



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS -
MESTRADO

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

**Carlos Carlão Pereira do Nascimento¹, Profa. Dra. Maria
Madalena Dullius², Prof. Dr. André Krindges³**

¹ Mestrando em Ensino de Ciências Exatas – UNIVATES –
carlaopnascimento@gmail.com

² Doutora em Ensino de Ciências e Matemática – madalena@univates.br

³ Doutor em Matemática Aplicada – krindges@gmail.com

Finalidade

Esta proposta é parte integrante da pesquisa de Mestrado e tem como objetivo socializar uma sequência de atividades para o ensino das funções trigonométricas por meio do uso do *software* GeoGebra. A referida pesquisa foi realizada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – IFMT Campus Cuiabá com estudantes do segundo ano do Ensino Médio Integrado ao Curso Técnico de Informática.

Contextualização

Em função da dinâmica da realidade, o homem, para atender as demandas em torno de suas necessidades – uma vez que vive em uma sociedade cada vez mais exigente no que se refere à otimização do tempo –, lança mão das tecnologias digitais como instrumento potencializador não só do tempo, mas também como forma de dinamizar e de interagir com o mundo.

Neide e Quartieri (2016) apontam vários fatores que podem ser apresentados como justificativas para a utilização de tecnologias nas salas de aula, como computadores, *tablets* e celulares. Segundo os autores, a preocupação não é mais o porquê utilizar, uma vez que há a necessidade de utilização dessas tecnologias, mas sim, como utilizar esses recursos tecnológicos nos processos de ensino.

Nessa conjuntura, torna-se indispensável a familiarização do professor com a utilização dos recursos tecnológicos para a interação com o estudante para além da metodologia tradicional, pois esta traz importantes contribuições, tais como:

Apresentar, de diferentes formas, um mesmo elemento do conteúdo programático pode ajudar o aluno a compreender o tema que está sendo estudado. Além de revisitar, explorar o assunto via imagens ou animações, privilegiam o fazer pedagógico em sala de aula. A visualização é uma ação importante para a construção da aprendizagem, principalmente na área das Ciências Exatas (NEIDE, QUARTIERI, 2016, p. 10).

Assim, o desenvolvimento do pensamento computacional torna-se um imperativo na prática docente. Nesse entendimento, em se tratando do uso das tecnologias digitais, Paiva (2016) ressalta:

É fundamental reconhecer que as tecnologias adentraram na vida humana num ritmo. É sem volta. Sendo assim, faz-se necessário assimilá-las como parte de um processo natural de evolução da cultura da sociedade. Esta ideia ganha força ao lembrar a origem e o desenvolvimento da espécie humana e perceber a importância das mudanças para nossa evolução, e que foram, e até hoje são, essenciais para nossa existência e adaptabilidade ao meio. [...] No campo educacional, um desses atores são os professores, e são deles, ou melhor, de parte deles, uma das frentes de resistência em aceitar o uso das tecnologias como ambiente facilitador para o processo de ensino e de aprendizagem (p. 22-23).

O contexto educativo não está imune aos benefícios da tecnologia. Na atualidade, seja para ensinar ou aprender, os recursos tecnológicos constituem meios importantes para potencializar as práticas educativas. Nessa perspectiva:

O professor, enquanto cidadão e profissional, está hoje igualmente dependente do computador ou do celular. Ele necessita recorrer ao computador para realizar muitas tarefas relacionadas com a sua prática profissional. O registro da avaliação dos alunos, entre outros, é feito sistematicamente utilizando recursos tecnológicos, assim como acontece com inúmeras tarefas do dia a dia do profissional docente. Os alunos também utilizam diariamente os recursos tecnológicos, mas geralmente como entretenimento e raramente para realização de tarefas escolares (AMADO, CARREIRA, 2015, p. 9).

Fica perceptível que, mesmo diante da importância e do espaço que as tecnologias digitais ocupam no campo educativo, sobre o professor recai a responsabilidade quanto ao uso profícuo desta tecnologia. Assim, no que tange ao ensino de matemática, os *softwares* se constituem em possibilidades viáveis de articulação entre tecnologia digital, ensino, aprendizagem e desenvolvimento cognitivo (AMADO, CARREIRA, 2015).

Diante do exposto, o desafio docente maior consiste em ensinar na era da tecnologia. Conforme mencionam Borba e Penteado (2010, p.56) “[...] As inovações educacionais, em sua grande maioria, pressupõem mudança na prática docente, não sendo uma exigência exclusiva daquelas que envolvem o uso da tecnologia em informática. Os autores afirmam ainda que “À medida que a tecnologia informática se desenvolve, nos deparamos com a necessidade de atualização de nossos conhecimentos sobre o conteúdo ao qual ela está sendo integrada” (BORBA; PENTEADO, 2010, p.64). É nesse sentido que se compreende a importância do *software* GeoGebra no ensino de trigonometria e, de forma concomitante, da dinamização da forma de ensinar.

A percepção de Borba e Penteado (2010) vai ao encontro do que prescreve a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2017), a qual destaca que o computador surge como um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos estudantes, uma vez que pode ser usado para várias finalidades nas aulas e funciona como fonte de informação para alimentar os processos de ensino, auxiliando no processo de construção de conhecimento. Além disso, pode ser usado como meio para desenvolver a autonomia pelo uso de *softwares* que possibilitem pensar, refletir e criar soluções e ferramentas para realizar determinadas atividades, tais como o uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados etc. (BRASIL, 2017).

O uso das tecnologias não só contribui com a transformação da prática docente, como também com os processos de ensino da Matemática, pois possibilita ao discente movimentar as imagens com dinamismo e interatividade por meio do som e movimento, desenvolvendo a acuidade visual, relativizando a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos computacionais diversos, esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido (BORBA, PENTEADO, 2010).

Nesse mesmo entendimento, as autoras Dullius e Quartieri (2015) ressaltam que nem sempre o uso do computador está relacionado a uma prática dinâmica, uma vez que a utilização de tecnologias está sujeita a uma variedade de condicionantes. Assim, mesmo que os professores utilizem o computador em sala de aula, em alguns casos, esse uso ocorre de forma tradicional:

Havendo casos em que a tecnologia não passa de um acessório numa prática pedagógica tradicional. As mudanças proporcionadas por esses recursos representam um desafio a ser incorporado no cotidiano da escola, levando em conta que a prática docente pouco mudou ao longo do tempo, diferentemente dos alunos (DULLIUS, QUARTIERI, 2015, p. 5).

Esse uso tradicionalista torna restritos os resultados positivos decorrentes da utilização de computadores, pois este uso é direcionado apenas para o campo teórico e acadêmico, como apontam os autores:

Este potencial (uso do computador) ainda não tem sido devidamente explorado e integrado ao cotidiano da prática escolar, ficando restrito a discussões teóricas e acadêmicas. Para as escolas e para muitos professores, as tecnologias continuam a ser um corpo estranho, que provoca sobretudo incomodidade. O receio de ficar pra trás tem levado a escola a investir na compra de equipamentos, muitas vezes deixando para segundo plano o ensino das novas tecnologias (DULLIUS, HAETINGER, 2004, p.3).

Uma estratégia de superação dessas limitações, seria a posse, pelo professor, de um bom aplicativo computacional, o qual seria utilizado conforme a disposição da turma:

A facilidade com que esses podem explorar e verificar o que acontece com várias situações análogas é útil para formar ou testar suas convicções, levando-os a formular conjecturas, aguçando sua curiosidade para buscar uma demonstração. Bom aplicativos computacionais, devidamente utilizados, permitem testar a capacidade de transferência de conhecimentos dos estudantes, a potencialidade de sua mobilidade em vários contextos e a adaptabilidade dos instrumentos (DULLIUS, HAETINGER, 2004, p.4).

Sobre o lugar do computador em práticas educativas, Borba (2016) enfatiza a produção de significados por parte dos alunos, professores e pesquisadores envolvidos em tais práticas: “Entendemos que uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudança dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento” (BORBA, 2016, p. 45). Ou seja, para o autor, aliar a prática pedagógica com uma mídia pode ser considerado uma tentativa de superar os problemas das práticas de ensino tradicionais, pois, a partir do enfoque experimental, essa combinação possibilita inúmeras experimentações:

O enfoque experimental explora ao máximo as possibilidades de rápido feedback das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas. Por outro lado, essa prática pedagógica estimula a utilização de problemas abertos, de formulação de conjecturas em que a sistematização só se dá como coroamento de um processo de investigação por parte de estudantes (e, muitas vezes, do próprio professor) (BORBA, 2016, p. 45-46).

Outros desafios ainda necessitam ser transpostos, como a precarização do trabalho docente e as péssimas condições físicas e materiais das escolas públicas, pois, apesar do Plano Nacional de Educação – PNL (2014-2024) definir um aumento do financiamento da educação, prevista na meta 20, as deficiências recorrentes na história da educação brasileira – em relação à precarização do trabalho docente e as péssimas condições físicas e materiais das escolas públicas – constituem uma adversidade gigantesca. Assim, para que se obtenha uma referência mínima de qualidade a nível de ensino e infraestrutura é preciso que ocorra, de fato, o incentivo de políticas de valorização docente, como uma formação sólida e salários dignos, por exemplo.

Objetivo

O objetivo deste produto educacional é socializar uma sequência de atividades para o ensino das funções trigonométricas por meio do uso do *software* GeoGebra.

Detalhamento

Este texto apresenta as atividades desenvolvidas com uma turma de estudantes do segundo ano do Ensino Médio Integrado ao Curso Técnico de Informática. Para o desenvolvimento da pesquisa, foi proposta uma intervenção pedagógica realizada por meio do *software* GeoGebra a partir de uma sequência didática sistematizada em vinte e quatro aulas, cada uma com duração de cinquenta minutos, desenvolvidas em um laboratório de informática com disponibilidade de computadores suficiente para todos os estudantes da turma. Para análise dos dados utilizou-se metodologia descritiva, com objetivo de analisar as respostas dos estudantes nas atividades.

Aulas 1 e 2: Noções básicas do *software* GeoGebra (2 aulas de 50 min cada).

Os objetivos das aulas 1 e 2 referem-se à apresentação do *software* GeoGebra aos estudantes e à execução das atividades que possibilitam a interação com a plataforma. Dessa forma, no decorrer das aulas, foi possível viabilizar, junto aos estudantes, o manuseio das ferramentas como: inserir ponto, reta, segmento de reta, reta perpendicular, reta paralela, circunferência, polígono, medida de ângulo, caixa de texto e distância, bem como conhecer e trabalhar com o controle deslizante do *software*. Assim, nas referidas aulas, o estudante recebeu o material e as informações que possibilitariam o desenvolvimento da sequência

didática preconizada para as 22 aulas seguintes. A seguir, é apresentado o planejamento das aulas 1 e 2:

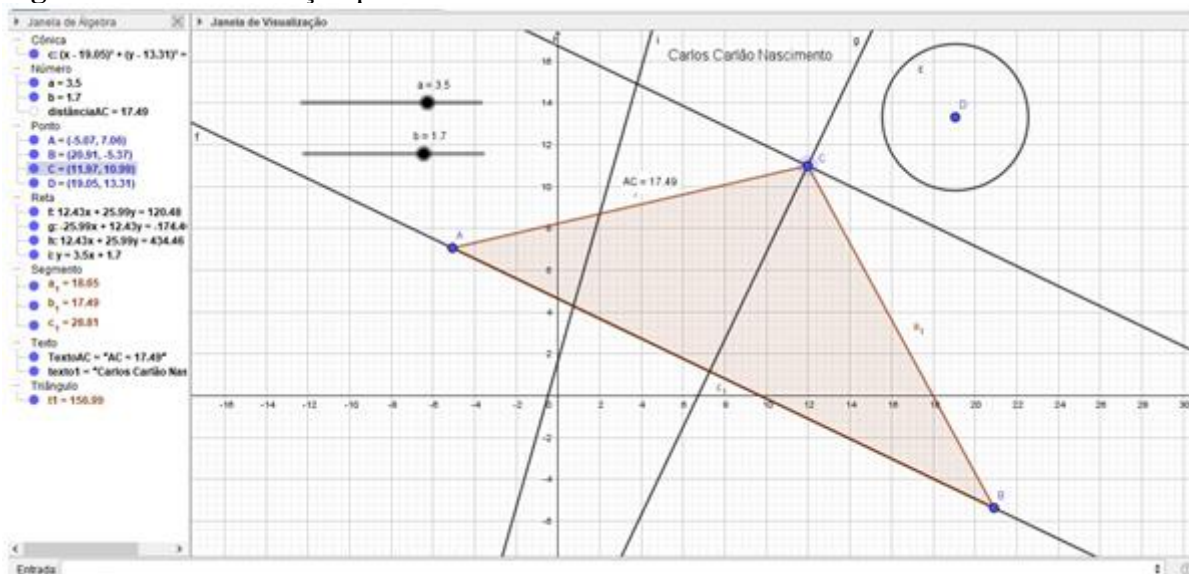
Aulas 1 e 2 - Desenvolvimento:

O aluno passará pelas seguintes etapas (todos em um mesmo arquivo):

1. Abra o *software* GeoGebra;
2. Insira dois pontos A e B;
3. Insira uma reta que passe por A e B;
4. Insira um ponto C;
5. Insira uma reta perpendicular à reta do item 3, passando por C;
6. Insira uma reta paralela à reta do item 3, passando por C;
7. Insira um ponto D;
8. Insira um controle deslizante;
9. Insira uma circunferência centrada em D e raio igual ao controle deslizante do item 8 (mexa com o controle deslizante);
10. Crie um polígono com os pontos A, B e C;
11. Meça um ângulo qualquer do polígono do item 10;
12. Meça um lado (aresta) qualquer do polígono do item 10;
13. Crie uma caixa de texto e insira seu nome;
14. Insira um controle deslizante (da mesma forma que no item 8), nomeando-o como *b*;
15. Vá até a caixa de entrada (barra inferior da janela do *software*) e digite: $y=ax+b$. Observe que *a* e *b* são os controles deslizantes criados nos itens 8 e 14. Qual o gráfico gerado?
16. Mexa nos dois controles deslizantes e observe o que eles provocam na reta criada no item 15;
17. As retas criadas nos itens 3, 5 e 6, podem ser vistas/entendidas como gráficos de funções do 1º grau, portanto identifique na barra lateral esquerda as suas equações.

