MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG

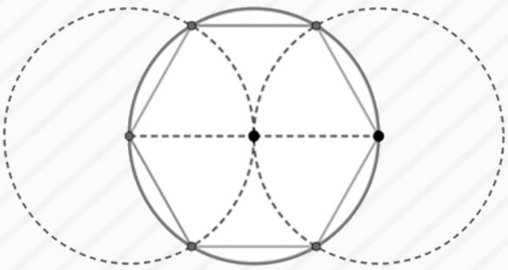
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

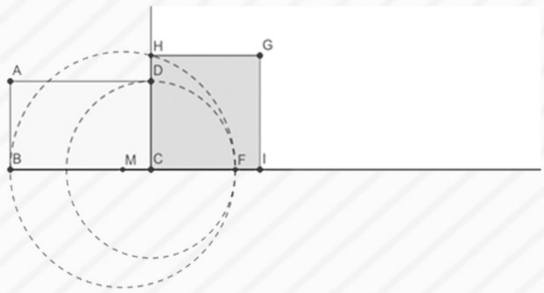
CAMINHOS DA GEOMETRIA:

convergência entre analítica e construtiva

Rene Baltazar

Lívia Conceição Nunes Machado Ferri





2020

Ficha Catalográfica

F388c Ferri, Livia Conceição Nunes Machado.
Caminhos da geometria: convergência entre analítica e construtiva [Recurso Eletrônico] / Livia Conceição Nunes Machado Ferri. – [Santo Antônio da Patrulha, RS]: FURG, 2020.
52 f. : il. color.

Produto Educacional da Dissertação de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, sob a orientação do Dr. Rene Carlos Cardoso Baltazar Júnior.
Disponível em: https://ppgece.furg.br/
http://repositorio.furg.br/

1. Ensino de Geometria Analítica 2. Régua e Compasso 3. Construções Geométricas I. Baltazar Júnior, Rene Carlos Cardoso II. Título.

CDU 514

Catalogação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

APRESENTAÇÃO

Prezado (a) leitor (a), o Produto Educacional apresentado a seguir é resultado da dissertação intitulada: Por uma Geometria mais construtiva e menos analítica, apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências Exatas, da Universidade Federal de Rio Grande, sob orientação do Professor Dr. Rene Carlos Cardoso Baltazar Junior.

O produto educacional foi construído como fonte de recursos aos professores, pois a pesquisa mencionada utilizou-se da Engenharia Didática de segunda geração também conhecida por Engenharia Didática de desenvolvimento, elaborada a partir de estudos teóricos que emergiram a partir das fases que compuseram a pesquisa. Com motivação histórica, procurou-se explorar situações relacionando aspectos geométricos estabelecidos por meio das construções e a Álgebra interposta como forma de justificativa para a uma determinada proposição.

O produto educacional é dividido em dois eixos: o primeiro, explora aspectos relacionados ao desenvolvimento do pensamento geométrico; e um segundo, composto por um conjunto de roteiros de construções geométricas no plano. Em cumprimento a fase da metodologia, realizou-se uma pesquisa bibliográfica em trabalhos acadêmicos no meio eletrônico PROFMAT, e na ampliação dessa fase, por meio das análises realizadas promoveu-se a elaboração desse produto educacional, que relaciona temas dentro da área de Geometria Analítica com vistas às construções geométricas. Como enfatizado por Perrin–Glorian (2009 apud ALMOULOUD; SILVA 2012), ao apresentar as condições para a realização de uma Engenharia Didática de desenvolvimento, destacado o item que se relaciona com esta pesquisa:

> 2- Utilizando os documentos produzidos, os professores devem procurar não reproduzir a história, mas as condições da aprendizagem, a questão essencial para a engenharia didática, sendo como identificar os elementos essenciais para a realização efetiva da atividade. (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p.32).

Espera-se que este recurso seja útil e significativo quanto as construções geométricas, direcionado a equivalência de áreas, chamada de quadratura de polígonos e a relação de construtibilidade de polígonos utilizando-se das definições do teorema de Gauss e sua relação com os Números Primos de Fermat. O 2º eixo está relacionado a pesquisa de Ferri (2020), direcionada ao capítulo cinco, na qual são apresentados os temas recorrentes nas dissertações ora em estudo, suas imagens foram construídas utilizando-se da régua e do compasso. Este produto foi desenvolvido inicialmente aos professores do Ensino Fundamental anos finais, podendo ser estendido aos diferentes níveis de ensino.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1º EIXO

ASPECTOS RELACIONADOS AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

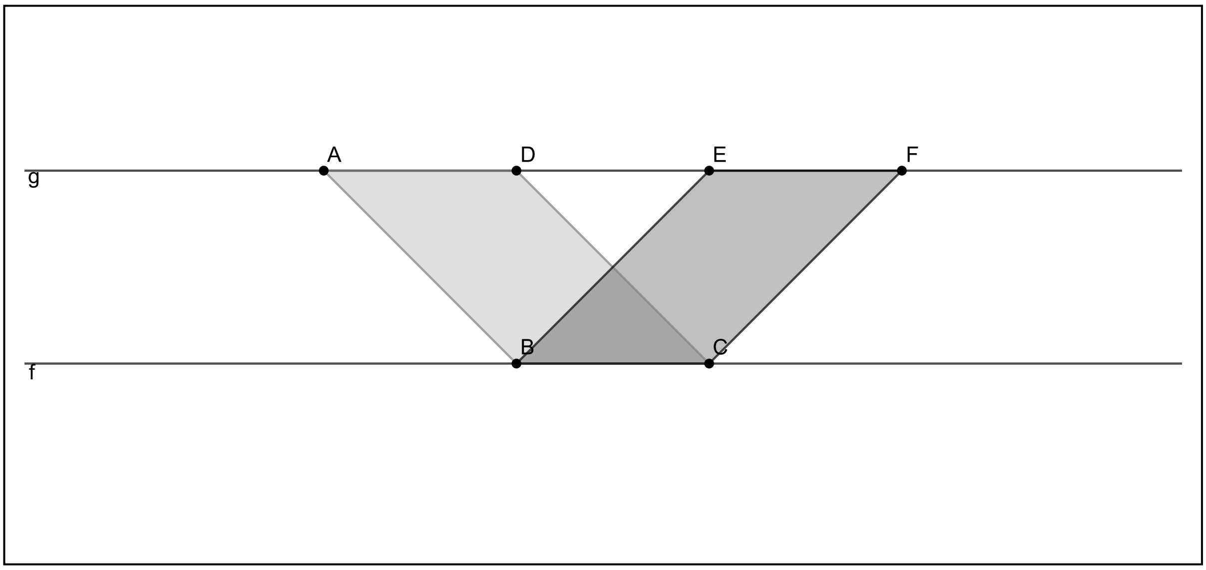
O 1º eixo deste produto educacional está relacionado ao desenvolvimento do pensamento geométrico, a primeira abordagem apresenta-se relacionada a Geometria Euclidiana, a organização das proposições do livro de Euclides, a qual destaca temas envolvendo construção que se integram à temática proposta, significativa quanto às primeiras formas de se estabelecer relações. Roque (2012, p.165) destaca que "o livro I teria sido escrito com o intuito de apresentar os princípios, por isso exibiria um cuidado especial com o encadeamento das proposições". Essa justificativa vai ao encontro do fato de o triângulo equilátero ser apresentado como uma das primeiras construções.

> **Proposição** I.1 *Sobre uma determinada reta construir um triângulo equilátero:* Vemos que esta proposição e, na verdade, um problema de construção que faz uso dos primeiros princípios: definições, postulados e axiomas. Sua prova é frequentemente citada como exemplo de demonstração em que é usado um resultado não incluído no enunciado ou garantidas pelos axiomas e postulados. Mas precisamente, Euclides usa o fato de que as duas circunferências têm um ponto em comum. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p.70-71).

Entende-se que esta construção é uma das mais simples do livro I, que pode ser verificada sua representação na página 36 deste produto. Os Elementos foi escrito sobre uma maneira de pensar lógico-dedutiva, por meio de proposições. Apresenta-se algumas proposições do livro de Euclides. Destaca-se a sua importância para o entendimento das próximas abordagens em que serão apresentadas problematizações a respeito da equivalência de áreas.

Inicia-se pela proposição I-35, que relata a forma como Euclides comparava os paralelogramos, como descrito por Roque e Pitombeira (2012, p.73): "paralelogramos que estão postos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas, são iguais". A representação obtida por Roque e Pitombeira (2012), reproduzida pela pesquisadora, quanto a essa proposição:

Figura 1 – Proposição I.35: Paralelogramos que têm bases iguais e situados entre paralelas são iguais



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p.74).

É apresentada a justificativa dessa proposição, segundo Roque (2012):

> No paralelogramo ABCD a reta AD é igual à reta BC, e no paralelogramo EBCF a reta EF é igual à reta BC. Logo será AD igual a EF. Ajunte-se a ambas a mesma reta DE. Será então AE=DF, isto é, o todo igual ao todo. Mas a reta AB é igual à reta DC. Logo as duas retas EA, AB são iguais às duas retas FD, DC, cada uma a cada uma. Mas o ângulo externo FDC é igual ao interno EAB. Será então o triângulo EAB igual ao triângulo FDC. Do trapézio ABCF tire-se o triângulo FDC; e do mesmo trapézio tire-se o triângulo EAB. Logo os paralelogramos ABCD, EBCF, que são os restos, serão iguais entre si. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p.74).

A partir da justificativa para essa construção, percebe-se que não foi utilizado nenhum cálculo para encontrar a área, apenas o entendimento dos autores a respeito da proposição exposta por Euclides. Nesta justificativa, foram utilizados conceitos a respeito de ângulos alternos e internos, congruência de triângulos, e, para concluir, faz referência à área do todo construído, um trapézio ABCF sobre essa área, retira o triângulo FDC sobrando o paralelogramo ABCD, a seguir relaciona o mesmo trapézio ABCF e tira o triângulo EAB, sobrando o paralelogramo EBCF, o que pode ser descrito:

A(ABCF) = A(ABCD) + A(CDF)

A(ABCF) = A(EBCF) + A(ABE), como foi identificado A(CDF) = A(ABE)

Pode-se concluir que A(ABCD) = A(EBCF), logo os paralelogramos possuem áreas iguais.

Denota-se a função área por A, ficando clara, no contexto, a distinção entre função e objetos geométricos. Outra contribuição é quanto ao conceito de área apresentado neste produto, partindo de comparativos entre os polígonos e não pelo indicador de um número: ou seja, trabalharemos com o princípio de equivalência de que dois polígonos são iguais se tem a mesma área. Salientando que foram utilizadas das justificativas algébricas para a confirmação desses comparativos, em que foram substituídas nas expressões os segmentos correspondentes. Este fato apresenta-se também associado ao item Quadratura de polígonos.

A partir das relações de equivalência apresentadas sobre paralelogramos, percebe-se uma característica de Euclides: "um traço particular dos *Elementos* é que as grandezas são tratadas enquanto tais e jamais são associadas a números" (Roque, 2012, p.165). A partir da proposição mencionada acima, são apresentadas outras proposições:

> **Proposição** I.36: Paralelogramos que têm bases iguais e situados entre paralelas são iguais. Consequências imediatas desses resultados são as duas proposições seguintes; **Proposição** I-37: - Triângulos situados sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas são iguais entre si; **Proposição** I-38: Triângulos que têm bases iguais e estão entre as mesmas paralelas são iguais entre si. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p.74).

As proposições apresentadas são significativas para o entendimento da próxima abordagem, relacionada a quadratura de polígonos, um processo de transformação de figuras em outras equivalentes, utilizando-se da lógica, que integra as proposições e estabelece relações de equivalência. É utilizado o símbolo congruente (≡), dos símbolos maior (>) e menor (<) para fazer comparações.

As construções geométricas apresentadas neste produto, referem-se a problemas geométricos planos, como abordado por Roque (2012, p.153): "os antigos consideravam três classes de problemas geométricos, chamados "planos", "sólidos" e "lineares". Aqueles que podem ser resolvidos por meio de retas e circunferências de círculos são chamados "problemas planos". O 2º eixo do produto tem a intenção de ser útil na elaboração do tópico relacionado a Quadratura de polígonos, podendo ser realizada com o uso da régua e do compasso ou do *software* GeoGebra, o qual foi utilizado para a construção das representações presentes no 1º eixo do produto.

QUADRATURA DE POLÍGONOS

A motivação por fatos históricos emerge fatos marcantes de como os matemáticos apresentavam suas descobertas, estabeleciam relações. Pensando dessa forma, foi elaborado esse material, que pode ser utilizado para a construção do conceito de área sobre uma forma de pensar dos gregos, as relações de equivalência entre os polígonos, além de ir ao encontro da proposta de currículo para o ensino.

> Assim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre a relação de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmicos e pelos gregos antigos sem utilizar fórmulas permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com a mesma área (é o que os gregos chamavam de "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação de 2º grau. (BRASIL, 2018, p.272-273).

A habilidade relacionada a esta temática, está presente no currículo para o sétimo ano do Ensino Fundamental, mas no sexto ano já são referenciadas propostas sobre a construção de polígonos, retas e ângulos, utilizando-se da régua e do compasso ou do uso de *softwares* (BRASIL, 2018). Tomei (2003) descreve como Euclides elaborou a equivalência de áreas:

> Euclides não só tinha a habilidade numérica que temos hoje, como também estranharia associar a um número a uma região: são dois objetos de natureza muito diferentes. Euclides fraseia o problema de forma geométrica: dados dois polígonos no plano, decidir qual deles tem a maior área, ou se os dois têm a mesma área. E, para isso, ele tem uma resposta que ocupa praticamente todo o primeiro volume dos *Elementos.* Sua abordagem é surpreendentemente natural: dois polígonos têm a mesma área se for possível decompor os dois no mesmo conjunto de peças iguais. (TOMEI, 2003, p.46).

