



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Proposta de uma prática pedagógica envolvendo investigação matemática e derivadas para alunos de Licenciatura em Matemática.

Proposed of a pedagogical practice involving mathematical investigation and derivatives for students of Licentiate in Mathematics

Carlos José Ferreira Soares¹, Marli Teresinha Quartieri²

¹Mestrando do Programa de Pós-Graduação do Ensino de Ciências Exatas – PPGECE – Universidade do Vale do Taquari – Univates – cjsoares@uea.edu.br

²Doutora em Educação - Universidade do Vale do Taquari - Univates - mtquartieri@univates.br

Finalidade: Este produto educacional apresenta atividades investigativas abordando o ensino de derivadas, em especial, os conceitos de taxa de variação, máximos e mínimos de funções; as quais podem ser desenvolvidas com alunos na disciplina de Cálculo I.

Contextualização

Quando se analisa os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, percebe-se que é um ato de construção e reconstrução contínua, que exige habilidade e criatividade do professor, no que diz respeito a capacidade de desenvolver atividades pedagógicas envolventes e criativas capazes de instigar os alunos a produzirem conhecimentos com autonomia. Executar



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

esta tarefa não é fácil, visto que, há alunos que apresentam dificuldades básicas dos fundamentos elementares de matemática, e o docente deve planejar sua prática pedagógica de acordo com a realidade de cada um. Na linha deste pensamento, este produto educacional apresenta o desenvolvimento de tarefas investigativas alicerçadas nos fundamentos da Investigação Matemática em sala de aula, abordada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2016). Esses autores enfatizam que trabalhar com investigação é explorar questões abertas que ampliam as possibilidades de várias respostas, visto que as tarefas investigativas não se limitam a respostas prontas. Além disso, a produção dos alunos pode surpreender o professor mediante a formulação de conjecturas e estratégias que ele não imaginava.

Contribuindo com este conceito, Magalhães e Varizo (2016) destacam que as tarefas investigativas devem possuir características dinâmicas, alicerçadas em fundamentos desafiadores, que provoquem os discentes de forma desafiadora a investigar com o objetivo de procurar relações matemáticas criativas. Tais relações acabam determinando expressões gerais definidas a partir de estratégias como simulações, desenhos, preenchimento de tabelas, as quais despertam nos alunos a habilidade de perceber as relações matemáticas determinantes a formulação de conjecturas.

Trabalhar com tarefas investigativas contagia a curiosidade dos alunos e favorece o compartilhamento de ideias, visto que, este tipo de trabalho tanto pode ser desenvolvido individualmente como em grupos. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p. 30), o trabalho em grupo favorece a aprendizagem dos alunos, visto que “[...] potencializa o surgimento de várias alternativas para a exploração da tarefa” e para esses autores, o professor “pode sempre programar-se o modo de começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela irá acabar” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2019, p. 25). Além disso, o professor deve acompanhar a atividade do início ao fim com bastante atenção, pois como mediador tem o papel de instigar



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

os alunos a investigar, formular conjecturas e estratégias, testar e validar as relações matemáticas discutidas durante todo o processo de desenvolvimento do trabalho.

Bertini e Passo (2008) corroboram com essa ideia destacando que em uma tarefa de cunho investigativo, o papel do professor é fundamental para garantir o rendimento da proposta. E, o ponto de partida é justamente a definição da atividade que deve ser mais aberta, e a partir disso os alunos entram em ação modelando situações alternativas para formular conjecturas e com isso favorecer a dinâmica da aprendizagem. Dessa forma, “A realização de atividades investigativas pode possibilitar o desenvolvimento do espírito investigativo do aluno e, conseqüentemente, de sua aprendizagem em relação à matemática” (SCHMITT, 2015, p. 90).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2019), definem que uma atividade de investigação geralmente deve ser desenvolvida em uma aula ou várias aulas a partir da observação de três fases:

- Introdução da tarefa
- Realização da investigação
- Discussão dos resultados

A primeira fase é o momento em que o professor apresenta para a turma, de forma oral ou escrita, a proposta investigativa. Na segunda fase, os alunos entram em ação investigando as tarefas propostas em pequenos grupos ou com toda a turma. A última fase, é o momento onde os resultados são discutidos, onde as ideias e as estratégias para produzir os resultados são apresentados aos colegas, isto é, são relatados como o trabalho foi desenvolvido (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2019).

Analisando as três fases citadas por esses autores, é relevante destacar uma atividade investigativa pautada no fundamento das ideias dessas três fases favorece organização do trabalho pedagógico do professor, pontuando seu papel nesse processo e definindo as ações que devem ser executadas pelos alunos. Mas, é importante enfatizar, que os alunos são os



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

verdadeiros investigadores que determinarão as estratégias que utilizarão para filtrar, debater, conjecturar, testar e validar relações matemáticas.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC também destaca a potencialidade do trabalho investigativo ao enfatizar que é fundamental “desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo” (BRASIL, 2018, p. 265). Isto significa que a Investigação Matemática é uma estratégia que pode ser utilizada para a aprendizagem na Educação Básica e no Ensino Superior. Partindo deste pressuposto, o presente produto educacional apresenta uma proposta que discute a ação do ensinar o conteúdo de derivadas na sala de aula de forma dinâmica e desafiadora.

O tema envolvendo derivadas geralmente é abordado nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral em cursos de graduação da área de Ciências Exatas como Matemática, Física, Química, Engenharia. Gonçalves (2012, p. 32) ao falar sobre conceito de derivada no contexto da disciplina de Cálculo, explica que “é considerado um dos conceitos fundamentais do Cálculo. Por isso mesmo, seu estudo está presente no currículo de diversos cursos superiores, dentro de disciplinas relacionadas ao Cálculo, por possuir aplicações em várias áreas do conhecimento”. A mesma autora, ainda afirma que “a derivada é um conceito que pode ser explorado a partir de diversos focos: derivada como um limite, como inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto dado, além de situações que envolvam taxa de variação e máximos e mínimos” (GONÇALVES, 2012, p. 32).

Flood e Wilson (2013) contribuem com esta discussão ao destacarem que o estudo desenvolvido por Newton e Leibniz originou o conceito de derivadas. Esta descoberta revolucionou a época e mudou os caminhos da matemática, visto que, proporcionou a investigação de várias áreas do conhecimento por meio de derivadas. Esta importância foi vivenciada em sala de aula, por uma turma do 2º período de Graduação de Licenciatura em Matemática, em uma prática pedagógica que envolveu cinco tarefas investigativas, as quais



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

estão descritas neste produto educacional. Destaca-se que, as atividades envolveram o conteúdo derivadas, em especial, a exploração de aplicações como taxa de variação, máximo e mínimo.

Objetivo

O objetivo desta proposta é socializar tarefas investigativas que podem ser desenvolvidas em cursos de graduação que oferecem a disciplina Cálculo I, envolvendo o ensino de derivadas.

Detalhamento

Este trabalho foi realizado em sete encontros, sendo que, no primeiro foi uma reunião com o pesquisador e os alunos de uma turma que cursavam o 2º período de Graduação de Licenciatura de Matemática na Universidade do Estado do Amazonas – UEA, localizada no município de Tefé – AM. Do segundo ao sexto encontro, foram desenvolvidas cinco tarefas investigativas, uma em cada encontro com a duração de 2 horas e 30 minutos. No sétimo e último encontro, foi aplicado um questionário (apêndice A) com seis questões para coletar as opiniões dos alunos acerca das experiências dos mesmos com a Investigação Matemática a partir da participação deles nas tarefas investigativas desenvolvidas neste trabalho.

Participaram das atividades 24 alunos, que formaram grupos de 4 a 6 pessoas. A partir desta organização, a atividade foi entregue por escrito aos grupos, onde os alunos iniciavam a próxima etapa investigando relações matemáticas existentes na atividade proposta, mediante a exploração das aplicações de derivadas como taxa de variação, máximos e mínimos de funções. Em seguida, a partir das relações encontradas, conjecturas eram formuladas mediante discussões envolvendo a validação ou refutação destas conjecturas. O processo do trabalho

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

investigativo era finalizado com as apresentações e discussões dos resultados obtidos de cada atividade explorada.

Durante a realização da primeira tarefa, os discentes apresentaram dificuldades porque ainda não tinham trabalhado com esta metodologia. Mas, durante todo o processo, o professor instigou os alunos, transmitiu confiança e os motivou a investigar relações matemáticas de acordo com a tarefa proposta. Desta forma, a investigação produziu a formulação de conjecturas que foram registradas nos cadernos de campo que cada grupo recebeu, e esses registros foram discutidos e os resultados apresentados no final de cada tarefa investigativa. A socialização foi o momento dedicado para os grupos apresentarem as conjecturas formuladas e as estratégias que utilizaram para encontrá-las. Além disso, é o momento em que as discussões são promovidas para a verificação da validação dos resultados produzidos por cada grupo. Salienta-se que para o desenvolvimento das tarefas investigativas envolvendo derivadas, aqui apresentadas, os alunos devem ter conhecimentos prévios dos fundamentos da matemática elementar, principalmente, dominar os conceitos sobre funções.

O quadro 1 destaca os encontros realizadas e suas respectivas tarefas desenvolvidas.

Quadro 1 – Encontros e tarefas desenvolvidas

ENCONTROS	TAREFAS DESENVOLVIDAS
Primeiro	Reunião com os alunos para apresentação da proposta
Segundo	Tarefa 01 – explorando aluguel de imóvel
Terceiro	Tarefa 02 – cercando um terreno
Quarto	Tarefa 03 – investigando soma, subtração e produto de números
Quinto	Tarefa 04 – construindo uma caixa
Sexto	Tarefa 05 – minimizando custo
Sétimo	Aplicação de um questionário para coletar as concepções dos alunos sobre a utilização da Investigação Matemática

Fonte: Do autor.



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

A seguir a descrição das cinco tarefas investigativas que foram exploradas na disciplina de Cálculo I em uma turma do 2º período do Curso de Licenciatura em Matemática.

