TAREFA 2

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO GEOGEBRA

OBJETIVO

Relacionar os conceitos de tipos de matrizes e operações com matrizes com transformações geométricas no plano.

Nesse sentido, o *software* GeoGebra foi utilizado como um instrumento para a visualização e a investigação de tais transformações, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e de habilidades como o reconhecimento de padrões nos estudantes, e no estudo das Transformações Lineares.

CONTEÚDO ABORDADO

Tipos de matrizes, operações com matrizes e transformações geométricas no plano.

NÍVEL ESCOLAR

1º período – Ensino Superior.

DURAÇÃO

300 minutos.

RECURSOS

Papel, lápis, borracha, xerocópias da tarefa, laboratório de informática e projetor multimídia.

TAREFA (clique aqui para baixar em arquivo editável)

PLANEJAMENTO

RESOLUÇÃO DO PROFESSOR

CAMINHOS DE APRENDIZAGEM

REFERÊNCIAS

CONTATO

TAREFA

1- REFLEXÃO: Utilizando a ferramenta polígono, construa um trapézio escaleno no primeiro quadrante.

a) Construa a matriz R que representa os vértices da figura.
b) Utilizando a ferramenta reflexão em relação a uma reta, faça a reflexão da figura em relação ao eixo x.
c) Construa a matriz X que representa os vértices da figura refletida.
d) Compare as matrizes R e X. Quais foram as mudanças nas coordenadas de cada vértice? Você encontrou algum padrão? Qual?
e) Refaça os itens b, c e d agora considerando o eixo y para a reflexão. Chame a matriz obtida de Y.
f) Agora faça a reflexão da figura em relação à origem.
g) Analisando os três casos responda: é possível construir uma operação entre matrizes que faça a reflexão em relação ao eixo x? E em relação ao eixo y? E em relação à origem? Explique direitinho!
h) Desafio: Faça a reflexão em relação às retas y = x e y = - x e comente os resultados.

2- TRANSLAÇÃO: Construa um novo polígono e utilizando a ferramenta vetor construa um vetor fora do polígono.

a) Construa a matriz P que representa os vértices do polígono.
b) Utilize a ferramenta translação por um vetor para transladar a figura e construa a matriz T, chamada matriz de translação, que representa os vértices da figura transladada.
c) Compare os elementos das matrizes P e T, você encontrou algum padrão? Qual?
d) Construa uma operação entre matrizes que represente a translação feita.
e) Obtenha a matriz de translação obtida ao transladar a figura na direção do vetor com ponto inicial em (3,1) e ponto final em (5,-3).

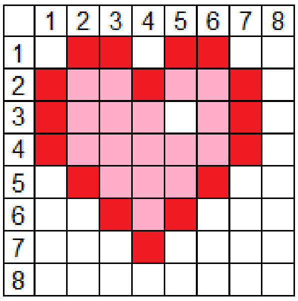
3- HOMOTETIA: Construa um triangulo com um dos vértices na origem do sistema cartesiano.

a) Obtenha a matriz V com seus vértices.
b) Crie um controle deslizante e utilize a ferramenta homotetia usando como centro a origem.
c) Mova o controle deslizante e observe o que acontece. Pare o controle deslizante no número 3 e obtenha a matriz H com os vértices do novo triângulo.
d) Qual a relação entre os elementos das matrizes V e H?
e) Construa uma operação entre matrizes que represente a dilatação feita no triângulo.
f) E se o controle deslizante fosse parado no número 1, o que aconteceria com a figura? E como ficaria a operação construída no item anterior?

INÍCIO

4- COMPUTAÇÃO GRÁFICA:

a) Na imagem abaixo, trocando os elementos da posição a_{ij} com os da posição a_{ji} (onde i e j são números que variam de 1 a 16) qual a transformação ocorrida? (represente no quadro ao lado)



	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

b) Se o desenho na imagem fosse de um quadrado ao invés de um coração, qual seria a transformação ocorrida ao aplicarmos a mesma troca do item anterior? A imagem foi modificada?

INÍCIO

PLANEJAMENTO

1º momento: Reserva do laboratório de informática e introdução ao GeoGebra.

Previamente o professor deve realizar a reserva do laboratório de informática e comunicar a turma o dia e horário da aula no laboratório. Para a organização da turma, os estudantes podem sentar-se individualmente ou em duplas por computador, no entanto, é importante que tenham liberdade para conversar e discutir ideias com os colegas.

Na aula, o professor deve explicar aos estudantes algumas noções sobre o *software* GeoGebra (tempo sugerido: 30 minutos), e disponibilizar-se a sanar dúvidas sobre como utilizá-lo durante a resolução das tarefas.