Por meio das proposições interpostas, como já mencionado, Euclides realizava a equivalência de áreas, conhecida como fazer a quadratura. "Efetuar a quadratura de uma figura plana significa achar um quadrado cuja área seja igual à da figura" (AABOE, 2013, p.44). Um exemplo das construções a partir das proposições, foi estabelecida por Itzcovich (2012) ao promover a construção que envolve a proposição I.42: dado um triângulo ABC, construir com régua não graduada e compasso, um paralelogramo que tenha a mesma área que o triângulo.

A fim de realizar essa construção, segue-se os passos descritos por Itzcovich (2012):

1º) construir um triângulo com vértice A, B, C;

2º) após a construção do triângulo, encontrar o ponto médio de $\overline{BC}$, que representa o ponto E, traçando o segmento $\overline{AE}$;

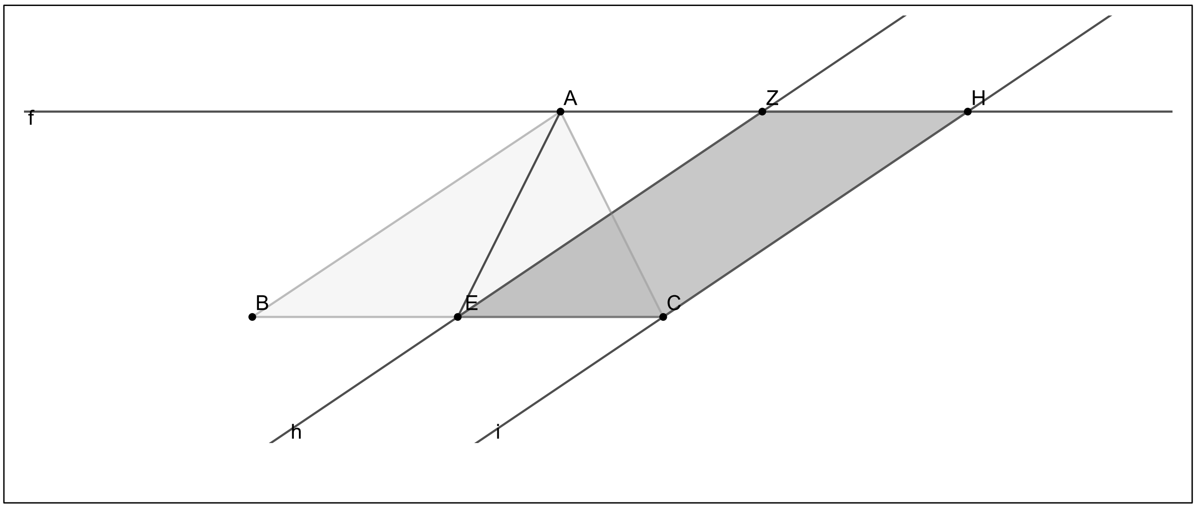
3º) traçar uma reta paralela $\overline{BC}$ que passa por A;

4º) traçar uma reta que passe pelo ponto E, que corte a reta paralela que passa por um ponto, um ponto Z;

5º) traçar uma reta paralela a EZ que passe por C, obtendo-se o paralelogramo ECHZ.

Obtém-se a construção representada:

Figura 2 – Representação da equivalência de área entre o triângulo e o paralelogramo



Fonte: Itzocovich (2012, p.62).

Justificativa: por construção, o triângulo e o paralelogramo foram construídos sobre as mesmas retas paralelas. Com isso, pode-se dizer que a distância entre essas retas paralelas é a altura do paralelogramo. Para encontrar a área do paralelogramo EZHG, utiliza-se a multiplicação dos segmentos EC . h. Com relação ao triângulo, pode-se dizer que o ponto E representa o ponto médio do lado BC, então, pode-se dizer que o segmento BE é igual a EC, e, por essa relação encontra-se a área do triângulo.

O segmento BC = BE + EC, como BE = EC, pode-se escrever BC = 2. EC, então EC = $\frac{BC}{2}$.

A área do paralelogramo (EZHG) é EC . h, substituindo na relação estabelecida anteriormente, tem-se que:

$$A(EZHG)= \frac{BC.h}{2} = A\ (ABC)= \frac{BC\ .h}{2}$$

Por meio da justificativa, conclui-se que a área do triângulo e a área do paralelogramo são iguais. Pode-se observar que as justificativas das construções são apresentadas relacionando-se a fórmulas matemáticas, assim expressas pelos segmentos que compõem a figura. Na forma que haviam sido estabelecidas essas proposições, não se tinha uma justificativa para sua construção. Além disso, essas construções não se relacionavam a números, mas sim por segmentos. As justificativas matemáticas só se tornaram possíveis com a utilização das relações algébricas. Apresenta-se, neste produto, outras possíveis construções, utilizando-se das proposições, evidenciando o processo de equivalência de áreas, com a contribuição dos apontamentos de Santos (2017), adequando-se para os anos finais do Ensino Fundamental.

Dado um triângulo, construir um quadrado com a mesma área

A proposta inicial é encontrar a área do triângulo igual à área do quadrado, para isso, é necessário construir um triângulo do tipo escaleno, nomeando os vértices por A, B, C, e marcar a base do triângulo, identificando a sua metade, seguindo os passos descritos:

1º) é necessário fazer o transporte de segmento, que equivale à metade da base, ver 2ºeixo (p.24);

2º) transportar para a reta suporte o segmento $\overline{DE}$, que representa a metade da base;

3º) transportar o segmento da medida da altura para a reta suporte, representada por $\overline{EF}$;

4º) traçar o ponto médio $\overline{DF}$, ver 2º eixo (p.32);

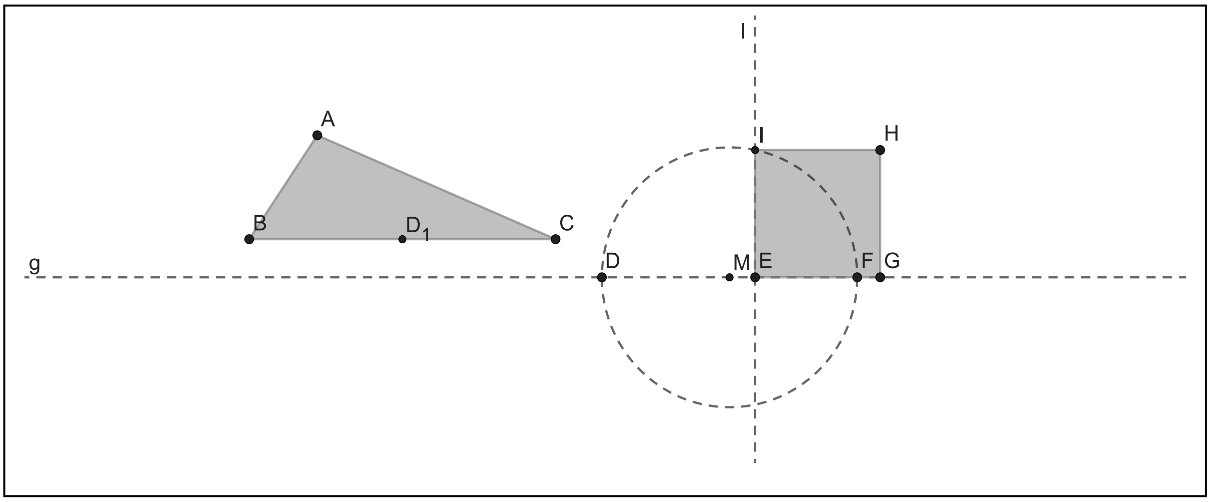
5º) a partir do segmento $\overline{DM}$, traçar uma circunferência de centro M e raio $\overline{DM}$, passando pelo segmento $\overline{DF}$;

6º) encontrar a média geométrica entre $\overline{DF}$, ver 2º eixo (p.40). O ponto de encontro do arco com a reta perpendicular (média geométrica) forma o ponto I;

7º) e, com isso, o segmento $\overline{EI}$, representa o lado do quadrado, construindo o polígono EGHI.

Apresenta-se a figura construída no *software* GeoGebra. No 2º eixo, essa construção foi realizada com régua e compasso (p.48).

Figura 3 – Dado um triângulo construir um quadrado com a mesma área



Fonte: elaborado pela autora (2020).

Justificativa: sabe-se que a área do triângulo (ABC) é identificada pela fórmula matemática: $\frac{b \times h}{2}$, para essa situação, representa: $\frac{BC \times h}{2}$. Ao concluir a construção dos passos descritos, percebe-se que, se pudesse ligar os pontos DFI, formaria um triângulo, onde DF, representa um arco de 180º, na qual o ângulo $\widehat{DIF}$ é um ângulo inscrito, que vale 90º, logo, EI é altura relativa do triângulo retângulo. Dessa forma, pode-se concluir: EI^2= DE . EF, como DE= $\frac{b}{2}$, por construção. Conclui-se isso, de forma que EF é também por construção a altura, h, do triângulo ABC, portanto:

$$EI^2 = \frac{b \times h}{2}$$

$$A\ (EGHI) = A\ (ABC)$$

Para essas construções, o quadrado torna-se uma unidade padrão, não utiliza de fórmulas ou números apenas de princípios, como descrito por Roque (2012):

> Por exemplo, para “medir” a área de uma figura qualquer deveríamos encontrar uma figura simples cuja área fosse igual à da figura dada. Essa figura simples era um quadrado. Logo, o problema de encontrar a *quadratura* de uma figura qualquer era equivalente ao problema de construir um quadrado cuja área fosse igual à da figura dada. (ROQUE, 2012, p.170).

Dado um retângulo, construir um quadrado com a mesma área

Parte-se de uma figura simples, considerada padrão. A proposta é estabelecer relações, provar que, ao construir um quadrado, sua área será igual à área do retângulo, para tanto, constrói-se o retângulo ABCD, seguindo os passos:

1º) prolongar a reta suporte do retângulo ABCD;

2º) sobre ela, marcar a medida do segmento $\overline{CD}$, criando o segmento $\overline{BF}$;

3º) marcar o ponto médio de $\overline{BF}$, identificado na figura pela letra M;

4º) traçar a circunferência de centro M e raio medindo $\overline{MF}$;

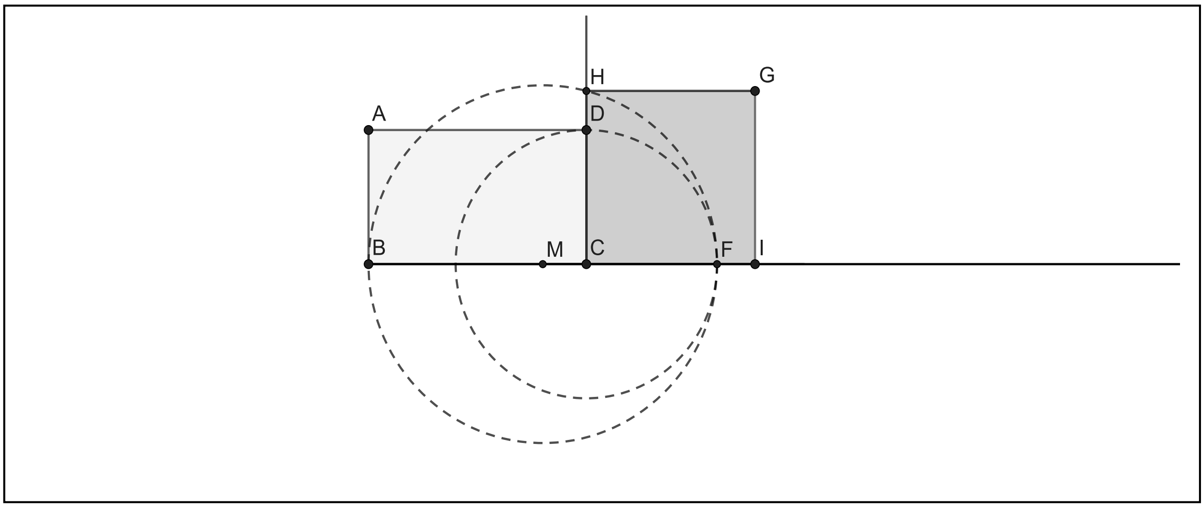
5º) encontrar a média geométrica do segmento $\overline{BF}$;

6º) prolongar o segmento $\overline{CD}$ do retângulo, encontrando o ponto H que representa a média geométrica de $\overline{BF}$;

7º) e, com isso, o segmento $\overline{CH}$, que representa a medida do lado quadrado, construindo o polígono CIGH;

8º) O quadrado CIGH representa a quadratura do retângulo ABCD.

Figura 4 – Dado retângulo construir área do quadrado



Fonte: autora (2020).

Justificativa: precisa-se concluir que o retângulo ABCD tem a mesma área do quadrado CIGH. A partir das descrições, seguindo os passos da construção, conclui-se que o segmento CH^2 é equivalente à área do quadrado, representado por:

CH^2= BC x CF, BC (por construção representa a base do retângulo) e CD (por construção é igual à CF, pois representa a altura do retângulo). Dessa forma, a área do quadrado é CIGH = CH^2. Área do retângulo é ABCD = BC x CD, que também pode ser escrito A(ABCD) = BC x CF, pois CD = CF.

A(ABCD) = CH^2, portanto a A(ABCD) = A(CIGH), logo, a área do retângulo ABCD é igual a área do quadrado CIGH.

Dado um trapézio, construir um quadrado com a mesma área

A proposta é mostrar que o trapézio construído apresenta a mesma área do quadrado, pode-se perceber que os dois casos mencionados anteriormente implicam na quadratura de um trapézio. Sua possibilidade de construção é baseada nos casos anteriores, o que não garante a descrição das etapas necessárias, quando se verifica que a área de um triângulo é equivalente à área de um quadrado, bem como quando a área do triângulo foi equivalente à área do paralelogramo, como foi descrito na página 6, em que foi apresentada a proposição I.35 e apresentada sua justificativa de construção.

