

Dimensão Fractal

MAURICIO RAMOS LUTZ
JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS

Caderno didático volume 2 de 4 edições

Este caderno didático originou-se a partir da pesquisa de doutorado de Maurício Ramos Lutz, orientada por José Carlos Pinto Leivas e realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática da Universidade Franciscana (UFN) – Santa Maria/RS.

Agradecemos a todos os envolvidos que disponibilizaram seus esforços e seu conhecimento para auxiliar no desenvolvimento deste trabalho: a Universidade Franciscana, que possibilitou o estudo, o Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar) – Campus Alegrete, no que foi aplicada a investigação constante da tese.

Para acessar a tese na íntegra acesse o link abaixo e pesquise pelo nome do autor ou pelo título “Possibilidade de inserção da Geometria Fractal na licenciatura em Matemática do IFFar”.

<http://www.tede.ufn.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/903>

Dimensão fractal

Este segundo caderno didático apresenta uma continuação do que foi publicado no primeiro e origina-se da tese de doutorado do primeiro autor, a qual foi concluída no ano de 2020, em que abordou uma geometria não euclidiana, a saber, a GEOMETRIA FRACTAL. Desta feita, traz-se aqui atividades tratando de alguns fractais, sugestões de construções e obtenção das respectivas dimensões, um dos aspectos que diferenciam tal geometria da Geometria Euclidiana.

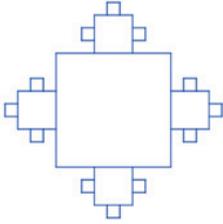
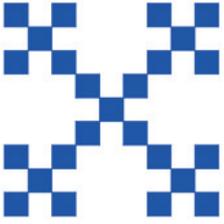
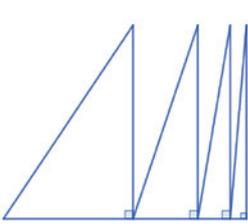
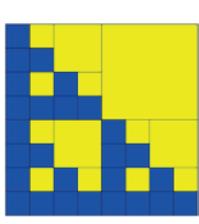
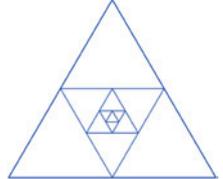
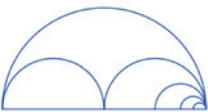
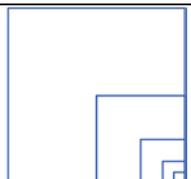
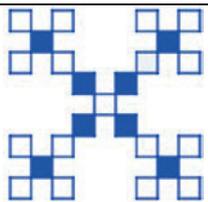
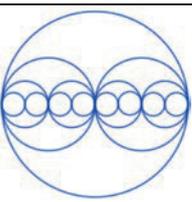
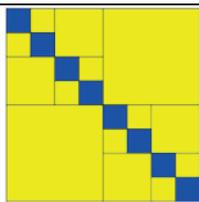
Objetivos:

- Identificar fractais a partir de suas respectivas imagens;
- Relacionar a cronologia de fractais;
- Definir alguns fractais clássicos;
- Determinar a fórmula da dimensão fractal;
- Calcular a dimensão de alguns fractais.

Atividade 1 – Reconhecer fractais e suas respectivas definições

A partir da análise do Quadro 1, marque com x quais imagens representam fractais e justifique sua escolha.

Quadro 1 – Figuras geométricas

 <p>a. ()</p>	 <p>b. ()</p>	 <p>c. ()</p>	 <p>d. ()</p>
 <p>e. ()</p>	 <p>f. ()</p>	 <p>g. ()</p>	 <p>h. ()</p>
 <p>i. ()</p>	 <p>j. ()</p>	 <p>k. ()</p>	 <p>l. ()</p>

Fonte: autoria própria.

Imagens que são fractais: b, d, e, g, i, k, l¹.

Justificativa: As imagens selecionadas são fractais, pois as suas partes se assemelham ao seu todo sob algum aspecto.