Segue possível resultado das aulas 1 e 2, destacado na Figura 1.

Figura 1. Possível solução para as aulas 1 e 2:



Fonte: Elaboração do autor (2019).

No decorrer desta atividade, foi possível perceber que os estudantes ficaram motivados com a ideia de sair da rotina da sala de aula e de trabalhar no Laboratório de Informática e, também, com a forma diferente de ensinar/aprender a Matemática com o uso da tecnologia.

Apresentar ao estudante o conhecimento de novas informações e instrumentos para o aprendizado de Matemática por meio da tecnologia vai em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2000) que diz que, devido ao fato de o surgimento e a renovação de saberes acontecerem de forma tão veloz, torna-se impossível o processo de aprendizado ocorrer de forma solitária, com o manuseio do uso de calculadoras pelos estudantes, por exemplo. É um trabalho muito mais amplo, uma vez que:

O trabalho ganha então uma nova exigência, que é a de aprender continuamente em um processo não mais solitário. O indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, juntas, complementar-se-ão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos (BRASIL, 2000, p. 41).

Ao realizar esta atividade, foi possível perceber que alguns estudantes a desenvolveram de forma mais célere, outros nem tanto. Contudo, possibilitou-se que cada um trabalhasse em seu próprio ritmo.

Aulas 3 e 4: Círculo trigonométrico; Radiano (2 aulas de 50 min cada).

As aulas 3 e 4, tiveram como objetivo a construção e a visualização do círculo trigonométrico e, posteriormente, do radiano. Visaram, ainda, a análise e a movimentação da construção tendo por finalidade assegurar a nova medida de ângulo: o radiano. Sendo assim, esta atividade possibilitou que estudantes, por meio do uso de *software*, construíssem, analisassem e movimentassem a construção por eles realizada, relacionando a medida do arco com a medida do ângulo, utilizando as unidades de medidas graus e radianos. A seguir, tem-se o desenvolvimento das aulas:

Aulas 3 e 4 - Desenvolvimento:

O aluno passará pelas seguintes etapas (todos em um mesmo arquivo):

1. Construa, no GeoGebra, uma circunferência de raio igual a 1 e centro no ponto A (0,0);

2. Insira um ponto B com coordenadas (1,0).

Comentário: Os eixos coordenados (x e y) dividem a circunferência em 4 partes, as quais são chamadas de “quadrantes”.

3. Insira um ponto C sobre a circunferência, pouco acima de B (no sentido anti-horário);

Comentário: o sentido anti-horário, a partir do ponto B é

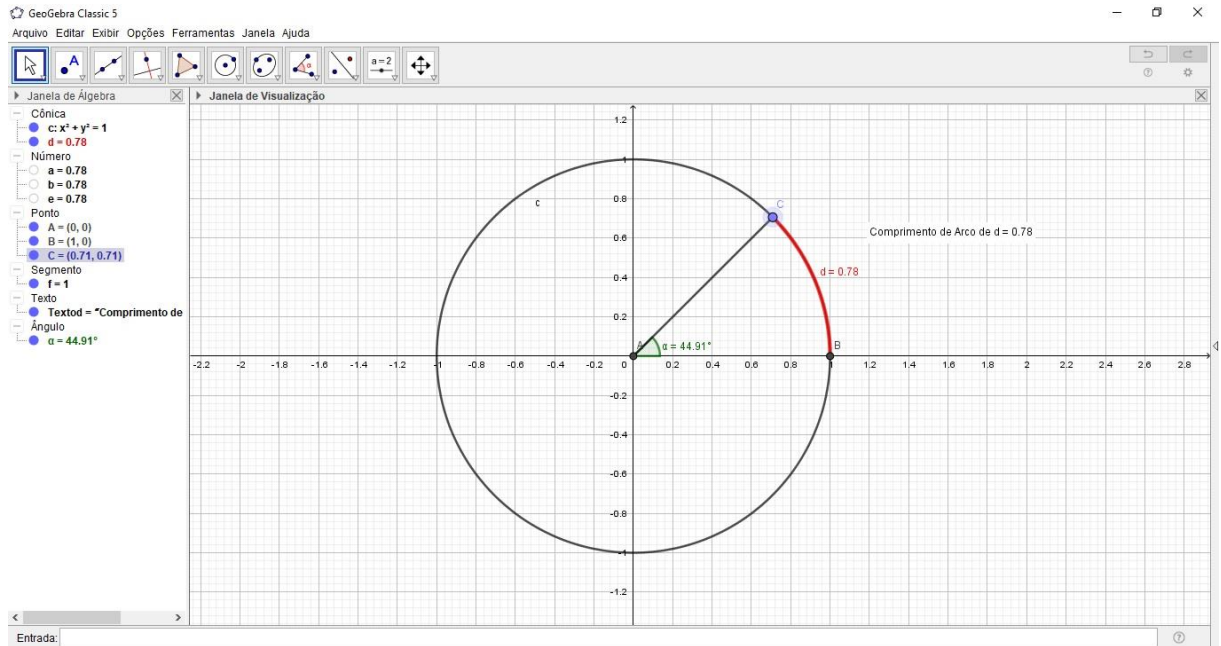
convencionado como sendo o sentido positivo do círculo trigonométrico e os quadrantes são enumerados nesse sentido.

De outra forma, tem-se que x e y assumem os sinais, conforme tabela:

- ✓ Crie o segmento que vai de A até C;
- ✓ Crie um arco de circunferência que vai de B até C;
- ✓ Comentário: o arco de circunferência BC (orientado de B para C, no sentido positivo) determina um ângulo (central) \widehat{BAC} , ou seja, existe uma relação entre o comprimento do arco e o ângulo determinado por ele.
- ✓ Entre em *propriedades* desse arco e em *estilo*, altere a grossura da linha e em cor, coloque vermelho.
- ✓ Com a ferramenta distância ou comprimento, meça o comprimento do arco BC
- ✓ Meça o ângulo \widehat{BAC} ;
- ✓ Movimente o ponto C e observe o comprimento do arco BC e também o ângulo formado em \widehat{BAC} .
- ✓ Quando $\widehat{BAC}=180^\circ$, qual é o comprimento do arco BC?
 - Comentário: Lembre-se que o comprimento da circunferência é $C=2\pi r$ (r =raio) e que a circunferência trigonométrica possui raio igual a 1, ou seja, $C=2\pi \cdot 1=2\pi$. Sendo assim, quando se tem $\widehat{BAC}=360^\circ$, tem-se que o arco BC medirá 2π . Portanto, é estabelecida uma relação entre o comprimento do arco e o respectivo ângulo central, da seguinte forma: $360^\circ \leftrightarrow 2\pi$ radianos, ou mais simplificada: $180^\circ \leftrightarrow \pi$ radianos (a unidade radiano vem do fato do comprimento da circunferência ser 2π vezes o comprimento do raio).

Esta atividade ensinou a construção do ângulo central, assim, na medida em que o aluno movimentasse o ponto C, aparecia automaticamente a medida do arco e também do ângulo. Para visualização, destaca-se a Figura 2.

Figura 2. Possível resultado após o desenvolvimento das aulas 3 e 4.



Fonte: Elaboração do autor (2019).

Após gerarem o círculo trigonométrico, os estudantes responderam a Atividade 1, que consistiu na conversão de grau para radiano e radiano para grau:

Atividade 1

1) Faça as conversões de grau para radiano dos ângulos a seguir:

Grau	Radiano	Grau	Radiano	Grau	Radiano	Grau	Radiano
0°		90°	$\pi/2$	180°	π	270°	
30°		120°		210°		300°	
45°		135°		225°		315°	
60°		150°		240°		330°	

2) Faça as conversões de radiano para grau dos ângulos a seguir:

Radiano	Grau	Radiano	Grau	Radiano	Grau	Radiano	Grau
0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{11\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{4}$	
$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{3}$	

$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π	
-----------------	--	------------------	--	------------------	--	--------	--

No desenvolvimento da questão, foi possível observar que os estudantes conseguiram estabelecer, por meio do *software* e do cálculo manual, a relação entre as unidades de medidas de ângulo, grau e radiano, bem como relacionar o comprimento de um arco com o respectivo ângulo central. A Atividade 1 possibilitou que os estudantes compreendessem melhor as relações entre arco e ângulo, reduzindo, dessa forma, a quantidade de cálculos que seriam feitos somente de forma manual.

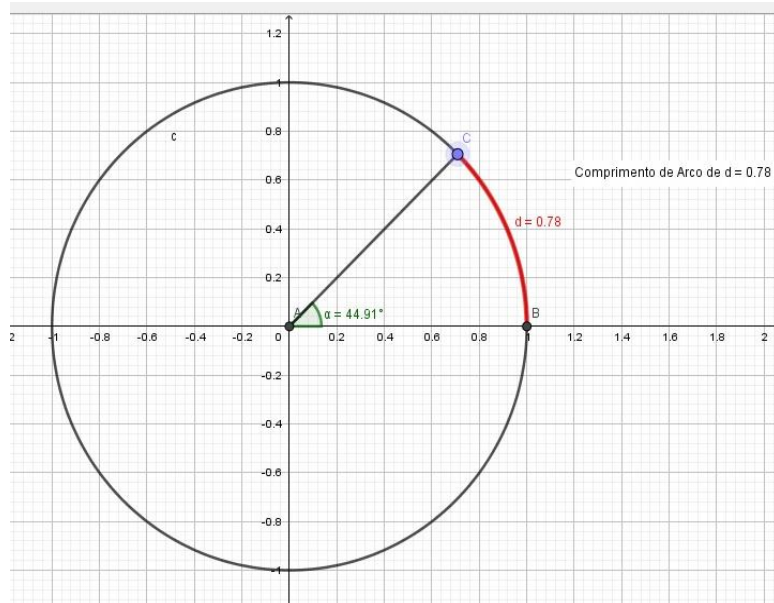
Com relação aos estudantes que erraram alguns dos itens, percebeu-se que tiveram dificuldade em relacionar o comprimento do arco com o ângulo não só no GeoGebra, mas também ao fazerem o cálculo manual.

Aulas 5, 6, 7, 8 e 9: Trigonometria no círculo trigonométrico: Seno, Cosseno e Tangente (4 aulas de 50 min cada).

Nas aulas 5, 6, 7, 8 e 9, teve-se como objetivo definir as principais razões trigonométricas no círculo trigonométrico: Seno, Cosseno e Tangente, bem como visualizar a trigonometria no triângulo retângulo. As aulas foram divididas em dois momentos. No primeiro momento – que englobou as aulas 5, 6 e 7 –, foi trabalhada a construção do seno e do cosseno. A segunda parte, aulas 8 e 9, resultou na construção da tangente. Assim, para auxiliar a condução sobre o tema, foi sugerido o seguinte desenvolvimento para Seno e Cosseno (1ª parte):

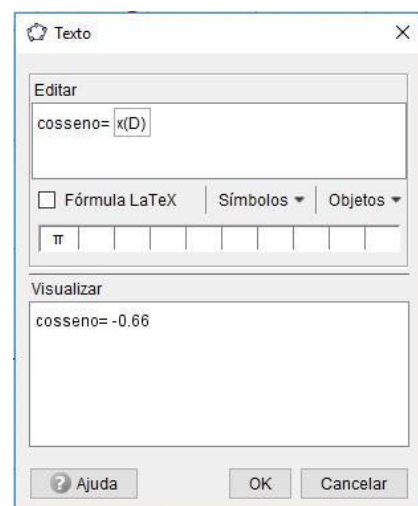
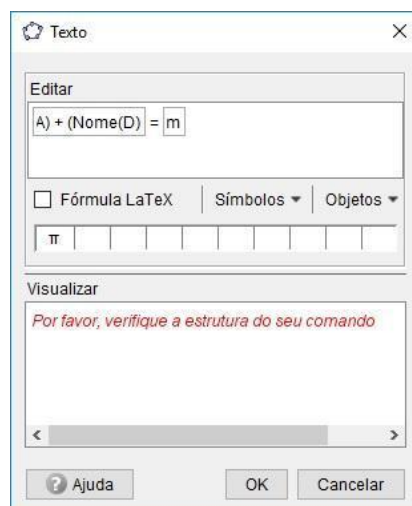
Aulas 5, 6, 7 - Desenvolvimento: Para ajudar a conduzir as discussões sobre o tema, sugere-se a construção:

- 1) Resgate o círculo trigonométrico visto na aula 3 e 4 (ou construa novamente).



