Osvaldo Antonio Ribeiro Junior
Fábia Maceno Ribeiro

O Axioma da Escolha e Aplicações

Atena Editora
Ano 2021

Osvaldo Antonio Ribeiro Junior
Fábia Maceno Ribeiro

O Axioma da Escolha e Aplicações

Atena
Editora
Ano 2021

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

Atena
Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

O axioma da escolha e aplicações

Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Mariane Aparecida Freitas
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Osvaldo Antonio Ribeiro Junior
Fábia Maceno Ribeiro

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

R484 Ribeiro Junior, Osvaldo Antonio
O axioma da escolha e aplicações / Osvaldo Antonio Ribeiro Junior, Fábia Maceno Ribeiro – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5983-021-3
DOI 10.22533/at.ed.213213004

1. Axioma. 2. Lema de Zorn. 3. Teorema da Base de Hamel. 4. Teorema de Hanh-banach. I. Ribeiro Junior, Osvaldo Antonio. II. Ribeiro, Fábia Maceno. III. Título.

CDD 511.3

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2021

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

SUMÁRIO

RESUMO

O Axioma da Escolha, é um axioma necessário em diversas áreas da matemática, não somente na teoria dos conjuntos, como também, por exemplo, na Topologia, na Álgebra Linear e na Análise Funcional. Ele diz que: **dada uma coleção não vazia de conjuntos não vazios** X **é possível formar um conjunto** A**, escolhendo em cada** $X \in C$ **precisamente um elemento** x**.** Uma ferramenta matemática muito útil em diversas demonstrações de teorema importantes é o Lema de Zorn. Que afirma: **Seja,** $(A,\leq)$ **um conjunto parcialmente ordenado, em que cada subconjunto totalmente ordenado tem um limite superior. Então** A **possui um elemento máximo.** A partir da equivalência do Axioma da Escolha e do Lema de Zorn queremos verificar sua aplicação a alguns resultados importantes da matemática como o Teorema da Base de Hamel (Álgebra Linear) e o Teorema de Hahn-Banach (Análise Funcional), e para este fim foi feita uma pesquisa documental e bibliográfica sobre o tema.

PALAVRAS-CHAVE: Lema de Zorn. Teorema da Base de Hamel. Teorema de Hanh-banach.

ABSTRACT

The Axiom of Choice, is a necessary axiom in several areas of mathematics, not only in set theory, but also, for example, in topology, in linear algebra and functional analysis. He says: **given a non-empty collection of non-empty sets** X **is possible to form a set** A**, choosing every** $X \in A$ **precisely one element** x**.** A very useful mathematical tool in several important statements of the theorem is Lemma of Zorn. Which states: **Be,** $(A,\leq)$ **a partially ordered set, each totally ordered subset has an upper limit. Then** A **has a maximum element.** Starting from the equivalence of the Axiom of Choice and Zorn's lemma we verify its application to some important results of the mathematical Theorem of Hamel Base (Linear Algebra) and the Hahn-Banach theorem (functional analysis), and to this end was taken documentary and bibliographic research on the topic.
KEYWORDS: Zorn's Lemma. Theorem of Base Hamel. Hahn-Banach Theorem.

INTRODUÇÃO

O Axioma da Escolha foi apresentado por Ernst Zermelo (1871 – 1953) em 1908. Um axioma muito polêmico, já que, seu caráter não é construtivo por garantir infinitas escolhas arbitrárias (não sendo possível a prova por construção) (JESUS, 2010).

Este é um axioma necessário em diversas áreas da matemática, não somente na teoria dos conjuntos, como também, por exemplo, na Topologia, na Álgebra, e na Análise Funcional. Ele diz que: dada uma coleção não vazia de conjuntos não vazios X é possível formar um conjunto A, escolhendo em cada $X \in C$ precisamente um elemento x (LIMA, 2009).

Uma ferramenta matemática muito útil em diversas demonstrações de teorema importantes em diversas áreas é o Lema de Zorn. Que afirma: todo conjunto não-vazio indutivo superiormente possui elementos máximos (LIMA, 2009).

Utilizamos três formas escritas diferentes do Lema de Zorn uma no resumo, uma na introdução e outra na aplicação do lema, buscando mostrar suas várias formas escritas, porém, não perdendo o sentido do mesmo.

O Lema de Zorn (Axioma da Escolha) faz parte de uma área muito importante da matemática, que é a Topologia, utiliza-se da mesma como peça fundamental em várias demonstrações de resultados profundos e importantes da matemática, tanto pura como aplicada.

Levando em consideração essa questão, é visível a importância em se estudar sobre esse tema, que desde seu surgimento prende a atenção de estudiosos.

Utilizando-se deste gancho, queremos neste trabalho a partir da equivalência entre o Axioma da Escolha e o Lema de Zorn, estudar aplicações do mesmo dentro de temas pertinentes a matemática além de seu surgimento. A equivalência do Axioma da Escolha com o Lema de Zorn não será demonstrado neste trabalho, porém, lançarei em breve meu trabalho de Iniciação Científica, onde além desta demonstraremos ainda a equivalência do Axioma da Escolha com o Princípio Maximal de Hausdorff e com o Princípio da Boa Ordenação.

Aplicaremos o lema para demonstrarmos alguns resultados importantes como o

Teorema da Base de Hamel (Álgebra Linear), muito importante para a matemática abstrata, pois através dele mostramos que todo espaço vetorial possui uma base e o Teorema de Hahn-Banach (Análise Funcional) muito utilizado na teoria das equações diferenciais parciais. Para este fim, iniciamos nossa pesquisa na teoria dos conjuntos e lógica, estudando conteúdos que nos permitam amadurecer nossos conhecimentos até chegarmos no tema em destaque.

Este livro está baseado nas obras de uma pesquisa documental e bibliográfica, com o levantamento de informações que nos levasse a compreender o tema em questão e verificar sua aplicação.

TEORIA DOS CONJUNTOS E LÓGICA

Durante esse capitulo abordaremos assuntos pertinentes a teoria dos conjuntos e lógica, levantando e discutindo tópicos importantíssimos ao tema, para isso analisaremos a teoria dos conjuntos com grandes detalhes e adotaremos fórmula, e axiomas de forma subjetiva.

1 I CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Aqui será introduzida as ideias de teoria dos conjuntos e estabeleceremos as terminologias e noções básicas, também discutiremos alguns pontos da lógica matemática elementar.

1.1 Notação Básica

Utilizaremos uma letra maiúscula para representarmos um conjunto *A,B,...* e uma letra minúscula para representar os elementos ou objetos de um conjunto *a, b,...*.

Se um elemento a pertence ao conjunto A nós utilizaremos a seguinte notação: $a \in A$

Mas se esse elemento a não pertence ao conjunto A nós utilizaremos essa notação: $a \notin A$

Utilizaremos o sinal de igualdade = para representarmos a igualdade entre dois elementos $a = b$, ou para representar a igualdade entre dois conjuntos $A = B$, ou seja, quando dois conjuntos possuem os mesmos elementos.

No entanto, se temos a e b como elementos diferente utilizaremos a notação de desigualdade ou seja $a \neq b$, essa notação também é utilizada para conjuntos diferentes $A \neq B$.

Nós diremos que A será um subconjunto de B se todo elemento de A for elemento de B, e adotaremos o símbolo "⊂"para definir esse acontecimento. $A \subset B$

Para definirmos melhor a igualdade de conjuntos diremos que o conjunto $A = B$ quando $A \subset B$ e $B \subset A$. No entanto se $A \subset B$ e A é diferente de B dizemos que A é o subconjunto próprio de B e utilizaremos o símbolo: $A \not\subset B$

Precisamos neste momento definir como será a representação dos elementos de um conjunto. Se um dado conjunto A possui os elementos a, b, c e d o símbolo utilizado será: $A = \{a, b, c, d\}$.

Esse caso só será usado quando for listar um conjunto com um número muito pequeno de elementos, nos casos mais gerais usaremos uma letra para representar e as propriedades dos elementos daquele conjunto.

Para representarmos os números inteiros, por exemplo, que é um subconjunto dos números reais a notação usada será: $B = \{x | x$ é igual aos inteiros$\}$

Que é o mesmo que dizer que B é o conjunto de todo x, tal que, x é igual aos inteiros.

1.2 A União de Conjuntos e o Significado de "ou"

Quando temos um conjunto que representa os elementos existentes no conjunto A e os elementos existentes no conjunto B, dizemos que esse novo conjunto e chamado de

A união com B e é representado por $A \cup B$, formalmente nós definimos essa união como sendo: $A \cup B = \{x | x \in A$ ou $x \in B\}$

Para exemplificarmos, tomemos duas famílias diferentes, que no caso são dois conjuntos de pessoas, tomemos a família da Paula (*FP*) que possui 10 pessoas como parentes de primeiro grau, contando com ela, e a família do Fernando (*FF)* que possui 15 pessoas como parentes de primeiro grau, contando com ele. Se os dois são namorados e fazem uma festa de noivado, chamando somente os parentes de primeiro grau dos dois, nesta festa estarão reunidas 25 pessoas contando com os dois. Ou seja, a família de Paula união com a família de Fernando é igual a 25 pessoas, também representado simbolicamente por: $FP \cup FF = 25$.

O "ou" representa uma condicional de disjunção será verdade quando pelo menos uma for verdadeira, ou seja, $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in A$ e B ao mesmo tempo.

