TAREFA 4

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

OBJETIVO

Explorar no GeoGebra diferentes representações para o conceito de Sistemas Lineares, possibilitando a construção de representações cognitivas ricas e flexíveis e contribuindo para a assimilação do processo de cálculo da solução de Sistemas de Equações Lineares.

CONTEÚDO ABORDADO

Classificação e interpretação geométrica da solução de um Sistema Linear.

NÍVEL ESCOLAR

1º período – Ensino Superior.

DURAÇÃO

150 minutos.

RECURSOS

Papel, lápis, borracha, xerocópias da tarefa, laboratório de informática e projetor multimídia.

TAREFA (clique aqui para baixar em arquivo editável)

PLANEJAMENTO

RESOLUÇÃO DO PROFESSOR

CAMINHOS DE APRENDIZAGEM

REFERÊNCIAS

CONTATO

TAREFA

1- Responda: O que significa resolver um sistema linear?

2- Construa duas retas no GeoGebra seguindo as instruções:

a) Crie seis controles deslizantes (por exemplo **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**), configure para que eles sejam números "inteiros" e variem de -30 a 30.

b) Digite no campo "entrada" a equação **a**x+**b**y=**c**. Note que **a**, **b** e **c** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

c) Digite no campo "entrada" a equação **e**x+**d**y=**f**. Note que **e**, **d** e **f** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

3- Utilizando as retas construídas acima, verifique e comente a solução e a classificação de cada um dos sistemas lineares trabalhados na aula passada:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 4y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases}$

4- Abra um novo documento no GeoGebra, vá em "exibir" e selecione "janela de visualização 3D". Construa três planos seguindo as instruções:

a) Crie doze controles deslizantes com as mesmas configurações usadas no exercício 2.

b) Digite no campo "entrada" a equação **a**x+**b**y+**c**z=**d**. Note que **a**, **b**, **c** e **d** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

c) Repita o procedimento anterior para criar os outros dois planos, lembre-se de mudar os nomes dos controles deslizantes para cada plano.

5- Mova os controles deslizantes de forma que os três planos fiquem paralelos distintos.

a) Anote as equações desses três planos e compare-as.

b) Que tipo de solução temos para este sistema de três equações lineares?

c) Como podemos classificar esse sistema?

6- Mova os controles deslizantes de forma que as três equações fiquem múltiplas.

a) O que aconteceu com os planos, qual a posição deles?

b) Que tipo de solução temos para este sistema de três equações?

c) Como podemos classificar esse sistema?

7- Mova os controles deslizantes de forma que obtenhamos as equações de um sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas com uma única solução, ou seja, um Sistema Possível Determinado. Anote o sistema obtido.

8- Delete um dos planos construídos no GeoGebra. Se formássemos um sistema linear com as equações desses dois planos que restaram, quais tipos de solução poderíamos obter para esse sistema?

INÍCIO

PLANEJAMENTO

1º momento: Reserva do laboratório de informática e uso de recursos do GeoGebra.

Previamente o professor deve realizar a reserva do laboratório de informática e comunicar a turma o dia e horário da aula no laboratório. Para a organização da turma, os estudantes podem sentar-se individualmente ou em duplas por computador, no entanto, é importante que tenham liberdade para conversar e discutir ideias com os colegas.

Na aula, o professor deve explicar aos estudantes algumas noções sobre alguns recursos do *software* GeoGebra que serão utilizadas nessa tarefa: o controle deslizante e janela de visualização 3D (tempo sugerido: 20 minutos).

2º momento: Entrega da tarefa, explicação sobre a dinâmica da aula e resolução das questões pelos estudantes.

Nesse momento, o professor entrega a cada estudante uma cópia da tarefa, e explica que será disponibilizado um tempo (tempo sugerido: 80 minutos) para que discutam e resolvam as questões da tarefa, com o auxílio do *software* GeoGebra quando necessário, sempre anotando seus raciocínios e cálculos para serem entregues ao final da aula.

Durante as resoluções o professor acompanhará o andamento das atividades e selecionará algumas resoluções para serem apresentadas e discutidas com a turma toda no 3º momento. Porém, o professor não deve fazer correções, fornecer respostas, ou contribuições que diminuam o desafio cognitivo da tarefa, deve apenas auxiliar os estudantes no uso do *software,* caso necessário.

Finalizado esse momento, o professor exibirá no projetor as resoluções selecionadas, serão realizadas algumas discussões e sistematizações, e os estudantes entregarão suas anotações.

Lembrando que para seleção das resoluções o professor deve priorizar resoluções que apresentem diferentes procedimentos ou até mesmo resolução incorretas para uma mesma questão, de forma a possibilitar e incentivar a reflexão e a justificação de diferentes conceitos e procedimentos matemáticos.

3º momento: Discussão coletiva e Sistematização do conteúdo

Ao término do tempo destinado às resoluções, ocorrerá a socialização das possíveis resoluções dos estudantes, selecionadas previamente pelo professor e a sistematização dos conteúdos abordados (tempo sugerido: 50 minutos).

