SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL

DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

JULIENE AZEVEDO MIRANDA 11412ECM010

Produto Educacional da dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre no Curso de Mestrado Profissional.

Orientadora: Profª Drª Odaléa Aparecida Viana

Uberlândia, 2016

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 3

1 O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL 3

2 APRESENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 8

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS 25

REFERÊNCIAS 30

INTRODUÇÃO

Este trabalho, realizado no âmbito do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Faculdade de Ciências Integradas do Pontal da Universidade Federal de Uberlândia, visa apresentar uma sequência didática como produto educacional, para favorecer o desenvolvimento do raciocínio proporcional tendo como suporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud.

Um dos motivos para a realização desta sequência didática é o desejo de contribuir para a construção do conhecimento matemático pelo aluno do Ensino Fundamental, tentando tornar suas atitudes mais favoráveis frente ao conteúdo de razão.

Sendo assim, nas próximas páginas deste trabalho segue a sequência didática aplicada em uma sala de sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola particular da cidade de Ituiutaba/MG. Esta sequência pode ser utilizada e/ou adaptada pelo professor(a) para introduzir o conceito de razão.

1 O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), alunos do terceiro ciclo do Ensino Fundamental (6º e 7º anos) deveriam explorar situações-problema que envolvem proporcionalidade – conteúdo constante do tema variação de grandezas.

Silvestre e Ponte (2009) afirmam que o termo proporcionalidade é usado de forma ambígua para designar proporções, razões, proporcionalidade direta e raciocínio proporcional.

O raciocínio proporcional tem sido tratado por vários autores nacionais e internacionais da área de Educação Matemática, conforme pode ser visto em, Costa e Ponte (2008), Lesh et al (1988), Maranhão e Machado (2011), Morton (2014), Ponte e Marques (2011), Spinillo (1992, 1993, 2002), Torre et al (2013), entre muitos outros.

Boa parte dos autores enfatiza que o raciocínio proporcional é fundamental na resolução de problemas de muitas áreas do saber e trata-se de um tópico que permite estabelecer conexões com o cotidiano dos alunos, com outros tópicos matemáticos e com outras disciplinas, e que constitui um elemento importante da iniciação dos alunos ao pensamento algébrico (COSTA&PONTE, 2008). Os autores também consideram que o raciocínio proporcional vai além da mecanização de estratégias formais de resolução de problemas, estando associado à capacidade de analisar conscientemente as relações entre quantidades; esta capacidade é evidenciada por argumentos e explicações sobre as relações proporcionais.

Lesh et al (1988) apontam que o raciocínio proporcional está ligado com inferência e com predição – envolvendo o pensamento qualitativo e quantitativo – e implica na compreensão de uma relação constante entre duas grandezas (a invariância) e na noção de que estas grandezas variam em conjunto (a covariância).

Vários trabalhos interpretam os conceitos de razão e de proporção como constituintes das chamadas estruturas multiplicativas – que dizem respeito às operações de multiplicação e de divisão – conforme a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Esta perspectiva teórica cognitivista sustenta que o conceito é definido como sendo uma terna de conjuntos: o conjunto das situações que dão sentido ao conceito; o de invariantes, ou seja, uma organização invariante de operações mentais para uma determinada classe de situações e que constitui as diferentes propriedades do conceito, e o conjunto das representações simbólicas que podem ser utilizadas para o conceito.

Considera-se que o raciocínio proporcional dos estudantes pode ser investigado por meio das estratégias adotadas por eles – e representadas simbolicamente por palavras, desenhos ou símbolos matemáticos – quando resolvem problemas que avaliam o tema.

Spinillo (2002) agrupa as tarefas que avaliam o conceito de proporção em duas classes: tarefas de incógnita e tarefas de comparação. Já Lesh et al (1988) destacam sete tipos de tarefa para investigar o raciocínio proporcional do estudante: (a) problemas de valor omisso; (b) problemas de comparação; (c) problemas de transformação; (d) problemas de valor médio; (e) proporções que envolvem a conversão entre razão, taxa e frações e (f) problemas de conversão entre sistemas de representação para a proporcionalidade.

Nesta sequência didática, são enfocados dois tipos de problemas: os de valor omisso e os de comparação, já que os autores apontam que são os mais utilizados para avaliar o raciocínio proporcional de estudantes.

Problemas de valor omisso e as estratégias empregadas por alunos

Nos problemas de valor omisso (ou tarefas de incógnita) são dados A, B e C da proporção A:B = C:X e é solicitado o valor do termo desconhecido "X" . Spinillo (1992) propõe que a solução requer que se determine a relação de primeira ordem no primeiro par (A:B) e infira a outra relação de primeira ordem (C:X), sendo necessário, então, o estabelecimento de uma relação de segunda ordem (relação de relações). Questões desse tipo geralmente são resolvidas pelos alunos ao final do Ensino Fundamental pela chamada regra de três simples.

Uma das estratégias para resolver o problema de valor omisso "se três caixas iguais de bombons custam R$ 12,00, quanto pagarei por 6 dessas caixas?" seria determinar o preço de uma caixa (por divisão) e a seguir o preço das seis caixas (por multiplicação). Esta estratégia foi chamada de "razão unitária" por vários autores citados e indica a relação de "um para muitos", conforme resumo feito por Magina et al. (2014) acerca da estrutura multiplicativa proposta por Vergnaud.

