UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

LETÍCIA CORRÊA PEREIRA

UM GUIA DE ATIVIDADES COMO ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA: ÊNFASE EM GRAFOS

SANTO ANTÔNIO DA PATRULHA – RS
2020

LETÍCIA CORRÊA PEREIRA

UM GUIA DE ATIVIDADES COMO ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA: ÊNFASE EM GRAFOS

Produto Educacional desenvolvido sob orientação do Prof. Dr. Rene Baltazar e apresentado à banca examinadora como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal do Rio Grande.

SANTO ANTÔNIO DA PATRULHA

2020

Ficha catalográfica

P436g Pereira, Letícia Corrêa.
Um guia de atividades como alternativa para o ensino de combinatória: ênfase em grafos [Recurso Eletrônico] / Letícia Corrêa Pereira. – Santo Antônio da Patrulha, RS: FURG, 2020.
33 f. : il. color

Produto Educacional da Dissertação de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, sob a orientação do Dr. Rene Baltazar.
Disponível em: https://ppgece.furg.br/
http://repositorio.furg.br/

1. Matemática 2. Análise Combinatória 3. Problemas de Contagem 4. Grafos 5. Educação Ambiental I. Baltazar, Rene II. Título.

CDU 51

Catalogação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Prezado (a) leitor (a), o Produto Educacional apresentado a seguir é resultado da dissertação intitulada: "A Educação Matemática tangenciando a Educação Ambiental: uma proposta a partir do ensino de Combinatória" apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Rio Grande, sob orientação do Professor Dr. Rene Baltazar.

Inicialmente o Produto Educacional havia sido caracterizado como um Mini Curso, pois tinha-se a intenção de apresentá-lo em eventos com ênfase em Ensino de Matemática. Porém diante de algumas sugestões e estudos realizados, percebeu-se a necessidade de encontrar outra maneira para categorizar o Produto, que estivesse de certa forma, em consonância com a proposta elaborada.

Com isso, esperava-se compartilhar esse Produto Educacional em um evento com ênfase em Matemática e averiguar quais observações possíveis poderiam ser inclusas na proposta. Contudo, diante da atual situação mundial enfrentada pela Pandemia do Coronavírus, não foi possível compartilhar os conhecimentos pensados nesse trabalho. Da mesma forma em que a autora não conseguiu realizar a aplicação do Guia de Atividades na realidade em que atua, devido ao cancelamento das atividades escolares presenciais, em conformidade ao distanciamento social.

Então, de acordo com discussões elaboradas pela autora e seu orientador, buscou-se definir esse Produto como um Guia de Atividades, que apresenta uma proposta de ensino com temática de Combinatória. Pretende-se com este Guia de Atividades trabalhar noções de Combinatória e/ou Problemas de Contagem, dando ênfase à Teoria de Grafos, com turmas dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

A partir de estudos elaborados pelos autores sobre a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) foi possível pensar em uma proposta que pudesse potencializar o ensino de Combinatória no Ensino Fundamental, criando possíveis condições para o aprimoramento do Raciocínio Combinatório. As discussões sobre o termo Raciocínio Combinatório, encontram-se na dissertação que originou este Produto Educacional (PEREIRA, 2020). Além disso, buscou-se planejar esse Guia de Atividades de acordo com um determinado contexto, podendo ser ajustado, para distintas realidades.

Portanto, espera-se que ao utilizar esse Produto Educacional, como recurso para o ensino de Combinatória, seja possível encontrar alguns aspectos distintos, tornando o ensino desta área mais abrangente e com múltiplas possibilidades, almejando que o leitor possa inspirar-se e produzir outras propostas de ensino nessa área.

2 INTRODUÇÃO

Sabe-se que a Matemática está presente em diferentes âmbitos, sejam eles escolares ou não-escolares. No contexto escolar, a Matemática pode ser apresentada aos alunos em distintas formas, através de diferentes propostas de ensino.

São anseios de toda comunidade acadêmica, propor momentos de reflexão e intensificar iniciativas que proponham aspectos relevantes, em que o docente possa reinventar sua prática através de diferentes alternativas de ensino para que, juntamente com os alunos, contemplem aprendizagens indispensáveis para sua formação. Além disso, é possível dispor aos alunos propostas de ensino que sejam contextualizadas, neste trabalho com sentido de utilizar circunstâncias do meio para embasar as propostas de ensino, para que a busca pelo conhecimento seja algo atrativo e significante. De acordo com D'Ambrósio (2012, p. 104) "contextualizar a matemática é essencial para todos".

Propostas contextualizadas poderão despertar no aluno o interesse e a busca por diferentes soluções. Dessa forma, o ensino não estará predestinado a soluções únicas e inalteráveis. É no diálogo entre professor-estudante que estes poderão realizar uma troca de saberes, fazendo com que o aluno tenha espaço para sua manifestação e possa participar do processo de busca pela construção do conhecimento.

Além disso, é importante ressaltar que o docente precisa do apoio da escola e de sua autonomia em sala de aula, para que estes momentos de troca aconteçam. A proposta apresentada neste Produto Educacional visa enaltecer o trabalho do professor, sugerindo que este possa ajustar o Guia de Atividades para sua realidade e tenha a participação dos alunos no processo.

Dessa forma, além de propor uma atividade contextualizada, buscou-se pensar em uma proposta que fosse pouco usual no campo da Combinatória e/ou Problemas de Contagem. Entende-se que trabalhos recentes apresentam a Combinatória de uma forma bastante restrita (discussões apresentadas no capítulo cinco da dissertação que originou este Produto Educacional), limitando o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório em algumas habilidades.

Em contrapartida, é apresentado na Base Nacional Comum Curricular (2017) que os alunos sejam levados a lidar com Problemas de Contagem (para uma discussão sobre o tema, ver PEREIRA, 2020) a partir dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, sendo possível que o docente explore diferentes recursos para resolver Problemas de Contagem. Por isso, busca-se com esse Guia de Atividades, apresentar uma proposta de ensino que explore outras maneiras de pensar a Combinatória e/ou Problemas de Contagem, visando o possível aprimoramento do Raciocínio Combinatório.

O Produto Educacional exposto a seguir é composto por sete capítulos, sendo o primeiro e segundo capítulos, apresentação e introdução, respectivamente. No terceiro capítulo são apresentados os aspectos iniciais sobre o Guia de Atividades e como a proposta deste Produto Educacional está constituída.

