TAREFA 5

APLICAÇÕES E PROBLEMAS DE FORMULAÇÃO ENVOLVENDO SISTEMAS LINEARES

OBJETIVO

Desenvolver nos estudantes as habilidades de modelar e resolver situações-problema que envolvam Sistemas Lineares.

CONTEÚDO ABORDADO

Modelação e resolução de Sistemas de Equações Lineares.

NÍVEL ESCOLAR

1º período – Ensino Superior.

DURAÇÃO

150 minutos.

RECURSOS

Papel, lápis, borracha e xerocópias da tarefa.

TAREFA (clique aqui para baixar em arquivo editável)

PLANEJAMENTO

RESOLUÇÃO DO PROFESSOR

CAMINHOS DE APRENDIZAGEM

REFERÊNCIAS

CONTATO

TAREFA

1- Um jogador de basquete fez o seguinte acordo com o seu clube: cada vez que ele convertesse um arremesso, receberia R$10,00 do clube e, caso errasse, pagaria R$5,00 ao clube. Ao final de uma partida em que arremessou 20 vezes, recebeu a quantia de R$50,00. Quantos arremessos ele acertou?

2- Sabe–se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades (u) de vitamina A, 180 u de vitamina B e 140 u de vitamina C. Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados 3 alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) de cada alimento, determinou-se que: (i) o alimento I tem 1 u de vitamina A, 10 u de vitamina B e 1 u de vitamina C. (ii) o alimento II tem 9 u de vitamina A, 1 u de B e 0 u de C. (iii) o alimento III tem 2 u de vitamina A, 2 u de B e 5 u de C. Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II e III devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada em vitaminas?

3- A reação $CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$ ocorre quando uma planta verde converte dióxido de carbono e água em glicose e oxigênio durante a fotossíntese. Balanceie esta equação.

4- Encontre uma reação balanceada para a reação química

Amônia (NH_3) + Óxido de Cobre (CuO) → Nitrogênio (N_2) + Cobre (Cu) + Água (H_2O)

5- A combustão de amônia (NH_3) em oxigênio produz nitrogênio (N_2) e água. Como encontrar uma equação química balanceada para esta reação?

$$\mathbf{w}NH_3 + \mathbf{x}O_2 \rightarrow \mathbf{y}N_2 + \mathbf{z}H_2O$$

INÍCIO

PLANEJAMENTO

1º momento: Introdução da tarefa e explicação sobre a dinâmica da aula.

Inicialmente professor deve dividir a turma em duplas (é preferível que os alunos trabalhem em duplas para a resolução dessa tarefa, possibilitando a troca de experiências e discussões). Entregar uma cópia da tarefa para cada aluno e realizar a leitura dos enunciados, sanando possíveis dúvidas a respeito dos contextos ou de palavras desconhecidas, mas sem fornecer respostas ou correções.

Em seguida, explicar que será disponibilizado um tempo para a resolução da tarefa (tempo sugerido: 90 minutos); durante o qual os alunos deverão realizar anotações a respeito da resolução no caderno e o professor caminhará entre os grupos acompanhando as duplas.

2º momento: Resolução das questões pelos estudantes.

Durante as resoluções o professor acompanhará o andamento das atividades e selecionará algumas resoluções para serem apresentadas e discutidas com a turma toda no 3º momento. Porém, o professor não deve fazer correções, fornecer respostas, ou contribuições que diminuam o desafio cognitivo da tarefa.

Finalizado esse momento, o professor pode exibir as resoluções selecionadas no projetor ou solicitar para as duplas que as apresentem na lousa, serão realizadas algumas discussões e, caso o professor julgue necessário, os estudantes entregarão suas anotações.

Lembrando que para seleção das resoluções o professor deve priorizar as que apresentem diferentes procedimentos ou até mesmo procedimentos incorretos para uma mesma questão, de forma a possibilitar e incentivar a reflexão e a justificação de diferentes conceitos e procedimentos matemáticos.

3º momento: Discussão coletiva e Sistematização do conteúdo

Ao término do tempo destinado às resoluções, ocorrerá a socialização das possíveis resoluções dos estudantes, selecionadas previamente pelo professor e a sistematização dos conteúdos abordados (tempo sugerido: 60 minutos).