Dado um pentágono, construir um quadrado com a mesma área

A proposta é construir um quadrado com área igual a do pentágono ABCDE, a fim de demonstrar como é realizada a quadratura de polígonos, reduz-se a figura a um menor número de lados, no caso três, sendo recorrente a equivalência de área entre um triângulo e um quadrado. Como justificado por Roque (2012):

> Se um postulado foi usado para demonstrar um teorema (ou para efetuar uma construção), esse teorema (ou essa construção) se torna uma verdade disponível para a demonstração de novos teoremas (ou para a realização de novas construções). Cada resultado constitui a base para o aprendizado de novos resultados. Os primeiros princípios servem, portanto, à demonstração dos primeiros resultados, que, em seguida, efetuarão o papel das premissas para novas demonstrações. (ROQUE, 2012, p.171).

Essa observação implica que é possível, agora, descreve-se como realizar essa construção, seguindo os passos:

1º) utilizando a equivalência de triângulos pode-se deduzir que o pentágono ABCDE é equivalente ao quadrilátero JMON;

2º) construir um pentágono, ver 2º eixo (p.46), identificando seus vértices ABCDE;

3º) traçar o segmento $\overline{AD}$ e, com isso, uma reta paralela que passa por E. Na interseção, marque o ponto G;

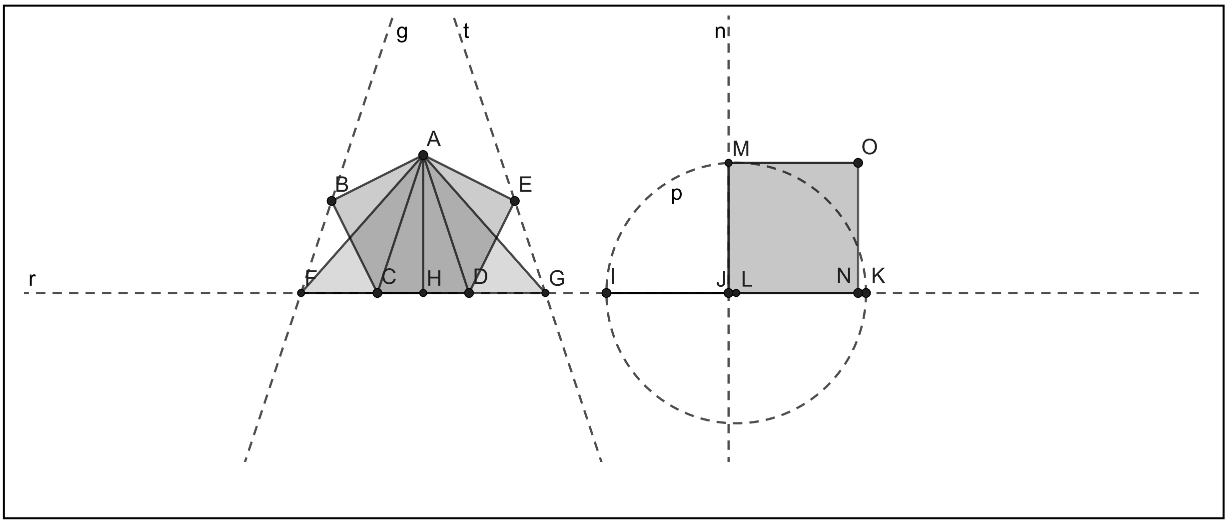
4º) traçar o segmento $\overline{AC}$ e, com isso, uma reta paralela que passa por B. Na interseção, marque o ponto F;

5º) como no item anterior, o quadrilátero JMON é equivalente ao triângulo AFG;

6º) o triângulo AFG representa a quadratura do pentágono ABCDE;

7º) como já foi descrito o passo de realizar a quadratura de um triângulo, esta não foi apresentada, para detalhes dessa construção ver (p.11). Segue também a imagem construída com régua e compasso (p. 49).

Figura 5 – Pentágono construir um quadrado com a mesma área



Fonte: autora (2020).

Justificativa: a fim de comprovar essa quadratura, é preciso recordar as proposições I-37 e I-38 citadas na página 8, que descrevem que triângulos que estão sobre retas paralelas e que possuem a mesma altura apresentam as mesmas áreas. Também é importante observar que, para realizar a justificativa dessa construção, tem-se dois momentos resumidos em um só, obtendo-se a apresentação da imagem final da construção.

Se escolher o ponto C e, sobre ele, traçar uma reta paralela a partir do ponto B, no pontilhado, percebe-se que formaria o quadrilátero ABCE, sobre o qual identifica-se o triângulo ABC, que tem a mesma área que o triângulo AEC, concluindo-se que esses triângulos possuem a mesma área.

Esse mesmo raciocínio usa-se para traçar uma reta paralela passando por E, na qual identifica-se os triângulos AED e AGD, verificando que são equivalentes. Por meio da equivalência de áreas, conseguiu-se transformar esse pentágono em um triângulo AEG. Ao finalizar, se resume a fazer a quadratura de um triângulo. Na página 11, foi descrito que a área de um triângulo é equivalente a área do quadrado.

Ao finalizar os apontamentos relacionados a quadratura, apresentou-se algumas hipóteses para ser desenvolvido o processo de equivalência de áreas, de uma forma simples e acessível ao nível dos alunos do Ensino Fundamental, com o objetivo de ir desenvolvendo conjecturas e estabelecer relações a fim de desenvolver o pensamento geométrico. Existem outras maneiras a serem utilizadas para as questões relativas à equivalência de área, utilizando-se da dedução do Teorema de Pitágoras.

As Lúnulas de Hipócrates

O livro de Aaboe (2013), em específico, o capítulo dois, intitulado "A Matemática Grega Antiga e a Construção do Pentágono Regular por Euclides", traz, em sua leitura, abordagens históricas quanto à obra de Euclides, e, também faz referência a outros matemáticos do período que foram importantes, pois conseguiam estabelecer relações entre a Álgebra e a Geometria. O autor apresenta uma relação às Lúnulas de Hipócrates ao ser realizada a sua quadratura, sendo incluído a este produto como uma curiosidade relacionada à temática proposta.

Para a descrição dos passos relacionados à construção das Lúnulas de Hipócrates, foram utilizado os dados apresentados em Wolff (2013, p.26), sofrendo adaptações nas descrições:

1º) construa um segmento AC;

2º) determine seu ponto médio, D;

3º) construa um setor circular com centro em D, e extremos C e A;

4º) trace uma reta perpendicular passando por D, a fim de construir o ponto B, formando o polígono ABC;

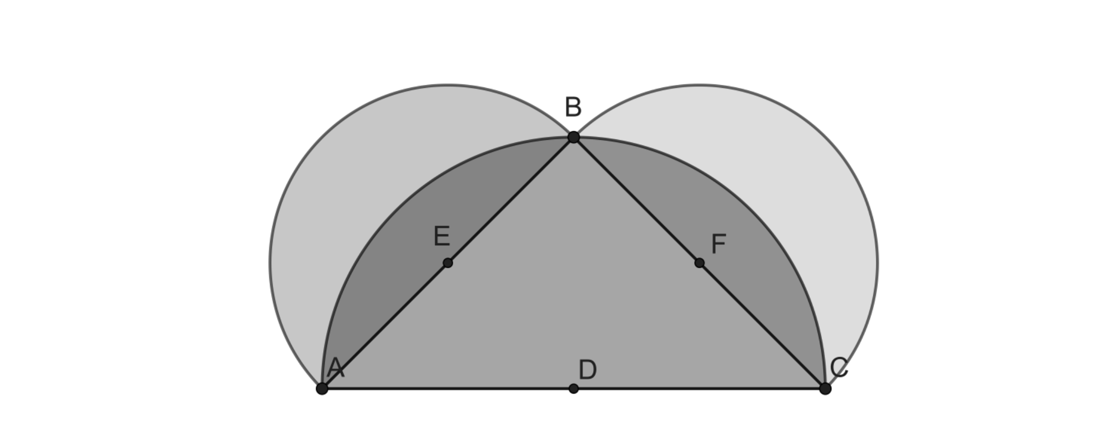
5°) encontre o ponto médio de AB, identificado como ponto E;

6º) construa um setor circular com centro em E, e extremos B e A;

7º) encontre o ponto médio de BC, identificando como ponto F;

8º) construa um setor circular com centro em F, e extremos C e B.

Figura 6 – Construção das Lúnulas de Hipócrates



Fonte: Wolff (2013, p.26-27).

A justificativa para essa construção foi descrita por Aaboe (2013):

> Traça-se um semicírculo sobre a diagonal AC de um quadrado ABCD (Figura 2.1(a) e, com centro em D e raio AD, traça-se um arco circular de A até C. Qualquer um dos segmentos I é um arco de círculo de 90 graus, e o mesmo acontece com o segmento II. São, portanto, semelhantes, contudo, possuem áreas cuja razão é o quadrado de suas razões lineares. Assim: $\frac{segmento\ I}{segmento\ II} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2}{AC^2}$. Mas está última razão é $\frac{1}{2}$ pois AC é a diagonal de um quadrado de lado AB. Portanto o segmento II é duas vezes o segmento I, ou igual à soma de dois segmentos I. Se removermos os dois segmentos I ou o segmento II do semi-círculo, devemos ficar com a mesma área; com efeito, em qualquer caso removemos a mesma quantidade. Mas, no primeiro caso, obtemos o triângulo ABC (figura 2.1(b)), e no segundo o crescente ou lúnula ABC (figura 2.1(c)). O triângulo e a lúnula devem, portanto, ter a mesma área. Desta maneira, somos capazes de fazer a quadratura da lúnula. (AABOE, 2013, p.43-44).

A descrição de Aaboe (2013) evidencia uma comparação entre as áreas dos semicírculos menores que, juntos, apresentam a mesma área do semicírculo maior. A demonstração para esta equivalência também pode ser realizada pelo Teorema de Pitágoras. Os matemáticos da antiguidade se dedicaram a outros problemas, conhecidos como problemas clássicos, muitas foram as tentativas em realizar a quadratura do círculo, o que não foi possível, pois, ao elaborar sua construção, existia a dificuldade com relação ao π, por ser um número irracional. Concluindo-se, assim, uma parte do produto direcionada a questões construtivas.

É POSSÍVEL DIVIDIR UMA CIRCUNFERÊNCIA EM PARTES IGUAIS, UTILIZANDO RÉGUA E COMPASSO?

Percebe-se que esta pergunta foi inquietante para algumas pesquisas, encontrando justificativas algébricas para sua elaboração. A inscrição de polígonos na circunferência foi um tema recorrente ao realizar a construção do hexágono, na descrição de uma etapa assim descrita: "dividir essa circunferência em partes iguais, usando a abertura do compasso" (ARAÚJO, 2016, p.25-26). Ao ser apresentada esta problemática, emerge o questionamento que foi título desse tópico, essa mesma temática fez parte da introdução do livro de Aaboe (2013):

> Um tema recorrente nas seleções da matemática grega é o problema de dividir o círculo em um certo número de partes iguais; Euclides consegue obter a divisão em cinco partes iguais usando somente o compasso e a régua, Arquimedes tem que usar ferramentas mais complicadas, e Ptolomeu está interessado em calcular o comprimento da corda que subtende uma parte própria da circunferência do círculo. (AABOE, 2013, p.2).

A inscrição de polígonos na circunferência fez parte da história e despertou curiosidades, como descrito por Aaboe (2013). No decorrer da leitura do capítulo cinco, o autor descreve como era realizada essa construção, para polígono regular de cinco lados, também sendo utilizada para a construção do polígono de dez lados.

A divisão da circunferência em partes iguais é mencionada desde Euclides, mas determinados polígonos não eram possíveis de serem construídos com os instrumentos da régua e do compasso, como o caso do polígono de sete e nove lados. O que, historicamente, foi realizado por Gauss ao conseguir provar a existência do polígono de sete lados, a partir do teorema interposto:

Teorema 1: se for possível construir um polígono de n lados e é possível construir um polígono de m lados, sendo m e n primos entre si, então é possível construir um polígono de n.m lados (LIMA, 2015a).

Demonstração: se um polígono de n lados pode ser construído, então pode-se construir um arco de $\frac{360°}{n}$ e, se um polígono de m lados pode ser construído, então pode-se construir um arco de $\frac{360°}{m}$. Como m e n são primos entre si, então mdc (m,n) =1. Logo, existem x e y inteiros, tais que x. $(\frac{360°}{n})$ -y. $(\frac{360°}{m}) = \frac{360°}{m.n}$

Teorema 2: um polígono regular de n lados pode ser construído com régua e compasso se, e somente se, $n = 2^k p1...pr$, *onde K≥0* é um número inteiro e cada *pi* é um primo de Fermat, ou seja, um número primo da forma $2^{2^i} + 1$, com i≥ 0 (GAUSS, 1796 *apud* PAPA NETO, 2017).

Referindo-se ao Teorema 2, o mesmo não será demonstrado pois trata-se de uma demonstração aquém, envolvendo a extensão de corpos. O acesso a esta demonstração está disponível em Lopes (2014) e Silva (2019).

A fim de verificar a construtibilidade dos polígonos, utiliza-se o teorema de Gauss. “Com isso, agora temos um critério importante que define quais polígonos podem ser construídos por régua e compasso e quais não podem” (LIMA, 2015a, p.51).

As pesquisas que fazem uso do Teorema de Gauss e sua relação com os Números Primos de Fermat, emergiram uma forma de calcular quando os polígonos são construtíveis com régua e compasso, acessível aos alunos do Ensino Fundamental.

O quadro abaixo foi criado para conseguir desenvolver o pensamento algébrico por meio da condição de construção com régua e compasso. Utilizou-se do teorema de Gauss, sobre ele elaborou-se os cálculos relacionados ao número de lados.