No quarto capítulo são apresentadas noções e diferentes exemplos de Grafos, o que se entende necessário para o desenvolvimento da proposta. Ainda neste capítulo é apresentado um Teorema da literatura de Grafos que faz parte da proposta do Produto Educacional e distintas possibilidades de argumentá-lo.

No capítulo seguinte, é exposto a contextualização do Produto Educacional, em que é evidenciado a forma como esse foi elaborado e quais são os aspectos do contexto considerado para resultar nessa proposta.

No sexto capítulo, são apresentados os passos da proposta em sala de aula e quais as etapas que compõem, apresentando as possíveis alterações que poderão ser realizadas a fim de tornar o Produto Educacional aplicável em qualquer realidade. Por fim, são apresentadas as considerações finais deste Produto.

3 ASPECTOS INICIAIS

O Guia de Atividades apresentado como Produto Educacional é um material instrucional que visa contribuir na realização de práticas pedagógicas de professores que pretendem ensinar Combinatória e/ou Problemas de Contagem.

O Guia de Atividades foi elaborado visando ser aplicado em turmas dos Anos Finais do Ensino Fundamental, não sendo específico para apenas uma turma. Por se tratar de uma proposta alterável de acordo com a realidade em questão, pode ser aplicada em turmas de 6º à 9º ano do Ensino Fundamental, ou até mesmo para turmas de Ensino Médio.

A proposta apresentada nesse Guia de Atividades é composta por três etapas, visando somente uma organização da abordagem, com duração de aproximadamente cinco aulas, ou dez períodos. Essa proposta foi elaborada visando acrescentar no ensino de Combinatória, relacionando o contexto em que os alunos estão inseridos com conhecimentos matemáticos.

4 GRAFOS COMO ALTERNATIVA PARA ENSINO DE COMBINATÓRIA

4.1 GRAFOS

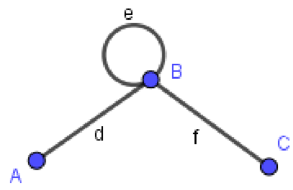
Para realização desse Guia de Atividades, explorou-se a Análise Combinatória e/ou Problemas de Contagem a partir de conceitos da Teoria de Grafos, em que problemas de Grafos são solucionados a partir de Problemas de Contagem.

Para esta proposta, pensou-se em abordar questões da Teoria de Grafos, sem propriamente fazer uso de suas nomenclaturas, esperando que devidas aprendizagens e relações aconteçam naturalmente. Desta forma, apresenta-se de forma sucinta, algumas definições para Grafos, apenas para conhecimento do leitor desse Produto Educacional, com intuito de contribuir nas intervenções durante a aplicação da proposta, realizada pelo docente.

Um Grafo é constituído por um conjunto finito de elementos, chamados de vértices (ou nós), e relações entre seus elementos, chamadas de arestas, de modo não ordenado, que nada mais são do que as ligações ou conexões entres seus vértices (nós).

Normalmente representamos um Grafo fazendo a seguinte relação: cada nó é representado por um ponto e as arestas são curvas ligando estes pontos. A seguir apresenta-se alguns exemplos de Grafos, que foram construídos a partir do *software* GeoGebra:

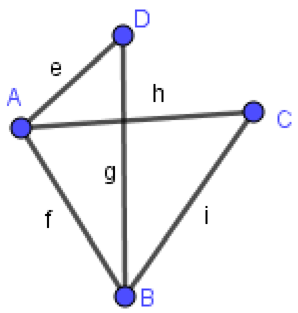
FIGURA 1 - REPRESENTAÇÃO DE UM EXEMPLO DE GRAFO COM 3 NÓS E 3 ARESTAS



FONTE: A autora (2020).

Na figura 1, temos um Grafo com três nós A, B, C e três arestas d, e, f.

FIGURA 2- REPRESENTAÇÃO DE UM EXEMPLO DE GRAFO COM 4 NÓS E 5 ARESTAS

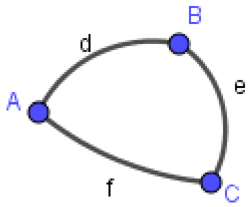


FONTE: A autora (2020).

Na figura 2, temos outro Grafo, sendo este com quatro nós A, B, C, D e cinco arestas e, f, g, h, i.

Na representação do Grafo a seguir, temos três nós A, B, C e três arestas d, e, f sendo que a aresta *e* chamamos de laço, pois é uma aresta que incide sob o mesmo nó.

FIGURA 3 - REPRESENTAÇÃO DE UM EXEMPLO DE GRAFO COM 3 NÓS, 2 ARESTAS E UM LAÇO



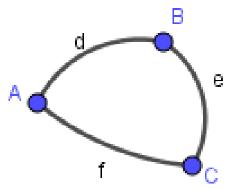
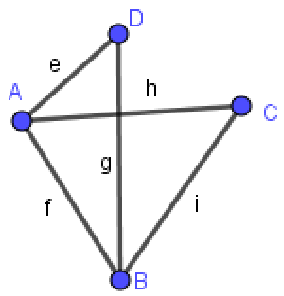
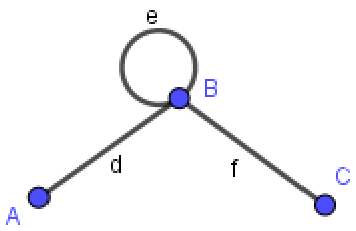
FONTE: A autora (2020).

Entende-se que há inúmeras propriedades e aplicações para a Teoria de Grafos, mas a proposta deste trabalho limita-se exemplificar apenas os conhecimentos necessários para a aplicação do Guia de Atividades. Definições para diferentes tipos de Grafos podem ser encontradas em Bondy e Murty (1976).

Outro ponto a ser abordado é sobre a definição do grau de um nó. De acordo com Santos, Mello e Murari (p. 299, 2007), "o *grau de um nó* é o número de arcos incidentes no nó, sendo que cada laço conta como dois arcos".

Retoma-se então, os três exemplos anteriores para exemplificar os graus dos nós. A seguir é exposto uma tabela, com a representação do Grafo, os nós do Grafo e o grau de cada nó.

TABELA 1 - REPRESENTAÇÃO DE GRAFOS, OS NÓS DE CADA GRAFO E O GRAU DE CADA NÓ

<table>
<tr><th>Figura</th><th>Nós</th><th>Grau</th></tr>
<tr><td>Figura 1

</td><td>A
B
C</td><td>A tem grau 2
B tem grau 2
C tem grau 2</td></tr>
<tr><td>Figura 2

</td><td>A
B
C
D</td><td>A tem grau 3
B tem grau 3
C tem grau 2
D tem grau 2</td></tr>
<tr><td>Figura 3

</td><td>A
B
C</td><td>A tem grau 1
B tem grau 4
C tem grau 1</td></tr>
</table>

FONTE: A autora (2020).