Nesse momento, o professor pode projetar as resoluções selecionadas previamente e então propor à turma que discutam sobre cada resolução (Sugestões de questionamentos: os procedimentos utilizados são válidos? A resposta final está coerente com a questão? Qual resolução é mais objetiva, demanda menos cálculos? Existem diferentes modos de resolver a questão? Existem conceitos ou definições já estudados que podem ser relacionados com a tarefa?).

É importante que o professor esclareça conceitos e procedimentos utilizados, avaliando os argumentos apresentados pelos estudantes e aproveitando para estabelecer conexões com outros conceitos e procedimentos matemáticos.

INÍCIO

RESOLUÇÃO DO PROFESSOR

A Tarefa 4 foi elaborada com o objetivo de oportunizar ao estudante o trabalho com diferentes representações para o conceito de Sistemas Lineares, pois a exploração dessas por meio de um ambiente computacional (no caso, o *software* GeoGebra) possibilita ao estudante partir de representações simples e avançar para representações abstratas, promovendo a construção de representações cognitivas ricas e flexíveis (MASON, 1989) e contribui para a assimilação do processo de cálculo de Sistemas de Equações Lineares (RODRIGUES, 2013; SIVA, 2015).

Além do mais, espera-se suprir a escassez de abordagens geométricas que pode ser observada em livros didáticos de Álgebra Linear, e trabalhar a dificuldade de pensar Sistemas de Equações Lineares por meio de representações geométricas, verificada por Jordão (2011).

As questões dessa tarefa constituem explorações e investigações, que estimulam, dentre outros processos, a mudança e tradução entre representações, pois, uma vez que o estudante compreende e interioriza diferentes representações, é possível que a tarefa estimule a transferência de informações contidas em uma representação para a sua utilização em outra representação (DREYFUS, 2002).

Na questão 1 é trazida a indagação sobre o que significa resolver um sistema linear, espera-se que, por meio dessa questão, os estudantes reflitam e organizem suas compreensões a respeito do assunto ao redigirem suas respostas.

1- Responda: O que significa resolver um sistema linear?

Exemplo de resposta: resolver um sistema linear ou determinar a solução de um sistema linear significa determinar os valores das incógnitas que satisfazem todas as equações desse sistema.

INÍCIO

Nas Questões 2 e 3 é proposto aos estudantes a exploração, no GeoGebra, da representação gráfica de três sistemas lineares (os mesmos propostos na questão 3 da Tarefa 3), para que em seguida comentem a solução e a classificação desses.

A opção por utilizar os mesmos sistemas lineares da tarefa anterior foi devido ao grande número de estudantes que não conseguiram concluir a resolução dessa questão.

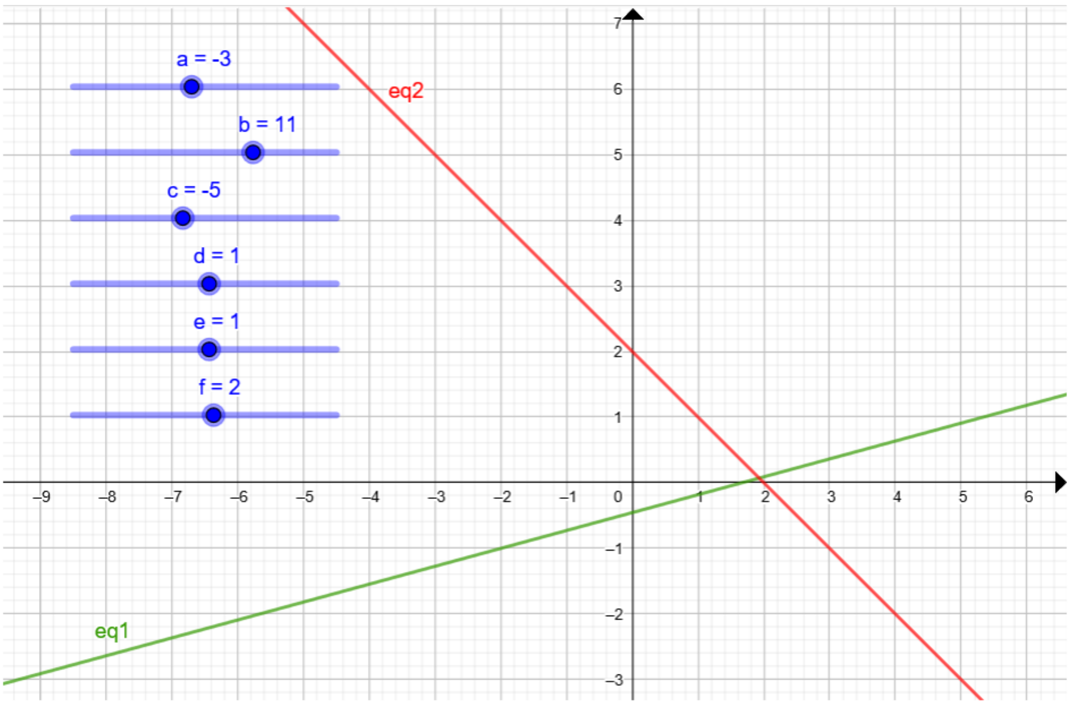
2- Construa duas retas no GeoGebra seguindo as instruções:

a) Crie seis controles deslizantes (por exemplo **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**), configure para que eles sejam números "inteiros" e variem de -30 a 30.