Quadro 1 – Argumentos que justificam a construtibilidade usando o Teorema de Gauss

Polígono de n número de lados	**Argumentos que justificam a construtibilidade usando o Teorema de Gauss**
n=3	Se n= 3, nesse caso é uma potência de 2, na fatoração, bastando verificar se 3 é um primo de Fermat, o que é fácil verificar, pois: 2^{2^i} + 1=3. Portanto, o polígono regular de 3 lados é construtível;
n=5	Se n=5, analogamente ao anterior, é suficiente verificar que 5 é um primo de Fermat, $2^{2^i} + 1 = 5$. Portanto, o polígono regular de 5 lados é construtível;
n=6	Se n=6, escrevendo 6= (2^1. 3), é suficiente mostrar que 3 é primo de Fermat, o que já se sabe. Portanto, o polígono regular de 6 lados é construtível;
n=7	Se n = 7, então analogamente aos anteriores, basta verificar que 7 é um primo de Fermat. Suponha-se que existi um número natural, tal que 2^{2^i} + 1= 7, o que implica que 2^{2^i} =6, o que é um absurdo, pois 3 divide o lado direito da igualdade e não divide o lado esquerdo. Portanto, o polígono regular de 7 lados é construtível;
n=8	Se n= 8, segue o Teorema de Gauss, que todo polígono regular com um número de potência de 2 de lados é construtível. Portanto, o polígono regular de 8 lados é construtível;
n=9	Se n= 9, escrevendo 9= (3^2), tem-se um produto de primos de Fermat não distintos. Portanto, o polígono regular de 9 lados não é construtível;
n=10	Se n= 10, escrevendo 10= 2. 5, é fácil concluir, usando exemplos anteriores, que o polígono regular de 10 lados é construtível;

n=11	Se n=11, já sabe-se que basta verificar se 11 é primo de Fermat. Suponha-se que existe i, um número natural, tal que 2^{2^i}+ 1=11. Logo, o que é um absurdo, pois 2^{2^i}= 11 – 1. 2^{2^i}= 10, o que é um absurdo, pois 5 divide um dos lados e não divide o outro lado. Portanto, o polígono regular de 11 lados não é construtível;
n=12	Se n=12, escrevendo 2^{2^1}. 3 = 12, é fácil deduzir nos itens anteriores que o polígono regular de 12 lados é construtível. Portanto, o polígono de 12 lados é construtível;
n=13	Se n=13, usando os mesmos argumentos anteriores, tem-se que 2^{2^i}+ 1=13, o que é um absurdo, pois 3 divide somente um dos lados da igualdade. Portanto, o polígono regular de 13 lados não é construtível;
n=14	Se n=14, escrevendo 14= 2 . 7, tem-se que o polígono regular de 14 lados não é construtível, pois 7 não é primo de Fermat. Portanto, o polígono regular de 14 lados não é construtível.

Fonte: autora (2020).

Através dos argumentos e dos cálculos expostos, pode-se concluir a construtibilidade de um polígono regular de n lados. Referidos cálculos partem de que o Teorema de Gauss é verdadeiro, e, com isso, elabora-se exemplos ilustrativos que podem ser estimulados em aulas de matemática.

Outro detalhe observado é que cada polígono regular inscrito em uma circunferência apresenta uma forma de construção. Percebendo-se a não unicidade na sua elaboração quando realizado com régua e compasso. Existem outras demonstrações além dessas para o reconhecimento dos polígonos construtíveis, mas que não foram utilizadas devido ao seu nível mais aprofundado. Wagner (1993) complementa:

> Usando a teoria de Gauss, pode-se ir mais longe ainda e provar que, para *n* um natural em geral, *Pn* será construtível se e somente se *n* se decompuser em fatores primos na forma: 2^k p1...*pm*, onde os *pi* são primos de Fermat (repare que o expoente de cada pi é obrigatoriamente 1). Assim, são construtíveis os polígonos regulares com números de lados iguais a: 3;4;5;6;8;10;12;15;16;17;20;24;30;32;35... Enquanto não são construtíveis os que têm números de lados iguais: 7;9;11;13;14;18;19;21;23;25;26;27;28;29;31;... (WAGNER, 1993, p.106).

O desenvolvimento dos cálculos anteriormente mencionado vem ao encontro da citação de Wagner (1993). Uma forma de apresentar aos alunos fatos históricos que a matemática passou, no que se refere à evolução, de uma Geometria Euclidiana Plana avançando para uma Geometria Analítica, vista de forma mais generalizada, onde percebe-se a inclusão das incógnitas. Outra forma de apresentação, diferente da proposta do plano cartesiano, que é mais conhecida. Relacionado ao proposto, para o currículo:

> Outro ponto a ser destacado é a aproximação da Álgebra com a Geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano por meio da geometria analítica. As atividades envolvendo a ideia de coordenadas, já iniciadas no Ensino Fundamental – Anos iniciais, podem ser ampliadas para o contexto das representações de sistemas de equações do 1º grau articulando, para isso, conhecimentos decorrentes da ampliação dos conjuntos numéricos e de suas representações na reta numérica. (BRASIL, 2018, p.272).

A proposta do 2º eixo, além de apresentar um passo a passo das construções, que foram recorrentes nas dissertações analisadas, tem o objetivo de mostrar ideias de sua aplicação. Destaca-se construções que se referem a lugares geométricos, como mencionado na dissertação de Ferri (2020), como a mediatriz, a bissetriz, o arco capaz, a construção da reta perpendicular e paralela. Menciona-se alguns problemas abordados por Wagner (1993), que se utiliza de algumas das construções referidas, o que complementa o comentário de Lima (2015a):

> Em muitos momentos do ensino fundamental, professores de álgebra e o desenho geométrico podem trabalhar juntos a fim de proporcionar aos alunos um melhor entendimento sobre números comensuráveis e incomensuráveis, assunto que traz muitas dificuldades, dentre outros assuntos. No ensino médio que professores possam fazer alusões de construções já vistas associadas a uma álgebra um pouco mais esclarecedora. (LIMA, 2015a, p.52).

A inspiração para esse produto foi justamente a possibilidade de desenvolver uma proposta relacionada à Geometria Analítica buscando uma forma de apresentação mais construtiva. O que foi possível através das construções geométricas realizada com o uso dos instrumentos da régua e do compasso ou do software GeoGebra, além de explorar suas justificativas por meio da Álgebra.

GEOGEBRA, UM EXEMPLO DE CONSTRUÇÃO POSSÍVEL

Ao classificar os polígonos construtíveis com régua e com compasso, verifica-se que as construções que eram impossíveis de serem realizadas com esses instrumentos, são possíveis de serem realizadas com o GeoGebra. O *software* não encontra nenhuma dificuldade de elaboração dessa construção, tal fato ocorre porque não se consegue trabalhar com medidas de ângulos decimais, em sua divisão em vértices. Como este *software* se utiliza de aproximações, as construções são facilitadas e quanto maior o número de vértices do polígono mais próximo se assemelha a uma circunferência. Cabe, aqui, a colocação de Procópio (2011), que traz abordagens referentes a construções que não são possíveis com os instrumentos, mas são facilitas com o *software*.

> Com o uso do recurso tecnológico, professores e alunos poderão explorar o conteúdo polígonos regulares inscritos em uma circunferência, reproduzindo as construções que hora foram feitas com régua e compasso. A vantagem na utilização de tal recurso para este tipo de conteúdo é constatada nas múltiplas formas de manipulação do objeto de estudo, além, de favorecer a percepção e a representação, bem como a sistematização das conjecturas elaboradas. (PROCÓPIO, 2011, p.145).

Cabe salientar a importância desse *software* para novas possibilidades de ensino e as facilidades fornecidas com o seu uso. Destaca-se o artigo de Silva, Baltazar e Venturella (2018), que se utilizam de um problema, "O problema do sofá", em que se investiga a área de uma região em formato de L, a imagem descrita remete a um telefone fixo. Considerado um problema com solução ainda em aberto, a proposta dos autores foi elaborar um passo a passo no GeoGebra que envolvesse uma forma de calcular a área dessa região. Ressaltam a importância de conhecer, de ter familiaridade com o *software*, além de alguns conceitos apresentados no decorrer da construção.

A consideração realizada por essa pesquisa contribui para a sustentação de que as construções geométricas são realizadas por meio de passos, pois apresentam uma ordem de elaboração. Mais que isso, muitas construções são inviáveis de serem realizadas com a representação por meio de ferramentas do desenho e o *software* facilita. Ao ser utilizado desde os primeiros níveis de ensino, favorece para as questões em que é necessário um maior aprofundamento. Outro detalhe, é o efeito da animação da construção, que desperta a curiosidade, muitas vezes, é necessário este estímulo nas aulas de matemática.

Os problemas sugeridos com a equivalência de áreas, seguia uma sequência para conseguir realizar a demonstração. No decorrer da leitura desse artigo, observa-se conceitos como ângulo reto, semirretas, retas paralelas, circunferências, pontos de intersecção e reta, desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental, explorados e utilizados em muitos momentos escolares.

Quanto ao uso do GeoGebra, em uma construção é necessária uma sequência de passos, além de um conhecimento das ferramentas, assim como o uso dos instrumentos da régua e do compasso. O origami também enfatiza as construções geométricas, sendo necessária muita atenção em cada etapa. De um modo geral, a cada conhecimento novo a ser adquirido, é necessário estar aberto a novos desafios e aos detalhes que envolvem seu entendimento e sua forma de representação.

2º EIXO
CONJUNTO DE ROTEIROS DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

Operações com segmentos: Adição

O procedimento para a soma é bem simples, utilizando-se da régua e do compasso, seguindo os passos de acordo com Araújo (2016, p.17):

1º) a partir dos segmentos apresentados, construir uma reta r;

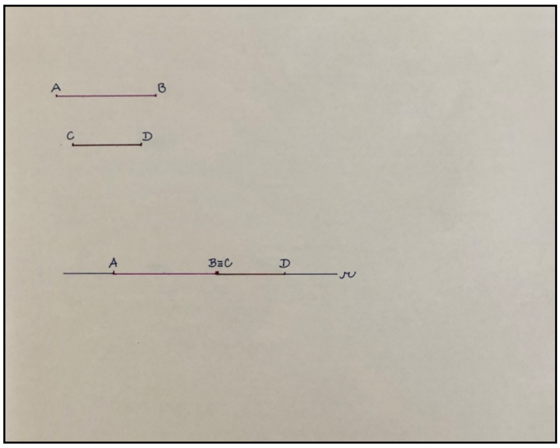
2º) usando o compasso, coloca-se uma das pontas em uma extremidade do primeiro segmento, o ponto A. A outra extremidade, no ponto B.

3º) usando essa abertura do compasso, coloca-se a ponta seca sobre a reta, e com a ponta que risca, marca-se um ponto;

4º) repetir o procedimento de transposição com o segundo segmento, devendo-se garantir que o ponto C coincida com o ponto B e o ponto D esteja marcado no lado oposto ao ponto A.

Esse mesmo procedimento é útil para o transporte de segmentos.

Figura 7 – Adição de segmentos



Fonte: Reproduzido de Araújo (2016, p.17).

Justificativa: a soma dos dois segmentos medindo o ponto A ao ponto D, com os pontos B e C, coincidindo entre as extremidades.

Subtração de segmentos

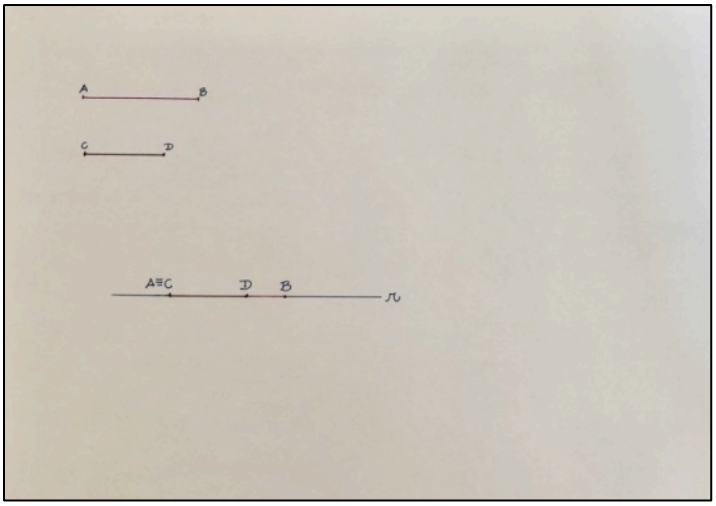
O procedimento para a subtração de segmentos pode ser realizado seguindo os passos, de acordo com Araújo (2016, p.18):

1º) construir uma reta r;

2º) realizar o transporte dos segmentos para a reta r, sobrepondo o segmento de menor dimensão sobre o maior;

3º) a partir da transposição ficará visível a diferença;

Figura 8 – Subtração de segmentos



Fonte: Reproduzido de Araújo (2016, p.18).

Justificativa: O ponto A e C são congruentes, dessa forma AB – CD, representa DB.

Multiplicação de segmentos

O procedimento para a multiplicação entre dois números usando segmentos de reta pode ser realizado, seguindo os passos, de acordo com Araújo (2016, p.18):

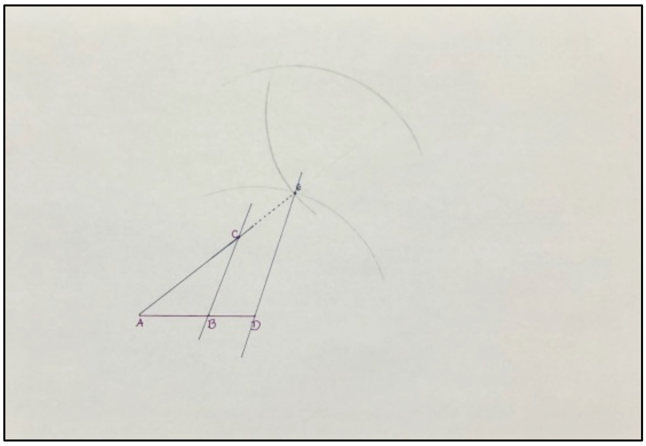
1º) adotar dois segmentos, AC e AD, realizando os seguintes procedimentos;

2º) tomar o segmento AB como uma unidade de medida, como mostra a figura, e traçar a reta que passa pelos pontos B e C;

3º) traçar uma reta paralela a BC, passando pelo ponto D; (ver página 35);

4º) a reta corta a reta suporte AC no ponto E. O segmento AE é o resultado da multiplicação que se espera.

