TAREFA 1

GERENCIANDO OS INSUMOS DE UMA REDE LABORATORIAL

OBJETIVO

Resgatar conceitos e noções relacionados às matrizes, suas representações e operações.

CONTEÚDO ABORDADO

Matrizes: definição, representação, notações e operações (adição, subtração, multiplicação e multiplicação por escalar).

NÍVEL ESCOLAR

1º período – Ensino Superior.

DURAÇÃO

150 minutos.

RECURSOS

Papel, lápis, borracha e xerocópias da tarefa.

TAREFA

Uma rede laboratorial possui quatro filiais LA, LB, LC e LD, nas quais a quantidade dos insumos I, II e III é a seguinte:

Filial \ Insumo	I	II	III
LA	12	35	45
LB	10	100	20
LC	36	56	60
LD	20	30	95

a) Escreva a matriz Q que representa a quantidade dos insumos dessa rede laboratorial.
b) Quantas linhas essa matriz possui? O que cada linha representa?
c) Quantas colunas essa matriz possui? O que cada coluna representa?
d) Qual é a quantidade de insumos do tipo II que o laboratório LC possui? Qual a posição desse elemento na matriz?

Considere que o fornecedor desta rede laboratorial fez uma entrega a essas filiais com as seguintes quantidades de cada insumo:

Filial \ Insumo	I	II	III
LA	120	10	65
LB	15	0	70
LC	90	50	10
LD	20	0	35

e) Represente as quantidades dessa entrega na forma matricial pela matriz E.
f) Com essa entrega, o que aconteceu com a quantidade de insumos? Construa uma nova matriz com as quantidades de insumos atualizadas e chame essa matriz de N.

Suponha que os valores unitários desses insumos sejam: R$10,00 para o insumo I, R$35,00 para o insumo II e R$20,00 para o insumo III.

g) Construa uma matriz que represente esses preços, chame essa matriz de P.
h) Qual é o valor total em insumos de cada uma dessas quatro filiais? Represente sua resposta na forma matricial e chame essa matriz de T.

Após um semestre, a quantidade de insumos dessas filiais pode ser representada pela matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 32 & 10 & 30 \\ 15 & 100 & 35 \\ 36 & 41 & 24 \\ 18 & 12 & 40 \end{pmatrix}$$

i) Calcule e represente pela matriz S a quantidade de insumos consumidos pelas filiais.
j) Se no próximo semestre o consumo de insumos (representado por S) triplicar, quais serão as quantidades de insumos que deverão ser encomendadas com o fornecedor para que não haja falta nas filiais?

INÍCIO

PLANEJAMENTO

1º momento: Divisão da turma em grupos de 2 ou 3 estudantes.

A composição dos grupos pode ser definida pelo professor com base na realização de uma avaliação diagnóstica prévia, tentando colocar no mesmo grupo estudantes que possuem mais dificuldades e estudantes que possuem menos dificuldades com o conteúdo. Desse modo, estudantes com menos dificuldades podem compartilhar conhecimentos com os demais estudantes e tornar as discussões nos grupos mais proveitosas.

2º momento: Entrega de uma cópia da tarefa em cada grupo e explicação sobre a dinâmica da aula.

Nesse momento, o professor explica aos estudantes que será disponibilizado um tempo (sugestão: 70 minutos) para que os grupos discutam e resolvam as questões da tarefa, anotando as resoluções individualmente (pois as resoluções dos membros do grupo não precisam ser iguais). Finalizado esse momento, os grupos apresentarão as resoluções selecionadas pelo professor, serão realizadas algumas discussões e sistematizações, e, caso o professor julgue necessário, os estudantes entregarão suas anotações.

Durante as resoluções o professor acompanhará o andamento das atividades, porém, sem fazer correções, fornecer respostas, ou contribuições que diminuam o desafio cognitivo da tarefa, e selecionando algumas resoluções para serem apresentadas e discutidas com a turma toda.