b) Digite no campo "entrada" a equação **a**x+**b**y=**c**. Note que **a**, **b** e **c** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

c) Digite no campo "entrada" a equação **d**x+**e**y=**f**. Note que **d**, **e** e **f** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

Resolução no GeoGebra, exemplo de resposta:



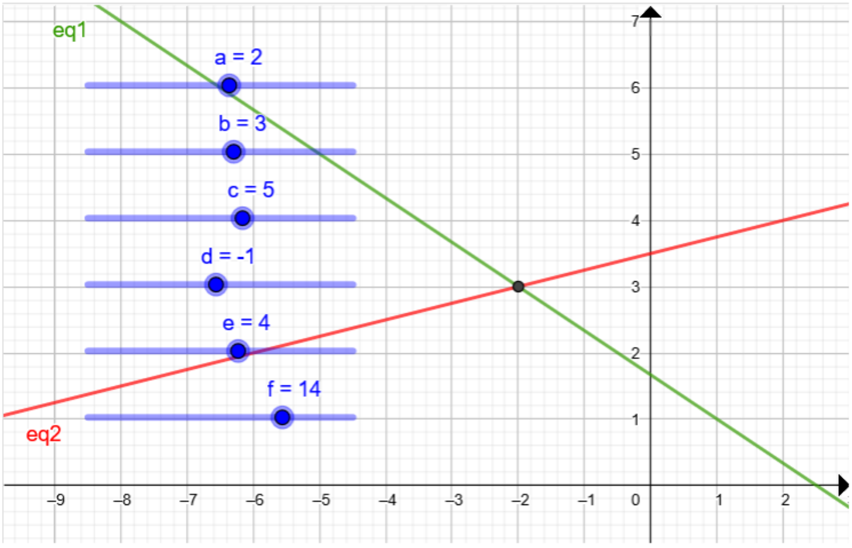
INÍCIO

3- Utilizando as retas construídas acima, verifique e comente a solução e a classificação de cada um dos sistemas lineares trabalhados na aula passada:

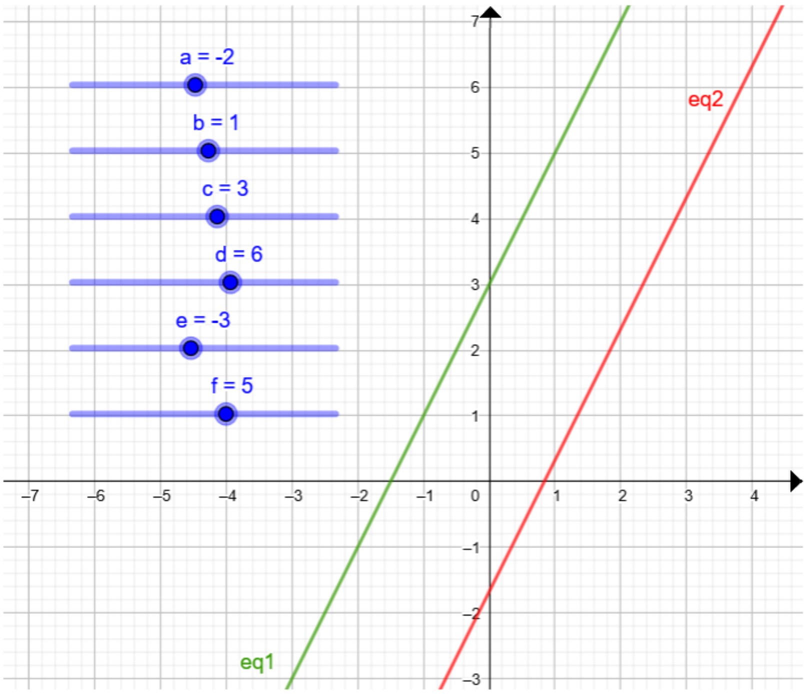
a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 4y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases}$

Resolução feita no GeoGebra:

a) Observando a representação gráfica do sistema linear vemos que as duas retas possuem um ponto de interseção: $(-2, 3)$. Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD) e sua solução $S = \{-2, 3\}$.