Figura 9 – Multiplicação de segmentos



Fonte: Reproduzido de Araújo (2016, p.19).

Justificativa: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ → AC. AD= AB. AE = AC. AD= AE (Araújo, 2016, p.19).

Divisão de segmentos

O procedimento para a divisão de segmentos pode ser realizado seguindo os passos, de acordo com Machado (2016, p.24):

1º) construir um segmento de reta $\overline{AB}$;

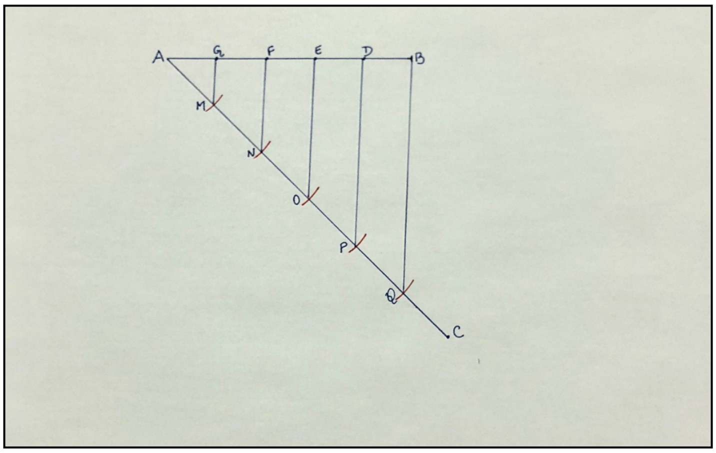
2º) construir um segmento de reta $\overline{AC}$ suporte com origem no ponto A suficientemente grande;

3º) dividir o segmento $\overline{AC}$ em partes iguais, com qualquer abertura do compasso. A ponta seca em A, fazer um risco e chamar de intersecção de M, com a mesma abertura fazer o mesmo procedimento, obtendo uma nova intersecção de N e assim sucessivamente;

4º) traçar o segmento de reta $\overline{BQ}$, a partir disto construir uma paralela a esse segmento passando por P;

5º) traçar as demais paralelas como mostra a figura.

Figura 10 – Divisão de segmentos



Fonte: Reproduzido de Machado (2016, p.24).

Justificativa: por construção: $\frac{\overline{AM}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GF}}$ Como $\overline{AM} = \overline{MN}$, então, $\overline{AG} = \overline{GF}$ $\overline{AG} = \overline{GF} = \overline{FE} = \overline{ED} = \overline{DB}$ (MACHADO, 2016, p.26).

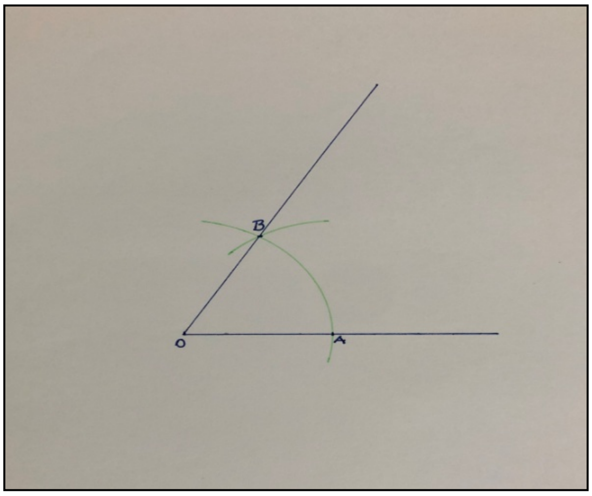
Construção do ângulo

Construir um ângulo, $\widehat{AOB}$ seguindo os passos, de acordo com Lopes e Kanegae (1995, p.38):

1º) marcar um segmento $\overline{OA}$, com ponta seca em O, determine um arco A;

2º) determinar o ponto B, com um arco de centro em A e raio $\overline{OA}$.

Figura 11– Construção do ângulo

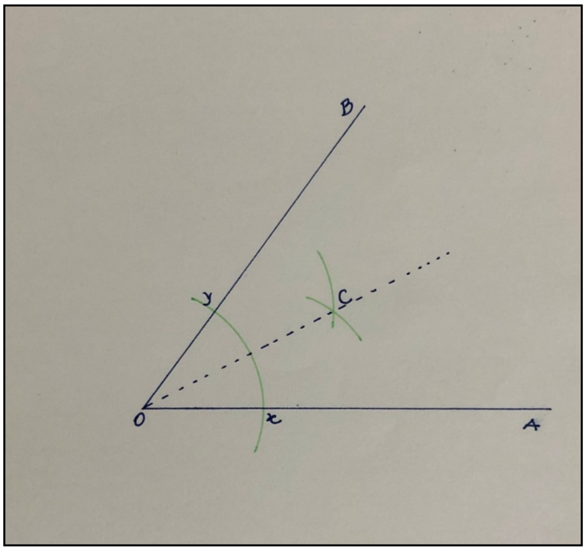


Fonte: Lopes e Kanegae (1995, p.38).

Construção da bissetriz de um ângulo

A construção da bissetriz é descrita de acordo com Wagner (1993, p.4-5): A bissetriz de um ângulo $\widehat{AOB}$ é a semirreta $\overrightarrow{OC}$ tal que $\widehat{AOC}=\widehat{COB}$. Costuma-se dizer que a bissetriz " divide" um ângulo em dois outros iguais. Para construir a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$ dado, traça-se um círculo de centro O determinando os pontos X e Y nos lados do ângulo. Em seguida, traçam-se dois círculos de mesmo raio com centros em X e Y, que possuem C como um dos pontos de interseção.

Figura 12– Construção bissetriz



Fonte: Reproduzido de Wagner (1993, p.5).

Justificativa da construção: pela construção feita, os triângulos OXC e OYC são congruentes (caso LLL) e, portanto, $\widehat{XOC}=\widehat{COY}$. Lembrando, ainda, que "a bissetriz de um ângulo é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos lados do ângulo" (WAGNER, 1993, p.4).

Transporte de ângulos

Transportar ângulos significa construir um ângulo congruente ao outro, com auxílio do compasso. Para tanto, siga os passos, de acordo com Pinto (1992,p.56):

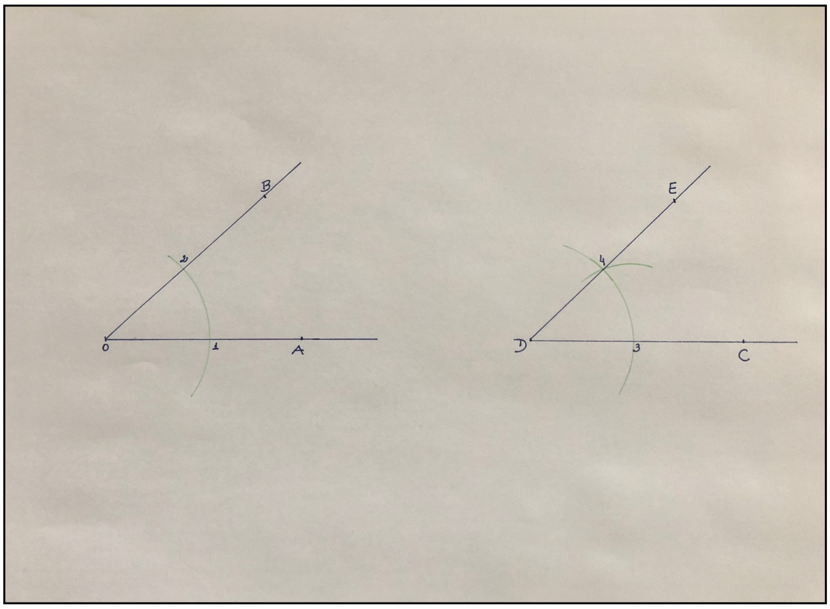
1º) abrir o compasso com uma abertura qualquer, coloca-se a ponta seca no ponto O e traça-se um arco cruzando os lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ do ângulo $\widehat{AOB}$, encontrando os pontos 1 e 2;

2º) com a mesma abertura do compasso, coloca-se a ponta seca no ponto D e traça-se um arco cruzando a semirreta $\overrightarrow{DC}$ encontrando o ponto 3;

3º) coloca-se a ponta seca no ponto 1 e a de grafite no ponto 2 e, com a mesma abertura do compasso, coloca-se a ponta seca no ponto 3 e traça-se um arco que cruze o arco traçado anteriormente, encontrando o ponto 4;

4º) traça-se a semirreta $\overrightarrow{D4}$ e nela coloca-se o ponto E, pois a semirreta $\overrightarrow{DE}$ é o outro lado do ângulo $\widehat{CDE}$ pedido. Assim, tem-se $\widehat{AOB} \equiv \widehat{CDE}$.

Figura 13 – Transporte de ângulos



Fonte: Reproduzido de Pinto (1992, p.56).

Justificativa: por construção, "o ângulo $\widehat{CDE}$ tem como um de seus lados a semirreta DC, e, pelo caso LLL de congruência de triângulos, é congruente ao ângulo $\widehat{AOB}$ dado, sendo, portanto, o "ângulo procurado", de acordo com Rezende e Queiroz (2018, p.125).

Construção da mediatriz de um segmento

Mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos extremos desse segmento, pode-se realizar sua construção seguindo os passos, de acordo com Silva (2018, p.74):

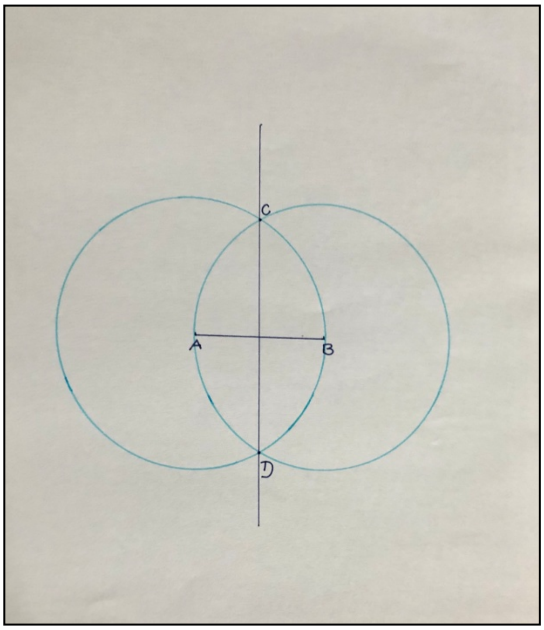
1º) fixe a ponta seca do compasso em A e trace uma circunferência com raio maior que a metade da distância de A até B;

2º) fixe a ponta seca do compasso em B e trace uma circunferência com o mesmo raio usado anteriormente, determinando, na interseção, com a outra circunferência, os pontos C e D;

3º) trace uma reta pelos pontos C e D, essa reta será a mediatriz de $\overline{AB}$.

Uma observação importante é que o ponto de interseção entre o segmento e a mediatriz é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Figura 14 – Mediatriz de um segmento



Fonte: Reproduzido de Silva (2018, p.74).

Justificativa: por construção $\overline{AC}$ = $\overline{AD}$= $\overline{BC}$= $\overline{BD}$, implicando que ADBC é um losango. Logo, suas diagonais AB e CD são perpendiculares e se interceptam em seus respectivos pontos médios. Portanto, a reta $\overleftrightarrow{CD}$ é mediatriz de AB (SILVA, 2018, p.8).

Construção do ponto médio

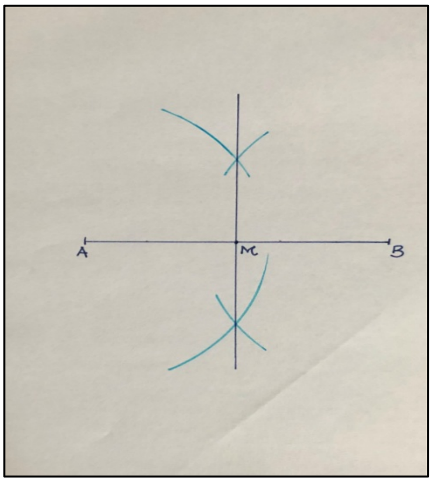
Ponto médio divide o segmento em duas partes congruentes. Para sua construção, segue os passos, de acordo com Pinto (1992, p.37-38):

1º) traçar dois arcos com a ponta seca do compasso em A, e abertura maior que a metade da medida do segmento $\overline{AB}$;

2º) com a mesma abertura do compasso e, agora com a ponta seca em B, traça-se dois arcos que cruzam os dois outros traçados anteriormente e, então, encontra-se as interseções.

3º) traçar uma reta que passa por essa interseção.

Figura 15 – Ponto Médio



Fonte: Reproduzido de Pinto (1992, p.37-38.)

Justificativa: por construção, o segmento $\overline{AM} = \overline{MB}$.

