TAREFA 3

EXPLORANDO EQUAÇÕES E SISTEMAS LINEARES

OBJETIVO

Explorar os conceitos de Equação Linear, Sistemas de Equações Lineares e de solução e representação geométrica da solução de um Sistema Linear de duas equações e duas incógnitas.

CONTEÚDO ABORDADO

Equações Lineares e Sistemas de Equações Lineares 2x2.

NÍVEL ESCOLAR

1º período – Ensino Superior.

DURAÇÃO

150 minutos.

RECURSOS

Papel, papel milimetrado, lápis, borracha e xerocópias da tarefa.

TAREFA

1- Dada a equação linear $-2x + y = 3$:

a) Construa uma tabela com ao menos três valores de x e de y que satisfaçam a equação linear.

b) Represente graficamente, num plano cartesiano com eixos x e y os valores encontrados no item a.

c) O que, geometricamente, representa o gráfico desta equação linear?

d) Multiplique a equação dada por 3 e refaça os itens a, b e c. Compare os resultados obtidos.

e) Agora, levando em consideração a equação inicial, altere o número 3 por 5 e refaça os itens a, b e c. Compare os resultados obtidos.

2- Dadas as equações lineares I) $2x + 3y = 5$ e II) $-x + 4y = 14$ faça o que se pede:

a) Construa uma tabela para I e uma tabela para II com ao menos quatro possíveis valores de x e de y que satisfaçam as respectivas equações lineares.

b) Represente graficamente (num mesmo plano cartesiano com eixos x e y) os valores encontrados no item a para as equações I e II.

c) O que representa cada par (x, y) encontrado no item a)?

d) O que, geometricamente, representa o gráfico de cada uma dessas equações lineares?

e) Existe algum valor de x e de y, ou seja, um par (x, y) que satisfaça as duas equações? Caso exista, qual?

f) Represente o ponto (-2, 3) no gráfico construído no item b. O que este ponto significa?

3- Agora tente resolver os sistemas lineares abaixo, ou seja, tente encontrar qual(is) valor(es) de x e de y que satisfazem as equações do sistema linear. Explique cada etapa da sua resolução!

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 4y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases}$

INÍCIO

PLANEJAMENTO

1º momento: Aquisição de material (folha milimetrada), organização da sala de aula e entrega da tarefa.

Previamente o professor deve providenciar folhas milimetradas para os estudantes, para a construção dos gráficos da tarefa. Para a resolução da tarefa os estudantes devem ser instruídos a formarem duplas para poderem discutir a resolução das questões.

Na sequência, o professor entrega a cada dupla as questões impressas e uma folha milimetrada.

2º momento: Explicação sobre a dinâmica da aula e resolução das questões pelos estudantes.

Nesse momento, o professor explica que a aula iniciará com as duplas discutindo e resolvendo as questões da tarefa e que, para essa etapa, será disponibilizado um tempo (sugestão: 80 minutos). Enquanto isso, o professor acompanhará a atividade das duplas sem corrigir resoluções ou fornecer informações que diminuam o desafio da questão e selecionará algumas resoluções para serem apresentadas e discutidas com a turma toda no 3º momento, quando serão formalizados os conteúdos explorados na tarefa.

Lembrando que para seleção das resoluções o professor deve priorizar resoluções que apresentem diferentes procedimentos ou até mesmo resoluções incorretas para uma mesma questão, de forma a possibilitar e incentivar a reflexão e a justificação de diferentes conceitos e procedimentos matemáticos.

3º momento: Discussão coletiva e Sistematização do conteúdo

Ao término do tempo destinado às resoluções, ocorrerá a socialização das possíveis resoluções dos estudantes, selecionadas previamente pelo professor e a sistematização dos conteúdos abordados (tempo sugerido: 60 minutos).

Nesse momento, o professor pode solicitar que as resoluções selecionadas sejam apresentadas pelas duplas na lousa, e então propor à turma que discutam sobre cada resolução (Sugestões de questionamentos: os procedimentos utilizados são válidos? A resposta final está coerente com a questão? Qual resolução é mais objetiva, demanda menos cálculos? Existem diferentes modos de resolver a questão? Existem conceitos ou definições já estudados que podem ser relacionados com a tarefa?).