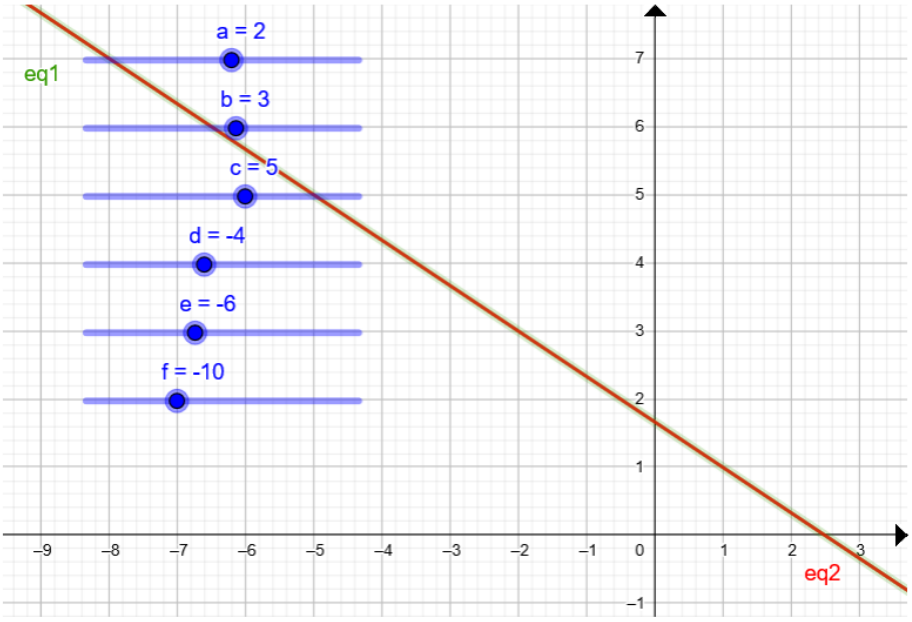
b) Observando a representação gráfica do sistema linear vemos que as duas retas não possuem, são paralelas distintas. Portanto, o sistema é impossível (SI) seu conjunto solução vazio $S = \{\ \}$.



INÍCIO

continuação da questão 3.

c) Observando a representação gráfica do sistema linear vemos que as duas retas possuem infinitos pontos de interseção, são paralelas coincidentes. Portanto, o sistema é possível e indeterminado (SPI) e para exibir sua solução basta escrever uma das incógnitas em função da outra.



INÍCIO

A quarta questão fornece instruções para que os estudantes construam três planos no GeoGebra utilizando a ferramenta “controles deslizantes”, de forma que os coeficientes desses planos possam ser alterados como conveniente, alterando a visualização gerada na *janela de visualização 3D* do *software*. A partir desses planos, serão desenvolvidas as questões seguintes, que exploram as representações geométricas de Sistemas de Equações Lineares 2x3 e 3x3.

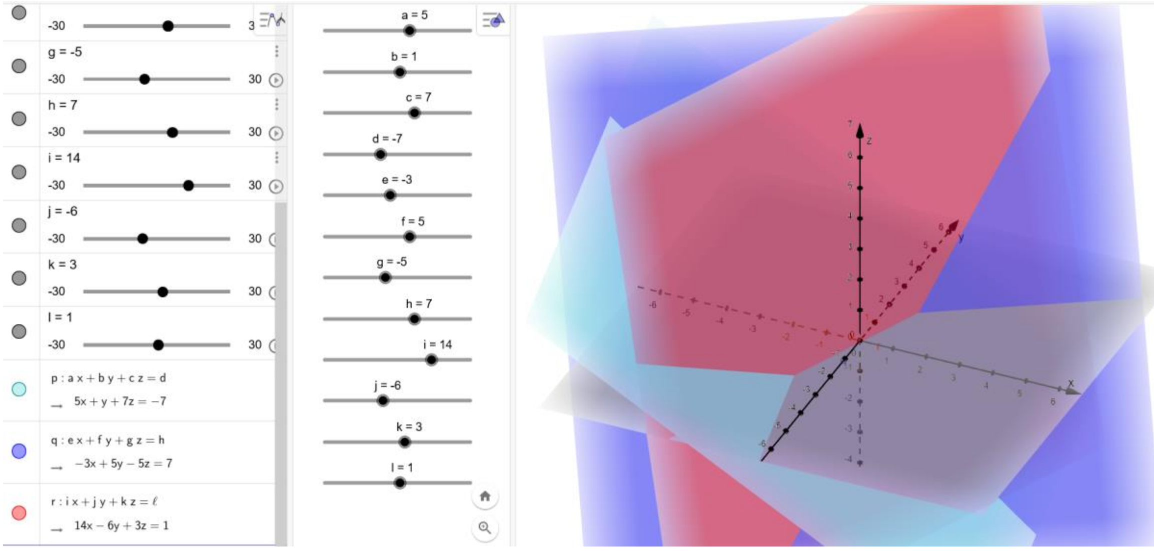
4- Abra um novo documento no GeoGebra, vá em “exibir” e selecione “janela de visualização 3D”. Construa três planos seguindo as instruções:

a) Crie doze controles deslizantes com as mesmas configurações usadas no exercício 2.

b) Digite no campo “entrada” a equação **a**x+**b**y+**c**z=**d**. Note que **a**, **b**, **c** e **d** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

c) Repita o procedimento anterior para criar os outros dois planos, lembre-se de mudar os nomes dos controles deslizantes para cada plano.