Para seleção das resoluções o professor deve priorizar resoluções que apresentem diferentes procedimentos ou até mesmo resolução incorretas para uma mesma questão, de forma a possibilitar e incentivar a reflexão e a justificação de diferentes conceitos e procedimentos matemáticos.

3º momento: Discussão coletiva e Sistematização do conteúdo

Ao término do tempo destinado às resoluções, ocorrerá a socialização das possíveis resoluções dos estudantes, selecionadas previamente pelo professor e a sistematização dos conteúdos abordados.

Nesse momento, o professor deve solicitar aos grupos que escrevam na lousa as resoluções selecionadas e então propor à turma que discutam sobre cada resolução apresentada (Sugestões de questionamentos: os procedimentos utilizados são válidos? A resposta final está coerente com a questão? Qual resolução é mais objetiva, demanda menos cálculos? Existem diferentes modos de resolver a questão?)

Por fim, o professor deve esclarecer os conceitos e procedimentos utilizados, avaliando os argumentos apresentados pelos estudantes e aproveitando para estabelecer conexões com outros conceitos e procedimentos matemáticos.

INÍCIO

RESOLUÇÃO DO PROFESSOR

As cinco primeiras questões do instrumento foram elaboradas com o objetivo de resgatar noções como a representação de tabelas por meio de matrizes, a identificação e nomenclatura de elementos dessas matrizes, tipos de matrizes, e a própria definição de matriz.

São questões de desafio reduzido (exercícios), pois, supostamente, a maioria dos estudantes da turma conhecem quais procedimentos de resolução utilizar para respondê-las. No entanto, tais exercícios se fazem essenciais, pois auxiliam na recordação de conceitos, notações e símbolos, possibilitam o desenvolvimento do raciocínio matemático e a consolidação desses conhecimentos.

Uma rede laboratorial possui quatro filiais LA, LB, LC e LD, nas quais a quantidade dos insumos I, II e III é a seguinte:

Filial \ Insumo	I	II	III
LA	12	35	45
LB	10	100	20
LC	36	56	60
LD	20	30	95

a) Escreva a matriz Q que representa a quantidade dos insumos dessa rede laboratorial.

De acordo com a notação utilizada para matrizes, a matriz Q pode ser representada utilizando-se parênteses ou colchetes:

$$Q = \begin{pmatrix} 12 & 35 & 45 \\ 10 & 100 & 20 \\ 36 & 56 & 60 \\ 20 & 30 & 95 \end{pmatrix} \text{ ou } Q = \begin{bmatrix} 12 & 35 & 45 \\ 10 & 100 & 20 \\ 36 & 56 & 60 \\ 20 & 30 & 95 \end{bmatrix}$$

b) Quantas linhas essa matriz possui? O que cada linha representa?

A matriz Q possui quatro linhas.

Cada linha representa as quantidades dos insumos I, II e III em um mesmo laboratório.

c) Quantas colunas essa matriz possui? O que cada coluna representa?

A matriz Q possui três colunas.

Cada coluna representa as quantidades de um mesmo insumo nos laboratórios LA, LB, LC e LD.

d) Qual é a quantidade de insumos do tipo II que o laboratório LC possui? Qual a posição desse elemento na matriz?

O laboratório LC possui 56 unidades de insumos do tipo II.

A elemento 56 está localizado na terceira linha e na segunda coluna da matriz Q. Utilizando a notação adequada, podemos escrever $q_{32} = 56$.

INÍCIO

Considere que o fornecedor desta rede laboratorial fez uma entrega a essas filiais com as seguintes quantidades de cada insumo:

Filial \ Insumo	I	II	III
LA	120	10	65
LB	15	0	70
LC	90	50	10
LD	20	0	35

e) Represente as quantidades dessa entrega na forma matricial pela matriz E.