2º momento: Entrega da tarefa, explicação sobre a dinâmica da aula e resolução das questões pelos estudantes.

Nesse momento, o professor entrega a cada estudante as questões impressas, e explica que será disponibilizado um tempo (sugestão: 120 minutos, deixando o desafio do item h da Questão 1 para o final da aula, caso sobre tempo) para que discutam e resolvam as questões da tarefa, anotando todos os passos e estratégias utilizados em sua resolução.

Durante as resoluções o professor acompanhará o andamento das atividades e selecionará algumas resoluções para serem apresentadas e discutidas com a turma toda no 3º momento. Porém, o professor não deve fazer correções, fornecer respostas, ou contribuições que diminuam o desafio cognitivo da tarefa, deve apenas auxiliar os estudantes no uso do *software,* caso necessário.

Finalizado esse momento, o professor exibirá no projetor as resoluções selecionadas, serão realizadas algumas discussões e sistematizações, e, caso o professor julgue necessário, os estudantes entregarão suas anotações.

Lembrando que para seleção das resoluções o professor deve priorizar resoluções que apresentem diferentes procedimentos ou até mesmo resolução incorretas para uma mesma questão, de forma a possibilitar e incentivar a reflexão e a justificação de diferentes conceitos e procedimentos matemáticos.

3º momento: Discussão coletiva e Sistematização do conteúdo

Ao término do tempo destinado às resoluções, ocorrerá a socialização das possíveis resoluções dos estudantes, selecionadas previamente pelo professor e a sistematização dos conteúdos abordados (tempo sugerido: 60 minutos).

Nesse momento, o professor pode projetar as resoluções selecionadas previamente e então propor à turma que discutam sobre cada resolução (Sugestões de questionamentos: os procedimentos utilizados são válidos? A resposta final está coerente com a questão? Qual resolução é mais objetiva, demanda menos cálculos? Existem diferentes modos de resolver a questão? Existem conceitos ou definições já estudados que podem ser relacionados com a tarefa?).

INÍCIO

É importante que o professor esclareça conceitos e procedimentos utilizados, avaliando os argumentos apresentados pelos estudantes e aproveitando para estabelecer conexões com outros conceitos e procedimentos matemáticos. Sugerimos que o professor apresente definições e tipos de matrizes, podendo utilizar *slides*, por exemplo, e disponibilize esse material para que os estudantes possam, após a aula, rever e repensar a relação de tais conteúdos com as explorações realizadas no GeoGebra.

Nos minutos restantes de aula o professor pode solicitar aos estudantes que resolvam o desafio proposto no item *h* da Questão 1, e sanar algumas dúvidas a respeito do mesmo.

INÍCIO

RESOLUÇÃO DO PROFESSOR

A primeira questão da tarefa explora a reflexão de um polígono em relação aos eixos x e y, e em relação à origem.

Trabalhando com a matriz dos vértices do polígono e observando as modificações ocorridas nessa matriz a cada reflexão, a questão propõe ao estudante investigar uma operação entre matrizes que efetue a transformação reflexão (no caso, a multiplicação), e qual a matriz que representa essa transformação.

Ainda, como desafio para o final da aula, o item *h* dessa questão propõe que os estudantes realizem e reflitam sobre a reflexão em relação às retas $y = x$ e $y = -x$.

1- REFLEXÃO: Utilizando a ferramenta polígono, construa um trapézio escaleno no primeiro quadrante.

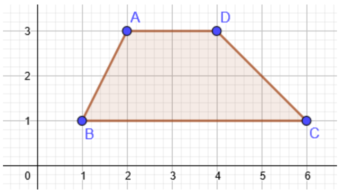
a) Construa a matriz R que representa os vértices da figura.

Como cada aluno pode construir um polígono diferente, será obtida uma matriz do tipo

$$R = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} \text{ ou } R = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}$$

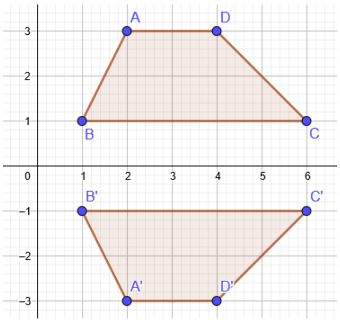
na qual os elementos x_i e y_i, vértices do trapézio, vão variar para cada aluno.

Resolução no GeoGebra, exemplo de resposta: $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$



b) Utilizando a ferramenta reflexão em relação a uma reta, faça a reflexão da figura em relação ao eixo x.

