UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

O ensino de conteúdos geométricos por meio de tarefas investigativas para alunos do ensino fundamental

The teaching of geometric contents through investigative tasks for students of fundamental education

Joseane Marta Vian[1], Marli Teresinha Quartieri[2]

[1]Mestranda do Programa de Pós-Graduação do Ensino de Ciências Exatas – PPGECE – Universidade do Vale do Taquari – Univates – joseane.vian@universo.univates@br

[2]Doutora em Educação - Universidade do Vale do Taquari - Univates - mtquartieri@univates.br

Finalidade: Esta proposta, que é parte integrante de uma pesquisa de Mestrado, apresenta sete tarefas envolvendo Investigação Matemática e Geometria, as quais podem ser exploradas com estudantes do Ensino Fundamental.

Contextualização

As tarefas aqui descritas, desenvolvidas com 7 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental numa escola da rede pública municipal[1], integraram a dissertação de Mestrado intitulada

---

[1] A escola Municipal Heitor Villa-lobos, localiza-se no centro do município de Coqueiro Baixo, agregando 93 alunos do 1° ao 9°. A escola possui 5 salas de aula, um refeitório, uma sala de

"Tarefas Investigativas para o Ensino da Geometria no 5º ano do Ensino Fundamental". O tema desta pesquisa foi o estudo da metodologia de Investigação Matemática, abrangendo alguns conteúdos da área da Geometria.

Justifica-se a opção pela Geometria por reconhecer a importância deste tema como campo do conhecimento, sendo, portanto, necessário um olhar diferenciado sobre as práticas pedagógicas envolvendo este conteúdo.

Perez (1991) e Pavanelo (1993) apontam algumas causas para a ausência da Geometria no ensino. Entre elas podemos destacar que alguns professores não estão preparados para trabalhar os conteúdos geométricos, sentindo-se inseguros, baseiam-se no livro didático, isto devido à má formação dos professores, ou devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos. Para Passos (2000), o conhecimento básico da Geometria é fundamental para os indivíduos interagirem no seu meio; por isso, esse pensamento geométrico (conceitos, propriedades e relações simples de geometria) deveria ser introduzido já nos anos iniciais, para que, na sequência do Ensino Fundamental, os alunos pudessem compreender de forma significativa seus fundamentos.

Cabe destacar que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe cinco grandes unidades temáticas correlacionadas, na área da matemática para o Ensino Fundamental, entre elas, o conteúdo de Geometria (BRASIL, 2018). Partindo deste pressuposto, este produto educacional apresenta uma proposta que discute a ação de ensinar o conteúdo de Geometria na sala de aula de forma dinâmica e desafiadora. Neste contexto, optou-se por usar a metodologia de Investigação Matemática, que possibilita ao aluno desenvolver habilidades do pensamento, associadas à ideia de procurar, de questionar, de querer saber, transformando-o em sujeito responsável pelo seu próprio conhecimento.

---

informática, um laboratório de ciências, um laboratório de informática, sala de jogos, sala de professores, de direção, sala de recursos humanos, secretaria, cozinha, uma cancha de esporte, uma cancha de areia, pracinha, banheiros e um belo pátio.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), atividades que envolvem a Investigação Matemática instigam os alunos à descoberta de novos saberes, por meio de problemas abertos que propiciam o levantamento de conjecturas possíveis de serem testadas e matematicamente registradas. Dessa forma, em vez de ir diretamente ao caminho já traçado, à solução pronta, nesta metodologia, no decorrer das tarefas, ocorrem perguntas que instigam e incentivam os estudantes a descobrirem caminhos para a solução dos problemas, enfatizando a necessidade de justificar suas descobertas, desenvolvendo o pensamento matemático e, consequentemente, atribuindo novos significados ao conhecido.

Ademais, os autores citados acrescentam que investigar não significa resolver problemas difíceis, descobrir fórmulas novas, ou inventar novos conceitos, mas significa a formulação de questões para as quais não há respostas prontas; portanto, necessitam ser investigadas, com base em processos fundamentados e rigorosos para que as respostas sejam matematicamente válidas.

Ao realizar uma aula de investigação, de acordo com Ponte, Brocardo, Oliveira (2006), é necessário habituar-se a desenvolver três momentos. No primeiro momento, o professor faz a proposta aos alunos, garantindo que todos entendam o sentido da tarefa. É preciso que os discentes saibam que podem contar com o apoio do professor, mas que a resolução da tarefa depende, essencialmente, da iniciativa deles. Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) acrescentam que a fase introdutória é importante, principalmente, se os alunos não estiverem familiarizados com a metodologia de Investigação Matemática. Com efeito,

> [...] para que a tarefa possa realmente desencadear uma investigação por parte dos alunos, é preciso escolher situações potencialmente ricas e formular questões suficientemente abertas e interessantes, de forma a estimularem o pensamento matemático dos alunos. Para isso, o professor tem necessidade de fazer uma pesquisa em torno de vários materiais que podem variar entre manuais escolares, livros com propostas de problemas e investigações e, mais recentemente, o mundo da *Internet*. Mas, mais do que esta pesquisa, ele precisará recorrer à sua criatividade para dar forma à tarefa, adaptando as situações, reconstruindo as questões da maneira que melhor servir os seus objectivos (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p. 10).

Tendo assegurada a compreensão dos alunos para a realização da tarefa, segue-se para o segundo momento, que envolve o desenvolvimento do trabalho, a realização da investigação.

Neste momento, é fundamental o acompanhamento do professor; ele deve observar e compreender como o trabalho realizado pelos alunos está sendo processado e prestar apoio, se necessário. De acordo com Ponte (2017), ao propor uma tarefa investigativa, os alunos devem explorar a formulação de questões e de conjecturas, o teste, a reformulação e a justificativa dessas conjecturas e a avaliação do trabalho.

O terceiro momento apontado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) é a discussão dos resultados, etapa em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado, suas estratégias, conjecturas e justificativas. Nesse processo, cabe ao professor assegurar que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação realizada. O professor deixa de ser aquele que apenas transmite conhecimentos para ser mais um orientador, um estimulador dos processos que levam os alunos a construírem seus conceitos, valores, atitudes e habilidades que permitem que eles cresçam como pessoas.

> No acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos, ele deve procurar atingir um equilíbrio entre dois polos. Por um lado, dar-lhes autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria de investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática. [...] Desse modo, o professor é chamado a desempenhar um conjunto de papéis bem diversos no decorrer de uma investigação: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p. 47).

Assim, é evidente que as tarefas de investigação matemática devem ter um contexto para gerar aulas favoráveis e produtivas, nas quais é possibilitado aos estudantes exporem suas ideias, relatarem suas convicções e argumentá-las com os colegas e o professor.

É possível perceber que a metodologia de Investigação Matemática também vai ao encontro da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). O documento orientador apresenta competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental. Destaca-se, entre elas, a importância do estudo por meio da investigação, no que se refere ao "desenvolvimento do raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo" (BRASIL, 2018, p. 267).

Objetivo

O objetivo deste trabalho é socializar tarefas investigativas que podem ser exploradas com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, envolvendo alguns conteúdos relacionados às unidades temáticas Geometria e Grandezas e Medidas.

Detalhamento

Esta proposta pedagógica foi desenvolvida com 7 alunos de uma turma de 5° ano do Ensino Fundamental, de uma escola da rede pública municipal. Foram realizadas sete tarefas com foco em unidades temáticas de Geometria e Grandezas e Medidas, envolvendo a metodologia de Investigação Matemática. Esta prática pedagógica foi realizada em 8 encontros, de duas horas-aula em cada encontro. A primeira tarefa foi realizada em dois encontros, por ser o primeiro contato com a Metodologia de Investigação e, por isso, os alunos levaram mais tempo para elaborar as conjecturas.

Na metodologia de Investigação Científica, as tarefas são realizadas em grupos, que podem ser formados por sorteio, por afinidades ou sob orientação do professor. Os estudantes devem ser incentivados a todo momento a explorarem as questões, a fim de despertarem e desenvolverem a criatividade e a capacidade de pensar e de agir com autonomia, para que construam as próprias conjecturas e as apresentem oralmente e por escrito aos colegas da turma, comparando as descobertas.

Em cada encontro, os educandos recebem uma folha com cada tarefa proposta, na qual também registram “detalhadamente” as estratégias utilizadas, as conjecturas elaboradas. Concluída a tarefa, ela é anexada no caderno. O docente assume o papel de mediador, acompanha as discussões dos alunos e, quando necessário, orienta os rumos da investigação, realizando questionamentos para a obtenção de resultados mais precisos e detalhados. Ao final de cada encontro, é oportunizado um momento para cada grupo expor para a turma as estratégias e conjecturas utilizadas durante a exploração das tarefas.

No Quadro 1, apresentam-se os objetivos e as tarefas exploradas no decorrer da prática pedagógica. Salienta-se que, a cada uma delas, foram atribuídos objetivos específicos, de acordo com os conteúdos trabalhados, conforme estabelecido pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

Quadro 1 – Objetivos e tarefas desenvolvidas por encontro

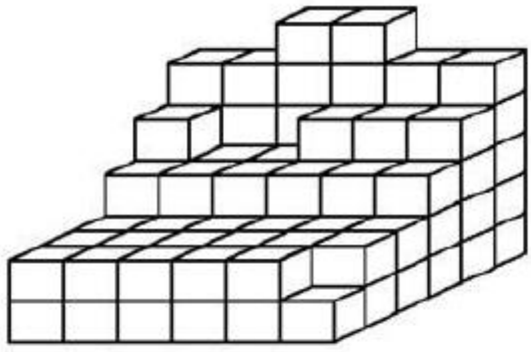
Encontros	Horas/Aulas (55minutos cada)	Objetivos	Tarefa desenvolvida
1° e 2°	Quatro horas/aula	Reconhecer nas figuras geométricas espaciais, as faces, as arestas e os vértices. Retomar os conceitos dos elementos que compõem os sólidos geométricos.	Utilizando os cubinhos disponibilizados formar um cubo. Colorir as 4 faces do cubo, após realizar uma análise, de acordo com a quantidade de cubinhos que foram coloridos.
3°	Duas horas/aula	Associar a ideia de que os cubinhos representam o volume do cubo. Associar figuras espaciais a suas planificações, analisar, nomear e comparar seus atributos.	Continuação de sequência de figuras, analisando a quantidade de cubinhos necessários para formar as próximas figuras. Planificação de sólidos.
4°	Duas horas/aula	Descrever o deslocamento e a localização de pessoas no espaço.	Auxílio a uma pessoa para deslocar-se da saída da sala de aula até a prefeitura municipal de Coqueiro Baixo.
5º	Duas horas/aulas	Estudar polígonos considerando os lados. Construir diferentes formatos de figuras, por meio de dobraduras e cortes. Reconhecer ângulos retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras.	Construção de figuras por meio de dobraduras, encontrando a relação entre o número de lados da figura e o número de dobragens.
6º	Duas horas/aulas	Reconhecer e nomear os polígonos considerando os lados. Medir e estimar comprimentos, incluindo cálculo de perímetros e áreas de figuras planas.	Identificação de figuras geométricas planas, nomeando-as de acordo com os lados e cálculo de área e perímetro.
7°	Duas horas/aulas	Calcular áreas e perímetros de figuras planas irregulares.	Cálculo do perímetro e da área da folha de uma árvore.

8º	Duas horas/aula	Comparar figuras que possuem a mesma área, mas podem ter perímetros diferentes e vice-versa.	Sequência de figuras, realizando e comparando os cálculos de áreas e perímetros.

Fonte: Da autora (2020).

A primeira tarefa tem o intuito de reconhecer figuras geométricas espaciais, em especial o cubo, retomar a definição e os conceitos dos elementos que compõem o cubo, como: as arestas, os vértices e as faces. No Quadro 2, apresenta-se a referida tarefa:

Quadro 2 – Atividade 1: O cubo



Atividade 1: João quer formar um cubo, mas, como acabaram os cubinhos, a figura ficou incompleta, como mostra a imagem. Assim, João precisa organizar os cubinhos de forma diferente para formar um cubo.
a) Ajudar o João a formar um cubo, utilizando os cubinhos disponibilizados.
b) Colorir as 4 faces dos cubos construídos.
c) Observar e responder: Quantos cubinhos foram coloridos com:
- uma face
- duas faces
- três faces
- nenhuma face colorida
d) Comentar os resultados numa tabela, identificando relações/conclusões/ generalizações.

Fonte: Adaptação de Carvalho e Pitombeira (2010, p. 147).

A segunda tarefa (Quadro 3) está associada à ideia de que um conjunto de cubinhos pode representar o volume do cubo. Além disso, estabelecer a relação das figuras espaciais com suas planificações, bem como usar sequência geométrica.