Tarefa 01: explorando aluguel de imóvel

Antônio é um pequeno empresário que trabalha com aluguel de imóvel. Atualmente ele possui 20 casas para alugar, algumas pequenas com o preço do aluguel entre R\$ 200,00 e R\$ 500,00 e outras maiores no valor de R\$ 1000,00 à R\$ 3000,00.

Um médico alugou uma das casas maiores de Antônio com pagamento mensal de R\$ 3000,00. No contrato de aluguel tem uma cláusula que estabelece reajuste anual de R\$ 600,00.

- a) Investigue o que acontece com o valor do aluguel após t anos. Justifique suas conclusões.
- b) De acordo com suas conclusões do item **a**, qual a taxa de variação média do aluguel após t anos?
- c) Qual a taxa de variação do aluguel após t ano?
- d) Investigue o que acontecerá à porcentagem de variação após alguns anos. Justifique.
- e) Descreva as relações entre o item “**b**” e “**c**” de acordo com suas conclusões.

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2006)

Tarefa 02: cercando um terreno

Uma família que mora numa comunidade ribeirinha do interior do Amazonas, possui 1500 metros de cerca para cercar uma área retangular que está à margem do rio Solimões. Considere que a margem do rio é reta e não será cercado o lado ao longo do rio.

- a) Investigue situações possíveis da área do terreno, explorando os 1500 metros de cerca da família. Justifique suas conclusões.
- b) Verifique se existe um terreno com área máxima e justifique sua resposta.

Fonte: Do autor



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Tarefa 03: investigando soma, subtração e produto de números

Investigue os valores de números considerando cada item abaixo:

- a) Encontre dois números cuja a soma seja 25 e verifique se existe um produto máximo entre eles. Justifique suas respostas.
- b) Encontre dois números cuja a diferença seja 80 e verifique se existe produto mínimo entre eles. Justifique.
- c) Encontre dois números positivos cujo o produto seja 80 e verifique se existe soma mínima entre eles. Justifique.
- d) Encontre as dimensões de um retângulo com área de 100 m^2 e verifique se existe um perímetro mínimo. Justifique sua resposta.

Fonte: Adaptado de Stewart (2013).

Tarefa 04: construindo uma caixa

Uma pequena caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço quadrado de papelão, com 20 centímetros de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados.

- a) Explore várias situações do enunciado e descreva o que acontece com o volume.
- b) Se existe um volume máximo, encontre-o e justifique sua resposta.

Fonte: Adaptado de Stewart (2013)

Tarefa 05: minimizando custo

Uma empresa constrói caixa d'água de alvenaria retangulares com o comprimento de 4 metros e o volume de 9 metros cúbicos.

- a) Explore situações, investigando de acordo com o enunciado as dimensões que representam o volume do tanque. Justifique.
- b) Investigue as áreas das faces do tanque que satisfazem o enunciado e justifique sua resposta.
- c) Se existe dimensões que minimizam o custo para a fabricação dos tanques, encontre-as e justifique sua resposta.

Fonte: Do autor



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Resultados obtidos

Durante o desenvolvimento das tarefas propostas além de instigar os alunos, observou-se a participação dos discentes e as discussões contínuas. Além disso, foi enfatizado com os alunos a importância de anotações para registrar como foi pensado no decorrer de cada atividade.

Para a organização dos registros de anotações das respostas dos grupos, utilizou-se uma letra maiúscula mais um algarismo indicativo da atividade explorada, e para os alunos, nos registros das gravações utilizamos uma letra maiúscula indicando o grupo e dois algarismos, um representando o componente do grupo e o outro a atividade explorada respectivamente, como por exemplo:

Atividade 1: Grupo A1, Grupo B1, Grupo C1, ...

Atividade 1: Aluno A11, Aluno A21, ..., Aluno B11, Aluno B21, ...

A seguir serão apresentados alguns resultados de cada uma das cinco atividades produzidos pelos alunos:

No início, a maioria dos grupos estava com dificuldades para explorar os itens da questão apresentada. Alguns alunos começaram a fazer perguntas:

Aluno B41: Professor, não estou entendendo nada. Como vamos descobrir o que acontece com o valor do aluguel depois de um tempo?

Professor: Ninguém do grupo entendeu nada?

Aluno B11: Professor, eu acho que dá para simular algumas situações atribuindo valores para t indicando os anos.

Aluno B41: Ah, é verdade! Se pegarmos o valor que deve ser pago mais o reajuste anual, e verificarmos em um ano, dois anos, três anos, e assim por diante, dá pra descobrir o que acontece depois de um determinado tempo.

Professor: Então verifiquem para ver o que acontece.

Aluno B21: Colegas, lembram da disciplina de Matemática Elementar que tivemos no semestre passado?

Aluno B31: Sim, e daí?

Aluno B21: O valor do aluguel vai aumentado de acordo com a passar do tempo, de ano em ano.

Aluno B31: Hum, então de ano em ano vai aumentar R\$ 600,00. Mas o que isso tem haver com a disciplina Matemática Elementar?

Aluno B21: Nós estudamos função.

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Aluno B31: Certo! Então podemos simular situações e escrever uma função para representar esta situação.

Aluno B21: Isso mesmo!

Aluno B31: Beleza! Então vamos lá.

Depois das discussões, este grupo concluiu que a taxa de variação de um ano para o outro é sempre constante, e a partir da modelação de uma função representativa a situação explorada pode ser representada pela derivada da função. A figura 1 destaca o procedimento que o grupo B1 adotou.

Figura 1 – Resposta do grupo B1 da tarefa 1 do item a

a) $f(t) = 600t + 3.000$

$f(1) = 600 \cdot 1 + 3.000$
 $f(1) = 600 + 3.000$
 $f(1) = 3.600$

$f(2) = 600 \cdot 2 + 3.000$
 $f(2) = 1.200 + 3.000$
 $f(2) = 4.200$

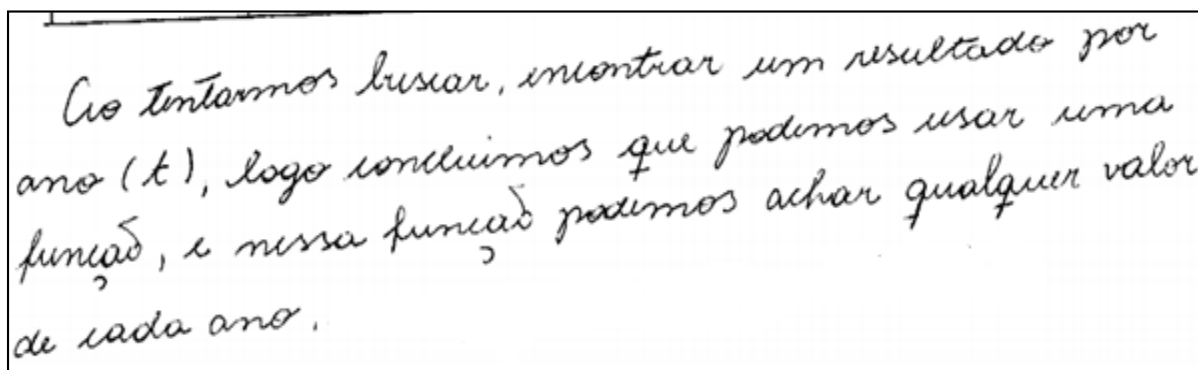
função		Resultado
$f(1)$	$f(t) = 600t + 3.000$	3.600
$f(2)$	$f(1) = 600 \cdot 1 + 3.000$	4.200
$f(3)$	$f(2) = 600 \cdot 2 + 3.000$	4.800
$f(4)$	$f(3) = 600 \cdot 3 + 3.000$	5.400
$f(5)$	$f(4) = 600 \cdot 4 + 3.000$	6.000
$f(50)$	$f(5) = 600 \cdot 5 + 3.000$	3.300
$f(100)$	$f(50) = 600 \cdot 50 + 3.000$	60.300
	$f(100) = 600 \cdot 100 + 3.000$	

Fonte: Grupo B1

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Mediante a discussão em relação ao item **a** da primeira atividade, eles concluírem que:

Figura 2 – Conclusão do grupo B1 do item **a** da primeira tarefa



Fonte: Grupo B1

No início da atividade houve preocupação com o tempo gasto pelos alunos para iniciarem a busca por estratégias de respostas, mas quando isso acontece, Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p. 30) esclarecem que:

A exposição inicial da situação é uma etapa na qual os alunos, muitas vezes, precisam de gastar algum tempo. Aos olhos do professor, porém, pode parecer que nada está acontecendo e que os alunos estão com dificuldades quanto a essa atividade. No entanto, essa etapa é decisiva para que depois os alunos comecem a formular questões e conjecturas. É nessa fase que vão se embrenhando na situação, familiarizando-se com os dados e apropriando-se mais plenamente do sentido da tarefa.

E realmente foi isso que aconteceu, com o passar do tempo, as discussões produzidas pelo grupo, proporcionaram a formulação de estratégias. Para Schmitt (2015), trabalhar em grupo proporciona a produção de conhecimentos porque é uma oportunidade para os alunos se ajudarem, isto é, trocarem ideias, aprender um com o outro. E, conforme o tempo vai passando e a discussão fluindo, a confiança vai aumentando entre os pares.

O grupo B1, após destacar as conclusões do item **a** percebeu que os itens **b** e **c** representavam a mesma resposta, isto é, a taxa de variação média após **t** anos é a mesma que a taxa de variação em relação ao mesmo tempo. A figura 3, mostra o procedimento adotado pelo grupo.