Para o mesmo tipo de problema, vários autores, entre eles, Costa e Ponte (2008), identificaram estratégias aditivas e multiplicativas. As aditivas consistem no processo de adições e subtrações sucessivas em que se utilizam resoluções numéricas e/ou pictóricas e constituem o chamado "pensamento aditivo", conforme denominação de Magina et al. (2014) e Torre et al (2013). Foi identificado ainda um nível intermediário, ou seja, uma transição do pensamento aditivo para o multiplicativo: a estratégia utilizada foi formar grupos de uma mesma quantidade, por meio de ícones agrupados (IIII IIII IIII = 12), ou numericamente (4 + 4 + 4 = 12), conforme visto em Magina et al. (2014).

Entre as estratégias multiplicativas, destacam-se o procedimento escalar e o funcional, identificados por Costa e Ponte (2008) e Silvestre e Ponte (2009), entre outros. No primeiro procedimento, é estabelecida uma relação interna (*within relation*) dentro do mesmo espaço de medida, ou seja, entre os elementos da mesma grandeza, e utiliza-se o raciocínio escalar. Por exemplo, no problema apresentado, o aluno percebe que 6 caixas referem-se ao dobro de 3 caixas e então aplica o escalar 2 para determinar o dobro de R$12,00, ou seja, R$ 24,00. Esta relação foi chamada por vários pesquisadores – entre eles, Silvestre e Ponte (2009) – de covariação de grandezas (refere-se às relações multiplicativas dentro das variáveis). Já Vergnaud (2009) denomina de análise vertical: ao dispor os dados do problema (classificado como isomorfismo de medidas e que envolve uma relação quaternária) na forma de linhas e colunas, a relação permite passar de uma linha a outra em uma mesma grandeza, aplicando-se um operador escalar.

Já o procedimento funcional envolve elementos de grandezas diferentes e a relação é chamada de externa (*between relation*), em que se recorre ao raciocínio funcional. Ainda utilizando o mesmo problema apresentado, o aluno percebe que de 3 para se chegar a 12 é necessário multiplicar por 4 e isso o leva a obter 6 vezes 4 (o que equivale a 6 caixas x R$ 4,00 por caixa), obtendo R$ 24,00. Vergnaud (2009) esclarece que se trata da chamada análise horizontal ou funcional – centrada na ideia de um operador-função, isto é, uma relação invariável (R$ 4,00 por caixa) que permite passar de uma grandeza a outra. Silvestre e Ponte (2009) denominam o procedimento descrito de esquema de invariância.

As estratégias multiplicativas, com as diferentes nomeações são ilustradas na Figura 1.

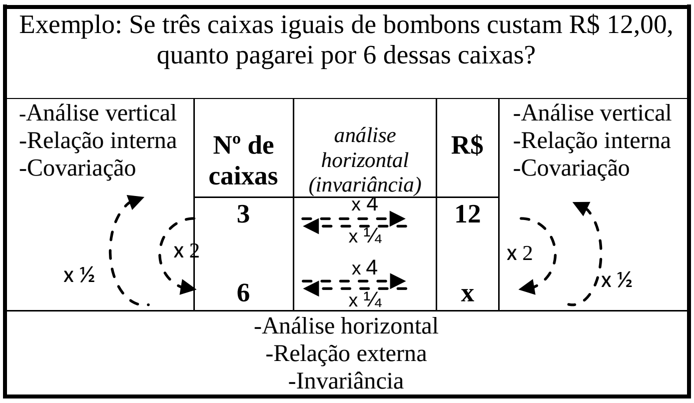


Figura 1. Exemplos de estratégias multiplicativas em um problema de valor omisso
Fonte: Elaboração das autoras

Os problemas de comparação e as estratégias empregadas por alunos

Tarefas de comparação de razões são menos comuns de serem tratadas na escola antes do ensino formal de razão e proporção. Problemas clássicos[1] como: “Júlia misturou 2 copos de suco concentrado em 4 copos de água e Paula misturou 3 copos de suco em 5 de água. Qual suco é mais forte?” geralmente são resolvidos por meio de técnicas para verificar equivalência de razões (aplicando a propriedade fundamental das proporções), por redução a mesmo denominador ou por transformação em números decimais ou porcentagem.

[1] Essas tarefas foram propostas por Noelting (1980 apud SPINILLO, 1992) para estudar o raciocínio proporcional.

Para resolver problemas desse tipo, o indivíduo deve identificar duas grandezas e quatro valores, A, B, C e D e definir se as razões A:B e C:D são equivalentes e, em caso contrário, qual é maior ou menor. Novamente, para solucionar a questão é necessário estabelecer uma relação de primeira ordem no primeiro par de valores (A:B) e uma outra relação de primeira ordem no segundo par (C:D); a comparação entre elas consiste na relação de segunda ordem.

Para o tipo de problema apresentado anteriormente, será feita uma adaptação do esquema encontrado por Spinillo (1993) em tarefas de comparação para dimensões contínuas e complementares[2]. Assim, no problema proposto – que envolve dimensões discretas e complementares[3], ter-se-iam os elementos A (nº de copos de suco de Júlia), B (nº de copos de água de Júlia), A' (nº de copos de suco de Paula), B' (nº de copos de água de Paula) em quatro possíveis comparações parte-parte (razão) de inteiros discretos, simbolizadas por >, < ou =, conforme ilustrado na Figura 2.