É importante que o professor esclareça conceitos e procedimentos utilizados, avaliando os argumentos apresentados pelos estudantes e aproveitando para estabelecer conexões com outros conceitos e procedimentos matemáticos. Sugerimos que o professor apresente e comente as classificações da solução de um sistema linear (sistema possível determinado, sistema possível indeterminado e sistema impossível) e disponibilize algum texto de apoio (pode ser do livro adotado na disciplina) para que os estudantes possam, após a aula, rever conceitos e definições importantes a respeito de equações e sistemas lineares.

INÍCIO

RESOLUÇÃO DO PROFESSOR

A tarefa 3, explora o registro gráfico de Sistemas de Equações Lineares, bem como a análise das soluções desses sistemas, visando complementar a abordagem, predominantemente algébrica, de grande parte dos livros didáticos.

As questões da tarefa constituem explorações e investigações, uma vez que são questões abertas, que se distinguem apenas pelo seu grau de desafio (PONTE, 2005), proporcionando aos estudantes o desenvolvimento e/ou a mobilização de processos cognitivos relacionados à representação, como a visualização e a mudança de representação e tradução, e de processos relacionados à abstração, como a generalização e a síntese (DREYFUS, 2002 e BUSSMANN; KLAIBER; SILVA, 2017).

A primeira questão foi elaborada com a intenção de resgatar o conceito de equação linear e também de minimizar a dificuldade dos estudantes com o traçado de gráficos. Além disso, as explorações propostas na questão proporcionam ao estudante o reconhecimento de equações de retas paralelas distintas e paralelas coincidentes, uma habilidade que pode auxiliar na interpretação da representação geométrica da solução de um Sistema de Equações Lineares 2x2.

1- Dada a equação linear $-2x + y = 3$:

a) Construa uma tabela com ao menos três valores de x e de y que satisfaçam a equação linear.

Os valores podem ser escolhidos aleatoriamente, mas, para simplificar os cálculos escolheremos os valores -1, 0, 1 e 2 para a variável x e, a partir desses valores, obtemos os valores de y

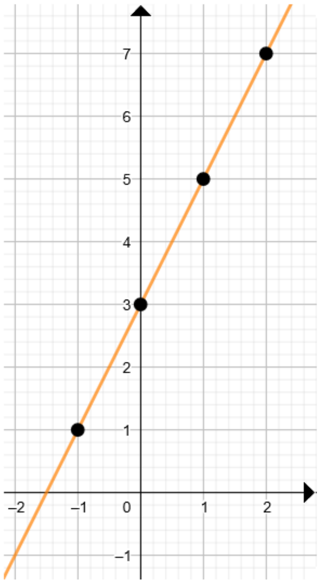
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-2x + y = 3}$	$\boldsymbol{y}$
-1	$-2(-1) + y = 3$	1
0	$-2(0) + y = 3$	3
1	$-2(1) + y = 3$	5
2	$-2(2) + y = 3$	7

Temos então os pares ordenados $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 5)$ e $(2, 7)$.

INÍCIO

continuação da questão 1.

b) Represente graficamente, num plano cartesiano com eixos x e y os valores encontrados no item a.



c) O que, geometricamente, representa o gráfico desta equação linear?

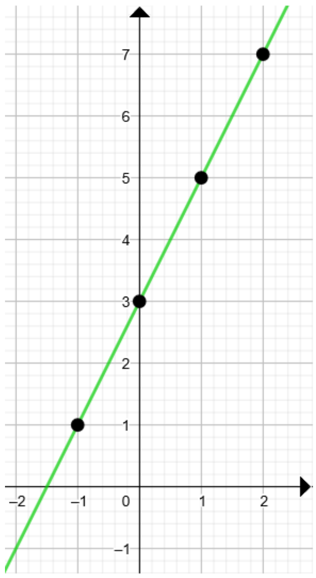
Unindo os pontos do gráfico obtemos uma reta.

d) Multiplique a equação dada por 3 e refaça os itens a, b e c. Compare os resultados obtidos.

Multiplicando a equação $-2x + y = 3$ por 3 obtemos $-6x + 3y = 9$, assim

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-6x + 3y = 9}$	$\boldsymbol{y}$
-1	$-6(-1) + 3y = 9$	1
0	$-6(0) + 3y = 9$	3
1	$-6(1) + 3y = 9$	5
2	$-6(2) + 3y = 9$	7

Temos então os pares ordenados $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 5)$ e $(2, 7)$. Representando graficamente



INÍCIO

continuação da questão 1 item d.

O gráfico desta equação é também uma reta.