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Figura 3 – Resposta do item **b** da tarefa 1 do grupo B1

$$b) T_{x\text{vm}} = \frac{f(t_f) - f(t_i)}{t_f - t_i}$$

$$f(1) = 3.600, t = 1$$

$$f(2) = 4.200, t = 2$$

$$T_{x\text{vm}} = \frac{f(2) - f(1)}{t_f - t_i}$$

$$T_{x\text{vm}} = \frac{4.200 - 3.600}{2 - 1} = \frac{600}{1} = 600$$

$$f(10) = 9.000, t = 10$$

$$f(20) = 15.000, t = 20$$

$$T_{x\text{vm}} = \frac{15.000 - 9.000}{20 - 10} = \frac{6.000}{10} = 600$$

Fonte: Grupo B1

Mediante esta verificação o grupo concluiu que a taxa de variação média era sempre constante, independentemente do intervalo de tempo analisado. Em relação ao item **c**, o grupo B percebeu analisando o item **b**, que poderia ser resolvido por meio de derivadas. Desta forma, a figura 4 mostra como encontraram a taxa de variação.

Figura 4 – Resposta do grupo B1 do item **c** da tarefa

$$c) f(t) = 600t + 3.000$$

$$f(t + \Delta t) = 600 \cdot (t + \Delta t) + 3.000 = 600t + 600\Delta t + 3.000$$

$$f(t) = 600t + 3.000$$

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{600t + 600\Delta t + 3.000 - 600t - 3.000}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{600\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 600 = 600$$

Fonte: Grupo B1

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Desta forma, o grupo utilizando a ideia de limite, apresentou sua conclusão, conforme visualiza-se na Figura 5.

Figura 5 – Conclusão do grupo B1 em relação ao item c da tarefa 1

Se aplicarmos uma derivada na função $f(t)$ do item a, provamos que essa variável sempre vai ser o mesmo resultado, 600. Logo, concluímos que a taxa de variação sempre será de R\$600,00.

Fonte: Grupo B1

Em relação ao item d o grupo B1 utilizou uma estratégia válida, mas na resolução cometeram alguns erros, que não prejudicou a conclusão esperada. Na figura 6 as respostas deste grupo.

Figura 6 – Respostas do grupo B1 em relação ao item d da tarefa 1

$$d) \frac{f'(t)}{f(t)} \times 100$$

$$f(1) = 3600 \quad f'(1) = 600$$

$$\frac{600}{3600} \times 100 = 16,67$$

$$f(50) = 33000 \quad f'(50) = 600$$

$$\frac{600}{33000} \times 100 = 1,81$$

$$f(100) = 603000 \quad f'(100) = 600$$

$$\frac{600}{603000} \times 100 = 0,09$$

Fonte: Grupo B1

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Analisando as respostas dos alunos percebe-se que a estratégia para verificar o que acontece com a porcentagem de variação após t anos, é válida. Mas o grupo errou a resolução da primeira e terceira simulação da figura 6. Apesar do erro, a figura 7 demonstra que o Grupo B1 chegou na resposta esperada. Diante desta situação, instigou-se o grupo para que verificasse os resultados das multiplicações e divisões apresentadas. No momento da apresentação final, o grupo apresentou suas conclusões e destacou os erros de cálculo e enfatizaram que foi falta de atenção, mas corrigiram.

Figura 7 – Conclusão do grupo B1 em relação ao item d da tarefa 1

Quando procuramos a porcentagem após alguns anos dessa função de variação podemos dizer assim, logo ao encontrarmos esse resultado e após depois de muitos exemplos, concluímos que sempre a porcentagem tende a baixar, se aplicarmos um limite nessa função, concluímos que o limite tende a zero, quando o t (anos) tende ao $+\infty$.

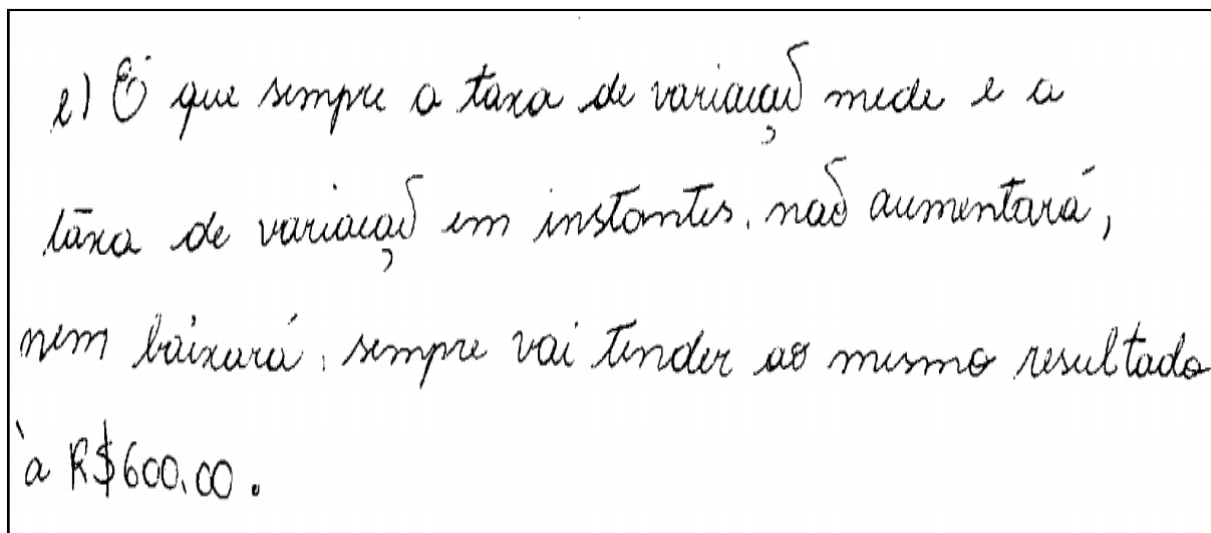
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} \times 100 = 0$$

Fonte: Grupo B1

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

A Figura 8 demonstra a conclusão do Grupo B1 em relação ao item **e**, destacando a relação do item **b** com o item **c**.

Figura 8 – Resposta do grupo B1 em relação ao item **a** da tarefa 1



Fonte: Grupo B1

Nesta figura, o grupo B1 enfatiza que tanto a taxa de variação média como a taxa de variação instantânea tendem para o mesmo valor que é R\$ 600,00. Para este grupo chegar as conclusões apresentadas, não foi de imediato, os alunos demoraram para expressar ideias de como resolver a atividade proposta. Mediante o diálogo que houve com o professor, já destacado anteriormente, começaram a formular conjecturas e discuti-las.

No início todos os alunos pareciam sem direção diante do desafio apresentado, falando sobre investigue, encontre, justifique. Mas, a partir das interações e participação do professor, as respostas fluíram, e os alunos começaram a compreender que “a realização de investigações matemáticas, pelo aluno, pode contribuir de modo significativo para a aprendizagem da matemática e para desenvolver o gosto por essa disciplina” (PONTE; BRACARDO; OLIVEIRA, 2019, p. 138).

Diante da segunda atividade investigativa, os alunos apresentaram mais autonomia e começaram a buscar situações, como enfatiza o diálogo dos componentes do grupo A2.

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Aluno A32: Eu acho que a gente pode desenhar retângulos e atribuir valores para os quatros lados e calcular a área pra ver o que acontece.

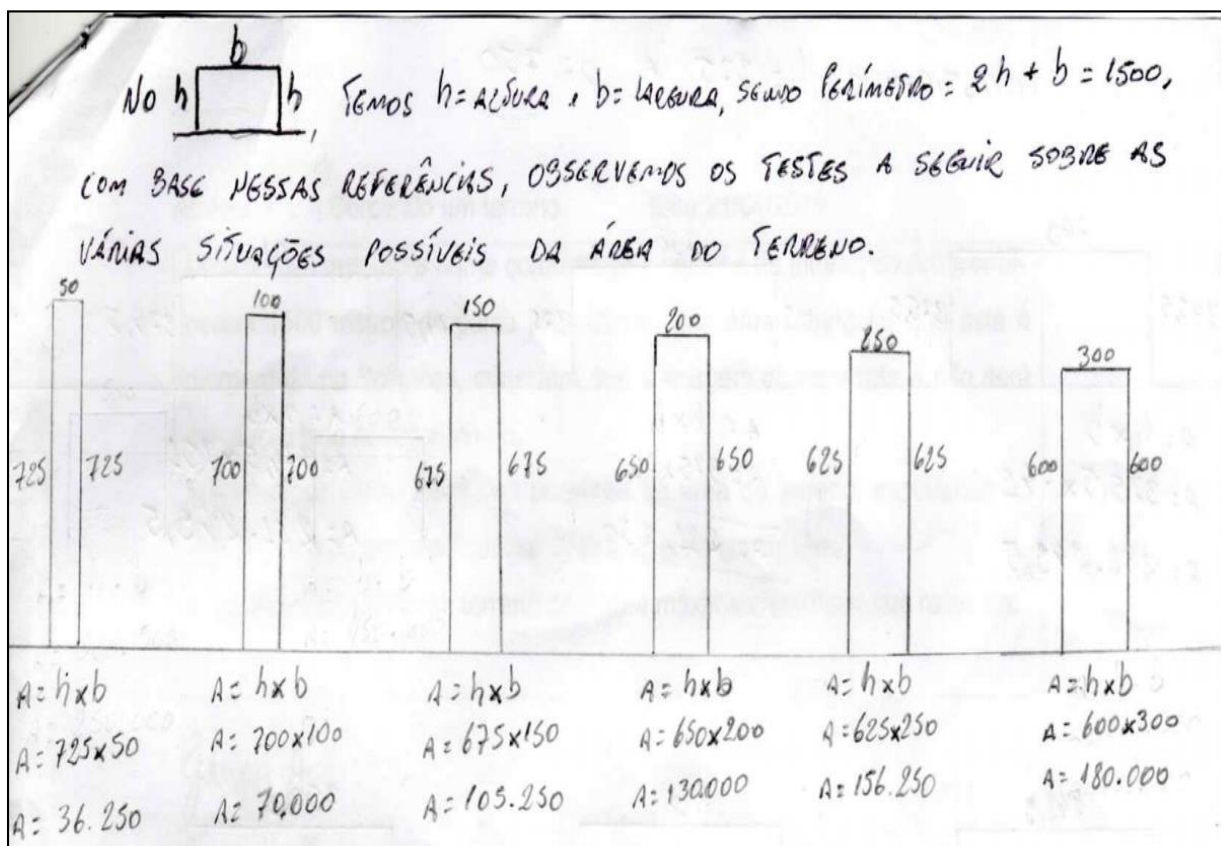
Aluno A12: Para os quatros lados? Acha que não, a questão diz que o lado ao longo do rio não vai ser cercada.