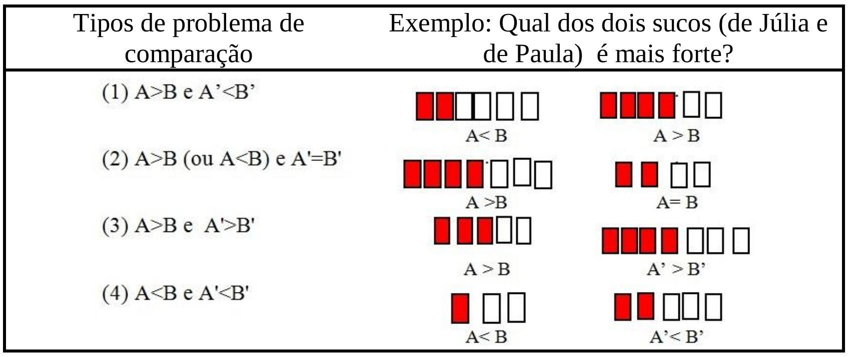


Figura 2. Tipos de problemas de comparação conforme relações de primeira ordem envolvendo inteiros discretos

Fonte: Elaboração das autoras

Segundo Spinillo (1993, 2002), comparações do tipo (1) e (2) – que envolvem relações de primeira ordem diferentes – são mais fáceis de serem estabelecidas que as (3) e (4). A autora conclui que há diferentes níveis de complexidade quanto ao estabelecimento de relações de segunda ordem, mesmo quando as relações de primeira ordem envolvem comparações parte-parte e que os limites do referencial de "metade" são utilizados pelas crianças como estratégia para estabelecer julgamentos proporcionais.

Spinillo (1992, 1993), com base na teoria piagetiana sobre inclusão de classes, aponta que as crianças têm dificuldade em estabelecer comparações parte-todo.

[2] A situação descrita por Spinillo (2002) é uma tarefa de proporção utilizando retângulos com partes pintadas em azul.
[3] Dimensões complementares referem-se a quantidades (contínuas ou discretas) que são partes que, juntas, formam um mesmo todo; enquanto dimensões não complementares são quantidades que não constituem um mesmo todo, pois referem-se a unidades diferentes.

Questões nas quais era necessário decidir qual copo estava mais “cheio” de água (copos de dimensões distintas) eram resolvidas por crianças a partir de 11 anos utilizando o referencial “metade” e a autora conclui que isso favorecia o estabelecimento de relações de segunda ordem nestas tarefas de proporção com dimensões contínuas. O mesmo referencial foi utilizado na pesquisa de Jeong et al (2011) em tarefas exitosas de raciocínio proporcional no contexto de um jogo que envolvia noções de probabilidade (tiro ao alvo) com quantidades discretas; no entanto, os autores encontraram que muitos alunos fracassaram porque contavam o número de chances (tiros) ou o número de acertos no alvo, mas não estabeleciam relações de segunda ordem. Já Boyer e Huttenlocher (2008) concluíram que, apesar de resolverem problemas de comparação com quantidades contínuas a partir de 6 anos, crianças de 10 a 12 anos apresentavam muita dificuldade em resolver problemas de raciocínio proporcional envolvendo unidades discretas e que esta situação pode ser devida ao fato de não se articular o ensino de frações com o de razões.

Tomando a resolução de problemas como o ponto de partida da atividade matemática – conforme indicam os PCN (BRASIL, 1998) – e considerando que a operacionalidade de um conceito deve ser experimentada por meio de situações variadas conforme aponta Vergnaud (1990), neste trabalho é dado enfoque aos esquemas de covariação e invariância – conforme definidos por Ponte et al. (2010) que deverão ser estabelecidas pelos alunos nas situações-problema constantes nesta sequência didática que tem sua aplicação sugerida para alunos do sexto ano e que devem contribuir para a introdução do desenvolvimento do raciocínio proporcional.

2 APRESENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática aqui apresentada é dividida em seis etapas. A primeira etapa consiste na aplicação de uma avaliação de desempenho tipo lápis e papel a fim de avaliar o raciocínio proporcional, ou seja, verificar quais esquemas são empregados pelos alunos para resolver quatro problemas: dois de valor omisso (em que são dados três dos valores que compõem uma proporção e é pedido o quarto) e outros dois de comparação (em que os alunos deverão indicar, sem apresentação formal, qual razão é maior, menor ou se são iguais), com base na classificação de problemas de raciocínio proporcional feita Lesh et al. (1988) e amplamente utilizada por pesquisadores do tema, conforme apontou a literatura.

Nas etapas seguintes são utilizadas situações-problema com mediação do(a) professor(a), de modo a favorecer o estabelecimento das relações de covariação e de invariância de grandezas, conforme definição de Ponte et al. (2010). Cada etapa da sequência didática consiste na apresentação de um problema e de um roteiro de atividades que organiza a discussão a ser mediada pelo(a) professor(a) e que permitia aos alunos representar as relações estabelecidas por meio de desenhos, tabelas e frases preenchidas com palavras ou símbolos matemáticos.

Cada etapa será seguida de uma avaliação formada por problemas semelhantes àqueles apresentados na etapa anterior, de modo a identificar os esquemas utilizados pelos alunos. Finalmente, serão apresentados "mais problemas" envolvendo o valor omisso e a comparação entre razões.