Nesta tabela, foi possível identificar o grau de cada nó, o que será muito importante na execução do Guia de Atividades.

Para dar seguimento ao Guia de Atividades, enuncia-se um Teorema já conhecido na literatura, onde tal pode ser encontrado juntamente com a demonstração em Santos, Mello e Murari (2007):

Teorema *O número de nós de grau ímpar de um grafo é par.*

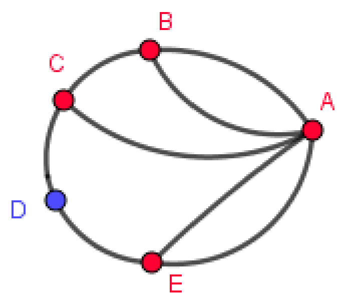
Demonstração. Para realizar a demonstração desse teorema, pode-se utilizar os conceitos de paridade. Primeiramente separa-se o somatório dos graus dos nós em duas parcelas, sendo que a primeira contém os graus pares e a segunda os graus ímpares. Então, considerando o Grafo G = (N, A), onde d_i é o grau do nó i, tem-se:

$$2|A| = \sum_{i \in N} d_i = \sum_{i \in N \vee d_i par} d_i + \sum_{i \in N \vee d_i ímpar} d_i.$$

A primeira parcela do somatório contém os graus pares e a segunda os graus ímpares, então, a primeira parcela é par, mas como a soma das duas parcelas também é par, a segunda parcela também é par. ∎

Para exemplificar este teorema, pode-se observar a representação de um Grafo (Figura 4) a seguir . Os nós representados pela cor vermelha A, B, C e E são nós de grau ímpar, pois possuem números ímpares de ligações. E o nó D representado pela cor azul é o nó de grau par, pois possui um número par de ligações.

FIGURA 4 - REPRESENTAÇÃO DE UM EXEMPLO DE GRAFO COM 5 NÓS E 8 ARESTAS



FONTE: A autora (2020).

Nota-se que o somatório dos nós de grau ímpar é 14 (A = 5, B = 3, C = 3 e E = 3) e o somatório dos nós de grau par é 2 (D = 2).

Em consequência deste Teorema, tem-se o corolário a seguir:

Corolário: *A soma dos graus dos nós de um grafo é igual ao dobro do número de arcos.*

Para demonstrar esse corolário, basta observar que ao somar os graus, conta-se duas vezes cada arco, ou seja, uma vez em cada extremidade. ■

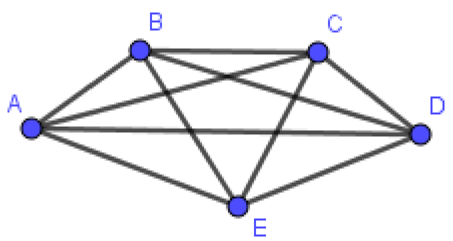
4.2 UMA PROBLEMATIZAÇÃO: POSSIBILIDADES DE ARGUMENTAÇÃO SOBRE O TEOREMA

Neste momento, são apresentadas três possibilidades de argumentação que podem ser exploradas no âmbito do ensino de Combinatória. Essas possibilidades foram argumentadas a partir de exemplos que podem ser vistos na sequência:

1) A partir de um Grafo sem arestas:

Inicia-se de modo ilustrativo com esse Grafo:

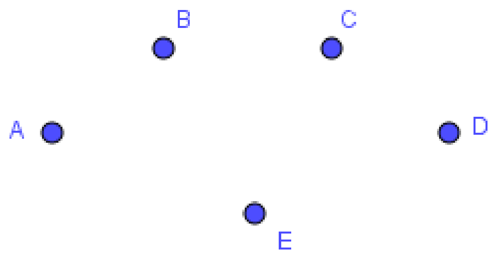
FIGURA 5 - REPRESENTAÇÃO DE UM EXEMPLO DE GRAFO COM 5 NÓS E 10 ARESTAS



FONTE: A autora (2020).

Retirando todos as arestas deste Grafo, tem-se a seguinte representação, um Grafo somente com nós:

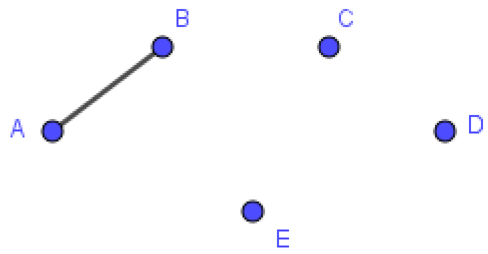
FIGURA 6 - REPRESENTAÇÃO DE UM EXEMPLO DE GRAFO COM 5 NÓS



FONTE: A autora (2020).

Neste momento, os nós possuem grau zero, pois não existem ligações entre eles. Posteriormente incluí-se uma primeira aresta, ligando o nó A e o nó B. Porém, percebe-se que ao incluir uma aresta inicial, dois nós que tinham grau zero, agora possuem grau 1. Ou seja, dois nós (um número par) possuem um número ímpar de ligações.

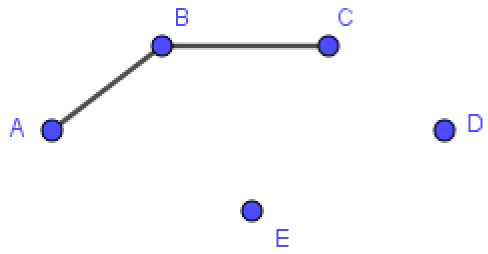
FIGURA 7 - REPRESENTAÇÃO DE UM EXEMPLO DE GRAFO COM 5 NÓS E 1 ARESTA



FONTE: A autora (2020).

O mesmo ocorre se formos incluíndo arestas aos demais nós. Tínha-se, após incluir a primeira aresta, três nós de grau zero e dois nós de grau 1. Ao incluir uma aresta, entre o nó B e o nó C, tem-se então um nó de grau 2 e dois nós de grau 1 e os demais grau zero.

FIGURA 8 - REPRESENTAÇÃO DE UM EXEMPLO DE GRAFO COM 5 NÓS E 2 ARESTAS



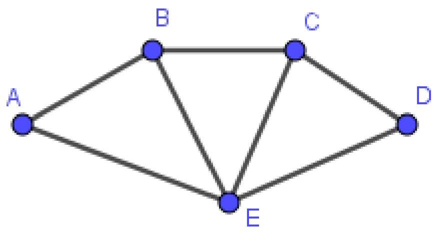
FONTE: A autora (2020).

