec{p} de \vec{v} sobre \vec{u} é um vetor paralelo a \vec{u} . Logo, $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{u}$, para algum real α . Nosso trabalho agora será calcular o valor de α . Outra condição verdadeira é que o vetor $(\vec{v} - \vec{p})$ é perpendicular a \vec{u} . Logo, $(\vec{v} - \vec{p}) \cdot \vec{u} = 0$, ou seja, $\vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{p} \cdot \vec{u} = 0$. Substituindo \vec{p} temos:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} - \alpha \cdot \vec{u} \cdot \vec{u} = 0$$

Como $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, e isolando α , temos

$$\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

Portanto, a fórmula da projeção ortogonal de \vec{v} sobre \vec{u} é:

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$

Exemplo 2. Dados $\vec{v} = (20, 4, -10)$ e $\vec{u} = (1, 5, -2)$, calcule a projeção ortogonal de \vec{v} sobre \vec{u} .

Solução. Temos

- $\vec{v} \cdot \vec{u} = 20 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + (-10) \cdot (-2) = 60$
- $\|\vec{u}\|^2 = 1^2 + 5^2 + (-2)^2 = 30$

Logo,

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \frac{60}{30} (1, 5, -2) = (2, 10, -4).$$

Exercícios

1. Calcule a projeção ortogonal de \vec{v} sobre \vec{u} para os valores de \vec{u} e \vec{v} a seguir:

- a) $\vec{u} = (1, 1, 4)$ $\vec{v} = (4, 10, 10)$
 b) $\vec{u} = (-1, 0, 2)$ $\vec{v} = (1, 4, 3)$
 c) $\vec{u} = (1, -2, 0)$ $\vec{v} = (2, 1, 3)$
 d) $\vec{u} = (-6, 3, 6)$ $\vec{v} = (-2, 1, 2)$
 e) $\vec{u} = (1, 1, 2)$ $\vec{v} = (1, 0, 1)$
 f) $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ $\vec{v} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$

2. Calcule $\text{proj}_{\vec{u} + \vec{v}}(\vec{u} + \vec{v})$, sendo $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (3, 2, 1)$.

3. Qual o valor de m para que $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = 1/2 \vec{v}$, sendo $\vec{u} = (m, 2, 0)$ e $\vec{v} = (2, m, 0)$.

4. Mostre que se \vec{u} é versor então $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{u}$.

5. Prove que:

- a) $\text{proj}_{\lambda \vec{u}} \vec{v} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$, para todo $\lambda \neq 0$
 b) $\text{proj}_{\vec{w}}(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha \text{proj}_{\vec{w}} \vec{u} + \beta \text{proj}_{\vec{w}} \vec{v}$

Outras propriedades do produto interno

O teorema a seguir estabelece uma importante propriedade do produto interno.

Teorema 1: [desigualdade de Cauchy-Schwarz].

Para quaisquer vetores \vec{v} e \vec{w} , $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$.

Prova: Se $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{w} = \vec{0}$ então $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ e a desigualdade é trivialmente verdadeira. Podemos então assumir que \vec{v} e \vec{w} são vetores não nulos. Então,

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta \\ |\vec{v} \cdot \vec{w}| &= \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| |\cos \theta| \\ |\vec{v} \cdot \vec{w}| &\leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|, \text{ pois } |\cos \theta| \leq 1 \end{aligned}$$

O produto interno também pode ser usado para estabelecer propriedades referentes ao módulo de vetores, a mais importante é a chamada desigualdade triangular, dada pelo seguinte resultado.

Teorema 2. Para quaisquer vetores \vec{v} e \vec{w} , temos:

- a) $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$
 b) $\|\vec{v} - \vec{w}\| \geq \|\vec{v}\| - \|\vec{w}\|$

Prova: Utilizando propriedades do produto interno, temos:

$$\begin{aligned} \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 &= (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w} \\ &= \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2. \end{aligned}$$

Como $a \leq |a|$, para qualquer real a temos:

$$\leq \|\vec{v}\|^2 + 2|\vec{v} \cdot \vec{w}| + \|\vec{w}\|^2.$$

Pela desig. Cauchy-Schwarz, temos:

$$\begin{aligned} &\leq \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| + \|\vec{w}\|^2 \\ &= (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2. \end{aligned}$$

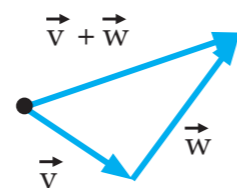
$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|, \text{ após tomar a raiz quadrada de ambos os lados.}$$

O que prova (a).

Para provar o item (b), note que $\vec{v} = \vec{w} + (\vec{v} - \vec{w})$. Logo, $\|\vec{v}\| = \|\vec{w} + (\vec{v} - \vec{w})\| \leq \|\vec{w}\| + \|\vec{v} - \vec{w}\|$, pela desigualdade triangular. Agora, subtraindo $\|\vec{w}\|$ de ambos os membros chegamos a

$$\|\vec{v} - \vec{w}\| \geq \|\vec{v}\| - \|\vec{w}\|$$

A desigualdade triangular recebe este nome devido ao fato que em qualquer triângulo, nenhum lado é maior do que o comprimento dos outros dois. Outra forma de dizer isso é o bem conhecido ditado que diz que “o menor caminho entre dois pontos é uma linha reta”.



Exercícios

1. Mostre que:

a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

b) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$

Sugestão: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

2. Mostre que as diagonais de um paralelogramo têm mesmo tamanho somente se ele é um retângulo.

Sugestão: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$

Capítulo V

PRODUTO VETORIAL

Definição e propriedades

O produto vetorial de dois vetores \vec{u} e \vec{v} , denotado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, é o vetor definido como:

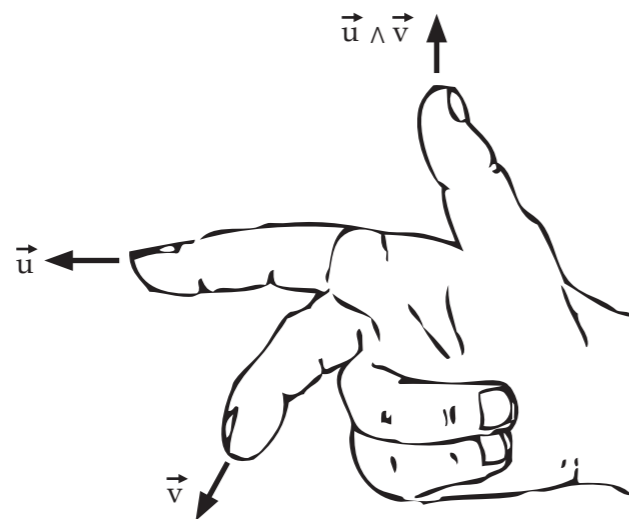
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ é a área do paralelogramo determinado por \vec{u} e \vec{v} , ou seja,

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \text{sen } \theta,$$

onde θ é a medida do ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é perpendicular a \vec{u} e \vec{v} .

- O sentido de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é dado pela regra da mão direita, que consiste no seguinte: colocando o dedo indicador no sentido de \vec{u} e o dedo médio no sentido de \vec{v} , o sentido de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ será dado pelo polegar, como ilustrado na figura abaixo.



Exemplo 1: Calcule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ sabendo que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ e a medida do ângulo θ entre \vec{u} e \vec{v} é 45° .

Solução: Pela definição de produto vetorial, temos que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \text{sen } 45^\circ = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$$

Exemplo 2: Dados os vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$, verifique que:

- | | |
|---|--|
| a) $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ | b) $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ |
| c) $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ | d) $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ |
| e) $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$ | f) $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$ |
| g) $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$ | |

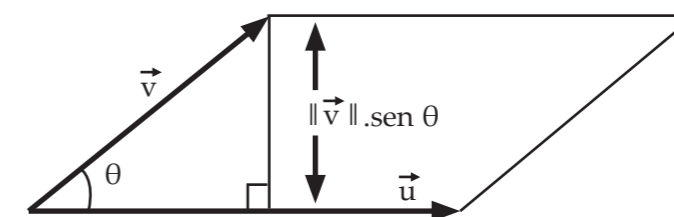
As seguintes propriedades decorrem imediatamente da definição de produto vetorial:

- O produto vetorial não é comutativo. Pela regra da mão direita, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{v} \wedge \vec{u}$ possuem sentidos opostos.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge (-\vec{u}) = (-\vec{u}) \wedge (-\vec{v}) = (-\vec{v}) \wedge \vec{u}$. Decorre da propriedade $\text{sen } \theta = \text{sen } (180^\circ - \theta)$.
- Se \vec{u} e \vec{v} são paralelos então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Em particular, $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- $(m\vec{u}) \wedge \vec{v} = m(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (m\vec{v})$, onde m é um escalar.
- Como $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ é a área do paralelogramo determinado por \vec{u} e \vec{v} , a área do triângulo determinado por \vec{u} e \vec{v} é $\frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{2}$.

O produto vetorial é distributivo em relação à adição, ou seja,

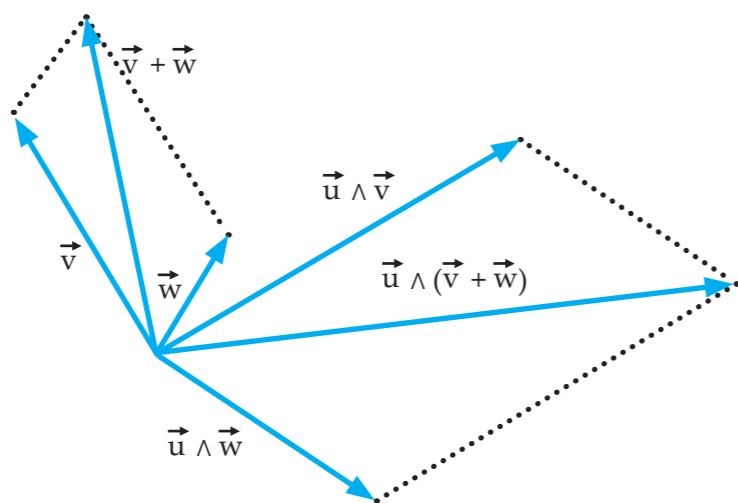
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

Um argumento geométrico para estas duas propriedades é o seguinte: observe inicialmente que o produto vetorial de \vec{u} e \vec{v} depende apenas da componente de \vec{v} perpendicular a \vec{u} , pois esta componente é $\|\vec{v}\| \cdot \text{sen } \theta$, como ilustrado na figura abaixo.



O produto vetorial de \vec{u} e \vec{v} é obtido tomando a componente de \vec{v} perpendicular a \vec{u} , fazendo uma rotação de 90° no sentido anti-horário (pela regra da mão direita) em torno de \vec{u} , e multiplicando o vetor obtido por $\|\vec{u}\|$.

Agora, para compreender, por exemplo, que $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$, considere um vetor \vec{u} perpendicular à esta página e apontando para o fundo dela. Os vetores \vec{v} e \vec{w} podem não estar nesta página, mas pela observação acima, o produto desses vetores com \vec{u} depende apenas da projeção de cada um deles nesta página. O produto vetorial de \vec{u} com \vec{v} , \vec{w} e $\vec{v} + \vec{w}$ corresponde a fazer uma rotação dos vetores \vec{v} , \vec{w} e $\vec{v} + \vec{w}$ de 90° no sentido horário (pois \vec{u} está apontando para o fundo da página) nesta página e multiplicar cada vetor obtido por $\|\vec{u}\|$. Como o fator $\|\vec{u}\|$ é o mesmo para todos eles, a igualdade $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})$ é preservada, como ilustrado na figura abaixo.



Exemplo 3: Mostre que $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{v} - \vec{u}) = 2(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

Solução: Pela propriedade distributiva do produto vetorial em relação à adição, temos:

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{v} - \vec{u}) &= (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{v} + (\vec{u} + \vec{v}) \wedge (-\vec{u}) \\
 &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{v} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge (-\vec{u})) + (\vec{v} \wedge (-\vec{u})) \\
 &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{v} \wedge (-\vec{u})) \\
 &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{v}) \\
 &= 2(\vec{u} \wedge \vec{v})
 \end{aligned}$$

Exercícios

1. Dados os vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$, efetuar:

- a) $(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{k}$ b) $\vec{j} \wedge 2\vec{i}$ c) $3\vec{i} \wedge 2\vec{j}$
 d) $(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{j}$ e) $3\vec{i} \wedge 2\vec{k}$ f) $\vec{i} \cdot (\vec{j} \wedge \vec{i})$
 g) $\vec{i} \cdot (\vec{j} \wedge \vec{j})$ h) $\vec{i} \cdot (\vec{j} \wedge \vec{k})$ i) $\vec{j} \cdot (\vec{j} \wedge \vec{k})$
 j) $\vec{j} \cdot (\vec{k} \wedge \vec{i})$

2. Dados $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$, calcular:

- a) $\vec{w} \wedge \vec{v}$ b) $\vec{v} \wedge (\vec{w} - \vec{u})$ c) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$
 d) $(2\vec{u}) \wedge (3\vec{v})$ e) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$

3. Mostre que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{w} \wedge \vec{u}$, sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

4. Mostre as seguintes identidades:

- a) $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (\vec{w} - \vec{v}) = (\vec{v} \wedge \vec{u}) + (\vec{w} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$
 b) $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \wedge (\vec{v} - 4\vec{w}) = (2\vec{u} \wedge \vec{v}) - (8\vec{u} \wedge \vec{w}) - (12\vec{v} \wedge \vec{v})$

5. Mostre que:

- a) se $\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{w}$
 b) se $3\vec{u} - 2\vec{v} + 17\vec{w} = \vec{0}$, então $3\vec{u} \wedge \vec{v} = 17\vec{v} \wedge \vec{w}$

Produto vetorial pelas coordenadas

Preliminares

Para simplificar o cálculo do produto vetorial através das coordenadas dos vetores, utilizaremos determinantes. Vamos então descrever brevemente suas propriedades básicas.

Um determinante de ordem 2 é definido como

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = (3) \cdot (5) - (-4) \cdot (2) = 23.$$

Um determinante de ordem 3 é definido como

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot a - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \cdot b + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot c$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (3) - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-2) + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-4) \\ &= (6 - 5) \cdot (3) - (2 + 10) \cdot (-2) + (1 + 6) \cdot (-4) \\ &= 3 + 24 - 28 \\ &= -1 \end{aligned}$$

O cálculo do determinante de ordem 3 pelo procedimento é conhecido como **desenvolvimento de Laplace** aplicado à 1ª linha.

Algumas propriedades básicas dos determinantes são:

1. A permutação de duas linhas inverte o sinal do determinante. No exemplo anterior, temos:

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (2) - (3) \cdot (5) = -23$$

2. Se duas linhas forem constituídas de elementos proporcionais, o determinante é zero (duas linhas iguais é um caso particular). Por exemplo, no determinante a seguir, os elementos da 2ª linha são o triplo dos elementos da 1ª.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

3. Se uma das linhas for constituída de zeros, o determinante é zero.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

As propriedades acima referem-se apenas às linhas da matriz pelo fato de, no estudo do produto vetorial, haver menção somente às linhas. No entanto, estas propriedades valem também para as colunas.

Produto vetorial pelas coordenadas

A fórmula para o produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ em termos das componentes dos vetores \vec{u} e \vec{v} pode ser obtida de forma similar à que fizemos para o produto interno. Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vetores do \mathbb{R}^3 . Considerando os vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$, e as propriedades da seção anterior, podemos escrever $\vec{u} \wedge \vec{v}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (\vec{u}_1 \cdot \vec{i} + \vec{u}_2 \cdot \vec{j} + \vec{u}_3 \cdot \vec{k}) \wedge (\vec{v}_1 \cdot \vec{i} + \vec{v}_2 \cdot \vec{j} + \vec{v}_3 \cdot \vec{k}) \\ &= \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 \cdot (\vec{i} \wedge \vec{j}) + \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_3 \cdot (\vec{i} \wedge \vec{k}) + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1 \cdot (\vec{j} \wedge \vec{i}) \\ &\quad + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_3 \cdot (\vec{j} \wedge \vec{k}) + \vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1 \cdot (\vec{k} \wedge \vec{i}) + \vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2 \cdot (\vec{k} \wedge \vec{j}) \\ &= (\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_3 - \vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{i} + (\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1 - \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_3) \cdot \vec{j} \\ &\quad + (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 - \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Esta expressão pode ser mais facilmente descrita como o determinante da seguinte matriz:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo 1. Determine o produto vetorial dos vetores $\vec{u} = (1, 3, 0)$ e $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

Solução:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

Exemplo 2. Determine um vetor perpendicular aos vetores $\vec{u} = (1, 0, 1)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

Solução: Um vetor perpendicular a \vec{u} e \vec{v} é $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-1, -1, 1)$.