A sequência didática foi organizada conforme o Quadro 1.

Quadro 1. Cronograma das atividades da sequência didática

Fonte: A autora (2016)

Etapas	Número de aulas
1ª) Avaliação de desempenho	1
2ª) A primeira situação-problema (Problema das urnas) e atividades	2
3ª) Avaliação 1 (Problema do colar)	2
4ª) A segunda situação-problema (Problema dos quadrados) e atividades	2
5ª) Avaliação 2 (Sim ou não? Diga como pensou)	1
6ª) Mais situações-problema	1

1ª etapa: Avaliação de desempenho

A avaliação de desempenho é um instrumento que o(a) professor(a) poderá utilizar para verificar como seus alunos resolvem problemas de valor omisso e de comparação.

AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO

1) O barzinho da escola está fazendo uma promoção: a cada 5 pães de queijo comprados eles dão dois bombons de brinde. Se eu comprar 15 pães de queijo, quantos bombons eu vou ganhar? Explique como você pensou.

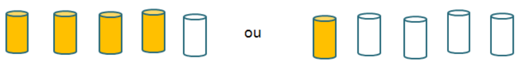
Resposta:

2) Quatro pizzas (iguais) custam R$ 60,00. Quanto pagaria por 8 dessas pizzas? Explique como você pensou.

Resposta:

3) Em cada situação temos água (copo branco) e suco concentrado (copo amarelo), já adoçado. Ao misturamos todos, indique qual suco (suco A ou suco B) ficará mais forte. Explique como você pensou.

a) Suco A Suco B



Resposta:

b) Suco A Suco B

Resposta:

c) Suco A Suco B

Resposta:

d) Suco A Suco B

Resposta:

4) Três meninos, Ronaldo, Felipe e Jairo, estavam treinando chutes a gol. Veja o que aconteceu:

Ronaldo: de cada 2 chutes, fazia 1 gol.
Felipe: de cada 3 chutes, fazia 2 gols.
Jairo: de cada 6 chutes, fazia 3 gols.

Observando as informações acima, responda:

a) Qual menino se saiu melhor no treino, isto é, qual deles teve o melhor desempenho?

Resposta:____

b) Houve desempenhos iguais? Explique como você pensou.

Resposta:

Resposta:____

2ª etapa: A primeira situação-problema (Problema das urnas) e atividades

Nesta etapa o(a) professor(a) deverá apresentar o problema das urnas para os alunos e resolver em conjunto com eles.

Esse problema enfatiza questões de comparação entre as grandezas (quantidade de bolas pretas e quantidade de bolas brancas) e o trabalho envolve as relações de primeira e segunda ordem conforme aponta Spnillo (1992). As relações de segunda ordem são estabelecidas a partir das relações de primeira ordem, quando os alunos irão comparar bolas pretas com brancas (parte-parte), pretas com o total (parte-todo) ou brancas com o total (parte-todo). No momento que os discentes começarem a relacionar as urnas de Ana, Benê e Cadu para descobrir em qual urna há mais bolas pretas, estes estarão estabelecendo as relações de segunda ordem e registrando o raciocínio na folha de atividades que será entregue a eles.

É importante que na questão final o(a) professor(a) deixe os alunos perceberem a necessidade de continuidade da tabela, estabelecendo as relações de segunda ordem para entender que a resposta correta poderá ser dada quando estiver em cada urna a mesma quantidade de bolas brancas, diferenciando apenas as bolas pretas.

No preenchimento das tabelas o(a) professor(a) deverá encaminhar a turma a notar o princípio multiplicativo por meio da covariação de grandezas e a invariância de grandezas, ou seja, quando se trata da covariação de grandezas estamos nos referindo às relações multiplicativas dentro das variáveis.

PROBLEMA DAS URNAS

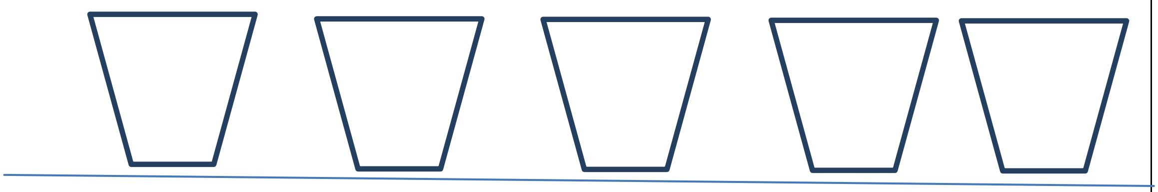
Ana, Benê e Cadu vão encher simultaneamente urnas com bolas pretas e brancas.
Ana vai fazer assim: para cada bola preta, ela vai colocar 2 brancas.
Benê vai fazer assim: 4 brancas para cada bola preta colocada.
Cadu: para cada 2 pretas, vai colocar 3 brancas.
Quando Ana, Benê e Cadu estavam enchendo as urnas, o sinal para o intervalo bateu; então eles perceberam que estavam com o mesmo número de bolas brancas. Então, quem ficou com mais bolas pretas?

Para a realização desta etapa, serão necessários os materiais: três urnas, bolas pretas e brancas. Após a leitura da situação e com o encaminhamento e auxílio do(a) professor(a), três alunos (que serão selecionados aleatoriamente), deverão colocar em suas respectivas urnas as bolas como indicadas no problema.