A partir da devolutiva dos alunos com as respostas e justificativas, apresentar uma definição para fractal com base em autores/pesquisadores sobre o assunto. Exemplo:

- “Os fractais são formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores” (STEWART, 1996, p. 12);

- “Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos”. (FEDER, 1988, p. 11, tradução nossa);

- Fractais são entes que constituem uma imagem de si próprios em cada uma de suas partes, sendo elas semelhantes e definindo assim a propriedade de autossimilaridade (BARBOSA, 2005).

Atividade 2 – Fractais clássicos, seus precursores e a dimensão fractal

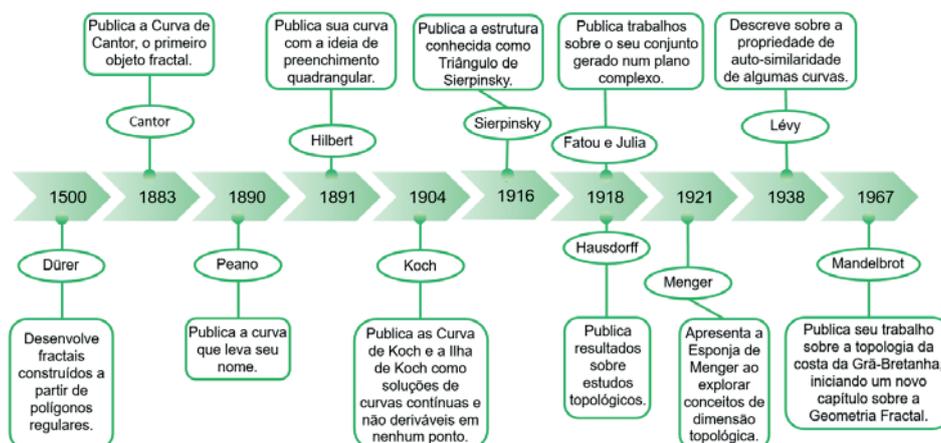
A atividade 2 é expositiva e dialogada com os alunos, sendo apresentada, no primeiro momento, a cronologia dos fractais clássicos e seus precursores; no segundo momento, conjuntamente, é reconstruída a fórmula da dimensão fractal.

Fractais clássicos e seus precursores

Apesar do termo Geometria Fractal ter sido criado por Mandelbrot, na década de 70, diversos estudos antecederam essa época e vários objetos matemáticos, atualmente, são considerados fractais. Para um melhor entendimento, traça-se uma breve linha cronológica (Figura 1), com base nos trabalhos de Rabay (2013) e Neto (2015), relatando autoria e obra de acordo com o respectivo ano de publicação.

¹ As escritas em vermelho ao longo do texto correspondem às respostas esperadas.

Figura 1 – Linha cronológica da Geometria Fractal



Fonte: autoria própria.

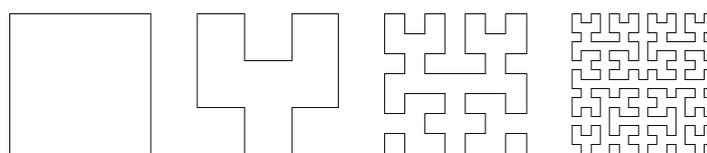
A seguir, são analisados os aspectos estruturais de alguns objetos fractais que foram os pioneiros no decorrer da história, os quais constituem o início da Geometria Fractal e seus precursores.

Curva de Hilbert

David Hilbert (1862–1943) foi um matemático alemão cuja maior contribuição à Matemática, segundo Barbosa (2005), foi organizar a Geometria Euclidiana na forma axiomática.

A Curva de Hilbert, descoberta em 1891 (Figura 2), percorre todos os pontos de um quadrado. Assim, ela pertence a uma família das curvas de Peano. Entretanto, essa curva possui pequenas diferenças quando comparada à de Peano. A primeira dessas diferenças é que, a cada iteração no seu processo recursivo, a curva preenche quadrados menores, mas nunca se autointerceptando. Outra característica é que seu comprimento é infinito (PAIXÃO, 2014).

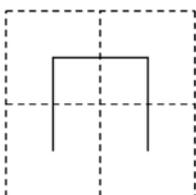
Figura 2 – Curva de Hilbert



Fonte: autoria própria.