Exemplo 3. Qual a área do triângulo cujos vértices são os pontos $P=(1,1,1)$, $Q=(2,3,3)$ e $R=(4, 1, 2)$.

Solução: Consideremos os vetores correspondentes a dois lados do triângulo. Pode ser, por exemplo, $\vec{PQ} = (1, 2, 2)$ e $\vec{PR} = (3, 0, 1)$. O produto vetorial desses dois vetores é:

$\vec{v} = \vec{PQ} \wedge \vec{PR} = (2, 5, -6)$. Logo, a área do triângulo é $\frac{\|\vec{v}\|}{2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

Exercício 4. Refaça o exercício anterior tomando os vetores \vec{OP} e \vec{OR} . Refaça-o mais uma vez tomando agora os vetores \vec{RP} e \vec{RQ} .

Exercícios

1. Dados $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$, calcular:

- a) $\vec{w} \wedge \vec{v}$ b) $\vec{v} \wedge (\vec{w} - \vec{u})$ c) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$
 d) $(2\vec{u}) \wedge (3\vec{v})$ e) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$ f) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$

2. Determinar um vetor ortogonal aos vetores $2\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{v} - \vec{u}$, sendo $\vec{u} = (3, -1, 2)$ e $\vec{v} = (1, 0, -3)$.

3. Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (3, 4, -2)$ e $\vec{w} = (-5, 1, -4)$, mostrar que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$

4. Determinar o valor de m para que o vetor $\vec{w} = (1, 2, m)$ seja ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (1, -3, -1)$.

5. Dados os vetores $\vec{u} = (a, 5b, -c/2)$ e $\vec{v} = (-3a, x, y)$, determinar x e y para que $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$

6. Calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, 1, 2)$, $\vec{v} = (4, -1, 0)$.

7. Mostre que o quadrilátero A = (1, -2, 3), B = (4, 3, -1), C = (5, 7, -3) e D = (2, 2, 1) é um paralelogramo e calcule sua área.

8. Calcule a área do paralelogramo cujos lados são determinados pelos vetores $2\vec{u}$ e \vec{v} , onde $\vec{u} = (2, -1, 0)$, $\vec{v} = (1, -3, 2)$.

9. Calcular a área do triângulo cujos vértices são:

- a) A = (-1, 0, 2) B = (-4, 1, 1) C = (0, 1, 3)
 b) A = (1, 0, 1) B = (4, 2, 1) C = (1, 2, 0)
 c) A = (2, 3, -1) B = (3, 1, -2) C = (-1, 0, 2)
 d) A = (-1, 2, -2) B = (2, 3, -1) C = (0, 1, 1)

9. Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto A = (3, 2, 1) e uma diagonal de extremidades B = (1, 1, -1) e C = (0, 1, 2).

Capítulo VI

PRODUTO MISTO

Definição

Cálculos de comprimentos, áreas e volumes são de inegável importância na geometria. Já temos instrumentos vetoriais eficientes para calcular comprimentos de segmentos e áreas de paralelogramos. A operação que definiremos agora, chamada de produto misto, é uma operação entre três vetores e a sua mais importante aplicação é o cálculo de volumes de paralelepípedos.

O **produto misto dos vetores** \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , denotado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, é o número real definido por:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$$

Em outras palavras, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ é o produto escalar entre $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e \vec{w} . Vale a pena observar que não é preciso colocar parênteses em $\vec{u} \wedge \vec{v}$, pois a única forma de entender $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$ é como o produto escalar entre $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e \vec{w} . Não faz sentido pensar em $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$ como o produto vetorial de \vec{u} com $\vec{v} \cdot \vec{w}$, pois $\vec{v} \cdot \vec{w}$ é um número real.

Exemplo 1: Calcule o produto misto dos vetores $\vec{u} = (1, 3, 0)$, $\vec{v} = (2, -1, 1)$ e $\vec{w} = (4, 2, 1)$.

Solução:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3-0) \cdot \vec{i} + (0-1) \cdot \vec{j} + (-1-6) \cdot \vec{k} = (3, -1, -7).$$

Logo, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = (3, -1, -7) \cdot (4, 2, 1) = 3$.

Exercícios

1. Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ nos seguintes casos:

- a) $\vec{u} = (2, 1, 2)$ $\vec{v} = (0, 3, 3)$ $\vec{w} = (1, 0, 1)$
 b) $\vec{u} = (1, 3, -1)$ $\vec{v} = (-1, 0, -1)$ $\vec{w} = (2, 1, 1)$
 c) $\vec{u} = (0, 1, 0)$ $\vec{v} = (0, 0, 1)$ $\vec{w} = (1, 1, 1)$
 d) $\vec{u} = (1, 1, 1)$ $\vec{v} = (1, 2, 3)$ $\vec{w} = (1, 4, 9)$

Produto misto pelas coordenadas

Vamos agora ver como calcular o produto misto quando os vetores estão expressos pelas suas coordenadas, de uma forma um pouco mais direta do que no exemplo acima.

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ são vetores do \mathbb{R}^3 então:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

A prova desta propriedade é bem simples, pois lembre-se de que

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

onde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Logo,

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \cdot w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot w_3 = \\ &= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 1. Calcule o produto misto dos vetores $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (1, 2, 3)$.

$$\begin{aligned} \text{Solução: } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 \cdot 3 - 2 \cdot 1) - 2 \cdot (1 \cdot 3 - 1 \cdot 1) + \\ &+ 1 \cdot (1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) = -4. \end{aligned}$$

Exercícios

1. Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ nos seguintes casos:

- a) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ $\vec{v} = (2, 1, 4)$ $\vec{w} = (2, -1, 3)$
 b) $\vec{u} = (5, -3, -7)$ $\vec{v} = (3, 2, 3)$ $\vec{w} = (1, 3, 4)$
 c) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ $\vec{v} = (0, 6, 18)$ $\vec{w} = (0, 0, 3)$

Propriedades do Produto misto

As propriedades do produto misto decorrem, em sua maioria, das propriedades dos determinantes.

I. O produto misto muda de sinal se trocarmos a posição de dois vetores, pois o determinante muda de sinal ao trocarmos duas linhas. Em relação ao exemplo 2, onde $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -4$, temos:

- a) $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = 4$ (troca entre \vec{u} e \vec{v})
 b) $[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = 4$ (troca entre \vec{u} e \vec{w})
 c) $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = 4$ (troca entre \vec{v} e \vec{w})

Se, em qualquer um destes três últimos produtos efetuarmos nova troca de posição entre dois vetores, o produto misto resultante volta a ser -4. Por exemplo, $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = -4$.

Portanto, se em relação ao produto misto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ ocorrer:

- a) uma troca de posição - haverá troca de sinal
 b) duas trocas de posição - não haverá troca de sinal

Resulta destas propriedades que os sinais “ \wedge ” e “ \cdot ” podem ser permutados, isto é:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$$

pois,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = \vec{v} \wedge \vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$$

onde a igualdade $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$ deve-se ao fato de que um destes produtos mistos pode ser obtido do outro através de duas trocas de posições, e a última igualdade decorre da comutatividade do produto escalar.

$$\begin{aligned} \text{II. } [\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w}] &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}] \\ [\vec{u}, \vec{v} + \vec{x}, \vec{w}] &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{x}, \vec{w}] \\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{x}] &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] \end{aligned}$$

onde x também é um vetor. As provas destas propriedades não são difíceis. Por exemplo,

$$\begin{aligned} [\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w}] &= (\vec{u} + \vec{x}) \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} \\ &= (\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{x} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \\ &= \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{x} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} \\ &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}] \end{aligned}$$

III. $[\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \alpha \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \alpha \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, onde α é um valor real. Esta propriedade decorre do fato de que ao multiplicarmos uma linha do determinante por uma constante, o determinante fica multiplicado pela constante.

IV. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ se, e somente se, os três vetores forem coplanares.

Pois, suponha que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, ou seja, $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Temos que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é perpendicular a \vec{w} . Por outro lado, no estudo do produto vetorial, vimos que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é também perpendicular a \vec{u} e a \vec{v} . Então $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é perpendicular a \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} . Isto significa que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares.

Reciprocamente, suponha que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares. Então o vetor $\vec{v} \wedge \vec{w}$, por ser perpendicular a \vec{v} e a \vec{w} , é também perpendicular a \vec{u} . Logo, se \vec{u} e $\vec{v} \wedge \vec{w}$ são perpendiculares, o produto escalar deles é zero, ou seja, $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

As seguintes propriedades são casos particulares da propriedade IV acima:

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= 0 \text{ se um dos vetores é nulo;} \\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= 0 \text{ se dois vetores forem paralelos.} \end{aligned}$$

Exemplo 1. Verifique se os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 4)$ são coplanares.

Solução: Como $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, os vetores não são coplanares.

Exemplo 2. Qual o valor de m para que os vetores $\vec{u} = (2, m, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$ e $\vec{w} = (-1, 3, -1)$ sejam coplanares?

Solução: Para que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} sejam coplanares deve-se ter $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, ou seja,

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$2 - 2m - 12 + m = 0.$$

Portanto, $m = -10$.

Exemplo 3. Verificar se os pontos $A = (1, 2, 4)$, $B = (-1, 0, 2)$, $C = (0, 2, 2)$ e $D = (-2, 1, 3)$ estão em um mesmo plano.

Solução: Os quatro pontos dados estão em um mesmo plano se forem coplanares os vetores \vec{AB} , \vec{AC} e \vec{AD} , isto é, se $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = 0$.

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

Logo, os pontos dados são coplanares.

Exercícios

1. Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$, calcular:

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ b) $[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$ c) $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$

2. Sabendo que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -5$, calcular:

a) $[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$ b) $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$ c) $[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$
d) $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$

3. Sabendo que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2$, calcular:

- a) $[2\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$ b) $[\vec{v}, 3\vec{u}, \vec{w}]$ c) $[\vec{u} + \vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$

4. Sabendo que $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}] = 2$ e $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] = 5$, calcular

- a) $[\vec{u}, \vec{x}, -\vec{w}]$ b) $[3\vec{u}, 3\vec{w}, -2\vec{x}]$ c) $[2\vec{u} + 4\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}]$

5. Verificar se são coplanares os vetores

- a) $\vec{u} = (1, -1, 2)$ $\vec{v} = (2, 2, 1)$ $\vec{w} = (-2, 0, 4)$
 b) $\vec{u} = (2, -1, 3)$ $\vec{v} = (3, 1, -2)$ $\vec{w} = (7, -1, 4)$

6. Determinar o valor de k para que sejam coplanares os vetores

- a) $\vec{u} = (2, -1, k)$ $\vec{v} = (1, 0, 2)$ $\vec{w} = (k, 3, k)$
 b) $\vec{u} = (2, k, 1)$ $\vec{v} = (1, 2, k)$ $\vec{w} = (3, 0, -3)$

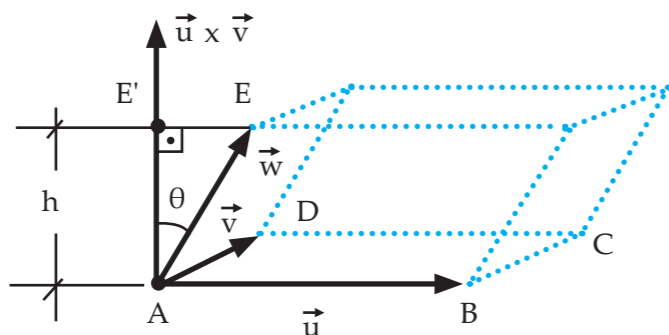
7. Verificar se são coplanares os pontos

- a) A = (1, 1, 0) B = (-2, 1, -6) C = (-1, 2, -1) D = (2, -1, -4)
 b) A = (2, 1, 2) B = (0, 1, -2) C = (1, 0, -3) D = (3, 1, -2)

8. Para quais valores de m os pontos A = (m, 1, 2), B = (2, -2, -3), C = (5, -1, 1) e D = (3, -2, -2) estão no mesmo plano?

Interpretação geométrica do produto misto

Consideremos o paralelepípedo determinado pelos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , como ilustrado na figura a seguir.



Sabemos da geometria que o seu volume V é o produto da área da base $ABCD$ pela altura h . Como a área da base $ABCD$ é dada pelo módulo do produto vetorial de \vec{u} e \vec{v} , temos

$$V = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \cdot h$$

Mas,

$$h = \|\vec{w}\| \cdot |\cos\theta|,$$

onde θ é a medida do ângulo entre $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e \vec{w} . Note que é necessário considerar o valor absoluto $|\cos\theta|$, pois θ pode ser um ângulo obtuso. Então o volume V do paralelepípedo é

$$V = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\cos\theta| = \|\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}\| = \|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\|.$$

Exemplo 1. Calcular o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-1, 1, 1)$.

Solução: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$

Logo, $V = \|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\| = |-2| = 2.$

Exemplo 2. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, m, -2)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (2, -1, 2)$ seja 16.

Solução: Devemos ter $V = \|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\| = 16.$

Como $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & m & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2m - 8.$

V em, $|-2m - 8| = 16$, o que, pela definição de módulo, implica duas hipóteses:

$$-2m - 8 = 16 \quad \text{ou} \quad -2m - 8 = -16.$$

E, portanto, $m = -12$ ou $m = 4.$

Exercícios

1. Qual o volume do cubo determinado pelos vetores $\vec{i} = (1, 0, -0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$?

2. Um paralelepípedo é determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{k} = (-2, 1, 5)$. Calcular seu volume e a altura relativa à base definida pelos vetores \vec{u} e \vec{v} .
3. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (0, -1, 2)$, $\vec{v} = (-4, 2, -1)$ e $\vec{w} = (3, m, -2)$ seja igual a 33. Calcular a altura deste paralelepípedo relativa à base definida pelos vetores \vec{u} e \vec{v} .
4. O ponto $A = (1, -2, 3)$ é um dos vértices de um paralelepípedo e os três vértices adjacentes são $B = (2, -1, -4)$, $C = (0, 2, 0)$ e $D = (-1, m, 1)$. Determinar o valor de m para que o volume do paralelepípedo seja igual a 20.
5. Dados os pontos $A = (2, 1, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (3, 2, -2)$, determinar o ponto D do eixo Oz para que o volume do paralelepípedo determinado por \vec{AB} , \vec{AC} e \vec{AD} seja 25.
6. Determinar m e n para que se tenha $(m, n, 2) \cdot ((3, 1, 2) \wedge (0, 0, -1)) = 9$.

Referências

- Boulos, P. e Camargo, I. – Introdução à geometria analítica no espaço. Ed. Makron Books, 1997.
- Camargo, I., e Boulos, P. – Geometria analítica, um tratamento vetorial, 3a. Edição, Ed. Pearson, 2006.
- Corral, M. – Vector Calculus – Schoolcraft College – 2008.
- Kléténic – Problemas de geometria analítica. Ed. Livraria Cultura Brasileira, 1977.
- Murdoch, D. C. – Geometria analítica. Ed. LTC S.A., 2a. Edição, 1978.
- Steinbruch, A. e Winterle, P. – Geometria analítica. Ed. McGraw-Hill, 1987.
- Venturi, J. R. – Álgebra Vetorial e Geometria Analítica – 9a. Edição, Curitiba (PR). ISBN: 85.85132-48-5.
- Winterle, P. – Vetores e geometria analítica, Ed. Pearson, 2007.

MATEMÁTICA

LICENCIATURA



Módulo 2

GEOMETRIA ANALÍTICA

Marcelo Henriques de Carvalho

INFORMAÇÕES SOBRE O MATERIAL

PREZADO ALUNO,

O presente trabalho foi escrito tendo como norte uma premissa básica: que fosse acessível ao aluno do 1.º ano da faculdade. Para tanto, sua linguagem teria que ser tão clara e didática quanto possível. Por vezes, preferiu-se a apresentação intuitiva aos refinamentos teóricos. Críticas e sugestões não de surgir, e serão bem-vindas. Resta-nos o consolo de ter envidado esforços para empregar utilmente o nosso tempo.