Os aluno devem receber fichas para cada urna e para questão final, a fim de serem preenchidas pelos discentes, após discussão entre a turma e o(a) professor(a).

FICHA DA URNA DE ANA

Vamos ver o que acontece com a urna da ANA.
Nós vamos chamar de FASES, cada vez que ela colocar as bolas na urna e você deve completar os desenhos das urnas e registre na tabela o número total de bolas pretas e o número total de bolas brancas, a cada fase.



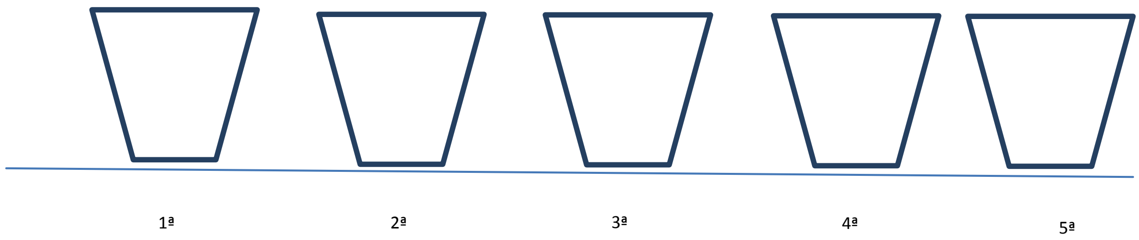
1ª 2ª 3ª 4ª 5ª

FASES	Número de bolas		**Razão entre bolas pretas e bolas brancas**
	Pretas	**Brancas**	
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			

1) Se dobrar o número de bolas pretas, também .... o número de bolas brancas.
2) Se triplicar o número de bolas pretas, também................ o número de bolas brancas.
3) Se multiplicar por 5 o número de bolas pretas, o nº de bolas brancas fica multiplicado por ......
4) Podemos verificar que o número de bolas pretas e o número de bolas brancas variam ....
5) Neste problema, as bolas pretas e as bolas brancas são chamadas de GRANDEZAS ....
6) As grandezas bolas pretas e bolas brancas são proporcionais na RAZÃO 1 para 2 (1 preta para 2 ......) ou 1:2 ou ½.
7) As grandezas bolas brancas e bolas pretas são proporcionais na RAZÃO 2 para 1 (........ brancas para ...... preta) ou 2:1 ou $\frac{2}{1}$.
8) Isso quer dizer que o número de bolas .... é metade do número de bolas ...., ou o número de bolas .... é o dobro do número de bolas..............

FICHA DA URNA DE BENÊ

Vamos ver o que acontece com a urna do Benê.
Nós vamos chamar de FASES, cada vez que ela colocar as bolas na urna e você deve completar os desenhos das urnas e registre na tabela o número total de bolas pretas e o número total de bolas brancas, a cada fase.



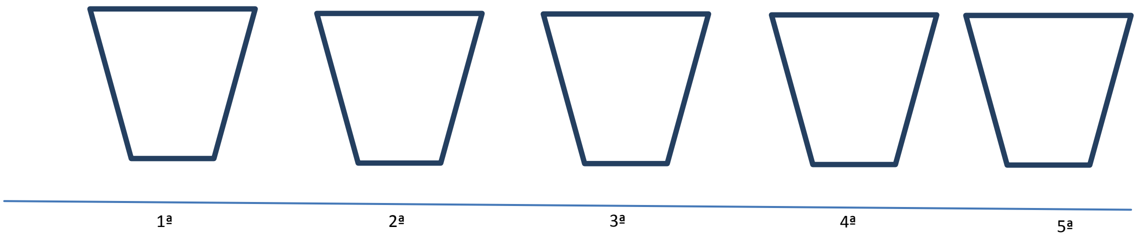
FASES	Número de bolas		**Razão entre bolas pretas e bolas brancas**
	Pretas	**Brancas**	
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			

1) Se dobrar o número de bolas pretas, também .... o número de bolas brancas.
2) Se triplicar o número de bolas pretas, também................ o número de bolas brancas.
3) Se multiplicar por 5 o número de bolas pretas, o número de bolas brancas fica multiplicado por ......
4) Podemos verificar que o número de bolas pretas e o número de bolas brancas variam ....
5) Bolas pretas e bolas brancas são, então GRANDEZAS ....
6) As grandezas bolas pretas e bolas brancas são proporcionais na RAZÃO 1 para .... (1 preta para ......) ou ..... ou ....
7) As grandezas bolas brancas e bolas pretas são proporcionais na RAZÃO 4 para..... (........ brancas para ...... preta) ou .... ou.......
8) Isso quer dizer que o número de bolas .... é .... do número de bolas ...., ou o número de bolas .... é a .... do número de bolas...............

FICHA DA URNA DO CADU

Vamos ver o que acontece com a urna do Cadu.

Nós vamos chamar de FASES, cada vez que ela colocar as bolas na urna e você deve completar os desenhos das urnas e registre na tabela o número total de bolas pretas e o número total de bolas brancas, a cada fase.