Quadro 3 – Tarefa 2: sequência dos cubos

Tarefa 2: Continuar a sequência:

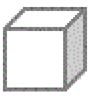


Fig.1

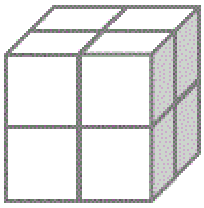


fig. 2

a) Responder:
   i) Quantos cubinhos serão necessários para construir a figura 3?
   ii) Quantos cubinhos serão necessários para construir a figura 4?
   iii) E na figura 5, quantos "cubinhos" serão necessários?
   iv) E na figura 10?
b) Organizar os dados encontrados e escrever as conclusões obtidas.
c) Observar e fazer a planificação da figura 3.
d) Escrever como o grupo pensou em fazer a planificação.
e) Preencher o sólido construído por meio da planificação com os cubinhos. Comente as descobertas.

Fonte: Adaptado de Giongo e Munhoz (2016, p. 291).

A terceira tarefa (Quadro 4) desenvolvida objetiva descrever o deslocamento e a localização de pessoas no espaço, por meio de malhas quadriculadas ou por representações como desenhos, por mapas ou por planta baixa e croquis, com possibilidade de empregar termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares. O intuito da tarefa é identificar como os alunos se orientam e como auxiliam na orientação de outras pessoas.

Quadro 4 - Tarefa três: localização e deslocamento de pessoas no espaço

Tarefa 3: Auxiliar uma pessoa que está em nossa sala, mas que não conhece nosso município, a ir até a prefeitura. Registrar todas as informações e orientações dadas à pessoa.

Fonte: Da autora (2020).

A quarta tarefa objetiva estudar os polígonos considerando os lados; analisar as estratégias utilizadas pelos discentes para construir diferentes formatos de peças poligonais, por meio de dobraduras e cortes; reconhecer, nomear e comparar os diferentes polígonos, considerando o número de lados; reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais. No Quadro 5, a tarefa proposta aos alunos do 5° ano.

Quadro 5 – Tarefa quatro: construir figuras a partir de dobraduras

Tarefa 4: Construir figuras por meio de dobraduras

a) Numa folha de papel dobrada ao meio, cortar diversos formatos triangulares com apenas dois cortes, com medidas iguais e com medidas diferentes. Desenhar um esboço que mostre os resultados obtidos e comentar as descobertas.

b) Usar dobras e recortes para formar uma peça quadrangular. Comentar os resultados encontrados.

c) E, para formar peças poligonais com mais lados, como dobrar a folha e fazer os recortes? Encontrar uma relação entre o número de lados da figura e o número de dobragens, preenchendo o quadro que segue.

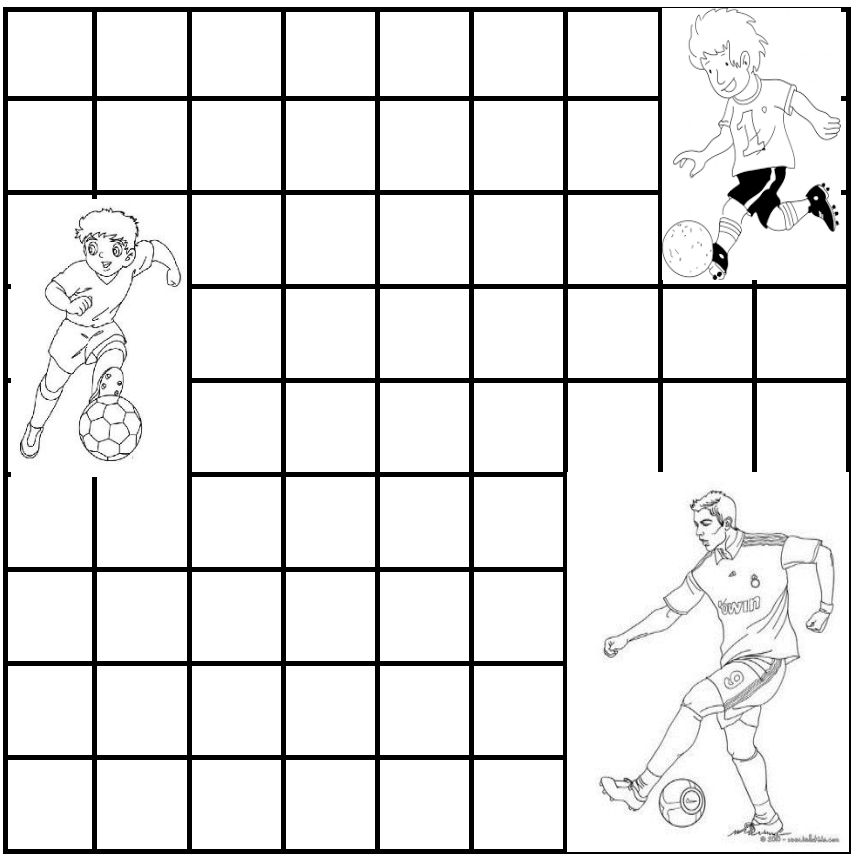
Números de dobragens	Número de lados da face	Relação entre o número de lados e o número de dobragens

Fonte: Adaptação Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 72 e 74).

A tarefa cinco (Quadro 6) consiste em investigar diferentes desenhos de polígonos, reconhecer e nomear os polígonos considerando os lados e calcular a área e o perímetro, bem como objetiva que o aluno elabore e descreva as estratégias que deem conta do caminho mais curto para realizar a tarefa proposta.

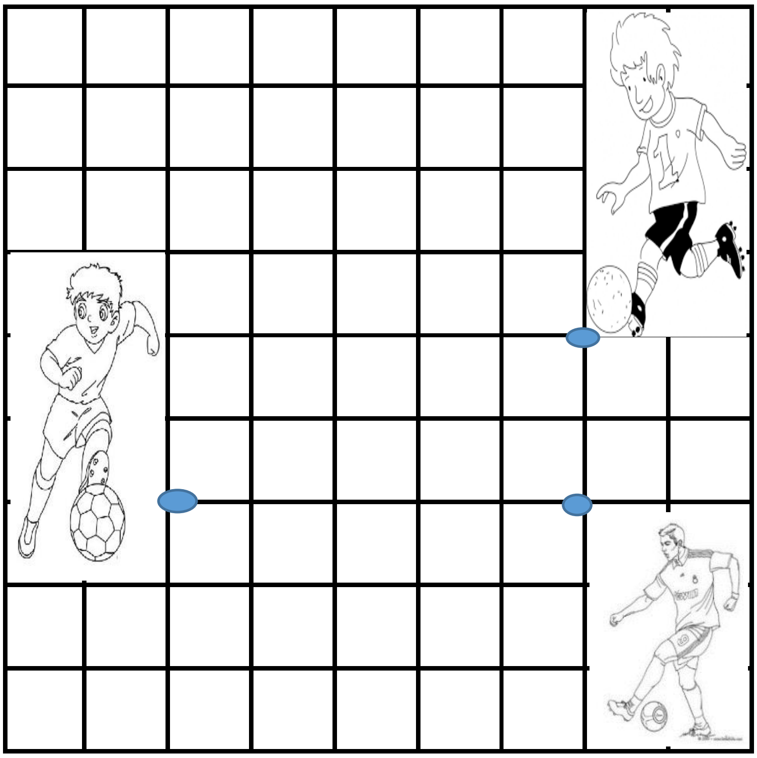
Quadro 6 – Tarefa cinco: nomenclatura de polígonos e medidas de áreas e perímetros

Tarefa 5: No desenho que segue, unir os 3 jogadores de futebol passando por cima dos segmentos que formam a malha quadriculada. Cada lado da malha equivale a 1 cm.



(Conclusão)

(Continua...)

a) Quantos lados têm a figura formada?
b) De acordo com os lados da figura formada, como ela é classificada? (Nome que ela recebe)
c) Qual é a medida do contorno dessa figura, ou seja, o perímetro?
d) Por quantos quadradinhos a figura é formada? Qual o valor da área?
e) Unir os 3 jogadores a partir dos pontos determinados, considerando os segmentos da malha, de maneira que possa construir uma figura geométrica com o menor perímetro.
e.1) Qual o nome da figura formada, de acordo com seus lados?
e.2) Qual o perímetro obtido? E a área?


Fonte: Adaptação Carvalho e Pitombeira (2010, p. 150).

A sexta tarefa objetiva averiguar estratégias que os discentes utilizam para calcular áreas e perímetros de figuras planas irregulares. No Quadro 7, o enunciado da tarefa.

Quadro 7 - Tarefa seis: cálculos de áreas e perímetros de figuras planas irregulares

Tarefa 6: Deslocar-se até o pátio da escola e recolher do chão a folha de uma árvore. Calcular o perímetro e a área desta folha. Registrar os passos realizados.

Fonte: Da autora (2020).

A última tarefa objetiva investigar estratégias utilizadas pelos alunos para comparar figuras com a mesma área, mas podem ter perímetros diferentes e vice-versa. Para realizar esta tarefa, os alunos devem construir as figuras, conforme o enunciado, tendo apoio de material concreto. A seguir, no Quadro 8, a sétima tarefa.

Quadro 8 – Tarefa sete: figuras com a mesma área, mas com perímetros diferentes

Tarefa 7: A primeira figura é formada por 3 peças quadradas[2] e cada lado de cada peça quadrada mede 1 cm de lado. A segunda figura é formada pelo dobro de peças quadradas idênticas às da primeira figura. A terceira figura é formada pelo dobro de quadrados da figura anterior e assim, sucessivamente. Quanto mede o contorno, ou seja, quanto mede o perímetro da figura 4? E a área? Justificar a resposta.

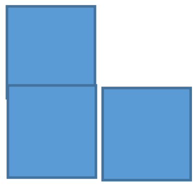


Fig. 1

Fonte: Adaptação (OBMEP, 2014).

O intuito destas tarefas é desenvolver habilidades de trabalho em grupo, de cooperação. Nesse sentido, é importante que o professor, no decorrer da resolução das tarefas, que ocorre em pequenos grupos, motive constantemente os alunos para que as resoluções sejam definidas nos pequenos grupos e depois socializadas à turma toda.

Resultados obtidos

Em relação aos resultados desta proposta pedagógica, desenvolvida com 7 alunos de uma turma de 5° ano do Ensino Fundamental, de uma escola da rede pública municipal, ficou demonstrado que, por meio da metodologia de Investigação Matemática, os estudantes têm a oportunidade de descobrirem relações, expressarem e defenderem suas opiniões. As tarefas

[2] Os grupos de estudantes receberam 45 peças quadradas em EVA, para realizar a tarefa 7.

possibilitam identificar e encontrar estratégias, comprovar, testar e apresentar os resultados encontrados, reforçando atitudes de autonomia e de cooperação, bem como a capacidade de comunicação oral e escrita. Porém, conforme se verificou, se os alunos não estiverem familiarizados com esse tipo de metodologia, nas tarefas iniciais, podem ficar confusos, sem saber o que fazer, esperando que a professora dê exemplos, para então iniciarem a tarefa.

É importante destacar que se deve ter o cuidado de, no decorrer das tarefas envolvendo a Investigação Matemática, não dar a resposta pronta aos alunos. O papel do professor é o de mediador, instigando os estudantes a pensarem e a discutirem sobre as distintas estratégias e conjecturas. Quando solicitam auxílio, questiona-se o que já conjecturaram, instigando-os a estabelecerem novas relações. Ao formular uma estratégia diferenciada, cabe elogiá-los e apoiá-los, o que os torna mais motivados e seguros.

Para elaborar as estratégias, os estudantes utilizaram o material dourado, dobraduras e recortes, construção de sólidos, pinturas, réguas, construíram "fórmulas" e quadros para melhor organizar os dados. O material concreto contribuiu para a elaboração das estratégias, despertou a curiosidade, estimulou o aluno a fazer questionamentos, a criar hipóteses e a chegar às próprias soluções, enfim, a aventurar-se pelo mundo da matemática de forma mais prazerosa.

Ao final de cada tarefa, os estudantes tiveram a oportunidade de apresentar aos demais grupos as estratégias elaboradas, favorecendo debates e discussões. Pode-se inferir que a realização das tarefas investigativas possibilitou o desenvolvimento do espírito investigativo do aluno. Com estas tarefas, os alunos tiveram a oportunidade de levantar estratégias, estabelecer relações e tomar decisões por meio dos resultados obtidos, estabelecendo relações e significando-as matematicamente.

Apresentam-se, a seguir, exemplos de estratégias utilizadas pelos alunos do 5º ano, na resolução das tarefas.