Exemplo de resolução feita no GeoGebra:



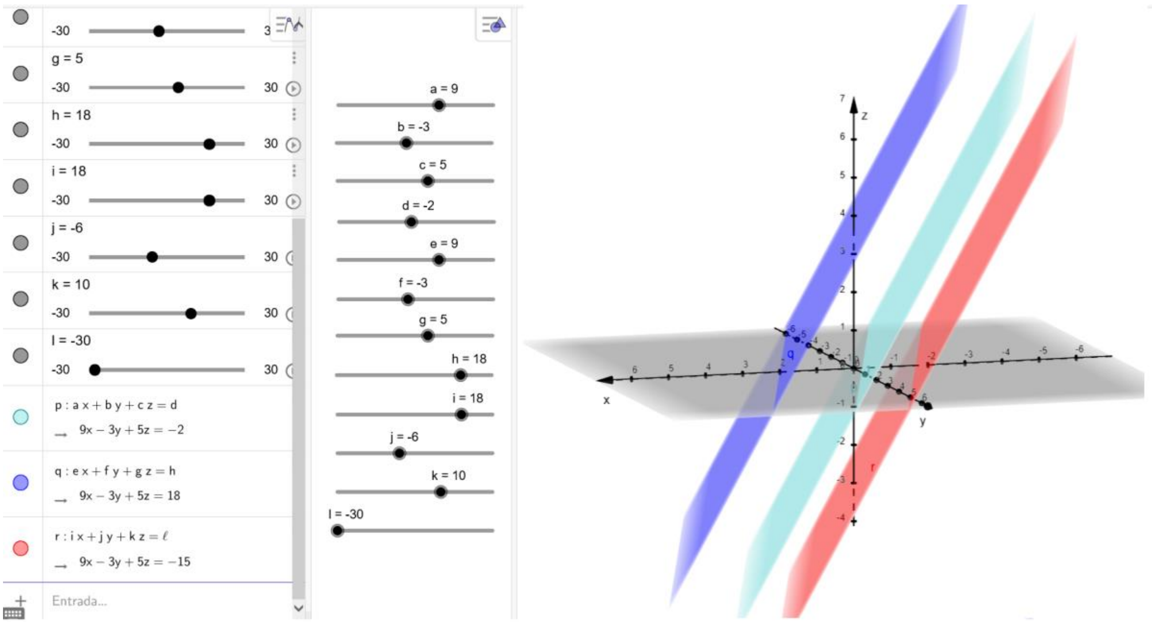
INÍCIO

Na quinta questão é solicitado ao estudante que mova os controles deslizantes de modo a obter três planos paralelos distintos e compare as suas equações. Espera-se que o estudante perceba que os coeficientes que acompanham as variáveis x, y e z são múltiplos aos respectivos coeficientes dos outros planos, ou seja, que os vetores normais dos planos são paralelos.

5- Mova os controles deslizantes de forma que os três planos fiquem paralelos distintos.

a) Anote as equações desses três planos e compare-as.

Exemplo de resolução feita no GeoGebra:



As equações dos planos são: $9x - 3y + 5z = -2$, $9x - 3y + 5z = 18$ e $18x - 6y + 10z = -30$. Note que a última equação é exibida no GeoGebra como $9x - 3y + 5z = -15$ pois o software simplificou a equação $18x - 6y + 10z = -30$ dividindo-a por 2.

Observando os coeficientes das variáveis x, y e z das três equações, observamos que eles são iguais ou múltiplos.

Coeficientes das variáveis da 1ª equação: $9, -3$ e 5

Coeficientes das variáveis da 2ª equação: $9, -3$ e 5

Coeficientes das variáveis da 3ª equação: $18, -6$ e 10

Apenas os termos independentes (após o sinal de igual) são diferentes e não seguem a mesma multiplicidade dos demais. (*Os alunos podem obter equações diferentes para essa questão*).

b) Que tipo de solução temos para este sistema de três equações lineares?

O sistema linear $\begin{cases} 9x - 3y + 5z = -2 \\ 9x - 3y + 5z = 18 \\ 18x - 6y + 10z = -30 \end{cases}$ não possui solução, pois os planos não se intersectam. (*Os alunos podem obter equações diferentes para essa questão*).

c) Como podemos classificar esse sistema?

O sistema linear é classificado como impossível (SI).

