Maria A. da Conceição dos Santos
Victor Hugo Ricco Bone Antunes
Vitor Marques Pereira
Clodis Boscarioli

MECÂNICA

MOMENTO LINEAR E SUA CONSERVAÇÃO

PPGECEM
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

Apresentação

Este *e-book* interativo aborda o conteúdo de Momento Linear, fundamental a alunos de Física ao estudarem mecânica, apresentando diferentes recursos visuais, como fotos, vídeos, experimentos via *software*, além de atividades para autoavaliação pelos estudantes.

Elaborado em *Microsoft PowerPoint®*, seu design foi concebido para ser utilizado por qualquer discente que tenha acesso a um *smartphone*, *tablet, notebook* ou computador e a *Internet*, pode ser indicado tanto para alunos que desejam revisar o conteúdo ou ainda, para o primeiro contato, em uma estratégia de aula invertida, tanto no ensino presencial, remoto ou distância, a depender da estratégia adotada pelo professor.

Esse *e-book*, tido como um objeto de aprendizagem, é fruto da disciplina Tendências em Educação Matemática II: Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática, ofertada no ano letivo de 2020 no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (PPGECEM/Unioeste), que revisado, é lançado e disponibilizado à comunidade em 2021.

Esperamos que esse material seja útil em processos de ensino e aprendizagem do conteúdo abordado e, que sirva de inspiração à criação de outros recursos que abarquem diferentes mídias.

Os autores

Como citar este *e-book*:

SANTOS, M. A. C., ANTUNES, V. H. R. C., PEREIRA, V. M., BOSCARIOLI, C. **Mêcanica: Momento Linear e sua conservação**, 2021. E-book (30 p). Disponível em: <https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/599368>. Acesso em: DD mês. AAAA.

Sobre o e-book

Podcast: clique para ouvir!

CONTEÚDO

- Momento linear
- Centro de massa
- Conservação de momento
- Colisões

PÚBLICO-ALVO

- Discentes de Física
- Docentes de Física (para uso com seus discentes)

RECURSOS NECESSÁRIOS

- Computador com Windows, leitor de .PDF, navegador (com *flash* ativado) e celular.

PRÉ-REQUISITOS

- **Do cálculo:** noções básica de derivada, integral e vetores
- **Da Física:** MRUV (queda livre), leis de Newton e energia cinética

ATIVIDADES

- Explicação teórica do conteúdo
- Vídeos explicativos
- Experimentos

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO: A FÍSICA NO DIA A DIA

Imagine duas situações. Na primeira, você dirige um caminhão a uma velocidade de $100\ ^{km}/_{h}$ e... de repente, cruza um carro na sua frente. O evento se desenvolve de modo que você se vê obrigado a, repentinamente, frear até parar.

Agora, em uma segunda situação, similar, você dirige um carro a uma velocidade de $100\ ^{km}/_{h}$ e... de novo (!)... um carro cruza na sua frente de modo que o leva a frear até parar.

Figura 1: *Figura de apoio a dois pontos de vista de um evento possível de ocorrer no trânsito.*
Fonte: https://bit.ly/2A0qA83

PARA REFLETIR:

Ao acionar os freios em cada uma das situações, em qual delas será mais fácil parar?

Figura 2: *Um jogo de bilhar e uma questão a se pensar.*
Fonte: https://bit.ly/2A26B8P

Um pouco mais de Física noutro lugar, longe das pistas.

POR QUÊ É QUE É ASSIM?

Você já se perguntou o motivo de, em alguns jogos de bilhar, a bola branca ser maior ou possuir mais massa que as demais bolas?

Quando começamos a compreender a essência das perguntas acima iniciamos a construção de um conceito fundamental da Mecânica, o de “Momento Linear”, que no Ensino Médio popularizou-se como “Quantidade de Movimento”.

Vamos lá!

Neste *e-book* abordaremos o conceito de Momento Linear, e outros conceitos igualmente importantes, permitindo-lhe relacioná-los nas mais variadas e importantes situações do cotidiano.

1. Momento Linear

1.1. Momento Linear e Centro de Massa (CM)

Para nos servir de ponto de partida, pensemos em duas bolas de um jogo de bilhar, uma bola branca, da massa m_b, e outra preta, de massa m_p $(m_b > m_p)$.

As bolas branca e preta compõem o nosso sistema físico[1], sistema sobre o qual vamos empregar os conceitos:

- Momento Linear ($\vec{p}$)
- Centro de Massa (CM)

Figura 3: *Bolas de um jogo de bilhar.*
Fonte: https://bit.ly/36oYBel

[1]*Emprega-se o termo "sistema físico" quando deseja-se dizer que nenhum agente externo, não participante da constituição do referido sistema, influi sobre sua dinâmica.*

Os momentos lineares $\vec{p}$ das bolas ("p" minúsculo) expressaremos assim:

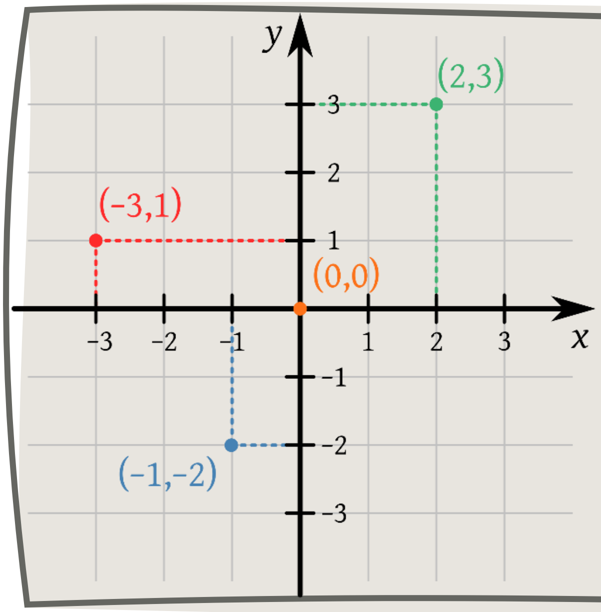
- Para a bola branca, $\vec{p}_b = m_b \cdot \vec{v}_b$
- Para a bola preta, $\vec{p}_p = m_p \cdot \vec{v}_p$

sendo $\vec{v}_b$ e $\vec{v}_p$ as velocidades da bola branca e preta, respectivamente.