Para realizar a tarefa um e auxiliar os alunos na interpretação e na resolução da letra 'a" da tarefa, sentamos no chão e juntos construímos a figura do exercício, com o auxílio dos cubinhos do material dourado. Discuti com os estudantes o que era um cubo, o que era aresta, vértice, face. Conceituando, que o cubo é um poliedro, um sólido geométrico, com 6 faces congruentes, seis faces de forma quadrada de igual tamanho. Dei as explicações, mostrando várias imagens que representam o cubo, como, por exemplo: um dado, o cubo mágico, além de usar o material dourado (utilizando o cubo formado por mil cubinhos). Na oportunidade, expliquei que os lados do cubo eram as faces, que a junção de duas faces forma a aresta e o encontro de três arestas formam os vértices.

A partir desta construção coletiva e da contagem dos cubinhos, os três grupos receberam a mesma quantidade de cubinhos, ou seja, 107 cubinhos, para resolver a questão ‘a” do exercício, que era: “Ajudar o João a formar um cubo, utilizando os cubinhos disponibilizados”.

Iniciando a construção do cubo, dois grupos construíram um cubo com a base de 6 cubinhos e o outro grupo fez um cubo com a base de 10 cubinhos. A estratégia utilizada pelo grupo que iniciou o cubo com a base de 10 cubinhos. Já na construção da base perceberam que não teriam cubinhos suficientes. Fazendo os cálculos, descobriram que, em cada camada, seriam necessários 100 cubinhos. Foram adicionando de 100 em 100 e concluíram que seriam necessários 1000 cubinhos para fazer o cubo de base 10, também, questionaram se poderiam sobrar cubinhos. Como a resposta foi positiva, confeccionaram um cubo com base de 3 cubinhos. Depois, com os demais cubinhos que sobraram construíram cubos com base de 2 cubinhos.

Um dos grupos que iniciou o cubo de base 6, quando estavam construindo o cubo na terceira camada, perceberam ao realizar os cálculos que eram necessários 36 cubinhos em cada camada, totalizando 216 cubinhos, para formar um cubo de base 6, compreendendo a lógica da tarefa, qual era realmente o objetivo proposto. Desta forma analisaram que com base 5 cubinhos também não era possível construir um cubo, com o material disponibilizado, construindo assim um cubo de base 4 cubinhos. Já o outro grupo que iniciou o cubo com base 6, construíram até utilizar todos os cubinhos. Percebendo que não era possível formar um cubo, iniciaram outro cubo com base 5 cubinhos, não compreendendo que não teria cubinhos suficientes. Somente no momento da socialização o grupo entendeu o objetivo da tarefa e a lógica utilizada para a construção dos cubos.

Para realizar as letras “b” e “c”, os alunos utilizaram os cubos construídos. No primeiro momento eles coloriram os cubinhos externos do cubo de acordo com o número de faces expostas de cada cubinho. Para realizar a contagem da quantidade de cubinhos que ficavam coloridos de acordo com as faces, um dos três grupos desmontou o cubo, para um melhor entendimento. Os outros dois grupos para realizar e verificar a quantidade de cubinhos coloridos de acordo com os lados, contavam os cubinhos de um em um, apontando-os com o dedo para não se confundirem. Observei que esses dois grupos não desmontaram os cubos para verificar quantos ficavam com nenhuma face colorida. Contavam analisando quantos cubinhos tinham apenas uma face colorida, descontavam a camada superior e a camada inferior e assim conseguiam chegar ao resultado de quantos sobravam dentro do cubo sem nenhuma parte colorida.

No momento da socialização, a professora/pesquisadora sugeriu construir um quadro com os resultados obtidos, para um melhor entendimento e organização. O quadro foi construído coletivamente, num painel, como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Painel com informações sobre os cubos

CUBO	TOTAL DE CUBINHOS	CUBINHOS SEM PINTURA	Total de cubinhos com faces coloridas			
			UMA FACE	DUAS FACES	TRÊS FACES	SEIS FACES
1x1x1	1	—	—	—	—	1
2x2x2	8	—	—	—	8	—
3x3x3	27	1	6	12	8	—
4x4x4	64	8	24	24	8	—
5x5x5	125	27	54	36	8	—

Fonte: Alunos do 5° ano.

Após a construção do quadro, os alunos foram instigados a responderem quantas faces seriam pintadas nos cubos com aresta 6 e 7 sem construí-los. Num primeiro momento, responderam que não seria possível. Então, convidei-os a observarem o quadro e verificar o que estava acontecendo com os resultados de um cubo para outro. A seguir, o diálogo que ocorreu ao analisarem o quadro:

> Aluno M: "*Na coluna de 3 lados coloridos, a partir da segunda linha a resposta é igual para todos*".
> Aluno N: "*Porque o cubo tem 8 pontas. Não importa o tamanho do cubo, sempre vai ter 8 cubinhos, quatro em cima e quatro em baixo. E quando pintamos de 3 lados os cubinhos são as pontas. Por isso que todas as resposta são 8, desde o cubo menor até o maior*".
> Todos: "*É mesmo*".
> A pesquisadora: "*Então quer dizer que o cubo de aresta 6, de aresta 7 e os demais cubos terão 8 cubinhos com 3 faces coloridas*?"
> Aluno M: "*Todos os cubos têm quatro pontas, não importa a quantidade de cubinhos que tem dentro*".
> A pesquisadora: "*Muito bem, parabéns pela observação (elogios). O que mais podemos observar, nas demais colunas*".
> Aluno N: "*Com duas faces coloridas, é só fazer mais 12*".
> A pesquisadora: "*Como assim*?"
> Aluno N: "*É que está aumentando de 12 em 12, a partir da terceira linha. Olha só, na terceira linha tem 12, na quarta tem 24 que é 12 + 12, na outra tem 36, que é 24 + 12, na próxima vai ser 48, porque 36 + 12 = 48*".
> A pesquisadora: "*Ótima observação, perfeito. Então um cubo de aresta 6, terá 48*

> *cubinhos com duas faces e 8 cubinhos com 3 faces coloridas*".

Após alguns questionamentos, debates, observações, concluíram que a coluna se refere à quantidade de cubinhos, cujo resultado se obtém através da multiplicação da altura, pela largura e pelo comprimento. Assim, concluíram a coluna com a quantidade de cubinhos sem pintura, inclusive do cubo com aresta de 6 cubinhos. Observou-se que essa regra também era válida para a coluna dos cubinhos sem pintura; porém, a partir do cubo construído com aresta de 3 cubinhos. Assim o cubo com aresta de 3 cubinhos teria um cubinho sem pintura, pois 1 X 1 X 1 = 1. O cubo com aresta de 4 cubinhos teria 8 cubinhos sem pintura, pois 2 X 2 X 2 = 8. O cubo com aresta de 5 cubinhos teria 27 cubinhos sem pintura, pois 3 X 3 X 3 = 27. E assim, sucessivamente. Os cubos com aresta de 1 e 2 cubinhos não teriam cubinhos sem pintura. Durante a análise do painel, a professora/pesquisadora fez o papel de questionadora, estimulando e orientando os alunos para que juntos realizassem a tarefa.

Analisando as conclusões anteriores, observou-se que faltou uma regra para a coluna de cubinhos com uma face colorida, quando o aluno N sugeriu fazer um cálculo para encontrar os resultados para esta coluna:

> Aluno N: "*Se a gente somar, por linha, os cubinhos de duas faces colorida, com os cubinhos de três faces coloridas e mais os cubinhos sem nenhum lado colorido. Se a gente juntar esses três valores e diminuir com o total de cubinhos que forma o cubo vamos encontrar a resposta para a coluna de uma face colorida*".

Para melhor explicar a estratégia do aluno N, vou descrever um exemplo: ele sugeriu que, para formar o cubo de aresta 3, são necessários 27 cubinhos. Se, do total de cubinhos que forma o cubo, neste caso 27, subtrairmos 21, que é o valor encontrado da adição de cubinhos (cubinhos com duas faces coloridas + cubinhos com 3 faces coloridas + cubinhos sem nenhuma face colorida), teremos como resultado 6. Este valor representa os cubinhos com uma face colorida.

No coletivo, foram realizados os cálculos para demonstrar o que o aluno N estava tentando mostrar. Testamos a estratégia do aluno N com os demais cubos e comprovamos que ela estava correta. No Quadro 9, os cálculos realizados para comprovar a estratégia.

Quadro 9 – Cálculos realizados para testar uma estratégia

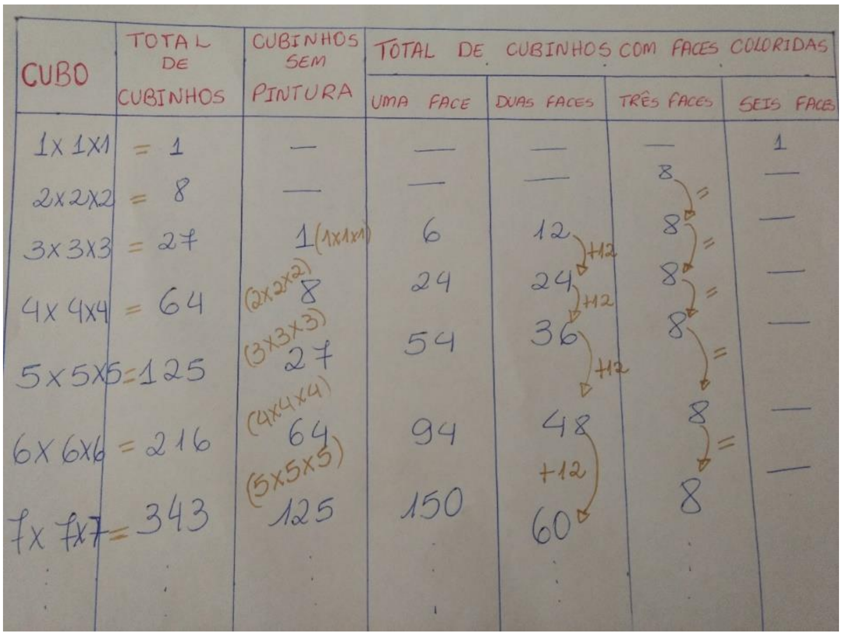
O cubo de aresta 3:	12 + 8 +1 = 21	27 - 21 = 6
O cubo de aresta 4	24 + 8 + 8 = 40	64 – 40 = 24
O cubo de aresta 5	36 + 8 +27 =71	125 – 71 = 54

Fonte: alunos do 5° ano.

De acordo com a estratégia utilizada pelo aluno N, foi possível preencher a coluna de uma face colorida.

Nesta tarefa, instiguei os alunos a, juntos, encontrarem estratégias para atingir os objetivos propostos. E assim, foi possível dar continuidade à tarefa, estabelecendo relações com os cubos de aresta 6 e 7 cubinhos, encontrando os resultados, sem o auxílio do material concreto, por meio de estratégias elaboradas durante a socialização. Na Figura 2, as informações adquiridas.

Figura 2 - Painel de relação entre os cubos, de acordo com os cubinhos coloridos em cada face



CUBO	TOTAL DE CUBINHOS	CUBINHOS SEM PINTURA	TOTAL DE CUBINHOS COM FACES COLORIDAS			
			UMA FACE	DUAS FACES	TRÊS FACES	SEIS FACES
1x1x1	= 1	—	—	—	—	1
2x2x2	= 8	—	—	—	8 =	—
3x3x3	= 27	1 (1x1x1)	6	12 +12	8 =	—
4x4x4	= 64	(2x2x2) 8	24	24 +12	8 =	—
5x5x5	= 125	(3x3x3) 27	54	36 +12	8 =	—
6x6x6	= 216	(4x4x4) 64	94	48 +12	8 =	—
7x7x7	= 343	(5x5x5) 125	150	60	8	

Fonte: Alunos da turma do 5° ano.

Nesta tarefa, os estudantes utilizaram várias estratégias como: o auxílio do material dourado, os cubos construídos, a pintura dos cubinhos para diferenciar a quantidade de faces e a construção de quadros, para melhor compreensão dos cálculos. Dessa forma, com o apoio do material concreto, percebi que os alunos conseguiram realizar a tarefa proposta, elaborando suas estratégias com êxito, tendo assim uma compreensão melhor do conteúdo estudado. Logo, o conteúdo aliado ao uso de material concreto permite que os educandos melhorem a compreensão, além de tornar mais simples e interessante a explicação.