Resolução no GeoGebra, exemplo de resposta:



c) Construa a matriz X que representa os vértices da figura refletida.

De acordo com os elementos obtidos no item a, será obtida uma matriz do tipo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 \end{pmatrix} \text{ ou } X = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ x_2 & -y_2 \\ x_3 & -y_3 \\ x_4 & -y_4 \end{pmatrix}$$

na qual os elementos x_i e y_i, vértices do trapézio, vão variar para cada aluno.

INÍCIO

continuação da questão 1.

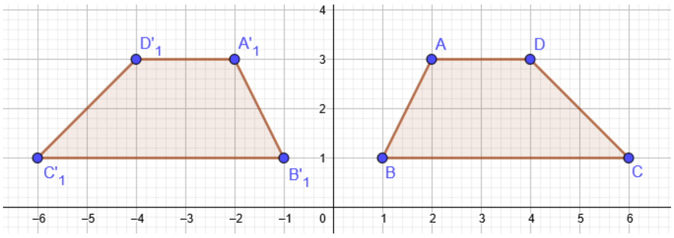
d) Compare as matrizes R e X. Quais foram as mudanças nas coordenadas de cada vértice? Você encontrou algum padrão? Qual?

A segunda coordenada de cada vértice teve o sinal alterado.

Sim, as coordenadas y_i, após a reflexão, ficaram com o sinal trocado (oposto).

e) Refaça os itens b, c e d agora considerando o eixo y para a reflexão. Chame a matriz obtida de Y.

- Resolução no GeoGebra, exemplo de resposta:



- De acordo com os elementos obtidos no item a, será obtida uma matriz do tipo

$$Y = \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} \text{ ou } Y = \begin{pmatrix} -x_1 & y_1 \\ -x_2 & y_2 \\ -x_3 & y_3 \\ -x_4 & y_4 \end{pmatrix}$$

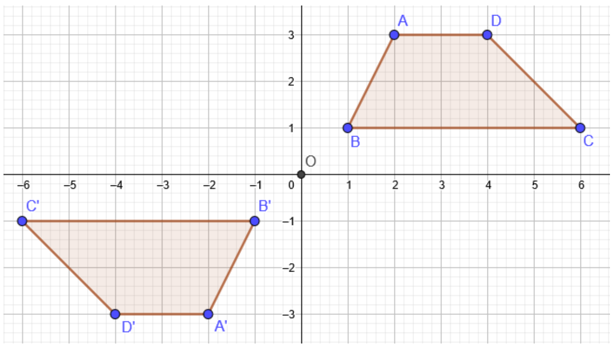
na qual os elementos x_i e y_i, vértices do trapézio, vão variar para cada aluno.

- A primeira coordenada de cada vértice teve o sinal alterado.

Sim, as coordenadas x_i, após a reflexão, ficaram com o sinal trocado (oposto).

f) Agora faça a reflexão da figura em relação à origem.

Resolução no GeoGebra, exemplo de resposta:



g) Analisando os três casos responda: é possível construir uma operação entre matrizes que faça a reflexão em relação ao eixo x? E em relação ao eixo y? E em relação à origem? Explique direitinho!

Em relação ao eixo x, a operação seria:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 \end{pmatrix}.$$

Em relação ao eixo y, a operação seria:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Em relação a origem, a operação seria:

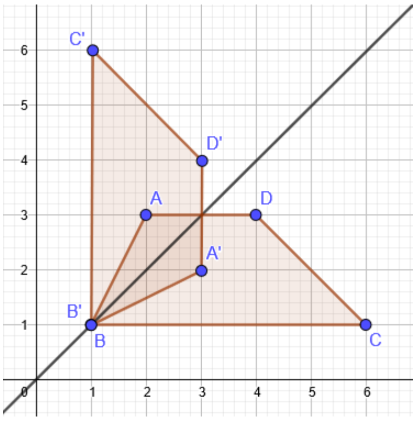
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 \end{pmatrix}.$$

INÍCIO

continuação da questão 1.

h) Desafio: Faça a reflexão em relação às retas y = x e y = - x e comente os resultados.