O momento linear de um corpo é uma grandeza vetorial, sendo o produto de sua massa pela sua velocidade. A unidade de momento linear, no SI, é o $kg \cdot {}^{m}/_{s}$. É correto dizer que um pato de massa $5\,kg$ que voa a $10\ {}^{m}/_{s}$ possui um momento linear de $50\ kg \cdot {}^{m}/_{s}$.

O Centro de Massa (CM) é, neste momento, um conceito intuitivamente simples. Na nossa situação em análise, é o mesmo que imaginarmos um ponto sobre o qual toda a massa de um corpo se concentra, de modo que a descrição de seus respectivos movimentos sejam expressos por meio de equações matemáticas[2], considerando-os pontos no espaço.

Por estarmos considerando bolas, ou seja, esferas, figuras geométricas simétricas, a massa de cada uma delas encontra-se em seu respectivo Centro Geométrico (CG). Noutras palavras, CM e CG, aqui, coincidem.



[2]*Na Física, equações matemáticas correlacionam variáveis com outras, por exemplo, posições, velocidades e acelerações no espaço, variáveis dependentes, com um tempo t, uma variável independente.*
No plano cartesiano da Figura 4, dizemos que o ponto $(0,0)$ é a origem do sistema de coordenadas.

Figura 4: *Plano cartesiano com pontos plotados.*
Fonte: https://bit.ly/2znNoOQ

Por outro lado, é possível também fazermos uma análise segundo o momento linear $(\vec{P})$ do sistema ("P" maiúsculo) e de seu respectivo CM, ou seja, o sistema composto pelas nossas duas bolas possui um momento linear e um CM associados, valores válidos para o conjunto, não para seus elementos individuais.

Expressamos o momento linear $\vec{P}$ do sistema somando-se os momentos lineares dos corpos que o constituem. Em nosso caso,

$$\vec{P} = \vec{p}_b + \vec{p}_p$$

$$\boldsymbol{\vec{P} = m_b \cdot \vec{v}_b + m_p \cdot \vec{v}_p}$$

Equação 1.1: *Momento linear do sistema, a soma dos momentos lineares das bolas branca e preta.*

Por sua vez, o CM de um sistema pode não nos ser um conceito simples, como nos foi para as bolas individuais.

As expressões matemáticas das coordenadas do CM de um sistema num plano são expressas por:

$$x_{CM} = \frac{x_b \cdot m_b + x_p \cdot m_p}{M}$$

onde x_b e x_p correspondem à coordenada x do CM da bola branca e ao CM da bola preta, respectivamente.

$$\mathrm{y}_{CM} = \frac{\mathrm{y}_b \cdot m_b + \mathrm{y}_p \cdot m_p}{M}$$

onde y_b e y_p correspondem à coordenada y do CM da bola branca e ao CM da bola preta, respectivamente.

M é a massa total do sistema,

$$M = m_b + m_p$$

Supomos um sistema num plano porque, em geral, numa partida de bilhar entre pessoas sem muitas habilidades, não ocorrem jogadas nas quais as bolas saltem, de modo que a componente z do vetor posição estamos supondo constante e nula. Caso contrário, definiríamos z_{CM} tal como definimos x_{CM} e y_{CM}.

Podemos expressar uma equação geral para o CM (uma equação para as coordenadas do CM) válida para sistemas quaisquer de n partículas no espaço tridimensional:

$$(x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}) = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \, , \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \, , \sum_{i=1}^{n} m_i z_i\right)$$

$$\vec{\mathrm{R}}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

Equação 1.2: *Posição do centro de massa válido para qualquer sistema, sendo n o número de partículas nele presentes.*

realizando-se o somatório de cada um dos produtos $m\vec{r}$, da partícula 1 até a n-ésima partícula, expressa-se a posição $\vec{\mathrm{R}}$ do CM do sistema.

1.2 Conservação do Momento Linear

Com um pequeno esforço, é possível imaginar que não havendo quaisquer forças externas $\left(\vec{F}_e = \vec{0}\right)$ sobre as bolas e nem colisões entre as mesmas (continuamos nossas exemplificações com as mesmas bolas de um jogo de bilhar), o movimento de seus CM não se alterará.

Por outro lado, e se se mantiverem nulas as forças externas, mas permitindo que ocorram colisões entre elas, o que muda no momento linear de cada uma delas?

Foi para isso que definimos antes o CM e o momento linear de um sistema! Não havendo forças externas atuando sobre o sistema (ou se a soma de todas, que sobre o sistema agirem, resultar numa força nula), o momento linear do sistema se conserva. Vejamos o porquê: observe que a segunda lei de Newton $(F_{res} = m \cdot a)$ é a derivada temporal de nossa definição de Momento Linear. Se

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{res}} = \frac{\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{P}}}{\boldsymbol{dt}}$$

Equação 1.3: *Segunda lei de newton aplicada a um sistema, escrita a partir de nossa definição de momento linear.*

nota-se que para o caso de

$$\vec{F}_{res} = \vec{0}$$

e sendo

$$\begin{cases} \vec{P}_A = m_b \cdot \vec{v}_{bA} + m_p \cdot \vec{v}_{pA} = M \cdot \vec{V}_{CMA} \\ \vec{P}_D = m_b \cdot \vec{v}_{bD} + m_p \cdot \vec{v}_{pD} = M \cdot \vec{V}_{CMD} \end{cases}$$

os (vetores) momentos dos corpos que compõem o sistema em análise e o (vetor) momento associado ao sistema, de massa M e velocidade $\vec{V}$ de seu CM, antes (A) e depois (D) das colisões entre as bolas, verifica-se que

$$\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{D}}$$

Equação 1.4: *Princípio da conservação do momento linear $\vec{P}$, sempre que $\vec{F}_e = \vec{0}$.*

As velocidades do sistemas podem até variar, mas o momento linear antes e depois da colisão das esferas permanecem constante, conservando o momento linear sempre que $\vec{F}_e = \vec{0}$.