Construção da reta perpendicular

Traçar uma reta perpendicular a uma reta dada, passando por um ponto P fora da reta, seguindo os passos, de acordo com Lima (2015b, p.4):

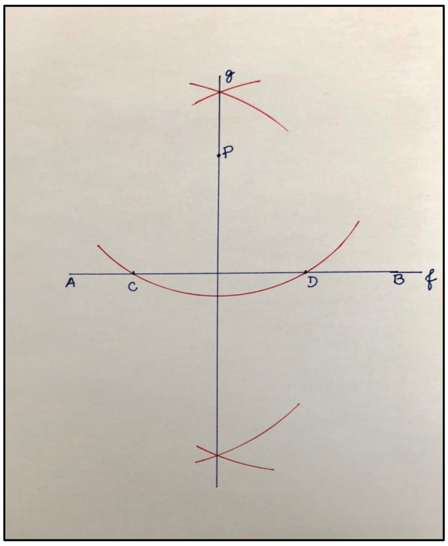
1º) considera-se o segmento $\overline{AB}$ e um ponto P um ponto fora do segmento;

2º) com a ponta seca em P, traça-se um arco determinando, no segmento $\overline{AB}$, os pontos C e D;

3º) com a ponta seca em C, com raio maior que $\overline{PA}$, marca dois arcos, inferior e superior; com a ponta seca em D, utilizando a mesma abertura anterior, marca dois arcos, inferior e superior, formando um ponto de interseção em P;

4º) encontra-se uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ passando por P.

Figura 16 – Reta perpendicular



Fonte: Reproduzido de Lima (2015b, p.4).

Justificativa: por construção, a reta g procurada é a mediatriz do segmento AB. Em ambos os casos, o ponto P pertence à reta perpendicular, pois equidista das extremidades do segmento AB (REZENDE; QUEIROZ, 2018, p.127).

Traçar uma reta perpendicular à outra reta, passando pelo ponto pertencente a ela, de acordo com Lopes e Kanegae (1995, p.10):

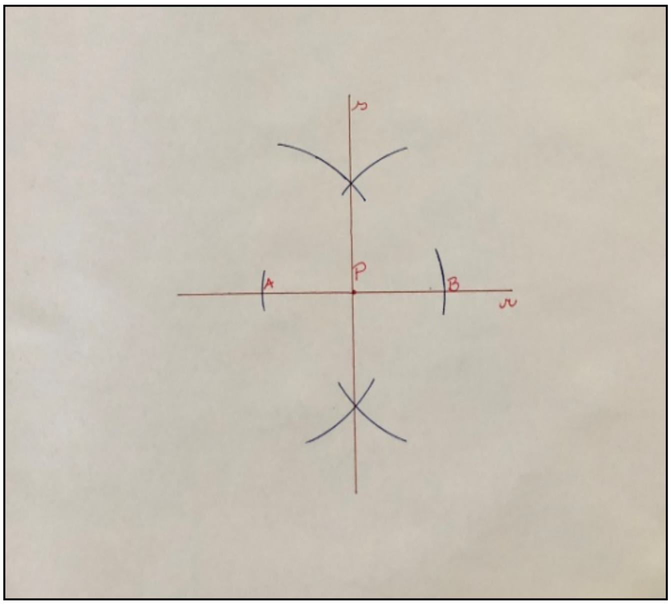
1º) construir uma reta r, sobre ela marcar o ponto P;

2º) com a ponta seca em P, fazar arcos no lado direito e esquerdo, determinando os pontos A e B;

3º) com a ponta seca em A, com raio maior que $\overline{PA}$, marcar dois arcos, inferior e superior; com a ponta seca em B, utilizando a mesma abertura anterior, marcar dois arcos, inferior e superior, formando um ponto de interseção, que é o ponto C;

4º) traçar uma reta s passando por P e C, logo, a reta r é perpendicular à reta s.

Figura 17 – Reta perpendicular



Fonte: Reproduzido de Lopes e Kanegae (1995, p.10).

Justificativa: determina-se um segmento auxiliar AB em r, do qual P é o ponto médio. A reta s, é a mediatriz do segmento AB, é a reta procurada (REZENDE; QUEIROZ, 2018, p.126).

Construção da reta paralela

Traçar uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto fora desta reta, seguindo os passos de Lima (2015b, p.5):

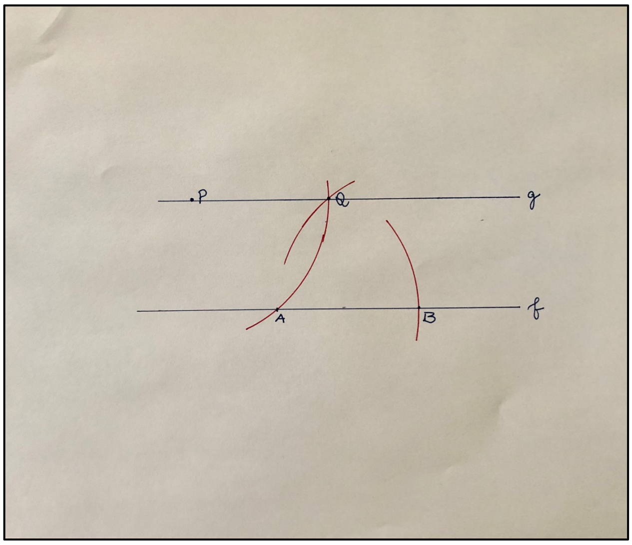
1º) com o compasso centrado em P, marque um ponto A sobre a reta f e construa um arco de circunferência;

2º) com a mesma abertura e com centro em A, marque um ponto B sobre a reta f;

3º) com a mesma abertura do compasso e com centro em B, faça um arco de circunferência encontrando o ponto Q;

4º) a reta que passa por P e Q é paralela à f.

Figura 18 – Reta paralela



Fonte: Reproduzido de Lima (2015b, p.5).

Justificativa: por construção, a reta PQ é paralela à reta f, pois o quadrilátero ABQP tem lados opostos congruentes, sendo, portanto, um paralelogramo (REZENDE; QUEIROZ, 2018, p.129).

Construção do triângulo equilátero

Para construir um triângulo equilátero, segue-se os passos, de acordo com Silva (2018, p.5-6):

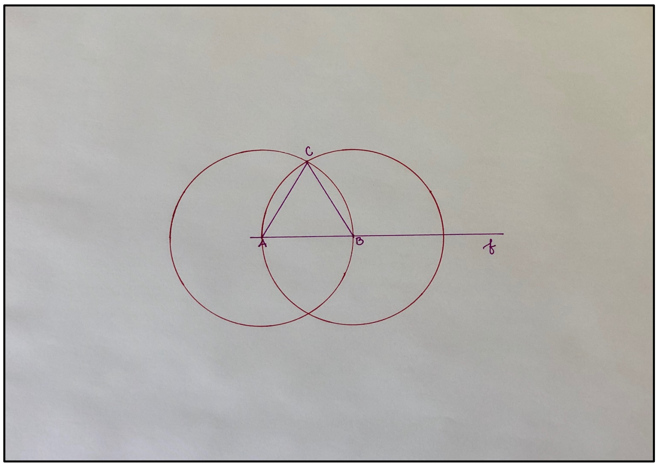
1º) traçar uma reta f e nela marcar um ponto A;

2º) com centro em A, traçar uma circunferência de raio medindo a, determinando em uma das interseções, à direita, por exemplo, o ponto B;

3º) traçar uma circunferência com centro em B e raio medindo a, determinando em uma das interseções com a primeira circunferência, acima, por exemplo, o ponto C;

4º) traçar os lados AC e BC. O triângulo ABC é equilátero.

Figura 19 – Triângulo equilátero



Fonte: Reproduzido de Silva (2018, p.5-6).

Justificativa: por construção, observa-se que na construção das circunferências foi usada a mesma medida de raio, logo $\overline{AB}$= $\overline{BC}$= $\overline{CA}$ (SILVA, 2018, p.6)

Traçar o ortocentro de um triângulo

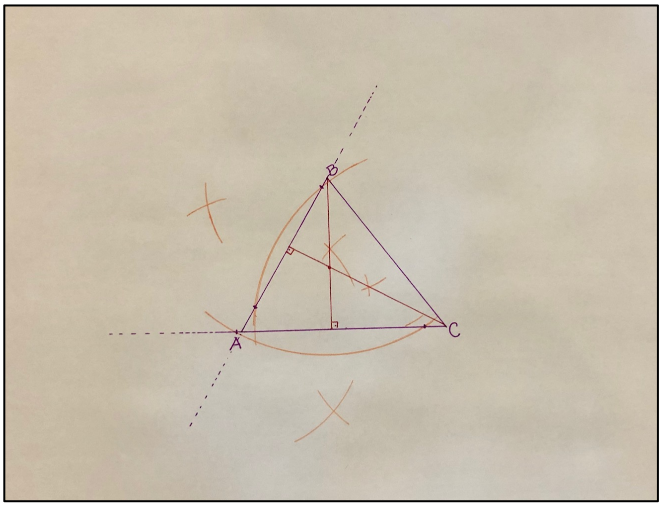
A altura de um triângulo é o segmento que possui uma extremidade em um vértice de um triângulo e tem a característica de ser perpendicular ao lado oposto. As três alturas de um triângulo se cruzam em um único ponto chamado ortocentro (H). Para determinar o ortocentro de um triângulo, basta, portanto, traçar duas alturas. Por um triângulo acutângulo traçar o ortocentro, segue-se os passos, de acordo com Lopes e Kanegae (1995, p.54):

1º) definir a altura em relação ao lado AC, e, com ponta seca em B, traçar um arco sobre $\overline{AC}$, construindo uma reta perpendicular;

2º) prolongar os lados do triângulo no segmento$\overline{AB}$, e, com a ponta seca do compasso em C, traçar uma reta perpendicular a $\overline{AB}$ que passa por C;

3º) na interseção, traçar o ortocentro.

Figura 20 – Ortocentro de um triângulo



Fonte: Reproduzido de Lopes e Kanegae (1995, p.54).

Construção arco capaz

A construção do arco capaz é descrita segundo Silva (2018, p.9): Dado um segmento de medida m e um ângulo α, o lugar geométrico dos pontos P, tais que $\widehat{APB}$= α é a reunião de dois arcos de circunferência, simétricos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$e tendo os pontos A e B em comum. Tais arcos são capazes de α em relação a AB seguindo os passos:

1º) traçar uma reta r e sobre ela um segmento $\overline{AB}$= *m;*

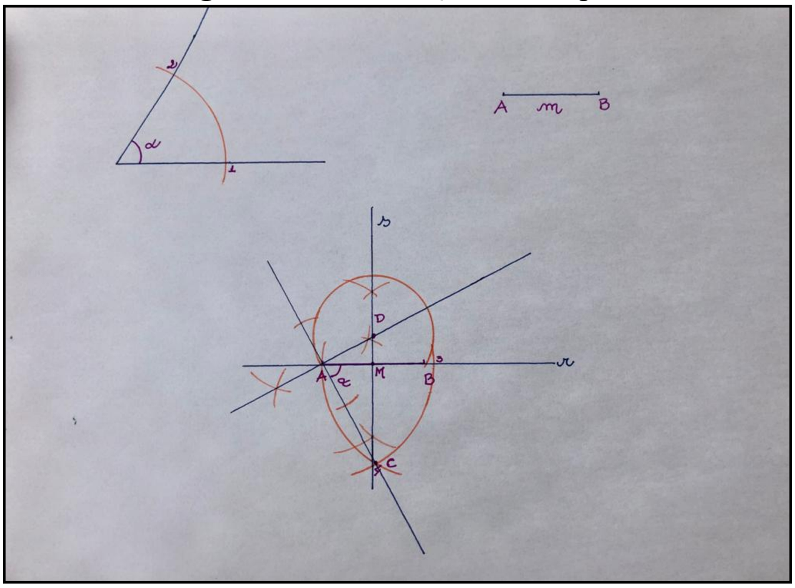
2º) traçar a reta s mediatriz do segmento $\overline{AB}$, determinando na interseção com r o ponto M;

3º) traçar a reta $\overleftrightarrow{AC}$, tal que $\widehat{BAC}$= α, ver transporte de ângulos (p.30);

4º) traçar a reta perpendicular à $\overleftrightarrow{AC}$ passando por A, determinando na interseção com s o ponto D, ver (p.34);

5º) traçar $\widehat{AB}$com centro em D e raio igual a $\overline{AD}$.

Figura 21 – Construção arco capaz



Fonte: Reproduzido de Silva (2018, p.9).

Justificativa: deve-se mostrar que, para todo P ∈ $\widehat{AB}$ tem-se $\widehat{APB}$=α. Como $\widehat{BAC}$ = α, então $\widehat{BAD} = 90° - \alpha$. Sendo $M = r \cap s$, temos $\widehat{AMD} = 90°$ *e assim* $\widehat{AMD} = \alpha$. Os triângulos ADM e BDM são congruentes (LAL). Logo, tem-se $\widehat{ADB}$=2α. Como um ângulo inscrito em uma circunferência mede a metade do ângulo central correspondente, tem-se $\widehat{APB}$ = α para todo P ∈ $\widehat{AB}$, segundo Silva (2018, p.9).

Construção $\sqrt{a}$

A partir de um segmento unitário e dado um segmento de medida a, para construir um segmento de medida $\sqrt{a}$ segue-se os passos, de acordo com Silva (2018, p.13):

1º) sobre uma reta r, determinar um segmento $\overline{AB}$ = a e um segmento $\overline{BC}$=1;

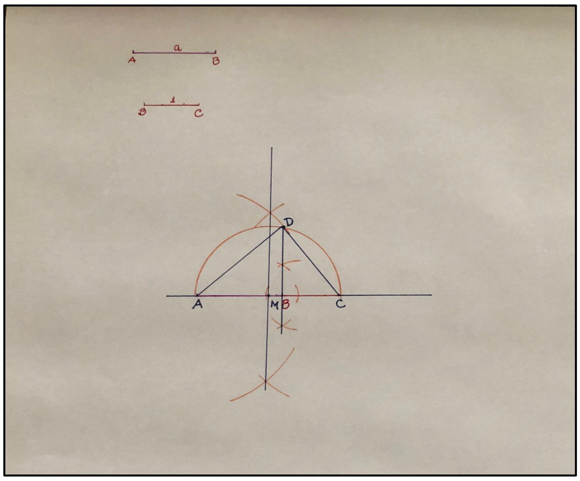
2º) determinar o ponto M, ponto médio de AC, por meio da construção da reta mediatriz;

3º) traçar o raio $\overline{MA}$, com centro em M, a semicircunferência superior à r;

4º) traçar uma reta perpendicular à r passando por B, determinando na interseção com a semicircunferência o ponto D;

5º) $\overline{DB}$= $\sqrt{a}$ é a solução do problema.