Para realizar a construção deste fractal, seguiu-se o relatado por Negri (2014). Primeiramente (Etapa 1), toma-se um quadrado de lado l , formando-se 4 quadrados ao ligar os pontos médios de seus lados opostos. Após, une-se os pontos centrais desses quadrados, formando-se a curva com 3 segmentos consecutivos, como apresentada na Figura 3.

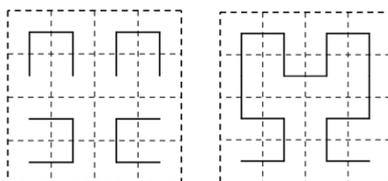
Figura 3 – Etapa 1 da construção Curva de Hilbert



Fonte: autoria própria.

Na segunda parte da construção (Etapa 2) representada na Figura 4, cada um dos 4 quadrados pequenos é substituído por outros 4 quadrados. Logo após, são ligados os pontos centrais dos 16 novos quadrados, como feito na etapa anterior.

Figura 4 – Etapa 2 da construção da Curva de Hilbert



Fonte: autoria própria.

Percebe-se que rotações convenientes são realizadas de forma que todos os pontos centrais ficam interligados, sem que exista intersecção da curva. Esse processo é repetido indefinidamente, de forma que a origem da curva sempre ocupe o canto inferior esquerdo, e sua extremidade fique no canto inferior direito, como pode ser visto na Figura 4. Segundo Mendonça (2014), se continuar esse processo de iteração n vezes, tem-se 4^n quadrados e o comprimento da curva é dado por $(4^n - 1) \left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Tapete de Sierpinsky

O Tapete de Sierpinsky é uma variação do Triângulo de Sierpinsky e, sendo assim, para a construção do Tapete de Sierpinsky (Figura 5), utiliza-se a mesma técnica

de construção do Triângulo de Sierpinsky, porém, a figura geométrica utilizada agora é um quadrado em vez do triângulo.

Figura 5 – Tapete de Sierpinsky



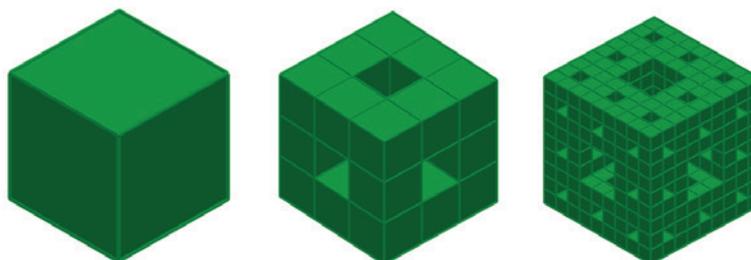
Fonte: autoria própria.

Barbosa (2005) partiu de um quadrado, dividindo-o em nove pequenos quadrados congruentes e eliminando o central. Após essa etapa, aplica-se esse mesmo procedimento em cada um dos oito quadrados restantes e, assim, sucessivamente e iterativamente. A cada nova iteração, a quantidade de quadrados fica multiplicada por oito, e a medida do lado é $\frac{1}{3}$ da medida do lado do quadrado anterior. Repetindo esse processo n vezes, tem-se a formação de 8^n quadrados de $\frac{1}{3^n}$ da medida da aresta do quadrado inicial.

Esponja de Menger

Segundo Negri (2014), a Esponja de Menger (Figura 6) foi criada pelo matemático austríaco Karl Menger (1902–1985), em 1921. Ela é uma generalização tridimensional do Tapete de Sierpinsky, sendo sua construção baseada na mesma forma, porém o processo iterativo é feito a partir de um cubo.

Figura 6 – Esponja de Menger



Fonte: autoria própria.

Montenegro (1991) apresenta o processo de construção da Esponja de Menger em duas etapas, considerando um cubo de aresta l . Na primeira, divide-se o cubo em 27 cubos menores e congruentes, cada um com uma aresta igual a $1/3$ da aresta inicial em cada face do cubo (processo similar ao do Tapete de Sierpinsky). Remove-se o cubo central e os 6 cubos que têm uma face localizada no meio de cada face do maior. A segunda etapa consiste em repetir o processo da etapa 1 nos 20 cubos restantes e, assim, sucessivamente.