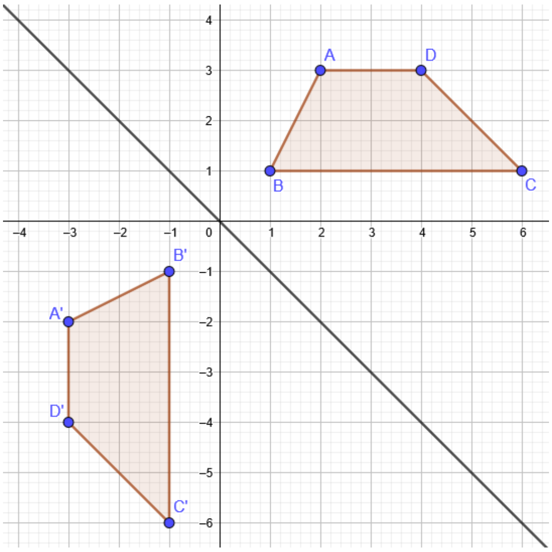
Resolução no GeoGebra, exemplo de resposta para a reflexão de R em relação a reta y = x:



Nesse caso, as coordenadas x e y dos vértices ficariam trocadas, e a operação seria:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Resolução no GeoGebra, exemplo de resposta para a reflexão em relação a reta y = - x



Nesse caso, as coordenadas x e y dos vértices ficariam trocadas e teriam sinais opostos, e a operação seria:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \end{pmatrix}.$$

A segunda questão aborda a transformação translação. Seguindo uma sequência de passos, o estudante deve construir um polígono e um vetor que forneça a direção da translação desse polígono.

Após explorar essa transformação no GeoGebra, é proposto ao estudante que investigue e construa a operação entre matrizes (no caso, adição ou subtração) que realiza a translação do referido polígono na direção de um vetor dado.

INÍCIO

2- TRANSLAÇÃO: Construa um novo polígono e utilizando a ferramenta vetor construa um vetor fora do polígono.

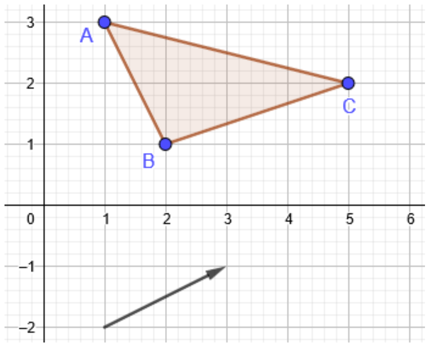
a) Construa a matriz P que representa os vértices do polígono.

Como cada aluno pode construir um polígono diferente, será obtida uma matriz do tipo

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} \text{ ou } P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}$$

na qual o número de vértices do polígono e os elementos x_i e y_i vão variar para cada aluno.

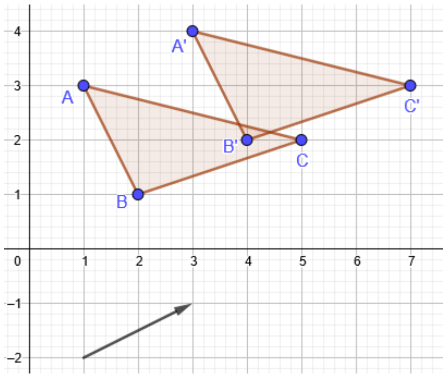
Resolução no GeoGebra, exemplo de resposta: $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$



b) Utilize a ferramenta translação por um vetor para transladar a figura e construa a matriz T, chamada matriz de translação, que representa os vértices da figura transladada.

Resolução no GeoGebra, exemplo de resposta para a translação pelo vetor $\vec{v} = (2,1)$:

$T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$



c) Compare os elementos das matrizes P e T, você encontrou algum padrão? Qual?

Sim, a primeira coordenada de cada vértice da matriz T é igual a primeira coordenada da matriz P acrescida de duas unidades, e a segunda coordenada de cada vértice da matriz T é igual a primeira coordenada da matriz P acrescida de uma unidade.

d) Construa uma operação entre matrizes que represente a translação feita.

Considerando a matriz $T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e o vetor $\vec{v} = (2,1)$ utilizados com exemplo, temos $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, ou seja:

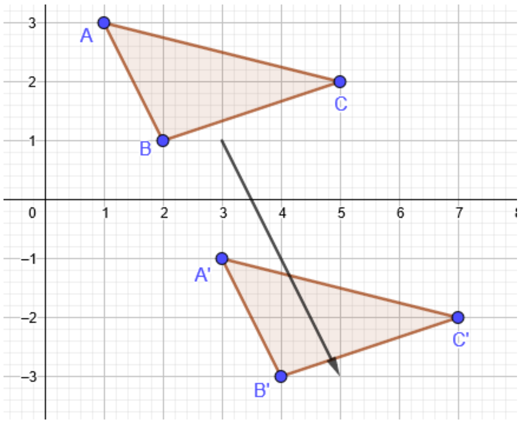
$$P + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T.$$

INÍCIO

continuação da questão 2.

e) Obtenha a matriz de translação obtida ao transladar a figura na direção do vetor com ponto inicial em (3,1) e ponto final em (5,-3).