Aluno A32: Há, é verdade. Então vamos fazer desenhos e atribuir valores aos três lados do terreno que não é o lado da margem do rio.

Aluno A42: Beleza! Vamos lá.

Partindo deste diálogo, o grupo A2 realizou algumas simulações explorando os 1500 metros através de desenhos retangulares como destaca a figura 9.

Figura 9 – Primeira simulação do grupo A2

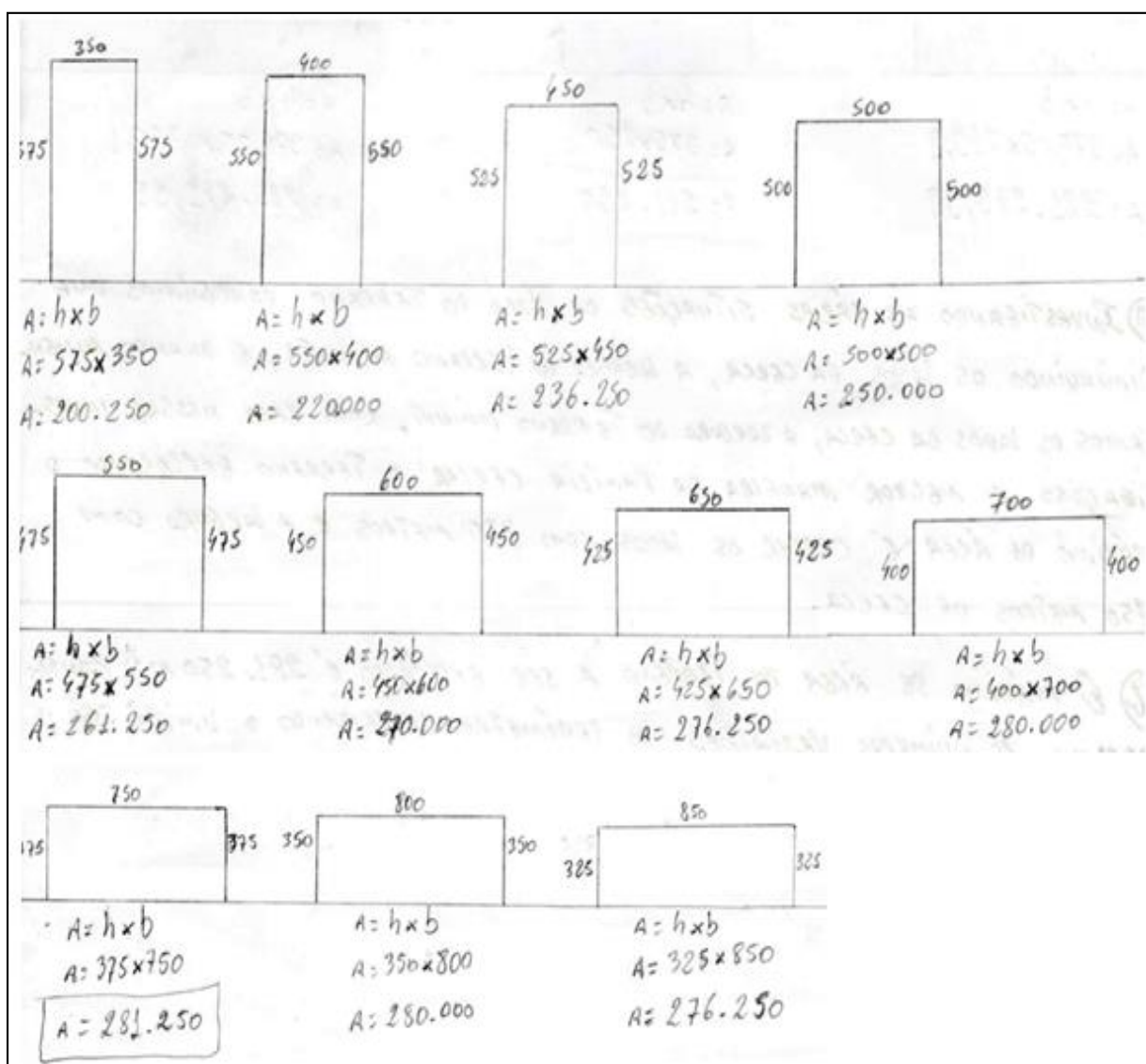


Fonte: Grupo A2

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Este grupo simulou situações em vários retângulos, considerando apenas três lados conforme o enunciado da atividade proposta e definiram como altura **h** a medida para os lados paralelos do retângulo e chamaram de largura **b**. A partir disso definiram que $2h + b = 1500$. A figura 9 mostra que estes alunos testaram diversos retângulos, os quais tinham diferença na medida da largura de 50 metros um do outro. Assim, conforme a largura ia aumentando a altura diminuía. A Figura 10 destaca a continuação dos testes do grupo.

Figura 10 – Continuação da simulação do grupo A2 em relação a tarefa 2



Fonte: Grupo A2

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Diante desses resultados, o grupo A2 enfatizou que é possível traçar um terreno retangular a partir dos 1500 m de cerca de modo que a família aproveite uma área máxima. A seguir, um diálogo do grupo.

Aluno A22: Olha, se a largura é maior do que 750 m a área do terreno começa a diminuir. Então se o terreno tiver as medidas 375 m de altura e 750 m de largura vai ter uma área máxima.

Aluno A42: Será? Só que nós temos que ver também o intervalo de 750 a 800.

Aluno A22: Como assim?

Aluno A42: Temos que testar as larguras de 751, 752 e assim por diante.

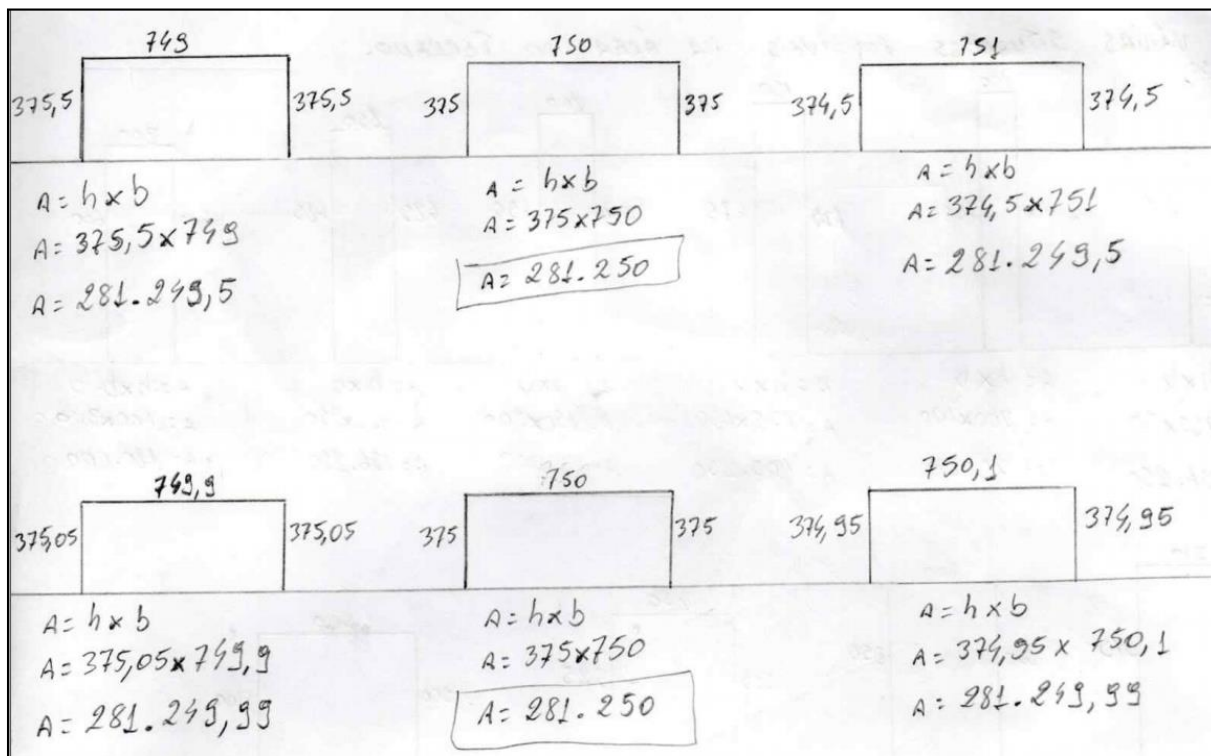
Aluno A32: Eu acho que devemos começar tentando 749,5 e depois 751.

Aluno A22: Certo.

Aluno A12: Vamos lá então.

Mediante esta reflexão, o grupo A2 decidiu testar as medidas da largura das regiões retangulares maior que 750m e menor que 850m. A figura 11 ilustra a estratégia utilizada pelos alunos.

Figura 11 – Investigando valores próximos de 750 metros



Fonte: Grupo A2

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

A Figura 12 ilustra a conclusão do grupo A2 depois das discussões e testes realizados.

Figura 12 – Conclusão do grupo A2

2) INVESTIGANDO AS VÁRIAS SITUAÇÕES DA ÁREA DO TERRENO, CONCLUÍMOS QUE DIMINUINDO OS LADOS DA CERCA, A LARGURA DO TERRENO AUMENTA, E QUANDO AUMENTAMOS OS LADOS DA CERCA, A LARGURA DO TERRENO DIMINUI. COM ESSE NESSAS INVESTIGAÇÕES A MELHOR MANEIRA DA FAMÍLIA CERCAR O TERRENO EXPLORANDO O MÁXIMO DE ÁREA É CERCAR OS LADOS COM 375 METROS E A LARGURA COM 750 METROS DE CERCA.