- 2) Insira uma reta perpendicular ao eixo x, passando por C;
- 3) Insira uma reta perpendicular ao eixo y, passando por C;
- 4) Nas interseções das retas dos itens 2 e 3 com os eixos x e y, crie os pontos D e E;
- 5) Crie os segmentos AD e AE, EC e DC e em seguida oculte as retas perpendiculares criadas nos itens 2 e 3;
- 6) Em propriedades do segmento AD, engrosse o segmento e coloque na cor azul;
- 7) Em propriedades do segmento AE, engrosse o segmento e coloque na cor verde;
- 8) Com a ferramenta *distância*, meça a distância entre os pontos A e D e a distância entre os pontos A e E;
- 9) No item 8, foram criadas duas caixas de texto: AD=.... e AE=.... . Entre em *editar* (botão direito e editar) e deixe como na figura (exemplo para AD):

Obs.: observe que na segunda caixa, define-se o valor de cosseno como sendo a abscissa do ponto D, ou seja, no GeoGebra é usado o comando $x(D)$. Faça o mesmo para a caixa de texto AE, colocando 'seno' e a ordenada do ponto E, ou seja, $y(E)$.



- 10) Com a ferramenta *polígono*, crie o triângulo ADC;
 11) Analise o triângulo ADC, lembrando as razões trigonométricas do triângulo retângulo (e),

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \quad \text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

E conclua que seus catetos (devido à hipotenusa ser de tamanho 1) são os valores de Seno (projetado no eixo y, em verde) e Cosseno (projetado no eixo x, em azul) do ângulo DÂC.

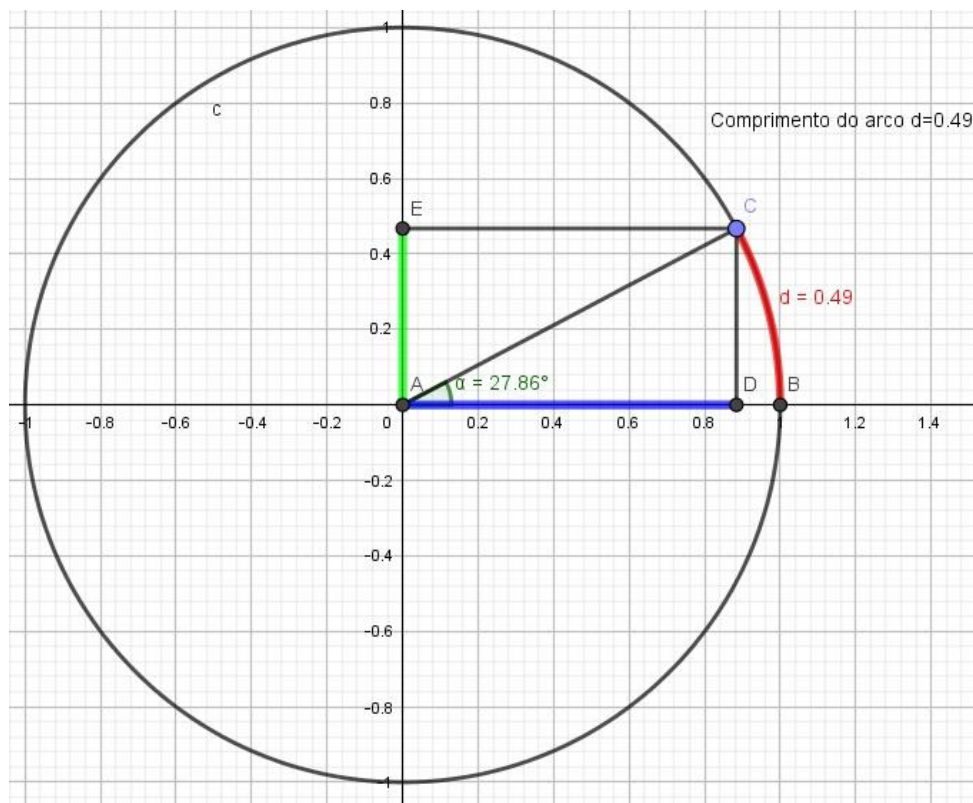
12) Relembre o teorema de Pitágoras: $\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}_1^2 + \text{cateto}_2^2$. Com base nesse teorema, aplicando-o no triângulo retângulo ADC,

$$\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1$$

conclua que

Dessa forma, o possível resultado das aulas 5, 6, 7 pode ser observado na Figura 3.

Figura 3. Possível resultado das aulas 5,6 e 7.



Fonte: Elaboração do autor.

Após gerar o gráfico, os estudantes responderam a Atividade 2 que continha seis questões. Esta atividade possibilitou aos estudantes visualizarem, no triângulo retângulo, o lado que representava os valores do seno e do cosseno, assim como visualizar, no círculo

trigonométrico, os sinais em cada quadrante do seno e do cosseno. Além disso, possibilitou determinar os valores de seno e cosseno a partir dos ângulos dados em graus e radianos e, ainda, comparar o seno e o cosseno dos diversos ângulos nos respectivos quadrantes.

Atividade 2

1) Observando a construção feita no GeoGebra, responda os itens:

a) Qual segmento representa o seno do arco BC (ou ângulo \widehat{BAC})? _____

b) Qual segmento representa o cosseno do arco BC (ou ângulo \widehat{BAC})? _____

2) Movimente o ponto C observando o sinal de seno e cosseno. Com base nisso, preencha a tabela com “positivo” ou “negativo”:

	Seno	Cosseno
1° quadrante		
2° quadrante		
3° quadrante		
4° quadrante		

3) Movimente o ponto C de forma a obter o seno e o cosseno dos seguintes ângulos:

	Seno	cosseno
30°		
45°		
60°		
120°		
135°		
150°		
210°		
225°		
240°		
300°		

315°		
330°		

4) Movimente o ponto C e visualize os valores de seno e do cosseno do ângulo formado. Em especial, movimente o ponto C para encontrar os seguintes valores:

- a) $\text{sen}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$
- b) $\text{cos}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$
- c) $\text{sen}(\pi/2) = \underline{\hspace{2cm}}$
- d) $\text{cos}(\pi/2) = \underline{\hspace{2cm}}$
- e) $\text{sen}(\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$
- f) $\text{cos}(\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$
- g) $\text{sen}(3\pi/2) = \underline{\hspace{2cm}}$
- h) $\text{cos}(3\pi/2) = \underline{\hspace{2cm}}$
- i) $\text{sen}(2\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$
- j) $\text{cos}(2\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$

5) Complete com $>$, $<$ ou $=$:

- a) $\text{sen}(20^\circ) \dots\dots \text{sen}(170^\circ)$
- b) $\text{sen}(120^\circ) \dots\dots \text{sen}(240^\circ)$
- c) $\text{sen}(30^\circ) \dots\dots \text{sen}(150^\circ)$
- d) $\text{sen}(210^\circ) \dots\dots \text{sen}(300^\circ)$
- e) $\text{cos}(10^\circ) \dots\dots \text{cos}(10^\circ)$
- f) $\text{sen}(10^\circ) \dots\dots \text{cos}(10^\circ)$

6) Sendo x um arco no segundo quadrante do círculo trigonométrico, responda com V ou F:

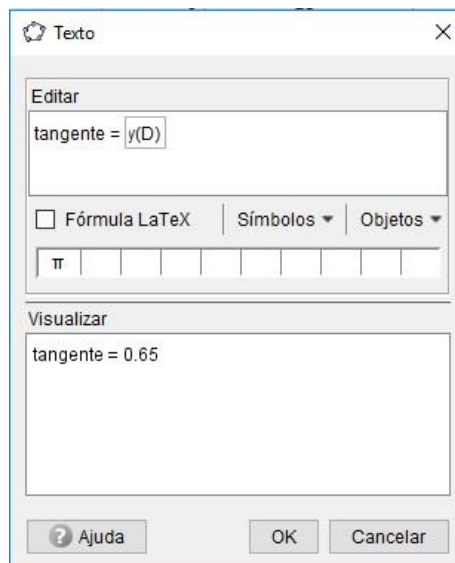
- a) () $\text{sen}(x) > \text{cos}(x)$
- b) () $\text{cos}(x) > 0$
- c) () $\text{sen}(x) < 0$
- d) () $\text{sen}(x) \cdot \text{cos}(x) < 0$

Com relação aos estudantes que erraram alguns itens da Atividade 2, observou-se que os mesmos construíram os devidos gráficos, entretanto, não souberam extrair os valores dos senos e cossenos de cada ângulo.

A seguir, apresentou-se a segunda parte, as aulas 8 e 9, relacionadas ao desenvolvimento da tangente:

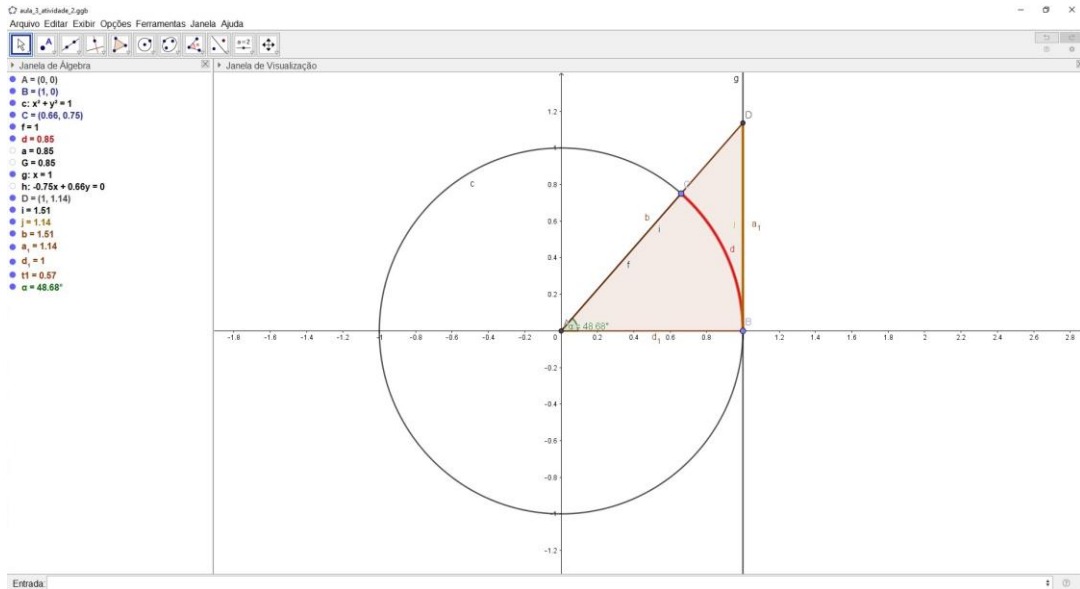
2ª parte do desenvolvimento: Tangente

- 1) Construa novamente o círculo trigonométrico (Centro $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, arco BC).
- 2) Insira uma reta perpendicular ao eixo x, passando por B;
- 3) Crie uma reta passando por A e C;
- 4) Na interseção das retas dos itens 2 e 3, insira o ponto D;
- 5) Crie o segmento AD;
- 6) Oculte a reta do item 3;
- 7) Crie o segmento BD e edite sua espessura e cor (laranja);
- 8) Crie o polígono com os pontos ABD e insira a medida do ângulo \widehat{BAD} ;
- 9) Relembre a razão trigonométrica:
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$$
 e conclua, a partir do triângulo ABD, que devido a $AB=1$, temos que $\tan(\alpha)=BD$.
- 10) Movimente o ponto C e visualize os valores de tangente do ângulo formado.
- 11) Com a ferramenta *distância*, meça a distância entre ponto B e D;
- 12) No item 11, foi criada a caixa de texto: $BD=...$. Entre em editar (botão direito e editar) e deixe como na figura:



Dessa forma, como possível resultado da segunda parte, destaca-se a Figura 4:

Figura 4. Possível solução para o desenvolvimento da aula 8



Fonte: Elaboração do autor

Após gerar o gráfico, os estudantes responderam a Atividade 3 que continha seis questões:

Atividade 3

- 1) Observando a construção feita no GeoGebra, qual segmento representa a tangente do arco BC (ou ângulo \widehat{BAC})? _____
- 2) Movimente o ponto C observando o sinal da tangente. Com base nisso, preencha a tabela com “positivo” ou “negativo”:

	Tangente
1º quadrante	
2º quadrante	
3º quadrante	
4º quadrante	

- 3) Movimente o ponto C de forma a obter a tangente dos seguintes ângulos:

	Tangente
30°	
45°	
60°	
120°	
135°	
150°	
210°	
225°	
240°	
300°	
315°	
330°	

4) Complete com $>$, $<$ ou $=$:

- g) $\tan(20^\circ) \dots\dots \tan(210^\circ)$
- h) $\tan(120^\circ) \dots\dots \tan(290^\circ)$
- i) $\tan(30^\circ) \dots\dots \tan(150^\circ)$
- j) $\tan(210^\circ) \dots\dots \tan(300^\circ)$

5) Sendo $x=260^\circ$ um arco no círculo trigonométrico, responda com V ou F:

- a) () $\text{sen}(x) < \cos(x) < \tan(x)$
- b) () $\text{sen}(x) < \tan(x) < \cos(x)$
- c) () $\tan(x) < \text{sen}(x) < \cos(x)$
- d) () $\cos(x) < \tan(x) < \text{sen}(x)$

6) Movimente o ponto C e visualize os valores da tangente do ângulo formado. Em especial, movimente o ponto C para encontrar os seguintes valores:

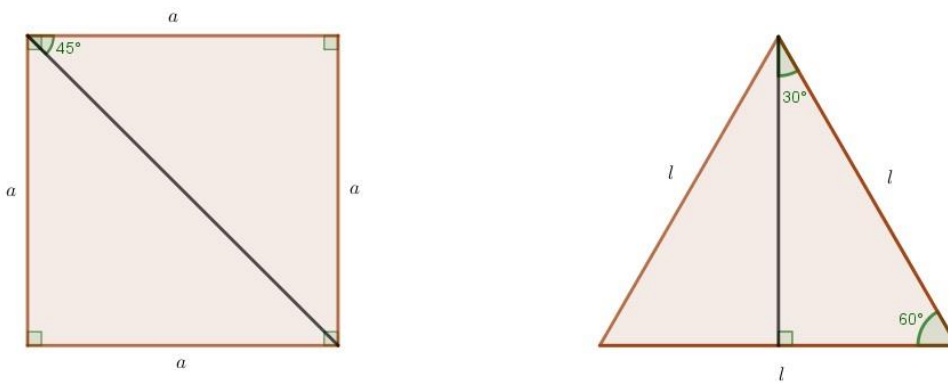
- a) $\tan(0) = \underline{\hspace{2cm}}$
- b) $\tan(\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$
- c) $\tan(2\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$
- d) $\tan(\pi/2) = \underline{\hspace{2cm}}$
- e) $\tan(3\pi/2) = \underline{\hspace{2cm}}$

OBS.: Arcos notáveis do primeiro quadrante.

Na Atividade 3, foi possível observar que os estudantes conseguiram visualizar o lado do triângulo que representava a tangente, identificaram os sinais da tangente nos quatro quadrantes, conseguiram visualizar os valores da tangente de vários ângulos, bem como relacionaram a tangente de um ângulo com o seno e o cosseno e compararam o valor da tangente de um ângulo com outros ângulos.

Presumiu-se que o grupo de estudantes que acertou todas as questões conseguiu visualizar no gráfico os valores da tangente de vários ângulos, bem como relacionar os valores de seno, cosseno e tangente, tanto no *software* como com o cálculo manual. Esse processo investigativo desencadeia habilidades a serviço de várias competências, por exemplo: utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, articular conhecimentos, compreender registros, investigar e estabelecer conjecturas; sendo que estas habilidades são competências específicas de *Matemática e suas tecnologias* de acordo com a Base Nacional Curricular – BNCC (2017).

A experiência com a manipulação do círculo trigonométrico no GeoGebra permitiu a obtenção de vários valores de seno, cosseno e tangente, porém, sob a forma de números decimais aproximados. No entanto, é possível encontrar valores exatos para alguns arcos, os quais chamaremos de “notáveis”: 30° , 45° e 60° .



Arcos	Seno	Cosseno	Tangente
30°			
45°			
60°			

Para trabalhar os conceitos de seno, cosseno e tangente por meio do cálculo manual, construiu-se um quadrado e deste retirou-se dois triângulos retângulos isósceles e, a partir do triângulo equilátero, retirou-se dois triângulos retângulos e aplicou-se as razões

trigonométricas no triângulo retângulo. Dessa forma, foi possível determinar os valores de seno, cosseno e tangente de 30° , 45° e 60° .

Considerando os estudantes que cometeram algum erro, tanto por meio do uso do *software* como por meio do cálculo manual, observou-se que visualizaram de forma incorreta no gráfico os valores da tangente de vários ângulos, não conseguindo relacionar os valores de seno, cosseno e tangente no *software* com o cálculo manual.

Aulas 10 e 11: Explorando simetrias no círculo trigonométrico (2 aulas de 50 min cada).

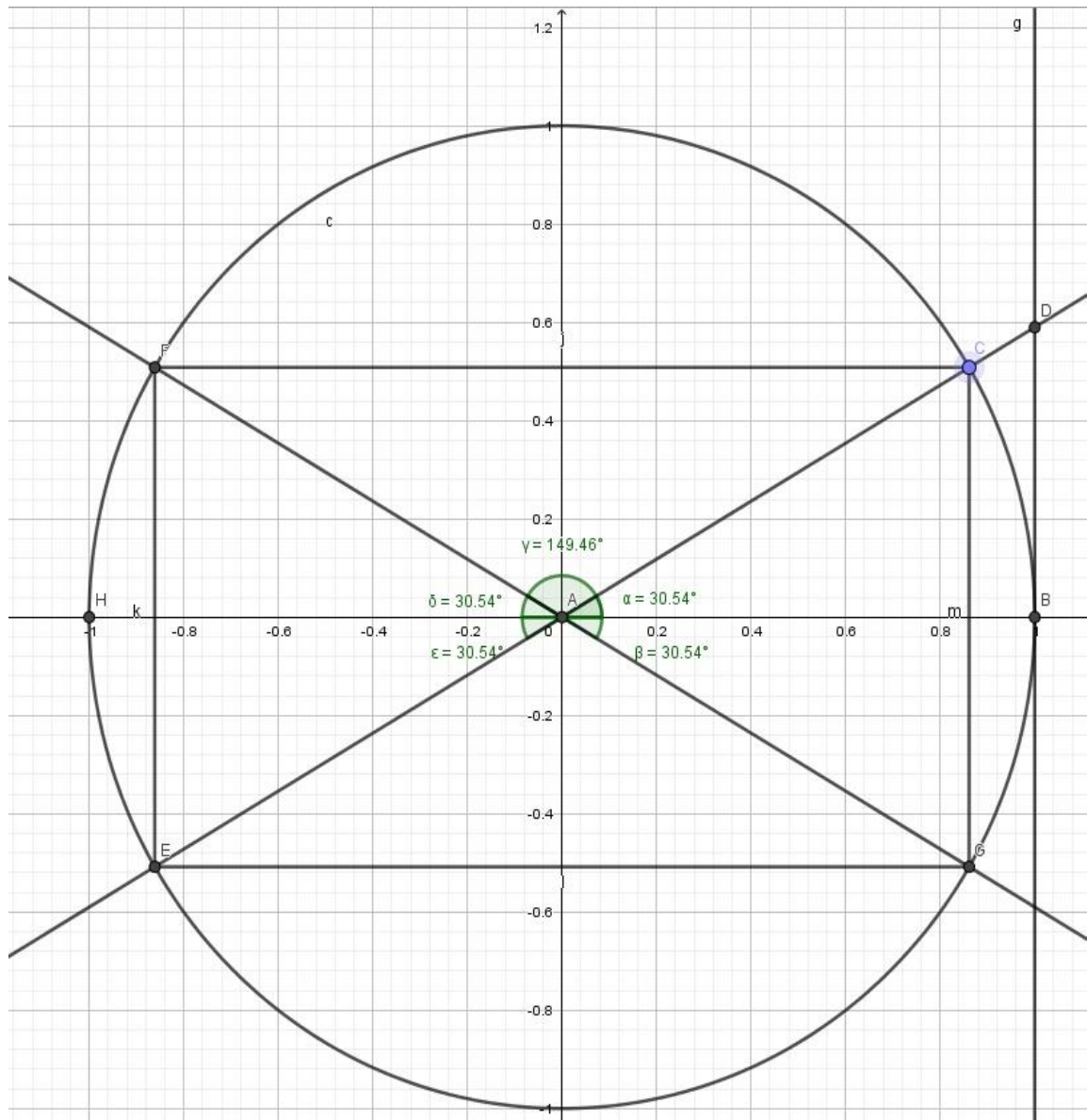
As aulas 10 e 11 tiveram como objetivo não só usar as simetrias do círculo trigonométrico para relacionar seno, cosseno e tangente entre ângulos do 2º, 3º e 4º quadrantes, comparando-os com os ângulos do primeiro quadrante, mas também reconhecer, via congruência de triângulos, as simetrias e, posteriormente, comparar seno, cosseno e tangente destes ângulos “simétricos”. Para a execução desta proposta, os estudantes receberam o material contendo o planejamento das aulas:

Desenvolvimento: Para se chegar à discussão sobre as simetrias, observou-se os seguintes passos, os quais proporcionam a reflexão:

- 1) Construa novamente o círculo trigonométrico (Centro $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, arco BC).
- 2) Insira a reta que passa por A e C;
- 3) Insira o ponto D como interseção da reta do item 2 com a reta auxiliar para visualizarmos a tangente nesse ponto;
- 4) Insira o ponto E como interseção da reta do item 2 com a circunferência (já existe uma dessas interseções que é o ponto C);
- 5) Insira uma reta paralela ao eixo x, que passe por C, e nomeie como F a interseção dessa reta com a circunferência;
- 6) Insira a reta que passa por F e A e nomeie como G a interseção dessa reta com a circunferência;
- 7) Meça o ângulo $B\hat{A}C$ e $B\hat{A}G$ e observe a congruência;
- 8) Crie os segmentos: CF, FE, EG e CG (oculte a reta que passa por F e C);
- 9) Movimente o ponto C para visualizar vários ângulos congruentes;
- 10) Meça o ângulo $B\hat{A}F$;
- 11) Crie o ponto H $(-1,0)$ e meça os ângulos $F\hat{A}H$, $H\hat{A}E$ e $G\hat{A}B$.

Dessa forma, como possível resultado das aulas 10 e 11, destaca-se a Figura 5:

Figura 5. Possível resultado da construção: visualizando congruências



Fonte: Elaboração do autor.

Essa atividade possibilitou estabelecer a simetria entre o primeiro e os demais quadrantes (segundo, terceiro e quarto) para o seno, cosseno e tangente em relação ao eixo vertical, horizontal e ao centro do círculo trigonométrico. Em seguida, os estudantes foram orientados a movimentar o ponto C, com a finalidade de observarem e compararem a variação do ângulo do primeiro com os dos demais quadrantes, bem como a sua simetria.