Ao incluir demais arestas, uma a uma até obter o grafo inicial desejado, tem-se sempre um número par de ligações ímpares em cada passo do raciocínio. Nota-se que neste momento é interessante uma problematização que essa argumentação não é específica ao exemplo escolhido.

2) A partir de um Grafo completo:

Inicia-se de modo ilustrativo com esse Grafo:

FIGURA 9 - REPRESENTAÇÃO DE UM EXEMPLO DE GRAFO COM 5 NÓS E 7 ARESTAS



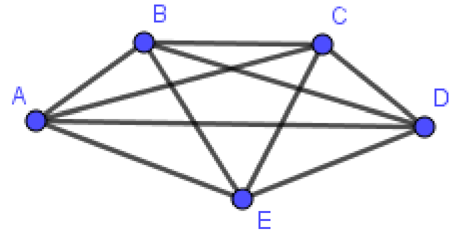
FONTE: A autora (2020).

Para que seja possível representar este Grafo, deve-se partir do primeiro nó e acrescentar nós e arestas até chegar ao desejado, ou então, de modo contrário partir de um Grafo Completo e retirar arestas até chegarmos no Grafo desejado.

Na figura 9, temos um Grafo com cinco nós A, B, C, D, E, sendo que dois nós têm grau dois, dois nós têm grau três e um nó tem grau quatro.

Na Teoria de Grafos, um Grafo Simples é aquele que não possui laços e também não possui arestas paralelas, ou seja, não há duas arestas incidentes sobre o mesmo par de nós. Já um Grafo é dito completo, se além de Simples, todo par de vértices é ligado por uma aresta, ou seja, é um Grafo Simples que contém o número máximo de arestas. A seguir é exposto um exemplo de um Grafo Completo:

FIGURA 10 - REPRESENTAÇÃO DE UM EXEMPLO DE GRAFO COMPLETO

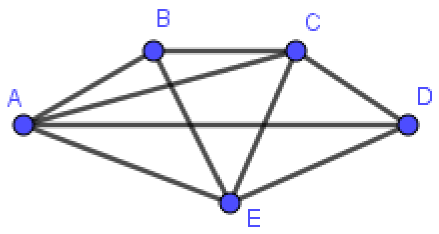


FONTE: A autora (2020).

Percebe-se que na representação deste Grafo Completo, tem-se cinco nós A, B, C, D, E e que cada nó tem grau 4, pois faz quatro ligações com os demais nós. O que se quer argumentar aqui, é que ao retirar algumas arestas, uma por uma, para chegarmos ao Grafo da figura 9, o Teorema ainda segue sendo verificado.

Ao retirar uma aresta (neste caso retira-se a aresta que estava ligando os nós B e D) tem-se então três nós de grau par e dois nós de grau ímpar, pois ao retirar uma aresta, dois nós diminuem o seu grau em uma unidade cada.

FIGURA 11 - REPRESENTAÇÃO DE UM EXEMPLO DE GRAFO COM 5 NÓS E 9 ARESTAS



FONTE: A autora (2020).

Dessa mesma forma, ao retirar as demais arestas até chegar na representação desejada, o Teorema seguirá sendo verificado, pois um par de nó sempre mudará seu grau.

Outro ponto que é possível observar a partir dessa possibilidade de argumentação, é considerar que um nó de um Grafo Completo sempre realiza ligações com todos os demais nós, sem contar ele mesmo, então pode-se considerar o nó de um Grafo Completo com $n-1$ número de ligações, tendo n como nó. Um exemplo é a figura 10 que representa um Grafo Completo com 5 nós e cada nó possui grau 4, ou seja quatro ligações.

Tem-se um Grafo com n nós e n é um número par, então tem-se o número de ligações $n-1$, pelo conceito de paridade esse número será ímpar, isto é, o Teorema se verifica nesse caso. Observa-se que para chegar em um Grafo desejado, deve-se retirar uma quantidade finita de arestas e em cada etapa o Teorema segue sendo verificado. Portanto, tem-se uma argumentação que ilustra o Teorema. Nota-se que, analogamente, sendo n um número ímpar o resultado também se conclui facilmente.

3) Argumentar a partir de exemplos:

Para essa possibilidade de argumentação, segue o que está sendo proposto neste Produto, onde pretende-se buscar diversos exemplos, de caráter ilustrativo, para que seja possível criar um argumento que valide o Teorema, onde caminha-se para demonstração.

5 CONTEXTUALIZAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

A proposta deste Produto Educacional relaciona os conhecimentos matemáticos, mais especificamente o ensino de Análise Combinatória, através do Teorema apresentado anteriormente com a Educação Ambiental, para relacionar um contexto específico com as aprendizagens.

A Educação Ambiental não é tida como uma disciplina singular, mas sim um assunto que deve ser abordado em diferentes propostas de ensino, de forma interdisciplinar. Na dissertação (PEREIRA, 2020), que ressultou nesse Produto Educacional, é possível visualizar algumas discussões acerca da legislação que constitui a Educação Ambiental.

Dessa forma, pensando em uma proposta contextualizada, será abordada a Educação Ambiental através do estudo de fertilizantes, pensando esta como uma questão ambiental a ser abordada, onde as discussões sobre essa temática podem ser vistas na dissertação que resultou neste trabalho (PEREIRA, 2020).

Será realizada uma análise de moléculas que compõem alguns fertilizantes e posteriormente explorado uma forma possível para relacionar esses conhecimentos ao Teorema apresentado, fazendo relações à Matemática, mas especificamente a Problemas de Contagem.

Com a intenção de propor algo que estivesse de certa forma associado a um contexto específico pensou-se em buscar os fertilizantes, pois elaborou-se este Guia de Atividades para uma realidade de uma Escola com sede no interior, onde a principal atividade econômica das famílias é a plantação de soja e arroz. Desta forma, dando ênfase aos fertilizantes, seria possível relacionar os conhecimentos que os alunos possuem, que são externos à escola, aos conhecimentos matemáticos.