Propomos agora que faça observações a partir do uso de um simulador

SIMULADOR: CLIQUE PARA ACESSAR!

ATENÇÃO: *No simulador, selecione a caixa "Centro de massa" e clique em rodar. Desejamos que você observe o movimento do x amarelo ( ).*

$$M \cdot \vec{V}_{xCMA} = M \cdot \vec{V}_{xCMD}$$

O que daí decorre em velocidade $\vec{V}$ no eixo x do CM do sistema antes (A) e depois (D) assim relacionando-se

$\vec{V}_{xCMA} = \vec{V}_{xCMD}$, implicando

Em relação ao eixo y, de $\boxed{m_b \cdot v_{bxA} + m_p \cdot v_{pxA} = m_b \cdot v_{bxD} + m_p \cdot v_{pxD}}$

$$M \cdot \vec{V}_{YCMA} = M \cdot \vec{V}_{YCMD}$$

Mais uma vez, daí decorre em velocidades $\vec{V}$ no eixo y do CM do sistema antes (A) e depois (D) assim relacionando-se

$\vec{V}_{YCMA} = \vec{V}_{YCMD}$, implicando $\boxed{m_b \cdot v_{byA} + m_p \cdot v_{pyA} = m_b \cdot v_{byD} + m_p \cdot v_{pyD}}$

X_{CM} e Y_{CM} são as coordenadas do CM do sistema.

Com as relações acima entre velocidades e massas, em sistemas onde $\vec{F}_e = \vec{0}$ (*no mundo real, pode-se fazer tal aproximação nos casos em que as interações entre corpos que compõem um sistema forem breves, frações de segundo*), é possível calcular a variável desconhecida nos casos em que ocorrer a conservação do momento linear $\vec{P}$, conhecendo-se os valores das demais.

1.3 IMPULSO ($\vec{J}$)

Analisemos agora a interação entre um taco e uma bola de beisebol, conforme a Figura 4. Vamos tratar ambos os corpos como se fossem partículas, compondo nosso sistema fechado “taco-bola”.

Figura 4: ***C****olisão em nosso sistema taco-bola.*
Fonte: https://youtu.be/VqWwSL4uHCA

O taco impõe uma força sobre a bola e a bola exerce a mesma força, de mesmo módulo, sobre o taco (terceira lei de Newton).
Este é um caso em que

$$\vec{F}_{res} = \vec{0}$$

ou seja,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

implicando em nossa Equação 1.4 ($\vec{P}_A = \vec{P}_D$).

Você pode estar se perguntando:

> Como é que ocorre a variação do momento
> na interação taco-bola, entre o antes e o depois da colisão?

Esta variação ocorre segundo uma grandeza vetorial denominada impulso $(\vec{J})$, associada ao evento de interação entre corpos que colidem e sobre o qual existam apenas forças internas (forças de um sobre o outro).

$$\vec{J} = \vec{F} . \Delta t$$

Equação 1.5: Definição da grandeza impulso $(\vec{J})$, , válido para $\vec{F}$ constante.

No SI, impulso tem a unidade de Newton-segundo $(N \cdot s)$. Sendo o impulso uma grandeza vetorial de mesma orientação que a força $\vec{F}$.

Note que se integrarmos a segunda lei de Newton, escrita na forma

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

obtemos

$$\int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt$$

Equação 1.6: Integrando os membros da equação 1.3.

Do lado esquerdo resulta

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

Do lado direito, identificamos nossa definição de $\vec{J}$, habilitando-nos a obter o impulso em um intervalo de tempo ainda que $\vec{F}$ não seja constante, seja $\vec{F}(t)$:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt$$

Equação 1.6: Definição da grandeza impulso $(\vec{J})$, válido para $\vec{F} = \vec{F}(t)$.

Considerando a força constante da Equação 1.6, retornamos para nossa definição da Equação 1.5.

Relacionando a Equação 1.6 com a Equação 1.7, temos o que chamamos de

TEOREMA DO MOMENTO LINEAR E IMPULSO

$$\vec{J} = \Delta\vec{p}$$

Equação 1.8: *Teorema do momento linear e impulso*

Segundo tal teorema, a variação do momento linear numa colisão é proporcional ao impulso sobre o corpo em análise, seja o taco ou seja a bola de baseball.

Neste momento, é pertinente discorrermos um pouco sobre nossos últimos conceitos a serem abordados, sobre tipos de colisões e seus respectivos coeficientes de restituição.

2. COLISÕES

Para finalizarmos, vamos discorrer um pouco sobre uma das principais aplicações práticas de nosso estudo sobre momento linear. Sabemos que em sistemas isolados ocorre a conversação de momento linear, no entanto, o que podemos inferir sobre energia cinética em tais colisões?

PARA RELEMBRAR:

Energia cinética é uma energia associada ao movimentos de um corpo. Sua forma operacional é

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

de unidade J (joule).

Pensando nisso, temos uma forma de determinar o quanto se mantém da energia inicial de um sistema após sofrer uma colisão com forças internas. Para isso, vamos definir o *coeficiente de restituição* e.

$$e = \frac{\boldsymbol{v_{af}}}{\boldsymbol{v_{ap}}}$$

Equação 2.1: *Definição de coeficiente de restituição.*

onde v_{af} *e* v_{af} são a velocidade relativa de aproximação e de afastamento, respectivamente, entres dois corpos que colidem.

e é uma grandeza adimensional, ou seja, não tem unidade. Seu valor pode variar, em colisões de nosso dia a dia (macroscópicas) de 0 a 1, porém, em colisões atômicas (em aceleradores de partículas) pode-se observar valores maiores do que 1. As colisões entre dois corpos podem ser classificadas segundo o valor de e. Vejamos tais classificações.