Observa-se que, a cada nova iteração, a quantidade de cubos fica multiplicada por 20, e a medida da aresta é $1/3$ da medida da aresta do cubo anterior. Portanto, ao repetir-se n vezes o processo, tem-se a formação de 20^n cubos com arestas medindo $\frac{1}{3^n}$ da aresta do cubo inicial.

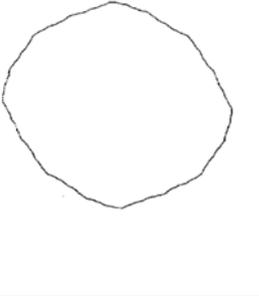
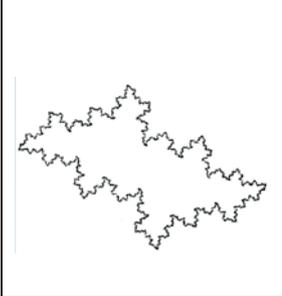
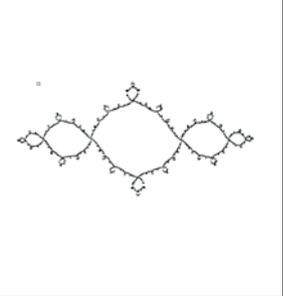
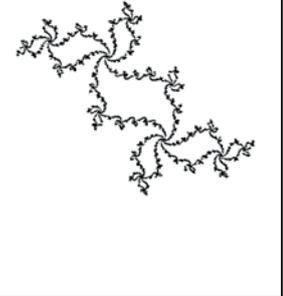
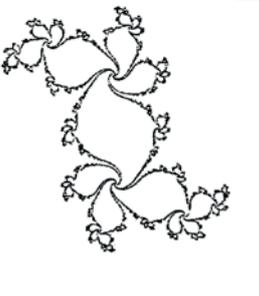
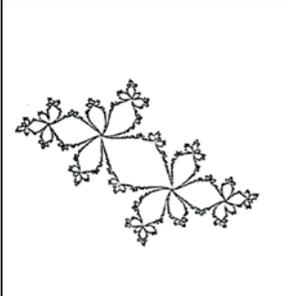
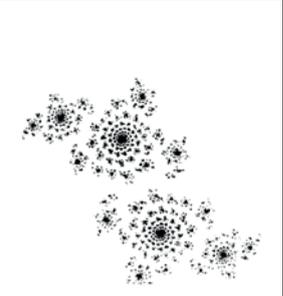
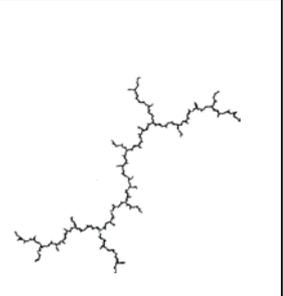
Conjunto de Fatou e Julia

No período da Primeira Guerra Mundial, em 1918, os matemáticos franceses Pierre Fatou (1878–1929) e Gaston Julia (1893–1978) publicaram trabalhos sobre o estudo de propriedades iterativas envolvendo números complexos estudados sem o auxílio computacional. É interessante destacar que Fatou e Julia, embora fossem da mesma época, não desenvolveram seus trabalhos em conjunto. Lamentavelmente, esses estudos permaneceram esquecidos até serem recuperados por Mandelbrot ao usá-los como base para o desenvolvimento do que hoje se denomina Conjunto de Mandelbrot, cuja representação gráfica se tornou símbolo da Geometria dos Fractais. (BARBOSA, 2005).

Segundo Peitgen, Jürgens e Saupe (2004), Fatou e Julia exploraram o que ocorre com a imagem no plano complexo quando se emprega, iterativamente, a função $f(z) = z^2 + c$ para um z complexo inicial e c , um complexo constante. Cabe salientar, para melhor compreensão, que a construção parte com um $z_0 = a_0 + ib_0$ e cada iteração parte de um z_n conhecido para obter $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$. Relatam os autores que a sequência de pontos deve ter uma das duas características: na primeira, as órbitas convergem para a origem; e na segunda, essas órbitas tendem ao infinito. A Figura 7 apresenta algumas amostras do Conjunto de Julia.