1.3 Intersecção de Conjuntos, o Conjunto Vazio e o Significado de "Se... Então"

Quando temos um conjunto que representa os elementos existentes em dois conjuntos A e B ao mesmo tempo, dizemos que esse conjunto é a intersecção dos conjuntos A e B e representamos essa intersecção por $A \cap B$, formalmente nós definimos como: $A \cap B = \{x | x \in A$ e $x \in B\}$.

Existe um conjunto com características bem especificas e que não possui nenhum elemento, ele é chamado de o conjunto vazio, ele é representado pelo símbolo ø. O conjunto vazio na verdade e apenas uma convenção utilizada para identificar o conjunto que não possui elementos.

Dizemos que se A e B não possuem pontos em comum então sua intersecção é vazia, ou seja, não possui elementos, podemos representar esse fato com a seguinte expressão $A \cap B = ø$, se esse fato acontece podemos dizer também que os conjuntos A e B são dois conjuntos disjuntos.

Utilizando o caso das famílias apresentado anteriormente também exemplificaremos esses dois casos. Para o caso da interseção vazia podemos ver que os dois ainda não se casaram, por tanto, no grau de parentesco as famílias não tem pessoas em comum, sendo vazia sua intersecção, simbolicamente temos, $FP \cap FF = ø$. Já no caso dos dois se casarem, então ambos faram parte das duas famílias, ou seja, a intersecção será os dois (Paula e Fernando), simbolicamente temos: $FP \cap FF = 2$ (Paula, Fernando).

De forma similar, quando se faz a união e a intersecção de um conjunto A com o conjunto vazio ocorre o seguinte caso: $A \cup ø = A$ e $A \cap ø = ø$.

O se...então ou também conhecido como condicional é representada pelo símbolo $\Rightarrow$. Se temos duas afirmações p e q e aplicarmos a condicional, lemos da seguinte maneira: Se p, então q, e dizemos que "p é condição suficiente para q"e "q é condição necessária para p".

1.4 Contra Positiva e Recíproca

Para falarmos sobre a contra positiva utilizaremos a proposição anterior que é "se... então", seja dois conjuntos A e B, com $B \subset A$ e um elemento x que pertence a ambos, notamos que o elemento x só pertencerá ao conjunto B se pertencer ao conjunto A, isto é, se $x \in B$ então $x \in A$ ou $B \Rightarrow A$, para usarmos a contra positiva devemos negar a primeira e a segunda, isto é, o elemento x não pertencerá ao conjunto B se ele não pertencer ao conjunto A, logo teremos simbolicamente, se $x \notin A$ então $x \notin B$ ou $\sim A \Rightarrow \sim B$.

Se tivermos dois conjuntos A e B, tal que, $A \Rightarrow B$ e sua recíproca for verdadeira, ou seja, $B \Rightarrow A$ teremos então uma bicondicional, ela pode ser escrita como A se, e somente se, B ou representada pelo símbolo $A \Leftrightarrow B$.

Seguindo o exemplo das famílias para explicarmos o caso da bicondicional, temos que, se Paula é noiva de Fernando (*PnF)* então Fernando é noivo de Paula (*FnP)*, a recíproca também é verdadeira, se Fernando é noivo de Paula, então Paula é noiva de Fernando, logo Paula é noiva de Fernando se, somente se, Fernando for noivo de Paula, simbolicamente temos: $PnF \Leftrightarrow FnP$.

1.5 A Diferença de Dois Conjuntos

Tomando dois conjuntos A e B *dizemos eu a* diferença entre eles é simbolizada por $A - B$, e representa os elementos existentes no conjunto A e não existentes no conjunto B, formalmente é escrito como: $A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

É importante falarmos que na grande maioria dos casos $A - B \neq B - A$, salvo dois casos quando sua intersecção é vazia ou quando sua união é vazia, para ficar mais claro utilizaremos o exemplo das famílias.

Assumindo que Paula e Fernando (citados anteriormente) já se casaram, logo teremos que $FP - FF = 9$ pessoas, pois, só restaram os familiares de Paula sem ela que neste caso pertence a ambas famílias (intersecção), se pegarmos no entanto $FF - FP = 14$ pessoas, pois, Fernando pertence as duas famílias, pode-se perceber então que o resultado é diferente.

As ilustrações apresentadas na figura 1 mostram a diferença entre os conceitos de união, intersecção e diferença de dois conjuntos A e B qualquer.

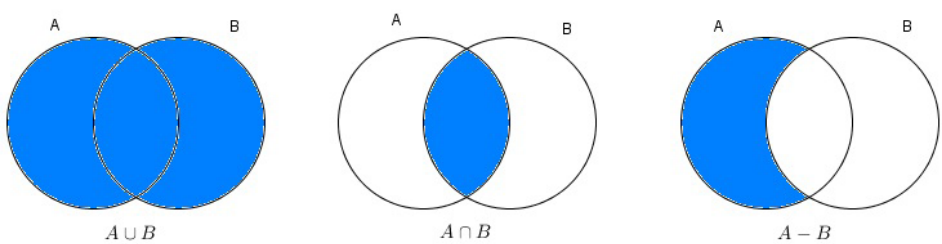

Figura 1 – União, intersecção e diferença de dois conjuntos

Fonte: Autor

1.6 Regras de Teoria dos Conjuntos

Na teoria dos conjuntos, mais precisamente falando de união e intersecção de conjuntos, a ordem da operação pode fazer toda a diferença, por exemplo, se temos três conjuntos A, B e C e temos a seguinte operação $A \cup (B \cap C)$ é diferente de $(A \cup B) \cap C$, veja na figura 2.

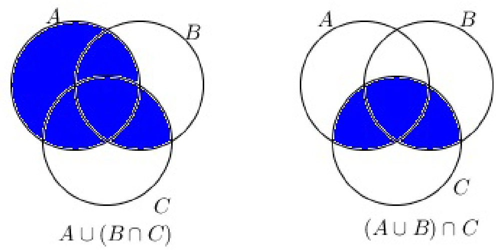

Figura 2 – Diferença entre A ∪ (B ∩ C) e (A ∪ B) ∩ C

Fonte: Autor

Para encontrarmos a igualdade entre as operações precisamos seguir algumas regras de teoria dos conjuntos. Com os mesmos três conjuntos as operações serão iguais a:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Utilizando também a diferença de conjuntos podemos destacar que:

O complemento da união é igual a interseção dos complementos.

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

O complemento da interseção é igual a união dos complementos

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

1.7 Coleção de conjuntos

Seja um conjunto A formado por vários subconjuntos $A1$, $A2$,..., ou seja, os elementos do conjunto A são também conjuntos, esse fato nos leva a uma nova concepção, onde esse conjunto A formado por elementos é chamado de uma “coleção de conjuntos”. Coleções são representadas pelos símbolos A ou B.

Como exemplo, podemos citar um campeonato de futebol, como o campeonato brasileiro, onde é formado por vários times representando os elementos do conjunto maior (campeonato), mas por sua vez cada time é composto por técnico, jogadores, e outros, sendo assim também um conjunto. Logo um campeonato de futebol é um conjunto formado por conjuntos.

1.8 União e Interseção Arbitrarias

Inicialmente nós falamos de união e intersecção de dois conjuntos. Trabalharemos a partir de agora com conjuntos quaisquer, ou seja, conjuntos arbitrários.

Seja uma coleção B de conjuntos a união dos elementos de B é dada por:

$\bigcup_{A \in B} A = \{x \mid x \in A \text{ para algum } A \in B\}$

Já a interseção dos elementos de B é definido pela equação:

$\bigcap_{A \in B} A = \{x \mid x \in A \text{ para todo } A \in B\}$

1.9 Produtos Cartesianos

Um caminho muito interessante para se criar um novo conjunto é com a velha notação de par ordenado, muito conhecida principalmente na área da geometria. Para entendermos o que realmente é um par ordenado utilizaremos dois conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$, será chamado de par ordenado o novo elemento criado seguindo a seguinte ordem (x, y), tal que, $x \in A$ e $y \in B$, vejamos todas as possibilidade existentes para melhor entendimento: $(a, 1)$, $(a, 2)$, $(b, 1)$, $(b, 2)$, $(c, 1)$, $(c, 2)$.

Como se pode observar, para esse caso específico obtemos seis possibilidades de pares ordenados. Quando temos todas as possibilidades de pares ordenados do conjunto A com o conjunto B, dizemos que esse novo conjunto de seis elementos é chamado de o produto cartesiano de A com B, simbolicamente temos: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$

É necessário entendermos que, se trocarmos a ordem dos conjuntos, na maior parte dos casos, o resultado também será diferente. Como exemplo, usaremos os conjuntos A e B anteriores para provar que $A \times B \neq B \times A$. Neste caso teremos $B \times A = \{(x, y) \mid x \in B \text{ e } y \in A\}$, teremos então os seguintes pares ordenados: $(1, a)$, $(1, b)$, $(1, c)$, $(2, a)$, $(2, b)$, $(2, c)$.

Com isso pode-se observar que os elementos de $A \times B \neq B \times A$, por exemplo, $(b, 1) \neq (1, b)$, $(a, 2) \neq (2, a)$, figura 3.