Nesse momento, sugerimos que o professor revise com a turma os métodos de resolução de sistemas lineares, comparando-os e evidenciando as vantagens e desvantagens de cada um.

INÍCIO

RESOLUÇÃO DO PROFESSOR

As questões dessa tarefa apresentam problemas que abordam diferentes contextos, inclusive na área da Química, pois segundo Ponte (2005) contextos familiares podem colaborar na compreensão do problema. Tais problemas, escritos em linguagem natural, devem ser formulados como Sistemas de Equações Lineares e resolvidos pelos estudantes por meio do método que julgarem conveniente.

A primeira questão tem como contexto o cálculo do pagamento recebido por um jogador de basquete após uma partida, segundo as quantidades de acertos e erros em seus arremessos, ou seja, um problema que pode ser modelado por meio de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas.

1- Um jogador de basquete fez o seguinte acordo com o seu clube: cada vez que ele convertesse um arremesso, receberia R$10,00 do clube e, caso errasse, pagaria R$5,00 ao clube. Ao final de uma partida em que arremessou 20 vezes, recebeu a quantia de R$50,00. Quantos arremessos ele acertou?

A pergunta do problema é: quantos arremessos o jogador acertou? Então essa é uma das incógnitas do problema.

Chamando o número de arremessos que ele acertou de x e o número de arremessos que ele errou de y temos:

$$x + y = 20 \text{ arremessos}$$

Sabemos também que o jogador recebe R$10,00 por acerto e paga R$5,00 por erro, e que ao final da partida ele recebeu a quantia de R$50,00, assim

$$10x - 5y = 50$$

Obtemos então o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 10x - 5y = 50 \end{cases}$$

Utilizando o método da adição, multiplicamos a primeira linha (L1) por 5 e somamos à segunda linha (L2) cancelando a variável y e obtendo o valor de x

$$\begin{cases} x + y = 20 \quad (*\,5) \\ 10x - 5y = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 100 \\ 10x - 5y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 15x &= 150 \\ x &= \frac{150}{15} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Substituindo $x = 10$ na primeira equação do sistema linear

$$\begin{aligned} x + y &= 20 \\ 10 + y &= 20 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Solução: $\{10, 10\}$.

Resposta: o jogador acertou 10 arremessos.

INÍCIO

A segunda questão envolve a modelação de um sistema linear com três equações e três incógnitas, adaptado a partir de uma questão proposta por Boldrini (1980), trazendo como contexto o cálculo da quantidade de alimentos que devem ser ingeridos diariamente, para que se tenha uma alimentação equilibrada em vitaminas.

Essas duas primeiras questões abordam sistemas lineares quadrados, ou seja, com o mesmo número de equações e incógnitas, com solução possível determinada, podendo ser resolvidos por qualquer um dos métodos já discutidos anteriormente (Adição, Comparação, Substituição, Cramer ou Escalonamento).

2- Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades (u) de vitamina A, 180 u de vitamina B e 140 u de vitamina C. Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados 3 alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) de cada alimento, determinou-se que: (i) o alimento I tem 1 u de vitamina A, 10 u de vitamina B e 1 u de vitamina C. (ii) o alimento II tem 9 u de vitamina A, 1 u de B e 0 u de C. (iii) o alimento III tem 2 u de vitamina A, 2 u de B e 5 u de C. Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II e III devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada em vitaminas?

Neste problema precisamos calcular quantos gramas de cada um dos alimentos devem ser ingeridos diariamente, organizando os dados fornecidos em uma tabela, temos:

	Alimento I	Alimento II	Alimento III	Total
Vitamina A	1	9	2	170
Vitamina B	10	1	2	180
Vitamina C	1	0	5	140

chamando de x, y e z as quantidades dos alimentos I, II e III respectivamente, obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 9y + 2z = 170 \\ 10x + y + 2z = 180 \\ x + 5z = 140 \end{cases}$$

Um dos métodos que podemos utilizar para a resolução deste sistema linear é o escalonamento (a BNCC recomenda que este método seja priorizado, uma vez que ele pode ser utilizado para qualquer tipo de sistema linear).