Você está de posse de um material auto-suficiente. Este livro foi concebido para que você adquira os fundamentos necessários do cálculo vetorial, da geometria analítica e da álgebra linear para os seus estudos posteriores, relativos à sua formação. O livro foi planejado para que você tenha uma formação de base sólida. Aconselhamos estudá-lo utilizando dois tipos de leitura: uma superficial ou de reconhecimento e outra profunda ou detalhada. A leitura superficial deverá ser a da leitura de cada capítulo, parágrafo, teorema, etc..., todo de uma vez e sem a preocupação de uma compreensão detalhada, mas apenas com o objetivo de que você tenha uma visão do conjunto das idéias em questão.

Aconselhamos que você faça esta forma de leitura pelo menos duas vezes, em cada unidade. Tendo então obtido a idéia geral da unidade na qual está trabalhando, você deverá fazer uma leitura profunda e detalhada, que é o estudo detalhado de cada aspecto do texto analisado, feito com calma e rigor, e só deverá finalizá-la quando a unidade analisada estiver totalmente compreendida, em seus mínimos detalhes. Para esta abordagem você deverá estar munido de uma lápis, borracha e papel. Experimente reproduzir o conteúdo da unidade, em detalhes, mas não de forma decorada e sim como resultado de seu aprendizado. Faça isso e você não se arrependerá do trabalho realizado. Acreditamos que sob a orientação dessas duas abordagens seu aprendizado ocorrerá de forma maximizada.

O livro é composto por dois módulos:

Módulo 1 – Vetores

Módulo 2 – Geometria Analítica

Em cada capítulo, cada seção é organizada em forma de definições, lemas, proposições, teoremas e corolários, muitos deles com demonstrações com certo nível de rigor. No entanto, devido aos objetivos programáticos dessa disciplina, algumas demonstrações foram omitidas, sem prejuízos ao seu aprendizado. O leitor mais ousado pode consultar a bibliografia recomendada, para entender essas demonstrações, mas isso não é uma exigência para esse momento.

Este texto possui muitos exercícios resolvidos, de forma comentada, sobre os diferentes conteúdos abordados. A finalidade deles é esclarecer a teoria apresentada, exemplificá-la, e apresentar um método de resolução, das diferentes questões que são propostas. Isso não impede que você desenvolva outras modalidades de resoluções. O importante é que o seu método seja logicamente consistente. Os exercícios propostos estão apresentados ao longo de cada seção (e não apenas no final de cada capítulo) com o intuito de facilitar ao leitor o emprego dos resultados e técnicas necessárias para resolvê-los.

Ressaltamos que os exercícios resolvidos desempenham um papel importante no aprendizado. Sugerimos ao leitor que, ao estudá-los, utilize o chamado “método do strip-tease” para extrair deles o maior proveito. O método consiste em tapar a resolução do exercício e tentar resolvê-lo. Não conseguindo, descobre-se a primeira linha e tenta-se completar a resolução. Não conseguindo ainda, descobre-se mais uma linha, e assim por diante.

Ao final, apresentaremos algumas referências como leitura alternativa, complementar e até suplementar, dos conteúdos em questão, onde você poderá encontrar outras visões sobre os mesmos assuntos tratados neste texto e, em muitos deles, você encontrará aplicações dos tópicos estudados. O contato com esses assuntos ajudará a ter uma idéia de como a Matemática evoluiu para estruturas mais complexas.

Desejamos a vocês sucesso em seus estudos.

PREFÁCIO

Geometria Analítica é o estudo da geometria pelo método cartesiano (René Descartes, 1596 – 1650), que consiste em associar equações aos entes geométricos (reta, plano, etc.), e através do estudo dessas equações, tirar conclusões (com auxílio da álgebra) a respeito destes entes geométricos.

Do ponto de vista da Geometria Analítica, conhecer ou determinar uma reta ou um plano, significa conhecer ou determinar sua equação. A Geometria Analítica encontra na Álgebra seu aliado mais importante. Não apenas a Álgebra elementar, como também a Álgebra Vetorial. Os vetores desempenham um papel importante neste curso, como logo ficará evidente. Eles constituem os instrumentos ideais para o desenvolvimento de muitos conceitos importantes da Física e da Matemática.

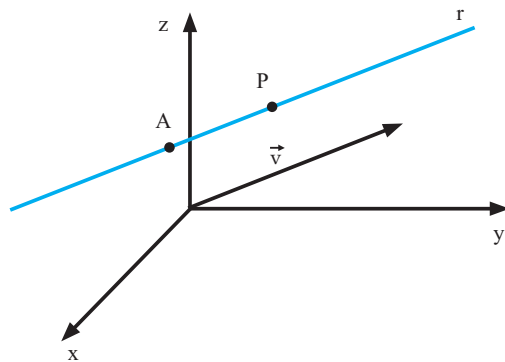
São pré-requisitos para este curso os resultados básicos da matemática elementar estudados no ensino médio. Espera-se também do leitor familiaridade com alguns conceitos da Álgebra Elementar, como determinantes, matrizes e sistemas lineares.

Capítulo I

EQUAÇÕES DA RETA

Equação vetorial da reta

Consideremos um ponto $A = (a, b, c)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$. Observe que existe uma única reta r que passa por A e tem a direção de \vec{v} . Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence à r se, e somente se, o vetor \vec{AP} é paralelo a \vec{v} , como ilustrado na figura a seguir.



Por definição de vetores paralelos, temos que existe um valor real t tal que

$$\vec{P} - \vec{A} = \vec{AP} = t\vec{v},$$

ou

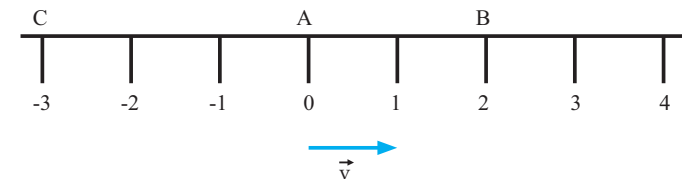
$$\vec{P} = \vec{A} + t\vec{v}.$$

Reescrevendo esta equação em termos das coordenadas, temos

$$(x, y, z) = (a, b, c) + t(x_1, y_1, z_1).$$

Qualquer uma das equações acima é denominada **equação vetorial da reta r** . O vetor \vec{v} é chamado **vetor diretor da reta r** e t é denominado **parâmetro**.

Geometricamente, podemos interpretar a equação vetorial da reta r imaginando que r seja uma régua infinita em que o ponto-zero é A e cuja escala tem $\|\vec{v}\|$ como unidade, como ilustrado na figura a seguir. A posição de cada ponto da régua é determinado pelo valor de t . Por exemplo, para $t = 2$ temos o ponto B . Para $t = -3$, temos o ponto C . Se trocarmos o vetor diretor \vec{v} por outro, mudaremos a unidade ou o sentido da escala. Se trocarmos o ponto A por outro ponto de r , mudaremos a origem da escala. Assim como muitas régua podem ser imaginadas sobre a mesma reta, muitas equações vetoriais podem estar associadas a ela.



Exemplo 1: Determine a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $A = (1, -1, 4)$ e tem direção do vetor $\vec{v} = (2, 3, 2)$.

Solução: A equação vetorial de r é

$$(x, y, z) = (1, -1, 4) + t(2, 3, 2).$$

Se desejarmos obter pontos de r , basta atribuir valores para t . Por exemplo, para $t = 1$ obtém-se

$$(x, y, z) = (1, -1, 4) + 1(2, 3, 2) = (3, 2, 6),$$

e portanto, o ponto $(3, 2, 6) \in r$. De forma análoga,

- Para $t = 2$ obtém-se $(x, y, z) = (1, -1, 4) + 2(2, 3, 2) = (5, 5, 8)$;
- Para $t = 3$ obtém-se $(x, y, z) = (1, -1, 4) + 3(2, 3, 2) = (7, 8, 10)$;
- Para $t = 0$ obtém-se $(x, y, z) = (1, -1, 4) + 0(2, 3, 2) = (1, -1, 4)$;
- Para $t = -1$ obtém-se $(x, y, z) = (1, -1, 4) - 1(2, 3, 2) = (-1, -4, 2)$;

e assim por diante. Todos os pontos acima obtidos pertencem à r . Se t assumir todos os valores reais, teremos todos os infinitos pontos

da reta r .

Observe que:

- A cada valor real t corresponde um único ponto P de r . Reciprocamente, a cada ponto P de r corresponde um único valor real t .
- A equação vetorial de uma reta r não é única. Na verdade, existem infinitas equações, pois basta tomar outro ponto de r (em vez de A) ou outro vetor não nulo qualquer que seja paralelo a \vec{v} , que teremos uma outra equação vetorial de r .

Exemplo 2: Escreva a equação vetorial da reta que passa pelos pontos $A = (-1, 1, 0)$ e $B = (3, 1, -2)$.

Solução:

O vetor diretor de r é o vetor $\vec{AB} = B - A = (3, 1, -2) - (-1, 1, 0) = (4, 0, -2)$. Como ponto da reta, podemos escolher A ou B . Escolhendo B temos a equação vetorial

$$(x, y, z) = (3, 1, -2) + t(4, 0, -2)$$

Exercícios

1. Escreva a equação vetorial da reta que passa pelo ponto A e cujo vetor diretor é o vetor \vec{v} , nos seguintes casos:

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| a) $A = (-3, 4, -1)$ | $\vec{v} = (1, -1, 2)$ |
| b) $A = (3, 4, 2)$ | $\vec{v} = (1, -1, 0)$ |
| c) $A = (-1, 2, -1)$ | $\vec{v} = (0, 0, 3)$ |
| d) $A = (0, 0, 0)$ | $\vec{v} = (1, 2, 1)$ |
| e) $A = (3, 5, 18)$ | $\vec{v} = (5, 20, -14)$ |
| f) $A = (0, 0, 0)$ | $\vec{v} = (1, 0, 0)$ |

2. Escreva equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e B , nos seguintes casos:

- | | |
|-----------------------|-------------------|
| a) $A = (3, -1, 4)$ | $B = (4, 0, 5)$ |
| b) $A = (-1, 5, 7)$ | $B = (8, 1, 9)$ |
| c) $A = (0, 1, 3)$ | $B = (-1, -1, 2)$ |
| d) $A = (-1, -2, -3)$ | $B = (8, 9, 10)$ |
| e) $A = (-1, -1, 0)$ | $B = (0, 0, 0)$ |
| f) $A = (0, 0, 0)$ | $B = (2, 0, 0)$ |

Exemplo 4: Considere a reta r cuja equação vetorial é $(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(-1, 1, 2)$. Determine os pontos de r que distam $\sqrt{6}$ do ponto $A = (1, 0, 1)$.

Solução:

Seja $X = (x, y, z)$ um ponto procurado. Como X é um ponto de r , ele satisfaz as equações de r para algum t , ou seja, existe um valor real t tal que

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(-1, 1, 2) = (1 - t, t, 1 + 2t).$$

Por outro lado, o vetor \vec{AX} é dado por

$$\vec{AX} = X - A = (x, y, z) - (1, 0, 1) = (1 - t, t, 1 + 2t) - (1, 0, 1) = (-t, t, 2t).$$

A distância de A a X é dada pelo módulo do vetor \vec{AX} .

$$\|\vec{AX}\| = \|X - A\| = \sqrt{(-t)^2 + t^2 + (2t)^2} = \sqrt{6t^2} = |t|\sqrt{6}$$

Fazendo agora $|t|\sqrt{6}$, temos $|t| = 1$, e portanto, $t = \pm 1$. Substituindo cada valor de t na equação de r , encontramos os pontos $(0, 1, 3)$ e $(2, -1, -1)$. Isto significa que temos, na verdade, dois pontos procurados, que são $(0, 1, 3)$ e $(2, -1, -1)$.

Exercícios

1. Dada a reta r por sua equação vetorial, e dado o ponto A , determine os pontos de r que distam m de A , nos casos:

- | | | |
|-----------------------------------|-------------------|----------------|
| a) $X = (-1, 0, -1) + t(2, 1, 2)$ | $A = (-1, 0, -1)$ | $m = 6$ |
| b) $X = (1, 1, 0) + t(2, 0, 0)$ | $A = (1, 2, 2)$ | $m = \sqrt{5}$ |
| c) $X = (1, 1, 0) + t(2, 0, 1)$ | $A = (2, 1, 1)$ | $m = 1/2$ |

2. Dada a reta r pela equação vetorial $X = (1, 0, 0) + t(-1, -1, -1)$ e os pontos $A = (0, 0, 1)$ e $B = (1, 1, 1)$, determine o ponto de r equidistante de A e B .

Equações paramétricas da reta

Considere a equação vetorial da reta r

$$(x, y, z) = (a, b, c) + t(x_1, y_1, z_1),$$

que passa pelo ponto $A = (a, b, c)$ e tem a direção do vetor não nulo $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$. Podemos também escrever esta equação como

$$(x, y, z) = (a + tx_1, b + ty_1, c + tz_1).$$

Pela condição de igualdade de vetores, obtemos

$$\begin{cases} x = a + tx_1 \\ y = b + ty_1 \\ z = c + tz_1 \end{cases}$$

Estas três equações recebem o nome de **equações paramétricas da reta r**.

Exemplo 1: Determine as equações paramétricas da reta r: $(-1, 2, 3) + t(2, -3, 0)$.

Solução:

As equações paramétricas de r são

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 \end{cases}$$

Exemplo 2: Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (3, -4, 2)$ e tem direção do vetor $\vec{v} = (2, 1, -3)$.

Solução:

As equações paramétricas de r são

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

Exercícios

1. Escreva equações paramétricas da reta paralela ao vetor \vec{v} e que passa pelo ponto A, nos seguintes casos:

- a) $A = (-3, 4, -1)$ $\vec{v} = (1, -1, 2)$
 b) $A = (3, 4, 2)$ $\vec{v} = (1, -1, 0)$
 c) $A = (-1, 2, -1)$ $\vec{v} = (0, 0, 3)$
 d) $A = (0, 0, 0)$ $\vec{v} = (1, 2, 1)$
 e) $A = (3, 5, 18)$ $\vec{v} = (5, 20, -14)$
 f) $A = (0, 0, 0)$ $\vec{v} = (1, 0, 0)$

Exemplo 4: Dado o ponto $A = (2, 3, -4)$ e o vetor $\vec{v} = (1, -2, 3)$, pede-se:

a) Escrever as equações paramétricas da reta r que passa por A e tem direção de \vec{v} .

Solução:

As equações paramétricas de r são

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

b) Encontrar os dois pontos B e C de r correspondentes aos parâmetros $t = 1$ e $t = 4$, respectivamente.

Solução:

Das equações paramétricas acima tem-se:

$$\bullet \text{ para } t = 1, \begin{cases} x = 2 + (1) = 3 \\ y = 3 - 2(1) = 1 \\ z = -4 + 3(1) = -1 \end{cases} \therefore B = (3, 1, -1) \in r.$$

$$\bullet \text{ para } t = 4, \begin{cases} x = 2 + (4) = 6 \\ y = 3 - 2(4) = -5 \\ z = -4 + 3(4) = 8 \end{cases} \therefore B = (6, -5, 8) \in r.$$

c) Determinar o ponto de r cuja abscissa é 4.

Solução:

Como o ponto tem abscissa 4 ($x = 4$), temos

$$4 = 2 + t \quad (1^\text{a} \text{ equação de } r), \text{ e portanto, } t = 2.$$

Agora, substituindo t nas outras equações, temos

$$\begin{cases} y = 3 - 2(2) = -1 \\ z = -4 + 3(2) = 2 \end{cases}$$

Logo, o ponto procurado é $(4, -1, 2)$.

d) Verificar se os pontos $D = (4, -1, 2)$ e $E = (5, -4, 3)$ pertencem à r.

Solução:

Um ponto pertence à reta se ele satisfaz as equações de r.

• para $D = (4, -1, 2)$ as equações

$$\begin{cases} 4 = 2 + t \\ -1 = 3 - 2t \\ 2 = -4 + 3t \end{cases} \text{ se verificam para } t = 2, \text{ e portanto, } D \in r.$$

- para $E = (5, -4, 3)$ as equações

$$\begin{cases} 5 = 2 + t \\ -4 = 3 - 2t \\ 3 = -4 + 3t \end{cases}$$

não são satisfeitas para o mesmo valor de t ($t=3$ satisfaz a 1ª equação mas não as duas outras). Logo, $E \notin r$.

e) Determinar os valores de m e n para que o ponto $F = (m, 5, n)$ pertença à r .

Solução:

Para que F pertença à r , as equações

$$\begin{cases} m = 2 + t \\ 5 = 3 - 2t \\ n = -4 + 3t \end{cases} \quad \text{devem se verificar para algum real } t.$$

Da equação $5 = 3 - 2t$, obtemos $t = -1$. Substituindo t nas outras equações, temos:

$$\begin{cases} m = 2 + (-1) = 1 \\ n = -4 + 3(-1) = -7 \end{cases}$$

f) Escrever outra equação paramétrica de r .