3) O MÁXIMO DE ÁREA DO TERRENO A SER EXPLORADO É 281.250 m^2 , CONSIDERANDO AS INÚMERAS VARIAÇÕES DO PERÍMETRO RESPEITANDO O LIMITE DE 1500 METROS, ESSE É O MÁXIMO DE ÁREA QUE A FAMÍLIA PODE EXPLORAR.

Fonte: Grupo A2

Refletindo sobre os resultados encontrados pelo grupo A2 em relação a segunda atividade, percebe-se que a partir da intervenção do professor o grupo foi ganhando confiança. Dessa forma, formularam conjecturas a partir de estratégias como construção de quadros, desenhos e expressões matemáticas.

A figura 13 ilustra um dos modos utilizados pelos alunos do grupo B3 para formalizar conclusões em relação ao item a da atividade 3.

Figura 13 – Respostas do grupo B3 em relação ao item a

Soma	Produto
$1 + 24 = 25$	$1 \cdot 24 = 24$
$2 + 23 = 25$	$2 \cdot 23 = 46$
$3 + 22 = 25$	$3 \cdot 22 = 66$
$4 + 21 = 25$	$4 \cdot 21 = 84$
$5 + 20 = 25$	$5 \cdot 20 = 100$
$6 + 19 = 25$	$6 \cdot 19 = 114$
$7 + 18 = 25$	$7 \cdot 18 = 126$
$8 + 17 = 25$	$8 \cdot 17 = 136$
$9 + 16 = 25$	$9 \cdot 16 = 144$
$10 + 15 = 25$	$10 \cdot 15 = 150$
$11 + 14 = 25$	$11 \cdot 14 = 154$
$12 + 13 = 25$	$12 \cdot 13 = 156$
$12,5 + 12,5 = 25$	$12,5 \cdot 12,5 = 156,25$

$$f(x) = x \cdot y$$

$$x + y = 25$$

$$y = 25 - x$$

$$= x \cdot (25 - x)$$

$$= -x^2 + 25x$$

$$f'(x) = -2x + 25$$

$$0 = -2x + 25$$

$$x = \frac{25}{2}$$

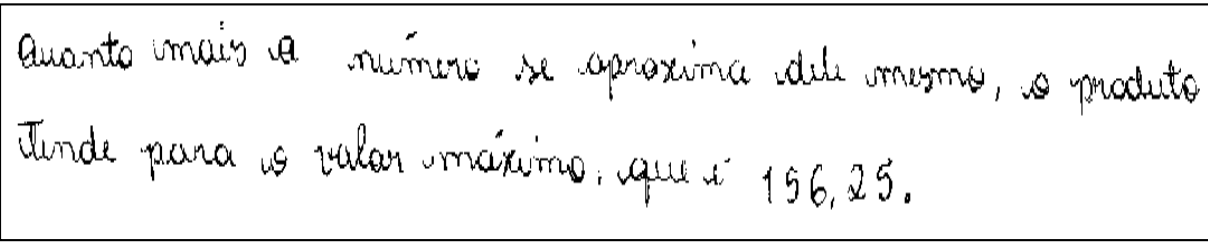
$$x = 12,5$$

Fonte: Grupo B3

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

De acordo com a simulação produzida pelo grupo B3 correspondente ao item **a** da atividade 3, percebe-se que a conclusão do grupo, conforme os valores dos números que correspondem a soma de 25 se aproximam, esses fatores tendem a um produto máximo. Desta forma, a figura 14 destaca a conclusão dos alunos desta equipe.

Figura 14 – Conclusão do grupo B3 do item **a**



Quanto mais o número se aproxima dele mesmo, o produto tende para o valor máximo, que é 156,25.

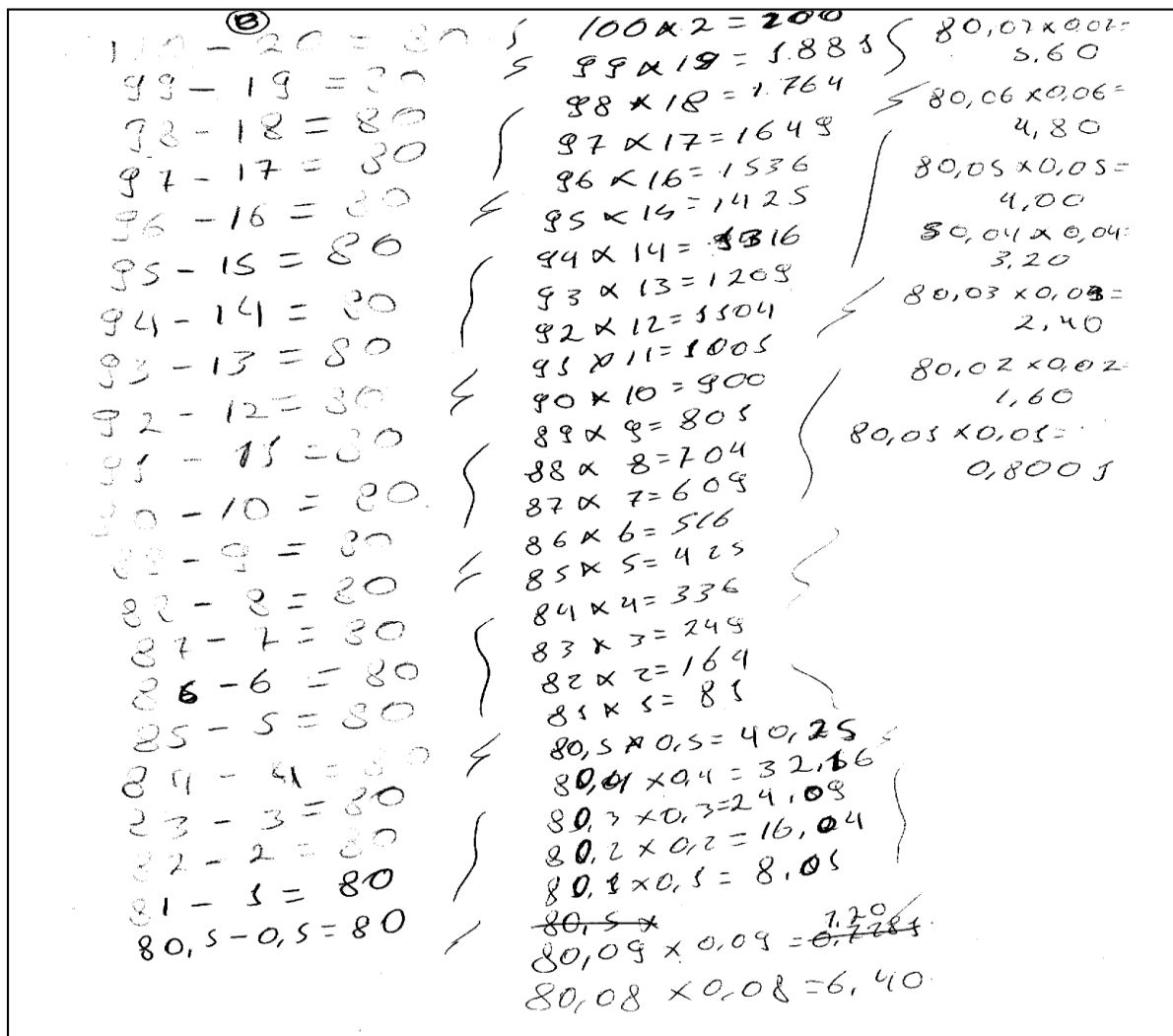
Fonte: Grupo B3

Analisando as respostas dos outros grupos em relação ao item **a** da tarefa 3, os grupos não apresentaram dificuldades para chegar a conclusão que existe um produto máximo, e todos utilizaram a estratégias de simular vários produtos a partir da variação de dois números cuja a soma seja sempre igual a 25.

Em relação ao item **b** da terceira tarefa, nenhum grupo conseguiu desenvolver uma resposta aproximada da esperada. Todos os grupos fizeram simulações mediante subtrações de dois números igual a 80 e depois encontraram os produtos desses números. Apenas o grupo B3 conseguiu explorar a ideia de derivadas para analisar o comportamento dos produtos dos fatores relacionados com a subtração de acordo com o enunciado da questão. Por exemplo, a figura 15 destaca o que o grupo D3 construiu.

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Figura 15 – Construção do grupo D3 em relação ao item b da terceira tarefa



Fonte: Grupo D3

Mediante as simulações destacadas por esse grupo na figura 15, percebe-se que chegaram a conclusão que o produto mínimo existe e tende a zero. Um dos motivos para tal conclusão foi que este grupo considerou apenas valores positivos, e partir disso a interpretação dos alunos ficou limitada e então o resultado não foi o esperado.

Os grupos B3, C3 e E3 também chegaram a mesma conclusão do grupo D3. Para os alunos da equipe A3, o produto mínimo não tende a zero, mas tende a 81. A resposta do grupo A3 também não condiz com a esperada. A figura 16 ilustra a conclusão deste grupo.

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Figura 16 – Resposta do grupo A3 em relação ao item **b** da terceira tarefa

b, Concentre dois números, cuja a diferença seja 80 e verifique se existe, produto mínimo entre eles. Justifique.