Figura 7 – Algumas amostras do Conjunto de Julia para a função quadrática

$$f(z) = z^2 + c$$

			
$c = -0,1 + 0,1i$	$c = -0,5 + 0,5i$	$c = -1 + 0,05i$	$c = -0,2 + 0,75i$
			
$c = 0,25 + 0,52i$	$c = -0,5 + 0,55i$	$c = 0,66i$	$c = -i$

Fonte: adaptado de Falconer (2003, p. 214).

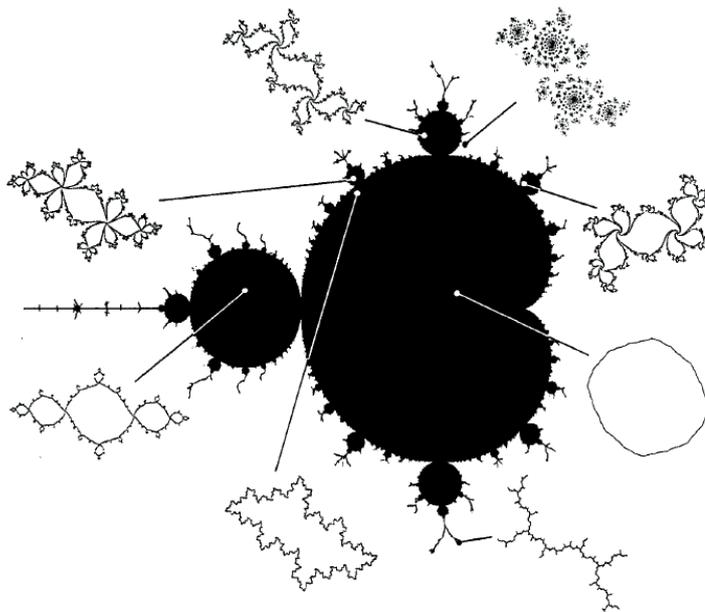
Conjunto de Mandelbrot

Os trabalhos de Fatou e Julia, como relata Barbosa (2005, p. 45), “forneceram as bases matemáticas para Mandelbrot, que soube aproveitá-los e desenvolvê-los com recursos computacionais para seu conjunto conhecido hoje como Conjunto de Mandelbrot”. Negri (2014) e Moura (2016) relatam que, no final da década de 70 (1979), Mandelbrot tentou elaborar uma forma de generalizar os Conjuntos de Julia, no caso de funções quadráticas, com a variação do parâmetro c . Utilizaram isso para desenhar as regiões estudadas por Fatou e Julia de maneira a verificar o comportamento caótico que produz a estrutura fractal. Ao referir ao termo “comportamento caótico”, se está atribuindo-o ao fenômeno de imprevisibilidade.

Dalpiaç (2016), em sua pesquisa, resume o Conjunto de Mandelbrot como uma expressão matemática essencial para a construção de imagens dadas pela fórmula iterativa no plano do número complexos ($z = x + iy$) expressa por $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$. Nela, $c = a + ib$ é uma constante complexa que deve partir de um certo valor para z_0 . O autor conclui que o Conjunto de Mandelbrot é o conjunto dos valores de c tais que, para $z_0 = 0$, a sequência de valores definida recursivamente permanece limitada. A

Figura 8 apresenta o Conjunto de Mandelbrot, com a variação de c e seus correspondentes Conjuntos de Julia, apresentado anteriormente na Figura 7.

Figura 8 – Conjunto de Mandelbrot apresentando vários valores para c e seus correspondentes Conjuntos de Julia



Fonte: Falconer (2003, p. 213).

Dimensão fractal ou dimensão Housdorff-Besicovitch

Uma característica dos fractais é sua dimensão. Ela difere da Topológica e da Euclidiana, pois seu número não é necessariamente inteiro. Esse número representa o grau de ocupação de um fractal no espaço, estando relacionado com o seu grau de irregularidade.