FASES	Número de bolas		**Razão entre bolas pretas e bolas brancas**
	Pretas	**Brancas**	
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			

1) Se dobrar o número de bolas pretas, também .... o número de bolas brancas.
2) Se triplicar o número de bolas pretas, também................ o número de bolas brancas.
3) Se multiplicar por 1,5 o número de bolas pretas, o nº de bolas brancas fica multiplicado por ......
4) Podemos verificar que o número de bolas pretas e o número de bolas brancas variam ....
5) Bolas pretas e bolas brancas são, então, ...
6) As grandezas bolas pretas e bolas brancas são proporcionais na RAZÃO 2 para 3 (2 preta para ......) ou ..... ou ...
7) As grandezas bolas brancas e bolas pretas são proporcionais na RAZÃO 3 para..... (........ brancas para ...... preta) ou .... ou.......
8) Isso quer dizer que o número de bolas............. é 2/3 do número de bolas ...., ou o número de bolas .... é .... do número de bolas............

FICHA COM A QUESTÃO FINAL

Se as urnas estiverem com o mesmo número de bolas brancas, qual terá mais bolas pretas? Tente responder por meio da tabela.

FASES	URNA DA ANA			URNA DO BENÊ			URNA DO CADU		
	Pretas	**Brancas**	**Razão entre bolas pretas e bolas brancas**	**Pretas**	**Brancas**	**Razão entre bolas pretas e bolas brancas**	**Pretas**	**Brancas**	**Razão entre bolas pretas e bolas brancas**
1ª									
2ª									
3ª									
4ª									
5ª									
6ª									
7ª									

O que você concluiu? Quando bateu o sinal, quem ficou com mais bolas pretas? Você pode tentar responder fazendo uma comparação entre as razões que foram obtidas nas urnas de Ana, Benê e Cadu.

Resposta:____
____
____
____
____
____

3ª etapa: Avaliação 1 (Problema do colar)

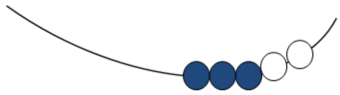
Ao término da situação deverá ser entregue aos discentes uma folha contendo um problema parecido com o das urnas intitulado "Problema do colar" – adaptado do trabalho de Ponte et al. (2010) – com o objetivo de avaliar a compreensão do conceito de razão por meio dos esquemas empregados na solução.

Na resolução deste problema, espera-se que os alunos percebam as relações de covariância e invariância das grandezas, sendo almejado que eles consigam montar o esquema dessas relações.

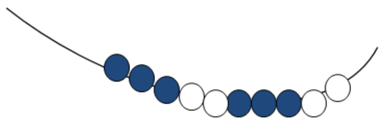
As folhas deverão ser recolhidas para a realização de análise do(a) professor(a). Por meio desta análise serão decididos os caminhos a seguir. Se houver muitas dúvidas e confusões o(a) docente irá discutir as questões da avaliação juntamente com os alunos e propor novas situações.

PROBLEMA DO COLAR

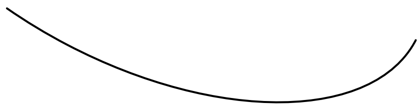
A Maria está fazendo um colar para oferecer à sua amiga. Só tem contas de duas cores - brancas e azuis. Começou a construir o colar colocando três contas azuis e duas contas brancas. O desenho ao lado mostra o colar sendo construído na 1ª etapa.



Na sequência, colocou mais três contas azuis e duas contas brancas. A 2ª etapa está representada na figura ao lado:



1)Desenhe a 3º etapa do colar na figura ao lado, seguindo o mesmo padrão:



2)Complete: Para a 4º etapa, a Maria usou _____ contas azuis e _____ contas brancas.
3)Complete a tabela:

Etapas	Número de contas		Razão entre o número de contas azuis para contas brancas
	Azuis	Brancas	

4)Quantas contas azuis e quantas brancas vai ter o colar na quinta etapa? Explique como você pensou.

Resposta:____
____

5)E na 30ª etapa, o colar vai ter quantas contas azuis? E quantas brancas? Explique como você pensou.

Resposta:____
____

6)Em uma das etapas, havia 21 contas azuis. Quantas eram as brancas, nessa etapa? Como pensou?

Resposta:____
____

7)Quando ela terminou o colar, verificou que havia 48 bolas brancas. Quantas eram as azuis? Como pensou?

Resposta:____
____

8)O Número de contas azuis e o número de contas brancas são grandezas proporcionais? Por quê?

Resposta:____
____

4ª etapa: A segunda situação-problema (Problema dos quadrados) e atividades

A segunda situação foi retirada da proposta de Ponte et al. (2010), com o objetivo de levar os alunos a perceber regularidades e fazer generalizações.

Com essa tarefa, espera-se que os alunos consigam evidenciar a relação de proporcionalidade entre o comprimento do lado do quadrado e o seu perímetro, observando também que não há proporcionalidade entre o comprimento do lado do quadrado e a sua área.

Para o desenvolvimento dessa situação é importante que os alunos tenham formado o conceito de área e perímetro.

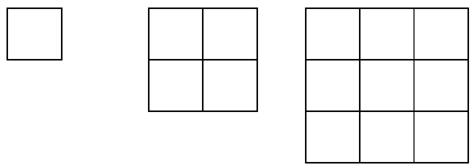
Com essa tarefa os discentes poderão perceber a covariação do comprimento do lado e o perímetro e a invariância da razão entre perímetro e o comprimento do lado que, neste caso, corresponde ao número de lados da figura.