Diferença	Produto
$81 - 1 = 80$	$81 \cdot 1 = 81$
$81,5 - 1,5 = 80$	$81,5 \cdot 1,5 = 122,25$
$82 - 2 = 80$	$82 \cdot 2 = 164$
$83 - 3 = 80$	$83 \cdot 3 = 249$
$84 - 4 = 80$	$84 \cdot 4 = 336$
$85 - 5 = 80$	$85 \cdot 5 = 425$
$86 - 6 = 80$	$86 \cdot 6 = 516$
$87 - 7 = 80$	$87 \cdot 7 = 609$
$88 - 8 = 80$	$88 \cdot 8 = 704$
$89 - 9 = 80$	$89 \cdot 9 = 801$
$81,1 - 1,1 = 80$	$81,1 \cdot 1,1 = 89,21$
$81,2 - 1,2 = 80$	$81,2 \cdot 1,2 = 97,44$
$81,3 - 1,3 = 80$	$81,3 \cdot 1,3 = 105,69$
$81,4 - 1,4 = 80$	$81,4 \cdot 1,4 = 113,96$
$81,5 - 1,5 = 80$	$81,5 \cdot 1,5 = 122,25$
$81,6 - 1,6 = 80$	$81,6 \cdot 1,6 = 130,56$
$81,7 - 1,7 = 80$	$81,7 \cdot 1,7 = 138,89$
$81,8 - 1,8 = 80$	$81,8 \cdot 1,8 = 147,24$
$81,9 - 1,9 = 80$	$81,9 \cdot 1,9 = 155,61$

• Os dois números cuja diferença é 80 e que possuem um produto mínimo são:

$81 - 1 = 80$	$81 \cdot 1 = 81$
$81,1 - 1,1 = 80$	$81,1 \cdot 1,1 = 89,21$

• Para saber mais: que a diferença dos outros números tratados, sejam igual a 80, o produto deles aumentará.

Fonte: Grupo A3

Observa-se na produção do grupo A3, destacada na figura 16, que por falta de concentração, o produto de 81 por 1 é igual a 81 e no quadro no final da figura o produto desses fatores é igual a 80. A partir deste contexto, o professor pesquisador instigou alguns grupos



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

para refletirem sobre a possibilidade de ampliação da exploração desse contexto. Alguns momentos dessa ação são destacados a seguir:

Professor: Será que não existe outras possibilidades além dessas que vocês exploraram?

Aluno A23: Como assim professor, não entendi?

Professor: Observando as conclusões de vocês, nota-se que utilizaram bastante números na casa de oitenta, por exemplo, 81; 82, 87, 80.05, 81.01 e assim por diante.

Professor: Será que o produto mínimo tende a zero? Será que não existe outros produtos menores que zero dentro do contexto explorado?

Aluno B33: Professor, pensando na sua pergunta, acho que tem outras possibilidades, por exemplo, se pegarmos um número positivo e multiplicarmos por um negativo, o produto será menor que zero.

Professor: Exemplifica essa tua ideia.

Aluno B33: Ok professor. Veja só, $20 - (-60)$, o resultado é 80 e o produto é -1200, que é menor que zero. Então realmente a conclusão que destacamos como o produto mínimo tendendo para zero foi errada.

Aluno D43: Professor, observando a discussão e colocação do colega, cheguei à conclusão que o produto mínimo é -1600.

Professor: Como assim? Você pode explicar melhor como chegou nessa conclusão?

Aluno D43: Sim professor! Se multiplicarmos um número positivo por um negativo que a diferença entre eles seja oitenta, esse produto é mínimo quando esses fatores são opostos, por exemplo, 40 multiplicado por -40.

Desta forma, os alunos foram instigados a pensar em outras possibilidades e buscar padrões com situações anteriores.

Professor: Analisando as conclusões, e comparando com o que já formularam em questões anteriores, será que é possível modelar esta situação?

Aluno C13: Professor, analisando nossas respostas e a letra **a** desta questão chegamos à conclusão de explorar derivadas, e fizemos.

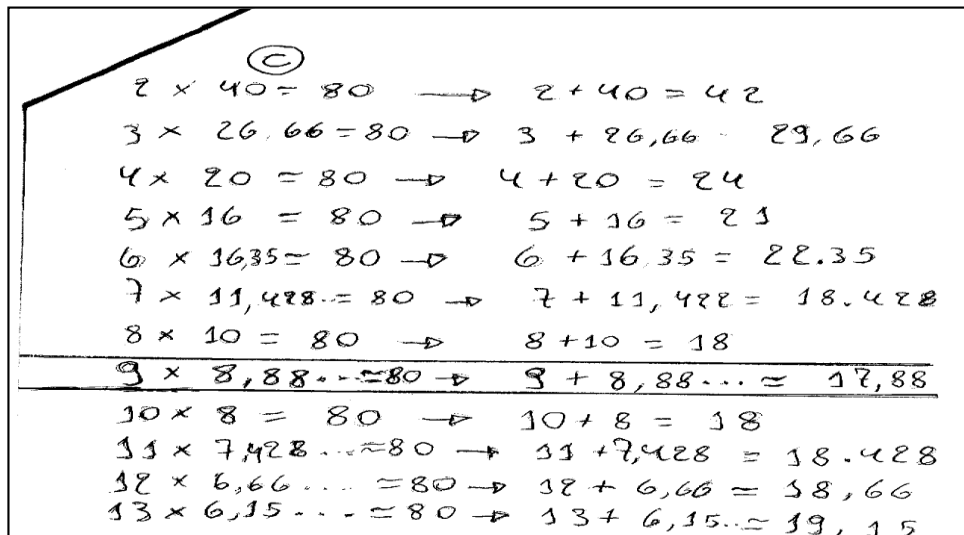
Professor: Compartilhe a estratégia que utilizaram.

Aluno C13: Utilizamos $x - y = 80$ e o produto $x \cdot y$, isolamos o y na diferença e substituímos no produto e chegamos a função $f(x) = x^2 - 80x$, como a questão fala de mínimo, usamos a derivada da função ($f'(x) = 2x - 80$) igualando a zero chegamos em $x = 40$ e daí que para a diferença ser igual a 80 o $y = -40$. Por isso que existe o produto mínimo e é igual a -1600.

O item **c** da terceira tarefa investigativa, enfatiza sobre o produto de dois números positivos que o produto é 80, e instiga os alunos sobre a existência de uma soma mínima. Para a realização desta tarefa, os grupos apresentaram dificuldades porque os números que se aproximavam do contexto solicitado no enunciado se apresentava como um número irracional e não como um inteiro.

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Figura 17 – Resposta do grupo D3 em relação ao item c da tarefa 3



©

$$\begin{array}{l}
 2 \times 40 = 80 \rightarrow 2 + 40 = 42 \\
 3 \times 26,66 = 80 \rightarrow 3 + 26,66 = 29,66 \\
 4 \times 20 = 80 \rightarrow 4 + 20 = 24 \\
 5 \times 16 = 80 \rightarrow 5 + 16 = 21 \\
 6 \times 13,35 = 80 \rightarrow 6 + 13,35 = 19,35 \\
 7 \times 11,428 = 80 \rightarrow 7 + 11,428 = 18,428 \\
 8 \times 10 = 80 \rightarrow 8 + 10 = 18 \\
 \hline
 9 \times 8,88... = 80 \rightarrow 9 + 8,88... = 17,88 \\
 10 \times 8 = 80 \rightarrow 10 + 8 = 18 \\
 11 \times 7,428... = 80 \rightarrow 11 + 7,428 = 18,428 \\
 12 \times 6,66... = 80 \rightarrow 12 + 6,66 = 18,66 \\
 13 \times 6,15... = 80 \rightarrow 13 + 6,15 = 19,15
 \end{array}$$

Fonte: Grupo D3

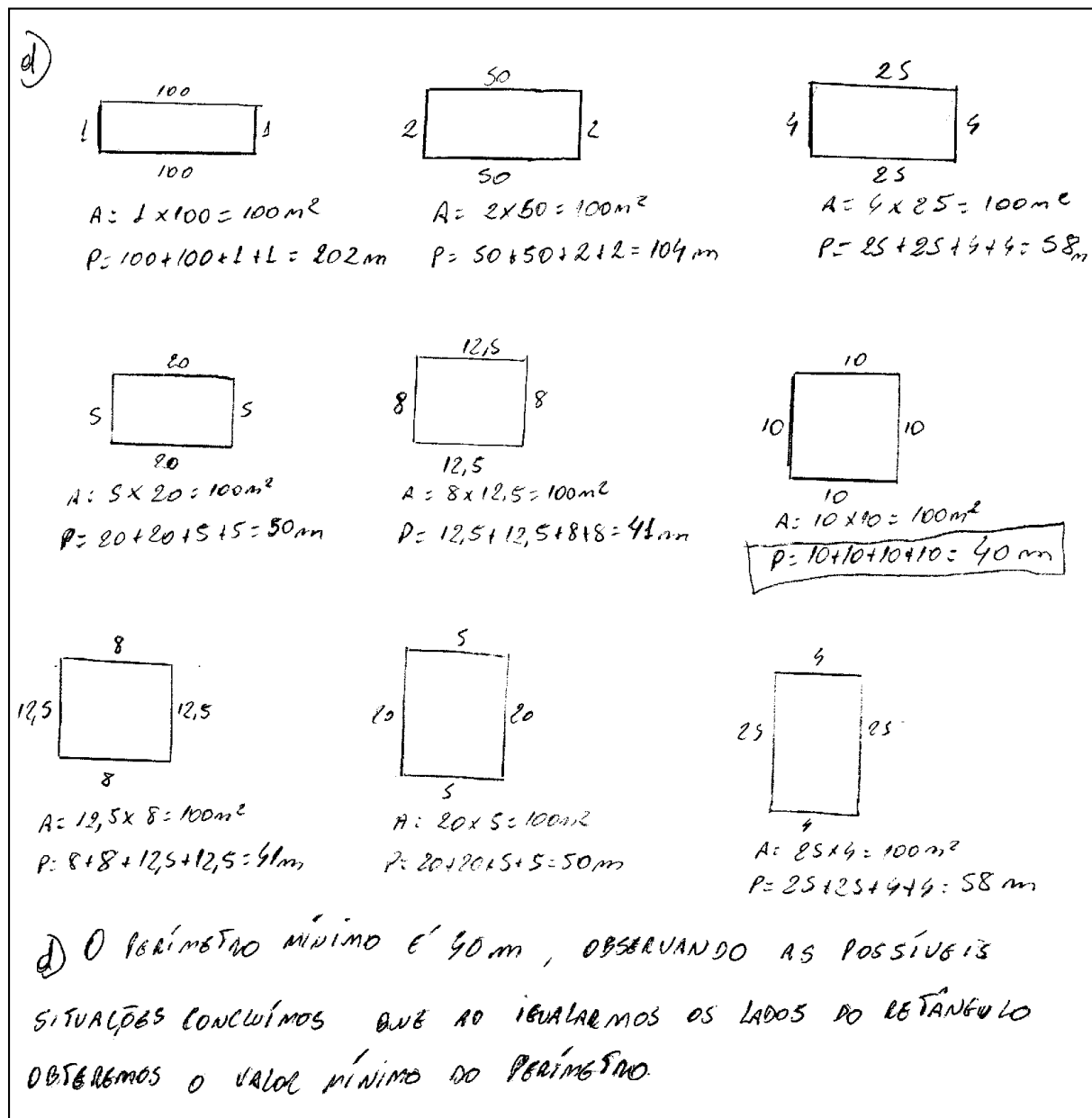
A figura 17 ilustra que este grupo testou vários números inteiros e também usou aproximações, concluindo que existe uma soma mínima entre dois números cujo o produto é 80. Segundo os componentes deste grupo, eles encontraram dificuldades porque tiveram que testar vários números decimais com mais de um dígito após a vírgula.