Segundo Lesmoir-Gordon (2010, p. 10-11, tradução própria), o conceito de dimensão, nos moldes da Geometria Euclidiana, diz que:

- (a) Um segmento de reta tem dimensão 1, pois entende-se que qualquer ponto A do segmento pode ser especificado usando apenas uma coordenada, isto é, um ponto A está a uma distância de x unidades de uma extremidade do segmento.
- (b) Um quadrado tem dimensão 2, isto é, qualquer ponto A do quadrado pode ser determinado usando apenas duas coordenadas (x, y) , de sorte que x é a distância de A até o lado esquerdo e y é a distância de A até o lado inferior do quadrado.
- (c) Um cubo tem dimensão 3, pois entende-se que qualquer ponto A do cubo pode ser especificado usando apenas três coordenadas (x, y, z) , onde x, y e z representam, respectivamente, as distâncias de A até a face esquerda, a face inferior e a face traseira.

Nessa perspectiva, um ponto, isoladamente, não tem direções, portanto tem dimensão zero. Uma linha tem uma única direção, logo, tem dimensão 1; no quadrado, encontram-se duas direções, portanto, tem dimensão 2; no cubo, tem-se três direções, assim, sua dimensão é 3. Nesse viés, a dimensão de um objeto é a quantidade de coordenadas necessárias para representar, de forma única, um ponto do objeto. Com isto, ela é um número inteiro positivo. No decorrer dessa oficina, ver-se-á que a dimensão de um fractal também pode ser um número real positivo e não somente um número inteiro positivo. Mas será um número real positivo qualquer? Isso será esclarecido mais adiante.

O número que representa a dimensão fractal pode ser calculado pelo método da Dimensão de Hausdorff-Besicovitch, em homenagem aos matemáticos Felix Hausdorff (1868-1942) e Abram Samoilovitch Besicovitch (1891–1970), considerados fundadores da Topologia Moderna, os quais contribuíram para os trabalhos de Mandelbrot. Para Reis (2014a, p. 34), “Define-se então dimensão de uma curva fractal como sendo um número que caracteriza a maneira na qual a medida do comprimento entre dois pontos aumenta à medida que a escala diminui”.

Para Mandelbrot (1989, p. 14), a dimensão fractal pode ser concebida com a noção de

[...] curvas planas muito irregulares, que sua dimensão fractal se situa entre 1 e 2, a respeito de certas superfícies muito enrugadas e cheias de pregas, que a sua dimensão fractal está entre 2 e 3 e, enfim, conjuntos de pontos sobre uma linha cuja a dimensão fractal está entre 0 e 1.

Complementando a concepção de Mandelbrot, para dimensão fractal, Capra (2006, p. 119) explica: “Quanto mais denteados forem os contornos de um relâmpago ou as bordas de uma nuvem e, quanto mais acidentadas forem as formas de uma linha litorânea ou de uma montanha, mais altas serão suas dimensões fractais”.

Sendo assim, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch permite calcular a dimensão dos fractais que, com a ampliação ou redução, permanecem autossemelhantes. Para entender esse processo de cálculo da dimensão fractal, utilizar-se-á figuras geométricas já conhecidas da Geometria Euclidiana, por exemplo, um segmento de reta, um quadrado e um cubo, até se chegar à generalização da dimensão.

Toma-se um segmento de reta, divide-se em 2, 3 e 4 partes e realizam-se algumas análises, conforme o Quadro 2.

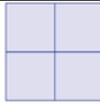
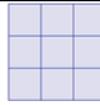
Quadro 2 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um segmento

Figura obtida	Número de divisões (ou número de segmentos obtidos) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^1}$
	1	1	$1 = \frac{1}{1^1}$
	2	$1/2$	$2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1}$
	3	$1/3$	$3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^1}$
	4	$1/4$	$4 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^1}$

Fonte: autoria própria.

Toma-se um quadrado de lado C e se divide cada lado em 2, 3 e 4 partes para realizar algumas investigações, conforme apresentado no Quadro 3.

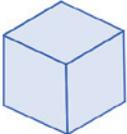
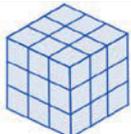
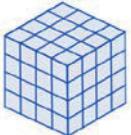
Quadro 3 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um quadrado

Figura obtida	Número de divisões (ou número de peças geradas) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^2}$
	1	1	$1 = \frac{1}{1^2}$
	4	$1/2$	$4 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$
	9	$1/3$	$9 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$
	16	$1/4$	$16 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$

Fonte: autoria própria.