De acordo com a notação utilizada para matrizes, a matriz E pode ser representada utilizando-se parênteses ou colchetes:

$$E = \begin{pmatrix} 120 & 10 & 65 \\ 15 & 0 & 70 \\ 90 & 50 & 10 \\ 20 & 0 & 35 \end{pmatrix} \text{ ou } E = \begin{bmatrix} 120 & 10 & 65 \\ 15 & 0 & 70 \\ 90 & 50 & 10 \\ 20 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

As cinco últimas questões foram elaboradas com o objetivo de discutir, definir e efetuar tais operações. Essas questões constituem explorações, visto que proporcionam a aplicação de conceitos e estratégias que supostamente sejam conhecidos pelos estudantes, tais como os algoritmos e as operações de adição, subtração, multiplicação e multiplicação de uma matriz por um escalar.

Porém, exigem um maior nível de envolvimento dos estudantes, dado que são questões abertas, ou seja, não informam no enunciado o tipo de operação que deve ser realizado, estimulando assim, o raciocínio e a reflexão na busca de um procedimento de resolução.

f) Com essa entrega, o que aconteceu com a quantidade de insumos? Construa uma nova matriz com as quantidades de insumos atualizadas e chame essa matriz de N.

A quantidade de insumos aumentou ou permaneceu a mesma para alguns insumos. Assim, a matriz N é dada pela soma das quantidades de insumos representadas nas matrizes Q e E:

$$N = Q + E = \begin{pmatrix} 12 & 35 & 45 \\ 10 & 100 & 20 \\ 36 & 56 & 60 \\ 20 & 30 & 95 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 120 & 10 & 65 \\ 15 & 0 & 70 \\ 90 & 50 & 10 \\ 20 & 0 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 132 & 45 & 110 \\ 25 & 100 & 90 \\ 126 & 106 & 70 \\ 40 & 30 & 130 \end{pmatrix}$$

Suponha que os valores unitários desses insumos sejam: R$10,00 para o insumo I, R$35,00 para o insumo II e R$20,00 para o insumo III.

g) Construa uma matriz que represente esses preços, chame essa matriz de P.

A matriz P poderá ser construída pelo estudante como uma matriz linha ou como uma matriz coluna, porém, considerando que na próxima questão faremos a multiplicação das matrizes N e P, é conveniente escrever a matriz P como uma matriz coluna:

$$P = \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \\ 20 \end{pmatrix}$$

INÍCIO

h) Qual é o valor total em insumos de cada uma dessas quatro filiais? Represente sua resposta na forma matricial e chame essa matriz de T.

O valor total em insumos de cada filial pode ser calculado multiplicando-se os valores unitários de cada insumo (representados na matriz P) pela quantidade de cada insumo em cada laboratório (representadas na matriz N), e somando-se os valores totais de cada laboratório.

Tal operação corresponde à realização da multiplicação entre as matrizes N e P. Considerando que a matriz N é de ordem 4x3 e que a matriz P é de ordem 3x1, a matriz $T = N \cdot P$ será de ordem 4x1:

$$T = N \cdot P = \begin{pmatrix} 132 & 45 & 110 \\ 25 & 100 & 90 \\ 126 & 106 & 70 \\ 40 & 30 & 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1320 + 1575 + 2200 \\ 250 + 3500 + 1800 \\ 1260 + 3710 + 1400 \\ 400 + 1050 + 2600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5095 \\ 5550 \\ 6370 \\ 4050 \end{pmatrix}$$

Após um semestre, a quantidade de insumos dessas filiais pode ser representada pela matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 32 & 10 & 30 \\ 15 & 100 & 35 \\ 36 & 41 & 24 \\ 18 & 12 & 40 \end{pmatrix}$$

i) Calcule e represente pela matriz S a quantidade de insumos consumidos pelas filiais.

A quantidade de insumos consumidos é calculada subtraindo-se a quantidade anterior de insumos (representada pela matriz N) da quantidade de insumos após um semestre (representada pela matriz M).