No último item da terceira tarefa investigativa foi solicitado para verificar a existência de um perímetro mínimo a partir da exploração das dimensões de um retângulo com área de 100 m². Os grupos desenvolveram essa atividade com facilidade porque a sequência de atividades exploradas com características investigativas proporcionou adaptação com questões desse tipo. Dessa forma, a busca por estratégias em prol de formulação de conjecturas foi sendo construído com mais autonomia.

A figura 18 ilustra como o grupo A3 organizou as ideias discutidas sobre a existência de um perímetro mínimo de uma região retangular com área de 100 m².

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Figura 18 – Estratégia utilizada pelo grupo A3 para investigar o item d da tarefa 3



Fonte: Grupo A3

A figura 18 mostra que de acordo com as simulações feitas pelo grupo A3, existe um perímetro mínimo de um retângulo que tem área de $100 m^2$, e é exatamente a 40 m. Para os componentes desse grupo, as variações das dimensões do retângulo de acordo com a área

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

estabelecida demonstrou que quando as medidas dos lados se aproxima de 10 m, também o perímetro do retângulo se aproxima de 40 m. Desta forma, concluíram que existe um perímetro mínimo e é igual a 40 metros.

Depois da apresentação da tarefa 4, os grupos começaram a investigação em busca de formulação de conjecturas. A seguir um momento de interação entre um dos grupos com o professor.

Professor: Sobre o que estão conversando?

Aluno E24: Professor, estamos muito confusos sobre esta atividade. Comentei com meus colegas que eu acho que temos que testar algumas situações com as medidas diferentes dos quadrados que temos que cortar.

Professor: Como assim, você pode me explicar melhor essa sua ideia?

Aluno E24: Posso sim professor, por exemplo, tirar deste papelão um quadrado de cada canto medindo um centímetro de lado e verificar o volume, depois testamos os quadrados tirados com dois centímetros de lado e novamente calculamos o volume, e assim por diante.

Professor: E o que vocês acham que vai acontecer utilizando este procedimento?

Aluno E24: Acreditamos que vai ajudar a entender o que acontece com o volume da caixa conforme mudamos as medidas dos quadrados cortados.

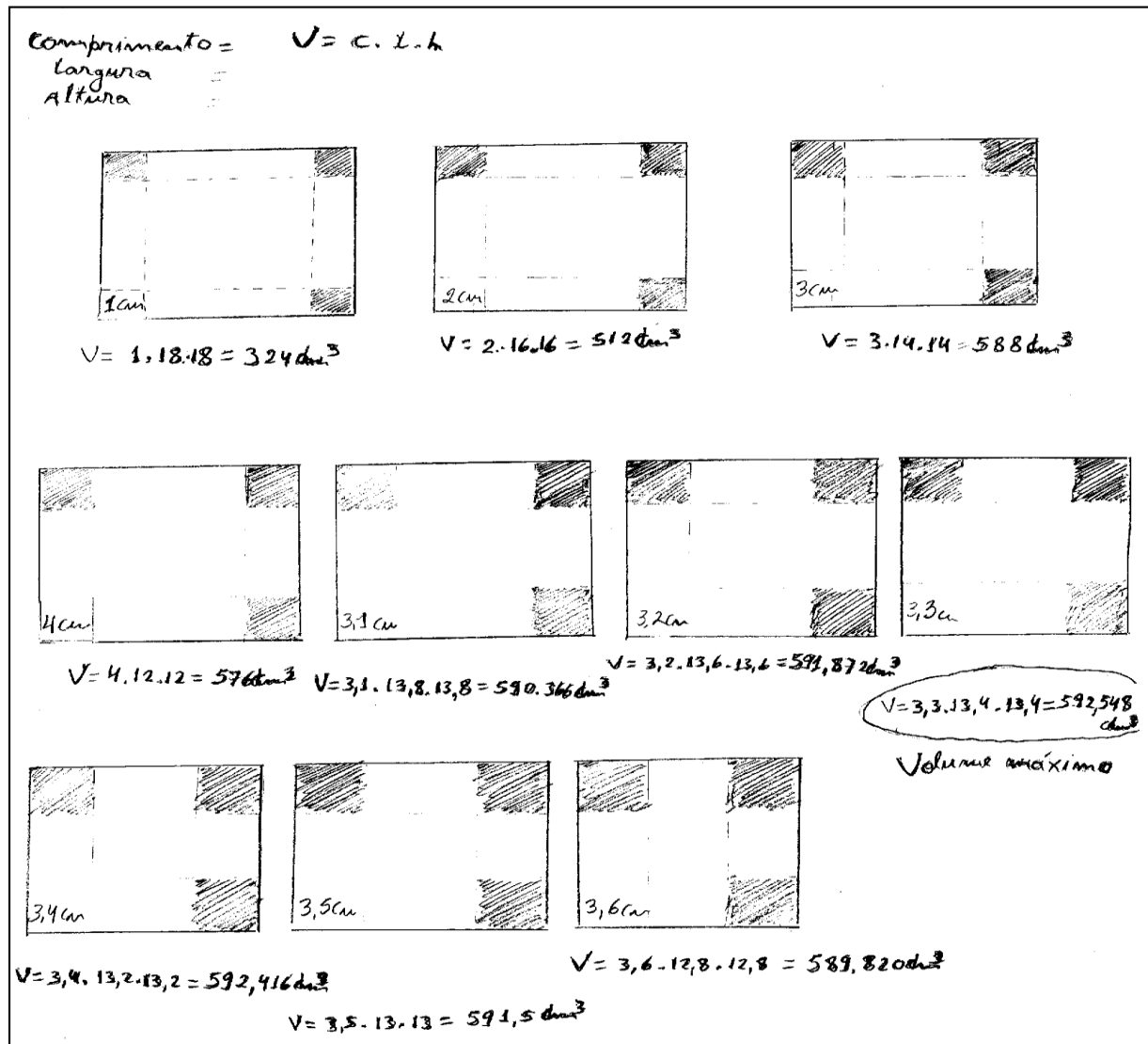
Aluno E34: Professor, eu acho que fica melhor de entender e fazer isso, se a gente fizer desenhos representando o papelão quadrado, e destacando os quadrados cortados em cada ponto.

Professor: Então vamos lá, apliquem essas ideias que vocês apresentaram e depois discutem os resultados.

Essa atitude de buscar e testar situações diversas por meio de simulações e construções de desenhos são ações fundamentais para formulação de conjecturas em tarefas investigativas, visto que oferecem padrões que auxiliam na construção de conhecimentos mediante a validação das conjecturas. Desta forma, a partir do diálogo entre professor e alunos do grupo E4, estes construíram desenhos de vários quadrados, como ilustra a figura 19.

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Figura 19 – Construção das respostas do grupo E4 da tarefa 4



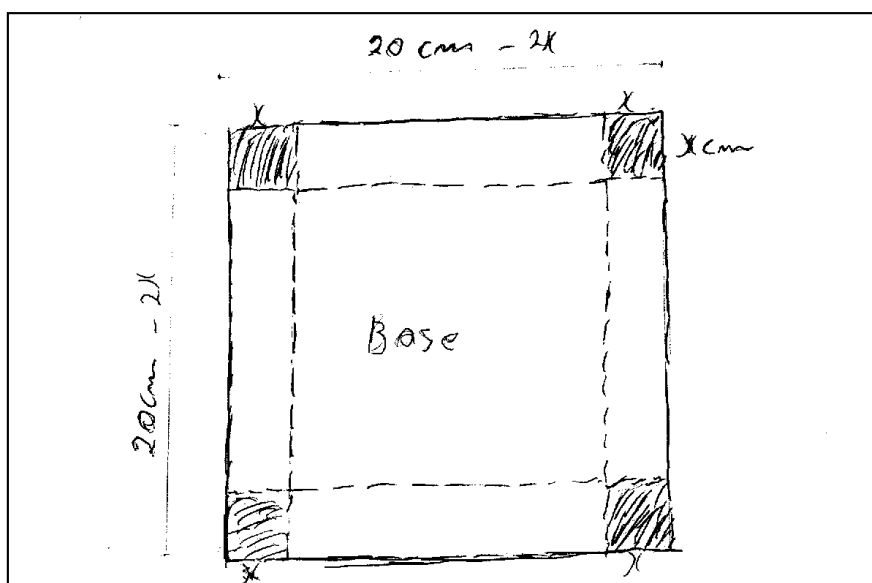
Fonte: Grupo E4

De acordo com a figura 19, o grupo E4 ilustra que existe um volume máximo quando a medida do lado do quadrado retirado está entre 3,3 cm e 3,4 cm, visto que, de acordo com as simulações que fizeram, o volume vai aumentando conforme os testes com as medidas dos lados do quadrado retirado valendo 1 cm, 2 cm, 3 cm e 3,3 cm. Mas, a partir do teste de 3,4 cm, 3,6 cm o volume da caixa vai diminuindo, por isso, existe um volume máximo quando a medida do lado do quadrado retirado das pontas do papelão está entre 3,3 cm e 3,4 cm.