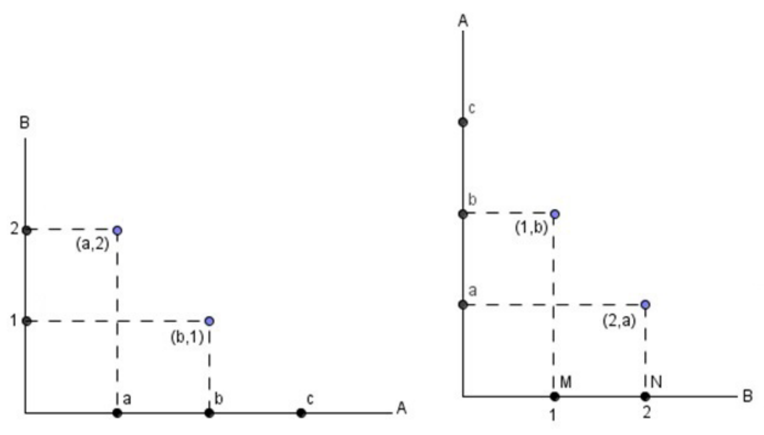

Figura 3 – Diferença entre $A \times B$ e $B \times A$

Fonte: Autor

No exemplo usado, ao encontrarmos o produto cartesiano dos dois conjuntos, onde um possui 2 elementos e o outro 3 elementos, obtivemos um novo conjunto com 6 elementos (pares ordenados), com isso podemos constatar que quando *A* possui a elementos e *B* possui *b* elementos o conjunto $A \times B$ é formado por $a.b$ elementos (pares ordenados).

Podemos destacar ainda que quando $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing \Leftrightarrow A \times B = \varnothing$.

2 I FUNÇÕES

A ideia de função está diretamente ligada a uma regra, onde fixamos para cada elemento do conjunto *A* um elemento do conjunto *B*, se temos um elemento $x \in A$ e essa regra liga ele a um único elemento $y \in B$, dizemos que *y* está em função de *x*. No Cálculo muitas vezes a função é dada por fórmulas simples, como $f(x) = 2x$ ou seja, $y = 2x$, mas também por fórmulas complicadas, como $f(x) = \Sigma^{n}_{k=1} x^k$, ou seja, $y = \Sigma^{n}_{k=1} x^k$.

Muitas vezes não é explicito os conjuntos *A* e *B*, tomamos então o *A* como o conjunto de todos os números reais, para que a regra faça sentido e *B* seja o conjunto de todos os números reais.

Definição: Uma regra de associação é um subconjunto *r* do produto cartesiano $C \times D$ de dois conjuntos, tendo a propriedade que cada elemento de *C* aparece como a 1ª coordenada em não mais que um par ordenado de *r*.

Vejamos um exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \mathbb{N}$, tal que, a regra é $y = 2x$ o nosso subconjunto *r* será composto pelos seguintes pares ordenados (0, 0), (1, 2), (2, 4) e (3, 6).

Para um produto cartesiano $C \times D$, se o par ordenado $(c, d) \in r$, para cada *c* existirá apenas um *d*, podemos relatar esse fato da seguinte maneira:

$[(c, d) \in r \text{ e } (c, d') \in r] \Rightarrow [d = d']$

Domínio de *r* **:** O domínio é definido como o subconjunto de *C* que consiste de todas as 1ªs coordenadas de elementos de *r*, logo domínio de $r = \{c | \text{ existe } d \in D \text{ tal que } (c, d) \in r\}$.

Imagem de *r* **:** A imagem de *r* é definida por o subconjunto de *D* que consiste de todas as 2ªs coordenadas de elementos de *r*, logo a imagem de $r = \{d | \text{ existe } c \in C \text{ tal que } (c, d) \in r\}$.

Note que dando a regra de *r* o domínio e a imagem são totalmente determinados.

Definição: Uma função *f* é uma regra de associação *r*, junto com um conjunto *B* que contém a imagem do conjunto *r*. O domínio *A* de uma regra de associação *r* é também chamado de o domínio da função *f*; a imagem do conjunto *r* é também chamado de a imagem de *f*; e o conjunto *B* é chamado de contradomínio de *f*.

Se *f* é uma função haverá o domínio *A* e o contradomínio *B*, nós expressamos este fato por: $f: A \to B$.

Que é lido "*f* é uma função de *A* para *B*"ou "*f* é um mapeamento de *A* em *B*"ou simplesmente "*f* mapeia *A* em *B*". As vezes visualizamos *f* em uma transformação geométrica física levando pontos de *A* em pontos de *B*.

Se $f: A \to B$ e se a é um elemento de *A* nos denotamos por $f(a)$ o único elemento de *B* que é determinado pela regra de *f* fixado para a; ele é chamado de o valor de *f* em a, ou somente imagem de a sob f. Formalmente, se r é a regra da função f, logo $f(a)$ é denotado como o único elemento de B, tal que, $(a, f(a)) \in r$.

Seja f a função definida pela regra $\{(x,x^3 + 1)|x \in \mathbb{R}\}$ e cujo contradomínio é $\mathbb{R}$, ou, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função, tal que, $f(x) = x^3 + 1$.

Ambas as sentenças especificam precisamente a mesma função. Mas, a sentença, seja f a função, tal que, $f(x) = x^3 + 1$ não é a mais adequada para especificar uma função, por que ela não especifica nem o domínio nem o contradomínio de f.

Definição: Se $f: A \to B$ e se A_0 é um subconjunto de A, nós definimos a restrição de f para A_0 pela função mapeamento de A_0 em B sendo a regra: $(a,f(a))|a \in A_0$.

Ele é denotado por $f \mid A_0$ e lemos "f restringido por A_0 ".

Exemplo: seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{R}+$ o conjunto dos reais não negativos. Consideremos as funções:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$

$g : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$ definida por $h(x) = x^2$

$k : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+$ definida por $k(x) = x^2$

A função g é diferente da função f, pois suas regras são diferentes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ela é a restrição de f para o conjunto $\mathbb{R}+$. A função h também é diferente de f, embora suas regras formam o mesmo conjunto, por causa do contradomínio especificado pois h é diferente do contradomínio especificado de f. A função k é diferente de todos estes. Podemos visualizar cada uma delas na figura 4.

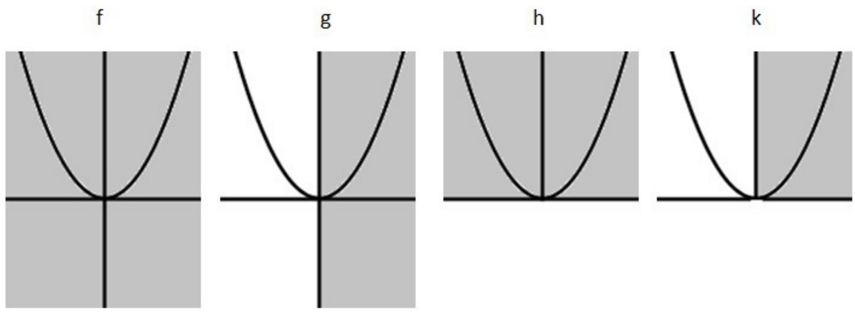

Figura 4 – Funções f g h e k

Fonte: Autor

Seja $f : A \to B$. Se A_0 é um subconjunto de A, nós denotamos por $f(A_0)$ o conjunto de todas as imagens dos pontos de A_0 sob a função f; este conjunto é chamado de imagem de A_0 sob f, formalmente temos: $f(A_0) = \{b|b = f(a)$ para algum $a \in A_0 \}$.

Se B_0 é um subconjunto de B, nós denotamos por $f^{-1}(B_0)$ o conjunto de todos os elementos de A cuja imagem sob f está em B_0 ele é chamado de a pré imagem de B_0 sob f

(imagem inversa de B_0), formalmente podemos colocar: $f^{-1}(B_0) = \{a | f(a) \in B_0\}$

Pode ser que não haja pontos a de A que tenha imagem em B_0, neste caso $f^{-1}(B_0)$ é vazio.

Precisamos tomar alguns cuidados para se trabalhar com a função f e f^{-1} seguindo a notação correta. A operação f^{-1}, por exemplo, quando aplicada a um subconjunto de B funciona muito bem, ele mantém a inclusão, a união, a intersecção e a diferença de conjuntos. Porém, a função f quando aplicada a um subconjunto de A não preserva todas as operações de conjuntos.

Seja outro exemplo, $f^{-1}(f(A_0)) = A_0$ e $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$, ele em geral não é verdadeiro , quando demonstramos o seguinte exemplo.

Se $f : A \rightarrow B$ então:

$$f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0 \text{ para } A_0 \subset A$$

$$f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0 \text{ para } B_0 \subset B$$

Para exemplificarmos, consideremos a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = 3x^2 + 2$ (figura 5). Seja $[a, b]$ o intervalo fechado $a \leq x \leq b$ então:

$$f^{-1}\big(f([0,1])\big) = f^{-1}([2,5]) = [-1,1]$$

$$f\big(f^{-1}([0,5])\big) = f([-1,1]) = [2,5]$$

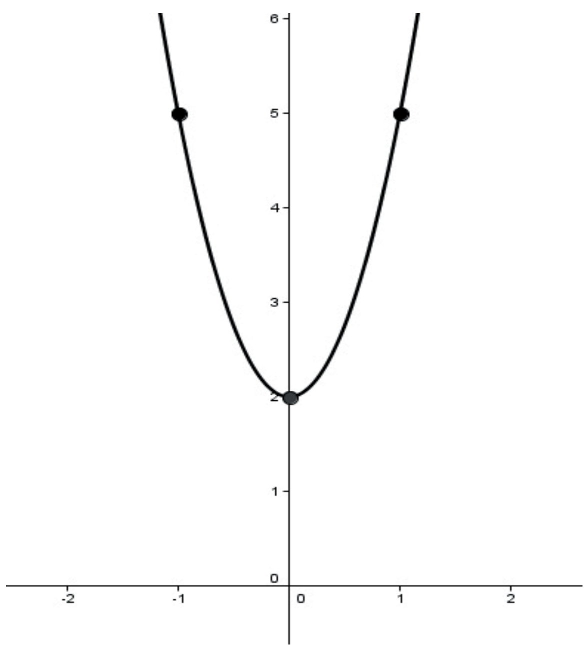

Figura 5 – Gráfico da função $f(x) = 3x^2 + 2$

Fonte: Autor

Restringimos o domínio da função e mudamos seu contradomínio de duas formas, formalizando uma nova função. Outro caminho é o da composição de duas funções:

Definição: Dado a função $f : A \to B$ e $g : B \to C$, nós definimos a composição $g \circ f$ de f e g quando a função $g \circ f : A \to C$ definida por a equação $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Formalmente a função $g \circ f : A \to C$ é a função cuja regra é: $\{(a, c) |$ para algum $b \in B$, $f(a) = b$ e $g(b) = c\}$

Nós muitas vezes descrevemos a composição $g \circ f$ como sendo um movimento físico do ponto a para o ponto $f(a)$ e daí para o ponto $g(f(a))$ isso é mostrado na figura 6.