Atividade 4

1) Escrever um ângulo que tenha o mesmo valor de:

a) $\text{sen}(30^\circ) = \text{sen}(\underline{\hspace{2cm}})$

- b) $\text{sen}(45^\circ) = \text{sen}(\underline{\hspace{2cm}})$
- c) $\text{sen}(60^\circ) = \text{sen}(\underline{\hspace{2cm}})$
- d) $\text{sen}(x) = \text{sen}(\underline{\hspace{2cm}})$, sendo x um ângulo do 1º quadrante
- e) $\text{tan}(30^\circ) = \text{tan}(\underline{\hspace{2cm}})$
- f) $\text{tan}(45^\circ) = \text{tan}(\underline{\hspace{2cm}})$
- g) $\text{tan}(60^\circ) = \text{tan}(\underline{\hspace{2cm}})$
- h) $\text{tan}(x) = \text{tan}(\underline{\hspace{2cm}})$, sendo x um ângulo do 1º quadrante
- i) $\text{cos}(30^\circ) = \text{cos}(\underline{\hspace{2cm}})$
- j) $\text{cos}(45^\circ) = \text{cos}(\underline{\hspace{2cm}})$
- k) $\text{cos}(60^\circ) = \text{cos}(\underline{\hspace{2cm}})$
- l) $\text{cos}(x) = \text{cos}(\underline{\hspace{2cm}})$, sendo x um ângulo do 1º quadrante

2) Movimente o ponto C a fim de avaliar as identidades abaixo, classificando como verdadeiro (V) ou falso (F):

- a) () $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$
- b) () $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}(\alpha)$
- c) () $\text{sen}(2\pi - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$
- d) () $\text{cos}(\pi - \alpha) = -\text{cos}(\alpha)$
- e) () $\text{cos}(\pi + \alpha) = \text{cos}(\alpha)$
- f) () $\text{cos}(2\pi - \alpha) = \text{cos}(\alpha)$
- g) () $\text{tan}(\pi - \alpha) = -\text{tan}(\alpha)$
- h) () $\text{tan}(\pi + \alpha) = \text{tan}(\alpha)$
- i) () $\text{tan}(2\pi - \alpha) = \text{tan}(\alpha)$

3) Encontre os valores pedidos (usando se necessário, as *identidades verdadeiras* do exercício anterior):

- a) $\text{sen}(120^\circ) = \text{sen}(180^\circ - 60^\circ) = \text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- b) $\text{sen}(240^\circ) = \underline{\hspace{4cm}}$
- c) $\text{sen}(315^\circ) = \underline{\hspace{4cm}}$
- d) $\text{cos}(135^\circ) = \underline{\hspace{4cm}}$
- e) $\text{cos}(210^\circ) = \underline{\hspace{4cm}}$
- f) $\text{cos}(330^\circ) = \underline{\hspace{4cm}}$
- g) $\text{tan}(150^\circ) = \underline{\hspace{4cm}}$
- h) $\text{tan}(225^\circ) = \underline{\hspace{4cm}}$
- i) $\text{tan}(300^\circ) = \underline{\hspace{4cm}}$

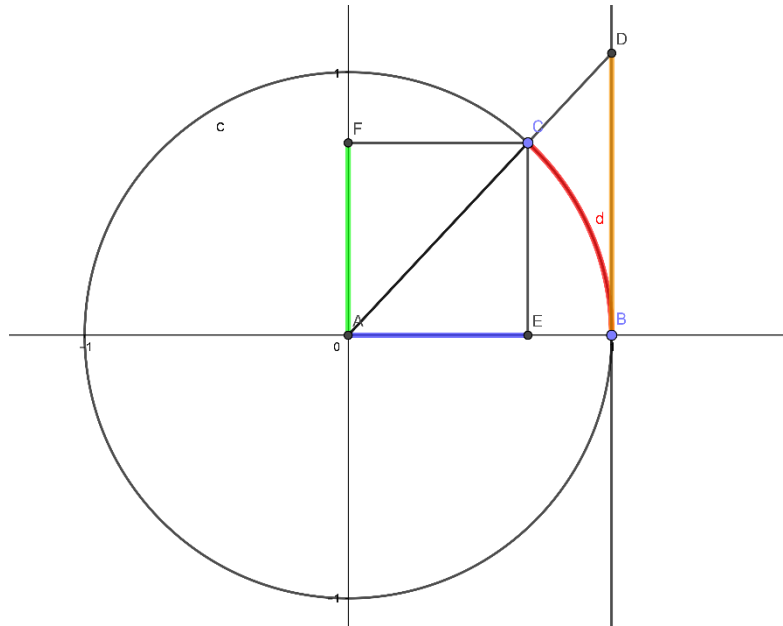
A criação do gráfico possibilitou que os discentes compreendessem a relação entre os ângulos e seus correspondentes nos diversos quadrantes do círculo trigonométrico, bem como permitiu que constatassem os valores do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos simétricos.

Aulas 12, 13 e 14: Definição das funções $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$ e $\text{tan}(x)$ (3 aulas de 50 min cada).

As aulas 12, 13 e 14 tiveram como objetivo não só a compreensão da construção das funções seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico, mas também da relação do comprimento do arco (radiano) com a projeção em cada eixo coordenado – eixo x, no caso do cosseno, eixo y no caso do seno e reta auxiliar, no caso da tangente – e, ainda, o aprendizado de como visualizar essa relação graficamente. Vale-se ressaltar que o passo 11 do desenvolvimento desse material serviu de aporte para a Atividade 5.

Desenvolvimento: Para realizar essa atividade, os alunos deverão seguir os seguintes passos:

1. Construa novamente o círculo trigonométrico (Centro $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, arco BC).
2. Insira a reta que passa por A e C;
3. Insira uma reta perpendicular ao eixo x, passando por B;
4. Insira o ponto D, como interseção da reta do item 2 com a reta auxiliar (do item 3) onde visualizamos a tangente;
5. Insira uma reta paralela ao eixo y que passe por C e nomeie como E, a interseção dessa reta com o eixo x;
6. Insira uma reta paralela ao eixo x que passe por C e nomeie como F, a interseção dessa reta com eixo y;
7. Crie os segmentos AD e AE, AF, EC, CF e BD e em seguida oculte as retas perpendiculares criadas nos itens 2 e 3;
8. Em *propriedades* do segmento AE, engrosse o segmento e coloque na cor azul;
9. Em *propriedades* do segmento AF, engrosse o segmento e coloque na cor verde;
10. Em *propriedades* do segmento BD, edite sua espessura e cor (laranja);



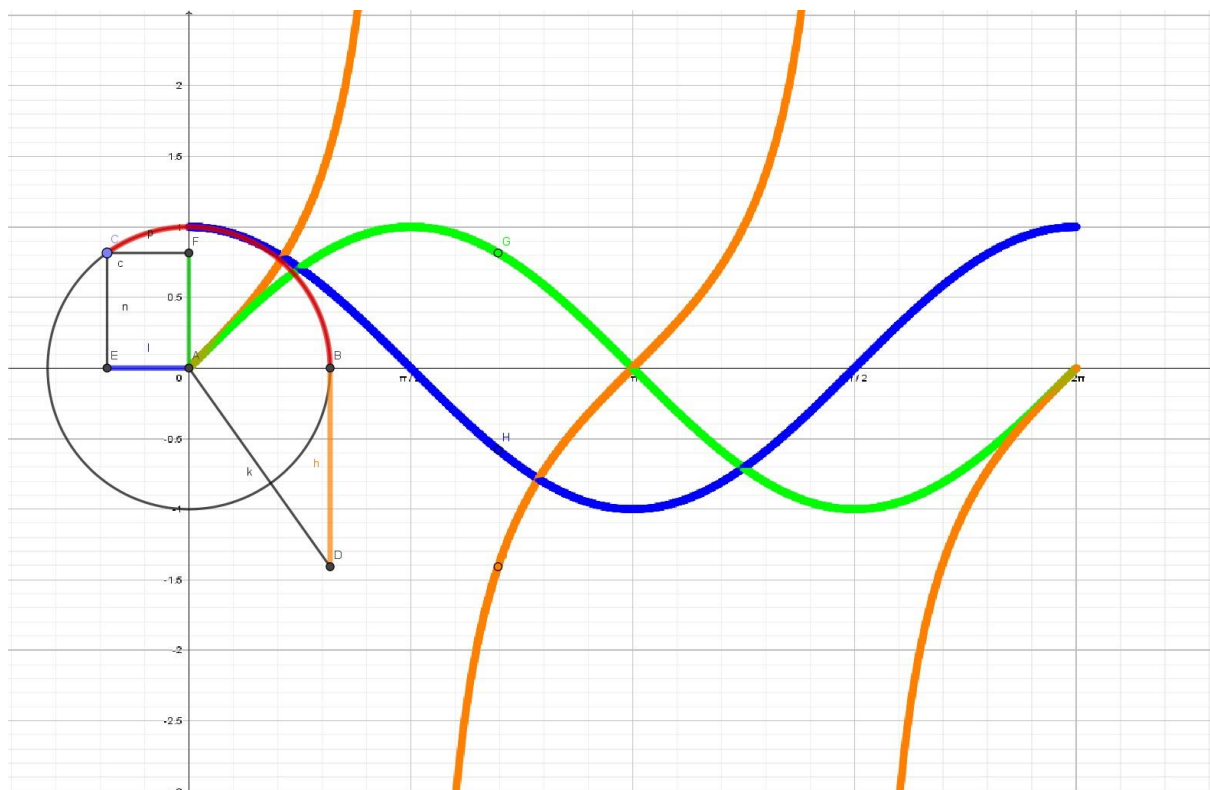
11. Na caixa de entrada, crie um ponto que será chamado de G. A sintaxe de criação de ponto na **caixa de entrada** é sempre da forma: $G=(\text{coordenada } x \text{ do ponto}, \text{coordenada } y \text{ do ponto})$. Crie um ponto com o seguinte comando: $G=(d, y(F))$. O ponto G foi criado usando o comprimento do arco d como sendo sua abscissa e a coordenada y do ponto F, como sendo sua ordenada (que é o respectivo valor do seno desse arco);
12. Entre nas propriedades do ponto G e habilite a função “Rastro”. Isso fará com que o ponto G ao ser movido, deixe um rastro, que será o gráfico da função Seno;
13. Por fim, volte ao ponto C e em *propriedades*, habilite “animar”
14. Trace duas retas paralelas ao eixo x e passando pelos pontos 1 e -1 do eixo y. Observe que o gráfico da função seno fica entre essas retas construídas no passo 5. Isso significa que a imagem da função seno está limitada ao intervalo $[-1, 1]$.

Nos estudos de Gravina (2001), no que se refere ao uso da tecnologia como recurso de ensino, a autora relata que os ambientes de Geometria Dinâmica são ferramentas informáticas que permitem a construção de objetos geométricos a partir das definições das propriedades. Em consonância às pesquisas da autora, apresentou-se o material que possibilitou a geração do gráfico de cada função, relacionando o comprimento do arco com o seno, o cosseno e a tangente do ângulo.

Atividade 5:

Repita procedimento análogo (a partir do item 11) para criar a função cosseno e tangente, fazendo as mesmas análises. No caso de cosseno $H=(d, x(E))$ e no caso de tangente, $J=(d, y(D))$.

Figura 6 - Função seno, cosseno e tangente construída a partir do círculo trigonométrico



Fonte: Elaboração do autor.

Foram notáveis o envolvimento e a participação dos estudantes, provavelmente devido à dinâmica da atividade proporcionada pelo *software*, uma vez que estes puderam perceber, em decorrência da construção e da animação dos gráficos, que ambos poderiam ser construídos ao mesmo tempo, em diversas tonalidades de cores e com movimento, o que tornou atrativo e diferente o trabalho das aulas de Matemática, como se pode constatar na figura 6.

Elaborar a sequência didática e acompanhar os alunos individualmente foi imprescindível para a obtenção de um resultado satisfatório. Além disso, a utilização do *software* contribuiu para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos estudados.

Aulas 15 e 16: Alguns gráficos das funções $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$ e $\text{tan}(x)$ e suas características (1 aula de 50 min).

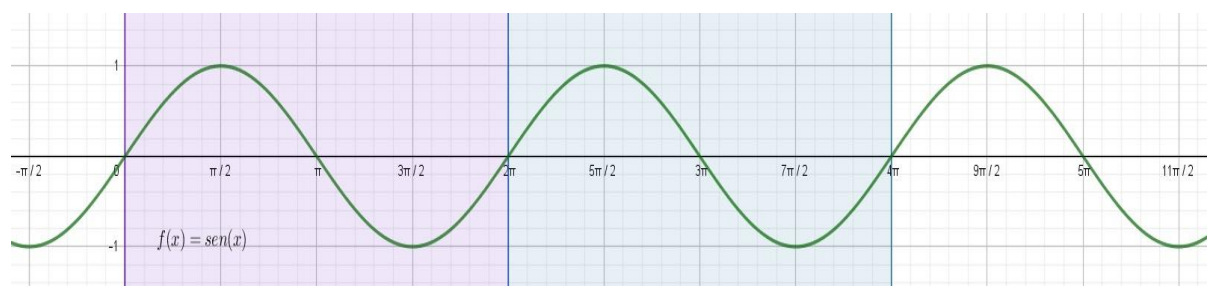
Nas aulas 15 e 16, teve-se como objetivo construir e visualizar por meio do *software* o comportamento das funções seno, cosseno e tangente. Além disso, visava-se determinar o

domínio, a imagem e o período de cada função. Assim, houve necessidade de abordar os conceitos de domínio, imagem e período das respectivas funções. Como o estudo de período era algo novo a ser trabalhado, foi imprescindível explorar seu conceito e sua representação gráfica. Segundo Iezzi (2016, p. 49): “Uma função $f: A \rightarrow B$ é periódica se existir um número real positivo p tal que $f(x) = f(x+p)$, $\forall x \in A$. O menor valor positivo de p é chamado de **período de f** ”.

Em relação ao conceito de período, destacou-se seu entendimento por meio da seguinte estratégia:

Observe a Figura 7, a função $f(x) = \text{sen}(x)$ possui período igual a 2π .

Figura 7. Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ e seu período



Fonte: Elaboração do autor (2019).