Comparando estes resultados com os obtidos nos itens a, b e c temos:

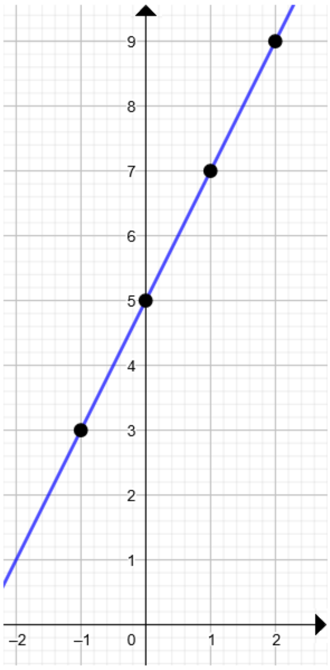
- Os pares ordenados obtidos são iguais aos obtidos no item a, sendo assim, a reta obtida é a mesma! Isso acontece porque ao multiplicar uma equação por um número qualquer, diferente de zero, a relação entre as variáveis x e y permanece a mesma.
- Graficamente, obtivemos retas paralelas coincidentes.

e) Agora, levando em consideração a equação inicial, altere o número 3 por 5 e refaça os itens a, b e c. Compare os resultados obtidos.

Substituindo 3 por 5 na equação $-2x + y = 3$ obtemos $-2x + y = 5$, assim

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-2x + y = 5}$	$\boldsymbol{y}$
-1	$-2(-1) + y = 5$	3
0	$-2(0) + y = 5$	5
1	$-2(1) + y = 5$	7
2	$-2(2) + y = 5$	9

Temos então os pares ordenados $(-1, 3)$, $(0, 5)$, $(1, 7)$ e $(2, 9)$. Representando graficamente



O gráfico desta equação representa uma reta.

Comparando estes resultados com os obtidos nos itens a, b e c temos:

- Ao modificar o coeficiente linear da equação (adicionamos 2 unidades: $3 + 2 = 5$) mantendo as escolhas feitas anteriormente no item a para a variável x, os valores obtidos para y também ficarão adicionados de 2 unidades.
- Graficamente, significa que esta reta possui a mesma inclinação da reta obtida no item a, porém, está deslocada 2 unidades para cima (eixo y), resultando em retas paralelas distintas.

INÍCIO

A segunda questão da tarefa propõe que os estudantes encontrem pares (x,y) que satisfaçam as duas equações dadas e as represente em um mesmo plano coordenado.

Em seguida, são propostos alguns questionamentos para que os estudantes percebam que cada equação representa uma reta do plano cartesiano, e que essas se interceptam em um determinado ponto.

2- Dadas as equações lineares I) $2x + 3y = 5$ e II) $-x + 4y = 14$ faça o que se pede:

a) Construa uma tabela para I e uma tabela para II com ao menos quatro possíveis valores de x e de y que satisfaçam as respectivas equações lineares.

Os valores podem ser escolhidos aleatoriamente, mas, para simplificar os cálculos escolheremos os valores -1, 0, 1 e 2 para a variável x e, a partir desses valores, obtemos os valores de y

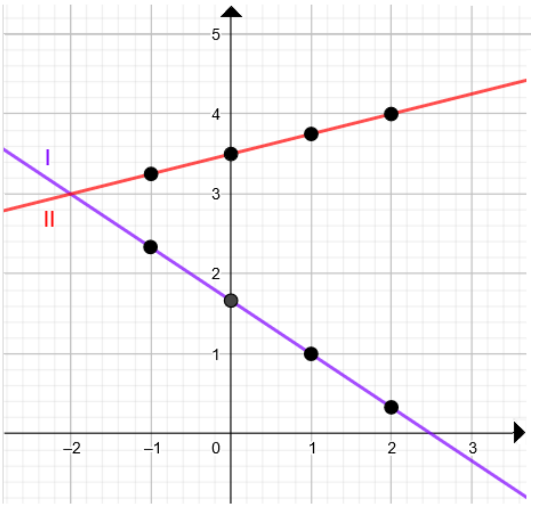
$\boldsymbol{x}$	**I)** $2x + 3y = 5$	$\boldsymbol{y}$
-1	$2(-1) + 3y = 5$	$\frac{7}{3} \cong 2{,}3$
0	$2(0) + 3y = 5$	$\frac{5}{3} \cong 1{,}7$
1	$2(1) + 3y = 5$	1
2	$2(2) + 3y = 5$	$\frac{1}{3} \cong 0{,}3$

Temos para a equação I os pares ordenados: $\left(-1, \frac{7}{3}\right)$, $\left(0, \frac{5}{3}\right)$, $(1, 1)$ e $\left(2, \frac{1}{3}\right)$.