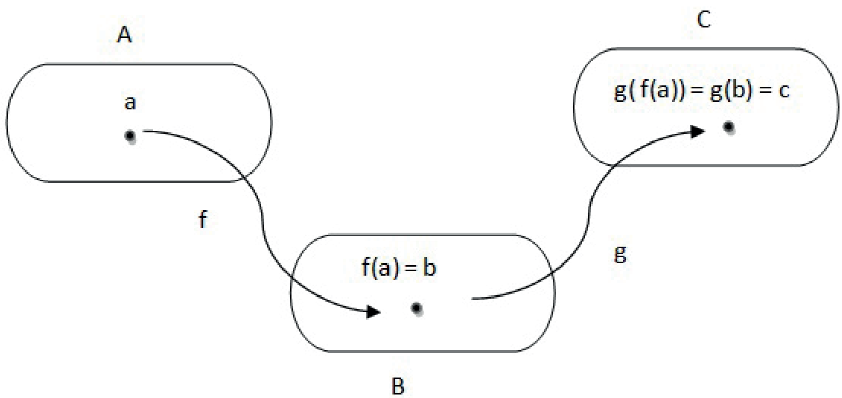

Figura 6 – Composição $g \circ f$

Fonte: Autor

Note que $g \circ f$ só é definida quando a ordem da f é igual ao domínio de g.

Por exemplo, temos a composição das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)= 3x^2 + 2$ e a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 5x$ e a função $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(3x^2 + 2) = 5(3x^2 + 2)$$

Notemos ainda que se mudarmos a ordem da composição mudamos o resultado final, neste caso vamos usar a composição $f \circ g$ para constatar essa diferença.

Seja $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(5x) = 3(5x)^2 + 2$$

Definição: A função $f : A \to B$ é chamada de injetiva se para cada par distintos de pontos de A suas imagens sob f são distintas. Ela é chamada de sobrejetiva, se todo elemento de B é imagem de algum elemento de A sob a função f. Se f for injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo, então ela é chamada de bijetora. Formalmente temos:

f é injetiva se $[f(a) = f(a')] \Rightarrow [a = a']$

f é sobrejetiva se $[b \quad B] \Rightarrow [b = f(a)$ para pelo menos um $a \in A]$

A injetividade depende unicamente do domínio da f, já a sobrejetividade depende do contradomínio de f também. Uma função composta de duas funções injetivas também será injetiva, e uma função composta de duas funções sobrejetiva também será sobrejetiva, com isso segue-se também que a composição de duas funções bijetoras será uma função bijetora.

Se f é bijetora, existirá uma função de B para A chamada de inversa de f. Ela é denotada por f^{-1} e é definida por $f^{-1}(b)$ como o único elemento a de A para qual $f(a) = b$. Dado $b \in B$, o fato de f ser sobrejetiva implica que existe um elemento $a \in A$; o fato que f é injetiva implica que há um único elemento a. É fácil para ver que se f é bijetora então f^{-1} é bijetora.

Um critério muito útil para demonstrar que a função f é bijetora é mostrado no seguinte lema:

Lema 2.1: Seja $f : A \rightarrow B$. Se temos a função $g : B \rightarrow A$ e $h : B \rightarrow A$ tal que, $g(f(a)) = a$ para algum a em A e $f(h(b)) = b$ para algum b em B, então f é bijetora e $g = h = f^{-1}$.

Note que se $f : A \rightarrow B$ é bijetora e $B_0 \subset B$, nós temos dois sentidos para a notação $f^{-1}(B_0)$. Ele está denotando a pré-imagem de B_0 sob a função f ou a imagem de B_0 sob a função $f^{-1} : B \rightarrow A$. Estes dois sentidos dão precisamente o mesmo subconjunto de A, de qualquer modo, assim não há ambiguidade.

3 | RELAÇÕES

Uma concepção que em alguns momentos é mais geral que essa de função é a concepção de uma relação. Nesta seção nós definiremos matematicamente qual o significado de uma relação, e consideraremos dois modelos de relações que acontecem com grande frequência dentro da matemática: **relação de equivalência e relação de ordem.**

Definição: A relação sobre um conjunto A é um subconjunto C do produto cartesiano A X A.

Se C é uma relação sobre A, nós usamos a notação xCy, ou seja, o par ordenado $(x, y) \in C$. Nós lemos "x está na relação C com y".

A regra de associação r para a função $f : A \rightarrow A$ é também um subconjunto de $A \times A$.

Porém, ela é um subconjunto de um tipo muito especial, tal que, cada elemento de A aparece na primeira coordenada de um elemento de r exatamente uma vez. Qualquer subconjunto de $A \times A$ é uma relação sobre A.

Como exemplo, podemos citar o conjunto P de todas as pessoas do mundo, e definimos $D \subset P \times P$ pela igualdade:

$$D = \{(x, y) | x \text{ são os descendentes de } y\}.$$

Então D é a relação no conjunto P. As afirmações de que "x está na relação D com y" e "x é descendente de y" significam precisamente a mesma coisa, isto é, dizer que $(x, y) \in D$. Duas outras relações em D são as seguintes:

$$B = \{(x, y) | x \text{ tem um antepassado que também é antepassado de } y\}$$

$$S = \{(x, y) | \text{ os pais de } x \text{ também são pais de } y\}$$

Nós chamamos de *B* a "relação de sangue" e chamamos de *S* a "relação de irmãos". Estas três relações têm muitas propriedades diferentes. O relacionamento de sangue é simétrico, por exemplo, (se *x* é um parente de sangue de *y*, então *y* é um parente de sangue de *x*), entretanto a relação de descendência não é simétrica. Nós consideraremos estas relações em breve.

3.1 Equivalências de Relações e Divisões

Uma relação equivalente em um conjunto *A* é a relação C em *A* preservando as seguintes propriedades:

(1) Reflexiva: xCx para algum $x \in A$ $[(x, x)]$

(2) Simétrica: se xCy, então yCx $[(x, y) \rightarrow (y, x)]$

(3) Transitiva: se $x\mathrm{C}y$ e yCz então xCz $[(x, y) \wedge (y, z) \rightarrow (x, z)]$

No exemplo utilizado anteriormente, a relação de descendência *D* não é reflexiva nem simétrica, enquanto a relação de sangue *B* não é transitiva (eu não tenho uma relação de sangue com minha mulher, embora meu filho tenha!). Já a relação de irmãos, de qualquer modo, é uma relação de equivalência.

Não há nenhuma razão para usar uma letra maiúscula, ou uma letra de algum tipo, para denotar uma relação, mesmo embora ele sendo um conjunto. Um símbolo que é frequentemente usado para denotar uma equivalência de relação é o **til**, representado pelo símbolo "~". Podemos reescrever nossas propriedades de relações da seguinte forma:

(1) $x \sim x$ para algum $x \in A$

(2) Se $x \sim y$, então $y \sim x$

(3) Se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$

Existem muitos outros símbolos que tem sido utilizado para relações de equivalência particulares.

Dada uma relação de equivalência ~ em um conjunto *A* e um elemento *x* de *A*, nós definimos um subconjunto *E* de *A* chamado de classe de equivalência determinado por *x*, pela equação:

$$E = \{y | y \quad x\} = [x]$$

Note que a classe de equivalência *E* é determinada por *x* contém *x*, já que $x \sim x$. A equivalência de classe possui a seguinte propriedade:

Lema 3.1: Duas equivalência de classe *E* e *E'* são ambas disjuntas ou iguais.

Prova: Seja *E* a classe de equivalência determinada por *x*, e seja *E"* a classe de equivalência determinada por *x"*. Supomos que $E \cap E'$ é não vazia; seja *y* um ponto de $E \cap E''$ (mostrado na figura 7). Nós demonstraremos que $E = E'$.

Por definição, nós temos $y \sim x$ e $y \sim x'$. Por simetria podemos concluir que $x \sim y$ e $y \sim x''$, pela transitividade teremos que $x \sim x''$. Se agora *w* é algum ponto de *E*, tem-se que $w \sim x$ por definição, se seguimos para a aplicação da transitividade de $w \sim x''$ nós concluímos que $E \subset E'$.

A simetria da situação permite a conclusão que $E' \subset E$, logo temos que $E = E'$.