Ainda, é possível inferir que, com o auxílio do material concreto, o educando tornou-se mais curioso, mais crítico durante a realização das tarefas. Outro aspecto perceptível durante o desenvolvimento da primeira tarefa foi a dificuldade para trabalhar em grupos. Mesmo estando em grupos, os alunos procuravam realizar individualmente a tarefa. Fiquei constantemente instigando-os a interagirem com os colegas, a conversarem, a trocarem conhecimentos com o grupo, para, coletivamente, elaborarem suas conjecturas. Acredito que o trabalho em grupo pode ser favorável, principalmente, em atividades que exigem a formulação de conjecturas, quando um aluno pode auxiliar o outro na elaboração.

Para realizar a segunda tarefa, foi disponibilizado o material dourado. Solicitei que os 2 grupos formados, construíssem as figuras existentes e realizassem as próximas construções de acordo com um padrão definido. Os grupos utilizaram estratégias diferentes para realizar a tarefa. Um dos grupos utilizou cálculos envolvendo a multiplicação, enquanto o outro valeu-se da adição. Os dois grupos partiram do mesmo pressuposto, porém percorreram caminhos diferentes para realizar a tarefa.

O grupo que seguiu a sequência da multiplicação, organizou os dados encontrados, conforme o registro no Quadro 10, para melhor organização e compreensão da tarefa.

Quadro 10 – Estratégia formulada pelos alunos de um dos grupo

Figura	**Quantidade de cubinhos**	**Conclusão**
1	1	1x1x1=1
2	8	2x2x2=8
3	27	3x3x3=27
4	64	4x4x4=64
5	125	5x5x5=125

Fonte: Grupo de alunos do 5º ano.

Verifiquei que os participantes deste grupo interagiram mais, cooperaram entre si, para conseguirem desenvolver a tarefa. Também constatei que compreenderam as noções do estudo sobre os cubos, a relação entre o cubo e o número de cubinhos necessários para sua formação.

O outro grupo seguiu a sequência da soma, ou seja, em cada figura a partir da primeira, adicionavam 7 cubinhos a mais que na figura anterior. Os integrantes deste grupo, também preferiram organizar os dados num quadro para melhor entendimento. Assim, no Quadro 11, a estratégia do grupo para resolver a tarefa.

Quadro 11 – Estratégia do outro grupo para realizar a tarefa

Figura	**Quantidade de cubinhos**	**Conclusão**
1	1	1
2	8	1 +7 =8
3	15	8 + 7=15
4	22	15 +7 =22
5	29	22 + 7=29

Fonte: Grupo de alunos do 5º ano.

Quanto à planificação dos sólidos de cada figura, os alunos ficaram um tanto confusos. Expliquei o conteúdo, usando como exemplo uma caixa de sapatos que havia na sala. Mostrei que, ao abrir a caixa de sapatos, ou seja, quando a desmontamos, encontramos diversas figuras planas, neste caso, diversos retângulos. A união desses retângulos formam a planificação da caixa. Ressaltei que podemos encontrar caixas/planificações com diferentes formas geométricas. A turma colaborou, citando exemplos, como o formato da caixa de pizza, composta por uma figura plana de 8 lados, além de diversas outras caixas que lembraram no momento. Após esta discussão, os alunos deram início a suas planificações.

Para fazer a planificação, o grupo que utilizou a sequência da multiplicação, contornou a figura do cubo e constatou que necessitava de um quadrado para deixar embaixo da figura e mais quatro quadrados iguais para contornar a figura, usando assim 5 quadrados para realizar a planificação, deixando o cubo aberto. Percebeu também que era preciso desenhar um quadrado para ser a base e, em cada aresta do quadrado da base, outro quadrado igual para os lados do cubo.

Durante a planificação, o grupo lembrou que já haviam construído figuras dessa forma, semelhantes aos “dados” e seguiram os mesmos critérios. Traçaram, recortaram, fizeram a dobradura e coloram o que faltava para colar a caixinha, ou seja, a planificação do cubo de aresta 3.

Concluída a planificação, os alunos foram instigados a comprovar que o total de cubinhos pertencentes ao cubo de aresta 3 caberia na planificação formada. No primeiro momento, o grupo concluiu que não seria possível colocar os 27 cubinhos na caixinha confeccionada. Foram então convidados a fazer a verificação colocando os cubinhos no sólido construído. Conforme os cubinhos se encaixavam, foram constatando que seria possível encaixar os 27 cubinhos na planificação construída. A Figura 3 mostra que as conjecturas elaboradas pelos alunos tiveram êxito.

Figura 3 – Comprovação de que o número de cubinhos coube na planificação

Fonte: Alunos do 5º ano.

O outro grupo, para realizar a planificação da Figura 3, colou a folha de desenho ao lado da figura construída, para verificar as medidas das laterais. Contornou com lápis a figura e recortou retângulo por retângulo, sendo necessários 4 retângulos. Para fazer a base, também usaram o mesmo critério: colocaram a folha de desenho pertinho da figura construída e marcaram as medidas, sem usar régua. Como o grupo recortou cada face lateral individualmente, tiveram dificuldades em unir as partes para formar a planificação. Assim, foi necessário pôr proteção de apoio na planificação, como se observa na Figura 4.

Figura 4 – Grupo de alunos do 5º ano fazendo a planificação do sólido construído

Fonte: Alunos do 5º ano.

Durante a socialização, verifiquei que os alunos foram capazes de inferir que os cubinhos representam o volume dos sólidos construídos, estabelecendo relações com a caixa d'água, o silo de ração, o litro de refrigerante, entre outros. Nesta tarefa, os grupos mostraram interesse e empenho, compartilhando as conclusões de cada integrante. O material manipulável foi importante na resolução das questões pelos grupos, bem como para chegar à generalização da resolução.

Na tarefa 3, observei que os dois grupos usaram diferentes estratégias para realizar a tarefa. Um grupo optou pela forma escrita, já o outro decidiu fazê-la em forma de desenho. O grupo, que utilizou como estratégia a escrita, dramatizou uma parte da tarefa. Um aluno escrevia, enquanto os outros dramatizavam (em forma de passos e usando direções como: direita, esquerda e siga em frente - até o portão da escola). O restante do trajeto foi descrito lembrando o percurso. A seguir, o procedimento do grupo para concluir a tarefa:

> Ao abrir a porta, dê 5 passos e vá para a direita. Dê 10 passos e, a seguir, vire à esquerda. Vá até o portão da saída dos micro-ônibus, assim que chegar, vire a esquerda. Siga reto, quando você chegar num certo ponto vai ter duas ruas uma para vai para esquerda e outra para a direita. Vá a esquerda até que você chega na prefeitura

(ALUNOS INTEGRANTES DO GRUPO DO 5º ANO).

Nas respostas dos alunos, em momento algum, aparecem nomes de ruas. A descrição escrita a partir da saída da escola ficou sucinta. Fica evidente a dificuldade dos alunos em indicar um caminho oralmente ou por escrito. Já o grupo que apresentou o percurso em forma de desenho, dialogando, trocando ideias entre os componentes do grupo. Na Figura 5, a imagem feita pelo grupo.

Figura 5 – Percurso desenhado pelo grupo

Fonte: Estudantes do grupo.

Observando a Figura 10, fica evidente que os estudantes buscaram, através do desenho, dar uma orientação, o que facilitou a conclusão da tarefa. O desenho demonstra que os alunos tinham noções fundamentais de referências, de localização, de orientação, de distância, para deslocar-se com autonomia e representar os lugares onde vivem. Percebi que o grupo desenhou com detalhes o trajeto percorrido, o que evidencia uma visão criteriosa do caminho a ser percorrido. Por meio do desenho, o grupo demonstrou ter capacidade de organização espacial.

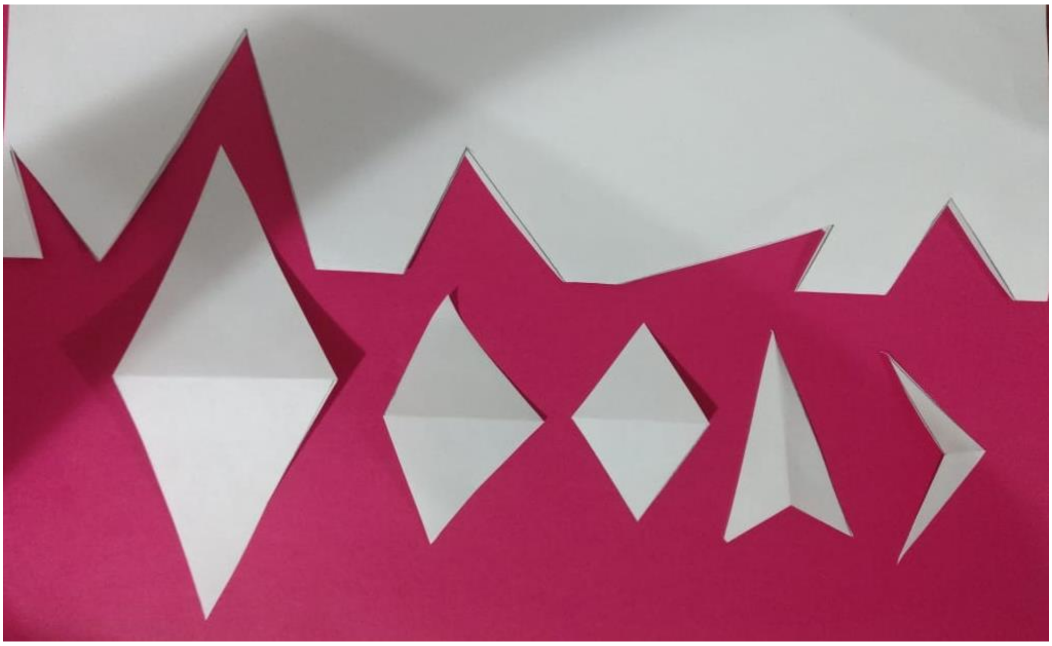
Após a socialização dos grupos, lançamos o desafio para duas professoras voluntárias da escola realizarem o percurso, mas sem saber o destino de chegada. Uma das professoras realizou o percurso seguindo o desenho e a outra professora baseou-se na escrita. Cada grupo acompanhou as professoras durante o percurso.

Na volta para a sala de aula, houve um pequeno debate com as professoras, que confirmaram ter chegado ao destino previsto. Ressaltaram que o percurso desenhado ficou bem-feito e que qualquer pessoa que fosse seguir as flechas chegaria ao destino, sem problema. Porém, chamaram atenção de que tanto no desenho como na escrita, faltaram detalhes como nome de ruas, número das casas, bem como destacaram a importância dos pontos de referências para a localização. Sugeriram que o percurso escrito poderia ter sido enriquecido com mais detalhes e informações. A partir desse diálogo, os alunos também perceberam a falta de informações relativas aos percursos e a importância de orientações precisas quando se trata de rotas de percursos.

Esta tarefa foi instigante e diferente para os alunos e serviu de estímulo para perceberem a necessidade de orientações, pontos de referências, distâncias, bem como a necessidade de dados mais precisos e mais detalhes para melhorar a descrição do percurso. Cabe ressaltar novamente a importância do trabalho em grupo, considerando que um aluno auxilia o outro. Acredito que quanto mais as tarefas forem desenvolvidas em contextos cooperativos, mais os discentes aprenderão a conviver.

A tarefa 4 foi realizada pelos sete alunos em conjunto. Primeiramente, distribuí tesouras e papel e solicitei que fizessem a leitura coletiva, apenas da letra “a” da tarefa 4. Dando início à tarefa, os alunos dobraram as folhas e utilizaram réguas para desenhar os triângulos com medidas de lados iguais e triângulos com medidas de lados diferentes; na sequência, recortaram as figuras. Os alunos desenharam os mais diversos tipos de triângulos: escalenos, equiláteros, isósceles, obtusângulos e acutângulos, porém, ninguém havia construído um triângulo retângulo. Na Figura 6, as construções realizadas pelos alunos.

Figura 6 – Estratégia utilizada pelos Alunos, ao tentar realizar a tarefa 4



Fonte: Alunos do 5º ano.