A construção do gráfico por meio do *software* possibilitou visualizar qual é o espaço que representou o período por meio das cores lilás e verde. Para possibilitar essa compreensão, utilizou-se a atividade a seguir, que deveria ser desenvolvida por cada estudante:

Atividade 6:

Com o auxílio do GeoGebra, construa o gráfico das funções e, a partir desses, encontre o que se pede:

a) função seno:

	Domínio	Imagem	Período
$f(x) = \text{sen}(x)$			
$f(x) = \text{sen}(2x)$			
$f(x) = 2\text{sen}(x)$			
$f(x) = -3\text{sen}(x)$			

$f(x)=2+\text{sen}(x)$			
$f(x)=-2+\text{sen}(x)$			
$f(x)=\text{sen}(x - \pi/3)$			
$f(x)=\text{sen}(x + \pi/3)$			

b) Função cosseno:

	Domínio	Imagem	Período
$f(x)=\text{cos}(x)$			
$f(x)=\text{cos}(2x)$			
$f(x)=2\text{cos}(x)$			
$f(x)=-3\text{cos}(x)$			
$f(x)=2+\text{cos}(x)$			
$f(x)=-2+\text{cos}(x)$			
$f(x)=\text{cos}(x - \pi/3)$			
$f(x)=\text{cos}(x + \pi/3)$			

c) Função tangente:

	Domínio	Imagem	Período
$f(x)=\text{tan}(x)$			
$f(x)=\text{tan}(2x)$			
$f(x)=2\text{tan}(x)$			
$f(x)=-3\text{tan}(x)$			
$f(x)=2+\text{tan}(x)$			
$f(x)=-2+\text{tan}(x)$			
$f(x)=\text{tan}(x - \pi/3)$			
$f(x)=\text{tan}(x + \pi/3)$			

Observou-se que os estudantes não tiveram dificuldades para construir os gráficos das funções por meio do *software*. Entretanto, o problema foi com relação à análise do gráfico.

Com relação aos estudantes que cometeram algum erro na atividade proposta, percebeu-se que, embora tenham construído corretamente os gráficos, tiveram dificuldade na interpretação dos mesmos, sendo uma das hipóteses para essa dificuldade o fato de não conseguirem realizar a análise em razão de não se terem apropriado dos conceitos.

Aulas 17, 18, 19, 20, 21 e 22: Alterações da função seno, cosseno e tangente (6 aulas de 50 min cada).

Nas aulas 17, 18, 19, 20, 21 e 22 teve-se como objetivo estudar os efeitos da inserção de coeficientes, a, b, c, e d, nas funções seno, cosseno e tangente e manipular essas funções no GeoGebra, com a ajuda de controles deslizantes para melhor visualizar os efeitos dos parâmetros. Para tanto, seguiu-se, para cada função, o seguinte desenvolvimento:

Desenvolvimento: função seno

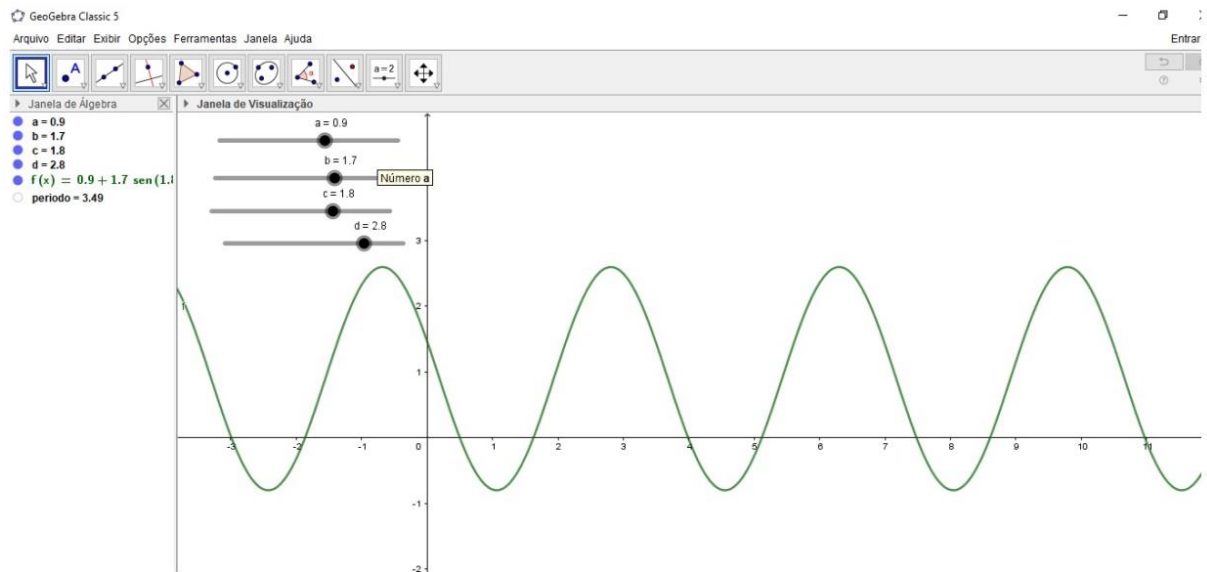
- (1) No ícone *controle deslizante*, insira 4 controles deslizantes; a, b, c e d.
- (2) No campo de entrada do GeoGebra, digite: $f(x)=a+b*\text{sen}(c*x+d)$
- (3) Mexa em cada controle deslizante em separado para visualizar muito claramente a sua influência.
- (4) No campo de entrada, digite: $\text{período}=(2*\pi)/\text{abs}(c)$. Isso cria uma variável que calcula o período da função seno. Observe que esse comando na verdade é igual a $\frac{2\pi}{|c|}$, que é o período.
- (5) Ajuste **a=0**, **b=1**, **c=1** e **d=0** e observe o gráfico da função (com esses parâmetros, temos $f(x)=\text{sen}(x)$);
- (6) Mexa o controle deslizante **a** e observe o que acontece com o gráfico da função; (translação vertical)
- (7) Ajuste **a=0**, **b=1**, **c=1** e **d=0**, mexa com o controle **b** e observe o que acontece com o gráfico da função; (Ampliação/compressão vertical)
- (8) Ajuste **a=0**, **b=1**, **c=1** e **d=0**, mexa com o controle **c** e observe o que acontece com o gráfico da função (Ampliação/compressão horizontal). Ao mexer no controle **c**, observe também a variável *período* criada no item 4.
- (9) Ajuste **a=0**, **b=1**, **c=1** e **d=0**, mexa com o controle **d** e observe o que acontece com o gráfico da função (translação horizontal).
- (10) Os coeficientes **a**, **b**, **c** e **d** provocam alterações na função seno. Relacione cada coeficiente com a respectiva alteração no gráfico.

Alteração no gráfico	Coefficiente
Ampliação/compressão vertical	

Translação vertical	
Ampliação/compressão horizontal	
Translação horizontal	

A partir da sequência apresentada, destacamos a Figura 8.

Figura 8. Gráfico da função seno e suas variantes



Fonte: Elaboração do autor.

Alteração no gráfico	Coefficiente
Ampliação/compressão vertical	
Translação vertical	
Ampliação/compressão horizontal	
Translação horizontal	

Desenvolvimento: função cosseno

- (1) No ícone *controle deslizante*, insira 4 controles deslizantes; a, b, c e d.
- (2) No campo de entrada do GeoGebra, digite: $f(x)=a+b*\cos(c*x+d)$.
- (3) Mexa em cada controle deslizante em separado para visualizar muito claramente a sua influência.

- (4) No campo de entrada, digite: $período=(2*\pi)/abs(c)$. Isso cria uma variável que calcula o período da função cosseno. Observe que esse comando na verdade é igual a $\frac{2\pi}{|c|}$, que é o período.
- (5) Ajuste **a=0**, **b=1**, **c=1** e **d=0** e observe o gráfico da função (com esses parâmetros, temos $f(x)=\cos(x)$).
- (6) Mexa o controle deslizante **a** e observe o que acontece com o gráfico da função (translação vertical).
- (7) Ajuste **a=0**, **b=1**, **c=1** e **d=0**, mexa com o controle **b** e observe o que acontece com o gráfico da função (Ampliação/compressão vertical).
- (8) Ajuste **a=0**, **b=1**, **c=1** e **d=0**, mexa com o controle **c** e observe o que acontece com o gráfico da função (Ampliação/compressão horizontal). Ao mexer no controle **c**, observe também a variável *período* criada no item 4.
- (9) Ajuste **a=0**, **b=1**, **c=1** e **d=0**, mexa com o controle **d** e observe o que acontece com o gráfico da função (translação horizontal).
- (10) Os coeficientes **a**, **b**, **c** e **d** provocam alterações na função seno. Relacione cada coeficiente com a respectiva alteração:

Alteração no gráfico	Coeficiente
Ampliação/compressão vertical	
Translação vertical	
Ampliação/compressão horizontal	
Translação horizontal	

Desenvolvimento: função tangente

- (1) No ícone *controle deslizante*, insira 4 controles deslizantes; a, b, c e d.
- (2) No campo de entrada do GeoGebra, digite: $f(x)=a+b*\tan(c*x+d)$
- (3) Mexa em cada controle deslizante em separado para visualizar muito claramente a sua influência.
- (4) No campo de entrada, digite: $período=(\pi)/abs(c)$. Isso cria uma variável que calcula o período da função tangente. Observe que esse comando na verdade é igual a $\frac{\pi}{|c|}$, que é o período.
- (5) Ajuste **a=0**, **b=1**, **c=1** e **d=0** e observe o gráfico da função (com esses parâmetros, temos $f(x)=\tan(x)$).
- (6) Mexa o controle deslizante **a** e observe o que acontece com o gráfico da função; (translação vertical).
- (7) Ajuste **a=0**, **b=1**, **c=1** e **d=0**, mexa com o controle **b** e observe o que acontece com o gráfico da função (Ampliação/compressão vertical).

(8) Ajuste $a=0$, $b=1$, $c=1$ e $d=0$, mexa com o controle c e observe o que acontece com o gráfico da função (Ampliação/compressão horizontal). Ao mexer no controle c , observe também a variável *período* criada no item 4.

(9) Ajuste $a=0$, $b=1$, $c=1$ e $d=0$, mexa com o controle d e observe o que acontece com o gráfico da função (translação horizontal).

(10) Os coeficientes a , b , c e d provocam alterações na função seno. Relacione cada coeficiente com a respectiva alteração:

Alteração no gráfico	Coeficiente
Ampliação/compressão vertical	
Translação vertical	
Ampliação/compressão horizontal	
Translação horizontal	

OBS. Repare que para o caso da função tangente, temos o período igual a $\frac{\pi}{|c|}$, diferentemente

do caso de seno e cosseno que é: $\frac{2\pi}{|c|}$.

Atividade 7:

1) Com auxílio do GeoGebra, faça o gráfico de f , g e h no mesmo plano cartesiano e responda as questões:

a) $f(x)=\text{sen}(x)$, $g(x)=3+\text{sen}(x)$, $h(x)=-3+\text{sen}(x)$

- Na função $y=a+\text{sen}(x)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=\text{sen}(x)$:

a) se $a>0$? _____

b) se $a<0$? _____

- Houve alteração no período de g e h em relação a f , *sim ou não?* _____.

Se sim, qual? _____

- Houve alteração na imagem de g e h em relação a f , *sim ou não?* _____.

Se sim, qual? _____

b) $f(x)=\text{sen}(x)$, $g(x)=3\text{sen}(x)$, $h(x)=-3\text{sen}(x)$ e $t(x)=(1/3)\text{sen}(x)$

- Na função $y=b.\text{sen}(x)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=\text{sen}(x)$:
 - a) se $b>1$ _____
 - b) se $0<b<1$ _____
 - c) se $b<0$ _____
- Houve alteração no período de g , h e t em relação a f , *sim ou não?* _____.
Se sim, qual? _____
- Houve alteração na imagem de g , h e t em relação a f , *sim ou não?* _____.
Se sim, qual? _____

c) $f(x)=\text{sen}(x)$, $g(x)=\text{sen}(2x)$, $h(x)=\text{sen}(x/2)$ e $t(x)=\text{sen}(-2x)$