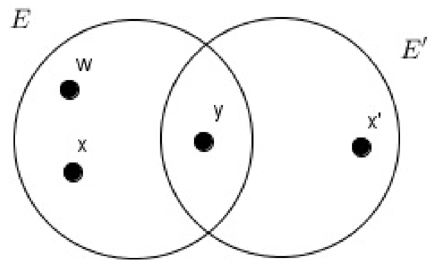

Figura 7 – Interseção entre os conjuntos E e E''

Fonte: Autor

Dada uma relação de equivalência em um conjunto A, nós denotamos por "ξ ", ou como apresentados em outros livros "$A/\sim$ ", a coleção de todas as classes de equivalência determinada por essa relação. O lema anterior demonstra que elementos distintos de ξ são disjuntos. Além disso, a união dos elementos de ξ é igual a todos de A, por que cada elemento de A pertence a uma classe de equivalência. A coleção ξ é um exemplo particular do que chamaremos de uma partição de A.

Definição: Uma partição de um conjunto A é uma coleção dos subconjuntos disjuntos de A, cuja união é todo o conjunto A.

Estudar relações de equivalência em um conjunto A e estudar partição de A, na verdade é a mesma coisa. Dada alguma partição D de A, há exatamente uma relação de equivalência em A do qual ele é derivado.

A prova não é difícil. Para demonstrarmos a partição D veremos para alguma relação de equivalência, nós definimos uma relação C em A pela afirmação $x\ C\ y$ se x e y pertence ao mesmo elemento de D. A simetria de C é óbvia; a reflexiva segue para o fato que a união de elementos de D é igual a todo o A; a transitividade segue para o fato que elementos disjuntos de D são disjuntos. É simples para verificar que a coleção de classe de equivalências determinada por C é precisamente a coleção D.

A demonstração é semelhante a uma relação de equivalência, supomos que C_1 e C_2 são duas relações de equivalência sobre A que dão origem a mesma coleção de classes equivalências D. Dado $x \in A$, nós demonstraremos que yC_1x se, somente se, $y\ C_2\ x$, para qual nós concluímos que $C_1 = C_2$. Seja E_1 a classe de equivalência determinada por x relativo a relação C_1; seja E_2 a classe de equivalência determinada por x relativo a relação C_2. Então E_1 é um elemento de D assim ele é igual ao único elemento D de D que contém x. De forma similar, E_2 é igual a D. Agora por definição, E_1 consiste de todo y tal que $y\ C_1\ x$, e E_2 consiste de todo y tal que $y\ C_2x$. Logo $E_1 = \mathrm{D} = E_2$, portanto está provado.

Como exemplo podemos citar a coleção L de todas as retas lineares em um plano paralelo a reta $y = -x$. Então L é a partição do plano, desde que cada ponto encontra-se sobre uma linha e cada par de distintas linhas são disjuntas. A partição L vem da relação de equivalência sobre o plano que diz que pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são equivalentes se $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.

3.2 Relação de Ordem

A relação C sobre um conjunto A é chamado de uma relação de ordem (ou simplesmente ordem ou ainda ordem linear), se satisfaz as seguintes propriedades:

(1) Comparabilidade: Para cada x e y em A para o qual $x \neq y$, ou xCy ou yCx.

(2) Não reflexiva: Para nenhum $x \in A$, a relação xCx é válida.

(3) Transitiva: Se xCy e yCz, então xCz.

Note que a propriedade (1) por ela mesma exclui a possibilidade que para algum par de elementos x e y de A, ambas as relações xCy e yCx existem (**ou** significa, **um ou o outro, ou ambos**). Porém, as propriedades (2) e (3) combinadas não excluem essa possibilidade; se ambas xCy e yCx ajudam, transitividade significa que, contradizendo a não reflexiva.

Consideremos então a relação sobre a reta real que consiste de todos os pare (x, y) de números reais tal que $x < y$. Ela é uma relação de ordem, chamaremos de **relação usual de ordem** sobre a reta real. Uma relação de ordem menos familiar sobre a reta real é a seguinte: Definindo xCy se $x^2 < y^2$, ou se $x^2 = y^2$ e $x < y$.

Enquanto o til, ~, é o símbolo genérico para uma relação equivalente, o símbolo **menor que**, "< ", é geralmente usado para denotar uma relação de ordem. Usando esta notação, as propriedades de uma relação de ordem torna-se:

(1) Se $x \neq y$, então, ou $x < y$ ou $x > y$.

(2) Se $x < y$, então $x \neq y$.

(3) Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.

Nós iremos usar a notação $x \leq y$ para declarar que, ou "$x < y$"ou "$x = y$"; e nós usaremos a notação $y > x$ para mostrarmos que "$x < y$". Nós escreveremos $x < y < z$ para dizer que "$x < y$"e "$y < z$".

Definição: Se X é um conjunto e $<$ é uma relação de ordem em X, e se $a < b$, nós usamos a notação (a, b) para denotar o conjunto: $\{x | a < x < b\}$;

Ele é chamado um intervalo aberto em X. Se esse conjunto é vazio nós chamamos a de o antecessor de b e chamamos b de o sucessor de a.

Definição: Supomos que A e B são dois conjuntos contendo as relações de ordem $<A$ e $<B$, respectivamente. Nós dizemos que A e B possuem o mesmo tipo de ordem se há uma bijeção correspondente entre eles que preserva a ordem; isto é, se existe uma função bijetora $f : A \to B$ tal que: $a_1 <A\, a_2 \Rightarrow f(a_1) <B\, f(a_2)$.

Por exemplo, o intervalo $(-1, 1)$ de números reais teremos o mesmo tipo de ordem para o conjunto dos números reais, para a função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

É uma correspondência bijetora que preserva a ordem. Veja na figura 8.

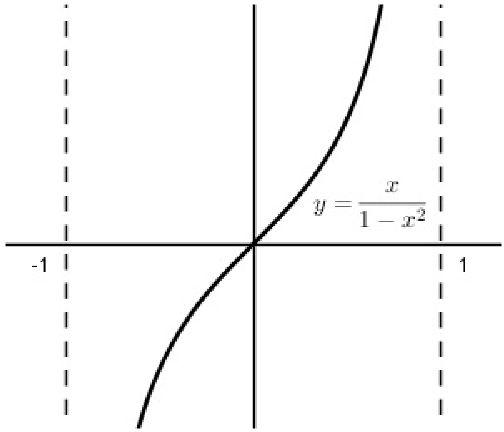

Figura 8 – $(-1, 1)$ e $\mathbb{R}$ têm o mesmo tipo de ordem

Fonte: Autor

Outra forma de exemplo é utilizando o conjunto $A = \{0\} \cup (1, 2)$ de $\mathbb{R}$, temos o mesmo tipo de ordem quando o subconjunto $[0, 1) = \{x | 0 \leq x < 1\}$ de $\mathbb{R}$. A função $f : A \to [0, 1)$ definida por:

$$f(0) = 0 \text{ e } f(x) = x - 1 \text{ para } x \in (1, 2)$$

Sendo assim preservando a ordem correspondente. Podemos ver na figura 9.

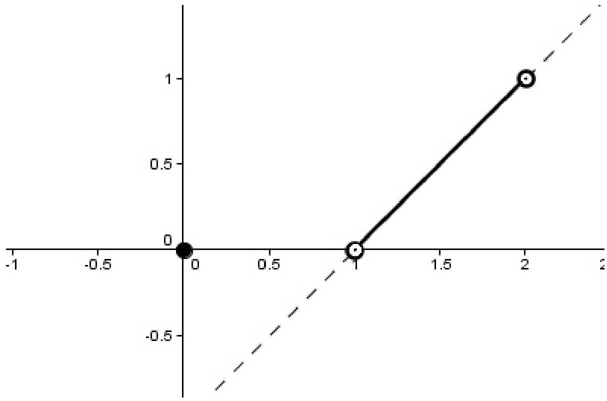

Figura 9 – $\{0\} \cup (1, 2)$ e $[0, 1)$ têm o mesmo tipo de ordem

Fonte: Autor

Um interessante caminho para definir uma ordem de relação, que é usado por nós recentemente em alguns exemplos, é o seguinte:

Definição: Suponha que A e B são dois conjuntos com relações de ordens $<A$ e $<B$

respectivamente. Definimos uma relação de ordem $<$ em A X B como sendo: a_1 X $b_1 < a_2$ X b_2.

Se $a_1 <A\ a_2$, ou $a_1 = a_2$ e $b_1 <B\ b_2$. Ele é chamado de relação de ordem dicionário sobre A X B, pois, se parece com a ordem das letras, utilizada em dicionários.

A razão para a escolha do termo é bastante evidente. A definição da regra $<$ é o mesmo da regra usada para a ordem das palavras no dicionário. Dada duas palavras, serão comparadas suas primeiras letras e ordem de palavras conforme a ordem em que suas primeiras letras aparecem no alfabeto. Se as primeiras letras são as mesmas, então compararemos as segundas letras, e assim por diante.

Para exemplificarmos, vamos considerar o conjunto $[0, 1)$ de números reais e o conjunto $\mathbb{Z}+$ de inteiros positivos, ambos em sua ordem usual; seja também $\mathbb{Z}+$ X $[0, 1)$ a ordem dicionário. Este conjunto têm o mesmo tipo de ordem que o conjunto dos reais não negativos; a função:

$$f(n \text{ X } t) = n + t - 1$$

É a bijeção necessária para preservação da ordem correspondente. Por outro lado, o conjunto $[0, 1)$ X $\mathbb{Z}+$ no dicionário possui bastante diferença no tipo de ordem; por exemplo, todo elemento deste conjunto ordenado possui um sucessor. Estes conjuntos são mostrados na figura 10.