Seguindo as operações indicadas, onde L_1, L_2 e L_3 são as equações do sistema linear, obtemos o sistema equivalente na forma escalonada

$$\begin{cases} x + 9y + 2z = 170 \\ 10x + y + 2z = 180 \\ x + 5z = 140 \end{cases} \quad \begin{matrix} 10L_1 - L_2 \to L_2 \\ L_1 - L_3 \to L_3 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + 9y + 2z = 170 \\ 89y + 18z = 1520 \\ 9y - 3z = 30 \end{cases}$$

$$L_2 + 6L_3 \to L_3 \Longrightarrow \begin{cases} x + 9y + 2z = 170 \\ 89y + 18z = 1520 \\ 143y = 1700 \end{cases}$$

Da equação $143y = 1700$ segue $y = \frac{1700}{143} \cong 11{,}89$.

INÍCIO

continuação da questão 2

Substituindo esse valor na segunda equação

$$89y + 18z = 1520$$

$$89\left(\frac{1700}{143}\right) + 18z = 1520$$

$$18z = 1520 - \frac{151300}{143}$$

$$z = \frac{3670}{143} \cong 25{,}66$$

Substituindo os valores de y e z na primeira equação

$$x + 9y + 2z = 170$$

$$x + 9\left(\frac{1700}{143}\right) + 2\left(\frac{3670}{143}\right) = 170$$

$$x = \frac{24310 - 15300 - 7340}{143}$$

$$x = \frac{1670}{143} \cong 11{,}68$$

Assim, a solução do sistema linear é $\left\{\frac{1670}{143}, \frac{1700}{143}, \frac{3670}{143}\right\}$.

Resposta: para que a alimentação seja equilibrada em vitaminas devem ser ingeridos 11,68 g do alimento I, 11,89 g do alimento II e 25,66 g do alimento III.

INÍCIO

As questões 3, 4 e 5 trazem problemas relacionados ao balanceamento de equações químicas, nos quais os estudantes devem modelar um sistema de equações lineares relacionando os coeficientes estequiométricos da reação química dada, resolver o referido sistema, e encontrar os coeficientes que balanceiam a equação.

Os sistemas lineares estudados nessas questões não são quadrados, e possuem solução possível indeterminada. Sendo assim, para a resolução desses, os estudantes precisarão escolher um método mais conveniente, uma vez que nem todos os métodos já estudados permitem a resolução de sistemas desse tipo.

3- A reação $CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$ ocorre quando uma planta verde converte dióxido de carbono e água em glicose e oxigênio durante a fotossíntese. Balanceie esta equação.

Para balancear a reação dada devemos calcular os coeficientes estequiométricos x, y, z e w da equação

$$\boldsymbol{x}\, CO_2 + \boldsymbol{y}\, H_2O = \boldsymbol{z}\, C_6H_{12}O_6 + \boldsymbol{w}\, O_2$$

Olhando para os coeficientes estequiométricos de cada um dos elementos químicos da reação, temos:

	x	**y**	**z**	**w**
C	1	0	6	0
O	2	1	6	2
H	0	2	12	0

Respeitando a igualdade na equação da reação, obtemos as equações:

$$x = 6z$$
$$2x + y = 6z + 2w$$
$$2y = 12z$$

Que compõem o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x \quad\quad - 6z \quad\quad = 0 \\ 2x + y - 6z - 2w = 0 \\ \quad 2y - 12z \quad\quad = 0 \end{cases}$$

Resolveremos esse sistema linear pelo método da substituição (o escalonamento, neste caso, envolveria mais cálculos visto que várias incógnitas desse sistema já estão “zeradas”)

Da primeira equação do sistema temos $x = 6z$ e da terceira equação segue $y = 6z$.