2.1. COLISÕES PERFEITAMENTE ELÁSTICAS

Em colisões perfeitamente elásticas (ideais, dificilmente obtidas na prática), não ocorre a dissipação de energia. O valor de e, nestas colisões, é sempre 1.

$$\boldsymbol{v_{af}} = \boldsymbol{v_{ap}}$$
$$e = 0$$

Equação 2.2: *Coeficiente de restituição válido para colisões perfeitamente elásticas.*

2.2. Colisões inelásticas

Nas colisões inelásticas, passíveis de serem observadas em nosso mundo real, ocorre dissipação parcial de energia cinética relativa entre os corpos, de modo que $v_{af} \neq v_{ap}$, com

$$0 < e < 1$$

Equação 2.3: *Coeficiente de restituição válido para colisões inelásticas.*
Obs.: Por força de expressão, mantivemos a denominação (inadequada) de "Equação 2.3".

2.3. Colisões perfeitamente inelásticas

Nas colisões perfeitamente inelásticas, os dois corpos permanecem unidos após a colisão. Assim,

$$\boldsymbol{v_{af} = 0}$$
$$\boldsymbol{e = 0}$$

Equação 2.4: *Coeficiente de restituição válido para colisões perfeitamente inelásticas.*

2.4 Colisões superelásticas

Em aceleradores de partículas, um elétron pode colidir com um átomo ou molécula excitado, de modo que a velocidade de afastamento entre ambos é maior do que a velocidade de aproximação anterior à colisão.

Nestes casos extremos, temos valores de e maiores de 1.

Este último tipo de colisão é extremamente mal difundido. Para saber mais, acesse (MEIRA FILHO; KAMASSURY; MEIRA, 2017): http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0278.

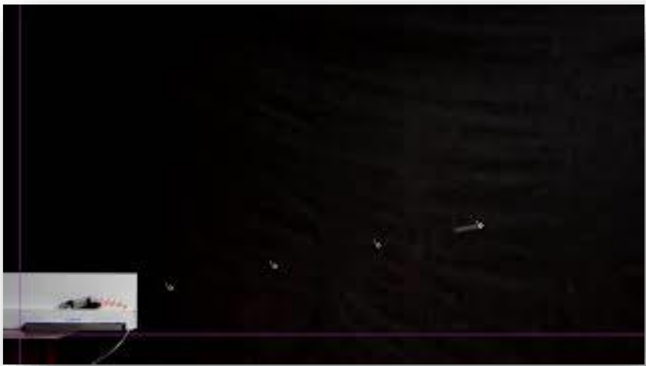
PARA ILUSTRAR O SEGUNDO E O TERCEIRO TIPO DE COLISÕES, SEPARAMOS UM VÍDEO ILUSTRATIVO, CONFIRA.

Vídeo 1: Colisões Perfeitamente Elástica e Perfeitamente Inelástica
Fonte: Física Experimental: Mecânica n. 2

Exemplo de Aplicação da Teoria Em um Vídeo-experimento

Nesta atividade, preparamos uma explosão controlada de forma que dois corpos, uma base de um canhãozinho de álcool e um projétil, nos revele que havendo interações apenas por meio de forças internas em um sistema, o momento linear total do sistema deve ser igual antes e depois da interação (explosão).

Na próxima página apresentamos uma tabela com os valores da massa de cada um dos corpos e suas velocidades, antes da explosão (nulas) e depois a explosão. Apresentamos os dados e, também, uma conclusão de nossos cálculos, que apontam para a conservação de $\vec{P}$ tão próximo do instante da explosão quanto possível for o período em análise.



Vídeo 2: Lançamento de projétil
Fonte: Os autores

Para realizarmos a coleta de dados, por meio de uma filmagem do experimento, utilizamos o *software* Tracker.

Tracker
Video Analysis and Modeling Tool

Para baixar e conhecer esse software, acesse:
https://physlets.org/tracker

Considerações sobre $\vec{P}$ de nosso vídeo-experimento

- **Informações referentes ao Projétil ($m_p = 0{,}0034\ kg$)**

Instante t	Posição x	Velocidade v_x	Momento linear p_x
0	0,180204955		
0,016683333	0,550324035	22,18495983	0,075428863
0,033366667	0,934515239	11,5142219	0,038826901
0,05005	1,309335926	7,48892481	0,025676647
0,066733333	1,682282509	5,58861014	0,019001274

- **Informações referentes a Base ($m_b = 0{,}0560\ kg$)**

Instante t	Posição x	Velocidade v_x	Momento linear p_x
0	0,383138463		
0,016683333	0,360571062	-1,352691367	-0,075750717
0,033366667	0,338394172	-0,664642077	-0,039082397
0,05005	0,314655528	-0,474298571	-0,025319093
0,066733333	0,291385411	-0,348703061	-0,019527371

Divergências entre $\vec{P}_A$ e $\vec{P}_D$ (momentos lineares do sistema antes e depois da colisão, respectivamente) por intervalos de tempo $t_n - t_{n-1}$, com t sendo um instante (0, 1, 2, 3, 4) e a diferença $t_n - t_{n-1}$ um intervalo Δt.

Intervalos n, equivalente aos intervalos $t_n - t_{n-1}$	Diferença % entre os momentos lineares
1	0,42%
2	0,65%
3	1,41%
4	2,69%

CONSIDERAÇÕES: Observe que tão próximo quanto possível da explosão forem os dados considerados, maior a sua compatibilidade com nossas expectativas teóricas. As informações coletadas, 4 intervalos de tempo após a explosão, mostram uma dissipação do momento linear do sistema (por exemplo, nas interações do projétil e da base com as moléculas de ar) de 2,69%. Com menos interações, como no primeiro intervalo, a diferença cai para 0,42%.

ATIVIDADE: AGORA É COM VOCÊ!

A seguir propomos uma atividade para obter o coeficiente de restituição de uma bolinha que quica no chão. Convidamos você a assistir o primeiro vídeo e refletir sobre a aplicação do conceito de coeficiente de restituição, após suas reflexões (*dentro do possível, refaça a atividade!*), convidamos também a ver como determinar e no vídeo 4.

CLIQUE SOBRE AS IMAGENS PARA ACESSAR!