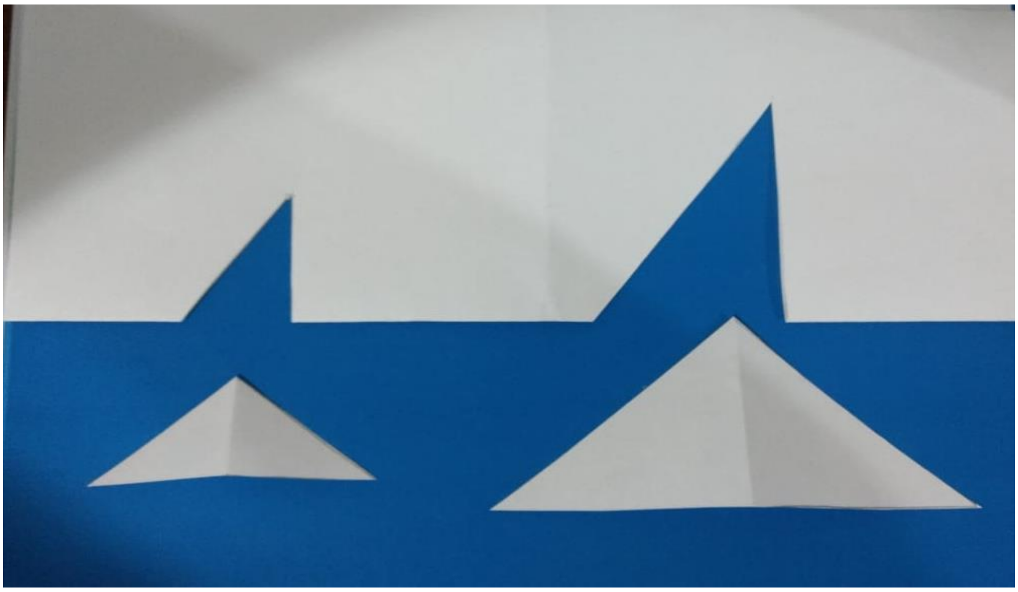
Quando questionei quais peças surgiram a partir dos recortes, responderam que haviam encontrado apenas peças com formato de quadrilátero. A partir das descobertas e das análises, ocorreu o seguinte diálogo com os alunos:

> Pesquisadora: "*Por que só foi possível encontrar figuras em formato de quadriláteros*?"
> Aluno N: "*Porque a folha está dobrada ao meio e quando fizemos dois cortes e depois abrimos a folha fica o dobro dos cortes dando um quadrilátero*".
> Pesquisadora: "*Mas seria possível encontrar outro formato*?"
> Aluno M: "*Recortamos de vários jeitos e só encontramos quadriláteros*".
> Pesquisadora: "*Vamos tentar realizar outros cortes, para ver se encontramos outros formatos*".
> Muitas tentativas, mas continuavam encontrando apenas formatos de quadriláteros.
> Pesquisadora: "*Alguém de vocês fez o desenho de um triângulo com um dos ângulos retos*?"
> Silêncio. (Alunos confusos, não entendendo o que é um triângulo com ângulo reto).
> Aluna D: "*O que é um ângulo reto*?"
> Aluno E: "*É quando duas retas se encontram e fica assim, oh. Como a goleira, tem dois ângulos retos nos cantos de cima. É por isso que quando alguém faz um gol no cantinho, se diz um gol no ângulo*".
>
> Pesquisadora: "*Isso mesmo, é dois segmentos que formam um ângulo de 90°. Um*

> *ângulo de 90° é chamado de ângulo reto*".
> Aluno D: "*Então um lado do triângulo tem que ficar bem retinho*?"

Com mais tentativas de recortes, alguns conseguiram encontrar peças com formato de triângulo. Com meu apoio e intervenção, compreenderam que um dos segmentos deveria formar um ângulo de 90° para obter uma outra forma geométrica, além de quadriláteros. Desta forma, os discentes realizaram a tarefa, trocando ideias com os colegas, discutindo suas conjecturas, traçando triângulos retângulos, como podemos visualizar na Figura 7, realizada por um dos estudantes da turma do 5° ano.

Figura 7 – Tarefa realizada pelos alunos do 5º ano



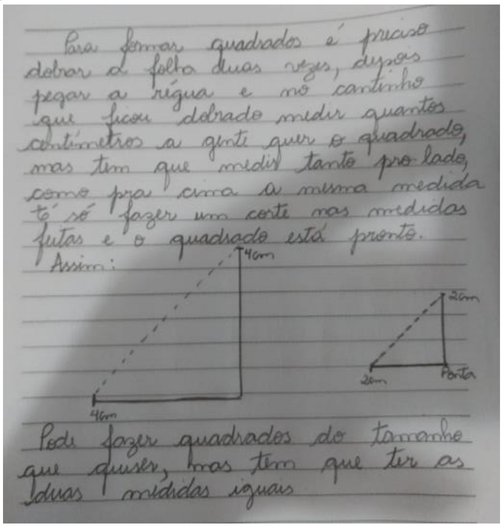
Fonte: Alunos do 5º ano.

Ao explorarem a segunda parte da tarefa, a letra "b", que consistia em usar dobras e recortes para formar peças quadradas, a turma fez muitas tentativas. Perceberam que serem necessárias duas dobras na folha, porém não conseguiam formar peças quadradas; apenas peças em formato de losango. Depois que já haviam realizado várias tentativas, relembrei com eles o conceito de quadrado e o conceito de losango.

Nessa fase, alguns alunos perceberam que, para construir uma peça em forma de quadrado eram necessários ângulos retos e medidas iguais para os segmentos. No diário de campo de alguns alunos do 5° ano, consta o relatório da solução encontrada para a construção de peças quadradas. Na Figura 8, os relatórios dos alunos.

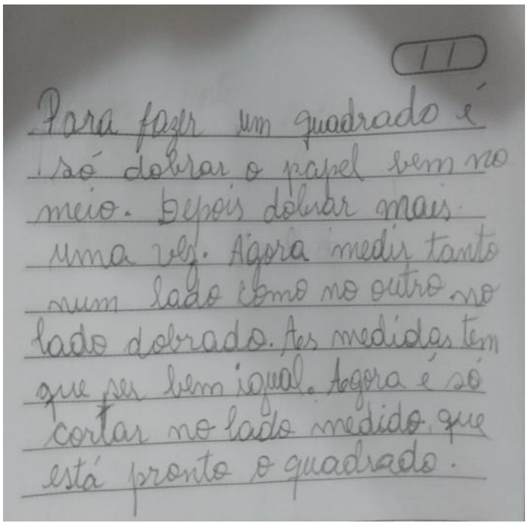
Figura 8 – Relatório dos alunos, encontrados no diário de campo

1º)


Para formar quadrados é preciso dobrar a folha duas vezes, depois pegar a régua e no cantinho que ficou dobrado medir quantos centímetros a gente quer o quadrado, mas tem que medir tanto pro lado, como pra cima a mesma medida e só fazer um corte nas medidas feitas e o quadrado está pronto.
Assim:

Pode fazer quadrados do tamanho que quiser, mas tem que ter as duas medidas iguais

2º)


Para fazer um quadrado é só dobrar o papel bem no meio. Depois dobrar mais uma vez. Agora medir tanto num lado como no outro no lado dobrado. As medidas tem que ser bem igual. Agora é só cortar no lado medido que está pronto o quadrado.

Fonte: Alunos do 5º ano.

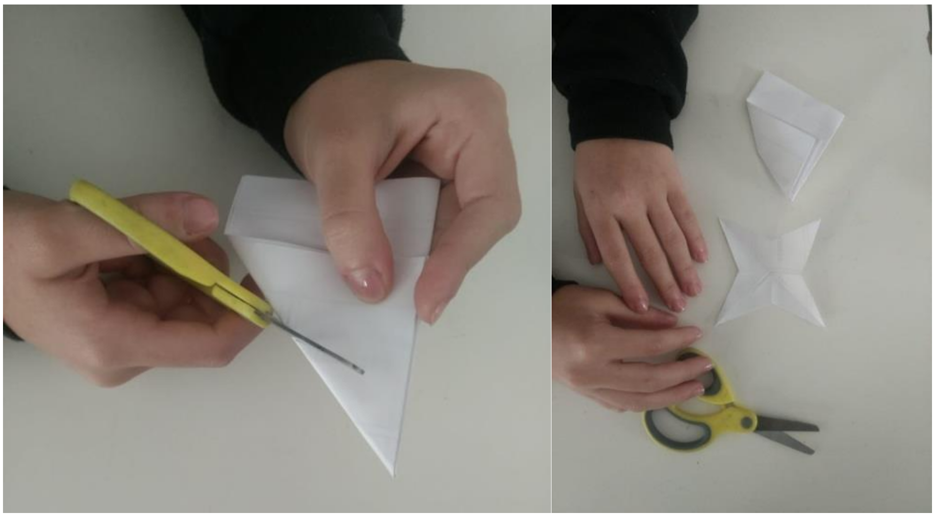
Alguns alunos necessitaram do meu auxílio e o dos colegas para concluir a tarefa, durante a qual notei a dificuldade deles em resolver situações que envolvem dobraduras e em desenhar e conceituar figuras geométricas. Também percebi que os alunos sentiram dificuldades para elaborar conjecturas, generalizar resultados e expressar matematicamente o raciocínio utilizado na resolução da tarefa.

Para finalizar a tarefa 4, instiguei os alunos, a encontrarem outros polígonos. Após vários testes, constatei que eles dobravam a folha sempre no mesmo sentido. Nesta fase, interpelei-os a tentarem diferentes formas de dobradura. Em seguida, um dos alunos me questionou a respeito da forma que encontrara. O diálogo ilustra a exploração da tarefa:

> Aluno N: "*Profe esse recorte é uma figura geométrica*? *Parece um círculo*".
> Pesquisadora: "*Vamos analisar - quantos lados possui esse formato*?"
> Aluno N: "*8 lados*".
> Nesse momento todos observam a construção feita pelo colega e ouvem com atenção o diálogo.
> Pesquisadora: "*Qual nome recebe uma figura geométrica com 8 lados*?"
> O aluno E ajuda o colega: "*Octógono*".
> Pesquisadora: "*Como você conseguiu construir esse formato de octógono*?"
> Aluno N: (mostrando a folha de papel) "*Primeiro dobrei assim, ao meio, depois mais uma vez ao meio e recortei uma vez aqui na ponta, então encontrei um quadrilátero, como antes. Então comecei de novo, dobrei ao meio, mais uma vez ao meio e uma vez em forma de triângulo e recortei encontrando essa figura*".
> Pesquisadora: "*E se você fizesse mais uma dobra*".
> Todos os estudantes fizeram o teste.
> Aluno M: "*Nossa*! *Olha só*! *Vamos ter 16 lados*".

Neste momento, construímos um quadro com as informações adquiridas, para uma melhor compreensão das descobertas dos estudantes. Ao dobrarem a folha duas vezes, encontraram uma peça em forma de quadrilátero. Ao dobrarem duas vezes a folha ao meio e mais uma vez em formato de triângulo (seriam 3 dobras), uma peça em formato de octógono, como é possível visualizar na Figura 9.

Figura 9 – Momento do recorte da dobradura formando a peça em forma de um octógono



Fonte: Aluno P.

Fazendo mais uma dobra na folha, isto é, dobrar a folha duas vezes e mais duas dobras em formato de triângulo totalizando 4 dobras, chegavam a 16 lados, ou seja, uma peça com formato de hexadecágono. No Quadro 12, as conclusões dos alunos.

Quadro 12 – Estratégias elaboradas para desenvolver a tarefa 4

Números de dobragens com um recorte	Número de lados da peça formada
2	4
3	8
4	16

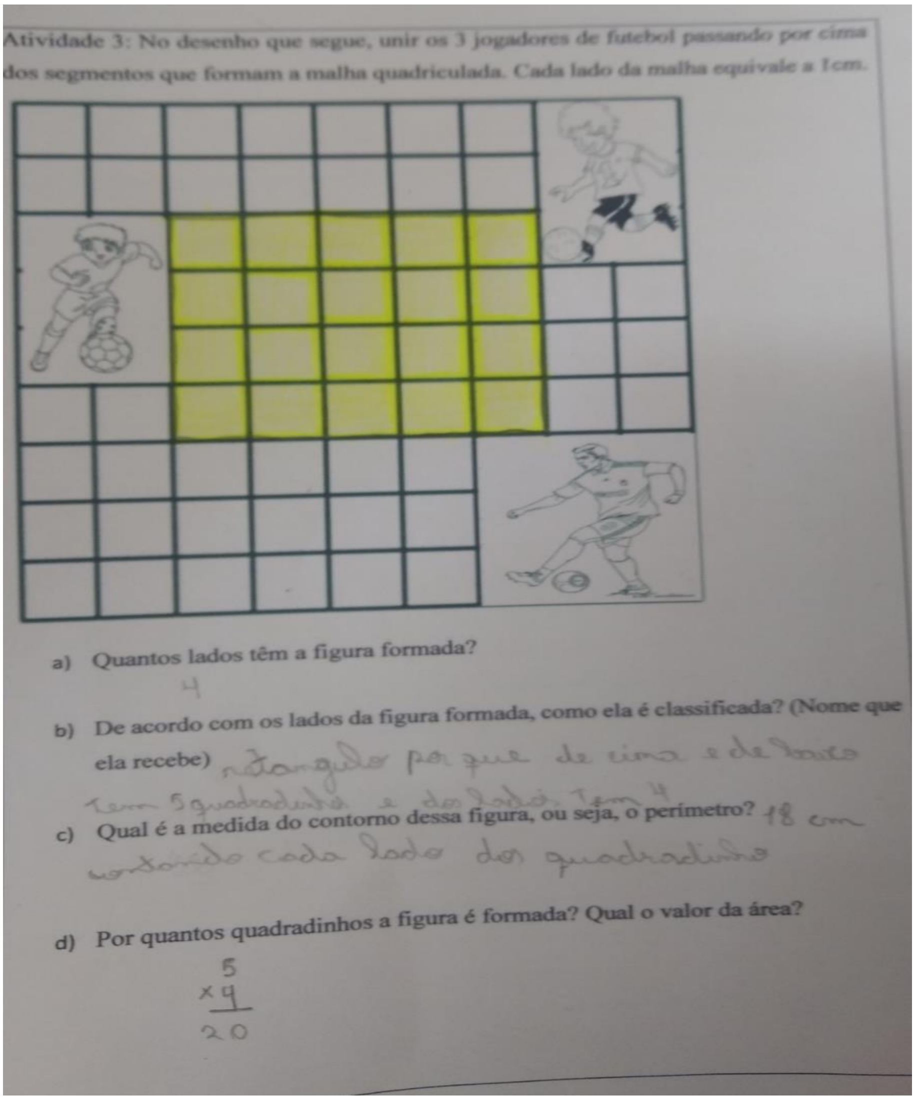
Fonte: Alunos do 5°ano.