Solução:

Tomando o ponto $B = (3, 1, -1)$ de r obtido no item (b) e o vetor diretor $2\vec{v} = (2, -4, 6)$, temos a seguinte equação paramétrica de r .

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$$

g) Escrever equações paramétricas da reta s que passa pelo ponto $G = (5, 2, -4)$ e é paralela à r .

Solução:

Como $s \parallel r$, o vetor $\vec{v} = (1, -2, 3)$ também é vetor diretor de s . As equações paramétricas de s são

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

Exemplo 5: Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (2, 3, -4)$ e é paralela ao eixo dos y .

Solução:

Como r é paralela ao eixo dos y , um de seus vetores diretores é $\vec{j} = (0, 1, 0)$. Logo, equações paramétricas de t são

$$\begin{cases} x = 2 + 0 \cdot t \\ y = 3 + 1 \cdot t \\ z = -4 + 0 \cdot t \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + t \\ z = -4 \end{cases}$$

Exemplo 6: Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $A = (-4, 1, 2)$ e $B = (1, 1, 3)$.

Solução:

O vetor diretor de r é o vetor $\vec{AB} = B - A = (1, 1, 3) - (-4, 1, 2) = (5, 0, 1)$. Como ponto da reta, podemos escolher A ou B . Escolhendo B temos as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Exercícios

1. Escreva equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e B , nos seguintes casos:

- | | | |
|-----------------------|---|-------------------|
| a) $A = (3, -1, 4)$ | e | $B = (4, 0, 5)$ |
| b) $A = (-1, 5, 7)$ | e | $B = (8, 1, 9)$ |
| c) $A = (0, 1, 3)$ | e | $B = (-1, -1, 2)$ |
| d) $A = (-1, -2, -3)$ | e | $B = (8, 9, 10)$ |
| e) $A = (-1, -1, 0)$ | e | $B = (0, 0, 0)$ |
| f) $A = (0, 0, 0)$ | e | $B = (2, 0, 0)$ |

2. Escreva equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (1, 0, 3)$ e pelo ponto médio do segmento \vec{BC} , onde $B = (1, 7, 8)$ e $C = (1, -7, 2)$.

3. Escrever equações paramétricas das retas que passam pelo ponto $A = (4, -5, 3)$ e são, respectivamente, paralelas aos eixos Ox , Oy e Oz .

4. Dada a reta $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$, determinar o ponto de r tal que

- a) a ordenada seja 6 ($y = 6$);
 b) a abscissa seja igual à ordenada ($x = y$);
 c) a cota seja o quádruplo da abscissa ($z = 4x$).

5. A reta r passa pelo ponto $A = (4, -3, -2)$ e é paralela à reta s :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Se $P = (m, n, -5) \in r$, determine m e n .

6. Determinar o ponto $P = (m, 1, n)$ que pertence à reta que passa pelos pontos $A = (3, -1, 4)$ e $B = (4, -3, -1)$.

7. Considere o triângulo de vértices $A = (-1, 4, -2)$, $B = (3, -3, 6)$ e $C = (2, -1, 4)$. Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto médio do lado \overline{AB} e pelo vértice C .

8. Os pontos $M_1 = (2, -1, 3)$, $M_2 = (1, -3, 0)$ e $M_3 = (2, 1, -5)$ são pontos médios dos lados de um triângulo ABC . Obter as equações paramétricas da reta que contém o lado cujo ponto médio é M_1 .

Equações simétricas da reta

Considere as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (a, b, c)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$, onde x_1, y_1 e z_1 são não nulos.

$$\begin{cases} x = a + tx_1 \\ y = b + ty_1 \\ z = c + tz_1 \end{cases}$$

Isolando t nas três equações, obtemos

$$t = \frac{x-a}{x_1} \quad t = \frac{y-b}{y_1} \quad \text{e} \quad t = \frac{z-c}{z_1}$$

Podemos escrever então

$$\frac{x-a}{x_1} = \frac{y-b}{y_1} = \frac{z-c}{z_1}$$

Estas equações recebem o nome de **equações simétricas da reta r** que passa pelo ponto $A = (a, b, c)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$.

Exemplo 1: Determine as equações simétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (3, 0, -5)$ e tem direção do vetor $\vec{v} = (2, 2, -1)$.

Solução:

As equações são

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-1}$$

Note que se desejarmos obter outros pontos da reta, basta atribuir um valor qualquer a uma das variáveis. Por exemplo, para $x = 5$, tem-se

$$\frac{5-3}{2} = 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-1}$$

O que implica que $y = 2$ e $z = -6$. Logo, $(5, 2, -6)$ pertence à r .

Exercício proposto

1. Escreva equações simétricas da reta paralela ao vetor v e que passa pelo ponto A , nos seguintes casos:

- a) $A = (-3, 4, -1)$ $\vec{v} = (1, -1, 2)$
 b) $A = (3, 4, 2)$ $\vec{v} = (1, -1, 0)$
 c) $A = (-1, 2, -1)$ $\vec{v} = (0, 0, 3)$
 d) $A = (0, 0, 0)$ $\vec{v} = (1, 2, 1)$
 e) $A = (3, 5, 18)$ $\vec{v} = (5, 20, -14)$
 f) $A = (0, 0, 0)$ $\vec{v} = (1, 0, 0)$

Exemplo 3: Determine as equações paramétricas da reta

$$\frac{x-4}{3} = y + 1 = 2z - 1.$$

Solução: Observe inicialmente que $2z - 1 = \frac{z - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$.

Logo, um ponto da reta é $(4, -1, 1/2)$ e um vetor diretor é $(3, 1, 1/2)$. As equações paramétricas são

$$x = 4 + 3t, \quad y = -1 + t \quad \text{e} \quad z = 1/2 + t/2.$$

Exemplo 4: Determine um ponto e um vetor diretor da reta dada pelas seguintes equações simétricas

$$\frac{3x-2}{7} = \frac{1-y}{4} = z+5$$

Solução:

Primeiramente, reescrevemos cada membros acima de forma mais conveniente.

$$\frac{3x-2}{7} = \frac{3(x-\frac{2}{3})}{7} = \frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{7}{3}}$$

$$\frac{1-y}{4} = \frac{-(y-1)}{4} = \frac{y-1}{-4}$$

$$z+5 = \frac{z-(-5)}{1}$$

Logo, as equações dadas equivalem a

$$\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-(-5)}{1}$$

Portanto, elas representam uma reta que contém o ponto $(\frac{2}{3}, 1, -5)$ e tem o vetor $(\frac{7}{3}, -4, 1)$ como vetor diretor.

Exercícios

1. Determine um ponto e um vetor diretor da reta dada pelas seguintes equações simétricas. Em seguida, escreva as equações paramétricas das seguintes retas:

a) $\frac{1-x}{8} = \frac{2y+4}{3} = \frac{z-1}{2}$

b) $\frac{4+5x}{7} = \frac{3-2y}{2} = z+2$

c) $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-8}{9}$

d) $\frac{3x+1}{2} = \frac{4y+1}{3} = \frac{5z-1}{18}$

e) $x = y = z$

2. Verificar se os pontos $A = (5, -5, 6)$ e $B = (4, -1, 12)$ pertencem à reta

$$r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$$

3. Determinar o ponto da reta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{4}$ que possui

a) abscissa 5;

b) ordenada 2.

Nota:

Qual a finalidade de estudar tantas formas de equações da reta? Acontece que cada uma tem suas características próprias que, bem exploradas, simplificam certas tarefas. A forma vetorial é intrínseca e não depende de sistema de coordenadas. Por isso, é útil em situações teóricas ou quando não se fixou um sistema. A forma paramétrica e sua forma vetorial equivalente permitem a caracterização dos pontos da reta com o auxílio de um único parâmetro t , o que, na prática, leva à redução do número de incógnitas (em vez de três, x , y , e z , trabalhamos com uma, t). A forma simétrica, que não apresenta parâmetro, exhibe relações que as coordenadas dos pontos da reta devem manter entre si. Um aspecto comum às três formas é a funcionalidade visual: basta olhar as equações para obter um ponto da reta e um vetor diretor.

Capítulo II

EQUAÇÕES DA RETA - APLICAÇÕES

Retas ortogonais e perpendiculares

Dadas as retas r e s , cujos vetores diretores são \vec{u} e \vec{v} , respectivamente. Utilizando propriedades do produto interno que estudamos no módulo sobre vetores, podemos concluir que r é ortogonal à s se e somente se $\vec{u} \perp \vec{v}$. Recordemos que $\vec{u} \perp \vec{v}$ se e somente se o produto interno entre \vec{u} e \vec{v} é zero ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$). Portanto, podemos escrever

$$r \text{ é ortogonal a } s \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Ressaltamos que retas ortogonais podem ser concorrentes (ou seja, podem interceptarem-se) ou não. Caso sejam concorrentes, dizemos que são perpendiculares.

Exemplo 1: Verifique se as retas r e s abaixo são ortogonais

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 10 + \frac{t}{3} \end{cases}$$

Solução:

Temos das equações acima que $\vec{u} = (-1, 1, 3)$ e $\vec{v} = (2, 1, 1/3)$ são os vetores diretores de r e s , respectivamente. Como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 1, 3) \cdot (2, 1, 1/3) = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1/3 = 0,$$

concluimos que r e s são ortogonais.

Exemplo 2: Verifique se as retas r e s abaixo são ortogonais

$$r: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases} \quad s: \frac{x-1}{2} = y = z$$

Solução:

De forma análoga ao exemplo anterior, temos que $\vec{u} = (-2, 0, 6)$ e $\vec{v} = (2, 1, 1)$ são os vetores diretores de r e s , respectivamente.

Como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2, 0, 6) \cdot (2, 1, 1) = (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \neq 0,$$

concluimos que r e s não são ortogonais.

Exercícios

1. Decidir se as retas r e s são ortogonais ou não, nos seguintes casos:

$$a) r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 30 + 10t \end{cases}$$

$$b) r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{5} \quad s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}$$

$$c) r: \frac{1-2x}{5} = y = z \quad s: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$$

2. Determine m de modo que sejam ortogonais as retas r e s , nos casos:

$$a) r: \frac{2x-1}{2} = 3 - y = 2 - z \quad s: \begin{cases} x = mt \\ y = 3 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$b) r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases} \quad s: \frac{x}{m} = \frac{y}{2m} = z - 1$$

$$c) r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{m} = \frac{z-4}{2m}$$

$$s: \frac{x}{m} = \frac{2y-1}{4m} = z$$

$$d) r: \frac{3x-2}{1} = \frac{3-4y}{2} = z$$

$$s: x = 1 + 3mt \quad y = 2mt \quad z = 1$$

3. Determine a reta que passa pelo ponto $A = (1, 3, 5)$ e intercepta o eixo z perpendicularmente.

Intersecção de retas

Duas retas r e s são **concorrentes**, ou seja, elas se interceptam em um ponto P se e somente se P verificar simultaneamente as equações de r e s . Isto equivale a dizer que o sistema obtido igualando as equações de r e s tem solução única. Isto será mais bem compreendido através dos exemplos a seguir.

Exemplo 1: Verifique se as retas r e s abaixo são concorrentes. Caso afirmativo, dê o ponto de intersecção:

$$\begin{array}{lll} r: x = 1 - 2t & y = 2 + 4t & z = -t \\ s: x = 1 + t' & y = t' & z = 1 - t' \end{array}$$

Solução:

Igualando as respectivas equações, temos o seguinte sistema de equações nas incógnitas t e t' :

$$\begin{array}{lll} 1 - 2t = 1 + t' & 2 + 4t = t' & -t = 1 - t' \end{array}$$

Devemos agora verificar se o sistema acima tem solução única. Para isso, vamos considerar um sistema formado por quaisquer duas delas, digamos pelas duas primeiras equações, e depois verificar se a solução encontrada satisfaz a equação restante. Considerando o sistema formado pelas duas primeiras equações com t e t' como incógnitas, temos

$$\begin{cases} 2t + t' = 0 \\ 4t - t' = -2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $t = -1/3$ e $t' = 2/3$. Estes valores verificam a terceira equação.

Portanto as retas se interceptam no ponto cujas coordenadas podem ser calculadas substituindo $t = -1/3$ nas equações de r ou $t' = 2/3$ nas equações de s :

$$\begin{array}{l} r: \quad x = 1 - 2(-1/3) = 5/3 \\ \quad y = 2 + 4(-1/3) = 2/3 \\ \quad z = -(-1/3) = 1/3 \end{array}$$

Portanto, o ponto de intersecção é $P = (5/3, 2/3, 1/3)$.

Exemplo 2: Verifique se as retas r e s abaixo são concorrentes. Caso afirmativo, dê o ponto de intersecção:

$$\begin{array}{lll} r: x = 2t & y = -1 & z = 4 + t \\ s: x - 1 = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{6} \end{array}$$

Solução:

Substituindo x , y e z nas equações de s pelas suas respectivas expressões nas equações de r , obtemos

$$2t - 1 = \frac{-1-2}{4} = \frac{4+t}{6}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2t - 1 = -\frac{3}{4} \\ \frac{4+t}{6} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos $t = 1/8$ e da segunda $t = -17/2$. Isto significa que o sistema não tem solução, e portanto as retas não tem ponto em comum.

Exemplo 3: Verifique se as retas r e s abaixo são concorrentes. Caso afirmativo, dê o ponto de intersecção:

$$\begin{array}{l} r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z-1 \\ s: x = y = z \end{array}$$

Solução:

Das equações de s temos $y = x$ e $z = x$. Substituindo nas equações de r , obtemos:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{x-1}{3} = x-1$$

Da primeira igualdade, obtemos

$$3(x-1) = 2(x-1)$$

e resolvendo esta equação chegamos a $x = 1$. A segunda igualdade $(x-1) = 3(x-1)$, também fornece $x = 1$. Assim, $x = y = z = 1$ é a única solução do sistema formado pelas equações de r e s . Concluímos daí que r e s são concorrentes e que $P = (1, 1, 1)$ é o ponto de intersecção.

Exercícios

1. Decidir se as retas r e s são ou não concorrentes. Caso afirmativo, dê o ponto de intersecção:

$$\begin{aligned} \text{a) } r: & \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} & s: & \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = t' \\ z = 3 - t' \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } r: & \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases} & s: & \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 - t' \\ z = -1 + t' \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{c) } r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{5}$$

$$s: \frac{x-4}{6} = \frac{y}{9} = \frac{z-2}{15}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } r: & \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} & s: & \begin{cases} x - 1 = y - 1 = z \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } r: & X = (1, 0, 1) + t(2, 1, 3) & s: & \frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{6} \end{aligned}$$

2. Determinar a reta que passa pelo ponto $A = (0, 1, 0)$ e pelo ponto de intersecção das retas

$$r: \begin{cases} \frac{x-1}{2} = -y \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Ângulo entre retas

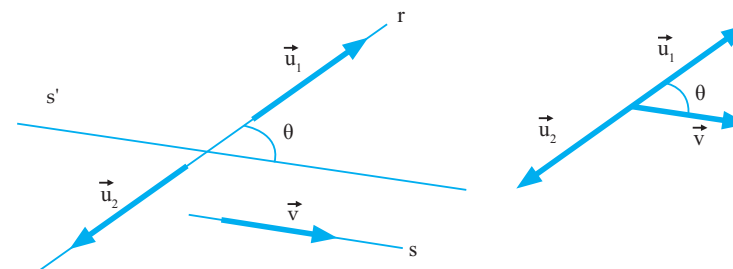
Para melhor compreendermos a definição de ângulo entre retas, vamos inicialmente considerar as posições relativas entre duas retas no espaço, definindo o ângulo em cada uma delas. Depois veremos que todos estes casos podem ser tratados de forma única. Observemos que com duas retas r e s no espaço pode ocorrer um dos seguintes casos:

- **As retas se interceptam em um ponto, ou seja, são concorrentes:** então elas determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice. O ângulo entre elas é definido como sendo o menor destes ângulos;

- **As retas são paralelas (ou coincidentes):** ângulo entre elas é igual a zero;

- **As retas são reversas, isto é, não são paralelas mas também não se interceptam:** então existe uma reta s' paralela à s e que intercepta r . Neste caso, o ângulo entre r e s é definido como sendo o ângulo entre r e s' .