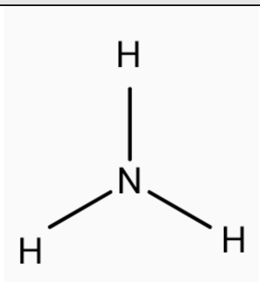
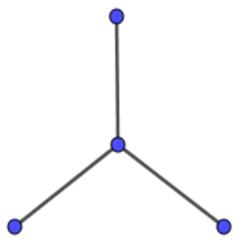
Como sugestão de propostas contextualizadas, propõem-se ajustar a temática de acordo o contexto a ser trabalhado. Por exemplo, ao invés do tópico fertilizantes sugere-se o estudo de fármacos ou então de suplementos alimentares.

Ainda assim, como destacado na dissertação que resultou neste Produto Educacional (PEREIRA, 2020), entende-se que na teoria de Grafos há conceitos que apresentam um sentido abstrato e que na composição da molécula não faria sentido. Como, por exemplo, os laços que são arcos associados a um único nó, ou então os problemas de caminhos mínimos, como por exemplo as Pontes de Konigsberg, citadas em um problema resolvido por Euler em 1736 (SANTOS, MELLO E MURARI, 2007) em que não faz sentido um caminho entre átomos.

Porém, a proposta desse trabalho visa ilustrar conceitos de contagem simultaneamente com classes de moléculas de alguns fertilizantes. Para isso, é estabelecida a relação de um Grafo com uma molécula da seguinte forma: enquanto o conjunto de nós do Grafo estão em bijeção com o conjunto formado pelos átomos, o conjunto que define os arcos (arestas), um ente da teoria de Grafos, estão relacionados bijetivamente com as ligações de cada átomo de uma molécula.

A seguir, tem-se um exemplo da proposta a partir de uma representação. Na tabela a seguir, é destacada a representação da molécula de um fertilizante (Amônia) e a representação dessa molécula como um Grafo.

TABELA 2 - EXEMPLO DE UMA REPRESENTAÇÃO DE MOLÉCULA E REPRESENTAÇÃO EM GRAFOS

Representação da molécula de amônia (NH_3)	Representação em Grafos
	

FONTE: A autora (2020).

6 PASSOS DA PROPOSTA EM SALA DE AULA

A seguir é apresentada uma tabela com informações gerais sobre o Guia de Atividades ao leitor que planeja fazer uso desta proposta.

TABELA 3 - INFORMAÇÕES GERAIS SOBRE O GUIA DE ATIVIDADES

Informações Gerais sobre o Guia de Atividades	
Modalidade de Ensino	Ensino Fundamental – Anos Finais
Número de Aulas	Possivelmente 5 aulas, ou 10 períodos
Tema	Problemas de Contagem, ênfase em Grafos

Fonte: A autora (2020).

- **Primeira etapa da Proposta**

Como primeira etapa da proposta, inicia-se o estudo de Combinatória, através de alguns Problemas de Contagem. Esses problemas poderão ou não estar ligados a temática do estudo, porém são questões básicas que visam explorar o Raciocínio Combinatório, conceito já discutido anteriormente.

Os problemas sobre Combinatória apresentados terão como enfoque questões relacionadas a princípios aditivos e multiplicativos, combinação, permutação, arranjo, grafos, princípio da casa dos pombos. Porém, deseja-se que esses conceitos sejam apresentados de forma natural, por isso não será discutido com os alunos as nomenclaturas ou fórmulas para chegar em uma solução, sendo que essas discussões já foram apresentadas na dissertação (PEREIRA, 2020). Não espera-se também que os alunos encontrem soluções prontas e que após encontrarem soluções sejam realizadas correções desses problemas. Mas que estes sejam o caminho para discussões sobre a temática.

Os Problemas selecionados e elaborados a seguir tiveram como enfoque explorar conceitos de Combinatória. Por isso, os primeiros problemas baseiam-se em questões de princípios aditivos e multiplicativos, combinação, permutação e arranjo. Nas questões 5 e 6 são apresentados problemas sobre caminhos. Observa-se que um caminho na Teoria de Grafos é uma sequência de vértices (ou nós) em que de cada um dos vértices existe uma aresta para o vértice seguinte. O problema 5 é um problema de caminho que está associado a Grafos Eulerianos, onde um Grafo é dito Euleriano se, e somente se, os graus de todos os nós são pares. Para que seja possível percorrer um Grafo Euleriano e passar em todos os trajetos, sem repetir o caminho, basta começarmos com um nó qualquer e ir incrementando uma unidade de nó. Assim, para cada entrada no caminho haverá uma saída, portanto todos os nós serão pares.

Há também o caso dos caminhos em Grafos com nós ímpares, porém para que seja possível passar por todas as arestas, sem repeti-las, é necessário que este Grafo tenha no máximo dois nós de grau ímpar, estando limitado em começar e terminar o caminho em um nó específico, ou seja, nos nós de grau ímpar.

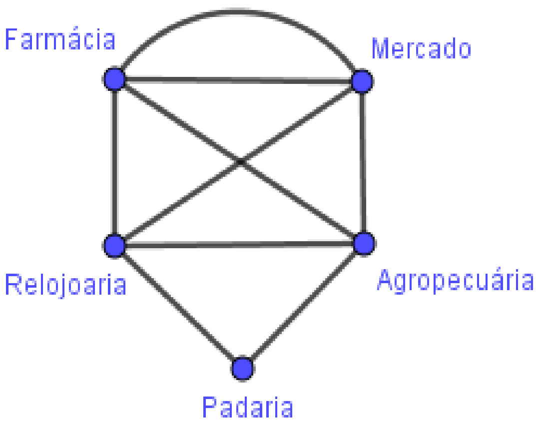
Já o problema 6, que também pode ser um problema de caminho, é um desafio. É interessante incluir desafios, visto pelos alunos como brincadeiras nas aulas de Matemática. Há, em certos casos, um engajamento dos alunos em buscar soluções, sem ao menos se darem conta que estão fazendo Matemática.

No problema 7, que envolve recortes de revistas, o aluno poderá usar os recortes para preencher a primeira linha e a primeira coluna da tabela e completá-la reproduzindo os recortes através de desenhos.

Com intuito de contemplar a Base Nacional Comum Curricular (2017) buscou-se explorar também o Princípio da Casa dos Pombos, abordado na questão número 8. E sobre a Teoria de Grafos, apresentou-se um problema de caminho mínimo (ou menor custo) na questão número 9, que apesar da complexidade poderá descencadear muitas discussões. Outro problema de caminho mínimo pode ser visto em Baltazar e Pereira (2018).