- Na função $y=\text{sen}(cx)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=\text{sen}(x)$:
 - a) se $c>1$ _____
 - b) se $0<c<1$ _____
 - c) se $c<0$ _____
- Houve alteração no período de g , h e t em relação a f , *sim ou não?* _____.
Se sim, qual? _____
- Houve alteração na imagem de g , h e t em relação a f , *sim ou não?* _____.
Se sim, qual? _____

d) $f(x)=\text{sen}(x)$, $g(x)=\text{sen}(x+\pi/3)$, $h(x)=\text{sen}(x-\pi/3)$

- Na função $y=\text{sen}(x+d)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=\text{sen}(x)$:
 - a) se $d>0$ _____
 - b) se $d<0$ _____
- Houve alteração no período de g e h em relação a f , *sim ou não?* _____.
Se sim, qual? _____
- Houve alteração na imagem de g e h em relação a f , *sim ou não?* _____.
Se sim, qual? _____

e) $f(x)=\text{cos}(x)$, $g(x)=2+\text{cos}(x)$, $h(x)=-2+\text{cos}(x)$

- Na função $y=a+\cos(x)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=\cos(x)$:

a) se $a>0$? _____

b) se $a<0$? _____

- Houve alteração no período de g e h em relação a f , *sim ou não?* _____

Se sim, qual? _____

- Houve alteração na imagem de g e h em relação a f , *sim ou não?* _____

Se sim, qual? _____

f) $f(x)=\cos(x)$, $g(x)=2\cos(x)$, $h(x)=-2\cos(x)$ e $t(x)=(1/2)\cos(x)$

- Na função $y=b.\cos(x)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=\cos(x)$:

a) se $b>1$ _____

b) se $0<b<1$ _____

c) se $b<0$ _____

- Houve alteração no período de g , h e t em relação a f , *sim ou não?* _____

Se sim, qual? _____

- Houve alteração na imagem de g , h e t em relação a f , *sim ou não?* _____

Se sim, qual? _____

g) $f(x)=\cos(x)$, $g(x)=\cos(2x)$, $h(x)=\cos(x/2)$ e $t(x)=\cos(-2x)$

- Na função $y=\cos(cx)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=\cos(x)$:

a) se $c>1$ _____

b) se $0<c<1$ _____

c) se $c<0$ _____

- Houve alteração no período de g , h e t em relação a f , *sim ou não?* _____

Se sim, qual? _____

- Houve alteração na imagem de g , h e t em relação a f , *sim ou não?* _____

Se sim, qual? _____

h) $f(x)=\cos(x)$, $g(x)=\cos(x+\pi/3)$, $h(x)=\cos(x-\pi/3)$

- Na função $y=\cos(x+d)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=\cos(x)$:

a) se $d>0$ _____

b) se $d<0$ _____

- Houve alteração no período de g e h em relação a f , *sim ou não?* _____

Se sim, qual? _____

- Houve alteração na imagem de g e h em relação a f , *sim ou não?* _____

Se sim, qual? _____

i) $f(x)=\tan(x)$, $g(x)=3+\tan(x)$, $h(x)=-3+\tan(x)$

- Na função $y=a+\tan(x)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=\tan(x)$:

a) se $a>0$? _____

b) se $a<0$? _____

- Houve alteração no período de g e h em relação a f , *sim ou não?* _____

Se sim, qual? _____

- Houve alteração na imagem de g e h em relação a f , *sim ou não?* _____

Se sim, qual? _____

j) $f(x)=\tan(x)$, $g(x)=3\tan(x)$, $h(x)=-3\tan(x)$ e $t(x)=(1/3)\tan(x)$

- Na função $y=b.\tan(x)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=\tan(x)$:

a) se $b>1$ _____

b) se $0<b<1$ _____

c) se $b<0$ _____

- Houve alteração no período de g , h e t em relação a f , *sim ou não?* _____

Se sim, qual? _____

- Houve alteração na imagem de g , h e t em relação a f , *sim ou não?* _____

Se sim, qual? _____

l) $f(x)=\tan(x)$, $g(x)=\tan(2x)$, $h(x)=\tan(x/2)$ e $t(x)=\tan(-2x)$

- Na função $y=\tan(cx)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=\tan(x)$:

a) se $c>1$ _____

b) se $0 < c < 1$ _____

c) se $c < 0$ _____

- Houve alteração no período de g , h e t em relação a f , *sim ou não?* _____
Se sim, qual? _____

- Houve alteração na imagem de g , h e t em relação a f , *sim ou não?* _____
Se sim, qual? _____

m) $f(x) = \tan(x)$, $g(x) = \tan(x + \pi/3)$, $h(x) = \tan(x - \pi/3)$

- Na função $y = \tan(x + d)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x) = \tan(x)$:
a) se $d > 0$ _____
b) se $d < 0$ _____
- Houve alteração no período de g e h em relação a f , *sim ou não?* _____
Se sim, qual? _____

- Houve alteração na imagem de g e h em relação a f , *sim ou não?* _____
Se sim, qual? _____

Nesta atividade, os estudantes observaram que quando o parâmetro **a** das funções seno, cosseno e tangente era positivo ($a > 0$), havia uma translação vertical para cima, e quando negativo ($a < 0$), havia translação vertical para baixo. Com isso, eles perceberam também que o período da função não se alterava, mas que havia uma alteração na imagem da função. A variação do gráfico de cada função construída refere-se à inserção do parâmetro **a**.

Os estudantes observaram que, quando o parâmetro **b** das funções seno, cosseno e tangente era maior que um ($b > 1$), havia uma ampliação vertical, já quando o parâmetro era maior que zero e menor que um ($0 < b < 1$), havia uma compressão vertical, e, quando o parâmetro era menor que zero ($b < 0$), havia uma ampliação vertical. Com isso, eles perceberam que havia uma variação da imagem, o que não ocorria com o período das funções.

Notaram ainda que, para as funções seno, cosseno e tangente, quando o parâmetro **c** era maior que um ($c > 1$), havia uma compressão horizontal, e quando o parâmetro era maior que zero e menor que um ($0 < c < 1$), havia uma ampliação horizontal, e, quando o parâmetro era menor que zero ($c < 0$), havia uma compressão horizontal. Dessa forma, notaram que o período das funções se alterava, o que não ocorria com a imagem das funções.

A partir dessa atividade e demais itens, os estudantes concluíram que, nas funções seno, cosseno e tangente, quando o parâmetro d era maior que zero ($d > 0$), havia uma translação horizontal do gráfico para a esquerda, e quando o parâmetro era menor que zero ($d < 0$), havia uma translação horizontal para a direita. Perceberam, dessa forma, que o período e a imagem da função permaneciam inalterados. De modo geral, observou-se que conseguiram construir corretamente os gráficos das funções seno, cosseno e tangente, bem como analisaram o seu comportamento, de acordo com a variação dos parâmetros a , b , c e d , de cada uma das funções.

Os estudantes que erraram alguns dos itens, embora tenham construído corretamente os gráficos, tiveram dificuldades para analisá-los, uma vez que não conseguiram interpretar a variação dos parâmetros estabelecidos em cada função.

Em relação às vantagens da utilização do recurso tecnológico, esclarecem os autores:

O recurso tecnológico para ser utilizado deverá permitir explorar esses conceitos, dando oportunidades à sua compreensão por todos os alunos, desde os mais rápidos aos que apresentam maiores dificuldades. Por isso, deve possibilitar a experimentação, várias formas de resolução das questões (por ex. contar, operar, manipular, visualizar...) (AMADO, CARREIRA, 2015, p. 15).

Assim, nessa perspectiva, se o desenvolvimento dessa atividade ocorresse de forma tradicional, ou seja, utilizando a lousa e giz, demandaria muito tempo na construção de cada gráfico de cada função, o que impossibilitaria que os estudantes visualizassem, interpretassem e analisassem os respectivos gráficos. Portanto, devem ser levadas em conta as vantagens da agilidade e do dinamismo que o uso do *software* proporciona.

Aulas 23 e 24: Aplicações da função seno e cosseno (2 aulas de 50 min cada).

Nestas aulas, veremos algumas atividades relacionadas à aplicação de funções trigonométricas.

OBJETIVO: Estabelecer relações entre os conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno com os problemas do dia a dia.

Atividade 8:

1) (CHAVANTE, 2016) Na medicina, a trigonometria é apresentada no monitoramento da frequência cardíaca, ou seja, no número de batimentos cardíacos em um período de tempo, usualmente designado por b.p.m (batimentos cardíacos por minuto). A partir do monitoramento, é possível medir a pressão sanguínea ou arterial de uma pessoa.

Essa medida da pressão sanguínea é dada por dois valores: a pressão sistólica, que é o valor máximo atingido quando o coração se contrai e bombeia o sangue, e a pressão diastólica, que é o valor mínimo atingido quando o coração está em repouso, ambas em um intervalo de tempo de um batimento cardíaco. Normalmente, a pressão é representada da seguinte maneira: 120/80 mm Hg (milímetros de mercúrio), em que o primeiro valor é a pressão sistólica e o segundo valor é a pressão diastólica.

A variação da pressão sanguínea (em mm Hg) de uma pessoa, em função do tempo (em s), é uma função trigonométrica (cíclica ou periódica) cuja lei é dada por:

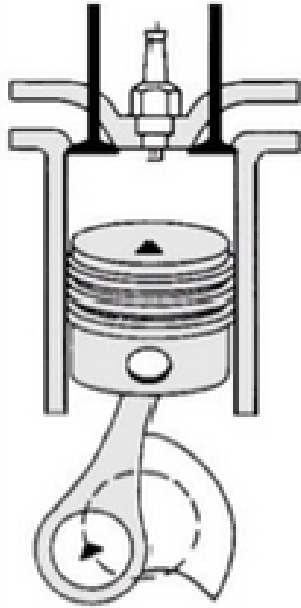
$$P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right).$$

- a) Usando o GeoGebra, construa o gráfico de $P(t)$;
- b) Qual o período de $P(t)$ (espaço de tempo em que o fenômeno de variação de pressão completa um ciclo)?
- c) Quais os valores das pressões máxima e mínima? Em qual instante de tempo eles ocorrem?
- d) Qual a imagem de $P(t)$?

Por meio dessa atividade, o estudante pôde construir o gráfico da função e compreender o período em que a função se repete, além de conseguir analisar a pressão máxima e mínima dessa função trigonométrica (cíclica e periódica) e o tempo necessário da ocorrência.

- 2) (UFPR-2013) O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a figura. Suponha que um instante, em segundos, a altura do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão: $h(t) = 4 + 4\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{0,05}\right)$

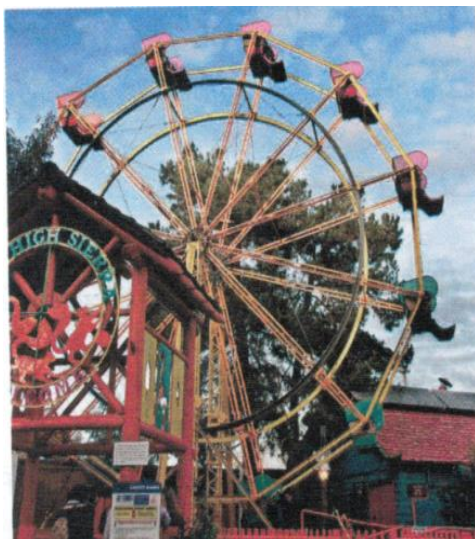
Figura 9. UFPR//fac-simileID/BR



Fonte: Chavante, 2016.

- a) Determine a altura máxima e a mínima que o pistão atinge.
 - b) Quantos ciclos completos esse pistão realiza, funcionando durante um minuto?
- 3) (IEZZI, 2016) Em uma pequena roda-gigante, a altura (em metros) em que um passageiro se encontra no instante t (em segundos) é dada pela lei: $h(t) = 6 + 4\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, para $t \in [0,270]$.

Figura 10. Thinkstoch/Getty Images



Fonte: Iezzi, 2016.

- a) No início do passeio, a que altura se encontra o passageiro?
- b) A que altura se encontra o passageiro após 10s do início?
- c) Qual é a altura mínima que esse passageiro atinge no passeio?
- d) Qual é a altura máxima que esse passageiro atinge no passeio?
- e) Qual é o tempo necessário para essa roda-gigante dar uma volta completa?
- f) Quantas voltas completas ocorrem no passeio?

Observou-se que nessa atividade não foi solicitado apresentar o gráfico da função, entretanto, os estudantes conseguiram relacionar os conceitos trabalhados da função seno, no que diz respeito à imagem e ao período. Souberam ainda relacionar a altura máxima do pistão com o maior valor do seno de um determinado ângulo e também relacionaram a menor altura do pistão com o menor valor do seno do ângulo.

4) (IEZZI, 2016) Um artigo publicado em um caderno de economia prevê que as exportações de um certo país (em milhões de dólares), no ano de $2020+x$, em que $x \in \{0,1,2,3,\dots,19,20\}$,


serão dadas pela lei: $f(x) = 400 + 18\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

Supondo que isso realmente ocorra, determine:

- a) O valor das exportações desse país nos anos de 2020, 2025 e 2030, em milhões de dólares;
- b) Quantas vezes, entre 2020 e 2040, f atingirá seu valor mínimo? Qual é esse valor?

5) (IEZZI, 2016) Na tabela abaixo, constam as previsões para a maré alta e para a maré baixa durante três dias consecutivos (4, 5 e 6) de maio de 2015, para o porto de Ilhéus, no sul do estado da Bahia.