Vídeo 3: *Três Quiques e um exercício de Física.*
Fonte: https://youtu.be/qCXlxS_-m7s

Vídeo 4: *Três Quiques e um exercício de Física [SOLUÇÃO].*
Fonte: https://youtu.be/jTh3e9DJ4qM

ANOTAÇÕES

Hora de Praticar

Muito bem, se você chegou até aqui é sinal que estudou todo o conteúdo, parabéns!

Você conseguiu responder às perguntas iniciais da pág. 5?

Para a primeira, é mais fácil parar um carro porque seu momento linear é menor, se comparado ao momento linear do caminhão. Com relação às bolas brancas em jogos de bilhar, a velocidade das demais bolas após colidirem com a bola branca do jogo é maior do que a velocidade com que a bola branca as atinge; menor massa, maior velocidade pós-colisão.

Agora, para que você possa praticar um pouco, preparamos algumas questões para autoavaliação de sua aprendizagem. Tente fazê-las, e apenas após, conferir as respostas. Dê valor ao instrumento de avaliação. Você só tem a ganhar com isso!

ATIVIDADES DE AUTOAVALIAÇÃO

Questões

1. Suponhamos que o caminhão representado na Figura 1 da pág. 5 possua uma massa total de 1,1 x 10^4 kg, e se desloca com velocidade de 10 m/s. Qual o momento linear do caminhão?
(a) 110.000 kg.m/s²
(b) 39.600kg.m/s²
(c) 11.000 kg.m²/s²
(d) 1,1 x 105 kg.m/s
(e) Nenhuma das alternativas

2. Suponha agora que o carro da Figura 1 possua uma massa total de 1,5 x 10^3 kg; qual deveria ser a sua velocidade para ter o mesmo momento linear do caminhão, de massa 1,1 x 10^4 kg e velocidade de 10 m/s?
(a) 110, 22 m/s
(b) 73 m/s
(c) 220 Km/h
(d) 110 Km/h²
(e) Nenhuma das alternativas

3. Imaginemos uma aluna de 28 kg distante 55 cm da sua professora de massa 65 kg. Pense nas duas como um sistema, e cada uma como um ponto material. Qual a posição que está localizado o CM desse sistema?
(a) 0,38 m da aluna
(b) 0,166 m da aluna
(c) 0,17 m da professora
(d) A alternativa (a) e (c) estão corretas
(e) A alternativa (b) e (c) estão corretas

4. Uma mãe fez três pelúcias para montar um móbile para colocar no quarto do seu bebê, porém, eles têm massas diferentes. Sendo M_1 = 1,0x10² g, M_2 = 80 g e M_3 = 1,2x10²g. A Figura 5 mostra o esquema como ela posicionou as pelúcias no móbile. A distância entre M_1 e M_2 é 30 cm. A ponta **X** do mobile está no centro de massa entre M_1 e M_2. De **X** até a M_3 tem também uma distância de 30 cm. Onde está o centro de massa entre **X** e M_3, ou seja, onde a mãe terá que pendurar o móbile para manter o equilíbrio?
(a) 0,22 m
(b) 0,180 m
(c) 0,12 m
(d) 22 cm
(e) Nenhuma das alternativas.

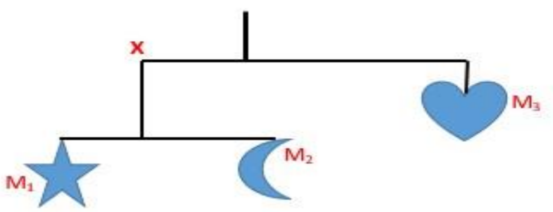


Figura 5: Ilustração da Questão 4

ATIVIDADES DE AUTOAVALIAÇÃO

Questões

5. Uma bala de massa de 10g move-se horizontalmente com velocidade de $2,7x10^2$ m/s e se choca com um bloco de 1,8 kg, que estava inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Supondo que a bala fica alojada no bloco e ambos se deslocam juntos, qual a velocidade do sistema bloco-bala após a colisão?
(a) 1,5 m/s
(b) 1,49 km/h
(c) 2,70 m/s
(d) 2,70 Km/h
(e) Nenhuma das alternativas

6. O exercício anterior falava de qual tipo de colisão?
(a) Perfeitamente elástica
(b) Perfeitamente cinética
(c) Inelástica
(d) Perfeitamente momentânea
(e) Nenhuma das alternativas

7. Um caminhão de 2,5 toneladas perde o freio e colide com um caro de $1,2x10^2$ kg que estava parado na sua frente em um estacionamento. Após o choque os dois carros seguem juntos com uma velocidade de 36 km/h. Determine, respectivamente, a velocidade do caminhão antes da colisão, e o percentual de perca da energia cinética durante a colisão.
(a) 52 km/h e 0,22%
(b) 15 m/s e 32%
(c) 22 Km/h e 32%
(d) 11 m/s^2 e 0,32%
(e) Nenhuma das alternativas

8. Na Figura 4 da página 11, visualizamos um taco golpeando uma bola de beisebol; vamos imaginar que a bola tenha 7,4 cm de diâmetro e massa de 0,14 kg. Suponhamos também que antes da colisão a bola tem uma velocidade na horizontal de 30 m/s e após a colisão ela retorna com velocidade de 45 m/s, formando um ângulo de 30° acima da horizontal. Sendo assim, o módulo e a orientação do impulso do taco sobre a bola serão, respectivamente:
(a) 3,46 m/s e 68° no eixo x positivo
(b) 3,46 kg.m/s e 18° no eixo x positivo
(c) 10 N.s e 18° no eixo x positivo
(d) 3,46 m/s e 68° no eixo x positivo
(e) Nenhuma das alternativas

ATIVIDADES DE AUTOAVALIAÇÃO

Questões

9. Em um laboratório, realiza-se o experimento de uma colisão elástica, onde dois carrinhos são colocados sobre um trilho de ar (colchão de ar) para eliminar possíveis atritos. O Carrinho 2 que se encontra em repouso tem uma massa com a metade do valor da massa do Carrinho 1. Depois da colisão, o Carrinho 1 fica com um terço da velocidade inicial e o Carrinho 2 com uma velocidade de 3,8 m/s. Qual a velocidade inicial e a massa do Carrinho 1?
(a) 1,5 km/h e 0,36 kg
(b) 2,55 km/h e 100 g
(c) 28 m/s e 160 g
(d) 2,9 m/s e 0,97 kg
(e) Nenhuma das alternativas