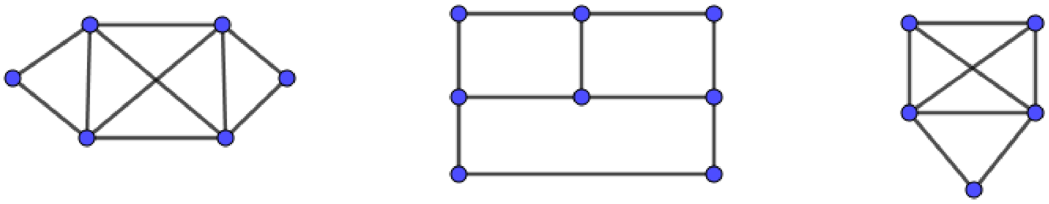
A seguir serão apresentados os problemas que darão início a esse estudo, sendo possível incluir outros problemas, de acordo com a necessidade. Ressalta-se que não há soluções dos problemas a seguir, com intuito de propiciar um momento de engajamento do leitor.

Problemas de Contagem
Problema 1
Suponhamos que em uma sorveteria tenham 5 sabores de picolés e 3 sabores de sorvetes e que Maria tenha permissão para escolher apenas um picolé e um sorvete. Quantos são os possíveis pedidos que Maria poderá fazer? (Problema parcialmente inspirado SANTOS, MELLO E MURARI, 2007)
Problema 2
Imagine que João vai até a pecuária e encontra 4 marcas diferentes de ração para gado e 3 marcas diferentes de ração para cavalo. Supondo que João deverá escolher uma ração para o gado e uma ração para o cavalo, quais são as possíveis compras que ele irá fazer.

Problema 3
Um amigo mostrou-me 5 livros diferentes de matemática e 7 livros diferentes de física e permitiu-me escolher um de cada. De quantas maneiras esta escolha pode ser feita? (SANTOS, MELLO E MURARI, 2007)
Problema 4
Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os dígitos 5, 6 e 7? (SANTOS, MELLO E MURARI, 2007)
Problema 5
Guilherme deseja ir ao centro da cidade pagar algumas contas e realizar algumas compras. Ele precisa ir até a farmácia, ao mercado, a padaria, a agropecuária e a relojoaria. Será possível pensar em um trajeto para Guilherme, em que ele passe em todos os lugares sem repetir o mesmo caminho?  Fonte: A autora (2020).

Problema 6

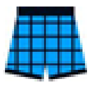
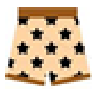
Desafio: Em quais desses desenhos abaixo, você consegue passar o lápis por todos os pontos da figura sem levantar o lápis do papel e sem passar duas vezes pelo mesmo caminho?



Fonte: A autora (2020).

Problema 7

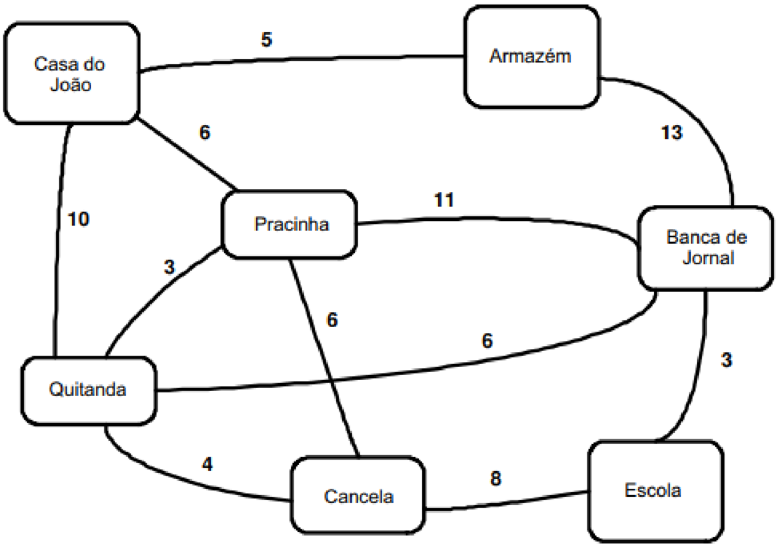
Com recortes de revista, preencha a tabela a seguir e descreva as combinações possíveis, sabendo que deverá escolher uma camiseta e uma bermuda:

Bermuda/ Camiseta	Bermuda 1 	Bermuda 2 	Bermuda 3 
Camiseta 1 			
Camiseta 2 			
Camiseta 3 			
Camiseta 4 			
Camiseta 5 			

Fonte: A autora (2020).

Problema 8
Quantas pessoas, no mínimo, precisam estar em uma mesma sala para ter certeza de que pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo dia?

Problema 9
Neste problema são apresentados os custos de cada caminho a partir da linha de ônibus da cidade. Determinar o caminho com o menor custo partindo da Casa do João até a escola.



Fonte: Jurkiewicz, 2009.

- **Segunda etapa da proposta**

Na segunda etapa da proposta, será realizado um estudo sobre alguns fertilizantes. Neste momento, ocorrerá um levantamento sobre o que os alunos já sabem sobre esse tema e também quais os tipos de fertilizantes que conhecem. Neste momento o professor ofertará para o aluno um Cenário para Investigação, citado por Skovsmose (2000).

Nas discussões sobre essa temática, poderão ser realizados os seguintes questionamentos:

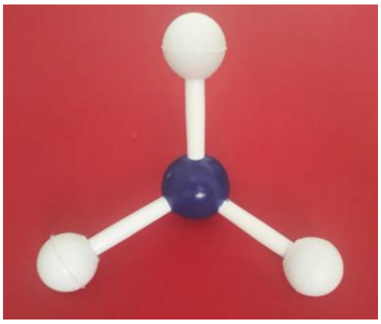
- O que você conhece sobre fertilizantes?

- Seus familiares fazem uso de fertilizantes nas plantações? Se sim, quais?

- Vocês percebem diferença na qualidade da produção ao fazer uso de fertilizantes?
- Você reconhece a diferença entre fertilizantes e agrotóxicos?

Após esse momento, selecionados alguns fertilizantes e/ou moléculas presentes nos mesmos, propõem-se uma análise das características químicas, ou seja, identificar quais são os átomos presentes em suas estruturas e quais as ligações existentes. Neste momento, sugere-se que os alunos façam uso do material Kit Molecular (ATOMLIG ® 107 Educação) para reproduzir as moléculas.

FIGURA 12 - EXEMPLO DE MOLÉCULA DE AMÔNIA (NH_3) REPRESENTADA COM O KIT MOLECULAR



FONTE: A autora (2020).

Ressalta-se que, alternativamente, esse material poderá ser construído pelos alunos com palitos e bolinhas de isopor, fazendo com que este facilite no processo de contagem.