Ao completar o Quadro 12, os discentes descobriram que, aumentando o número de dobragens, o número de lados das peças construídas da linha anterior dobrava. Assim, concluíram que não era necessário continuar os testes, pois, na próxima dobragem, encontrariam uma peça com 32 lados e assim, sucessivamente. Também constataram que, ao dobrar cinco vezes a dobragem, seria difícil realizar o recorte.

Concluída a tarefa 4, iniciei discussão sobre as descobertas dos alunos. Percebi que, apesar de sentirem dificuldades em trabalhar com dobraduras, estavam entusiasmados e envolvidos em aprender de forma diferenciada, pois entenderam que as peças tinham formato de diferentes polígonos cujas denominações têm a ver com a quantidade de lados. No decorrer desta tarefa, também foi discutido que um ângulo é a medida da abertura de duas semirretas que partem da mesma origem; que o ângulo reto é um ângulo de 90°. Destaco que os alunos se valeram das seguintes estratégias de resolução da tarefa: dobraduras, recortes, réguas e quadros (para melhor compreensão da conjectura). A cada encontro, percebia a evolução do trabalho em grupo. Um colega colaborava com o outro, apoiando, ajudando, formulando estratégias para melhor compreender a tarefa.

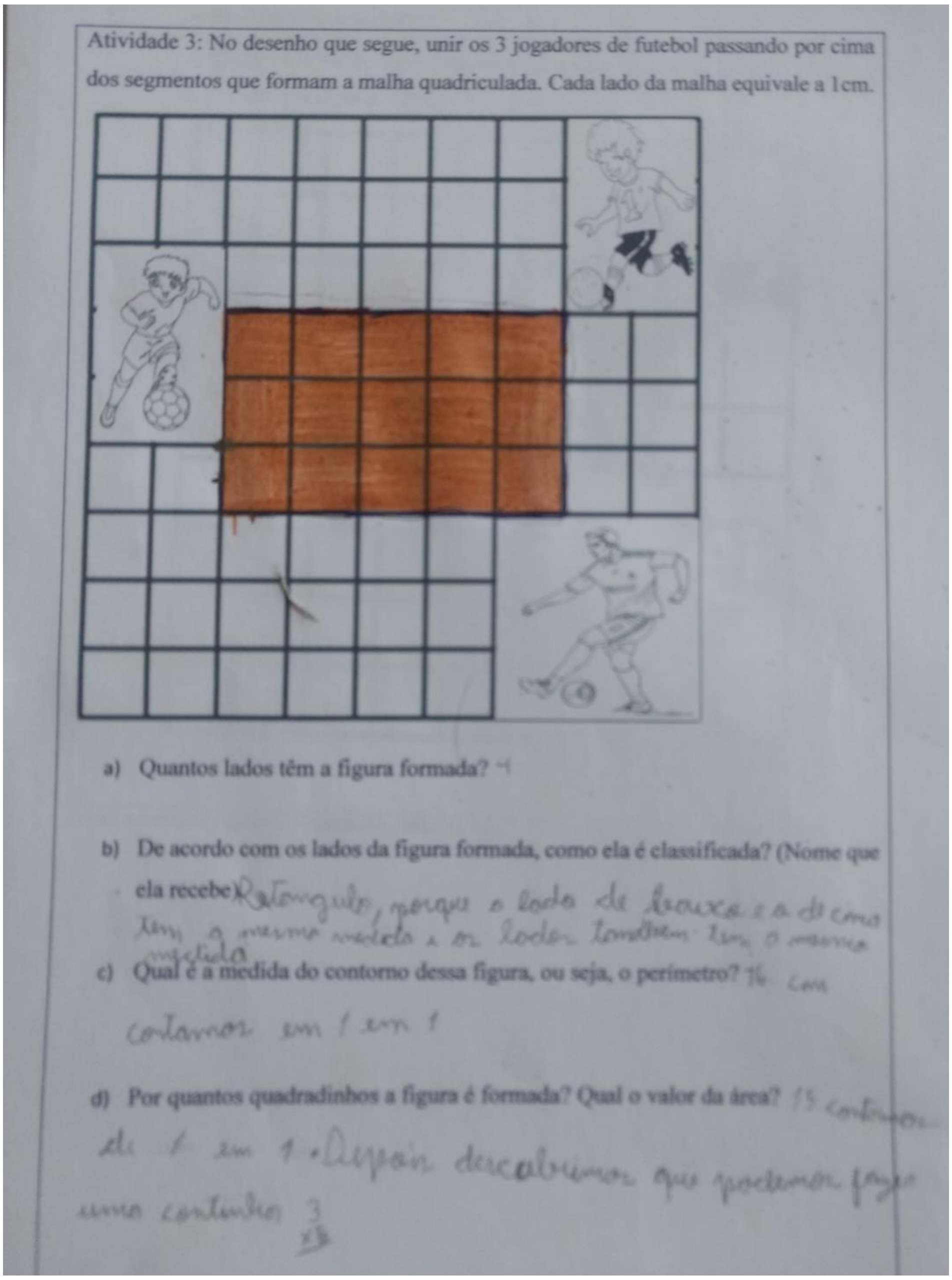
Para realizar a primeira parte da tarefa 5, observei que dois grupos construíram figuras a que estão habituados, principalmente, retângulos, sem apreensão com medidas de área e perímetro. Nas Figuras 10 e 11, as construções realizadas pelos dois grupos.

Figura 10 – Tarefa realizada pelos alunos do 5º ano



Fonte: Alunos do 5º ano.

Figura 11 – Tarefa realizada pelos alunos do 5º ano



Atividade 3: No desenho que segue, unir os 3 jogadores de futebol passando por cima dos segmentos que formam a malha quadriculada. Cada lado da malha equivale a 1cm.

a) Quantos lados têm a figura formada? 4

b) De acordo com os lados da figura formada, como ela é classificada? (Nome que ela recebe) Retangulo, porque o lado de baixo e o de cima tem a mesma medida e os lados tambem tem a mesma medida

c) Qual é a medida do contorno dessa figura, ou seja, o perímetro? 16 com contamos em 1 em 1

d) Por quantos quadradinhos a figura é formada? Qual o valor da área? 15 contamos de 1 em 1. Depois descobrimos que podemos fazer uma continha 3 x5

Fonte: Alunos do 5º ano.

Para realizar a tarefa, os alunos contaram de um em um, os quadradinhos no interior da figura, para descobrir a área, porém logo perceberam que, multiplicando o número de quadradinhos da base pela altura, encontrariam o valor da área. Para calcular o perímetro, os alunos também contavam de um em um, os quadradinhos do contorno da figura, conforme o exemplo da Figura 17, que aponta o perímetro igual a 12 unidades. Sugeri que imaginassem que teriam que andar ao redor da figura e que cada segmento de um quadradinho seria como se fosse um passo e indaguei o que aconteceria. Ao perceberem que contando dessa forma, o valor do perímetro seria diferente, questionei as demais formas de calcular o perímetro. A seguir, o diálogo com os estudantes do grupo V1, no decorrer da tarefa:

> Pesquisadora: "*Onde surgiu 12 unidades de medida para o perímetro*?"
> Aluno M: "*Contando ao redor do retângulo, assim: um, dois ,...., doze unidades*" (e assim o aluno foi apontado com o dedo os quadradinhos que contava).
> Pesquisadora: "*Vamos contar imaginando que cada segmento de um quadradinho, seja um passo. Quantos passos seriam suficientes para contornar essa figura*?"
> Alunos do Grupo V realizaram a contagem coletivamente: "*16 unidades*".
> Aluna M: "*Tem algo de errado, vou contar de novo* (realizou a contagem em voz alta individualmente), *pois é deu 16. O que aconteceu*?"
> Silêncio. As integrantes do grupo realizaram a contagem individual, de forma silenciosa.
> Aluna L: "*É que nos cantos, nós contamos só um quadradinho, e para caminhar ao redor é preciso contar dois risquinhos nos quadradinho dos cantos*".
> Aluna D: "*Verdade. São dois passos, um de um lado e o outro do outro*".
> Pesquisadora: "*Isso mesmo. Nos quadradinhos dos cantos da figura devemos contar dois segmentos. Sendo assim, o perímetro da figura igual a 16. Mas podemos realizar o cálculo do perímetro de outra forma sem contar de um a um*?"
> Outra vez silêncio e cálculos realizados individualmente de forma silenciosa.
> Aluno M: "*Sim. Podemos contar 3 quadradinhos no lado, mais 5 quadrinhos embaixo, mais 3 quadradinhos no outro lado e mais 5 quadradinhos em cima*".
> Pesquisadora: "*Então temos: 3 + 5 + 3 + 5 = 16 unidades*".

Analisando o diálogo, constatei que os alunos conseguiram compreender o conceito de perímetro de um retângulo e as formas de encontrar seu valor. Um dos grupos verificou que a soma dos lados do retângulo resulta no perímetro.

Ao realizar a segunda parte da tarefa, na qual tiveram que elaborar estratégias para descrever o caminho mais curto para realizar a tarefa proposta. Um grupo formou um retângulo, analisou os pontos para unir os jogadores e realizou os cálculos do perímetro, encontrando assim o perímetro menor, conforme solicitado. Durante a realização e a comprovação das estratégias para investigar a figura que teria o menor perímetro, os integrantes do grupo estavam entusiasmados e desinibidos. Foi notória a participação de todos, na resolução da atividade proposta. Já o outro grupo, para encontrar o menor perímetro unindo os jogadores, formou uma figura em formato de “L”. Este grupo elaborou várias estratégias para unir os jogadores. Após a construção de diversas figuras, os alunos calcularam o perímetro e confirmaram a figura tinha o menor perímetro, que era a com formato de “L”, cumprindo assim o objetivo da tarefa. Embora as figuras dos grupos fossem distintas, o perímetro de ambos era igual.

Após cada grupo desenvolver a tarefa e chegar às suas conclusões, foi realizada a socialização no grande grupo, para apresentar as conjecturas elaboradas. Ao analisarem a figura geométrica que representava o caminho menor, um aluno observou que os dois grupos encontraram o mesmo valor do perímetro, 14 unidades; porém, as figuras geométricas eram diferentes. Neste momento, questionei se as áreas das figuras também eram iguais. A seguir, o relato do diálogo que ocorreu no momento da socialização, entre a pesquisadora e os alunos do 5° ano.