Para finalizar os exemplos, toma-se um cubo de aresta C e se divide em 2, 3 e 4 partes para realizar o estudo, conforme apresentado no Quadro 4.

Quadro 4 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um cubo

Figura obtida	Número de divisões (ou número de peças geradas) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^3}$
	1	1	$1 = \frac{1}{1^3}$
	8	1/2	$8 = \frac{1}{(\frac{1}{2})^3}$
	27	1/3	$27 = \frac{1}{(\frac{1}{3})^3}$
	64	1/4	$64 = \frac{1}{(\frac{1}{4})^3}$

Fonte: autoria própria.

Analisando a divisão do segmento, do quadrado e do cubo, pode-se observar que a quantidade N de partes semelhantes ao todo é igual ao inverso do coeficiente de redução (r) elevado à dimensão (D) da figura. Portanto,

$$N = \frac{1}{r^D} = \left(\frac{1}{r}\right)^D.$$

Na Geometria Euclidiana, a dimensão (D) de uma reta, ou segmento de reta é 1, enquanto quadrados são figuras bidimensionais, portanto sua dimensão é igual a 2. Por sua vez, cubos são figuras tridimensionais, logo sua dimensão é igual a 3.

Aplicando-se logaritmo em ambos os lados da igualdade $N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$, obtém-se, após algumas manipulações algébricas, a igualdade

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}.$$

Pela definição, em Geometria Euclidiana, a dimensão de um objeto pertence ao conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$. Pela definição de Hausdorff-Besicovitch, a dimensão fractal

pertence ao intervalo $[0, 3]$ e, conforme estabelecido por Mandelbrot (1977), a dimensão fractal deve refletir a textura, consistência, completude e densidade do ente.

Assim, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch é válida para calcular a dimensão de quaisquer objetos, sejam eles figuras euclidianas, com dimensão inteira positiva, ou figuras fractais, com dimensão fracionária. Cabe destacar que nem sempre a dimensão dos fractais é fracionária, mas dimensão fracionária é uma característica que as figuras euclidianas não possuem.

Atividade 3 – Calculando as dimensões fractais

A atividade busca determinar a dimensão de alguns fractais que foram abordados até o momento neste produto educacional. Para tanto, utilizar-se-á a Planilha e a Janela CAS (*Computer Algebra System*) do *GeoGebra* para preencher o Quadro 5. A turma deve ser dividida em dois grupos, sendo que um utilizará a Planilha e o outro a Janela CAS. Após concluírem, os grupos apresentam os resultados encontrados.

Quadro 5 – Dimensões de alguns fractais

Fractal	Número de divisões N	Fator de redução r	Dimensão fractal $D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$
Conjunto de Cantor	2	1/3	$D \cong 0,631$
Curva de Peano	9	1/3	$D = 2$
Curva de Hilbert	4	1/2	$D = 2$
Curva de Koch	4	1/3	$D \cong 1,262$
Triângulo de Sierpinsky	3	1/2	$D \cong 1,585$
Tapete de Sierpinsky	8	1/3	$D \cong 1,893$
Tetraedro de Sierpinsky	4	1/2	$D = 2$
Esponja de Menger	20	1/3	$D \cong 2,727$

Fonte: autoria própria.

Na Figura 9, apresentam-se os valores que foram inseridos para a determinação da dimensão fractal. Para facilitar o cálculo, insere-se duas colunas auxiliares para determinar o $\log N$ e o $\log (1/r)$, para posterior resolução da dimensão fractal. No *GeoGebra*, a sintaxe de logaritmo na base 10 pode ser dada de três formas: a primeira, diretamente com o comando $\lg(x)$; a segunda, com o comando $\log_{10}(x)$; e a última, com o comando $\log(b, x)$, onde b é a base e x é o logaritmando.

Acredita-se que essas atividades possam ser realizadas com estudantes do Ensino Médio, Superior e, especialmente, na formação de professores de Matemática de modo que novos conceitos e geometrias possam, aos poucos, fazerem parte do conhecimento dos estudantes.