Na tabela abaixo é apresentado os elementos que compõem o Kit Molecular. De maneira similar, esse Guia pode ser utilizado para outras moléculas pois o Teorema é válido para outras moléculas, não somente de fertilizantes. Na primeira coluna, é exibido a cor e o formato dos objetos e na segunda coluna a representação atômica do elemento.

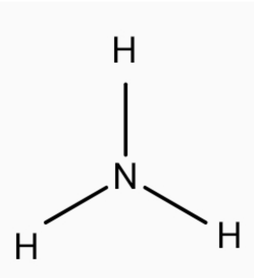
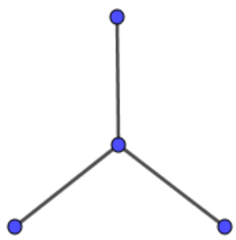
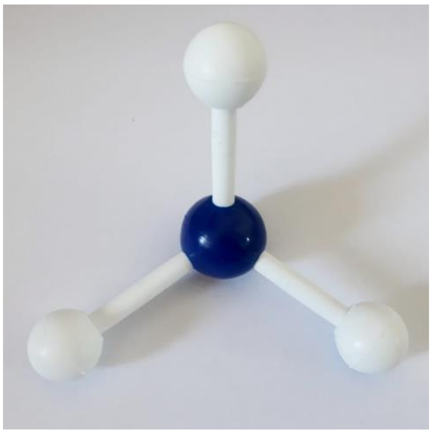
TABELA 4 - ELEMENTOS QUE COMPÕEM O KIT MOLECULAR

Kit Molecular	
Tipo	**Representação Atômica**
Esfera Preta	Átomos de carbono
Esfera Azul	Átomos de nitrogênio ou cloro
Esfera Verde	Átomos de fósforo
Esfera Vermelha	Átomos de oxigênio
Esfera Amarela	Átomos de potássio
Esfera Branca	Átomos de hidrogênio
Esfera Laranja	Átomos metálicos e Íons
Haste Reta Branca	Ligações covalentes ou moleculares
Haste Curva Branca	Ligações covalentes ou moleculares
Pino Branco	Ligações covalentes ou moleculares
Haste Reta Laranja	Ligações metálicas ou iônicas
Haste Curva Laranja	Ligações metálicas ou iônicas
Pino Laranja	Ligações metálicas ou iônicas

FONTE: A autora (2020).

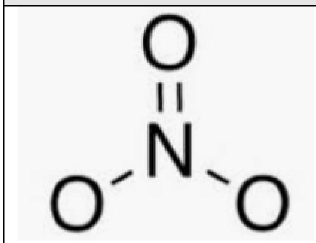
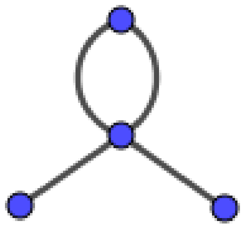
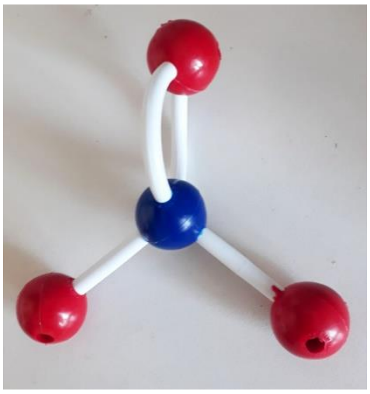
Neste momento, um processo natural é a contagem do número de ligações que cada átomo faz com os demais; o que resulta em características da estrutura. Assim, os alunos estarão realizando um processo de contagem e induzindo, talvez de modo não explícito, o estudo de Combinatória. A seguir, será apresentado alguns exemplos de moléculas de fertilizantes que poderão surgir e quais são as abordagens que possivelmente serão exploradas a partir do Teorema, ressaltando que não há necessidade de citar as nomenclaturas e o Teorema em si.

TABELA 5 - ABORDAGENS SOBRE O FERTILIZANTE AMÔNIA

<table>
<tr><td>Nome: Amônia</td><td>Fórmula Química:(NH_3)</td></tr>
<tr><td>Representação da Molécula</td><td>Representação em Grafos</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Representação da Molécula com Kit Molecular</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Determinar a paridade do grau de cada nó, ou seja, contar o número de ligações de cada átomo separadamente ilustrando o Teorema</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contagem de ligações</td></tr>
<tr><td>Azul - N (Nitrogênio): 3
Branco – H (Hidrogênio): 1
Branco – H (Hidrogênio): 1
Branco – H (Hidrogênio): 1</td><td>São quatro (número par) átomos com número ímpar de ligações</td></tr>
</table>

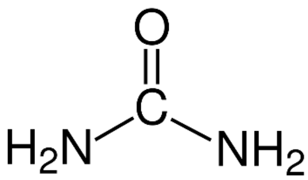
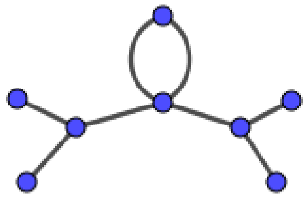
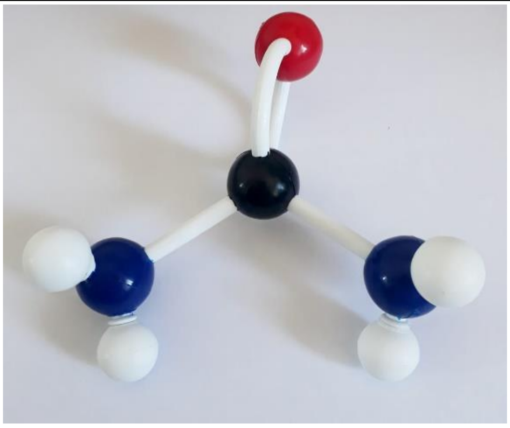
FONTE: A autora (2020).