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

A figura 20 ilustra a ideia apresentada pelo grupo E4, onde o desenho destaca a medida x dos lados dos quadrados que devem ser retirados dos quatro cantos do papelão quadrado. Segundo o grupo, foi usado a fórmula do cálculo do volume da caixa formada que gerou uma função do terceiro grau. Depois foi calculada a derivada e o valor igualado a zero encontrando o valor de x igual a 3,3333.... Este valor confirmou os testes que eles fizeram, onde destacaram que a caixa possui volume máximo quando a medida do lado dos quadrados retirados do papelão quadrado se encontra entre 3,3 cm e 3,4 cm. Assim, perceberam que o valor encontrado com a utilização de derivadas está exatamente entre esse intervalo, pois corresponde a dízima periódica 3,333..., maior que 3,3 e menor que 3,4.

Figura 20 – Desenho do grupo E4 representando a construção da caixa



Fonte: Grupo E4

As gravações das conversas desse grupo destacam o diálogo dos alunos durante o desenvolvimento da atividade 4, e enfatiza a estratégia expressa na figura 20 utilizada pelo grupo E4.

Aluno E14: E se a gente atribuir valores para a medida dos quadrados que devem ser cortados do pedaço de papelão, daí vamos fazer um desenho que represente a caixa e vamos chamar a medida do lado dos quadrados que devem ser cortados de x .

Aluno E34: É verdade, e depois calcular o valor de x e verificar se corresponde aos testes que fizemos.

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Aluno E24: Como dá pra fazer isso?

Aluno E44: De acordo com desenho que fizemos, o volume da caixa deve ser $(20 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x$.

Aluno E14: É assim mesmo! A medida do lado é $20 - 2x$ porque como em cada quanto do quadrado de papelão tem que cortar o quadradinho de lado de medida x , no lado do quadrado do papelão tem $2x$.

Aluno E14: Você está certo, multiplicando a área da base do quadrado do papelão ($4x^2 - 80x + 400$) pela altura x , o volume é $400x - 80x^2 + 4x^3$. Depois igualamos a derivada desta função do volume a zero, o valor de x que dá o volume máximo correspondente

$$\text{a } \frac{16000}{27} \text{ cm}^3.$$

Analisando as respostas apresentadas pelos grupos, quatro utilizaram a mesma estratégia para responder os três itens solicitadas na tarefa 5, isto é, atribuíram valores para a altura ou a largura de acordo com o volume de 9 m^3 que deveria ter cada tanque retangular. Mas uma das equipes, o grupo E, questionou se poderiam utilizar o *notebook* para explorar essa atividade no *Excel*, como destaca o diálogo abaixo:

Aluno E35: Professor, para esta atividade podemos utilizar o notebook para explorar as dimensões do tanque?

Professor: Por que vocês resolveram utilizar o notebook?

Aluno E35: É porque nós queremos utilizar o Excel para investigar as dimensões do tanque que deve ter o volume de 9 m^3 .

Aluno E15: É professor, com o Excel os cálculos são mais rápidos.

Aluno E25: No Excel professor, dá também pra gente organizar em linhas e colunas as medidas das dimensões, o volume e a área total das faces do tanque.

Professor: Tudo bem.

A figura 21 destaca a construção produzida no *Excel* pelo grupo E5, onde são visualizadas as medidas da largura e da altura de acordo com o volume do tanque. E, de acordo com a produção do grupo, percebe-se que existem dimensões que minimizam o custo da produção de tanques, visto que o resultado destaca que existe uma área total mínima do tanque.

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Figura 21 – Construção de resposta do grupo E5 no *Excel*

Largura	Altura	Comprimento	Volume	Área total do tanque	Área das faces do tanque		
x	y	z	V	$2xy + 8x + 8y$	$2xy$	$8x$	$8y$
0,5	4,5	4	9	44,5	4,5	4	36
1	2,25	4	9	30,5	4,5	8	18
1,5	1,5	4	9	28,5	4,5	12	12
2	1,125	4	9	29,5	4,5	16	9
2,5	0,9	4	9	31,7	4,5	20	7,2
3	0,75	4	9	34,5	4,5	24	6
3,5	0,6429	4	9	37,64285714	4,5	28	5,1429
4	0,5625	4	9	41	4,5	32	4,5
4,5	0,5	4	9	44,5	4,5	36	4
5	0,45	4	9	48,1	4,5	40	3,6

Fonte: Grupo E5

Mediante a utilização da ferramenta tecnológica *Excel*, os alunos do grupo E5 construíram suas respostas e apresentaram suas conclusões. A figura 21 demonstra que os alunos do grupo E5, a partir da utilização do *Excel*, chegaram a conclusão que o custo do tanque com as medidas citadas na atividade 5 será o menor possível quando as medidas da largura e da altura forem iguais 1,5 m, visto que, produzirá a menor área total das faces necessárias para a construção do tanque com 4 m de comprimento e volume de 9 m³. Portanto, o grupo E concluiu que existem dimensões mínimas que reproduzem um custo mínimo para a fabricação de tanques e a área total das faces do tanque se aproxima de 28,5 m², que corresponde a mínima possível, já que para valores maiores ou menores de 1,5 m atribuídos à largura e à altura, a área total é maior que 28,5 m². Esta conclusão está ilustrada na figura 21, que representa a estratégia construída pelo grupo E5 no *Excel*.

Analisando os fundamentos da tecnologia, Cardoso (2019) destaca que a utilização de recursos tecnológicos nas aulas de Matemática pode trazer benefícios a aprendizagem dos discentes e também inovar as atividades metodológicas de ensino dos âmbitos escolares, pois



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

para o autor, tais instrumentos promovem o interesse dos alunos e proporcionam a melhora de seu rendimento. Corroborando com a autora, Santos e Amaral (2012, p. 84) explicam que “a utilização de novas tecnologias alia-se à necessidade de se aprender melhor, de se utilizar recursos que promovam uma melhor aprendizagem

Desta forma, por meio das 5 tarefas investigativas exploradas, os alunos formularam as seguintes conjecturas: taxa de variação é uma constante que pode ser determinada a partir da derivada de uma função que expressa a atividade proposta; existe um número que proporciona um volume máximo ou uma área máxima, minimização de custo de construção de caixa d’água, tal que, quanto mais se aproxima deste número pela direita ou pela esquerda, a tendência e a aproximação dos valores máximos e mínimos desejados. As principais estratégias utilizadas pelos alunos foram: o uso de diferentes representações simbólicas e numéricas para resolver as tarefas propostas como construção de quadros, desenhos, e modelos matemáticos para simular situações relacionadas com taxa de variação, máximos e mínimos de funções de acordo com o enunciado de cada tarefa investigativa.

Durante o desenvolvimento das tarefas propostas os alunos demonstraram mudanças relacionadas com a motivação, interesse e compromisso na busca da construção de conhecimentos matemáticos com autonomia. Além disso, a partir da observação constante dos grupos, percebeu-se que a atitude de buscar estratégias no estabelecimento de relações matemáticas apresentada pelos alunos favoreceu a melhoria no desempenho dos aspectos cognitivos.

Em relação ao posicionamento dos alunos sobre a Investigação Matemática, a maioria destacou que tiveram dificuldades para encontrar estratégias para formular conjecturas diante das tarefas propostas. Entretanto, elogiaram a produtividade da interação dos grupos que ocorreu no decorrer das aulas. Salientaram a importância da socialização dos resultados porque



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

cada grupo apresentava suas conclusões e as discussões oriundas desta socialização auxiliava na validação dos resultados.

A socialização foi o momento em que cada grupo apresentou suas conjecturas e as estratégias utilizadas para encontrá-las, esse momento é fundamental para os discentes conhecerem os resultados dos outros grupos. Desta forma, os alunos demonstraram que as discussões em grupo são fundamentais para a produção de novos conhecimentos e desenvolvimento da aprendizagem de forma eficaz.

Referências

BERTINI, L. F.; PASSOS, C. L. B. Uso da investigação matemática no processo de ensino e aprendizagem nas séries iniciais do ensino fundamental. In: XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2008, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro, 2008. p. 1-17

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Brasília, DF, 2018. <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>>: Acesso em: 30 nov. 2018.

CARDOSO, Mikaelle Barboza. **Práticas docentes e tecnológicas no ensino de matemática**. Curitiba: CRV, 2019.

FLOOD, Raymond. WILSON, Robin. **A História dos Grandes Matemáticos**: as descobertas e a propagação do conhecimento através das vidas dos grandes matemáticos. São Paulo: M. Books do Brasil Editora, 2013.

GONÇALVES, Daniele Cristina. “**Aplicações das Derivadas no Cálculo I: Atividades Investigativas utilizando o GeoGebra**” 01/05/2012 110 f. Profissionalizante em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO, OURO PRETO Biblioteca Depositária: ICEB/UFOP, 2012

MAGALHÃES, Ana Paula A. S. VARIZO, Zaíra da Cunha Melo. **Atividades Investigativas como uma estratégia de ensino e aprendizagem da matemática**. Curitiba: CRV, 2016.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 3 ed. rev. ampl; reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

_____. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

SANTOS, M. E. K. L. dos. AMARAL, L. H. Avaliação de objetos virtuais de aprendizagem no ensino de matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática.** V. 3, n. 2, p. 83-93, 2012.

SCHMITT, Fernanda E. **Abordando Geometria por meio da investigação matemática:** um comparativo entre o 5º e 9º anos do ensino fundamental. 2015. 105 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2015.



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Apêndice A

Questionário

1. A Investigação Matemática já tinha sido utilizada em aulas anteriores?

() Sim () Não

2. Você achou interessante a metodologia utilizada? Justifique.

() Sim () Não

3. As tarefas investigativas propostas lhe ajudaram a compreender o conceito de derivada? Justifique.

() Sim () Não

4. Descreva os aspectos positivos em relação ao uso da Investigação Matemática.

5. Como o grupo registrou as conjecturas e conclusões? Encontrou dificuldades? Justifique.

6. O que você achou do momento das discussões em grupo para construção de conhecimentos e aprendizagem? Justifique.