$\boldsymbol{x}$	**II)** $-x + 4y = 14$	$\boldsymbol{y}$
-1	$-(-1) + 4y = 14$	$\frac{13}{4} \cong 3{,}25$
0	$-0 + 4y = 14$	$\frac{14}{4} \cong 3{,}5$
1	$-1 + 4y = 14$	$\frac{15}{4} \cong 3{,}75$
2	$-2 + 4y = 14$	4

E para a equação II os pares ordenados: $\left(-1, \frac{13}{4}\right)$, $\left(0, \frac{14}{4}\right)$, $\left(1, \frac{15}{4}\right)$ e $(2, 4)$.

b) Represente graficamente (num mesmo plano cartesiano com eixos x e y) os valores encontrados no item a para as equações I e II.



INÍCIO

continuação da questão 2.

c) O que representa cada par (x, y) encontrado no item a)?
Cada par ordenado (x, y) representa um ponto no gráfico.

d) O que, geometricamente, representa o gráfico de cada uma dessas equações lineares?
Os gráficos obtidos para cada uma das equações representam retas.

e) Existe algum valor de x e de y, ou seja, um par (x, y) que satisfaça as duas equações? Caso exista, qual?
Observando o gráfico vemos que as retas se "cruzam" próximo aos valores $x = -2$ e $y = 3$, para saber se esses valores são as coordenadas do ponto onde as retas se cruzam basta testarmos esses valores nas equações I e II:

$$2x + 3y = 5$$
$$2(-2) + 3(3) = 5$$
$$-4 + 9 = 5$$
$$5 = 5$$

$$-x + 4y = 14$$
$$-(-2) + 4(3) = 14$$
$$2 + 12 = 14$$
$$14 = 14$$

Note que o par $(-2, 3)$ satisfaz as duas equações.

Comentário: caso algum aluno se recorde da resolução de sistemas lineares, pode-se abordar outro tipo de resolução para a questão, como mostrado a seguir.

Outra forma de responder a essa questão sem recorrer ao gráfico é resolver o sistema linear formado pelas equações I e II:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 4y = 14 \end{cases}$$

um método de resolver o sistema linear é isolando uma variável em uma das equações e substituindo na outra equação (conhecido como método da substituição). Isolando x na segunda equação

$$-x = 14 - 4y$$
$$x = 4y - 14$$

Substituindo na primeira equação

$$2x + 3y = 5$$
$$2(4y - 14) + 3y = 5$$
$$8y - 28 + 3y = 5$$
$$11y = 33$$
$$y = 3$$

voltando na igualdade $x = 4y - 14$ e substituindo o valor de y

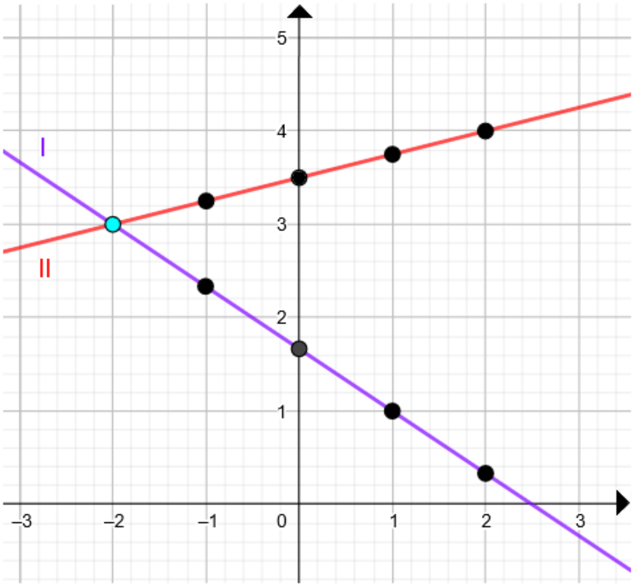
$$x = 4(3) - 14$$
$$x = -2$$

Solução $\{-2, 3\}$.

INÍCIO

continuação da questão 2.

f) Represente o ponto (-2, 3) no gráfico construído no item b. O que este ponto significa?



O ponto $(-2, 3)$ representa a interseção das duas retas, ou seja, satisfaz as equações I e II.