Resolução no GeoGebra, exemplo de resposta considerando $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$



Note que o vetor de translação terá coordenadas $\vec{u} = (5,-3) - (3,1) = (2.-4)$, logo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz que representa o polígono transladado pelo vetor $\vec{u} = (2.-4)$ é

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

A terceira questão aborda a transformação homotetia de centro na origem, que é explorada por meio de uma sequência de passos e reflexões sobre os resultados obtidos para que, em seguida, o estudante construa uma operação entre matrizes (como, por exemplo, a multiplicação por um escalar) que represente a transformação geométrica realizada.

3- HOMOTETIA: Construa um triangulo com um dos vértices na origem do sistema cartesiano.

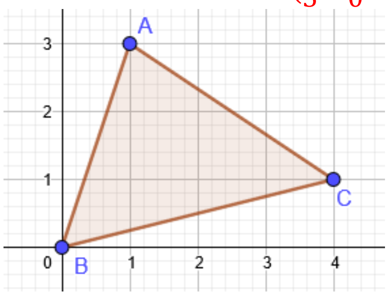
a) Obtenha a matriz V com seus vértices.

Como cada aluno pode construir um polígono diferente, será obtida uma matriz do tipo

$$V = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \text{ ou } V = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

na qual os elementos x_i e y_i vão variar para cada aluno.

Resolução no GeoGebra, exemplo de resposta: $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

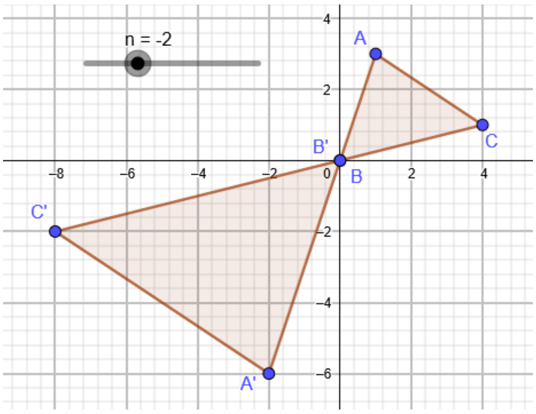


INÍCIO

continuação da questão 3.

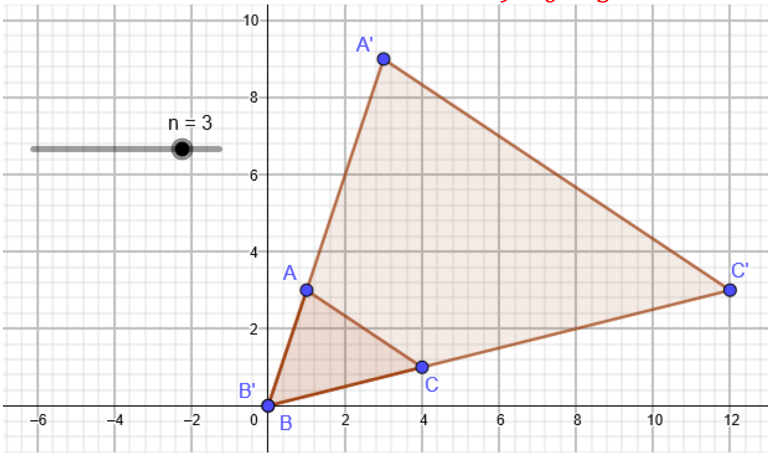
b) Crie um controle deslizante e utilize a ferramenta homotetia usando como centro a origem.

Resolução no GeoGebra, exemplo de resposta:



c) Mova o controle deslizante e observe o que acontece. Pare o controle deslizante no número 3 e obtenha a matriz H com os vértices do novo triângulo.

Resolução no GeoGebra, exemplo de resposta: $H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$



d) Qual a relação entre os elementos das matrizes V e H?

Cada elemento da matriz H é igual ao triplo do respectivo elemento da matriz V (as coordenadas dos vértices do triângulo são multiplicadas por 3).

e) Construa uma operação entre matrizes que represente a dilatação feita no triângulo.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou seja} \quad H = 3 \cdot V$$

f) E se o controle deslizante fosse parado no número 1, o que aconteceria com a figura? E como ficaria a operação construída no item anterior?