Substituindo x e y na segunda equação, obtemos

$$2(6z) + 6z - 6z - 2w = 0$$
$$12z = 2w$$
$$w = 6z$$

Portanto, a solução dada em função da incógnita z é $\{6z, 6z, z, 6z\}$.
Lembrando que os coeficientes estequiométricos de uma reação devem ser números inteiros, tomamos $z = 1$ e obtemos a equação balanceada:

$$\mathbf{6}\, CO_2 + \mathbf{6}\, H_2O = C_6H_{12}O_6 + \mathbf{6}\, O_2\, .$$

INÍCIO

4- Encontre uma reação balanceada para a reação química

Amônia (NH_3) + Óxido de Cobre (CuO) → Nitrogênio (N_2) + Cobre (Cu) + Água (H_2O)

Para balancear a reação dada devemos calcular os coeficientes estequiométricos x, y, z e w da equação

$$\boldsymbol{x}\, NH_3 + \boldsymbol{y}\, CuO = \boldsymbol{z}\, N_2 + \boldsymbol{w}\, Cu + \boldsymbol{t}\, H_2O$$

Olhando para os coeficientes estequiométricos de cada um dos elementos químicos da reação, temos:

	x	**y**	**z**	**w**	**t**
N	1	0	2	0	0
H	3	0	0	0	2
Cu	0	1	0	1	0
O	0	1	0	0	1

Respeitando a igualdade na equação da reação, obtemos as equações:

$$x = 2z$$
$$3x = 2t$$
$$y = w$$
$$y = t$$

Que compõem o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x \quad - 2z = 0 \\ 3x \quad - 2t = 0 \\ y \quad - w = 0 \\ y \quad - t = 0 \end{cases}$$

Resolveremos esse sistema linear pelo método da substituição (o escalonamento, neste caso, envolveria mais cálculos visto que várias incógnitas desse sistema já estão “zeradas”)

Das duas últimas equações do sistema temos $y = w = t$.
Da primeira equação segue $x = 2z$.
Substituindo x na segunda equação, obtemos

$$t = \frac{3}{2}x$$
$$t = \frac{3}{2}(2z)$$
$$t = 3z$$

Portanto, a solução dada em função da incógnita z é $\{2z, 3z, z, 3z, 3z\}$. (É importante lembrar que a solução poderia estar em função de qualquer uma das incógnitas).
Considerando que os coeficientes estequiométricos de uma reação devem ser números inteiros, tomamos $z = 1$ e obtemos a equação balanceada:

$$\boldsymbol{2}\, NH_3 + \boldsymbol{3}\, CuO = N_2 + \boldsymbol{3}\, Cu + \boldsymbol{3}\, H_2O\ .$$

INÍCIO

5- A combustão de amônia (NH_3) em oxigênio produz nitrogênio (N_2) e água. Como encontrar uma equação química balanceada para esta reação?

$$\mathbf{w}NH_3 + \mathbf{x}O_2 \rightarrow \mathbf{y}N_2 + \mathbf{z}H_2O$$

Para balancear a reação dada devemos calcular os coeficientes estequiométricos w, x, y e z da equação

$$\boldsymbol{w}\, NH_3 + \boldsymbol{x}\, O_2 = \boldsymbol{y}\, N_2 + \boldsymbol{z}\, H_2O$$

Olhando para os coeficientes estequiométricos de cada um dos elementos químicos da reação, temos:

	w	x	y	z
N	1	0	2	0
H	3	0	0	2
O	0	2	0	1

Respeitando a igualdade na equação da reação, obtemos as equações:

$$w = 2y$$
$$3w = 2z$$
$$2x = z$$

Que compõem o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} w \quad - 2y \quad = 0 \\ 3w \quad - 2z = 0 \\ 2x \quad - z = 0 \end{cases}$$

Resolveremos esse sistema linear pelo método da substituição (o escalonamento, neste caso, envolveria mais cálculos visto que várias incógnitas desse sistema já estão "zeradas")

Da última equação do sistema temos $z = 2x$.

Substituindo z na segunda equação, obtemos

$$3w = 2z$$
$$3w = 2(2x)$$
$$3w = 4x$$
$$w = \frac{4}{3}x$$

Substituindo w na primeira equação, obtemos

$$w = 2y$$
$$\frac{4}{3}x = 2y$$
$$y = \frac{2}{3}x$$

Portanto, a solução dada em função da incógnita x é $\left\{\frac{4}{3}x, x, \frac{2}{3}x, 2x\right\}$. (É importante lembrar que a solução poderia estar em função de qualquer uma das incógnitas).