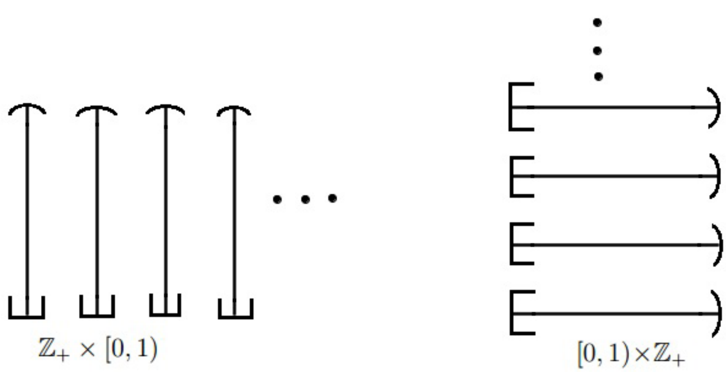

Figura 10 – O conjunto $[0, 1) \times Z+$ na ordem dicionário

Fonte: Autor

Uma das propriedades dos números reais que é muito importante é a propriedade do **menor limite superior**. Vejamos uma definição dessa propriedade para um conjunto ordenado qualquer. Primeiro, nós definiremos algumas coisas necessárias.

Suponhamos que A é um conjunto ordenado pela relação $<$. Seja A_0 o subconjunto de A. Nós dizemos que b e o maior elemento de A_0 se b pertence a A_0 e se $x \leq b$ para todo $x \in A_0$. De forma similar, nós dizemos que a é o menor elemento de A_0 se $a \in A_0$ e se $a \leq x$ para todo $x \in A_0$. É fácil ver que um conjunto possui no máximo um maior elemento e no máximo um menor elemento.

Nós dizemos que o subconjunto A_0 é limitado superiormente se possui um elemento b de A tal que $x \leq b$ para todo $x \in A_0$; b é chamado de limite superior de A_0. Se o conjunto de todos os limites superiores de A_0 possui menor elemento, esse elemento é chamado de menor limite superior de A_0. Ele e representado por $supA_0$; ele pode ou não pertencer a A_0, se ele pertencer será o maior elemento de A_0.

Similarmente, A_0 será limitado inferiormente se ele têm um elemento a de A tal que $a \leq x$ para todo $x \in A_0$; o elemento a é chamado de limite inferior de A_0. Se o conjunto de todos os limites inferiores possui um maior elemento, esse elemento será chamado de o maior limite inferior de A_0. Ele é representado por $infA_0$; ele pode ou não pertencer a A_0, se ele pertencer será o menor elemento de A_0.

Agora nós definiremos a propriedade do limite superior.

Definição: Um conjunto ordenado A é dito que possui a propriedade do supremo se todo subconjunto não vazio A_0 de A que é limitado superiormente têm um menor limite superior.

De forma semelhante, o conjunto A é dito que possui a propriedade do ínfimo se todo subconjunto não vazio A_0 de A que é limitado inferiormente possui um maior limite inferior.

Por exemplo, consideramos o conjunto $A = (-1, 1)$ de números reais na ordem usual. Assumimos o fato que os números reais possui a propriedade do supremo, então esse conjunto também possui a propriedade do supremo. Dado algum subconjunto A haverá um limite superior em A, eles seguem que o menor limite superior (nos números reais) está em A. Por exemplo, o subconjunto $\{-1/2n | n \in \mathbb{Z}+\}$ de A, embora ele não tenha um maior elemento possui um menor limite superior em A, que é o número 0.

Sobre o outro caso, tomemos o conjunto $B = (-1, 0) \cup (0, 1)$ não possui a propriedade do supremo. O subconjunto $\{-1/2n | n \in \mathbb{Z}+\}$, por exemplo, é limitado superiormente por algum elemento do intervalo $(0, 1)$, mas ele não tem menor limite superior em B.

4 I OS NÚMEROS INTEIROS E OS NÚMEROS REAIS

Até agora nós estivemos discutindo o que podemos chamar de **lógica fundamental** para os estudos de topologia (as concepções fundamentais de teoria dos conjuntos). Agora nós falaremos sobre o que podemos chamar de **fundamentos da matemática**. Nós já usamos eles de forma informal nos exemplos das seções anteriores.

Agora nós iremos formalizá-lo de forma mais precisa.

Um caminho para estabelecer esses fundamentos e de construir o sistema dos números reais, usando somente os axiomas de teoria dos conjuntos (construir eles de forma manual). Esse caminho que aproxima o assunto toma bastante tempo e esforço, é de grande interesse da lógica matemática.

Um segundo caminho e simplesmente assumir um conjunto de axiomas para os números reais e trabalhar com esses axiomas. Nesta seção nós iremos mostrar essas aproximações para os números reais. Especificamente, iremos ter um conjunto de axiomas para os números reais e indicaremos como as propriedades familiares aos números reais, os inteiros por sua vez são derivados destes.

Primeiro nos falta uma definição de teoria dos conjuntos.

Definição: Uma operação binária em um conjunto A é uma função definida como f de A X A em A.

Quando aplicamos uma operação binária f em um conjunto A, nós normalmente usamos uma notação diferente da notação funcional padrão introduzida anteriormente. Em vez de escrevermos o valor da função f no ponto (a, a') por $f(a, a')$, nós usualmente escrevemos o símbolo para a função entre as duas coordenadas dos pontos em questão, trocamos o valor da função de (a, a') por afa'.

Além disso, é mais comum usar um símbolo do que uma letra para denotar uma operação. Os símbolos muitas vezes usados são o símbolo de adição "+", o de multiplicação "."e "∘", e o asterisco "*", porém existem alguns outros.

Nós assumimos que existe um conjunto $\mathbb{R}$, chamado de o conjunto dos números reais, com duas operações binárias + e . em $\mathbb{R}$, chamadas de adição e multiplicação, respectivamente, e uma relação de ordem $<$ em $\mathbb{R}$ tal que as seguintes propriedades são validas:

Propriedades algébricas

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$; $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para todo x, y, z em $\mathbb{R}$.

(2) $x + y = y + x$; $x \cdot y = y \cdot x$ para todo x, y em $\mathbb{R}$.

(3) Existe um único elemento de $\mathbb{R}$ chamado de **zero**, denotado por 0, tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Existe um único elemento de $\mathbb{R}$ chamado de **um**, diferente de zero e denotado por 1 tal que $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(4) Para algum $x \in \mathbb{R}$, existe um único elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ diferente de 0, existe um único elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot y = 1$.

(5) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ para todo $x, y, z \in$ R. Uma mistura de álgebra e propriedades de ordem

(6) Se $x > y$, então $x + z > y + z$. Se $x > y$ e $z > 0$, então $x \cdot z > y \cdot z$.

Propriedades de ordem

(7) A relação de ordem $<$ tem a propriedade do menor limite superior.

(8) Se $x < y$, existe um elemento z tal que $x < z$ e $z < y$.

Para as propriedades (1)-(5) segue as regras familiares da álgebra. Dado x, denotamos por $-x$ o número y tal que $x+y = 0$, ele é chamado de o negativo de x. Denotamos a operação subtração pela fórmula $z - x = z + (-x)$. Similarmente, dado $x \neq 0$, denotamos por $1/x$ o número y tal que $x \cdot y = 1$, ele é chamado de inverso de x. Definimos o quociente z/x por a fórmula $z/x = z \cdot (1/x)$. A regra usada de sinal, é a regra da soma e da multiplicação de fração, seguindo os teoremas. Nós muitas vezes escrevemos xy em vez de escrever $x \cdot y$.

Quando uma propriedade (6) é adjunta as propriedades (1)-(5), provando uma regras usual de desigualdades, veja a seguinte:

Se $x > y$ e $z < 0$, então $x \cdot z < y \cdot z$, $-1 < 0$ e $0 < 1$.

Nós definimos o número x como positivo se $x > 0$, e definimos como negativo quando

$x < 0$. Nós representamos os reais positivo por e os reais não negativos por $\mathbb{R}+$.

As propriedades (1)-(6) são propriedades comuns na álgebra moderna, alguns conjuntos com duas operações satisfazem (1)-(5)são chamado de um corpo algébrico. O corpo tem uma relação de ordem satisfazendo (6), ele é chamado de corpo ordenado.

As propriedades (7) e (8), por outro lado, são propriedades familiares a topologia. Elas envolvem somente a relação de ordem, qualquer conjunto satisfazendo (7) e (8) são chamados topologicamente de linearmente continuo.

Agora acontece que, quando juntamos os axiomas de corpo ordenado [propriedades (1)-(6)], e os axiomas de continuamente linear [propriedades (7) e (8)], os resultados listados contém algumas redundâncias. Propriedade (8), em particular, é provada em consequência de outros; dado $x < y$, uma demonstração que $z = (x + y)/(1 + 1)$ satisfaz as necessidades de (8). Contudo, nós incluímos (8) na lista das propriedades básicas dos números reais para enfatizar que ele é a propriedade do menor limite superior, são duas propriedades cruciais para a relação de ordem dos $\mathbb{R}$.

Até agora não há nada nesta lista definindo o que é um inteiro. Nós definimos agora os inteiros, usando somente as propriedades (1)-(6). Primeiramente, nós faremos a seguinte definição: Um subconjunto A de números reais e dito ser indutivo se para algum $x \in A$, o número $x + 1$ também pertence a A.

Definição: Seja A à coleção de todos os subconjuntos indutivos dos R que contém 1. Então o conjunto $\mathbb{Z}+$ dos inteiros positivos é definido pela equação:

$$\mathbb{Z}_+ = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

Note que o conjunto dos $\mathbb{R}+$ dos números reais positivos contém o 1 e é indutivo (se $x > 0$, então $x + 1 > 0$), sendo assim temos que R+ pertence a A. por tanto, $\mathbb{Z}+ \subset \mathbb{R}+$, assim os elementos de $\mathbb{Z}+$ são de fato positivos, quando selecionada a terminologia indicada.