Assim, $S = N - M$

$$S = N - M = \begin{pmatrix} 132 & 45 & 110 \\ 25 & 100 & 90 \\ 126 & 106 & 70 \\ 40 & 30 & 130 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 & 10 & 30 \\ 15 & 100 & 35 \\ 36 & 41 & 24 \\ 18 & 12 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 35 & 80 \\ 10 & 0 & 55 \\ 90 & 65 & 46 \\ 22 & 18 & 90 \end{pmatrix}$$

j) Se no próximo semestre o consumo de insumos (representado por S) triplicar, quais serão as quantidades de insumos que deverão ser encomendadas com o fornecedor para que não haja falta nas filiais?

Para calcular a quantidade de insumos que deve ser solicitada ao fornecedor, subtraímos a quantidade atual de insumos (representada pela matriz M) do consumo (representado por S) triplicado, ou seja,

$$M - 3 \cdot S = \begin{pmatrix} 32 & 10 & 30 \\ 15 & 100 & 35 \\ 36 & 41 & 24 \\ 18 & 12 & 40 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 100 & 35 & 80 \\ 10 & 0 & 55 \\ 90 & 65 & 46 \\ 22 & 18 & 90 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 32 & 10 & 30 \\ 15 & 100 & 35 \\ 36 & 41 & 24 \\ 18 & 12 & 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 300 & 105 & 240 \\ 30 & 0 & 165 \\ 270 & 195 & 138 \\ 66 & 54 & 270 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -268 & -95 & -210 \\ -15 & 100 & -130 \\ -234 & -154 & -114 \\ -48 & -42 & -230 \end{pmatrix}$$

Portanto, o laboratório LA deverá encomendar 268, 95 e 210 unidades dos insumos I, II e III respectivamente, o laboratório LB deverá encomendar 15 e 130 unidades dos insumos I e III respectivamente, e o laboratório LC deverá encomendar 48, 42 e 230 unidades dos insumos I, II e III respectivamente.

INÍCIO

CAMINHOS DE APRENDIZAGEM

Gerenciando os insumos de uma rede laboratorial

Michelle Andrade Klaiber

O desenvolvimento dessa tarefa ocorreu no ano de 2017, em uma turma de 1º período do curso de Licenciatura em Química da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, e teve a duração de 150 minutos (três horas aula).

Inicialmente, dividi a turma em grupos de dois ou três estudantes, a composição dos grupos foi escolhida de acordo com algumas observações realizadas a partir de uma avaliação diagnóstica ocorrida na semana anterior. Dessa forma, tentei colocar em um mesmo grupo estudantes que resolveram poucas questões, com estudantes que tivessem resolvido mais questões dessa avaliação diagnóstica. Meu intuito com essa seleção, foi o de tornar as discussões nos grupos mais produtivas, para que os estudantes com menos dificuldades pudessem compartilhar conhecimentos com os demais estudantes.

Após os grupos se organizarem, entreguei para cada estudante uma cópia da tarefa e expliquei que os grupos teriam disponíveis 70 minutos, nos quais iriam discutir e tentar resolver as questões da tarefa, anotando as resoluções individualmente – pois as resoluções dos membros dos grupos não precisariam ser iguais – enquanto isso, eu passaria pelos grupos verificando o andamento das atividades, porém, sem fazer correções, fornecer respostas, ou contribuições que facilitassem a resolução da tarefa. Nesse momento, selecionei algumas resoluções para serem apresentadas e discutidas com a turma toda.

Logo de início, muitos estudantes fizeram perguntas do tipo:

“Está certo?”

“É dessa forma que é para resolver?”

Respondi que, como explicado no início, essas discussões seriam feitas num segundo momento da aula. Alguns estudantes se sentiram incomodados com minha conduta, demonstraram certa insegurança, então pedi para que eles tivessem calma e prosseguissem tranquilos com as resoluções, pois esse tempo trabalhando entre eles seria necessário para que relembrassem conceitos, discutissem métodos e ideias.