Considerando que os coeficientes estequiométricos de uma reação devem ser números inteiros, tomamos $x = 3$ e obtemos a equação balanceada:

$$\mathbf{4}\, NH_3 + \mathbf{3}\, O_2 = \mathbf{2}\, N_2 + \mathbf{6}\, H_2O\,.$$

INÍCIO

As questões dessa tarefa constituem problemas, ou seja, são questões fechadas que visam a aplicação de conhecimentos que o estudante já possui. E devido à sua natureza mais desafiante, “são indispensáveis para que os alunos tenham uma efectiva experiência matemática” (PONTE, 2005, p .17).

Entendemos que tais questões possam desenvolver nos alunos os processos de representação e generalização, segundo Dreyfus (2002), pois desenvolvem a representação de um enunciado em linguagem natural para a linguagem matemática e possibilitam aos alunos estabelecer relações entre dados e resultados, iniciando a transição de casos particulares para casos geral

Outras habilidades que podem ser desenvolvidas por meio dessa tarefa são a verificação e validação dos resultados obtidos, pois os estudantes podem compará-los com os resultados obtidos pelos métodos da “tentativa e erro” e da “oxirredução”[1], aprendidos pela maioria durante o Ensino Médio.

INÍCIO

[1] Método para realizar o balanceamento de uma reação química de oxirredução, no qual a determinação dos coeficientes estequiométricos é feita a partir da determinação dos números de oxidação e todos os átomos e íons da reação.

CAMINHOS DE APRENDIZAGEM

Aplicações e problemas de formulação envolvendo Sistemas Lineares

Michelle Andrade Klaiber

O desenvolvimento dessa tarefa ocorreu no ano de 2017, em uma turma de 1º período do curso de Licenciatura em Química da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, e teve a duração de 150 minutos (três horas aula).

No início da aula, solicitei aos estudantes que se organizassem em duplas, então entreguei a todos cópias da tarefa e expliquei que em todas as questões os estudantes poderiam escolher qual método de resolução utilizar. (Sugestão de tempo para essa etapa: 90 minutos.)

Na Questão 1 foi proposta uma situação-problema que poderia ser formulada e resolvida como um sistema de equações lineares de duas equações e duas incógnitas. Ao caminhar pela sala, não observei dificuldades com a interpretação e a resolução da questão.

A Questão 2, na qual foi abordada a formulação e a resolução de um sistema linear 3x3, despertou muitas dúvidas nos estudantes, principalmente quanto à formulação do problema. Ao observar a atividade de uma das duplas, percebi que estavam formulando o problema em função da quantidade de cada vitamina, e não da quantidade de cada alimento; demonstravam insegurança em suas análises. Nesse momento, tentei orientar a dupla com a instrução: “leiam qual a pergunta que o problema traz para entenderem o que deve ser calculado”. Então a dupla voltou a ler o enunciado comparando-o com suas esquematizações.

Nas Questões 3, 4 e 5 foi proposto o balanceamento de equações químicas, como muitos estudantes sabiam resolver esse tipo de problema por outros métodos, e não por sistemas lineares, orientei para que eles pesquisassem em livros ou até mesmo na internet, e buscassem sobre o assunto, caso julgassem necessário. Alguns estudantes solicitaram a professora para irem à biblioteca buscar livros, outros preferiram utilizar a internet em seus celulares.

Após fazerem suas buscas, os estudantes partiram para as resoluções, demonstrando compreenderem a formulação de Sistemas Lineares a partir das equações químicas fornecidas. Surgiram algumas dúvidas e comentários dos estudantes quanto à resolução desses sistemas, que possuíam solução possível indeterminada. Um estudante questionou:

“professora, qual variável deixo na resolução?”

outro perguntou:

“precisa ficar em função de uma variável só a solução?”

Respondi:

“a variável que aparecerá na solução vai depender das substituições que vocês fizerem, vocês escolhem. A ideia é que a solução apresente o menor número de variáveis possível.”

O tempo reservado para essa etapa foi insuficiente para que a maioria dos estudantes terminasse suas resoluções, já que eles precisaram de um tempo extra para pesquisarem sobre o balanceamento de equações químicas. Sendo assim, disponibilizei mais 20 minutos para que fossem finalizadas e entregues as anotações.