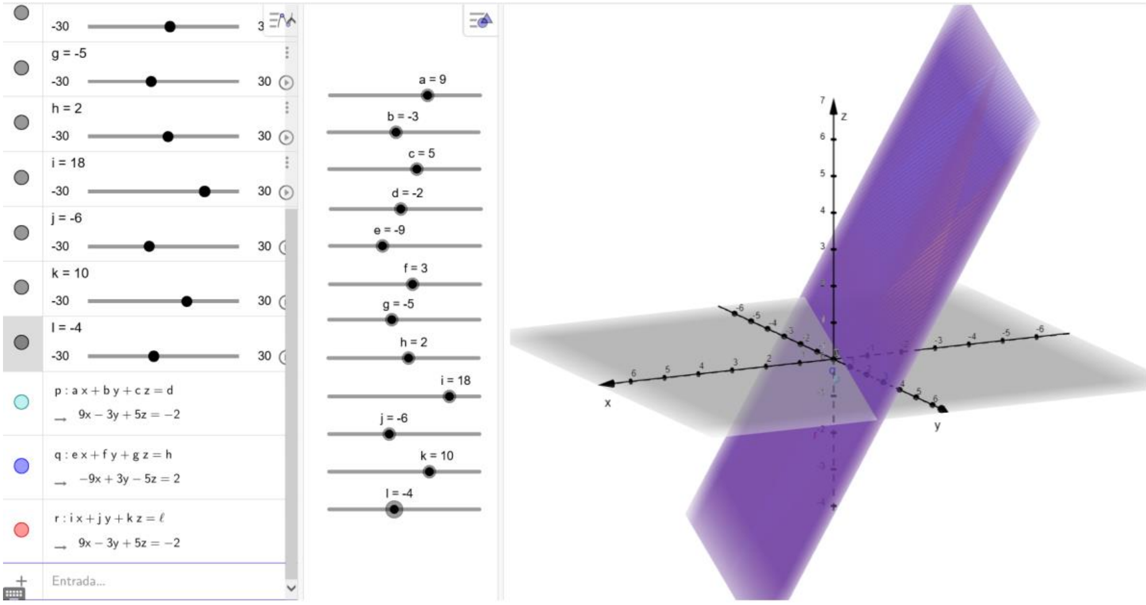
[INÍCIO]

Na sexta questão é solicitado ao estudante que mova os controles deslizantes até que as três equações fiquem múltiplas, obtendo planos coincidentes. Na sequência são feitas as mesmas indagações do item anterior quanto ao tipo de solução e à classificação do sistema linear obtido.

6- Mova os controles deslizantes de forma que as três equações fiquem múltiplas.

a) O que aconteceu com os planos, qual a posição deles?

Exemplo de resolução feita no GeoGebra:



As equações dos planos são: $9x - 3y + 5z = -2$, $-9x + 3y - 5z = 2$ e $18x - 6y + 10z = -4$.

Os três planos ficaram sobrepostos, ou seja, são paralelos coincidentes.

b) Que tipo de solução temos para este sistema de três equações?

O sistema linear $\begin{cases} 9x - 3y + 5z = -2 \\ -9x + 3y - 5z = 2 \\ 18x - 6y + 10z = -4 \end{cases}$ possui infinitas soluções, pois os planos possuem infinitos pontos em comum (infinitos pontos (x, y, z) que satisfazem as três equações do sistema). (*Os alunos podem obter equações diferentes para essa questão*).

c) Como podemos classificar esse sistema?

O sistema linear é classificado como possível e indeterminado (SPI).

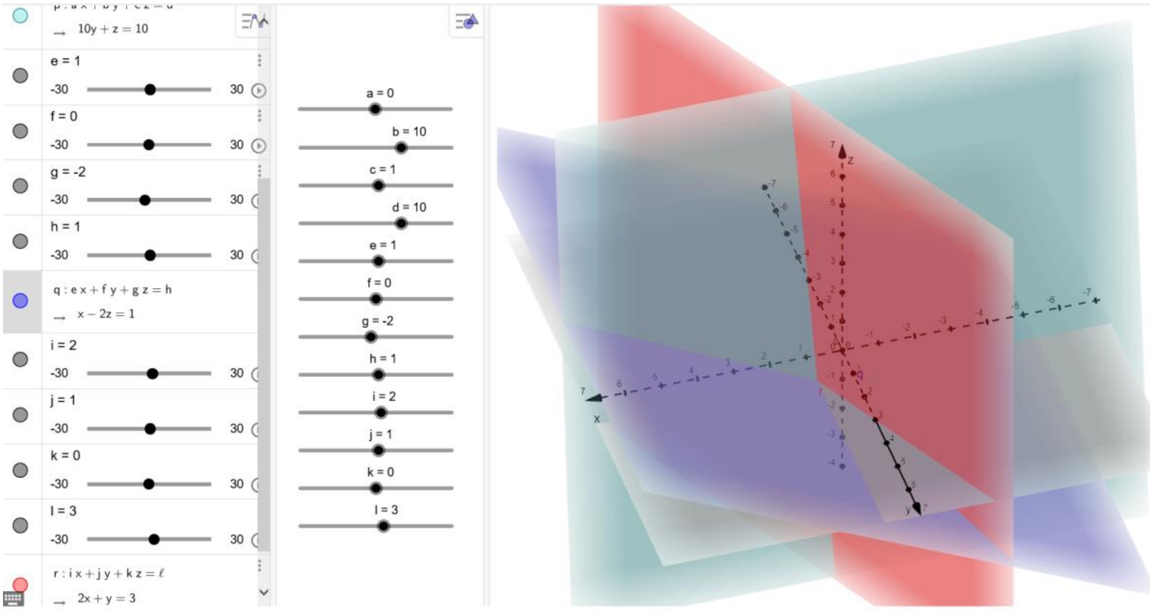
INÍCIO

Na sétima questão é solicitado ao estudante que mova os controles deslizantes até obter as equações de um sistema linear de três equações e três incógnitas que seja possível determinado, ou seja, que possua uma única solução.