Podemos unificar os casos acima da seguinte forma: consideremos duas retas r e s . Seja s' uma reta paralela à s e que intercepta r (se s intercepta r então faça $s' = s$). O ângulo entre r e s , denotado por θ , é definido como o menor ângulo entre r e s' , como ilustrado a seguir.



Esta definição leva imediatamente à conclusão de que $\theta = 0^\circ$ se r e s são paralelas, e $\theta = 90^\circ$ se r e s são ortogonais. Em qualquer outro caso, $0 < \theta < 90^\circ$.

O leitor mais atento já deve ter observado na figura acima que o ângulo entre r e s pode ser obtido a partir do ângulo entre um vetor

diretor de r e um vetor diretor de s . Vejamos então como calculá-lo.

Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores diretores de r e s , respectivamente, e seja α o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} . Note que, à princípio, não sabemos os sentidos de \vec{u} e \vec{v} . Por exemplo, na figura acima, não sabemos se estamos tomando \vec{u}_1 ou \vec{u}_2 como vetor diretor de r . Logo, dependendo dos sentidos de \vec{u} e \vec{v} podemos ter:

- $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$. Neste caso, $\theta = \alpha$, ou seja, α é o ângulo entre as retas r e s ;
- $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$. Neste caso, $\theta = 180^\circ - \alpha$, ou seja, α é o complemento do ângulo entre r e s . Note que $\cos \theta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, neste caso.

Resumindo estes cálculos em termos dos cossenos dos ângulos θ e α , temos

- $\cos \theta = \cos \alpha$, no primeiro caso;
- $\cos \theta = -\cos \alpha$, no segundo caso.

Em ambos os casos temos que $\cos \theta = |\cos \alpha|$.

Pelo estudo que fizemos do produto interno, sabemos que

$$|\cos \alpha| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Logo, o ângulo θ entre as retas r e s é dado por:

$$|\cos \theta| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Exemplo 1: Calcular o ângulo entre as retas

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{s: } \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

Solução:

Os vetores diretores de r e s são, respectivamente, $\vec{u} = (1, 1, -2)$ e $\vec{v} = (-2, 1, 1)$. Pela fórmula acima, temos:

$$|\cos \theta| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{|(1,1,-2) \cdot (-2,1,1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Logo, $\theta = \arccos(1/2) = 60^\circ$.

Exemplo 2: Calcular o ângulo entre as retas $r: (1, 1, 9) + t(0, -1, 1)$ e $s: x - y + 3 = z = 4$.

Solução:

Como se vê facilmente, um vetor diretor de r é $\vec{u} = (0, -1, 1)$. Uma forma de obter um vetor diretor de s é tomar dois pontos A e B em s e calcular o vetor $\vec{v} = \vec{AB} = B - A$. Por exemplo, $A = (1, 0, 4)$ e $B = (2, 1, 4)$ são pontos de s , pois satisfazem sua equação. Logo, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ é um vetor diretor de s . Aplicando a fórmula acima, temos:

$$|\cos \theta| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{|(0,-1,1) \cdot (1,1,0)|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

e, portanto, $\theta = \arccos(1/2) = 60^\circ$.

Exercícios

1. Determinar o ângulo entre as seguintes retas:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{s: } \frac{x}{2} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-1}{1}$$

$$\text{b) } r: \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = x - 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{s: } \begin{cases} y = \frac{z+1}{-1} \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } r: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}t \\ y = t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{s: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } r: \frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{e} \quad \text{s: } \begin{cases} x = 1 \\ \frac{y}{4} = \frac{z-2}{3} \end{cases}$$

2. Determinar o valor de n para que seja de 30° o ângulo entre as retas:

$$\text{a) } r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } r: \begin{cases} y = nx - 1 \\ z = 2x \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \text{eixo } y$$

3. Obtenha as equações de uma reta que contem o ponto $P = (1, -2, 3)$ e forma ângulos de 45° e 60° , respectivamente com os eixos Ox e Oy .

4. Obtenha as equações de uma reta r que contem o ponto $P = (1, 1, 1)$ e é concorrente com a reta $s: x = 2y = 2z$, sabendo que o cosseno do ângulo entre r e s é $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

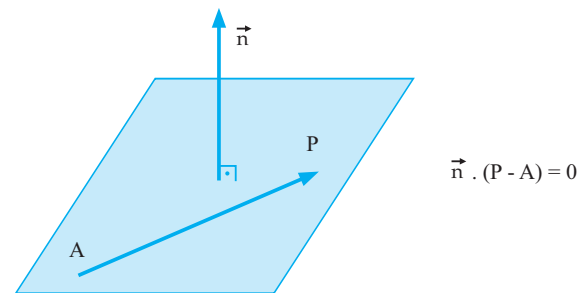
5. A diagonal AC de um quadrado $ABCD$ está contida na reta $r: (1, 0, 0) + t(0, 1, 1)$. Conhecendo $A = (1, 1, 0)$, determine os outros três vértices.

Capítulo III

EQUAÇÕES DO PLANO

Equação geral do plano

Seja π é um plano. Qualquer vetor não nulo ortogonal a π será chamado de **vetor normal a π** . Se um vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é normal a π e $A = (x_0, y_0, z_0)$ é um ponto de π , um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o vetor \vec{AP} é ortogonal a \vec{n} . Sabemos que dois vetores são ortogonais se, e somente se, o produto interno entre eles é zero. Logo, P pertence a π se, e somente se,



Desenvolvendo esta expressão obtemos:

$$\begin{aligned} (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= 0 \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 &= 0 \end{aligned}$$

Fazendo $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$, obtemos

$$ax + by + cz + d = 0$$

Esta equação é chamada de **equação geral do plano** π .

Observações:

- Assim como o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é normal a π , qualquer vetor paralelo a \vec{n} também é normal a π . Além disso, também é normal a qualquer plano paralelo a π .

- É importante notar que os três coeficientes a , b e c da equação geral do plano representam as componentes de um vetor normal ao plano. Por exemplo, se um plano é dado por $3x + 2y - z + 1 = 0$, um de seus vetores normais é $(3, 2, -1)$.

- Para obter pontos de um plano dado pela sua equação geral, basta atribuir valores arbitrários para duas de suas variáveis e calcular o valor da outra na equação dada. Assim, por exemplo, se na equação anterior fizermos $x = 4$ e $y = -2$, teremos:

$$\begin{aligned} 3(4) + 2(-2) - z + 1 &= 0 \\ 12 - 4 - z + 1 &= 0 \\ z &= 9 \end{aligned}$$

e, portanto, o ponto $(4, -2, 9)$ pertence a este plano.

Exemplo 1: Obter uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A = (2, -1, 3)$ e tem $\vec{n} = (3, 2, -4)$ como vetor normal.

Solução:

Como \vec{n} é vetor normal a π , sua equação geral é $3x + 2y - 4z + d = 0$. Sendo A um ponto de π , suas coordenadas devem verificar a equação, isto é,

$$\begin{aligned} 3(2) + 2(-1) - 4(3) + d &= 0 \\ 6 - 2 - 12 + d &= 0 \\ d &= 8 \end{aligned}$$

Logo, uma equação geral de π é $3x + 2y - 4z + 8 = 0$.

Exercícios

1. Obtenha uma equação geral do plano que passa pelo ponto A e

tem \vec{n} como vetor normal, nos seguintes casos:

- | | |
|--------------------|-------------------------|
| a) $A = (0, 1, 2)$ | $\vec{n} = (2, -6, -1)$ |
| b) $A = (1, 1, 0)$ | $\vec{n} = (1, -1, 1)$ |
| c) $A = (0, 0, 0)$ | $\vec{n} = (1, 1, 1)$ |
| d) $A = (5, 3, 6)$ | $\vec{n} = (2, -10, 0)$ |
| e) $A = (0, 3, 4)$ | $\vec{n} = (1, 0, 0)$ |

2. Obtenha equação geral para os três planos coordenados Oxy , Oxz e Oyz .

3. Dado o plano $\pi : 3x + y - z - 4 = 0$, calcular:

- O ponto de π que tem abscissa 1 e ordenada 3;
- O ponto de π que tem abscissa 0 e cota 2;
- O valor de k para que o ponto $(k, 2, k - 1)$ pertença a π ;
- O ponto de abscissa 2 e cuja ordenada é o dobro da cota.

4. Representar graficamente os planos de equações:

- $3x + 4y + 2z - 12 = 0$
- $6x + 4y - 3z - 12 = 0$
- $x + y - 3 = 0$
- $2x + 3y - 6 = 0$
- $3x + 4z + 12 = 0$
- $2z - 5 = 0$
- $y + 4 = 0$
- $2x - y = 0$

Exemplo 3: Obter uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A = (2, 1, 3)$ e é paralela ao plano $\pi_1 : 3x - 4y - 2z + 5 = 0$.

Solução:

Como π é paralela a π_1 , o vetor $\vec{n} = (3, -4, -2)$, normal a π_1 , é também normal a π . Logo, a equação geral de π é da forma

$$3x - 4y - 2z + d = 0.$$

Como $A \in \pi$, suas coordenadas devem verificar a equação, isto é, $3(2) - 4(1) - 2(3) + d = 0$, de onde concluímos que $d = 4$. Portanto, uma equação de π é

$$3x - 4y - 2z + 4 = 0.$$

Exercícios

1. Obter uma equação geral do plano que passa pelo ponto A e é paralela ao plano π , nos casos:

- A equação de π é $2x - y + z - 4 = 0$
- A equação de π é $x - y - z + 10 = 0$
- A equação de π é $z = 0$

2. Dado o plano $\pi: 3x + y - z - 4 = 0$, calcular o valor de k para que o plano $\pi_1: kx - 4y + 4z - 7 = 0$ seja paralelo a π .

Exemplo 5: A reta $r: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ é ortogonal ao plano π que

passa pelo ponto $A = (2, 1, -2)$. Determinar uma equação geral de π .

Solução:

Como $r \perp \pi$, o vetor $\vec{n} = (3, 2, 1)$, vetor diretor de r , é vetor normal a π . Logo, a equação geral de π é da forma

$$3x + 2y + z + d = 0.$$

Como $A \in \pi$, devemos ter $3(2) + 2(1) + (-2) + d = 0$, de onde concluímos que $d = -6$. Portanto, uma equação de π é

$$3x + 2y + z - 6 = 0.$$

Exercícios

1. Obtenha uma equação geral do plano que passa pelo ponto A e é ortogonal à reta r , nos casos:

$$\text{a) } A = (-1, 0, 2) \quad r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{b) } A = (0, 2, 2) \quad r: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } A = (-1, 2, 3) \quad r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$$

2. Obtenha uma equação geral do plano que passa pelo ponto médio do segmento que liga $A = (5, -1, 4)$ e $B = (-1, -7, 1)$ e é perpendicular a esse segmento.

Exemplo 7: Obter uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A = (-3, 0, 1)$ e é paralelo ao plano π_1 que contém os vetores $\vec{u} = (2, 1, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

Solução:

Como π é paralelo a π_1 , qualquer vetor ortogonal a π_1 é vetor normal a π . Pelo estudo que fizemos sobre produto vetorial, sabemos que um vetor ortogonal π_1 é $\vec{u} \wedge \vec{v}$, que pode ser calculado por

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \\ &= 1 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k} \\ &= (1, -5, 1). \end{aligned}$$

Logo, a equação geral de π é da forma

$$x - 5y + z + d = 0.$$

Como $A \in \pi$, devemos ter $1(-3) - 5(0) + 1(1) + d = 0$, e daí $d = 2$. Portanto, uma equação geral de π é

$$x - 5y + z + 2 = 0.$$

Exercícios

1. Obter uma equação geral do plano que passa pelo ponto A e é paralelo aos vetores \vec{u} e \vec{v} , onde

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A = (0, 0, 8) & \vec{u} = (4, 1, 2) & \vec{v} = (-2, -1, 2) \\ \text{b) } A = (-7, 1, 1) & \vec{u} = (-3, -1, -2) & \vec{v} = (-1, 1, -1) \\ \text{c) } A = (0, 0, 0) & \vec{u} = (1, 2, 3) & \vec{v} = (-1, 1, 2) \\ \text{d) } A = (1, 1, -1) & \vec{u} = (3, -1, -2) & \vec{v} = (-1, -2, 1) \\ \text{e) } A = (1, 0, 1) & \vec{u} = (0, 1, 0) & \vec{v} = (-1, 0, 1) \end{array}$$

2. Obter uma equação geral do plano que passa pelos pontos A, B e C, nos casos:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A = (2, 2, 2) & B = (2, 0, 2) & C = (2, 4, 6) \\ \text{b) } A = (4, 2, -2) & B = (0, -2, 2) & C = (2, 4, 2) \\ \text{c) } A = (-3, 1, -2) & B = (-4, 1, 1) & C = (-2, 0, -2) \end{array}$$

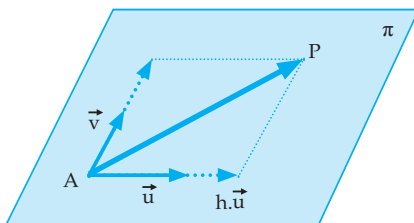
3. Obter uma equação geral do plano que intercepta os eixos coordenados nos pontos de abscissa, ordenada e cota iguais a -3, 6 e -5, respectivamente.

4. Obter uma equação geral do plano π , nos seguintes casos:

- π é paralelo ao eixo dos z e contém os pontos $(0, 3, 4)$ e $(2, 0, -2)$;
- π é paralelo ao eixo dos x e contém os pontos $(-2, 0, 2)$ e $(0, -2, 1)$;
- π é paralelo ao eixo dos y e contém os pontos $(2, 3, 0)$ e $(0, 4, 1)$;
- π é perpendicular ao eixo dos y e contém os pontos $(3, 4, -1)$;
- π contém o ponto $(1, -2, 1)$ e o eixo dos x .

Equações paramétricas do plano

Seja π é um plano. Considere um ponto A pertencente a π e dois vetores \vec{u} e \vec{v} paralelos a π , porém não paralelos entre si, como ilustrado na figura abaixo. Então um ponto P pertence a π se e somente se os vetores $P - A$, \vec{u} e \vec{v} são paralelos a π , o que equivale a dizer que $P - A$ pode ser expresso como uma soma de múltiplos escalares de \vec{u} e \vec{v} . Mais precisamente, P pertence a π se e somente se existem escalares h e t tais que $P - A = h \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$.



Logo,

$$P = A + h \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}.$$

Esta equação é chamada **equação vetorial de π** . Os vetores \vec{u} e \vec{v} são os vetores diretores.

Considerando as coordenadas dos pontos e vetores acima, digamos,

$$P = (x, y, z), \quad A = (x_0, y_0, z_0), \quad \vec{u} = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{e} \quad \vec{v} = (b_1, b_2, b_3),$$

a equação vetorial acima fica

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h \cdot (a_1, a_2, a_3) + t \cdot (b_1, b_2, b_3).$$

Esta equação também pode ser reescrita como

$$\begin{cases} x = x_0 + ha_1 + tb_1 \\ y = y_0 + ha_2 + tb_2 \\ z = z_0 + ha_3 + tb_3 \end{cases}$$

equações estas chamadas de **equações paramétricas de π** .

Exemplo 1: Obter equações paramétricas do plano π que contém o ponto $A = (2, 1, -1)$ e possui $\vec{u} = (3, 4, 5)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 4)$ como vetores diretores.

Solução:

Temos imediatamente:

$$\begin{cases} x = 2 + h \cdot 3 + t(-1) \\ y = 1 + h \cdot 4 + t \cdot 0 \\ z = -1 + h \cdot 5 + t \cdot 4 \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x = 2 + 3h - t \\ y = 1 + 4h \\ z = -1 + 5h + 4t \end{cases}$$

De forma análoga à equação paramétrica da reta, se desejarmos obter pontos do plano π , basta atribuímos valores para h e t . Por exemplo, para $h = 0$ e $t = 1$ obtém-se

$$x = 1; \quad y = 1 \quad \text{e} \quad z = 3,$$

e portanto, o ponto $(1, 1, 3) \in \pi$. De forma análoga,

- Para $h = 1$ e $t = 0$ obtém-se $(x, y, z) = (5, 5, 4)$;
- Para $h = -1$ e $t = 2$ obtém-se $(x, y, z) = (-3, -3, 2)$;
- Para $h = 2$ e $t = 1$ obtém-se $(x, y, z) = (7, 7, 13)$;
- Para $h = 1$ e $t = 1$ obtém-se $(x, y, z) = (4, 5, 8)$,

e assim por diante. Todos os pontos acima obtidos pertencem a π . Se h e t assumirem todos os valores reais, teremos todos os infinitos pontos de π .