Figura 11. Porto de Ilhéus – Malhado (Estado da Bahia)

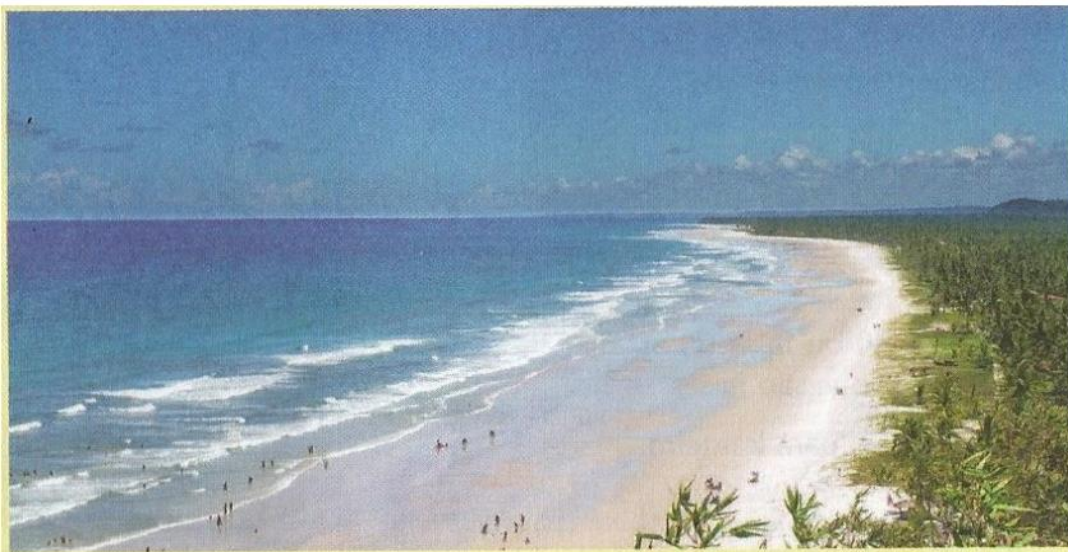
Latitude: 14°46,8'S Instituição: DHN	Longitude: 39°01,6'W 40 Componentes	Fuso: +03 Nível Médio: 1,12 m	Ano: 2015 Carta: 01201	
		Hora	Altura (m)	
		SÁB 4/5/2015	3 h 41 min	2,0
			9 h 51 min	0,2
			16 h 02 min	2,1
			22 h 06 min	0,2
		DOM 5/5/2015	4 h 09 min	2,0
			10 h 21 min	0,2
			16 h 38 min	2,0
			22 h 43 min	0,2
		SEG 6/5/2015	4 h 47 min	2,0
			10 h 56 min	0,2
			17 h 09 min	2,0
	23 h 15 min	0,3		

Fonte: Marinha do Brasil. Disponível em: < www.mar.mil.br/dhn/chm/box-previsao-mare/tabuas/40145jan2016.htm>. Acesso em 10 mar. 2016.

Observe que:

- As marés altas ocorrem de 12 em 12 horas, aproximadamente, como mostram os destaques na cor vermelha da tabela.
- As marés baixas ocorrem, também, de 12 em 12 horas, aproximadamente, como mostra a tabela.
- As alturas da maré alta praticamente se repetem de 12 em 12 horas: com apenas uma exceção, todas as alturas previstas para a maré alta medem 2,0 m.
- As alturas da maré baixa praticamente se repetem de 12 em 12 horas: com apenas uma exceção, todas as alturas previstas para a maré baixa medem 0,2 m = 20 cm.
- As marés altas ocorrem de 12 em 12 horas e, para facilitar a modelagem, vamos admitir 2,0 m como sendo o valor comum previsto nos três dias;
- As marés baixas ocorrem de 12 em 12 horas; vamos adotar o valor 0,2 m como mostra a referência da altura da maré baixa prevista para os três dias.

Figura 12. Praia de Serra Grande - Ilhéus BA 2014



Fonte: Iezzi, 2016.

1ª parte: Considerando as observações anteriores e lembrando que as previsões se referem a três dias seguidos, preencha (com algumas aproximações nos horários) a tabela que relaciona a altura da maré (em metros) e o tempo (em horas), contando a partir do primeiro horário de previsão (3 h 41 min), que será considerado o instante inicial ($t = 0$).

Tempo (h)	0	6	12	18	24	30	36	42	48
Altura da maré (m)									

2ª Parte: Vamos supor que a relação entre a altura (h) da maré (em metros) e o tempo (t) (em horas), se estabeleça por meio de uma função do tipo $h(t) = A + B \cdot \cos(wt)$, em que A , B e w são constantes reais positivas. Nesta atividade, você vai determinar a lei da função que relaciona a altura (h) da maré e o tempo (t), construir seu gráfico e resolver um problema. Para isso, é preciso primeiro, encontrar os valores das constantes A , B e w .

- Determine o valor de w , lembrando que o período dessa função é dado por $p = \frac{2\pi}{|w|}$.
- Determine os valores de A e B . (sugestão: utilize a informação sobre o conjunto imagem dessa função)
- Escreva a lei da função que relaciona h com t .

d) Por meio da lei obtida, é possível prever a altura da maré em outros momentos, além dos de baixa e alta. Determine a altura da maré para $t = 10$ (aproximadamente 14 horas do 1º dia) e para $t = 28$ (aproximadamente 8 horas do 2º dia).

e) Usando o Geogebra, construa o gráfico da função obtida no item c.

Essa atividade propiciou ao estudante relacionar o estudo da função cosseno com o fenômeno das marés. A função dada $h(t)$ a qual representa o nível da água do mar, em metros, em função do tempo, t , em horas, possibilitou ao aluno calcular as alturas das marés em função dos valores do cosseno máximo e mínimo, os quais vão caracterizar a maré alta quando o cosseno for máximo e a maré baixa quando o cosseno for mínimo.

O objetivo foi estabelecer a relação entre os conceitos das funções seno, cosseno e tangente com os problemas do dia a dia. Ficou evidente que os estudantes que acertaram todos os itens da atividade conseguiram construir e analisar os gráficos por meio dessa construção. Puderam, ainda, interpretar e calcular os períodos e elaborar a imagem identificando os valores máximos e mínimos das funções. Com relação aos estudantes que erraram alguns dos itens, pode-se afirmar que não conseguiram estabelecer relação entre as atividades propostas e os conceitos trigonométricos das funções seno e cosseno. Diante dessa proposta, foi possível observar que o *software* potencializa a relação entre os conceitos trigonométricos.

Resultados obtidos

As tecnologias estão cada vez mais presentes em, praticamente, todas as atividades da vida da sociedade. Nesse contexto, torna-se um imperativo o professor estar atento às dinâmicas da sociedade e fazer uso de práticas de ensino consonantes a essa realidade.

A presente pesquisa decorreu dessas necessidades e foi considerada como um desafio pessoal pelo pesquisador, uma vez que este sempre fez uso de práticas pedagógicas tradicionais – como uso do quadro, giz e aulas expositivas – e, ainda, sempre teve dificuldade de adotar metodologias de ensino mais dinâmicas em suas práticas pedagógicas cotidianas. Assim, foi a superação dessas dificuldades que resultou na proposta e no desenvolvimento desta pesquisa.

Outrossim, a partir da questão norteadora “como a utilização do *software* GeoGebra pode potencializar a exploração do conteúdo de Trigonometria?”, buscou-se investigar como a utilização do *software* GeoGebra pode potencializar a exploração de tópicos da

trigonometria. Como consequência, a pesquisa desdobrou-se em uma intervenção pedagógica junto a uma turma de trinta e seis estudantes, com idade média de quinze anos, do 2º ano do Ensino Médio Integrado do Curso de Informática. A escolha dos sujeitos deu-se em razão de ser uma turma para a qual o pesquisador ministrava aulas de Matemática, sendo o conteúdo de Trigonometria ofertado no segundo ano do referido curso. Por serem estudantes do curso de Informática e terem, durante o curso, aulas práticas de Informática no laboratório, percebeu-se que já estavam familiarizados com o manuseio e o uso de tecnologias.

A intervenção pedagógica proposta para o desenvolvimento desta pesquisa foi realizada por meio de uma sequência didática sistematizada, elaborada de forma exclusiva pelo pesquisador contando com exercícios que possibilitaram aos estudantes a interação com o *software* GeoGebra, permitindo que diferentes conjecturas fossem testadas, o que não poderia se dar por meio de uma aula tradicional. Assim, a intervenção pedagógica ocorreu por meio de vinte e quatro aulas, sendo cada uma com duração de cinquenta minutos, que foram desenvolvidas em um laboratório de informática que dispunha de computadores suficientes para todos os estudantes da turma desenvolverem as atividades por meio do uso do *software* GeoGebra, previamente instalado pelo pesquisador nos computadores.

Tendo como ponto de partida o objetivo principal da pesquisa – verificar como a utilização do *software* GeoGebra pode potencializar a exploração de tópicos da trigonometria –, desenvolveram-se os objetivos específicos, sendo que o primeiro foi verificar as potencialidades e promover a participação dos estudantes no estudo da trigonometria. Percebeu-se que aumentou a interação entre estudantes e professor, uma vez que, na elaboração dos gráficos das funções, ficou garantida a visualização de forma interativa, o que possibilitou que os estudantes criassem hipóteses, explorassem e propusessem alternativas, em um trabalho coletivo que favoreceu a discussão e interatividade professor-estudante.

Destarte, a forma como esses recursos foram utilizados na pesquisa garantiu a efetividade do computador e do *software* GeoGebra como ferramentas pedagógicas, uma vez que foram potencializados e aproveitados em sala de aula.

Percebeu-se que a intervenção trouxe impactos positivos não só ao ensino aos estudantes, mas também à prática pedagógica do docente, uma vez que conseguiu-se superar todos os desafios impostos por uma prática docente desenvolvida, ao longo de quarenta e um anos, de forma tradicional. Esta mudança de paradigma pode vir a servir de exemplo a outros profissionais de forma a reduzir ou dirimir a resistência ao uso de ferramentas tecnológicas, como o uso de computadores e de *softwares*.

Ainda por meio da metodologia proposta na pesquisa, evidenciou-se que o uso do *software* GeoGebra pode ressignificar a forma de ensinar matemática, auxiliando na compreensão, no desenvolvimento e na explicação da disciplina. Além da possibilidade de propiciar, aos estudantes, um recurso didático que irá auxiliá-los na compreensão dos conteúdos a partir da utilização do simbolismo matemático envolvido, a fim de oportunizar o raciocínio e a autonomia desses estudantes na realização de tarefas e desenvolver sua capacidade de resolver exercícios e problemas contextualizados, por meio do uso do computador.

É importante destacar que a ideia é aproveitar o melhor possível o *software* educativo e fazer com que os estudantes se envolvam ao máximo com as atividades propostas, possibilitando que eles explorem os diversos recursos disponíveis.

Este trabalho, apontou, ainda, que a forma de ensinar matemática pode ser reinventada por meio do uso de *softwares* computacionais, mediante uma prática pedagógica diferenciada utilizada junto aos estudantes, para que haja a compreensão da Matemática enquanto uma disciplina que perpassa as diferentes dimensões da vida humana. Para tal, o docente deve considerar o uso do *software* na perspectiva do desenvolvimento de uma metodologia ativa e dinâmica, de caráter mediador, que possibilita aos estudantes consolidarem conhecimentos matemáticos de forma autônoma e que, ainda, viabiliza o elo e a interpretação do compromisso social na produção do conhecimento.

REFERÊNCIAS

AMADO, Nélia Maria Pontes. CARREIRA, Susana Paula. Recursos Tecnológicos no Ensino e Aprendizagem da Matemática. In: **Explorando a Matemática com Aplicativos Computacionais - Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Orgs. Maria Madalena Dullius, Marli Teresinha Quartieri. Lajeado: Ed. da Univates, 2015.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Portaria n.º 1.570, publicada no D.O.U. de 21/12/2017, seção 1, p. 146. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf. Acesso em: 10 de jan. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Plano Nacional de Educação** (2014-2014). Lei n.º 13.005 de 25 de junho de 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares do Ensino Médio** - Parte III Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2000.

DULLIUS, Maria Madalena; HAETINGER, Claus. Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Informatizados: Concepção, Desenvolvimento, Uso e Integração Destes no Sistema Educacional. **Anais...** Porto Alegre, 2004. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/ienci/uploaded/ATA_EIBIEC_IV.pdf. Acesso em: 05 de jun. 2019.

DULLIUS, Maria Madalena; QUARTIERI, Marli Teresinha. Maria Madalena Dullius, Marli Teresinha Quartieri (Org.). **Explorando a matemática com aplicativos computacionais: anos iniciais do ensino fundamental**. 1 ed. Lajeado: Editora Univates, 2015. p. 5-6. Disponível em: https://www.univates.br/editora-univates/media/publicacoes/144/pdf_144.pdf. Acesso: 7 fev. 2018.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 277f. Tese (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2001.

IEZZI, Gelson. **Matemática: ciências e aplicações: ensino médio**. Volume 2. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

NASCIMENTO, Carlos Carlão Pereira do. **O uso do GeoGebra no ensino das funções trigonométricas no 2º ano do Ensino Médio no IFMT Campus Cuiabá**. 2019. 130f. Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Lajeado, 2019.

NEIDE, Ítalo Gabriel; QUARTIERI, Marli Teresinha. Recursos Tecnológicos nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática e da física. In: **Aproximando a Matemática e a Física por meio de recursos tecnológicos: Ensino Médio**. Maria Madalena Dullius, Marli Teresinha Quartieri (Org.). Lajeado: Ed. Da Univates, 2016. p. 9-14. Disponível em: https://www.univates.br/editora-univates/media/publicacoes/191/pdf_191.pdf. Acesso: 20 de maio 2019.

PAIVA, Marcos Henrique Pereira. **Aprendizagem de Frações com Softwares e aplicativos matemáticos online**. Dissertação (mestrado) Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES. Lajeado, 2016. 112f.