A terceira questão propõe a resolução gráfica de três sistemas lineares distintos, um possível determinado, um possível indeterminado e um impossível e solicita ao estudante que explique cada etapa de sua resolução. Por meio dessa questão, é possível discutir algébrica e graficamente a classificação da solução de um sistema linear.

3- Agora tente resolver os sistemas lineares abaixo, ou seja, tente encontrar qual(is) valor(es) de x e de y que satisfazem as equações do sistema linear. Explique cada etapa da sua resolução!

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 4y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases}$

Comentário: objetivamos com essa tarefa explorar as representações algébrica e geométrica da solução de um sistema linear 2x2, então, mesmo que alguns alunos saibam resolver algebricamente os sistemas lineares propostos, é interessante que seja feita a resolução geométrica para que se relacione ambas.

Adotando o método gráfico, como nas questões 1 e 2, representaremos geometricamente cada par de equações e analisaremos se há interseção das retas.

a) Note que o sistema linear desse item é o mesmo da questão 2, deste modo, o aluno que resolveu a questão anterior graficamente pode agora resolver o sistema linear geometricamente, ou vice versa *(os dois tipos de resolução foram apresentados na resolução da questão 2).*

Apresento a seguir a resolução algébrica do sistema pelo método do cancelamento:

INÍCIO

continuação da questão 3.

Um método de resolver o sistema linear dado é multiplicando uma das equações por um número diferente de zero, de modo que, ao somar as duas equações uma das variáveis seja cancelada.
Multiplicando a segunda equação por 2 e depois somando com a primeira equação cancelamos a variável x

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 4y = 14 \ \ (*\,2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x + 8y = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x + 8y = 28 \end{cases} (+)$$

$$11y = 33 \quad \Longrightarrow \boldsymbol{y = 3}$$

Substituindo na primeira equação

$$2x + 3y = 5$$
$$2x + 3(3) = 5$$
$$2x + 9 = 5$$
$$2x = -4 \quad \Longrightarrow \boldsymbol{x = -2}$$

Solução $\{-2, 3\}$.

b) Escolhendo os valores -1, 0 e 1 para a variável x obtemos os valores de y para as duas equações:

$\boldsymbol{x}$	**I)** $-2x + y = 3$	$\boldsymbol{y}$
-1	$-2(-1) + y = 3$	1
0	$-2(0) + y = 3$	3
1	$-2(1) + y = 3$	5

Temos para a equação I os pares ordenados: $(-1, 1)$, $(0, 3)$ e $(1, 5)$.

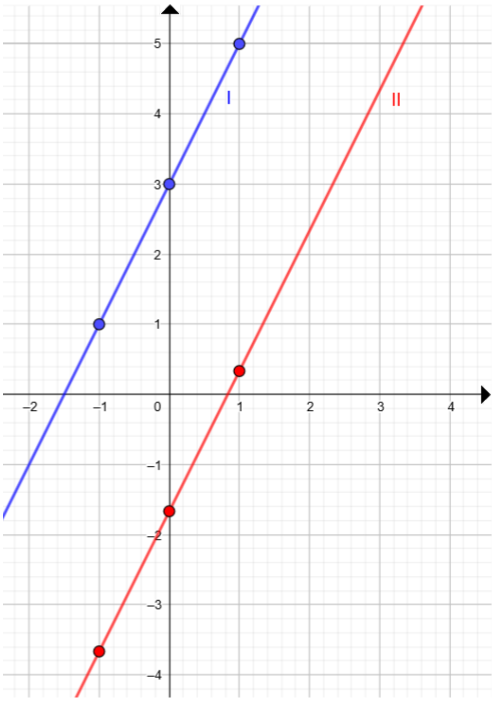
$\boldsymbol{x}$	**II)** $6x - 3y = 5$	$\boldsymbol{y}$
-1	$6(-1) - 3y = 5$	$-\frac{11}{3} \cong -3{,}7$
0	$6(0) - 3y = 5$	$-\frac{5}{3} \cong -1{,}7$
1	$6(1) - 3y = 5$	$\frac{1}{3} \cong 0{,}3$

E para a equação II os pares ordenados: $\left(-1, -\frac{11}{3}\right)$, $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ e $\left(1, \frac{1}{3}\right)$.

Representando as duas retas no mesmo plano coordenado:

INÍCIO

continuação da questão 3.



As duas retas não se interceptam, são paralelas distintas.
Logo, não existem pontos em comum, ou seja, não existem valores de x e de y que satisfaçam as duas equações simultaneamente.