As seguintes observações também são pertinentes:

- A cada valor real de h e t corresponde um único ponto P de π . Reciprocamente, a cada ponto P de π corresponde um único valor real de h e t .
- A equação paramétrica de um plano π não é única. Na verdade,

existem infinitas equações, pois basta tomar por exemplo um outro ponto de π (em vez de A) ou outro par de vetores diretores, que teremos uma outra equação paramétrica de π .

Exercícios

1. Obter equações paramétricas do plano que passa pelo ponto A e tem \vec{u} e \vec{v} como vetores diretores, nos casos:

- | | | |
|-------------------|-----------------------|------------------------|
| a) A = (1, 2, 3) | $\vec{u} = (4, 5, 6)$ | $\vec{v} = (7, 8, 9)$ |
| b) A = (-1, 0, 1) | $\vec{u} = (2, 1, 3)$ | $\vec{v} = (-1, 2, 1)$ |
| c) A = (0, 0, 1) | $\vec{u} = (3, 1, 2)$ | $\vec{v} = (1, 3, 2)$ |
| d) A = (0, 0, 0) | $\vec{u} = (1, 0, 0)$ | $\vec{v} = (0, 1, 0)$ |
| e) A = (1, 1, 1) | $\vec{u} = (2, 2, 2)$ | $\vec{v} = (-1, 2, 4)$ |

2. Escreva equações paramétricas dos três planos coordenados Oxy, Oxz e Oyz.

3. Escreva equações paramétricas do plano que passa pelo ponto A = (1, 2, 4) e é paralelo ao plano de equação vetorial $(x, y, z) = (-1, 0, 2) + h(1, 1, 2) + t(4, 1, 3)$.

4. Escreva equações paramétricas do plano que passa pelo ponto A = (-1, 4, 9) e é paralelo ao plano de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 30 + h + t \\ y = 40 - h - t \\ z = 50 + h - t \end{cases}$$

Exemplo 3: Escreva equações paramétricas do plano que passa pelos pontos A = (1, 1, 2), B = (-1, 1, -1) e C = (2, 2, 4).

Solução:

Precisamos obter os vetores diretores de π . Para isso, podemos fazer:

$$\begin{aligned} B - A &= (-1, 1, -1) - (1, 1, 2) = (-2, 0, -3) \\ C - A &= (2, 2, 4) - (1, 1, 2) = (1, 1, 2) \end{aligned}$$

Como esses vetores não são paralelos, podemos tomá-los como vetores diretores de π . Logo, uma equação paramétrica de π é

$$\begin{cases} x = 1 - 2h + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 3h + t \end{cases}$$

Exercícios

1. Obter equações paramétricas do plano que passa pelos pontos A, B e C, nos casos:

- | | | |
|---------------------|------------------|----------------|
| a) A = (1, -1, 1) | B = (1, 1, 1) | C = (0, 0, 1) |
| b) A = (-4, -2, -1) | B = (-5, -3, -2) | C = (0, 0, -1) |
| c) A = (0, 0, 0) | B = (1, 1, 1) | C = (2, 2, 3) |
| d) A = (-7, 0, 2) | B = (10, 1, 2) | C = (7, 7, 1) |

Exemplo 5: Um plano π contém a reta $r: (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(2, 1, 1)$ e o ponto P = (1, 2, 3). Obtenha equações paramétricas de π .

Solução:

Como π contém r, um vetor paralelo à r é também paralelo a π . Logo, $\vec{u} = (2, 1, 1)$ é um vetor paralelo a π . Tomando o ponto

A = (1, 1, 0) de r, outro vetor paralelo a π é o vetor

$$P - A = (1, 2, 3) - (1, 1, 0) = (0, 1, 3).$$

Como os vetores \vec{u} e $P - A$ são paralelos a π e não paralelos entre si, podemos tomá-los como vetores diretores de π . Logo, uma equação paramétrica de π é .

$$\begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 2 + h + t \\ z = 3 + h + 3t \end{cases}$$

Exercícios

1. Obter equações paramétricas do plano que contém a reta r e o ponto P, nos casos:

- a) P = (1, 1, 4) $r: (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$
 b) P = (0, 0, 2) r é a reta que passa por A = (1, 1, -1) e B = (0, 2, 3)

Equações paramétricas x Equação geral

Veremos nesta seção como obter uma equação geral de um plano a partir da sua equação paramétrica e vice-versa.

Exemplo 1: Dadas as seguintes equações paramétricas de um plano:

$$\begin{cases} x = 1 - 2h + t \\ y = 2 + h - 2t \\ z = 3 + h \end{cases}$$

Obtenha uma equação geral do plano.

Solução:

Podemos reconhecer imediatamente nas equações acima um ponto $A = (1, 2, 3)$ do plano, $\vec{u} = (-2, 1, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 0)$, vetores diretores do plano. Agora podemos proceder como no exemplo 4.

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \\ &= 2 \cdot \vec{i} - (-1) \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k} \\ &= (2, 1, 3). \end{aligned}$$

Logo, a equação geral de π é da forma

$$2x + y + 3z + d = 0.$$

Como A é um ponto do plano, devemos ter $2(1) + 1(2) + 3(3) + d = 0$, e daí $d = -13$. Portanto, uma equação geral de π é

$$2x + y + 3z - 13 = 0.$$

Exercícios

1. Dadas equações paramétricas de um plano, obter uma equação geral:

a) $x = 1 + 2h + t$	$y = h - t$	$z = h + t$
b) $x = 1 - h - t$	$y = 0$	$z = h - 2t$
c) $x = h + 2t$	$y = h - t$	$z = 2 - 2h$
d) $x = h$	$y = t$	$z = 1$
e) $x = 1 + 2h - t$	$y = 1 - h$	$z = 2 - h + 2t$
f) $x = 30$	$y = 10 + h + t$	$z = 10 - h - t$

Exemplo 3: Um plano π tem a seguinte equação geral: $2x - 3y + 5z - 2 = 0$. Obtenha equações paramétricas de π .

Solução:

Uma forma de resolver este problema é determinarmos três pontos A , B e C não colineares de π e procedermos como no exemplo 3. Uma outra forma mais direta é a seguinte: fazendo $y = h$ e $z = t$ na equação dada, temos

$$2x - 3h + 5t - 2 = 0,$$

de onde resulta

$$x = 1 + \frac{3}{2}h - \frac{5}{2}t, \quad y = h \quad \text{e} \quad z = t,$$

que são as equações paramétricas de π .

De forma mais geral, o procedimento acima pode ser realizado do seguinte modo:

se $ax + by + cz + d = 0$ é uma equação geral de um plano, então $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

- se $a \neq 0$, faça $y = h$ e $z = t$
- se $b \neq 0$, faça $x = h$ e $z = t$
- se $c \neq 0$, faça $x = h$ e $y = t$

Assim, por exemplo, se a equação for $y - 3z - 2 = 0$, fazemos $x = h$ e $z = t$. A equação fica $y - 3t - 2 = 0$. Logo, $y = 3t + 2$, e as equações paramétricas são:

$$x = h, \quad y = 2 + 3t \quad \text{e} \quad z = t.$$

Exercícios

1. Dadas a equação geral de um plano, obter equações paramétricas do mesmo, nos casos:

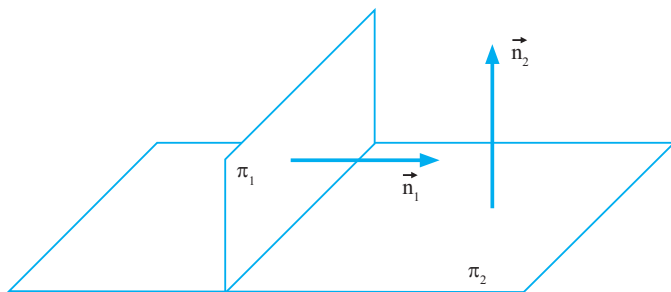
a) $x + 3y - 5z - 2 = 0$
b) $10x - y + z = 0$
c) $5x - y = 0$
d) $2y - 14z - 3 = 0$
e) $x + z = 0$
f) $z - 3 = 0$

Capítulo IV

EQUAÇÕES DO PLANO - APLICAÇÕES

Planos perpendiculares

Dados os planos π_1 e π_2 , sejam \vec{n}_1 e \vec{n}_2 vetores normais a π_1 e π_2 , respectivamente. Então π_1 e π_2 são perpendiculares se e somente se \vec{n}_1 e \vec{n}_2 são ortogonais.



Recordando as propriedades sobre produto interno de vetores, temos que

$$\pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ são perpendiculares} \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

Os exemplos a seguir pedem para verificar se os planos dados são perpendiculares. Em qualquer caso, o procedimento é sempre o mesmo: obter vetores normais a cada um dos planos dados e verificar se o produto interno entre eles é igual a zero. A diferença entre esses exemplos está na forma de obter os vetores normais. Se o plano for dado através de uma equação geral, um vetor normal

pode ser obtido de forma imediata. Mas se ele for dado através de uma equação paramétrica, precisaremos fazer um cálculo de determinante para obter um vetor normal.

Exemplo 1: Verifique se os planos $\pi_1 : 4x + 10y - z + 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - y + 2z = 0$ são perpendiculares.

Solução:

Lembre-se de que em uma equação geral do plano, um vetor normal é dado pelos coeficientes de x , y e z . Portanto, $\vec{n}_1 = (4, 10, -1)$ e $\vec{n}_2 = (3, -1, 2)$ são vetores normais a π_1 e π_2 , respectivamente. Como

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (4, 10, -1) \cdot (3, -1, 2) = 4 \cdot 3 + 10 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 0,$$

π_1 e π_2 são perpendiculares.

Exercícios

1. Verifique se os planos π_1 e π_2 são perpendiculares.

- a) $\pi_1 : 3x + y - 4z + 2 = 0$ $\pi_2 : 2x + 6y + 3z = 0$
 b) $\pi_1 : 2x - 11y + 4z - 1 = 0$ $\pi_2 : x + y - z = 0$
 c) $\pi_1 : x + 3y - z + 1 = 0$ $\pi_2 : 4x - y + z = 0$

2. Determine m de modo que os planos π_1 e π_2 sejam perpendiculares.

- a) $\pi_1 : mx + y - z = 0$ $\pi_2 : x - my + mz - 1 = 0$
 b) $\pi_1 : mx + y - 3z - 1 = 0$ $\pi_2 : mx - my + 1 = 0$
 c) $\pi_1 : x + my + 5z = 0$ $\pi_2 : 4x - my + z = 0$
 d) $\pi_1 : x + y + z - m = 0$ $\pi_2 : -x + y + m = 0$

Exemplo 3: Verifique se os planos $\pi_1 : x - y = 0$ e $\pi_2 : \begin{cases} x = h \\ y = h + t \\ z = 1 - h + t \end{cases}$ são perpendiculares.

Solução:

Temos que $\vec{n}_1 = (1, -1, 0)$ é um vetor normal a π_1 . Para obter um vetor \vec{n}_2 normal a π_2 , observe que $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$ são vetores diretores de π_2 . Assim, eles pertencem a π_2 . Podemos então obter um vetor \vec{n}_2 normal a π_2 fazendo

$$\vec{n}_2 = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, 1).$$

Como $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1, -1, 0) \cdot (2, -1, 1) = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 3 \neq 0$, π_1 e π_2 não são perpendiculares.

Exemplo 4: Verifique se os planos $\pi_1: \begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = h \\ z = t \end{cases}$ e $\pi_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = h \end{cases}$ são perpendiculares.

Solução:

Das equações de π_1 , temos que $(1, 1, 0)$ e $(-2, 0, 1)$ são vetores diretores desse plano. Logo

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 0) \wedge (-2, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 2) \text{ é um vetor normal a } \pi_1.$$

Analogamente, um vetor normal a π_2 é

$$\vec{n}_2 = (0, 0, 1) \wedge (1, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0).$$

Como $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1, -1, 2) \cdot (-1, 1, 0) = -2 \neq 0$, π_1 e π_2 não são perpendiculares.

Exercícios

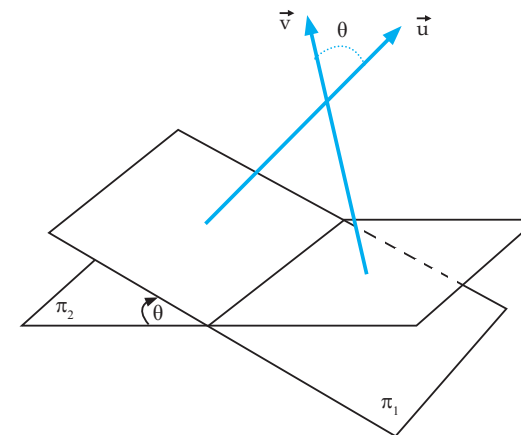
1. Verifique se os planos π_1 e π_2 são perpendiculares.

a) $\pi_1: x + y - 2z - 4 = 0$ $\pi_2: x = 2h - t$ $y = 1 + t$ $z = h$

b) $\pi_1: x = 1 + h$ $y = 2 + h - t$ $z = 3 - h$
 $\pi_2: x = 1 + h$ $y = 2 - h + t$ $z = 3 - h$

Ângulo entre planos

A medida do ângulo entre dois planos π_1 e π_2 é definida como a medida do ângulo entre duas retas r e s , respectivamente perpendiculares a π_1 e π_2 . Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores diretores de r e s , respectivamente. Note que \vec{u} e \vec{v} são vetores normais a π_1 e π_2 , respectivamente.



Utilizando os resultados do Capítulo II, sobre ângulo entre retas, temos que o ângulo θ entre r e s é dado por

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Exemplo 1: Determine a medida do ângulo entre os planos

$$\pi_1: 4x - 11y + 5z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: x + z = 0$$

Solução:

Das equações dos planos, temos que $\vec{u} = (4, -11, 5)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$ são vetores normais a π_1 e π_2 , respectivamente. Então

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot 1 + (-11) \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 9$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-11)^2 + 5^2} = \sqrt{162}$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Dáí teremos

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{9}{\sqrt{162} \cdot \sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{324}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\theta = 60^\circ$.

Exercícios

1. Calcule a medida do ângulo entre os planos π_1 e π_2 , nos casos:

$$\pi_1 : x - y = 0$$

$$\pi_2 : y = 0$$

$$\pi_1 : x + y = 0$$

$$\pi_2 : x = 0$$

$$\pi_1 : x - y = 0$$

$$\pi_2 : x + y = 0$$

$$\pi_1 : x + y + z = 1$$

$$\pi_2 : z = 0$$

$$\pi_1 : 2x - y + z = 0$$

$$\pi_2 : x + 4y - z - 1 = 0$$

Observe que, assim como na seção anterior, o cálculo da medida do ângulo entre dois planos depende unicamente de encontrarmos vetores normais a cada um dos planos dados, o que pode ser imediato (caso o plano seja dado por uma equação geral) ou não (se ele seja dado por uma equação paramétrica). Portanto, acreditamos que o leitor está preparado para resolver os exercícios a seguir.

2. Calcule a medida do ângulo entre os planos π_1 e π_2 , nos casos:

$$\text{a) } \pi_1 : \begin{cases} x = 1 + h - t \\ y = h + 2t \\ z = h \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2h \\ z = h + t \end{cases}$$

$$\pi_1 : x + y - 2z = 0$$

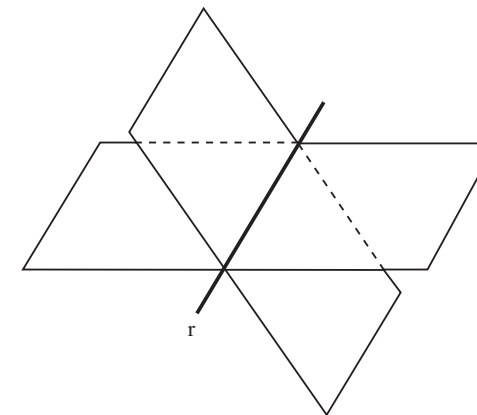
$$\pi_2 : x = -4 + h \quad y = 0 \quad z = 2 + t$$

2. Determinar o valor de m para que seja de 30° o ângulo entre os planos

$$\pi_1 : x + my + 2z - 7 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : 4x + 5y + 3z + 2 = 0$$

Intersecção de planos

A intersecção de dois planos não paralelos é uma reta cujas equações desejamos determinar.