> Aluno N: “*As figuras que desenhamos tem o mesma resposta, mas são diferente*”.
> Pesquisadora: “*O que são diferentes*?”
> Alunos N: “*As imagens*”.
> Pesquisadora: “*As figuras geométricas são diferentes*?”
> Aluno N: “*Sim, mas a resposta deu a mesma*”.
> Pesquisadora: “*Qual resposta deu igual*?”
> Aluno M: “*O perímetro*”.
> Pesquisadora: “*E o valor da área também é igual*?”
> Aluno E: “*Não. Na nossa figura tem 6 quadradinhos, na deles tem 10*”.
> Pesquisadora: “*Então, temos duas figuras geométricas diferentes, com os valores das áreas diferentes, mas os valores dos perímetros são iguais*”.
> Aluna D: “*De quem tá certo*?”
> Pesquisadora: “*Qual das figuras vocês acreditam que está correta*?”
> Aluno M: “*As duas, porque pedia o menor perímetro e as duas figuras deram 14 o contorno, então as duas estão certas*”.
> Aluno N: “*É que pedia o menor perímetro e não a área. Se era a área era o nosso porque deu 6*”.
> Pesquisadora: “*Tem outras formas geométricas que possam ser feitas para que o perímetro seja menor que 14 unidades*?”
> Silencio. “*Tentativas*”.
> Alunos: “*Não*”.
> Pesquisadora: “*O que vocês aprenderam com essa tarefa*?”
> Aluno N: “*Que as figuras podem ser diferentes, mas podem ter o mesmo perímetro*”.
> Aluno S: “*Também as áreas diferentes e os perímetros iguais*”.
> Aluno M: “*Que existem formas geométricas diferentes, o número de quadradinho,*

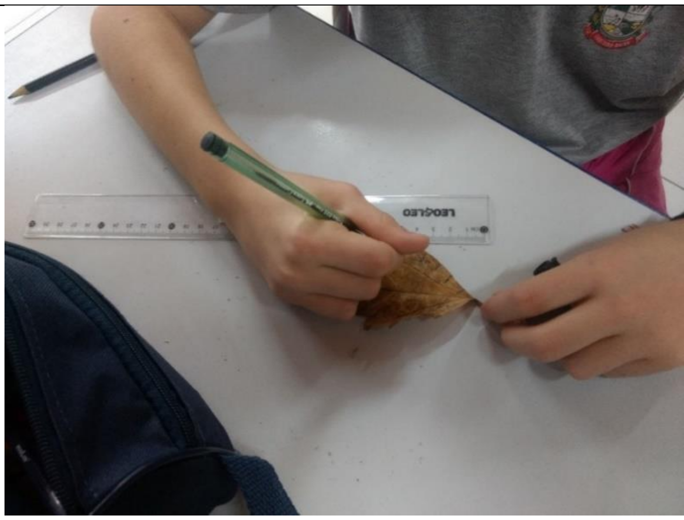
> *que é a área também pode ser diferente, mas o perímetro, que é ao redor pode dar o mesmo valor*".

No momento da socialização da tarefa, onde os grupos apresentam as conjecturas elaboradas aos colegas da turma, ficou perceptível o companheirismo dos colegas, pois um auxiliou o outro, como também analisam as estratégias dos demais grupos, verificando que, nas tarefas investigativas, pode haver mais que uma resposta para a resolução da tarefa.

Durante a socialização, constatei que os alunos compreenderam a diferença entre perímetro e área. O perímetro de uma figura é a soma de seus lados, o contorno. A área é o valor da superfície interna, neste caso, os quadradinhos. Ainda, os grupos salientaram que, ao multiplicar os lados de um quadrado ou de um retângulo, encontra-se o valor da área.

Na tarefa 6, para realizar o cálculo do perímetro, os estudantes formaram dois grupos. O primeiro usou a régua e marcou de centímetro em centímetro a folha recolhida no pátio. Com essa estratégia, encontraram um perímetro aproximado de 24 centímetros, como pode ser visualizado na Figura 12.

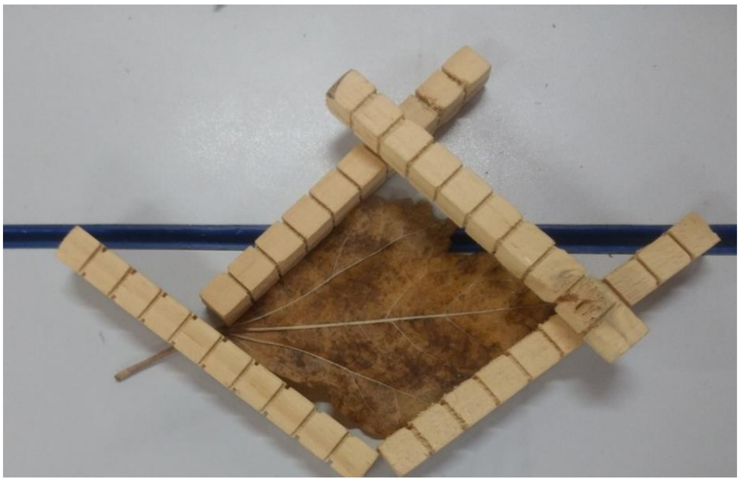
Figura 12 - Estratégia utilizada pelo grupo para encontrar o perímetro da tarefa 6



Fonte: Alunos do 5º ano.

Outra estratégia utilizada por este grupo para encontrar o perímetro foi com o auxílio das barras das dezenas do material dourado. Eles contornaram a folha recolhida, usando as barras das dezenas, como mostra a Figura 13.

Figura 13 – Outra estratégia do grupo para encontrar o perímetro da tarefa 6



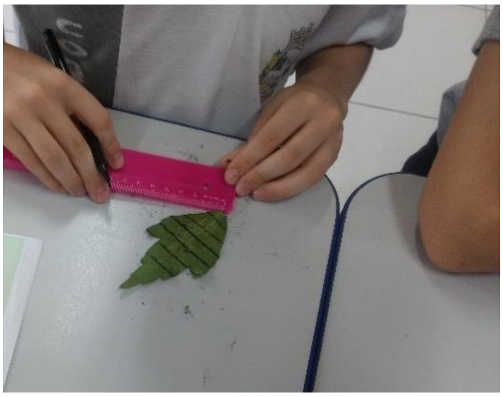
Fonte: Alunos do 5º ano.

Valendo-se desta estratégia, encontraram o perímetro aproximado de 26 centímetros.

Analisando as duas estratégias, o grupo observou que as medidas se aproximavam; logo, poderiam utilizar os dois métodos para descobrir o valor do perímetro.

Já o outro grupo utilizou como estratégia a marcação dos quadradinhos para o cálculo da área. Traçaram quadradinhos de um centímetro sobre a folha recolhida. Para contar os quadradinhos, primeiramente, contaram os inteiros, depois foram juntando os pedacinhos até formar aproximadamente um quadradinho inteiro. O valor da área obtida foi de 20 quadradinhos, ou seja, 20 cm². Em seguida, solicitaram os cubinhos do material dourado e os posicionaram sobre a folha para verificar se o resultado da quantidade de cubinhos para a área condizia com o número de quadradinhos colocados sobre a folha. Ao se certificarem de que o valor da área era aproximadamente o mesmo, tanto no traçado como na colocação dos quadradinhos, calcularam o valor do perímetro, contando os quadradinhos do contorno da folha recolhida. Na Figura 14, as estratégias utilizadas pelo outro grupo para encontrar a área.

Figura 14 – Estratégias utilizadas por um dos grupos, para encontrar o valor da área da folha colhida



(Conclusão)

(Continua...)

Fonte: Alunos do 5º ano.

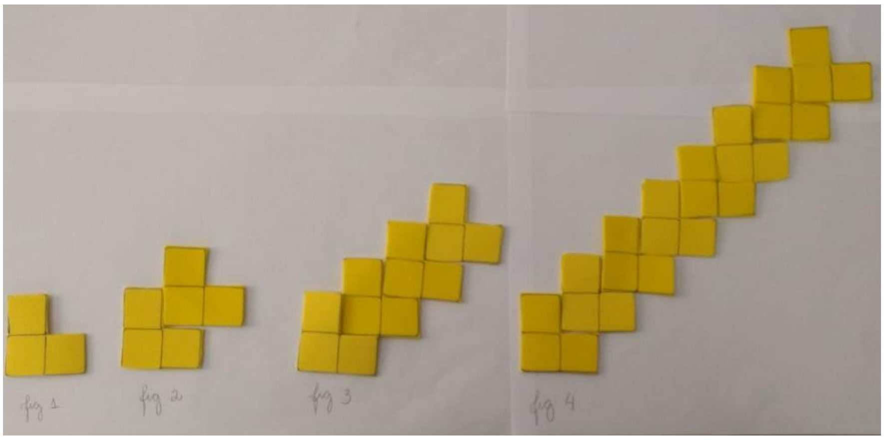
A seguir, apresenta-se o relatório feito pelos discentes de um dos grupos em relação a esta tarefa.

> Depois de buscar a folha no pátio, ficamos pensando como a gente ia fazer para calcular a área. Então o aluno N teve a ideia de traçar os quadradinhos em cima da folha. Deu certo, só que teve quadradinhos que não ficaram cheios, então fomos juntando os pedacinhos dos lados até que dava um quadradinho, mais ou menos. Juntando todos os quadradinhos, os inteiros e os quebrados deu 20. Depois nós colocamos os cubinhos do material dourado em cima da folha, e deu 20, bem certinho. O perímetro nós contamos os quadradinhos ao redor da folha, cada segmento dos quadradinhos e deu 22 (ALUNOS INTEGRANTES DO 5º ANO).

Durante a socialização desta tarefa de número 6, os grupos apresentaram as estratégias elaboradas para resolvê-la. Percebeu-se o envolvimento dos educandos, que demonstravam interesse e curiosidade. Também se constatou que compreenderam o conteúdo estudado, sabendo diferenciar área e perímetro.

Outras estratégias a serem apresentadas neste produto educacional são as elaboradas na tarefa 7. Assim que o material foi entregue aos grupos, os alunos começaram a manuseá-lo para pensar em estratégias de como formar as figuras. Na Figura 15, pode-se visualizar a estratégia utilizada por um dos grupos. Primeiramente, os estudantes colocaram as peças formando figuras, que, para eles, simbolizava uma “escada”.

Figura 15 - Estratégia encontrada



Fonte: Alunos do 5º ano.

Ao concluírem as figuras, solicitaram se era possível construir um quadro para melhor organizar os dados. Tendo uma resposta positiva, construíram o quadro e, ao finalizá-lo, chamaram para verificar se estava correto. Apresentam-se, no quadro 13, as respostas do grupo.

Quadro 13 – Organização dos resultados obtidos

Figura	Peças	Total de quadradinhos – área	Perímetro
1	1	3	8
2	2	6	12
3	4	12	20
4	8	24	36
5	16	48	68

Fonte: Grupo de alunos do 5º ano.

Enquanto analisava o quadro, ocorreu o seguinte diálogo com o grupo:

> Professora: "*Analisando o quadro vocês saberiam dizer qual o número de peças da figura 5*?"
> Aluno E: "*Teria 16*".
> Aluno L: "*Sim, 16 porque é o dobro*".
> Professora: "*Muito bem. E quantos quadradinhos*?"
> Aluno L: "*16 vezes 3, porque cada figura tem 3 quadradinhos*" (os alunos realizam os cálculos 16 vezes 3).

Aluno P: "*Deu 48, mas acho que tá errado, porque deu muito*".
Aluno E: "*Pra mim também deu 48*".
Professora: "*Está correto. Se vocês observarem a tabela, existe outra forma de obter esse valor*? *De saber quantos quadradinhos terá a figura 5*?"
Silêncio.
Aluno E: "*É o dobro*".
Pesquisadora: "*O dobro*? *O dobro de que*?"
Aluno E: (Mostrando na tabela com o dedo) "*Olha aqui: na primeira linha deu 3, na segunda deu 6, que é o dobro de 3, na terceira linha deu 12, que é o dobro de 6, na quarta linha deu 24, que é o dobro de 12, na quinta linha deu 48, que é o dobro de 24. Entendeu*?"
Professora: "*Ótima observação. Então podemos verificar a quantidade de quadradinhos calculando o dobro do valor anterior*?"
Aluno E: "*Isso*"
Professora: "*Vamos analisar o valor do perímetro. O que podemos concluir? Tem alguma regrinha que podemos seguir*?"
Silêncio.
Professora: "*Qual o valor do perímetro na primeira figura*?"
Grupo: "8"
Professora: "*E qual o valor do perímetro da segunda figura*?"
Grupo: "*12*"
Professora: "*Quanto aumentou o perímetro da figura 1 para a figura 2*?"
Aluno P: "*4*"
Professora: "*E da figura 2 para figura 3, quanto aumentou*?"
Aluno P: "*8*"
Professora: "*E da figura 3 para a figura 4*?"
Aluno E: "*16, tá aumentando o dobro*".
Professora: "*Como assim*?"
Aluno E: "*É o dobro. Na primeira linha aumentou 4 a mais, na segunda aumentou 8 a mais, na terceira linha aumentou 16 a mais, tá aumentando o dobro em cada linha.*
Professora: "*Parabéns Aluno E. Então podemos dizer que o perímetro é o valor da linha anterior adicionada ao dobro da diferença entre os dois últimos resultados encontrados*".
Aluno E: "*Isso*".
Professora: "*Então podemos encontrar o valor da figura 6 e 7, sem ter as peças*?"
Aluno E: "*Sim, na segunda coluna é só fazer o dobro, na terceira coluna também é só fazer vezes dois, o dobro e na outra coluna fazer 36 + 16*".