Figura 22 – Construção $\sqrt{a}$



Fonte: Reproduzido de Silva (2018, p.13).

Justificativa: como um triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo, o triângulo ADC é retângulo. Tem-se ainda que BD é a altura do triângulo, AB é a projeção de AD sobre AC e BC é a projeção de DC sobre AC. Daí, pelas relações métricas dos triângulos retângulos , tem-se $\overline{BD^2}$= $\overline{AB}$. $\overline{BC}$, logo $\overline{BD^2}$ = a . 1 e, portanto, BD = $\sqrt{a}$ (SILVA, 2018, p.13).

Construção média proporcional ou média geométrica

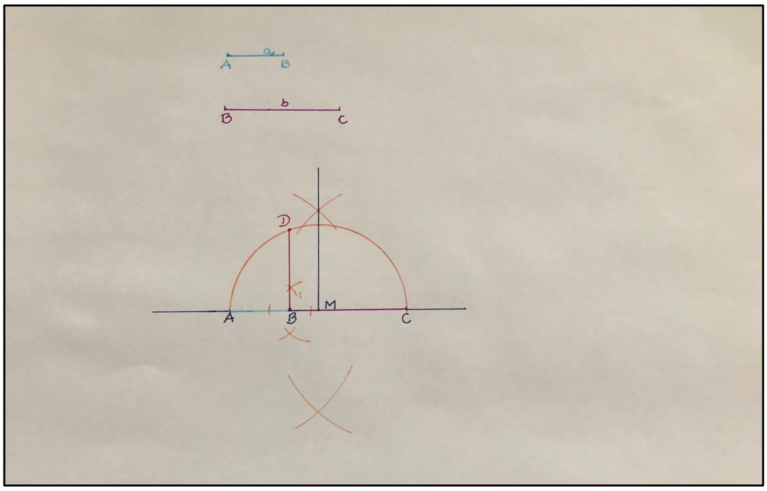
Dados a e b, diz-se que x é a média proporcional ou média geométrica se a, x, x e b formam nesta ordem uma proporção (contínua), de acordo com Lopes e Kanegae (1995, p.36). Dados a e b, determina-se a média geométrica de a e b, seguindo os passos:

1º) trace numa reta r auxiliar aos segmentos de medidas a e b, respectivamente.

2º) trace a semicircunferência de extremidade A e C (M é o centro), calculado pelo ponto médio;

3º) determine D, na semicircunferência, traçando por B uma reta perpendicular a r. Destaque $(\overline{BD})$ que é a média geométrica entre a e b.

Figura 23 – Construção da média proporcional ou geométrica



Fonte: Reproduzido de Lopes e Kanegae (1995, p.36).

Justificativa: em todo triângulo retângulo, cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e a sua projeção sobre a hipotenusa, segundo Rezende e Queiroz (2018, p.157).

Construção da 4ª proporcional

A construção da 4º proporcional é descrita, segundo Silva (2018,p.12): Dados três segmentos de medidas a, b e c, diz-se que um segmento de medida d é a quarta proporcional desses segmentos se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Para construir a 4º proporcional dos segmentos de medidas a, b e c, deve-se:

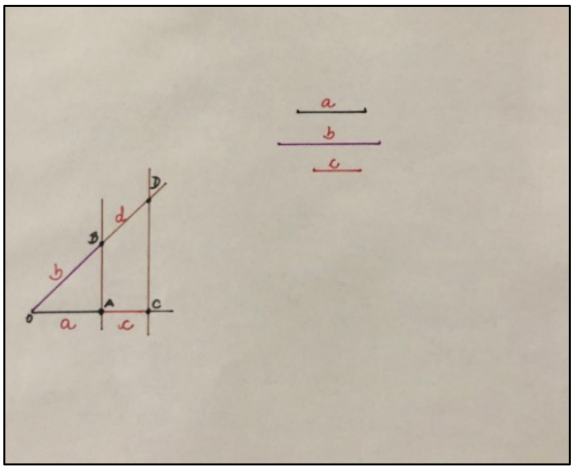
1º) sobre um ângulo qualquer de vértice O, tomar, sobre um dos lados, os segmentos $\overline{OA} =$a, $\overline{AC}$= c e sobre o outro lado o segmento $\overline{OB}$= b;

2º) traçar uma paralela passando pelos pontos A e B;

3º) traçar uma reta paralela $\overleftrightarrow{AB}$ passando pelo ponto C, determinando na interseção com a semirreta $\overrightarrow{OB}$ o ponto D;

4º) tem-se $\overline{BD}$= d solução do problema.

Figura 24 – Construção da 4º proporcional



Fonte: Reproduzido de Silva (2018, p.13).

Justificativa: a obtenção da 4º proporcional se dá pelo teorema de Tales, sua justificativa é direta, segundo Silva (2018, p.12).

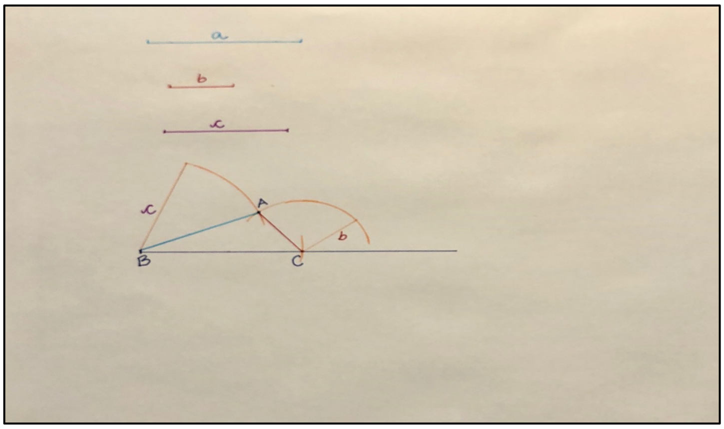
Construção de um triângulo dados seus lados

Para construir um triângulo a partir dos seus lados, utiliza-se do passo a passo de Wagner (2009, p.10):

1º) desenhar uma reta r e, sobre ela, marcar um ponto que se chamará de B;

2º) transportar o segmento a: pegue o compasso, ponha a ponta seca em uma das extremidades e abra até que a ponta grafite coincida com a outra extremidade. Ponha, agora, a ponta seca em B e trace um pequeno arco cortando a reta f. Este é o ponto C tal que BC=a.

Figura 25 – Construção de um triângulo dados seus lados



Fonte: Reproduzido de Wagner (2009, p.10).

Justificativa: uma solução do problema é o triângulo ABC e está bem determinado pelo caso L.L.L. de congruência de triângulos, ela existe desde que cada um dos números a, b e c, seja menor que a soma dos outros dois (REZENDE; QUEIROZ, 2018, p.137-138).

Construção de um triângulo a partir de um dos lados e dois ângulos

Para construir um triângulo a partir de um dos lados e dois ângulos, utiliza-se do passo a passo de Wagner (2009, p.10):

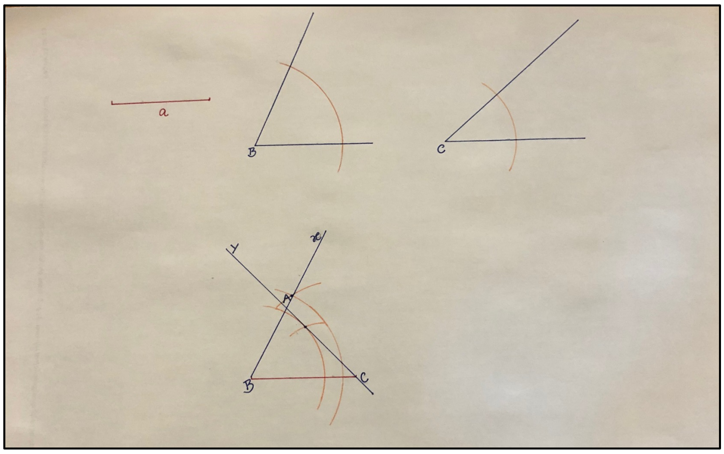
1º) desenhar o segmento BC= a, sobre a reta f;

2º) transportar o ângulo B, para este segmento, utilizando-se da descrição anterior;

3º) transportar o ângulo C, para este segmento. O ponto de interseção das duas semirretas será o ponto A;

4º) traçar os segmentos de reta, formando o triângulo e verificando que os ângulos CBX e BCY são iguais.

Figura 26 – Construção de um triângulo a partir de um dos lados e dois ângulos



Fonte: Reproduzido de Wagner (2009, p.10).

Justificativa: o triângulo ABC é uma solução do problema e está univocamente determinada pelo caso A.L.A. de congruência de triângulos. Se optar pela escolha do outro semiplano, se obterá um triângulo congruente ao triângulo ABC(REZENDE; QUEIROZ, 2018, p.139).

Construção do quadrado

Para construir um quadrado usando um segmento AB como seu lado, basta seguir os passos abaixo, segundo Araújo (2016, p.22):

1º) colocar o segmento em uma reta qualquer;

2º) construir uma reta perpendicular sobre o ponto A.

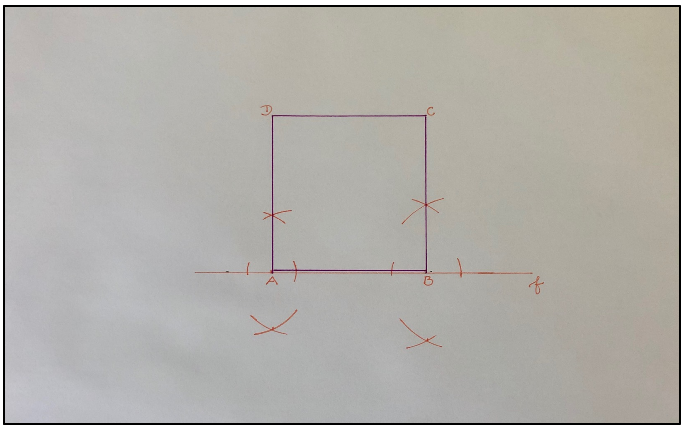
3º) encontrar, nessa reta, o ponto D, usando a abertura do compasso no tamanho do segmento AB. Basta traçar o arco de B com D com centro em A.

4º) construir uma reta perpendicular sobre o vértice B;

5º) da mesma forma que o passo 3º, construir um arco com a abertura do segmento AB, desta vez com centro em B, e encontrar o ponto C na reta perpendicular a B;

6º) uma vez encontrado todos os vértices, basta ligá-los e se terá o quadrado com o lado do tamanho do segmento AB.

Figura 27 – Construção do quadrado



Fonte: Reproduzido de Araújo (2016, p.22).

Construção do retângulo

Para construir um retângulo usando régua e compasso, deve-se seguir os passos, de acordo com Silva (2013, p.22):

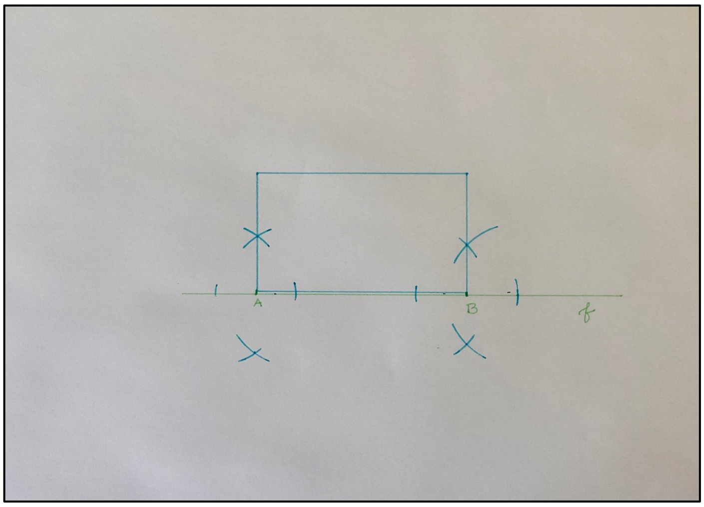
1º) construir uma reta qualquer e uma perpendicular em um ponto qualquer da mesma;

2º) transferir para cada uma dessas duas reta-suporte, um, e apenas um dos segmentos, em cada uma, tendo o cuidado de que um dos extremos de cada um deles seja posto sobre o ponto de interseção das retas;

3º) em cada um dos outros dois extremos, construir à reta perpendicular a reta suporte, que passa nesse ponto. O retângulo fica definido na região delimitada pelas quatro retas construídas dessa maneira;

4º) é importante esclarecer que, na figura, os segmentos AB e EG são bem congruentes, bem como os segmentos CD e EF, e o retângulo é o retângulo EFHG.

Figura 28– Construção do retângulo.



Fonte: Reproduzido de Silva (2013, p.22).