Com relação à área de um quadrado espera-se que os alunos percebem que não existe uma relação de covariação nem invariância entre as grandezas, não se tratando, portanto de uma relação de proporcionalidade.

Em um primeiro momento, o(a) professor(a) deverá entregar a tarefa aos alunos deixando que eles exponham suas ideias para, em seguida, encaminhar a solução junto aos alunos.

PROBLEMA DOS QUADRADOS

Observe a sequência, sendo que cada quadrado tem 1 cm de lado:



1. Desenhe a 4.ª figura da sequência e explique o que você pensou ao fazer o desenho.

2. Complete a tabela:

Quadrado	Medidas do quadrado		Razão entre a medida do lado do quadrado para o perímetro do quadrado
	Lado	Perímetro	
1º			
2º			
3º			
4º			

3. Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado mede 20 cm? Explique como você pensou.

Resposta:____

4. Escreva uma frase que relacione a medida do lado de um quadrado qualquer com o seu perímetro.

Resposta:

5. Determine a medida do lado de um quadrado que tem perímetro igual a 40 cm. Explique como você pensou.

Resposta:

6. A medida do lado do quadrado e o perímetro do quadrado são grandezas proporcionais? Por quê?

Resposta:

7. Complete a tabela.

Quadrado	Medidas do quadrado		Razão entre a medida do lado do quadrado para a área do quadrado
	Lado	Área	
1º			
2º			
3º			
4º			

8. Qual é a área de um quadrado cujo lado mede 9 cm? Explique como você pensou.

Resposta:____
____

9. Determine a medida do lado de um quadrado que tem área igual a 121 cm^2. Explique como você pensou.

Resposta:____
____

10. Escreva uma frase que relacione a medida do lado de um quadrado qualquer com a sua área.

Resposta:____
____

11. A medida do lado do quadrado e a área do quadrado são grandezas proporcionais? Por quê?

Resposta:____
____

5ª etapa: Avaliação 2 (Sim ou não? Diga como pensou)

Para a avaliação deverá ser entregue uma folha aos alunos pedindo que eles indiquem se as frases são verdadeiras ou falsas e ainda que escrevam como pensaram.

SIM OU NÃO? DIGA COMO PENSOU

1) Vou comprar doces e cada doce custa R$ 2,00. A quantia que eu vou pagar vai variar proporcionalmente em relação ao número de doces que comprarei?

Resposta:____
____

2) Carla tem 40 anos e seu filho José tem 20. As idades de ambos irão variar proporcionalmente?

Resposta:____
____

3) Se Clara chega à escola em 10 minutos, então ela e sua amiga levam 20 minutos para chegar a escola?

Resposta:____
____

4) Se uma caixa de cereais custa R$ 2,80, então duas custam R$5,60?

Resposta:____
____

5) Se um rapaz faz um modelo de carro em 2 horas, pode fazer 3 modelos iguais em 6 horas?

Resposta:____
____

6) Se o Hugo pinta o muro em 2 dias, o Hugo, o Tomás e um terceiro colega pintam em 6 dias?

Resposta:____
____

6ª etapa: Mais situações-problemas

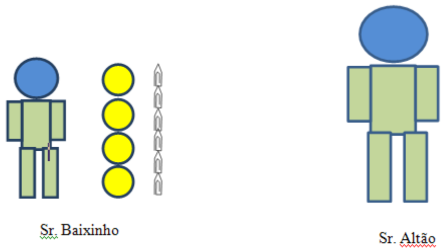
Em continuidade ao trabalho, será dado um enfoque a mais problemas que envolvem o valor omisso e a comparação entre razões, abordando-os sempre por meio da covariação e invariância das grandezas.

Esta etapa da metodologia objetiva avaliar se os alunos conseguem resolver problemas sobre proporção sem a utilização de técnicas.

MAIS PROBLEMAS.

1) **Sr. Altão e Sr. Baixinho**

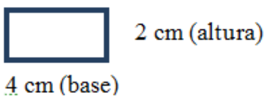
A altura do Sr. Baixinho é 4 botões ou de 6 clipes.
A altura do Sr. Altão é de 6 botões.
Qual a altura do Sr. Altão em clipes?



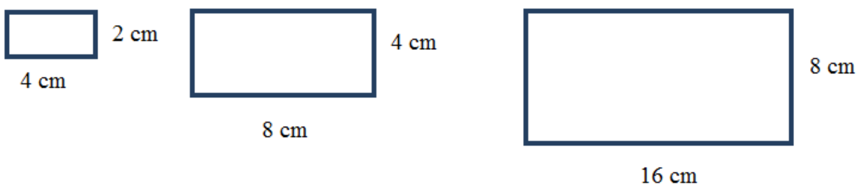
Resposta:________________________________
____

2) **Retângulos**

Maria desenhou o retângulo a seguir com 4 cm de base e 2 cm de altura:



Depois, ela quis ampliar o desenho e fez vários outros retângulos, dobrando as medidas. Continuou triplicando, quadruplicando etc e fez muitos retângulos. Veja alguns retângulos que ela desenhou.



Um dos retângulos desenhados por Maria tinha 40 cm de base. Qual era a altura desse retângulo?

Escreva como você pensou.