INÍCIO

Na sequência, foram realizadas a discussão coletiva e a sistematização dos conteúdos. Decidi unir as duas etapas, pois a tarefa não trazia conteúdos novos a sistematizar, e sim diferentes contextos e aplicações para o conteúdo estudado sobre Matrizes e Sistemas de Equações Lineares.

Durante as discussões/sistematizações foram debatidos os métodos de resolução utilizados em cada questão. Para isso, a selecionei resoluções que apresentassem diferentes estratégias.

Na discussão da Questão 1, os métodos apresentados pelos estudantes foram o da Adição e o da Substituição. Todos chegaram a um consenso de que esses seriam os melhores métodos a serem utilizados, já que o sistema obtido tinha apenas duas variáveis.

Para a Questão 2, os métodos apresentados foram a regra de Cramer e o Escalonamento, os estudantes não apresentaram dificuldades na compreensão dos métodos apresentados, então perguntei:

“poderíamos ter utilizado outros métodos de resolução nessa questão? Quais?”

E um estudante respondeu:

“podia ter utilizado qualquer um dos métodos estudados, mas escolhi o que pareceu mais simples para o problema”

Acrescentei:

“esse é o segredo, olhar para o Sistema Linear que temos que resolver e descobrir qual será o método mais conveniente, por isso é interessante que vocês resolvam outros Sistemas Lineares, de outras ordens, para desenvolverem essa habilidade”.

A dúvida que suscitou muitas discussões nessa questão foi quanto à formulação do problema, então fui lendo o enunciado com os estudantes e organizando os dados do problema no quadro.

Um estudante comentou:

“eu havia entendido que A, B e C eram as variáveis, mas são as vitaminas, as quantidades de vitaminas já são conhecidas...”,

e complementei:

“uma dica sobre isso estava no final do enunciado, que perguntava ‘quantos gramas de cada alimento devemos ingerir...’, percebe-se pela pergunta que as variáveis são as quantidades dos alimentos, não as das vitaminas.”

Na discussão das resoluções para as Questões 3, 4 e 5, o único método apresentado foi o da substituição. Então questionei a turma sobre essa escolha, e um estudante respondeu:

“porque muitas equações já forneciam alguns resultados”

e outro complementou:

“tinham poucas variáveis nas equações, ficava mais fácil”.

Outro tópico discutido sobre essas questões foi quanto à exibição da solução do problema, ressaltei a importância de se concluir a resolução exibindo a resposta para o problema, no caso, a equação balanceada, o que muitos estudantes não fizeram.

INÍCIO

Essa discussão findou por abordar também alguns conceitos de química relativos ao balanceamento, como a importância de que os coeficientes estequiométricos fossem números inteiros. Por não dominar tais conceitos da Química, e assim não poder contribuir muito; sugeri que os estudantes levassem essas discussões também para a aula de Química Geral, na qual poderiam aprofundá-las.

Finalizando a aula, avisei aos estudantes que havia disponibilizado no ambiente virtual de aprendizagem algumas tarefas relacionadas, para que pudessem praticar.

INÍCIO

REFERÊNCIAS

BUSSMANN, C. J. C.; KLAIBER, M. A.; SILVA, D. P. Processos mentais de Dreyfus e o Ensino Exploratório: discussão e possível intervenção em sala de aula. In: *ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14*., 2017. Cascavel. *Anais...* Cascavel: Unioeste, 2017. p. 1-13.

BOLDRINI, J. L. *et al*. Álgebra linear. 3. ed. ampl. e rev. São Paulo: Harper, 1980.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Org.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

PONTE, J. P. Gestão Curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular.* Lisboa: APM, 2005. p.11-34.

CONTATO

Esse material foi elaborado pela professora Michelle Andrade Klaiber.

A professora Michelle é doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL) e atua como docente nos cursos de Engenharia e Licenciatura na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Você pode usar, modificar, adequar e compartilhar este material!

Se você tiver dúvidas ou sugestões, escreva para o e-mail michelle@utfpr.edu.br .

INÍCIO