Se o controle deslizante for parado no 1 o triângulo obtido será igual ao triângulo original, ou seja, a figura não sofreria modificações. Obteríamos a operação

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

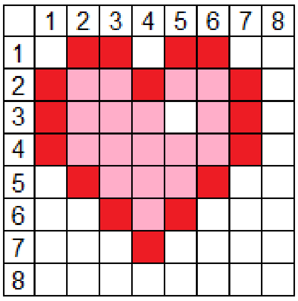
INÍCIO

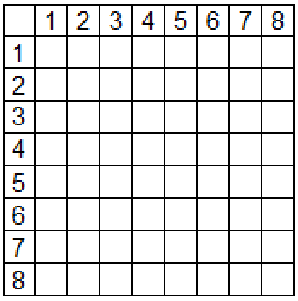
Por fim, a quarta questão traz uma aplicação da relação entre as matrizes e as transformações geométricas, na área da computação gráfica.

Por meio de uma imagem dada, na qual os *pixels* poderiam ser identificados e relacionados aos elementos de uma matriz, os estudantes são instruídos a refletir sobre o efeito da matriz transposta na referida imagem e sobre o conceito de simetria, que remete às matrizes simétricas.

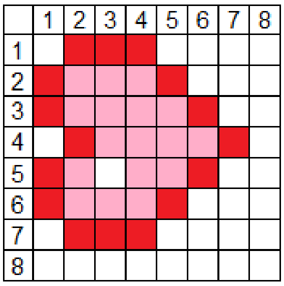
4- COMPUTAÇÃO GRÁFICA:

a) Na imagem abaixo, trocando os elementos da posição a_{ij} com os da posição a_{ji} (onde i e j são números que variam de 1 a 8) qual a transformação ocorrida? (represente no quadro ao lado)





Trocando os quadradinhos da posição ij com os da posição ji obtemos a figura:



ou seja, é realizada a transposição da matriz original (note que os elementos da diagonal principal permanecem iguais, note também que a transformação realizada <u>não</u> é equivalente à rotação da imagem original 90° para a esquerda).

b) Se o desenho na imagem fosse de um quadrado ao invés de um coração, qual seria a transformação ocorrida ao aplicarmos a mesma troca do item anterior? A imagem foi modificada?

No caso de um quadrado, após a transformação a figura permaneceria igual, pois a matriz seria simétrica, ou seja, os elementos a_{ij} serão iguais aos elementos a_{ji} .

Tais questões constituem investigações, ou seja, são questões abertas que possuem um nível elevado de desafio, e como tais, estimulam a formulação de questões, e exigem um maior esforço cognitivo para que partes do conhecimento sejam combinadas formando o conceito como um todo. Além disso, propiciam o desenvolvimento de processos mentais como a representação simbólica e a mudança entre representações e instigam o estudante a realizar processos mais avançados como a generalização (ao deduzir um método para efetuar a reflexão de um polígono qualquer, por exemplo), e a síntese (ao reconhecer, a partir de um método algébrico para se obter as matrizes das reflexões, as matrizes de transformação para cada um dos tipos de reflexão estudados, por exemplo).

INÍCIO

CAMINHOS DE APRENDIZAGEM

Transformações Geométricas no GeoGebra

Michelle Andrade Klaiber

O desenvolvimento dessa tarefa ocorreu no ano de 2017, em uma turma de 1º período do curso de Licenciatura em Química da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, e teve a duração de 300 minutos (seis horas aula) que ocorreram em dois encontros de 150 minutos.

Inicialmente, reservei o laboratório de informática da universidade e agendei com os alunos o dia e horário da aula. No dia da aula fomos para o laboratório e como havia um computador por estudante todos trabalharam individualmente. No entanto, deixei claro para todos que eles poderiam conversar e trocar ideias quando quisessem.

Após todos ligarem os computadores, abri o GeoGebra em meu computador e, projetando a minha tela, fiz uma breve introdução ao *software*, explicando suas principais ferramentas e funcionalidades, o que durou aproximadamente 30 minutos.

Na sequência, entreguei para cada estudante uma cópia da tarefa e expliquei que eles teriam disponíveis 80 minutos para a resolução das questões, os instruí para que a anotassem todos os passos e estratégias utilizados nas resoluções.

Logo de início, ao lerem a primeira questão, alguns estudantes me questionaram sobre qual seria a forma de um trapézio escaleno, então fiz a pergunta para a turma, buscando alguém que soubesse a resposta. Alguns estudantes responderam desenhando no ar um trapézio qualquer, mas não sabiam dizer se era escaleno ou não, então expliquei que um trapézio escaleno era aquele em que os lados não paralelos apresentavam medidas diferentes e, na sequência, perguntei se ainda havia dúvidas sobre o polígono. Diante da negativa dos estudantes, prosseguiram as resoluções.