Construção do pentágono

Para construir um pentágono a partir do segmento $\overline{AB}$, segue-se os passos, de acordo com Araújo (2016, p.23-24), em um segmento AB:

1º) traçar duas circunferências com raio AB. Uma com centro em A, outra com centro em B;

2º) traçar a reta que passa pelos pontos de interseção das duas circunferências marcando o ponto M, ponto médio de AB;

3º) traçar uma reta perpendicular ao raio AB no ponto A e marcar o ponto de interseção superior da reta com a circunferência como ponto F;

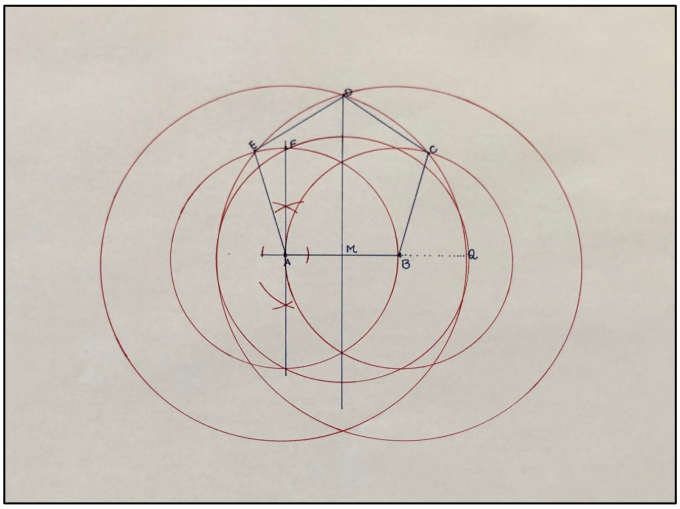
4º) traçar uma circunferência, com centro em M e raio MF. Prolongar o raio a partir do ponto B e marcar a interseção deste prolongamento com esta nova circunferência como ponto Q.

5º) com centro em A, traçar uma circunferência com raio AQ e marcar as interseções da mesma com a reta mediatriz do segmento AB e com a circunferência de centro em B e raio AB. A primeira interseção será o ponto D e a segunda será o ponto C;

6º) com o centro em B, traçar uma circunferência com raio BD e marcar a interseção da mesma com a primeira circunferência como ponto E;

7º) O pentágono está formado ligando os pontos A,B,C, D e E.

Figura 29 – Construção do pentágono



Fonte: Reproduzido de Araújo (2016, p.23-24).

Construção do hexágono

Para a construção do hexágono regular a partir do segmento AB, segue-se os passos, de acordo com Araújo (2016, p.25-26), em um segmento AB:

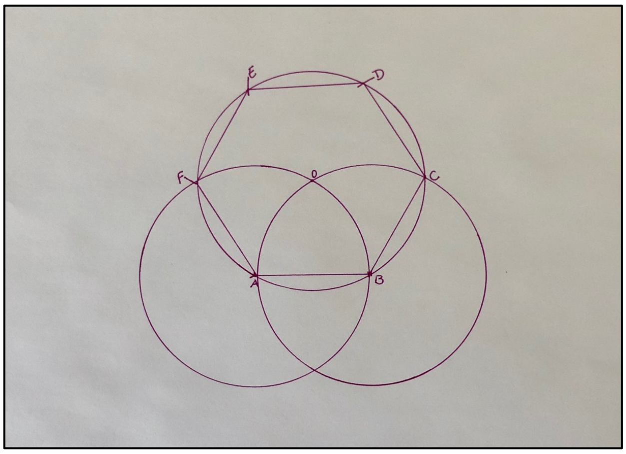
1º) traçar duas circunferências, uma com centro em A, outra com centro em B. Ambas com a abertura do compasso igual ao segmento;

2º) traçar outra circunferência com mesmo raio em um dos pontos de interseção;

3º) dividir esta circunferência em partes iguais, usando a abertura do compasso;

4º) ligar os pontos encontrados e o hexágono estará formado.

Figura 30 – Construção do hexágono

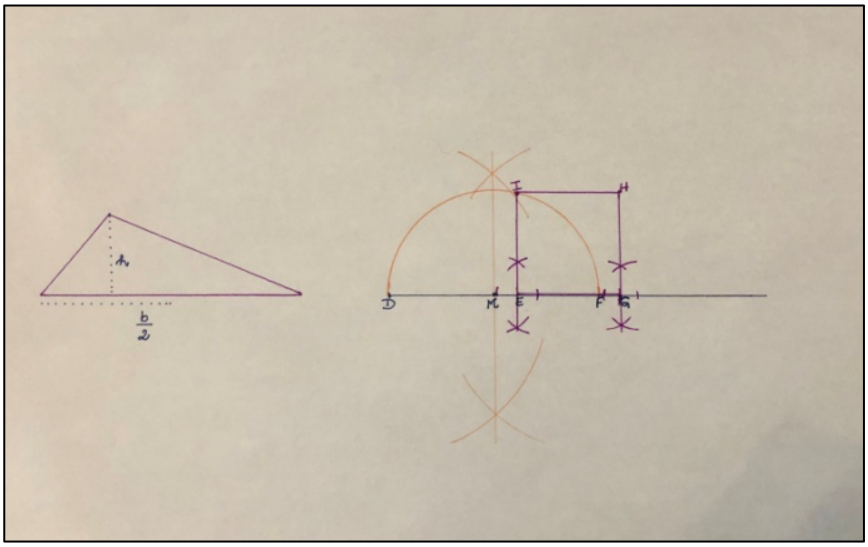


Fonte: Reproduzido de Araújo (2016, p.25-26).

Imagem da quadratura do triângulo

Para esta construção, segue-se os passos descritos na página 11 do produto educacional.

Figura 31 – Quadratura do triângulo

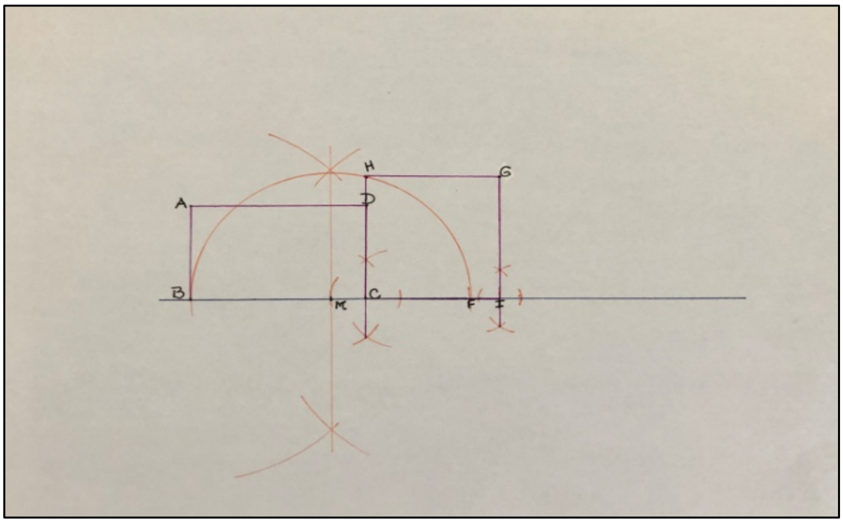


Fonte: autora (2020).

Imagem da quadratura do retângulo

Para esta construção, segue-se os passos descritos na página 13 do produto educacional.

Figura 32 – Quadratura do retângulo

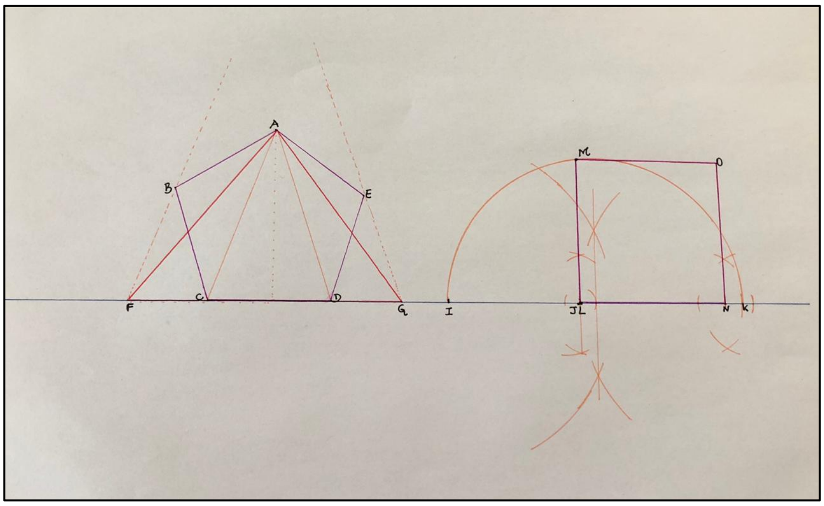


Fonte: autora (2020).

Imagem da quadratura do pentágono

Para esta construção segue os passos descritos nas páginas 14 e 11.

Figura 33 – Quadratura do pentágono.

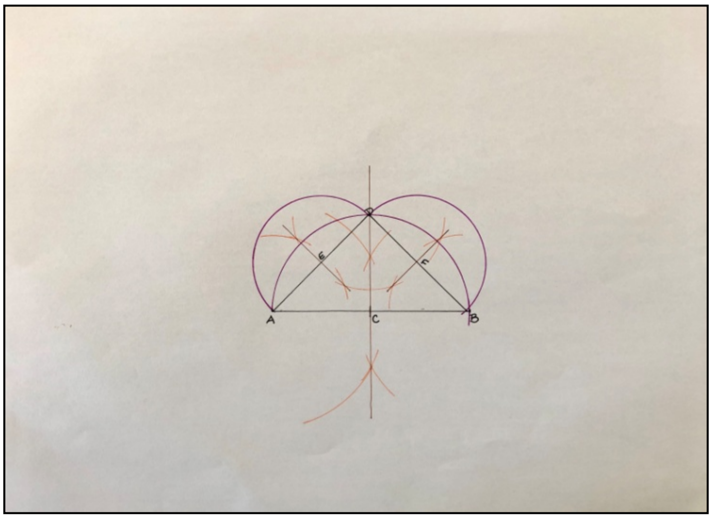


Fonte: autora (2020).

Imagem da quadratura da Lúnula de Hipócrates

Para esta construção segue os passos descritos na página 16.

Figura 34 – Quadratura da Lúnula de Hipócrates



Fonte: autora (2020).

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n.2, p. 22-52. 2012.

ARAÚJO, Emanuel Oliveira de. **Construções geométricas com régua e compasso e algumas aplicações**. 2016. 50f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=77580. Acesso em: 25 set. 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** educação é a base. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 09 mai. 2020.

FERRI, Lívia Conceição Nunes Machado. **Por uma Geometria mais construtiva e menos analítica**. 2020. 93f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação de Ensino das Ciências Exatas, Universidade Federal do Rio Grande, Santo Antônio da Patrulha, 2020.

ITZCOVICH, Horacio. **Iniciação ao estudo didático da geometria:** das construções às demonstrações. 1. ed. São Paulo: Anglo, 2012.

LIMA, Kelisson Ferreira de. **Polígonos construtíveis por régua e compasso: Uma apresentação para professores da Educação Básica**. 2015, 54f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015a. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=83569. Acesso em: 14 dez. 2019.

LIMA, Vilmar de Almeida. **Resolução Geométrica de Equações do Segundo Grau com utilização de régua e compasso.** 2015. 25f. Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática – Profmat, Universidade Federal de São João Del-Rei, São João Del-Rei, 2015b. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=92887. Acesso em: 25 set. 2019.

LOPES, Aislan Sirino. **Critério para a construtibilidade de polígonos regulares por régua e compasso e números construtíveis**. 2014, 51f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8952/3/Dissertacao%20de%20Aislan%20Sirino%20Lopes.pdf. Acesso em: 11 dez. 2019.

LOPES, Elizabeth Teixeira; KANEGAE, Cecília Fujiko. **Desenho geométrico**: texto e atividades. 3. ed. São Paulo: Scipione, 1995.

MACHADO, Joel Araújo . **Cálculo de áreas de regiões formadas abaixo de funções constante, afim e quadrática por meio de construções geométricas com régua e compasso**. 2016. 62f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Rede

Nacional – Profmat, Universidade Federal de Tocantins, Palmas, 2016. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94757. Acesso em: 25 set. 2019.

PAPA NETO, Angelo. **Licenciatura em matemática:** geometria plana e construções geométricas. Fortaleza: UAB, 2017.

PINTO, Nilda Helena S. Corrêa. **Desenho geométrico**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 1992.

PROCÓPIO, Wadames. **O currículo de matemática do estado de São Paulo:** sugestões de atividades com o uso do GeoGebra. 2011. 193f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/10895/1/Wadames%20Procopio.pdf. Acesso em: 20 mar. 2020.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bantorim de. **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas**. 2. ed. Campinas: Unicamp, 2018.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lenda. 1. ed. Rio de Janeiro. Zahar, 2012.

________; PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de história da matemática.** 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANTOS, Fabian Kosme Castello Branco. **Construções geométricas e equivalências de áreas**. 2017. 75f. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2017.

SILVA, Alex Gomes da. **Construções geométricas**. 2013. 122f. Dissertação (Mestrado) - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=41021. Acesso em: 04 nov. 2019.

SILVA, Henrique José Ornelas. **Construções Geométricas com régua e compasso e dobraduras.** 2018. 100f. Dissertação (Mestrado)- Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Viçosa, Florestal – Minas Gerais, 2018.

SILVA, Patrícia Lima da; BALTAZAR, Rene; VENTURELLA, Matheus. O problema do sofá ilustrado no GeoGebra. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 23, n. 57, p. 46-58, jan/mar. 2018. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/969/pdf#. Acesso em: 12 jun. 2020.

SILVA, Vonicleiton Ribeiro. **Construções com régua e compasso**. 2019. 100f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2019. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170260547. Acesso em: 04 nov. 2019.

TOMEI, Carlos. **Euclides**: a conquista do espaço. 1. ed. São Paulo: Odysseus, 2003.

WAGNER, Eduardo. **Construções geométricas.** 1. ed. Rio de Janeiro: Gráfica Wagner Ltda, 1993.

________. **Uma introdução às construções geométricas.** 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

WOLFF, Maria Elisa. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE:** produções didático-pedagógicas. 2.ed. Irati: Secretaria de Educação do Estado do Paraná, 2013.