De fato, é fácil de ver que 1 é o menor elemento de $\mathbb{Z}+$, por causa do conjunto de número x real dado por $x \geq 1$ é indutivo e contém 1. As propriedades básicas de $\mathbb{Z}+$, que seguem a definição são os seguintes:

(1) $1 \in \mathbb{Z}+$.

(2) $\mathbb{Z}+$ é indutivo.

(3) Se $\mathbb{Z}_0$ é um conjunto indutivo dos inteiros positivos que contém 1, temos então $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}+$ (Principio da Indução).

Nós definimos o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros como sendo o conjunto dos inteiros positivos Z+, o número zero 0 e os negativos dos elementos de $\mathbb{Z}+$. Uma prova que a soma, a diferença e o produto de dois inteiros são inteiros, já o quociente pode não ser necessariamente um inteiro. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos quocientes dos inteiros é chamado de o conjunto dos números racionais.

Prova-se também que, dado o inteiro n não há nenhum inteiro a tal que $n < n + a < n + 1$.

Todos esses fatos são familiares. Uma propriedade dos inteiros positivos que normalmente não é tão familiar, mas é muito útil é a seguinte:

4.1 Teorema da boa ordenação

Todo subconjunto não vazio dos $\mathbb{Z}$ + possui um menor elemento.

Prova: Se $n \in \mathbb{Z}$ +, nós usamos $\{1, ..., n\}$ para representar o conjunto $\{x|x \in \mathbb{Z}$ + e 1 $\leq x \leq n\}$. Porque não há um inteiro a entre n e $n + 1$.

$$\{1, ..., n + 1\} = \{1, ..., n\} \cup \{n + 1\}.$$

Nós primeiro provaremos por indução que, para cada $n \in \mathbb{Z}$ +, a seguinte declaração é verdadeira: Todo subconjunto não vazio de $\{1, ...n\}$ possui um menor elemento.

Seja $\mathbb{Z}_0$ o conjunto de todos os n inteiros positivos que essas declarações são verdadeiras. Então $\mathbb{Z}_0$ contém o 1, desde que $n = 1$, neste caso o subconjunto não vazio $\{1, ..., n\}$ é representado como o conjunto $\{1\}$. Então supomos que $\mathbb{Z}_0$ contém n, nós provaremos que ele contém $n + 1$. Assim seja C um subconjunto não vazio do conjunto $\{1, ..., n + 1\}$. Se C possui somente o elemento $n + 1$, então ele é o menor elemento de C. Do contrário considere o conjunto $C \cap \{1, ..., n\}$ que é não vazio. Por causa de $n \in \mathbb{Z}_0$, este conjunto possui um menor elemento, que automaticamente também é o menor elemento de C. Logo $\mathbb{Z}_0$ é indutivo e contém o 1, então nós concluímos que $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}+$, pois vale para todo $n \in \mathbb{Z}+$.

Agora nós provaremos o teorema. Suponha que D é um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ +. Escolhemos um elemento n qualquer de D. Então o conjunto $A = D \cap \{1, ..., n\}$ é não vazio, logo A possui um menor elemento k, o elemento *a*utomaticamente é o menor elemento de D também.

Tudo nós temos feito até agora só usamos os axiomas para um corpo ordenado, propriedades (1)-(6) dos números reais. Mas em que ponto será usada a propriedade (7), o axioma do menor limite superior?

Para uma coisa, falta o axioma do limite superior para provar que o conjunto $\mathbb{Z}+$ de inteiros positivos não tem um maior limite em $\mathbb{R}$. É a propriedade Arquimediana da reta real. Para provar ele, nós assumimos que $\mathbb{Z}+$ tem um limite superior e deriva uma contradição. Se $\mathbb{Z}+$ tem um limite superior, ele possui um menor limite superior b. Existe $n \in \mathbb{Z}+$ tal que $n > b - 1$; do contrário, se $b - 1$ é um limite superior para $\mathbb{Z}+$ menor do que b. Então $n + 1 > b$, contradizendo o fato que b é um limite superior para $\mathbb{Z}+$.

O axioma do menor limite superior também é usado para provar um número de outras coisas sobre $\mathbb{R}$. Ele é usado para provar, por exemplo, a existência da única raiz quadrada positiva $\sqrt{x}$ para cada número real. Este fato, por sua vez, é usado para demonstrar a existência dos números reais que não são números racionais; por exemplo, o número $\sqrt{2}$.

Nós usamos o símbolo 2 para representar 1+1, o símbolo 3 para representar 2+1 e assim por diante por meio destes símbolos padrões para indicar inteiros positivos. Este é um fato que para cada inteiro positivo usa-se um único símbolo.

5 | PRODUTO CARTESIANO ARBITRÁRIO

Nós já sabemos como funciona o produto cartesiano de dois conjuntos, tal como A X B. Agora nós estenderemos para como funciona o produto cartesiano de vários conjuntos.

Primeiramente nós vamos considerar um caso especial e logo depois nós daremos a definição geral.

Usaremos o conjunto $\{1,...,m\}$ chamado de todos os inteiros positivos a tal que $1 \leq a \leq m$. Seja um conjunto X, nós definimos uma m-upla de elementos de X por uma função:

$$X : \{1,...,m\} \to X.$$

Se x é uma m-upla nós chamaremos o valor de x em i pelo símbolo xi em vez de $x(i)$. E nós definiremos a função x pelo símbolo:

$$(x_1,..., x_m)$$

chamaremos de X^m o conjunto de todas m-uplas de elementos de X.

Agora nós podemos definir o produto cartesiano.

Definição: Suponha que $\{A1, ...,Am\}$ é uma coleção de conjuntos, indicando os inteiros positivos de 1 a m. Seja $X = A1 \cup ... \cup Am$. O "produto cartesiano" indicando a coleção dos conjuntos, denotado por:

$$\prod_{i=1}^{m} Ai \; Ai \text{ ou } A1 \text{ X ... X } Am$$

É definido por o conjunto de todas as m-uplas $(x1, ..., xm)$ de elementos de X tal que $xi \in Ai$ para todo i.

$$(a, b, c) \leftrightarrow (a, (b, c)) \leftrightarrow ((a, b), c)$$

Para generalizar o procedimento nós definimos o processo por analogia. Sendo um conjunto X nós definimos ω-upla de todos os elementos de X com uma função $x : \mathbb{Z}+ \to X$, nós também chamaremos essa função de sequência ou sequência infinita de elementos de X. Se x é um ω-upla nós chamaremos o valor de x em i por xi em vez de $x(i)$ e nós denotamos x por este símbolo:

$$(x1, x2, ...) \text{ ou } (x_n)n \in \mathbb{Z}+$$

Nós tomamos X^ω para denotar o conjunto de todos ω-upla de elementos de X.

Definição: Suponha que $\{A_1, ...,A_n, ...\}$ é uma coleção de conjuntos indicados por os inteiros positivos. Seja X a união dos conjuntos desta coleção. O produto cartesiano desta coleção indicadas de conjuntos é denotado por:

$$\prod i \in Z+A_1 \text{ ou } A_1 \times A_2 \times ...$$

É definido por o conjunto de todas ω-uplas de elementos de X tal que $xi \in Ai$ para todo i.

Não exigimos nessa definição que os conjuntos Ai sejam diferentes uns dos outros.

De fato, todos podem ser iguais ao conjunto X. Neste caso o produto cartesiano $A_1 \times ...\times A_m$ é justamente o conjunto X^m de todas as m-uplas de elementos de X, e o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times...$ é justamente o conjunto de todas as ω-uplas de elementos de X.

Exemplo: Utilizando os números reais temos que $\mathbb{R}^m$ é chamado de espaço euclidiano. Da mesma forma também temos $\mathbb{R}^\omega$ é chamado de espaço euclidiano infinito, sendo o conjunto ω-uplas $(x_1, x_2, ...)$ de números reais, que é o conjunto das funções $x : \mathbb{Z}+ \to R$.

Agora nós retornaremos para a definição geral de produto cartesiano, que vai incluir esses casos especiais. Primeiramente nós entenderemos melhor o que é uma coleção de conjuntos indicando uma coleção implícita assumida acima.

Definição: Seja A uma coleção de conjuntos. Uma função índice para A é uma função f sobrejetiva de um conjunto J, chamado conjunto índice de $\mathcal{A}$. A coleção $\mathcal{A}$, junto com a função índice f é chamado de família de conjuntos indexados.

Tomemos o elemento a de J, nós podemos denotar o conjunto $f(a)$ pelo símbolo A_a. E nós podemos denotar a família indexada pelo símbolo: $\{A_a\}a \in J$.

Que compreende a família de todos A_a, com a ordenado por J. As vezes nós escrevemos simplesmente $\{A_a\}$, nitidamente ele é o conjunto indexado.

Note que a função índice precisa ser sobrejetiva, ela não é necessariamente injetiva. É possível para A_a e A_β ser o mesmo conjunto de $\mathcal{A}$, mesmo que $a \neq \beta$.