Já no item *b* da mesma questão, alguns estudantes apresentaram dificuldade na utilização, do *software,* da ferramenta “reflexão em relação a uma reta”, então caminhei pelo laboratório e fui auxiliando-os individualmente, conforme a necessidade.

A resolução dos demais itens da tarefa seguiu sem muitos questionamentos, fui auxiliando-os no uso do GeoGebra quando solicitavam, até chegarem ao item *g*, no qual foi preciso descobrir as matrizes de reflexão e multiplicar pela matriz dos vértices do polígono. Nesse momento, a maioria dos estudantes apresentou dificuldades, alguns tentavam encontrar uma matriz que somada a matriz dos vértices resultasse na matriz dos vértices da reflexão, então fiz perguntas do tipo:

“essa matriz vai servir para a reflexão de qualquer outro trapézio como, por exemplo, o do seu colega?”

Minha intenção nesse momento era fazer com que os estudantes refletissem sobre a possibilidade de generalização do método utilizado, para que então tentassem um método diferente. Outros estudantes confundiram a ordem das matrizes para que o produto pudesse ser realizado ou não se recordavam do algoritmo de multiplicação de matrizes, então utilizaram procedimentos e estratégias incorretos para chegar ao resultado que queriam.

INÍCIO

Quanto aos estudantes que se lembraram do algoritmo da multiplicação de matrizes, foram observadas algumas estratégias, como a utilização de matrizes diagonais para serem multiplicadas pelas matrizes dos vértices. Outra estratégia incomum foi a de um estudante que tentou multiplicar a matriz dos vértices, que era de ordem 2x4 por uma matriz 4x4 para realizar a reflexão, nesse caso, ele avaliou a dimensão das matrizes, mas estranhou a quantidade de cálculos necessários para verificar se a matriz escolhida estava correta. Após algumas tentativas, percebeu que poderia realizar a multiplicação de uma matriz 2x2, facilitando os cálculos. Houve ainda, um estudante que encontrou uma matriz específica que forneceu o resultado desejado para a multiplicação, mas que não serviria para realizar a reflexão em uma matriz que representasse um polígono qualquer.

Observei que muitos estudantes não dominavam nem compreendiam o algoritmo da multiplicação. Em momentos anteriores, durante outras aulas, tive a falsa ideia de compreensão do método quando os estudantes multiplicaram corretamente matrizes que representavam um contexto, e esse contexto contribuiu para que as multiplicações fossem realizadas.

A Questão 2 da tarefa foi resolvida pelos estudantes sem maiores dificuldades com relação ao cálculo matricial, já que envolvia a adição ou subtração de matrizes e os estudantes compreendiam essas operações. Com relação ao GeoGebra, precisei auxiliar os estudantes no uso da ferramenta “vetor”.

Apesar de o tempo estipulado para a resolução da tarefa ter sido de 80 minutos, devido às dificuldades apresentadas na resolução da Questão 1 e na utilização do *software* GeoGebra, esse tempo precisou ser estendido, pois havia se passado 100 minutos e os estudantes ainda estavam finalizando a Questão 2.

Diante da preocupação dos estudantes com o término da aula, por terem resolvido apenas metade das questões propostas, comuniquei à turma que eles poderiam continuar com as resoluções e que, ao término da aula, deveriam entregar suas anotações pois, na aula seguinte, eles retornariam ao laboratório de informática e teriam suas anotações devolvidas para a conclusão das resoluções.

Sendo assim, a continuação da resolução da tarefa 2, bem como as discussões a respeito da mesma e a sistematização das aprendizagens ficaram para a próxima aula.

No início da aula seguinte devolvi as anotações dos estudantes, recolhidas na aula anterior, para que esses pudessem anotar as demais resoluções. E informei que, para a finalização da tarefa, seria disponibilizado o tempo de 60 minutos, para que, em seguida, iniciassem as discussões com a sala toda.

Após os estudantes lerem o enunciado da questão 3, fui ao quadro explicar o uso das ferramentas “controle deslizante” e “homotetia” para que os estudantes dessem continuidade às explorações.

Nos itens seguintes da questão, os estudantes não apresentaram dúvidas quanto à operação utilizada para se obter a referida transformação, que poderia ser a multiplicação por um escalar, por exemplo, e relacionar essa operação com a transformação homotetia de centro na origem.

INÍCIO

Para a resolução da questão 4, os estudantes não precisaram utilizar o GeoGebra, apenas elaboraram conjecturas e esboços sobre a imagem dada para responder ao item *a* da questão. Enquanto eu caminhava pela sala, notei que alguns estudantes identificaram a matriz transposta, utilizada no item *a*, porém, não relacionaram a ação dessa sobre a imagem com a transformação reflexão.