Por meio dessa questão, espera-se que os estudantes visualizem e explorem as possíveis configurações entre três planos, e os diferentes tipos de solução possíveis.

7- Mova os controles deslizantes de forma que obtenhamos as equações de um sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas com uma única solução, ou seja, um Sistema Possível Determinado. Anote o sistema obtido.

Exemplo de resolução feita no GeoGebra:



As equações dos planos são: $10y + z = 10$, $x - 2z = 1$ e $2x + y = 3$, formando o sistema linear possível e determinado:

$$\begin{cases} 10y + z = 10 \\ x - 2z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Que possui solução $\{1, 1, 0\}$.

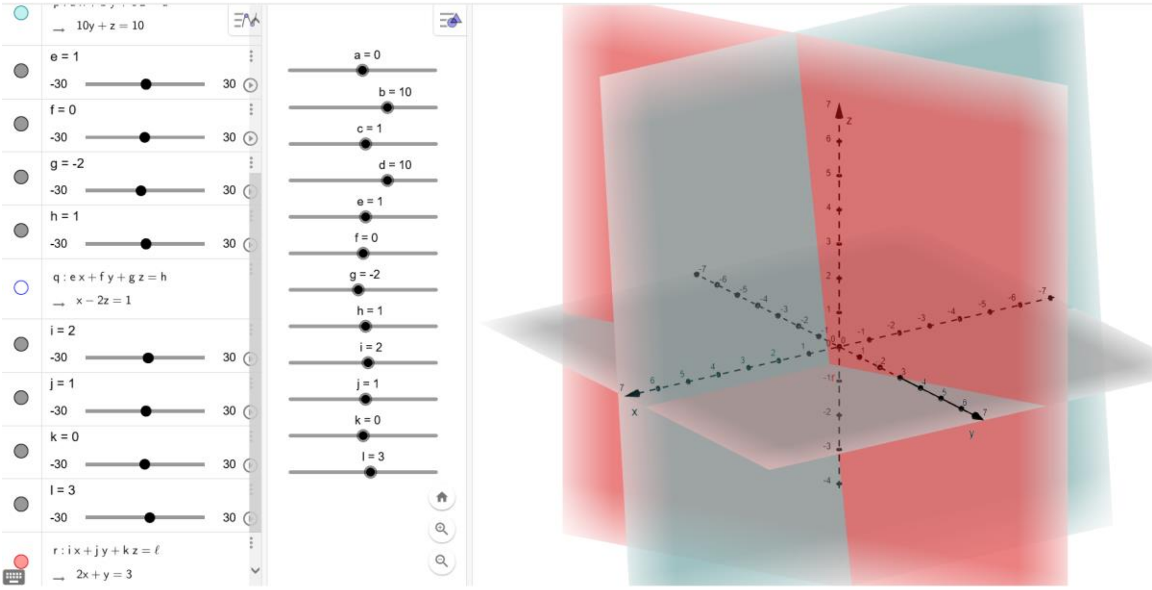
(*Os alunos podem obter equações diferentes para essa questão*).

INÍCIO

Por fim, na oitava questão é explorada a representação gráfica da solução de um sistema de duas equações e três incógnitas. É solicitado ao estudante que delete um dos três planos, e avalie quais as possíveis soluções para um sistema linear composto por duas equações de um plano.

8- Delete um dos planos construídos no GeoGebra. Se formássemos um sistema linear com as equações desses dois planos que restaram, quais tipos de solução poderíamos obter para esse sistema?

Exemplo de resolução feita no GeoGebra:



Removendo o plano de equação $x - 2z = 1$ obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} 10y + z = 10 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Que possui solução possível e indeterminada, dado que os dois planos possuem infinitos pontos em comum (a interseção dos dois planos forma uma reta).

(Os alunos podem obter sistemas lineares diferentes para essa questão dependendo de qual plano vai ser deletado, porém, todos os sistemas obtidos serão possíveis e indeterminados).

INÍCIO

CAMINHOS DE APRENDIZAGEM

Representação geométrica da solução de Sistemas Lineares

Michelle Andrade Klaiber

O desenvolvimento dessa tarefa ocorreu no ano de 2017, em uma turma de 1º período do curso de Licenciatura em Química da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, com a duração de 150 minutos (três horas aula).

Inicialmente, conduzi os estudantes ao laboratório de informática, entreguei uma cópia da tarefa para cada um, e solicitei que resolvessem as questões com o auxílio do software GeoGebra quando necessário, sempre anotando seus raciocínios e cálculos para serem entregues ao final da aula. Para a fase das resoluções, disponibilizei o tempo de 80 minutos.

Para a resolução da primeira questão os estudantes não apresentaram dificuldades, visto que, em uma aula anterior a essa, a turma realizou explorações envolvendo sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas (Tarefa 3).