Comentário: esse sistema linear é classificado como Sistema Impossível, pois não possui solução.

Resolução algébrica do sistema linear:

Um método de resolver o sistema linear dado é multiplicando uma das equações por um número diferente de zero, de modo que, ao somar as duas equações uma das variáveis seja cancelada.
Multiplicando a primeira equação por 3 e depois somando com a segunda equação cancelamos a variável x (e também a y)

$$\begin{cases} -2x + y = 3 \;\; (*\,3) \\ 6x - 3y = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 3y = 9 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x + 3y = 9 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases} \;(+)$$

$$\overline{\qquad 0 = 14 \;\; \Longrightarrow \;\; \boldsymbol{FALSO}}$$

Não existem valores de x e de y que satisfaçam as duas equações simultaneamente

Solução { } (conjunto vazio).

INÍCIO

continuação da questão 3.

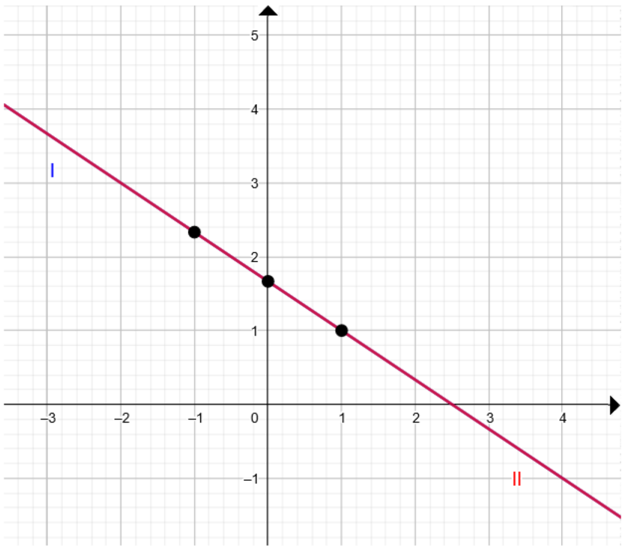
c) Escolhendo os valores -1, 0 e 1 para a variável x obtemos os valores de y para as duas equações:

x	I) $2x + 3y = 5$	y
-1	$2(-1) + 3y = 5$	$\frac{7}{3} \cong 2{,}3$
0	$2(0) + 3y = 5$	$\frac{5}{3} \cong 1{,}7$
1	$2(1) + 3y = 5$	1

Temos para a equação I os pares ordenados: $\left(-1, \frac{7}{3}\right)$, $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ e $(1, 1)$.

x	II) $-4x - 6y = -10$	y
-1	$-4(-1) - 6y = -10$	$\frac{14}{6} \cong 2{,}3$
0	$-4(0) - 6y = -10$	$\frac{10}{6} \cong 1{,}7$
1	$-4(1) - 6y = -10$	1

E para a equação II os pares ordenados: $\left(-1, \frac{7}{3}\right)$, $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ e $(1, 1)$.
Representando as duas retas no mesmo plano coordenado:



As duas retas são iguais, ou seja, são paralelas distintas.
Logo, existem infinitos pontos em comum, ou seja, infinitos valores de x e de y que satisfazem as duas equações simultaneamente.

Comentário: esse sistema linear é classificado como Sistema Possível Indeterminado, pois não é possível determinar uma única solução.

INÍCIO

continuação da questão 3.

Resolução algébrica do sistema linear:

Multiplicando a primeira equação por 2 e depois somando com a segunda equação cancelamos a variável x (e também a y)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \quad (*\,2) \\ -4x - 6y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases} \ (+)$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$0 = 0 \implies \boldsymbol{VERDADEIRO}$$

A igualdade obtida significa que, quaisquer que sejam os valores de x e de y, o par (x, y) sempre irá satisfazer as duas equações do sistema linear, ou seja, existem infinitos valores de x e de y que satisfazem as duas equações simultaneamente.
Para obter o conjunto solução basta escrevermos uma variável em função da outra, assim, isolando x na primeira equação

$$2x + 3y = 5$$
$$2x = 5 - 3y$$
$$x = \frac{5 - 3y}{2}$$

Solução $\left\{x \in R \,|\, x = \frac{5-3y}{2}\right\}$.

Comentário: Note que as duas equações são iguais, ou seja, representam a mesma reta, logo, todos os pontos são comuns às duas equações.