Neste diálogo, percebe-se que, ao resolverem com êxito a tarefa solicitada, os estudantes encontraram uma forma de descobrirem os valores das demais figuras, sem o auxílio do material concreto. Neste sentido, instigou-se os alunos a encontrarem os valores das próximas figuras. A resolução do grupo está na Figura 15.

Figura 15 – Tabela construída pelo grupo

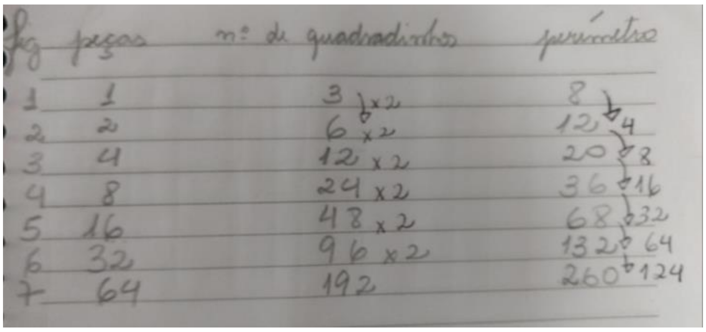
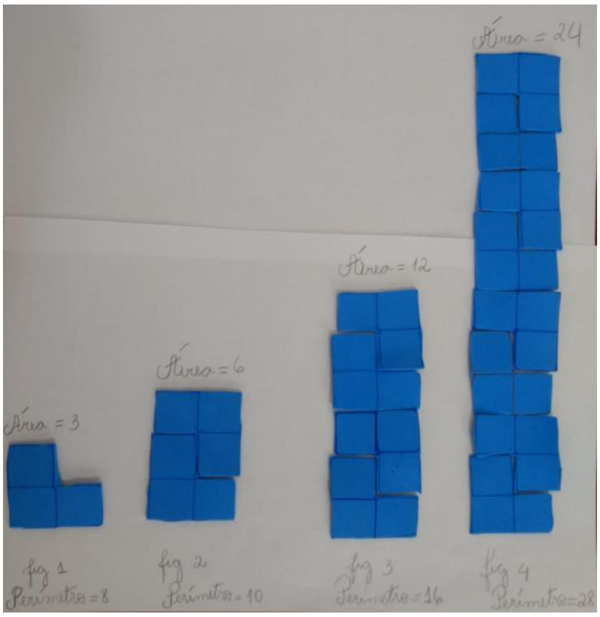


fig	peças	nº de quadradinhos	perímetro	
1	1	3 x2	8	
2	2	6 x2	12	4
3	4	12 x2	20	8
4	8	24 x2	36	16
5	16	48 x2	68	32
6	32	96 x2	132	64
7	64	192	260	124

Fonte: Alunos do 5º ano.

Já o outro grupo, ao receber o material concreto, usou como estratégia, a formação de figuras que simbolizavam "retângulos". Construíram as figuras e próximo a cada uma delas, realizaram os cálculos e deixaram registrados os valores obtidos para a área e para o perímetro de cada figura, como é possível visualizar na Figura 16.

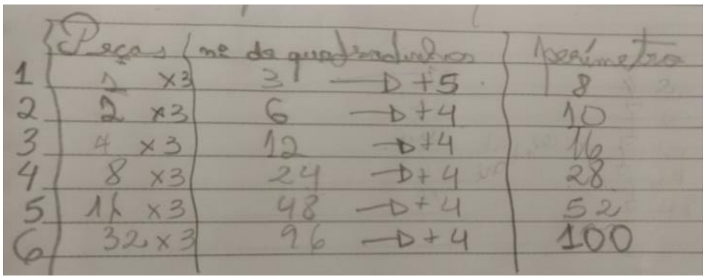
Figura 16 – Estratégia utilizada pelo grupo



Fonte: Grupo dos alunos do 5º ano.

Para encontrar o valor do perímetro, os alunos deste grupo contaram os segmentos do contorno das figuras criadas e, para encontrar o valor da área, contaram os quadradinhos. Este grupo também preferiu organizar os dados num quadro, porém foi preciso apoio para iniciar a organização. Ao registrarem os dados da área e do perímetro no quadro, o grupo percebeu que, a partir da segunda linha, era possível adicionar quatro unidades ao valor da área, para obter o perímetro. E, para o resultado da área, era possível multiplicar o número de peças por 3, pois cada peça tinha 3 quadradinhos. Nesse sentido, os estudantes deste grupo foram desafiados a encontrar o valor das próximas figuras sem o apoio do material concreto. Na Figura 17, o quadro com as respostas deste grupo.

Figura 17 – Quadro construído pelo grupo

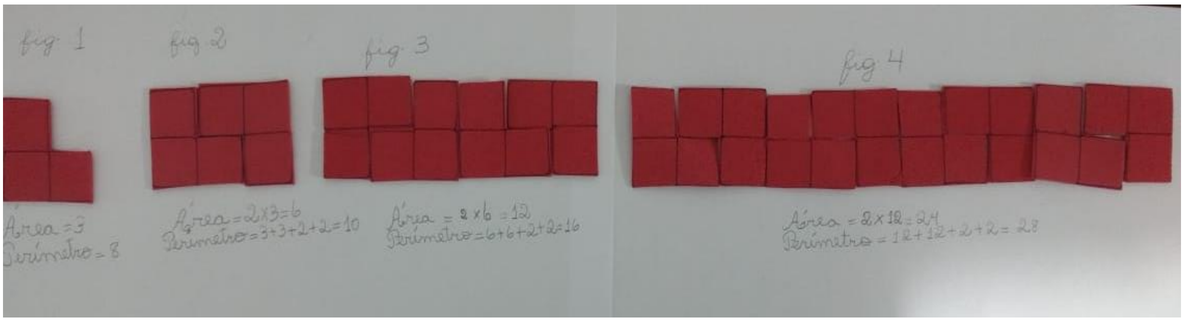


	Peças	nº de quadradinhos		perímetro
1	1 x3	3	→ +5	8
2	2 x3	6	→ +4	10
3	4 x3	12	→ +4	16
4	8 x3	24	→ +4	28
5	16 x3	48	→ +4	52
6	32 x3	96	→ +4	100

Fonte: Grupo de estudantes do 5º ano.

O terceiro grupo de alunos construiu as figuras representadas na Figura 18.

Figura 18 – Estratégia utilizada pelo grupo



Fonte: Grupo de alunos do 5º ano.

Observa-se que este grupo também construiu figuras em forma de retângulo, porém em posições diferentes das apresentadas pelo grupo anterior. Para realizar o cálculo da área das figuras construídas, multiplicaram um lado do retângulo pelo outro e, para encontrar o valor do perímetro, adicionaram os quatro lados do retângulo.

No momento da socialização, cada grupo apresentou suas estratégias no grande grupo. Ao analisarem os resultados, vários alunos observaram que, apesar das figuras construídas pelos grupos serem diferentes, o valor da área era igual para todos. Também constataram que as figuras de dois grupos eram em formato de retângulos, porém estavam em posições opostas. Assim, os valores do perímetro obtidos por esses grupos também eram iguais. Já o grupo que organizou as peças de forma diferente dos demais encontrou um valor diferente para o perímetro. Já em relação ao valor da área, concluíram que figuras diferentes podem ter áreas iguais.

No Quadro 14, de forma sintetizada, as conjecturas e estratégias usadas pelos estudantes na realização das 7 tarefas propostas, as dificuldades observadas no decorrer desta prática, bem como os avanços superados pelos estudantes.

Quadro 14 - Síntese das 7 tarefas realizas na prática pedagógica

Tarefa	Estratégias e ou conjecturas	Dificuldades	Avanços
1) Construção de um cubo com os cubinhos disponibilizados.	- Construção do cubo com o material dourado. - Pintura das faces externas dos cubinhos. - Elaboração de fórmulas por meio da multiplicação e da adição.	- Trabalhar em grupo. - Elaborar estratégias. - Demora em realizar as tarefas. - Determinar a quantidade de cubinhos necessária para construir um cubo. - Expor as estratégias encontradas.	
2) Sequência de sólidos geométricos.	- Construção de sólidos usando a ideia de adição e ou multiplicação para a sequência.	- Desenho da planificação. - Trabalho em grupo.	- Elaborar as conjecturas. - Testar as conjecturas e ter êxito. - Verificar que na metodologia de Investigação Matemática podemos ter mais de um resultado.

(Continua...)

(Conclusão)

Tarefa	Estratégias e ou conjecturas	Dificuldades	Avanços
3) Auxílio a uma pessoa para realizar um trajeto.	- Descrever por escrito o trajeto solicitado e dramatizá-lo. - Desenhar o trajeto solicitado.	- Escrever informações precisas, para realizar o percurso solicitado.	- Comprometimento, participação e socialização durante a realização da tarefa no trabalho em grupo.
4) Construção de peças em formato de polígonos a partir de dobraduras.	- Uso de dobraduras. - Uso de réguas para desenhar triângulos. - Recorte de dobraduras.	- Realização de tarefas com dobraduras. - Faltou a ideia de desenhar um triângulo com ângulo reto, para obter peças com outros formatos. - Elaborar conjecturas. - Expressar-se matematicamente.	- Conclusão de “fórmulas” simples. - Trabalho cooperativo.
5) Nomenclatura de polígonos e medidas de áreas e perímetros	- Desenho de figuras geométricas planas. - Contagem de quadradinhos para realizar o cálculo da área e de segmentos para realizar o cálculo do perímetro.	- Distinguir o conceito de áreas e perímetros.	- Evolução na socialização do trabalho grupo. - Elaboração de fórmulas para cálculo de áreas e perímetros. - Melhora em expressar-se matematicamente. - Percepção de que figuras com formato diferente podem ter valores diferentes para o perímetro, mas valores iguais para áreas.
6) Cálculos de áreas e perímetros de figuras planas irregulares	- Uso do material dourado para realizar o cálculo da área e do perímetro. - Uso da régua sobre a folha para desenhar os quadradinhos.		- Alunos ativos, mais participativos e confiantes em argumentar e justificar suas estratégias.
7) Construção de sequências e cálculo de perímetro e área	- Material em EVA para formar as figuras. - Construção de quadros para organizar dados.	- Organização dos dados num quadro.	- Percepção de que figuras com formato diferente podem ter valores diferentes para o perímetro, mas valores iguais para áreas. - Momentos de debates na socialização, analisando com precisão os diferentes resultados. - Troca de ideias nos grupos.

Fonte: Da autora (2020).

Em relação ao trabalho em grupo, destaca-se que, no início do desenvolvimento da proposta, houve dificuldades para conduzir o trabalho em grupo, pois, ao entregar as tarefas, cada um procurava resolver individualmente a questão, ou então ficavam esperando que alguém a fizesse e os demais depois copiavam. Diversas vezes, ao entregar as tarefas, foi necessário salientar a importância de ler e de discutir as questões em grupo e não individualmente. No decorrer, dos encontros, percebeu-se que o trabalho cooperativo evoluiu, assumindo sua importância, pois ficou bem evidente o auxílio entre os colegas, nos grupos de trabalho. Passaram a elaborar estratégias, conversavam, interagiam e colaboravam com todos os integrantes do grupo.

Pode-se inferir que o trabalho em grupo possibilitou aos alunos desenvolver e exercitar habilidades como decidir, debater e respeitar. Durante as atividades em grupo, os discentes foram expostos à construção coletiva do conhecimento, que possibilitou a troca de estratégias entre os colegas e o contato com percepções distintas. Além disso, os educandos desenvolveram a capacidade de ouvir e de respeitar opiniões diferentes, permitindo que, ao finalizar a tarefa em conjunto, alcançassem o objetivo proposto. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 30) acrescentam que "o trabalho em grupo potencializa o surgimento de várias alternativas para a exploração da tarefa".

Com as tarefas investigativas, os educandos tiveram a oportunidade de elaborar estratégias, estabelecer relações e tomar decisões, possibilitando o espírito investigativo. Consequentemente, passaram a usar estratégias diferenciadas e criativas, a trabalhar efetivamente em grupo. Percebeu-se que conseguiram entender o conteúdo incluso nas tarefas, pois as respostas estavam matematicamente corretas.

Referências

BRASIL, Secretaria de educação Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 2018.

MACEDO, J. C. **A modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem de Geometria no 8º ano do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, MS: UFGD, 2013.

PASSOS, C.M.B. **Representações, interpretações e prática pedagógica:** A Geometria na sala de aula. 2000. 398f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 2000.

PONTE, J. P. **Investigações matemáticas e investigações na prática profissional**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.