No item *b* a maioria dos estudantes não recordou o conceito de matriz simétrica, envolvido na modificação da imagem, apenas notou que essa não sofreria alterações devido à sua simetria. Então, anotei essas observações e selecionei algumas resoluções para serem discutidas, com o restante da turma.

Para a discussão coletiva e para a sistematização das aprendizagens foram reservados 60 minutos, 30 minutos para cada etapa.

Durante as discussões foram apresentadas as resoluções que selecionei durante a aula. Para a primeira questão, havia duas resoluções diferentes para o item *g*. Na primeira, o estudante multiplicou pela matriz dos vértices uma matriz específica, diferente da matriz da transformação reflexão para o eixo x, obtendo o resultado desejado. Nesse caso, um estudante interveio ao ver a resolução:

“mas essa matriz ficou diferente da minha, pode acontecer isso?”

Respondi com outra pergunta:

“é possível que uma única matriz resulte na reflexão, em relação ao eixo x, de um polígono qualquer?”

Nesse instante, outro estudante apontou para a segunda resolução apresentada, na qual foi utilizada a matriz da reflexão para o eixo x, e disse:

“minha matriz ficou igual à da segunda resolução, e deu certo também, mesmo com a minha matriz dos vértices sendo diferente”.

Então concluí:

“então, se fôssemos utilizar uma matriz para representar a reflexão em relação ao eixo x, para um polígono qualquer, essa matriz seria $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Está correto?”

E os estudantes concordaram com a afirmação.

Na sequência, pedi para a turma que concluísse quais seriam as matrizes para as demais reflexões da questão (em relação ao eixo y, e à origem).

Durante a sistematização das aprendizagens, retomei as operações entre matrizes, relacionando-as com cada uma das transformações geométricas estudadas e com as respectivas matrizes de cada transformação. Nesse momento, apresentei novamente o algoritmo da multiplicação de matrizes, chamando a atenção para o fato da propriedade comutativa não ser satisfeita e para a condição de multiplicação entre duas matrizes. E perguntei:

“se utilizássemos a matriz identidade na multiplicação, o que aconteceria com os vértices da figura?”

Alguns estudantes responderam:

“não mudariam”, “ficariam iguais”

e complementei:

“vocês percebem que a matriz identidade é o elemento neutro na multiplicação de matrizes? Ou seja, qualquer matriz multiplicada por ela permanece igual.”

INÍCIO

Em seguida, apresentei alguns *slides* com as definições e exemplos dos tipos de matrizes, e informei a todos que esse material, assim como os enunciados da tarefa e alguns exercícios, estaria disponível no ambiente virtual de aprendizagem para que, após a aula, os estudantes pudessem rever e repensar a relação de tais conteúdos com as explorações realizadas no GeoGebra.

No tempo restante da aula solicitei aos estudantes que resolvessem o desafio proposto no item *h* da Questão 1, e sanei algumas dúvidas, individualmente.

Observei que os estudantes, durante a resolução dessa tarefa, mostraram-se mais familiarizados com a dinâmica de sala de aula, na qual eu apenas orientei as aprendizagens, sem fornecer respostas ou diminuir o desafio da tarefa, e os estudantes configuram-se protagonistas na construção do conhecimento, explorando, refletindo e conjecturando.

INÍCIO

REFERÊNCIAS

BUSSMANN, C. J. C.; KLAIBER, M. A.; SILVA, D. P. Processos mentais de Dreyfus e o Ensino Exploratório: discussão e possível intervenção em sala de aula. In: *ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14*., 2017. Cascavel. *Anais...* Cascavel: Unioeste, 2017. p. 1-13.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Org.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

PONTE, J. P. Gestão Curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular.* Lisboa: APM, 2005. p.11-34.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. A. F. As discussões matemáticas na aula exploratória como vertente da prática profissional do professor. *Revista da Faculdade de Educação*. Mato Grosso, v. 23, n. 1, p. 131-150, 2015.

SOUZA, P. de A. *et al.* Transformações Geométricas: uma investigação matemática por meio do GeoGebra. In: *SIMPÓSIO NACIONAL DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA, 4*., 2014. Ponta Grossa. *Anais...* Ponta Grossa: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014. p. 1-10.

CONTATO

Esse material foi elaborado pela professora Michelle Andrade Klaiber.

A professora Michelle é doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL) e atua como docente nos cursos de Engenharia e Licenciatura na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Você pode usar, modificar, adequar e compartilhar este material!

Se você tiver dúvidas ou sugestões, escreva para o e-mail michelle@utfpr.edu.br .

INÍCIO