INÍCIO

CAMINHOS DE APRENDIZAGEM

Explorando Equações e Sistemas Lineares

Michelle Andrade Klaiber

Essa tarefa foi aplicada no ano de 2017, em uma em uma turma de 1º período do curso de Licenciatura em Química da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, e teve a duração de 150 minutos (três horas aula).

Inicialmente, solicitei aos estudantes que se organizassem em duplas e entreguei a cada um uma cópia da tarefa e uma folha milimetrada para a construção dos gráficos. Apesar de os estudantes se mostrarem familiarizados com a dinâmica da aula, enfatizei que a aula iniciaria com as duplas resolvendo as questões da tarefa, e que nesse momento eu acompanharia a atividade das duplas sem corrigir resoluções ou fornecer informações que diminuíssem o desafio da questão, para essa etapa foram disponibilizados 80 minutos. Na sequência, expliquei que seriam apresentadas e discutidas algumas resoluções para que ao final da aula fossem formalizados os conteúdos explorados na tarefa.

Observando as resoluções das duplas para a primeira questão, percebi que alguns estudantes acreditavam que a reta precisaria passar pela origem, ou seja, eles entendiam que o gráfico seria de uma reta, mas unindo os pontos encontrados com a origem do plano cartesiano não obtinham uma reta. Nesse momento, orientei que esses estudantes verificassem se os valores de x e y para a origem eram válidos na equação, e me afastei das duplas para que eles refletissem sobre os resultados.

Observei, também, que uma dupla não conseguia encontrar valores de x e y que satisfizessem a equação, e quando o fizeram se confundiram com a multiplicação de números reais negativos, obtendo pontos incorretos e não conseguindo construir o gráfico da reta. Essa dupla apresentou muita dificuldade em algumas operações e conceitos mais básicos da matemática, como as operações entre frações. Então, dei uma orientação adicional a essa dupla, explicando tais conceitos.

Ainda com relação à primeira questão, no item *d* os estudantes eram instruídos a multiplicar a equação por três, alguns se mostraram em dúvida, sem saber se a multiplicação deveria ocorrer apenas em parte da equação (lado esquerdo ou direito) ou nela inteira. Nesse momento, observei em uma das duplas uma discussão na qual um dos estudantes argumentava que se a equação era uma igualdade, então tinha que multiplicar ambos os membros da igualdade pelo mesmo termo. Em outras duplas a dúvida permaneceu, e em alguns casos a questão foi resolvida inadequadamente. Esse tipo de resolução foi selecionado para a discussão coletiva, por permitir que os estudantes argumentassem sobre o que é uma equação linear.

O segundo exercício explorava duas equações lineares ao mesmo tempo, levando-os a comparar os gráficos e buscar pontos comuns entre as retas (conceitos prévios para Sistemas Lineares), alguns estudantes apresentaram dúvidas devido ao aparecimento de frações nos cálculos, então precisei interferir, explicando a eles como operar com frações. Outros estudantes não conseguiram obter algebricamente a interseção das duas retas, apenas estimaram pelo gráfico. No geral não houve maiores dificuldades, com exceção da dupla mencionada na questão anterior, que apresentou dificuldades com conceitos mais básicos de Matemática.

INÍCIO

O terceiro exercício foi resolvido por cerca de metade da turma, pois como demoraram muito na construção dos gráficos das primeiras questões, o tempo estimado para as resoluções acabou. Então, solicitei aos estudantes que finalizassem suas resoluções para podermos fazer a discussão e a formalização do conteúdo.

Para a discussão, foram apresentados os casos problemáticos (dificuldades), selecionados enquanto os estudantes resolviam a tarefa. Na resolução da Questão 1, o estudante havia anotado a origem como ponto pertencente à representação gráfica da equação dada, nesse momento, surgiram discussões a respeito da equação ser satisfeita ou não com os valores x=0 e y=0. Um estudante comentou:

“a equação não passa pela origem, pois a equação fica errada com esses valores, por isso a origem não pertence ao gráfico”.

Então, outro estudante disse:

“o gráfico tem que ser uma reta, pelo tipo da equação, por isso a origem não pertence ao gráfico, pois não seria uma reta”.

Então acrescentei:

“podemos concluir que a representação gráfica de uma equação linear sempre será uma reta, mas nem sempre essa reta passará pela origem. Em qual caso ela passaria pela origem?”

O primeiro estudante respondeu:

“quando o resultado for zero”.

“Que resultado?” perguntei, e o estudante indicou o lado direito da equação.