Para tanto, dentre os vários procedimentos, apresentaremos três, através dos exemplos a seguir. Para fazer os exercícios propostos, o leitor pode utilizar aquele que ele achar mais conveniente.

Exemplo 1: Determine a reta r , intersecção dos planos

$$\pi_1 : 5x - y + z - 5 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : x + y + 2z - 7 = 0$$

Solução 1:

Como r está contida nos dois planos, as coordenadas de qualquer ponto (x, y, z) de r devem satisfazer simultaneamente as equações dos dois planos. Logo, os pontos de r constituem a solução do sistema r :

$$r : \begin{cases} 5x - y + z - 5 = 0 \\ x + y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tem infinitas soluções (são os infinitos pontos de r). Fazendo, por exemplo, $x = t$ e resolvendo o sistema em função de t ,

$$\text{temos } r : \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t + 4 \end{cases} \quad \text{que são as equações paramétricas de } r.$$

Note que, de forma análoga, podemos também fazer $y = t$ ou $z = t$, e resolver o sistema em função de t .

Solução 2:

Um outro procedimento é obter dois pontos de r , e a partir deles um vetor diretor. Por exemplo, fazendo $x = 0$ nas equações de π_1 e π_2 ,

obtemos $-y + z - 5 = 0$ e $y + 2z - 7 = 0$, donde $z = 4$ e $y = -1$. Logo, o ponto $A = (0, -1, 4) \in r$.

Fazendo agora $x = 1$, obtemos $y = 2$ e $z = 2$. Logo, $B = (1, 2, 2) \in r$.

Temos agora dois pontos de r , e portanto, o vetor $B - A = (1, 3, -2)$ é vetor diretor de r . Logo, r : são as equações paramétricas de r .

Solução 3:

Como $\vec{u} = (5, -1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 2)$ são vetores normais à π_1 e π_2 , respectivamente, um vetor diretor de r é dado por

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3, -9, 6).$$

Por comodidade, podemos usar $1/3(-3, -9, 6) = (-1, -3, 2)$ como vetor diretor de r . Assim, tomando um ponto qualquer de r , por exemplo $A = (0, -1, 4)$, podemos obter suas equações paramétricas

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t + 4 \end{cases}.$$

Exercícios

1. Dê equações da reta intersecção dos planos π_1 e π_2 , nos casos:

- a) $\pi_1: x + y - z = 0$ $\pi_2: x + y + z = 1$
 b) $\pi_1: x - y + z = 0$ $\pi_2: x + y - z = 0$
 c) $\pi_1: 3x + y - 3z - 5 = 0$ $\pi_2: x - y - z - 3 = 0$
 d) $\pi_1: 2x + y - 4 = 0$ $\pi_2: z = 5$
 e) $\pi_1: 2x - y + z = 0$ $\pi_2: x = h$ $y = h + t$ $z = 2h - t$

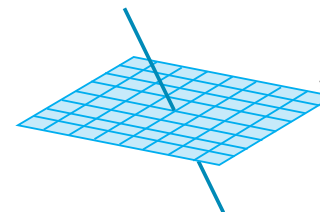
Sugestão: Uma forma de resolver o item (e) é obter inicialmente a equação geral de π_2 como estudado na Capítulo 3, e depois proceder de forma análoga à solução 3.

2. Mostre que as retas abaixo são paralelas

$$r_1: \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

Intersecção de reta e plano

A intersecção entre um plano π e uma reta r não paralela à π é um ponto.



Os procedimentos para determinar este ponto serão ilustrados nos exemplos a seguir.

Exemplo 1: Determinar o ponto de intersecção da reta r com o plano π , onde

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: 2x - y + 3z - 4 = 0$$

Solução:

Qualquer ponto de r é da forma $(x, y, z) = (-1 + 2t, 5 + 3t, 3 - t)$. Se um deles pertence ao plano π , suas coordenadas satisfazem a equação de π , ou seja,

$$2(-1 + 2t) - (5 + 3t) + 3(3 - t) - 4 = 0,$$

o que resulta em $t = -1$. Substituindo este valor nas equações de r , obtém-se

$$x = -1 + 2(-1) = -3, \quad y = 5 + 3(-1) = 2, \quad z = 3 - (-1) = 4$$

Logo, a intersecção de r e π é o ponto $(-3, 2, 4)$.

Exemplo 2: Determinar o ponto de intersecção da reta r com o plano π , onde

$$r: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: y - z = 0$$

Solução:

Procedendo como no exemplo anterior, qualquer ponto de r é da forma $(x, y, z) = (2 - 2t, 3 + t, t)$. Substituindo estes valores na equação

ção de π , obtemos $(3+t) - t = 0$, ou seja, $3 = 0$, o que é um absurdo. Isto significa que r é paralela ao plano π (r e π não tem pontos em comum).

Exemplo 3: Determinar o ponto de intersecção da reta r com o plano π , onde

$$r: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: y - z = 0$$

Solução:

Qualquer ponto de r é da forma $(x, y, z) = (2 - 2t, t, t)$. Substituindo estes valores na equação de π , obtemos $t - t = 0$, ou seja, $0 = 0$, o que é sempre verdadeiro. Isto significa que qualquer ponto de r é também ponto de π , ou seja, r pertence a π .

Exemplo 4: Determinar o ponto de intersecção da reta r com o plano π , onde

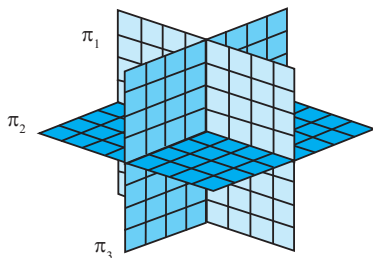
$$r: \begin{cases} x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: x + 3y + 2z - 5 = 0$$

Solução:

Observe que um ponto de r satisfaz as equações dos dois planos que determina r . Logo, se existir um ponto (x, y, z) que pertence à r e a π , suas coordenadas devem verificar as equações dos três planos dados, isto é, ele será solução do sistema

$$\begin{cases} x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se $x = 2$, $y = -1$ e $z = 3$. Logo, $(2, -1, 3)$ é a intersecção de r e π . Observe que, no exemplo acima, o ponto obtido está na intersecção de três planos, como ilustrado na figura abaixo.



Exercícios

1. Determine (caso exista) o ponto de intersecção da reta r com o plano π , nos casos:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad \pi: x + y + z = 1$$

$$\text{b) } r: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad \pi: x + 2y + z = 0$$

$$\text{c) } r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases} \quad \pi: 2x - y + z = 1$$

$$\text{d) } r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad \pi: 3x - y = 3$$

2. A reta r é a intersecção dos planos π_1 e π_2 dados por $\pi_1: 2x + 2y - z = 3$ e $\pi_2: x + y - z = 0$

Obtenha a intersecção de r com o plano $\pi: x + 2y - 2z + 1 = 0$.

3. A reta intersecção dos planos dados, respectivamente, por $x - 2y - 4z = 1$ e $x + 2y = 3$ é paralela ao plano dado por $x - 2z = 3$?

4. Calcular k de modo que a reta determinada por $A = (1, -1, 0)$ e $B = (k, 1, 2)$ seja paralela ao plano $\pi: x = 1 + 3h$, $y = 1 + 2h + t$, $z = 3 + 3t$.

5. Calcular valores de m e n para que a reta r esteja contida no plano π , nos casos:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3 \end{cases} \quad \pi: 2mx - ny - z + 4 = 0$$

$$\text{b) } r: (x, y, z) = (n, 2, 0) + t(2, m, n) \quad \pi: x - 3y + z = 1$$

Capítulo V

DISTÂNCIAS

Distância entre dois pontos

O estudo da distância entre dois pontos já foi realizado na seção sobre módulo de um vetor. Portanto, faremos aqui apenas uma breve recordação deste tópico.

Dados os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, a distância d entre A e B é dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Exemplo 1: Calcular a distância d entre os pontos $A = (2, -1, 3)$ e $B = (1, 1, 5)$.

Solução: $d = \sqrt{(1-2)^2 + (1-(-1))^2 + (5-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

Exercícios

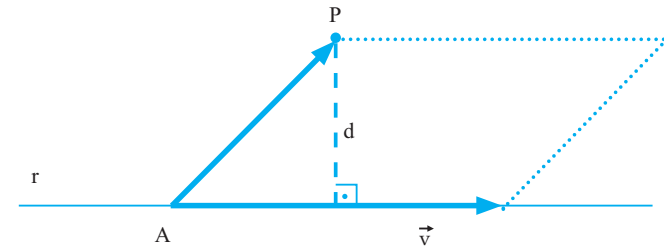
1. Calcular a distância entre os pontos A e B , nos casos:

- a) $A = (1, 0, -1)$ $B = (-1, 0, 1)$
 b) $A = (1, 2, 1)$ $B = (1, -1, 0)$
 c) $A = (0, 1, 0)$ $B = (1, -2, -3)$
 d) $A = (0, 0, 1)$ $B = (1, 0, 0)$
 e) $A = (4, 0, 1)$ $B = (1, 1, 1)$

Distância de ponto a reta

A distância d de um ponto P à uma reta r é definida como sendo

a distância de P ao ponto de r mais próximo de P . Em outras palavras, a distância de um ponto a uma reta é aquela correspondente à medida do segmento de extremidades no ponto e na sua projeção ortogonal sobre a reta.



Esta distância pode ser obtida da seguinte forma: consideremos na reta r um ponto A e um vetor diretor \vec{v} . Os vetores \vec{v} e \vec{AP} determinam um paralelogramo cuja altura corresponde à distância d procurada, como ilustrado na figura acima. Para determinarmos esta altura, vamos primeiro escrever a área do paralelogramo de duas formas, e depois igualarmos as expressões:

$$\text{área} = \text{base} \cdot \text{altura} = \|\vec{v}\| \cdot d$$

ou também, como vimos no estudo do produto vetorial, temos:

$$\text{área} = \|\vec{v} \wedge \vec{AP}\|$$

Igualando estas duas expressões, obtemos:

$$d = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{AP}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Esta é a fórmula que será utilizada para calcular a distância do ponto P à reta r .

Exemplo 1: Calcular a distância d do ponto $P = (2, 1, 4)$ à reta r :
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Solução:

A reta passa pelo ponto $A = (-1, 2, 3)$ e tem direção do vetor

$\vec{v} = (2, -1, -2)$. Os demais elementos da fórmula são:

- O vetor \vec{AP} é dado por $\vec{AP} = P - A = (3, -1, 1)$.

$$\vec{v} \wedge \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -8, 1)$$

Portanto,

$$d = \frac{\|(-3, -8, 1)\|}{\|(2, -1, -2)\|} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-8)^2 + 1^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{74}}{3}$$

Exercícios

1. Calcular a distância do ponto P à reta r , nos casos:

$$\text{a) } P = (1, 0, 3) \quad r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$\text{b) } P = (1, 1, 0) \quad r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 3t \end{cases}$$

$$\text{c) } P = (0, 1, -1) \quad r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } P = (3, 0, 1) \quad r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{e) } P = (0, 0, 0) \quad r: \frac{x-1}{2} = y = z$$

No exemplo acima, calculamos a distância do ponto P à reta r onde é dada por sua equação paramétrica. A reta r , porém, pode ser dada de outras formas, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3: Calcular a distância d do ponto $P = (1/2, 3/2, 0)$ à reta r , intersecção dos planos dados por $x - y - z = 1$ e $x + y = 0$.

Solução:

Como $(1, -1, -1)$ e $(1, 1, 0)$ são vetores normais aos planos, um vetor diretor \vec{v} de r é dado por (veja Capítulo 4).

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, 2)$$

Para obter um ponto A de r fazemos, por exemplo, $x = 1/2$ nas equa-

ções dos planos, obtendo $y = -1/2$ e $z = 0$. Logo, $A = (1/2, -1/2, 0)$ é um ponto de r . Agora, procedemos como no exemplo anterior, calculando os elementos necessários para aplicar a fórmula da distância.

$$\bullet \vec{AP} = P - A = (0, 2, 0)$$

$$\bullet \vec{v} \wedge \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-4, 0, 2)$$

Portanto,

$$d = \frac{\|(-4, 0, 2)\|}{\|(1, -1, 2)\|} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

Exercícios

1. Calcular a distância do ponto P à reta r , dada pela intersecção de dois planos, nos casos:

$$\text{a) } P = (1, 1, -1) \quad r: \begin{cases} 2x - z = 1 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } P = (0, -1, 0) \quad r: \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } P = (1, 2, 3) \quad r: \begin{cases} x + y = 1 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$$

2. Calcule a distância do ponto $P = (1, 1, -1)$ a cada eixo coordenado.

Para terminar esta seção, vale à pena observar que esta não é a única forma de calcular a distância entre ponto e reta. Uma outra forma pode ser dada pelos seguintes passos:

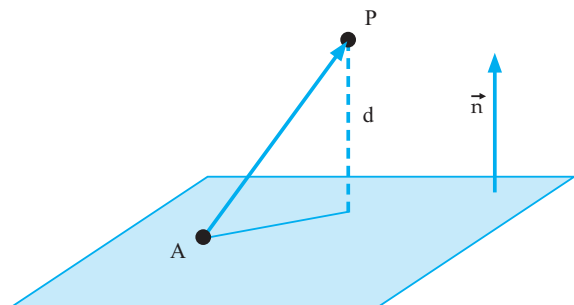
1. Encontrar a equação do plano π que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r (observe que um vetor normal a π é um vetor diretor de r);

2. Determinar o ponto I de intersecção de π e r ;

3. A distância de P à r é a distância de P a I .

Distância de ponto a plano

De forma análoga à distância de ponto a reta, a distância d de um ponto P a um plano π é definida como a distância de P ao ponto de π mais próximo de P . Para calcular esta distância, tomemos um vetor \vec{n} normal a π e um ponto A de π . Então a distância d é a norma da projeção do vetor \vec{AP} sobre o vetor \vec{n} .



Utilizando a fórmula da projeção de um vetor sobre outro, temos:

$$d = \|\text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP}\| = \left\| \frac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \right\| = \|\vec{AP} \cdot \vec{n}\| = \frac{\|\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|^2}$$

Resulta que

$$d = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Exemplo 1: Calcular a distância d do ponto $P = (4, 5, 6)$ ao plano π dado pela equação $x + 2y - 2z - 14 = 0$.

Solução:

Um ponto de π é $A = (0, 7, 0)$ e um vetor normal a π é $\vec{n} = (1, 2, -2)$.

Assim,

$$\vec{AP} = P - A = (4, 5, 6) - (0, 7, 0) = (4, -2, 6).$$

Substituindo estes dados na fórmula acima, temos

$$d = \frac{|(4, -2, 6) \cdot (1, 2, -2)|}{\|(1, 2, -2)\|} = 12/3 = 4.$$

Exercícios

1. Calcular a distância do ponto P ao plano π , dado por uma equação geral, nos casos:

- | | |
|---------------------|------------------------------|
| a) $P = (1, 0, 3)$ | $\pi : 3x + 4y - 1 = 0$ |
| b) $P = (1, 1, 1)$ | $\pi : 2x - 3y + z - 2 = 0$ |
| c) $P = (4, 2, -3)$ | $\pi : 2x + 3y - 6z + 3 = 0$ |
| d) $P = (2, -1, 2)$ | $\pi : 2x + 2y - z + 3 = 0$ |
| e) $P = (3, -1, 4)$ | $\pi : x + y + z = 0$ |
| f) $P = (0, 0, 0)$ | $\pi : 3x - 4y + 20 = 0$ |

2. Calcule a distância do ponto $P = (2, 5, -7)$ a cada plano coordenado.

Eventualmente, o plano π pode não ser dado por uma equação geral, de forma que a obtenção do seu vetor normal não seja imediata. Mas isto requer apenas um passo a mais para obtê-lo, o que não é nenhuma grande dificuldade. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 3: Calcular a distância d do ponto $P = (1, 4, 3)$ ao plano π dado pela equação paramétrica $x = -3 - h + t$, $y = 1$, $z = 3 + 3t$.