Durante a resolução da segunda questão muitos estudantes tiveram dificuldade na utilização do GeoGebra, apesar de já terem utilizado a ferramenta anteriormente, então a precisei auxiliar esses estudantes com o uso do software.

A terceira questão, que já havia sido explorada na tarefa anterior (Tarefa 3) por meio da resolução algébrica e gráfica na folha milimetrada, foi explorada dessa vez por meio do software, relacionando as soluções obtidas com as classificações de um sistema linear. Não observei dificuldades na resolução dessa questão.

Na quarta questão os estudantes tiveram apenas que construir três planos no GeoGebra, por meio de equações onde cada coeficiente era representado por um "controle deslizante", e comparar as modificações algébricas e gráficas realizadas. Foi uma preparação para as questões seguintes.

Durante a resolução da quinta questão observei uma dificuldade dos estudantes em perceber um padrão entre as equações de planos paralelos distintos (os coeficientes das variáveis eram múltiplos, ou seja, vetores normais paralelos), no entanto, nos itens b e c a maioria não apresentou dificuldades em visualizar a solução do sistema linear.

As questões 6 e 7 foram resolvidas rapidamente pelos estudantes, não foram apresentadas dúvidas ou dificuldades na resolução das mesmas.

Por fim, a questão 8 despertou muitas dúvidas, pois a representação gráfica do sistema obtido apresentava uma reta como interseção dos dois planos. Caminhando entre os grupos ouvi um comentário:

"não é SPI, pois os planos não são paralelos, e também não é SPD, pois não tem um ponto em comum..."

Tal comentário evidenciou que a noção de sistemas com solução possíveis e indeterminadas ainda não estava muito clara para eles. Deixei que terminassem a tarefa para retomar o assunto no momento das discussões.

Encerrado o tempo destinado às resoluções, nem todos haviam terminado a última questão, porém, para não reduzir o tempo destinado às discussões e à sistematização, pedi para que os estudantes finalizassem e entregassem suas anotações.

INÍCIO

Durante as discussões, como muitos estudantes não conseguiram terminar a questão 8 e a representação geométrica do sistema causou dúvidas na interpretação da sua solução retomei a questão 1 e o comentário citado acima e perguntei:

“o que significa resolver um sistema linear? E no caso do sistema linear que vocês obtiveram?”

Um estudante respondeu:

“buscamos um ponto em comum nos planos, esse ponto é a solução do sistema”

Continuei:

“e no caso dos planos coincidentes, o que aconteceu?”

O mesmo estudante respondeu:

“todos os pontos eram iguais, infinitos pontos em comum”

e outro estudante complementou:

“a solução era indeterminada”

Então perguntei:

“E nesse caso o que aconteceu?”

E o primeiro estudante respondeu:

“tem pontos em comum e tem pontos diferentes”

Perguntei:

“quantos pontos em comum?”

Ele respondeu:

“não sei, infinitos? Então o sistema é possível indeterminado!”

Então concordei com ele.

Ao final da aula, destinei apenas 15 minutos para a sistematização das aprendizagens, já que as discussões foram muito produtivas e ocuparam um tempo maior que o previsto. Durante a sistematização, retomei a classificação da solução de um sistema linear, relacionando-a com as respectivas representações geométricas.

Encerrei a aula avisando à turma que eu havia disponibilizado, no ambiente virtual de aprendizagem, a tarefa trabalhada e uma lista com questões para serem exploradas no GeoGebra, para que pudessem praticar em casa.

INÍCIO

REFERÊNCIAS

BUSSMANN, C. J. C.; KLAIBER, M. A.; SILVA, D. P. Processos mentais de Dreyfus e o Ensino Exploratório: discussão e possível intervenção em sala de aula. In: *ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14*., 2017. Cascavel. *Anais...* Cascavel: Unioeste, 2017. p. 1-13.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Org.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

MASON, J. Mathematical Abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics*, v. 9, n. 2, p. 2-8, 1989.

PONTE, J. P. Gestão Curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular.* Lisboa: APM, 2005. p.11-34.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. A. F. As discussões matemáticas na aula exploratória como vertente da prática profissional do professor. *Revista da Faculdade de Educação*. Mato Grosso, v. 23, n. 1, p. 131-150, 2015.

RODRIGUES, C. D. Uma Abordagem para o estudo de Sistemas Lineares integrando diferentes Linguagens. 2013. 154 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2013.

SILVA, A. V. M. Sistemas de equações lineares: um paralelo entre a álgebra e a geometria. In: *Anais Eletrônicos do XIX EBRAPEM – GD 4*. Minas Gerais: UFJF, 2015. p. 1-12.

CONTATO

Esse material foi elaborado pela professora Michelle Andrade Klaiber.

A professora Michelle é doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL) e atua como docente nos cursos de Engenharia e Licenciatura na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Você pode usar, modificar, adequar e compartilhar este material!

Se você tiver dúvidas ou sugestões, escreva para o e-mail michelle@utfpr.edu.br .

INÍCIO