Resposta:____
____

3) **Sim ou não? Diga como pensou**

a) Se Clara gasta 10 minutos para chegar à escola, então ela e sua amiga juntas levariam 20 minutos para chegar a escola?

Resposta:____
____

b) Se seis caixas iguais pesam 200 kg, então três dessas caixas pesariam 100 kg?

Resposta:____
____

c) Misturei 2 copos de água em 10 copos de suco concentrado para fazer um suco gostoso. Então, se quiser colocar 5 copos de água deverei colocar 30 copos de suco concentrado?

Resposta:____
____

d) Se hoje Marta tem 10 anos e Deise tem 20 anos, então quando Marta tiver 30 anos Deise terá 60 anos?

Resposta:____
____

4) **Probleminhas**

a) Com 7 latas de tinta consigo pintar 10 m de parede. Então, se eu quiser pintar 30 m de parede, de quantas latas de tinta eu vou precisar?

Resposta:____
____

b) Tatiana, Bruna e Lara estão treinando bola ao cesto. Veja o desempenho delas:
Tatiana – fez 10 arremessos e conseguiu 4 cestas
Bruna – fez 4 arremessos e conseguiu 3 cestas
Lara – fez 5 arremessos e conseguiu 2 cestas.
Quem se saiu melhor no treino? Houve desempenhos iguais?

Resposta:____
____

c) A cada vinte e cinco reais em abastecimento de combustível, o Posto Parada Boa dá cinco pães de brinde. Se Ronaldo abastecer seu carro com cem reais de combustível, quantos pães ele ganhará?

Resposta:____
____

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aplicação desta sequência em sala de aula e as vivências no Programa de pós-graduação em ensino de Ciências e Matemática teve grande relevância para esta docente e assim espera que o(a) professor(a) que aplicar e der continuidade a esse trabalho tenha e mesma satisfação profissional.

Espera-se como essa sequência didática que os professores da Educação Básica se atentem para importância da parceria entre a prática de sala de aula da Educação Básica com a sala de aula da Instituição superior e que possam ser motivados a dar continuidade ao estudo acadêmico e a desenvolverem trabalhos onde os alunos desenvolvem o espírito investigativo frente a situações-problema.

Sugere-se ao(a) professor(a) que, entre as ideias da fração – conceito que geralmente é introduzido nos anos iniciais do Ensino Fundamental – seja desenvolvida também a noção de razão entre duas grandezas discretas e complementares, envolvendo relações parte-parte e parte-todo. Em vez de aplicar, de forma mecanizada, técnicas de redução de frações a mesmo denominador, os alunos podem ser desafiados a solucionar problemas que requeiram a comparação de razões e, assim, descobrir relações de equivalência que podem facilitar o desenvolvimento do raciocínio proporcional e também o probabilístico.

É importante que antes da aplicação e ou adaptação da sequência didática aqui proposta o(a) professor(a) tenha realizado a leitura da dissertação que deu origem a esse trabalho, que detalha toda a aplicação e analise feita pela autora.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

COSTA, S.; PONTE, J. P. O Raciocínio Proporcional dos alunos do 2º ciclo do Ensino Básico. **Revista da Educação**, Vol. XVI, nº 2, p.65-100, 2008.

BOYER, T. W.; LEVINE, S. L. HUTTENLOCHER, J. Development of Proportional Reasoning: Where Young Children Go Wrong. **Developmental Psychology,** V. 44, No. 5, 1478–1490, 2008.

JEONG, Y.; LEVINE, S. C.; HUTTENLOCHER, J. The Development of Proportional Reasoning: Effect of Continuous Versus Discrete Quantities. **Journal of Cognition and Development**, 8:2, 237-256, 2007.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988, p. 93-118. Disponível em:< http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/88_8.html>

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciênc. Educ**., v. 20, n. 2, p. 517-533. Bauru, 2014.

MARANHÃO, C; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**, nº. Especial 1, p. 141-156, UFPR. Curitiba, 2011.

MORTON, C, H. An investigation into ixth grade students' understanding of ratio and proportion. **International Journal for Research in Mathematics Education,** V. 4, N.1, p.68-80, 2014.

PONTE, J. P.; MARQUES, S. Proportion in school mathematics textbooks: A comparative study. International Journal for Research in Mathematics Education. **International Journal for Research in Mathematics Education**, V. 1, N.1, p.36-53, 2011.

SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. Resolução de Problemas de Valor Omisso: Análise das Estratégias dos Alunos. **Anais XIXEIEM**. Vila Real, 2009.
SPINILLO, A.F. A importância do referencial de "metade" e o desenvolvimento do conceito de proporção. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Vol. 8, N° 3, p.305-331, 1992.

SPINILLO, A.G. As relações de primeira-ordem em tarefas de proporção: uma outra explicação quanto às dificuldades das crianças. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Vol. 9, N° 2, p. 349-364, 1993.

SPINILLO, A.G. O Papel de Intervenções Específicas na Compreensão da Criança sobre Proporção. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Vol. 15, Nº 3, p. 475-487, 2002.

TORRE, J.; TJOE, H.; RHOADS, K.; LAM, D. Conceptual and Theoretical Issues in Proportional Resoning. **International Journal for Studies in Mathematics Education.** V.6 (1), p. 21-38, 2013.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Tradução: Juan D. Godino. V. 10, n. 23, p. 133-170. Grenoble, 1990.