Solução:

• Um ponto de π é $A = (-3, 1, 3)$. Assim, $\vec{AP} = P - A = (1, 4, 3) - (-3, 1, 3) = (4, 3, 0)$

• Um vetor normal a π é

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (0, 3, 0)$$

Substituindo estes dados na fórmula, temos

$$d = \frac{|(4, 3, 0) \cdot (0, 3, 0)|}{\|(0, 3, 0)\|} = 9/3 = 3.$$

3. Calcular a distância do ponto P ao plano π , dado por equações paramétricas, nos casos:

- | | | | |
|---------------------|-----------------------|-----------|--------------|
| a) $P = (1, 1, 1)$ | $\pi : x = -h - t$ | $y = h$ | $z = t$ |
| b) $P = (1, 2, 3)$ | $\pi : x = 2 - h - t$ | $y = t$ | $z = h$ |
| c) $P = (2, 3, -1)$ | $\pi : x = 3 + t$ | $y = -2t$ | $z = 1 - 2t$ |
| d) $P = (1, -1, 0)$ | $\pi : x = 2 + t$ | $y = 0$ | $z = t$ |

$$e) P = (1, 1, 1) \quad \pi : x = 2 + 2h + 3t \quad y = -1 + h + t \quad z = 2 - h$$

Uma **outra forma de calcular a distância de ponto a plano** pode ser dada pelos seguintes passos:

1. Determinar a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano π (um vetor diretor de r é um vetor normal a π é);
2. Determinar o ponto I de intersecção de π e r;
3. A distância de P à r é a distância de P a I.

Também é importante ressaltar que o cálculo da distância de ponto a plano também pode ser utilizado para calcular as seguintes distâncias:

- **distância entre dois planos paralelos:** basta calcular a distância de um ponto qualquer de um plano ao outro.
- **distância entre reta e plano paralelos:** basta calcular a distância de um ponto qualquer da reta ao plano.

Exemplo 5: Calcular a distância da reta r: $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ ao plano $\pi : 4x - 4y + 2z - 4 = 0$.

Solução:

Um vetor diretor de r é $\vec{v} = (1, 2, 2)$, e um vetor normal a π é $\vec{n} = (4, -4, 2)$. Observemos primeiramente que $r \parallel \pi$, pois $\vec{v} \cdot \vec{n} = (1, 2, 2) \cdot (4, -4, 2) = 0$. Tomando um ponto $P = (0, 3, 1)$ de r e um ponto $A = (0, 0, 2)$ de π , temos:

$\vec{AP} = P - A = (0, 3, 1) - (0, 0, 2) = (0, 3, -1)$. Logo, a distância de r a π é dada por

$$d = \frac{|(0, 3, -1) \cdot (4, -4, 2)|}{\|(4, -4, 2)\|} = 7/3.$$

4. Calcular a distância da reta r ao plano π , nos casos:

$$a) r : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \quad \pi : x - y - 2z + 4 = 0$$

$$b) r : \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \quad \pi : x + y - 12 = 0$$

$$c) r : \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \quad \pi : y = 0$$

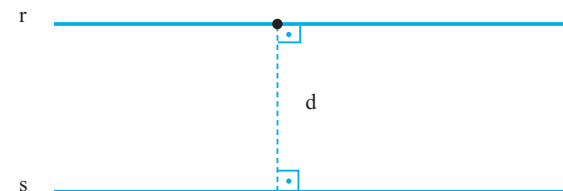
5. Calcular a distância entre os planos $\pi_1 : x + y + z = 4$ e $\pi_2 : 2x + 2y + 2z = 5$.

Distância entre retas

Dadas as retas r e s, vamos determinar a distância d entre elas. Para isso, precisamos determinar inicialmente a posição relativa entre r e s, o que pode ser obtida pelo produto vetorial entre os vetores diretores de r e s. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores diretores de r e s, respectivamente, e consideremos $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

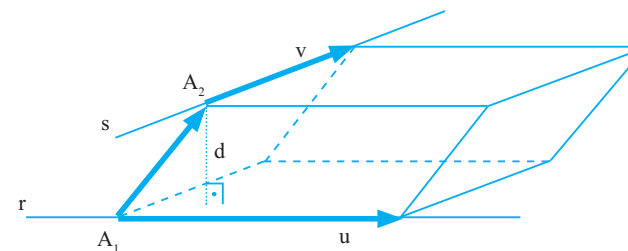
1º. Caso: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Neste caso, \vec{u} e \vec{v} são paralelos, o que significa que r e s são paralelas. Logo, r e s coincidem ou não. Se r e s coincidem então $d = 0$. No outro caso, tomando um ponto A um ponto de r, a distância entre r e s é a distância entre A e s.



2º. Caso: $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$

Neste caso, \vec{u} e \vec{v} não são paralelos. Logo, r e s são concorrentes ou reversas. Se r e s são concorrentes então $d = 0$. Se r e s são reversas sejam A_1 e A_2 pontos de r e s, respectivamente. Os vetores r, s e $\vec{A_1A_2}$ por serem não-coplanares, determinam um paralelepípedo cuja altura é a distância d entre r e s que queremos calcular.



O volume V do paralelepípedo é dado por:

$$V = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura}) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \cdot d$$

Ou também pelo módulo do produto misto dos vetores \vec{u} , \vec{v} e $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{A_1A_2}]|$$

Igualando estas duas expressões, temos:

$$d = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{A_1A_2}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

Exemplo 1: Calcular a distância entre as retas $r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$ e

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Solução:

A reta r passa pelo ponto $A_1 = (-1, 3, -1)$ e tem $\vec{u} = (1, -2, -1)$ como vetor diretor. A reta s passa pelo ponto $A_2 = (0, -3, 1)$ e tem $\vec{v} = (1, 1, -1)$ como vetor diretor.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3, 0, 3) \neq \vec{0}$$

Logo, estamos no caso 2 acima.

$$\bullet \overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = (1, -6, 2)$$

$$\bullet |[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{A_1A_2}]| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

$$\bullet \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Portanto, a distância entre as retas r e s é:

$$d = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{A_1A_2}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Eventualmente, as retas podem não ser dadas por uma equação paramétrica, de forma que a obtenção do seu vetor diretor não seja imediata. Mas isto não requer grande esforço adicional, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 2: Calcular a distância entre as retas $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + t \\ z = 9 + 3t \end{cases}$ e $s,$

dada pela intersecção dos planos $y + z = 5$ e $x + y + z = 6$.

Solução:

A reta r passa pelo ponto $A_1 = (1, 4, 9)$ e tem $\vec{u} = (0, 1, 3)$ como vetor diretor. Das equações de s temos que $A_2 = (1, 2, 3)$ pertence à s , e como $(0, 1, 1)$ e $(1, 1, 1)$ são vetores normais aos planos dados, um vetor diretor de s pode ser obtido por

$$\vec{v} = (0, 1, 1) \wedge (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 1, -1)$$

$$\text{Agora temos } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4, 0, 0) \neq \vec{0}$$

Portanto, estamos no caso 2 novamente. Procedendo como no exemplo anterior, temos:

$$\bullet \overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = (0, -2, -6)$$

$$\bullet |[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{A_1A_2}]| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, independentemente do valor de $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$, a distância entre as retas r e s é:

$$d = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{A_1A_2}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{0}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = 0$$

OBS: Como os vetores \vec{u} e \vec{v} não são paralelos (pois $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$) e $d = 0$, as retas r e s são concorrentes. Na verdade, o ponto $(1, 2, 3)$ pertence a ambas.

Exercícios

1. Calcular a distância entre as retas r e s , nos casos:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 4t \\ z = -5 - 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = 7 - 4t \\ z = 5 - t \end{cases}$$

$$\text{b) } r: \begin{cases} x = t \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ e } s \text{ é a intersecção dos planos } 3x + y - 3z = 0 \text{ e } y - z = 2$$

$$y - z = 2$$

c) r é a intersecção dos planos $x = 2y - 1$ e $y - z - 1 = 0$, e s é a intersecção dos planos $x + y - z = 0$ e $y + z + 1 = 0$

2. Calcule a distância entre a reta dada pela intersecção dos planos $x = 3$ e $y = 4$, e o eixo dos z .

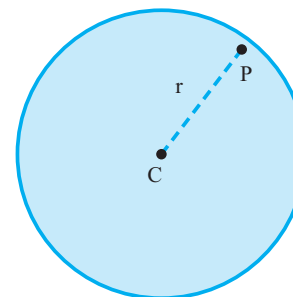
Capítulo VI

SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Equação de uma superfície esférica

A esfera no espaço \mathbb{R}^3 é uma superfície muito importante em função de suas aplicações. Nesta seção estudaremos suas principais equações e como determinar seus elementos a partir destas.

Sejam $C = (a, b, c)$ um ponto do espaço \mathbb{R}^3 e r um número real. A **superfície esférica** S de centro C e raio r é o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância a C é igual a r .



Traduzindo esta definição para uma equação, observe inicialmente que a distância de P a C é dada por

$$\|P - C\| = \|(x - a, y - b, z - c)\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}.$$

Logo, P está em S se e somente se

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Esta equação é chamada de **equação reduzida da superfície S**.

Desenvolvendo os quadrados na equação acima, temos

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

chamada de **equação geral de S**.

Exemplo 1: Determine a equação reduzida e a equação geral da superfície esférica de centro $C = (1, -2, 0)$ e raio 3.

Solução:

A equação reduzida é

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9$$

cujo desenvolvimento

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 = 9$$

nos dá a equação geral pedida:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Exercícios

1. Determine a equação reduzida e a equação geral da superfície esférica de centro C e raio r , nos casos:

- a) $C = (-1, -1, 2)$ $r = 2$
 b) $C = (0, 1, 0)$ $r = 1$
 c) $C = (0, 0, 0)$ $r = 3$
 d) $C = (1, 1, 1)$ $r = 4$

Vamos agora exercitar a recíproca do exercício anterior, ou seja, vamos decidir se uma dada equação representa ou não uma superfície esférica e, em caso afirmativo, determinar o seu centro e o raio. Para isto, vamos usar a técnica de **completar quadrado**, ilustrada a seguir, e que se baseia nas seguintes identidades

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

Vejamos um exemplo. A expressão $x^2 - 3x$ também pode ser escrita da seguinte forma:

$$x^2 + 3x = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Observe que fizemos inicialmente aparecer o 2, tomando o cuidado de dividir por 2 para manter a igualdade. Daí, naturalmente aparece o candidato a a , no caso, $3/2$. Então somamos $(3/2)^2$ e subtraímos esse mesmo valor para manter a igualdade. Temos então o quadrado perfeito $(x + 3/2)^2$.

Outro exemplo:

$$x^2 + 8x = x^2 + 2 \cdot \frac{8}{2}x = x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2 - 4^2 = (x + 4)^2 - 16$$

Exemplo 3: Decida se a equação $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 3z = 0$ é de uma superfície esférica. Em caso afirmativo, dê o centro e raio.

Solução:

Inicialmente, completemos os quadrados para cada uma das variáveis da equação:

$$\bullet x^2 - x = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\bullet y^2 - 2y = y^2 - 2 \cdot 1 \cdot y = y^2 - 2 \cdot 1 \cdot y + 1^2 - 1^2 = (y - 1)^2 - 1$$

$$\bullet z^2 - 3z = z^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}z = z^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}z + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Substituindo estas expressões na equação dada, temos

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y - 1)^2 - 1 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$$

ou seja,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{14}{4} = \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2$$

Trata-se de uma superfície esférica de centro $C = (1/2, 1, 3/2)$ e raio $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Exemplo 4: Decida se a equação $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2/3y + 19/9 = 0$ é de uma superfície esférica. Em caso afirmativo, dê o centro e raio.

Solução:

Repetindo o procedimento do item anterior, temos

$$\bullet x^2 - \frac{2}{3}x = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}$$

$$\bullet y^2 - 2y = (y - 1)^2 - 1$$

- a variável z já aparece como quadrado perfeito (z^2)

Substituindo na equação dada, vem

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y-1)^2 + z^2 + 1 = 0$$

o que resulta em

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y-1)^2 + z^2 = -1$$

Como o primeiro membro é não-negativo e o segundo é negativo, não existem x , y e z que satisfazem a equação dada, de modo que não se trata de uma superfície esférica.

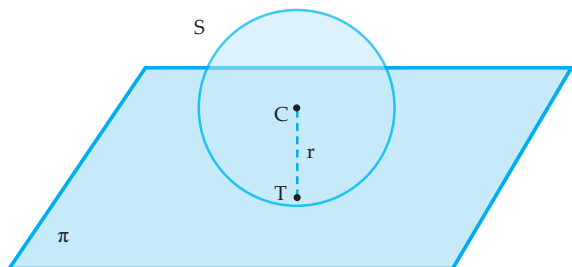
Exercícios

1. Decida se a equação dada representa uma superfície esférica. Em caso afirmativo, dê o centro e raio.

- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 6z + 7 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 15 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + 4 = 0$
- $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 36x - 6y - 8 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

Plano tangente

Um plano π é tangente a uma superfície esférica S de centro C e raio r se e somente se a distância de C a π é igual a r . Neste caso, o ponto comum a S e π é chamado de ponto de tangência. Observe que o ponto de tangência T é tal que o vetor $T - C$ é normal a π .



Exemplo 1: Dê uma equação geral do plano π tangente à superfície esférica $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ no ponto $T = (1, 4, 0)$ de S .

Solução:

Usando o método de completar quadrados, obtemos a seguinte equação reduzida de S :

$$S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$$

concluímos daí que S possui centro $C = (1, 1, 0)$ e raio $r = 3$.

Como $T - C = (1, 4, 0) - (1, 1, 0) = (0, 3, 0)$ é vetor normal a π , uma equação geral de π é da forma $3y + d = 0$. Como $T = (1, 4, 0)$ pertence a π , substituindo T na equação de π temos $d = -12$. Portanto, uma equação de π é $3y - 12 = 0$, ou $y - 4 = 0$.

Exercícios

1. Dê uma equação geral do plano tangente à superfície esférica S no ponto T de S , nos casos:

- $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0$ $T = (-1, 1, -1)$
- $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 4 = 0$ $T = (1, , 1)$
- $S: x^2 + y^2 + z^2 = 27$ $T = (-3, 3, -3)$

Exemplo 3: Um plano π é tangente à superfície esférica

$$S: (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 3 \text{ e é paralelo ao plano } \alpha: x + y - z - 40 = 0.$$

Determine uma equação geral de π .

Solução:

Como π é paralelo a α e o vetor $\vec{n} = (1, 1, -1)$ é normal a α , temos que também é normal a π . Portanto, a equação geral de π tem a forma $x + y - z + d = 0$.

Resta-nos agora determinar d . Para isso, utilizamos a condição de que a distância do centro $C = (1, 0, 0)$ de S a π é igual ao raio $r = \sqrt{3}$ de S (pela fórmula da distância de ponto a plano).

$$\frac{|\vec{AC} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \sqrt{3}$$

onde A é um ponto qualquer de π . Observe que $A = (0, 0, d)$ é um ponto de π . Temos então o vetor $\vec{AC} = C - A = (1, 0, -d)$. Daí vem

$$\frac{|(1, 0, -d) \cdot (1, 1, -1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 + 0 + d|}{\sqrt{3}} = \frac{|d + 1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Isto é, $|d + 1| = 3$, o que resulta em $d = 2$ ou $d = -4$. Portanto, há dois

planos nas condições do enunciado. Suas equações são:

$$x + y - z + 2 = 0 \quad \text{e} \quad x + y - z - 4 = 0$$

2. Determine uma equação geral do plano π tangente à superfície esférica S e paralelo ao plano α , nos casos:

$$\text{a) } S: (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 6 \quad \pi: 2x + y + z = 0$$

$$\text{b) } S: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 1 \quad \pi: 2x + y - z + 14 = 0$$

$$\text{c) } S: (x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2 \quad \pi: ax + y - z = 9$$

Referências

- Boulos, P. e Camargo, I. – Introdução à geometria analítica no espaço. Ed. Makron Books, 1997.
- Camargo, I., e Boulos, P. – Geometria analítica, um tratamento vetorial, 3a. Edição, Ed. Pearson, 2006.
- Corral, M. – Vector Calculus – Schoolcraft College – 2008.
- Kléténic – Problemas de geometria analítica. Ed. Livraria Cultura Brasileira, 1977.
- Murdoch, D. C. – Geometria analítica. Ed. LTC S.A., 2a. Edição, 1978.
- Santos, Reginaldo J. – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica - Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2006.
- Steinbruch, A. e Winterle, P. – Geometria analítica. Ed. McGraw-Hill, 1987.
- Venturi, J. R. – Álgebra Vetorial e Geometria Analítica – 9a. Edição, Curitiba (PR). ISBN: 85.85132-48-5.
- Winterle, P. – Vetores e geometria analítica, Ed. Pearson, 2007.



VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA

Coordenação e registro: Editora UFMS

Projeto gráfico: Lennon Godoi

Editoração eletrônica: Marcos Paulo de Souza

Fotoilhos: Cromoarte - Editora e Publicidade Ltda