Alguns estudantes acharam as primeiras questões muito fáceis, o que não me surpreendeu, pois, tais questões eram exercícios que visavam a retomada de alguns conceitos básicos, como nomenclaturas, notações entre outros, já que nem todos recordavam esses conceitos sobre matrizes.

Um dos grupos, após construir a matriz solicitada na primeira questão, estava discutindo se deveriam somar todos os elementos dessa matriz. Nesse momento fiz uma pergunta ao grupo:

“O que significaria essa soma no contexto do exercício?”

e saí de perto do grupo para que eles pudessem refletir e discutir sobre a resposta.

Minha intenção com essa pergunta, era de que os estudantes percebessem que tal soma não fazia sentido, já que cada elemento na matriz significava a quantidade de um tipo de insumo do laboratório, e não era questionada a quantidade total de insumos nesse laboratório.

INÍCIO

Outro grupo apresentou dúvidas quanto à Questão F da tarefa:

“É preciso calcular a média?”.

Tal questão envolvia a soma de duas matrizes de mesma ordem, que representavam quantidades dos mesmos insumos, para a obtenção de uma nova matriz. Durante as discussões do grupo, um dos estudantes argumentou com os demais que o cálculo da média não seria necessário, pois, segundo o enunciado da tarefa os insumos não seriam divididos, só acrescentados, o que convenceu os demais.

Na Questão H, a maioria dos grupos conseguiu efetuar a multiplicação entre as matrizes, um grupo apresentou dificuldade na utilização do algoritmo da multiplicação, mesmo com o contexto da questão eles não conseguiram relacionar os elementos das matrizes e realizar a multiplicação adequadamente.

No decorrer da atividade, percebi que em alguns grupos haviam estudantes que esperavam que os outros membros do grupo resolvessem as questões, não participando das discussões. Nesses casos, me direcionei a esses grupos e conversei com esses estudantes, encorajando-os a exporem suas ideias e a tentarem resolver a tarefa proposta.

Ao término do tempo destinado para a resolução, notei que nem todos haviam conseguido terminar suas resoluções, mesmo assim, para não prejudicar a andamento da aula solicitei que os grupos apresentassem no quadro as resoluções que eu havia selecionado.

A seleção de tais resoluções foi realizada priorizando resoluções com erros, métodos diferentes dos usados pela maioria da turma ou resoluções incompletas, em alguns casos foram selecionadas mais de uma resolução para a mesma questão.

Após a resolução de todas as questões serem colocadas no quadro, houve uma discussão coletiva sobre cada uma.

As Questões A, B e E foram resolvidas adequadamente pela maioria dos estudantes, houve algumas divergências quanto à notação para representar a matriz (usar parênteses, colchetes ou chaves?). Na Questão B, houve estudantes que confundiram linha com coluna. Essas pequenas “confusões” foram discutidas e os estudantes chegaram num consenso sobre as resoluções corretas. Em alguns momentos, quando pertinente à discussão, eu interferia apresentando definições ou inserindo alguns conceitos e notações sobre matrizes.

As Questões C e D foram resolvidas sem maiores dificuldades, a maioria dos grupos não utilizou nenhuma notação para indicar os elementos das matrizes, então solicitei que fosse apresentada a resolução de um grupo que utilizou a notação se referindo à linha e à coluna do elemento da matriz, para poder discutir com a sala toda.

Alguns estudantes perguntaram se as resoluções apresentadas no quadro estavam corretas, então respondi que nem todas elas, por isso, solicitei que aguardassem as discussões coletivas para que depois fizessem as anotações no caderno.

As Questões F, H e I que envolviam a adição, a multiplicação e a subtração de matrizes, respectivamente, foram resolvidas adequadamente pela maioria da turma, pois o contexto da tarefa contribuiu na realização de tais operações. Então, selecionei para apresentação uma resolução na qual foram utilizados os algoritmos da adição e da multiplicação, para que esses fossem relembrados e discutidos por todos.