Há de ser considerado que a Geometria Fractal está sendo importante, dentre outras geometrias, para o avanço dos conhecimentos da tecnologia dos celulares, GPS, etc.

Assim, este segundo caderno didático, constituinte dos quatro resultantes da tese de doutorado do primeiro autor, vem ao encontro das pesquisas do segundo autor e orientador da tese do primeiro, que juntos buscam a melhoria do ensino de Geometria.

Referências

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autentica, 2005.

CAPRA, Fritjof. **A teia da vida: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos**. Tradução de Newton Roberval Eichenberg. São Paulo: Cultrix, 2006.

DALPIAZ, Marcos Roberto. **Um estudo sobre fractais: origem e proposta didática para aplicação em aula**. 2016. 74 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2698/1/CT_PROFMAT_M_Dalpia2C%20Marcos%20Roberto_2016.pdf>. Acesso em: 23 set. 2017.

FALCONER, Kenneth. **Fractal geometry: mathematical foundations and applications**. 2. ed. New York: Wiley, 2003.

FEDER, Jens. **Fractals**. New York: Plenum Press, 1988.

LESMOIR-GORDON, Nigel. **The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals**. London: Springer, 2010.

MANDELBROT, Benoit B. **Objectos Fractais**. Lisboa: Gradiva, 1989.

MENDONÇA, Fernando Antônio Cavalcante. **Aplicações da Geometria Fractal: uma proposta didática para o Ensino Médio**. 2014. 160 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016. Disponível em: <http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/2412/1/Aplica%20C3%A7%C3%B5es%20da%20geometria%20fractal_%20uma%20proposta%20did%C3%A1tica%20para%20o%20ensino%20m%C3%A9dio.pdf>. Acesso em: 23 set. 2017.

MONTENEGRO, Gildo Aparecido. **Geometria Descritiva**. Vol. 1. Edgard Blücher: São Paulo, 1991.

MOURA, Delano Vieira de. **Introdução à Geometria Fractal**. 2016. 72 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2016. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94351>. Acesso em: 23 set. 2017.

NEGRI, Marília Gomes. **Introdução ao estudo dos fractais**. 2014. 60 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/3879>>. Acesso em: 23 set. 2017.

NETO, Antonio Furtado Landim. **Tópicos da Geometria Fractal e aplicações**. 2015. 96 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=73319>. Acesso em: 23 set. 2017.

PAIXÃO, Rogério da Silva. **O ensino de fractais no Ensino Fundamental**. 2014. 68 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014. Disponível em: <http://www.profmtat.uem.br/dissertacoes-2/Rogério_paixao.pdf>. Acesso em: 23 set. 2017.

PEITGEN, Heinz-Otto; JÜRGENS, Hartmut; SAUPE, Dietmar. **Chaos and Fractals: New Frontiers of Science**. 2. ed. New York: Springer, 2004.

RABAY, Yara Silvia Freire. **Estudo e aplicações da Geometria Fractal**. 2013. 103 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em: <<http://tede.biblioteca.ufpb.br/handle/tede/7651#preview-link0>>. Acesso em: 23 set. 2017.

REIS, Walter. **Geometria Fractal: Uma abordagem voltada para o Ensino Médio**. 2014. 125 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2014a. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1544>. Acesso em: 23 set. 2017.

STEWART, Ian. **Os Números da Natureza: a realidade irreal da imaginação matemática**. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

Sobre os autores



Maurício Ramos Lutz

É doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana (UFN), mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), especialista Matemática, Mídias Digitais e Didática pela UFRGS e licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Atualmente é professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico no Instituto Federal Farroupilha (IFFar). Lattes: <<http://lattes.cnpq.br/5099730179818142>>.



José Carlos Pinto Leivas

É doutor em Educação (Matemática) pela Universidade Federal do Paraná (UFPR), mestre em Matemática Pura e Aplicada pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas (UCPEL). Atualmente é professor e pesquisador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UFN. Lattes: <<http://lattes.cnpq.br/0314545667166824>>.