10. Uma bola M_1 de massa 1,7 x 10^2 g com velocidade inicial de 4,0 m/s colide horizontalmente com outra bola M_2 de massa igual a M_1, e com velocidade inicial nula. Depois da colisão M_1 adquire uma velocidade de 2,0 m/s e faz um ângulo de 30° com a direção inicial. Determine, respectivamente, o ângulo e a velocidade que M_2 faz com o eixo horizontal após a colisão:
(a) 24° e 2,5 m/s.
(b) 26,68° e 2,5 m/s.
(c) 2,5 m/s e 26,58°.
(d) 23,58° e 0,5 m/s.
(e) Nenhuma das alternativas

11. Para a Questão 10 determine, respectivamente, a energia da colisão cinética antes e depois da colisão e o tipo de colisão.
Dados:
$M_1 = M_2 = 1{,}7 \times 10^2$ g; $V_{1,i} = 4{,}0$ m/s e $V_{2,i} = 0$.
Após colisão: $V_{1,f} = 2{,}0$ m/s e $V_{2,f} = 2{,}5$ m/s;
M_1 com ângulo de 30° e M_2 com ângulo de 24° com a horizontal.

(a) 1,36 J; 1,36J; colisão elástica;
(b) 1,36 J; 1,27J; colisão elástica;
(c) 1,27 J; 0,87J; colisão elástica;
(d) 1,4 J; 0,87J; colisão inelástica;
(e) Nenhuma das alternativas.

ATIVIDADES DE AUTOAVALIAÇÃO

Questões

12. A Figura 6, retirada de Meira Filho, Kamassury e Meira (2017), ilustra a situação-problema abordada em um experimento clássico chamado "pêndulo balístico". Nele, um projétil de massa atinge, com uma velocidade (desconhecida), o corpo de massa m_2, inicialmente em repouso. Imediatamente após a colisão, ambas as massas, unidas, adquirem uma velocidade V_f. Sabendo-se a altura máxima h a qual $M = (m_1 + m_2)$ alcança, podemos determinar a velocidade com que o projétil atingiu m_2. Neste experimento, classifica-se a colisão que ocorre como:

(a) Perfeitamente inelástica, com coeficiente e = 0.
(b) Inelástica, com coeficiente de restituição de restituição e < 0.
(c) Perfeitamente elástica, com coeficiente de restituição e = 1.
(d) Super elástica, com coeficiente de restituição e > 1.
(e) Nenhuma das alternativas.

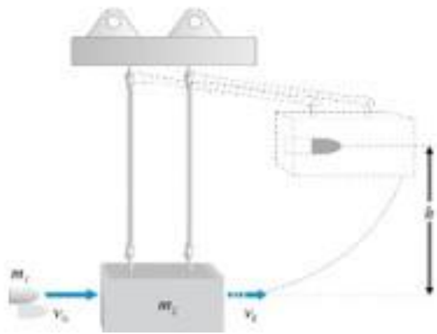


Figura 6: Ilustração da Questão 12

13. Determine o coeficiente de restituição para o caso em que antes de uma colisão, Figura 7(A), temos uma esfera de massa m_1 = 200 g movendo-se a uma velocidade v_1 = 3,00 m/s e uma esfera de massa m_2 = 150 g movendo-se a uma velocidade v_2 = 1,00 m/s e, após a colisão Figura 7(B), temos a esfera de massa m1 movendo-se a uma velocidade v_1 = 0,75 m/s e a esfera de massa m_2 movendo-se a uma velocidade v_2 = 4,00 m/s.

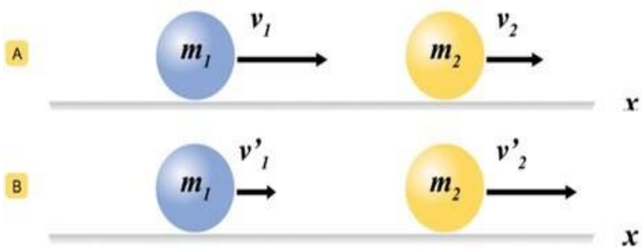


Figura 7: Ilustração da Questão 13
Fonte: Adaptada de (MEIRA FILHO, KAMASSURY e MEIRA, 2017).

(a) e nulo, tendo ocorrido uma colisão perfeitamente inelástica.
(b) e = 1, tendo ocorrido uma colisão perfeitamente elástica.
(c) e = 0,250, tendo ocorrido uma colisão inelástica.
(d) e = 1,625, tendo ocorrido uma colisão super elástica.
(e) Nenhuma das demais alternativas.

ATIVIDADES DE AUTOAVALIAÇÃO

Questões

14. Na Figura 8, ilustram-se os instantes em que um microfone capturou o quicar de uma esfera de vidro abandonada, a partir do repouso, sobre um piso de cerâmica. Os onze primeiros instantes ilustrados encontram-se organizados na Tabela 1.

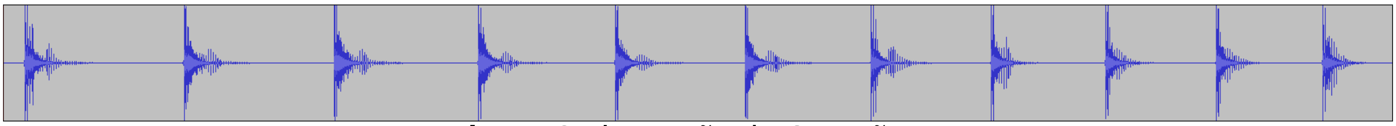


Figura 8: Ilustração da Questão 14

Quiques	Instantes (segundos)
1	1,702
2	2,879
3	3,988
4	5,063
5	6,074
6	7,041
7	7,967
8	8,854
9	9,707
10	10,526
11	11,316

Tabela 1: Instantes dos quiques

A partir dos dados expostos e adotando-se g = 9,86 m/s², qual o valor numérico do coeficiente de restituição?