Nesse momento, aproveitei para trazer à discussão as condições para que tais operações pudessem ser realizadas, em relação à ordem das matrizes, então um estudante comentou:

“Construí a matriz da Questão G invertida”.

INÍCIO

O estudante referia-se a ordem da matriz para que essa pudesse ser multiplicada pela matriz da questão anterior, mas para que isso ficasse mais claro para os demais solicitei que ele explicasse melhor, então ele disse:

“A matriz dos valores deve ter três linhas e uma coluna, e não o contrário”.

A partir daí, apresentei a condição para a multiplicação entre duas matrizes quaisquer e aproveitei para discutir a resolução da Questão G.

A Questão J foi a que gerou mais discussões, pois muitos estudantes apresentaram dificuldades na interpretação de seu enunciado, mas no geral, não houve dificuldades na realização das operações necessárias, no caso, a multiplicação por um escalar e a subtração.

Após essa etapa, que durou aproximadamente 40 minutos, iniciei a síntese das aprendizagens, ou seja, a formalização de todos os conceitos discutidos na tarefa.

Ao final da aula, recolhi as resoluções dos estudantes e informei a eles que seriam disponibilizados, no ambiente virtual de aprendizagem da disciplina, uma apostila com os conceitos e definições abordados na aula e com tarefas extras para serem realizadas em casa.

Por fim, avalio que as questões exploradas nessa tarefa proporcionaram aos estudantes o resgate de noções relacionadas ao conceito de matriz, como o uso da notação, os tipos de Matrizes e suas representações, e as operações entre Matrizes.

A dinâmica de sala de aula, que priorizou a atividade dos estudantes ao invés da exposição de conteúdos pela professora, em princípio, causou estranheza e um pouco de insegurança aos estudantes durante a resolução dessa primeira tarefa. Acredito que tal comportamento possa ser justificado pela falta de experiência desses estudantes com esse tipo de metodologia durante a vida escolar, uma vez que eles não se mostravam confiantes em resolver as questões sem o meu auxílio para verificar os algoritmos e estratégias utilizadas.

Por se tratar de uma tarefa introdutória e que abordou conceitos previstos para o Ensino Médio, e também possivelmente devido à distribuição das duplas, todas as questões foram resolvidas por todos os estudantes, demonstrando que possuíam algum conhecimento prévio a respeito dos conceitos explorados e, ainda, que o trabalho em grupos contribuiu para as discussões e reflexões a respeito do conteúdo.

INÍCIO

REFERÊNCIAS

APPEL, E. M.; LUIZ, E. A. J. Uma experiência no Ensino Médio com investigação matemática e resolução de problemas. In: *ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10*., 2009. Guarapuava. *Anais...* Guarapuava: Unicentro, 2009. p. 787-798.

BUSSMANN, C. J. C.; KLAIBER, M. A.; SILVA, D. P. Processos mentais de Dreyfus e o Ensino Exploratório: discussão e possível intervenção em sala de aula. In: *ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14*., 2017. Cascavel. *Anais...* Cascavel: Unioeste, 2017. p. 1-13.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Org.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

PONTE, J. P. Gestão Curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular.* Lisboa: APM, 2005. p.11-34.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. A. F. As discussões matemáticas na aula exploratória como vertente da prática profissional do professor. *Revista da Faculdade de Educação*. Mato Grosso, v. 23, n. 1, p. 131-150, 2015.

CONTATO

Esse material foi elaborado pela professora Michelle Andrade Klaiber.

A professora Michelle é doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL) e atua como docente nos cursos de Engenharia e Licenciatura na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Você pode usar, modificar, adequar e compartilhar este material!

Se você tiver dúvidas ou sugestões, escreva para o e-mail michelle@utfpr.edu.br .

INÍCIO