A resolução apresentada para a Questão 2 foi a de um estudante que estimou o ponto de interseção das retas por meio do gráfico, sem indicar o valor exato de x e y que satisfazia as duas equações, simultaneamente. Após exibir tal resolução no quadro, perguntei à turma:

“esses valores encontrados para x e y satisfazem as duas equações?”

Após fazer alguns cálculos no caderno, um estudante respondeu:

“não, não estão corretos.”

Então outros estudantes responderam:

“o ponto de interseção aparece no item *f* da questão, é o (-2, 3), ele passa pelas duas retas”

e outro estudante acrescentou:

“é só resolver o sistema que encontra o ponto (-2, 3), essa é a resposta.”

Eu havia observado que alguns estudantes resolveram a questão apenas geometricamente, outros, recorreram também à forma algébrica para efetuarem os cálculos, então apresentei a resolução algébrica do sistema, efetuada por outro estudante e comentei:

“estão vendo como o cálculo algébrico é importante? Nem sempre é uma tarefa fácil encontrar valores exatos na representação gráfica, por outro lado, ela nos orienta na visualização e localização da interseção, caso ela exista”.

As discussões referentes à Questão 3 foram uma extensão da discussão da Questão 2, como nem todos os estudantes conseguiram terminar suas resoluções, apresentei no quadro as resoluções gráficas de três estudantes, todas construídas adequadamente, e questionei a turma:

“no que diferem as representações gráficas dos três sistemas lineares?”

INÍCIO

E um estudante respondeu:

“na disposição das retas.”

Então continuei:

“por que elas diferem?”

e outro estudante disse:

“porque os sistemas são diferentes, têm aqueles nomes SPD, SPI...”

Acrescentei:

“nos três casos, as duas retas possuem algum ponto em comum?”

e a turma respondeu em coro:

“não, no segundo as retas não se encontram”.

Então as discussões seguiram no sentido de compreender a classificação dos sistemas lineares de acordo com sua representação gráfica.

Ainda em relação à Questão 3, alguns estudantes utilizaram os métodos da adição e substituição para a resolução dos sistemas. Porém, no caso dos sistemas SI e SPI a maioria se atrapalhou nos cálculos, não chegando a nenhuma conclusão sobre a solução desses sistemas. Então, apresentei, abaixo de cada resolução gráfica, a resolução algébrica feita por alguns estudantes, e promovi discussões na direção de relacioná-las.

Por fim, expliquei os métodos da adição e da substituição para a resolução dos sistemas, pois foram os que surgiram nas resoluções, e formalizei as definições de Equação Linear, Sistemas de Equações Lineares e a classificação de Sistemas de Equações Lineares.

Como nos demais episódios, ao final da aula os estudantes ficaram com os enunciados das tarefas e foram encorajados a refazer os exercícios que tiveram maior dificuldade ou que não conseguiram resolver em sala. E também a estudar as apostilas com os conteúdos e definições vistos em sala de aula e resolver os exercícios propostos disponibilizados no ambiente virtual de aprendizagem. Lembrando que todas as resoluções foram devolvidas aos estudantes na aula seguinte para que pudessem rever suas resoluções.

INÍCIO

REFERÊNCIAS

BUSSMANN, C. J. C.; KLAIBER, M. A.; SILVA, D. P. Processos mentais de Dreyfus e o Ensino Exploratório: discussão e possível intervenção em sala de aula. In: *ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14*., 2017. Cascavel. *Anais...* Cascavel: Unioeste, 2017. p. 1-13.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Org.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

PONTE, J. P. Gestão Curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular.* Lisboa: APM, 2005. p.11-34.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. A. F. As discussões matemáticas na aula exploratória como vertente da prática profissional do professor. *Revista da Faculdade de Educação*. Mato Grosso, v. 23, n. 1, p. 131-150, 2015.

SOUZA, P. de A. *et al.* Transformações Geométricas: uma investigação matemática por meio do GeoGebra. In: *SIMPÓSIO NACIONAL DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA, 4*., 2014. Ponta Grossa. *Anais...* Ponta Grossa: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014. p. 1-10.

CONTATO

Esse material foi elaborado pela professora Michelle Andrade Klaiber.

A professora Michelle é doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL) e atua como docente nos cursos de Engenharia e Licenciatura na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Você pode usar, modificar, adequar e compartilhar este material!

Se você tiver dúvidas ou sugestões, escreva para o e-mail michelle@utfpr.edu.br .

INÍCIO