(a) 0,9
(b) 0,7
(c) 0,5
(d) 0,3
(e) 0,1

ATIVIDADES DE AUTOAVALIAÇÃO

Resoluções

Questão 1

Resposta: alternativa d.

Justificativa: Para os dados fornecidos, temos: $v_{cam} = 10\ m/s$, $m_{cam} = 1{,}1 \text{ x } 10^4 \text{ kg}$, conduzindo-nos a um valor de $p_{cam} = 1{,}1 \text{ x } 10^5 \text{ kg.m}/s$.

Questão 2

Resposta: alternativa b.

Justificativa: Para os dados fornecidos, temos $m_{carro} = 1{,}5 \text{ x } 10^3 \text{kg}$ e o $p_{cam} = p_{carro} = 1{,}1 \text{ x } 10^5\ kg.m/s$, conduzindo-nos que a velocidade do carro para ter o mesmo valor do momento do caminhão terá que ser $v_{carro} \cong 73\, m/s$

Questão 3

Resposta: alternativa d.

Justificativa: Para os dados fornecidos, temos $m_{aluna} = 28\, kg$ $m_{Prof} = 65\, kg$, distância entre ambas $X_d = 0{,}55\, m$, levando em consideração a equação do centro de massa, e o M = (28 + 65)kg, conduzindo-nos que o centro de massa (CM) em relação a aluna, tomando-a como referencial é 0,38 m, e CM em relação a professora, tomando a professora como referencial é 0,17 m.

Questão 4

Resposta: alternativa a.

Justificativa: Somamos a massa de M_1 e M_2 e assim obtemos como se fosse uma única massa em x. Utilizando a equação do centro de massa $CM = \frac{[(M_1 + M_2)\,.0 + M_3\,.0{,}30]}{(M_1 + M_2) + M_3} = 0{,}12$ m.

.

ATIVIDADES DE AUTOAVALIAÇÃO

Resoluções

Questão 5

Resposta: alternativa a.

Justificativa: Para os dados fornecidos, temos $m_{Bala} = 1{,}0\ \mathrm{x}10^{-2}\ kg$, $m_{Bloco} = 1{,}8\ kg$, velocidade para antes da colisão $v_{Bala} = 2{,}7\ \mathrm{x}\ 10\ \ m/s$, v_{Bloco} nula. Como a bala ficou alojada no bloco a massa final é a soma das duas massas. Pela conservação do momento linear, o momento linear antes é igual o momento linear depois da colisão de todas as massas envolvidas: $[m_{Bala} \,.\, v_{i,Bala} + m_{Bloco}\, v_{i,Bloco} = (m_{Bala} + m_{Bloco})v_d]$. Substituindo os dados obtemos que a velocidade final do sistema bloco-bala terá que ser $v_d = 1{,}5\, m/s$

Questão 6

Resposta: alternativa e.

Justificativa: Como após a colisão a bala e o bloco permaneceram acoplados, temos uma colisão perfeitamente inelástica, que não está em nenhuma das alternativas.

Questão 7

Resposta: alternativa b.

Justificativa: Para os dados fornecidos, temos $m_{cam} = 2{,}5\ \mathrm{x}\ 10^3\ kg$, $m_{carro} = 1{,}2\ \mathrm{x}\ 10^3\ kg$ e a velocidade do carro e do caminhão possui o mesmo valor depois da colisão $v_{depois} = 10\, m/s$. Utilizando a equação da conservação do momento: $[2{,}5\ \mathrm{x}\ 10^3 \,.\, v_{a,cam} + \ 1{,}2\ \mathrm{x}\ 10^3 \,.\, 0 = (2{,}5\ \mathrm{x}\ 10^3 + \ 1{,}2\ \mathrm{x}\ 10^3\,).\, 10]$; $obtemos\ v_{a,cam} \cong$ 15 m/s. Para encontrar a energia cinética $K = \frac{1}{2}\, m\, v^2$, determinamos primeiro a energia cinética antes da colisão K = 2,8 $\mathrm{x}\ 10^5 J$, em seguida a energia cinética após a colisão com os dois (carro mais caminhão) com a mesma velocidade, K = 1,9 $\mathrm{x}\ 10^5 J$, e por fim comparamos as energias e determinamos percentual da perca da mesma que será um valor de 32%.

ATIVIDADES DE AUTOAVALIAÇÃO

Resoluções

Questão 8

Resposta: alternativa c.

Justificativa: Para os dados fornecido em relação a bola, $m_{bola} = 0{,}14\ kg$, $v_i = 30\frac{m}{s}$ na horizontal e $v_f = 45\frac{m}{s}$ com ângulo de 30° com a horizontal. Sendo variação do momento igual ao impulso aplicado pelo taco na bola. Temos aqui um movimento bidimensional, vamos obter o impulso no eixo x, e depois o impulso no eixo y, e por fim determinar o modulo do impulso, e o ângulo/ orientação do impulso. J_x = [0,14.45 cos 30° - 0,14. 30 cos 0], portanto J_x = 9,7 N.s, agora J_y = [0,14.45 sen 30° - 0,14. 30 sen 0], fornecendo J_y = 3,15 N.s, assim J= $\sqrt{{J_x}^2 + {J_y}^2}$ sendo o impulso J ≅ 10 N.s . Podemos determinar o ângulo através da tangente, $\tan\theta = \frac{J_y}{J_x}$, substituindo os dados obtemos $\theta = 18°$.

Questão 9

Resposta: alternativa d.

Justificativa: Para os dados fornecidos, temos $m_1 = m$, $m_2 = \frac{m}{2}$ e a velocidade dos carrinhos antes da colisão $v_{1\,antes} = v_1$ e $v_{2\,antes} = 0$, depois do choque a velocidade dos carrinhos são $v_{1\,depois} = v_1/3$ e $v_{2\,depois} = 3{,}8\ m/s$. Utilizando a equação da conservação do momento: [$m\,.v_1 + \frac{m}{2}.0 = \left(m\,.\frac{v_1}{3}\right) +$ $(\frac{m}{2}.3{,}8)$]; $obtemos\ \ v_1$ = 2,9 m/s. Para encontrar o valor da massa do carrinho 1, podemos utilizar a conservação da energia cinética, pois estamos falando de uma colisão elástica, a soma das energia antes da colisão é igual a soma das energias depois da colisão. Segue a equação da energia cinética $K = \frac{1}{2}\,m\,v^2$, após substituir todos os valores fornecidos obteremos $m_1 = 0{,}97kg$.