TABELA 6 - ABORDAGENS SOBRE O FERTILIZANTE NITRATO

<table>
<tr><td>Nome: Nitrato</td><td colspan="2">Fórmula Química: $NO_3 -$</td></tr>
<tr><td>Representação da Molécula</td><td colspan="2">Representação em Grafos</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Representação da Molécula com Kit Molecular</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Determinar a paridade do grau de cada nó, ou seja, contar o número de ligações de cada átomo separadamente ilustrando o Teorema</td></tr>
<tr><td colspan="3">Contagem de ligações</td></tr>
<tr><td colspan="2">Azul – N (Nitrogênio): 4
Vermelho – O (Oxigênio): 2
Vermelho – O (Oxigênio): 1
Vermelho – O (Oxigênio): 1</td><td>São dois (número par) átomos com número ímpar de ligações</td></tr>
</table>

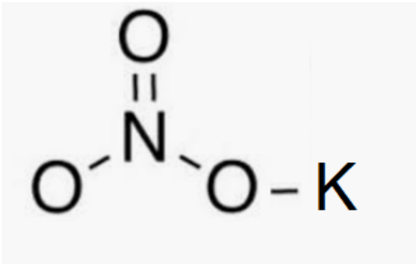
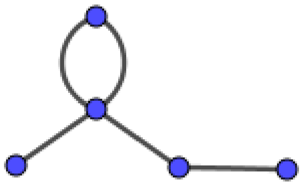
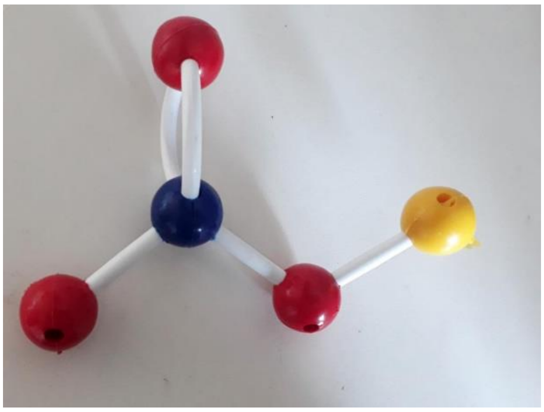
FONTE: A autora (2020).

TABELA 7 - ABORDAGENS SOBRE O FERTILIZANTE UREIA

<table>
<tr><td>Nome: Ureia</td><td>Fórmula Química: CH_4N_20</td></tr>
<tr><td>Representação da Molécula</td><td>Representação em Grafos</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Representação da Molécula com Kit Molecular</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Determinar a paridade do grau de cada nó, ou seja, contar o número de ligações de cada átomo separadamente ilustrando o Teorema</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contagem de ligações</td></tr>
<tr><td>Azul - N (Nitrogênio): 3
Azul - N (Nitrogênio): 3
Branco - H (Hidrogênio): 1
Branco - H (Hidrogênio): 1
Branco - H (Hidrogênio): 1
Branco - H (Hidrogênio): 1
Vermelho - O (Oxigênio): 2
Preto - C (Carbono): 4</td><td>São seis (número par) átomos com número ímpar de ligações, são eles: nitrogênio, nitrogênio, hidrogênio, hidrogênio, hidrogênio e hidrogênio.
Os átomos de oxigênio e carbono possuem número par de ligações.</td></tr>
</table>

FONTE: A autora (2020).

TABELA 8 - ABORDAGENS SOBRE O FERTILIZANTE NITRATO DE POTÁSSIO

<table>
<tr><td>Nome: Nitrato de Potássio</td><td>Fórmula Química: KNO_3</td></tr>
<tr><td>Representação da Molécula</td><td>Representação em Grafos</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Representação da Molécula com Kit Molecular</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Determinar a paridade do grau de cada nó, ou seja, contar o número de ligações de cada átomo separadamente ilustrando o Teorema</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contagem de ligações</td></tr>
<tr><td>Azul – N (Nitrogênio): 4
Vermelho – O (Oxigênio): 2
Vermelho – O (Oxigênio): 2
Vermelho – O (Oxigênio): 1
Amarelo – P (Potássio): 1</td><td>São dois (número par) átomos com número ímpar de ligações, são eles: oxigênio e potássio</td></tr>
</table>

FONTE: A autora (2020).

- **Terceira etapa da proposta**

Para finalização da proposta e última etapa, os alunos realizarão a construção das moléculas no Aplicativo KingDraw (imagem em anexo) como forma de registro. Ressalta-se ainda que os registros poderão ser realizados em forma de desenho nos cadernos, ou até mesmo os próprios palitos com bolinhas de isopor.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Espera-se que a aplicação desse Guia de Atividades possa contribuir no ensino de Combinatória e que o docente tenha possibilidade de experienciar uma proposta que oportunize os alunos a serem ativos no processo, bem como estejam engajados em um atividade contextualizada e mais que isso, que o professor sinta-se cômodo a inventar, propor e experimentar maneiras no explorar o ensino.

A importância de incluir na Educação Básica propostas de ensino que possibilitem o aluno buscar soluções e vivenciar novas experiencias, permite uma reflexão sobre a inclusão de Grafos no Ensino Fundamental. Mesmo este conteúdo não sendo obrigatório na Educação Básica, foi possível pensar em um Guia de Atividades que possibilite o aperfeiçoamento do Raciocínio Combinatório, através de Problemas de Contagem.

É notório que uma aplicação, juntamente com uma análise dos resultados desse Guia de Atividades, iria desencadear novos desdobramentos que contribuíssem para o aperfeiçoamento do Produto Educacional. Portanto, espera-se que o docente ao fazer uso deste Produto, adapte-o para que este possa contribuir no ensino de Combinatória e/ou possa inspirar os professores a pensarem em novas propostas.

Finalmente, a estruturação desse Guia de Atividades esteve voltada para uma aplicação, de certo modo, nada trivial fazendo com que os alunos possam experenciar outras maneiras de pensar a Combinatória, possibilitando novos desdobramentos para o Raciocínio Combinatório.

REFERÊNCIAS

BONDY, J.A. and MURTY, U.S. Rama. **Graph theory with applications**. MacMillan, 1976.

BALTAZAR, Rene. PEREIRA, Letícia. **O estudo de Grafos**: uma proposta investigativa. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.20, n.2, pp. 334-348, 2018. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/38665>. Acesso em janeiro de 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf > Acesso em janeiro de 2019.

D'AMBRÓSIO. Ubiratan. **Educação matemática**: Da teoria à prática. – 23ª ed.- Campinas, SP: Papirus, 2012.

JURKIEWICZ, S. **Grafos – Uma Introdução.** 2009. Disponível em: <www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf> Acesso em 3 de março de 2018.

PEREIRA, Letícia C. **A Educação Matemática Tangenciando a Educação Ambiental**: Uma proposta a partir do Ensino de Combinatória. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal do Rio Grande, Santo Antônio da Patrulha, 2020.

SANTOS, J.P.O.; MELLO, M.P. e MURARI, I.T.C. **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação**. BOLEMA – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

ANEXOS

ANEXO 1 - APLICATIVO INDICADO NA PROPOSTA

KingDraw

KingDraw
Chemical
Structure Editor