ATIVIDADES DE AUTOAVALIAÇÃO

Resoluções

Questão 10

Resposta: alternativa a.

Justificativa: Para os dados fornecido $M_1 = M_2 = 0{,}17$ kg, $v_{i,1} = 4{,}0\frac{m}{s}$ na horizontal e $v_f = 2{,}0\frac{m}{s}$ com ângulo de 30° com a horizontal.

Sendo o momento antes da colisão:

$p_{antes,} = p_{x,} + p_y \rightarrow p_{x,antes} = 0{,}68\, kg.\frac{m}{s};$ e $p_{y,antes}$ é $nulo$.

O momento após a colisão no eixo x:

$p_{x,antes} = p_{x,depois} = [0{,}17.2{,}0 \cos 30° + 0{,}17\, v_2 \cos\theta = 0{,}68\,] \rightarrow v_2 \cos\theta = 2{,}3$ (*).

Eixo y após a colisão:

$p_{y,antes} = p_{y,depois} = [0{,}17.2{,}0 \operatorname{sen} 30° - 0{,}17\, v_2 \operatorname{sen}\theta = 0\,] \rightarrow v_2 \operatorname{sen}\theta = 1$ (*).

Fazendo a razão entre a equação (*) e (**) obtemos: $\frac{v_2 \operatorname{sen}\theta}{v_2 \cos\theta} = \frac{1}{2{,}3}$, e sen/cos = tan, obtemos $\tan\theta = 0{,}43$, sendo a orientação $\theta \cong 24°$. Substituindo o valor do ângulo em (*) ou (**) obtemos $v_2 \cong 2{,}5\frac{m}{s}$.

Questão 11

Resposta: alternativa d.

Justificativa: Energia cinética: K = ½ mv², substituindo os dados antes e depois da colisão obtemos que $K_a = 1{,}4\,J$ e $K_d = 0{,}87\,J$. Observa-se que não houve conservação da energia cinética, sendo assim segundo a teoria temos uma colisão inelástica.

Questão 12

Resposta: alternativa a.

Justificativa: os dois corpos permanecem unidos após colidirem, de modo que $e = 0$, uma vez que a velocidade de afastamento relativa é nula $\left(e = {}^{v_{af}}/_{v_{ap}}\right)$.

ATIVIDADES DE AUTOAVALIAÇÃO

Resoluções

Questão 13

Resposta: alternativa d.

Justificativa: para o caso de uma colisão entre um elétron e um átomo excitado, temos o fenômeno ilustrado em nossa situação problema. Para os dados fornecidos, temos $v_{ap} = 2{,}00\ m/s$ e $v_{af} = 3{,}25\ m/s$, conduzindo-nos a um valor de $e = 1{,}625$.

Questão 14

Resposta: alternativa a.

Justificativa: assumindo três quiques consecutivos e idealizando-se que a metade do primeiro intervalo represente o intervalo de queda, a partir do repouso (permitindo-nos calcular a velocidade de aproximação v_{ap}), e a metade do segundo intervalo represente o intervalo de subida (permitindo-nos calcular a velocidade de afastamento v_{af}), obtemos sempre valores de e próximos de 0,9 (utilizando-se quaisquer três quiques consecutivos, havendo nove possibilidades).

Para exemplificar, para os quiques 5, 6 (colisão) e 7, verificam-se $v_{ap} = 4{,}7383\ m/s$ e $v_{af} = 4{,}5374\ m/s$, de modo que $e = 0{,}9574$.

Referências

GLOTZER, Bennett (org.). **Física Experimental: mecânica 2**. Rio de Janeiro: LTC, 2013. Vídeo 11.3.

MEIRA FILHO, Damiao Pedro; KAMASSURY, Jorge Kysnney Santos; MEIRA, Rose Caldas de Souza. Uma discussão sobre o coeficiente de restituição**. Revista Brasileira de Ensino de Física,** v. 39, n. 4, p. 1-11, 3 abr. 2017. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2016-0278.

Esperamos que tenha aproveitado o *e-book* em seu aprendizado. Agradecemos todo e qualquer *feedback*, que pode ser encaminhado diretamente aos autores:

Maria Aparecida da Conceição dos Santos	vytamaria@yahoo.com.br
Victor Hugo Ricco Bone Antunes	antunesvictorh@gmail.com
Vitor Marques Pereira	vitormarques@yahoo.com
Clodis Boscarioli	boscarioli@gmail.com

Um até breve!

SOBRE OS AUTORES

Maria Aparecida da Conceição dos Santos

Mestre em Ensino de Física pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Graduada em Física e Licenciada em Ciências também pela UEM. É também especialista em Metodologia do ensino de Matemática e Física e em Ensino de Física - Experimentação Didática. De 2012 a 2020 foi docente colaboradora na Universidade Estadual de Maringá, Campus Regional de Goioerê PR.

Victor Hugo Ricco Bone Antunes

Mestre em Educação em Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná. Integrante do grupo de pesquisa GTIE (Grupo de Pesquisa em Tecnologia, Inovação e Ensino). É professor de Matemática, Robótica, Informática e Programação para crianças e adolescentes na rede Ensina Mais, unidade de Ubiratã.

Vitor Marques Pereira

Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática e Licenciado em Física pela Universidade Estadual de Maringá, tendo, inclusive, sido professor colaborador dessa instituição de 2012 a 2020. Dentre inúmeras disciplinas, possui experiência na docência de Física Geral, Física Experimental e História e Filosofia das Ciências em cursos como licenciaturas e engenharias.

Clodis Boscarioli

Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade de São Paulo, Mestre em Informática pela Universidade Federal do Paraná e Bacharel em Informática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa. É professor associado na Universidade Estadual do Oeste do Paraná, no campus de Cascavel.