Uma maneira em que a função índice pode ser usada é para dar uma nova notação para uma união e intersecção arbitrária de conjuntos. Suponha que $f : J \rightarrow \mathcal{A}$ é uma função índice para $\mathcal{A}$; se A_a denota $f(a)$. Então nós definimos:

$$\bigcup_{\alpha \in J} A\alpha = \{x | \text{ para pelo menos um } \alpha \in J,\ x \in A\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in J} A\alpha = \{x | \text{ para todo } \alpha \in J,\ x \in A\alpha\}$$

Essas são apenas novas notações para as concepções definidas anteriormente, veremos que o primeiro é igual a união de todo elemento de $\mathcal{A}$ e o segundo igual a intersecção de todo elemento de $\mathcal{A}$.

O principal uso da função índice, vemos quando definimos arbitrariamente o produto cartesiano: Seja J um conjunto índice. Dado um conjunto X, nós definimos uma j-upla de elementos de X por uma função $x : J \rightarrow X$. Se a é um elemento de J, nós normalmente denotamos o valor de x em a por x_a em vez de $x(a)$, e nós normalmente escrevemos a função x pelo símbolo: $(x_a)a \in J$.

Que é no caso o caminho que nós percorremos até chegarmos a uma **notação upla** para um conjunto de índice arbitrário J. Nós indicamos o conjunto de todas as J uplas de elementos de X por .

Definição: Seja $\{A_a\}a \in J$ uma família indexada de conjuntos. Seja $X = \bigcup_{\alpha \in J} A_a$. O produto cartesiano dessa família indexada de conjuntos é denotada por:$\prod_{a \in j} A_a$.

É definido por o conjunto de todas as J-uplas $(x_a)\ a \in J$ de elementos de X, tal que, $x_a \in A_a$ para todo $a \in J$.

Dito diferentemente, esse produto cartesiano é justamente o conjunto de todas as funções x: $J \rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} A_a$ tal que, $x(a) \in A_a$ para todo $a \in J$.

De vez em quando nós escrevemos o produto simplesmente por $\prod Aa$ e os elementos gerais por (x_a) se o conjunto de índices for implícito.

Se todos os conjuntos A_a são iguais ao conjunto X, o produto cartesiano $\prod_{a \in j} A_a$ é justamente o conjunto X^j, de toda J-upla de elementos de X. Lidando com o conjunto X^j, às vezes é usada a “notação upla” para estes elementos, já em outra oportunidade é usada a notação funcional, dependo do que for conveniente.

6 I CONJUNTOS FINITOS

Conjuntos finitos e conjuntos infinitos, enumeráveis e não enumeráveis são os assuntos que serão abordados a frente. Contudo nós pretendemos nesta seção e na próxima, não somente fazer você entender estes pontos, mas também esclarecer alguns pontos particulares da lógica. Primeiro nós definiremos o que é um conjunto finito.

Recordando que se n é um inteiro positivo nós usamos $\{1, ..., n\}$ para representar o conjunto:

$$\{x | x \in \mathbb{Z}+, \text{ e } 1 \leq x \leq n\};$$

ele é chamado de uma parte dos inteiros positivos.

O conjunto $\{1, ..., n\}$ são os protótipos para o que nós chamaremos de **conjunto finito**.

Definição: Um conjunto A é chamado de finito se ele é vazio ou se existe uma função bijetora: $f : A \rightarrow \{1, ..., n\}$.

Para algum $n \in \mathbb{Z}+$. No primeiro caso temos que A possui 0 elementos, no último caso, nós temos que A possui n elementos.

Por exemplo, o conjunto $\{1,..., n\}$ possui n elementos, por que ele é uma bijeção correspondente sob a função identidade.

Nós ainda não temos a demonstração que dado um conjunto A, o número de elementos que A possui é unicamente determinado por A. Quando remota nós sabemos que pode existir uma bijeção correspondente de um dado conjunto A com dois diferentes conjuntos $\{1,..., n\}$ e $\{1,...,m\}$.

A possibilidade que mais parece ridícula que podemos citar, é possível duas pessoas contar bolas de gude em uma caixa e chegar a duas respostas diferentes, ambas corretas.

A dificuldade é grande para um valor de n muito grande. Podemos, por exemplo, construir um experimento, tomar a carga de um carro cheio de bolas de gude e pedir para 10 pessoas diferente contarem de forma independente. Quando se pensa dos problemas físicos envolvidos, parece provável que os contadores não cheguem à mesma resposta. É claro, a conclusão a que se pode chegar é que, pelo menos, uma pessoa teve uma resposta. Mas isso significaria assumir que o resultado foi demonstrado empiricamente. Uma alternativa esclarecedora se não há bijeção correspondente entre o conjunto chamado de bolas de gude e das diferentes seções dos inteiros positivos.

Na vida real nós aceitamos a primeira explicação. Nós simplesmente aceitamos esse fato baseado na nossa experiência em contar e comparar conjuntos de objetos, demonstrando uma verdade que temos para grandes conjuntos arbitrários.

De qualquer forma não podemos assumir essa declaração de forma confiável se ele é formulado em termos da existência de uma bijeção correspondente até certo ponto do que em termos da física ativa de contagem, ele é capaz de comprovar matematicamente. Nós provaremos em breve que se $n \neq m$ não existirá função bijetora entre o conjunto A e os dois conjuntos $\{1,...,n\}$ e $\{1,...,m\}$ ao mesmo tempo.

Existem um números de outros fatos **intuitivamente óbvios** sobre conjuntos finitos que são passíveis de provar matematicamente; nós iremos provar alguns nesta seção. Iniciaremos com:

Lema 6.1: Seja n um inteiro positivo. Seja A um conjunto. Seja a_0 um elemento de A. Então existe uma bijeção f do conjunto A com o conjunto denotado por $\{1,.., n+1\}$ se, e somente se, existe uma bijeção g entre os conjuntos $A - \{a_0\}$ e $\{1,..., n\}$.

Prova: Há duas implicações para serem provadas. Primeiro nós assumiremos que há uma bijeção.

$$g : A - \{a0\} \to \{1, ..., n + 1\}$$

Então nós definimos a função $f : A \to \{1,..., n + 1\}$ colocando

$$f(x) = g(x) \text{ para } x \in A - \{a0\} \text{ e } f(a0) = n + 1.$$

Verificamos isso uma vez que f é bijetora.

Para provarmos a recíproca, assumimos que é uma bijeção:

$$f : A \to \{1,..., n + 1\}$$

Se $f(a_0) = n+1$, este caso é fácil, a restrição $f|A - \{a_0\}$ é a bijeção desejada de $A - \{a_0\}$ com $\{1, ..., n\}$. De outra maneira, temos $f(a_0) = m$, e temos a_1 o ponto de A tal que, $f(a_1) = n + 1$. Então $a_1 \neq a_0$. Definimos uma nova função: $h : A \to \{1,..., n + 1\}$ fazendo:

$$h(a_0) = n + 1$$

$$h(a_1) = m$$

$$h(x) = f(x) \text{ para } x \in A - \{a_0, a_1\}$$

É fácil de ver que h é uma bijeção, podemos verificar isso na figura 11.

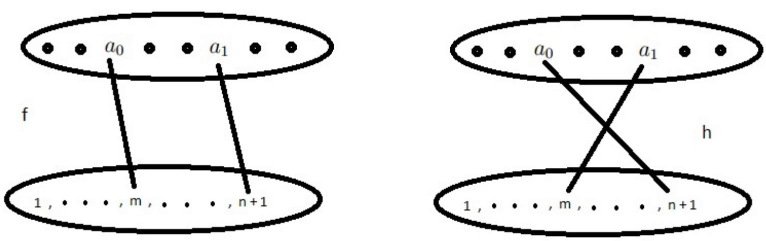

Figura 11 – Bijeção da função h

Fonte: Autor

Chegamos então no que queríamos. Logo a restrição $h|A - \{a_0\}$ é a bijeção desejada de $A - \{a_0\}$ com $\{1, ..., n\}$.

Teorema 6.2: Seja A um conjunto, suponha que exista uma bijeção denotada por $f : A \to \{1, ..., n\}$ para algum $n \in \mathbb{Z}+$. Seja B um subconjunto próprio de A, então não existe uma bijeção $g : B \to \{1, ..., n\}$; porém, existe uma bijeção $h : B \to \{1, ...,m\}$ para algum $m < n$.

Prova: O caso em que $B = \emptyset$ é trivial, pois, não existe uma bijeção do conjunto vazio B com o conjunto não vazio $\{1, ..., n\}$.

Nós provaremos o teorema por indução. Seja $\mathbb{Z}_0$ o subconjunto de $\mathbb{Z}+$ que consiste dos inteiros n para que o teorema seja válido. Nós iremos demonstrar que $\mathbb{Z}_0$ contém o número 1 e é indutivo. Iremos então concluir que $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}+$, assim o teorema será valido para todo inteiro positivo n.

Primeiro demonstraremos que o teorema e válido para $n = 1$, neste caso A consiste de um simples elemento $\{a\}$, sendo assim a única possibilidade para a existência do subconjunto B será de ele ser o conjunto vazio.

Agora assumiremos que o teorema é valido para n, nós provaremos que ele é valido para $n + 1$.

Suponha que $f : A \to \{1,..., n+1\}$ e B é um subconjunto não vazio de A. Escolhemos um ponto a_0 em B e um ponto a_1 em $A-B$. Nós aplicaremos o procedimento do lema anterior que é uma bijeção $g : A - \{a_0\} \to \{1, ..., n\}$.

Agora $B - \{a_0\}$ é um subconjunto de $A - \{a_0\}$, para a_1 pertencente a $A - \{a_0\}$ e não pertencente a $B - \{a_0\}$. Por causa do teorema assumido para o inteiro n nós concluímos que:

(1) Não existe bijeção $h : B - \{a_0\} \to \{1,..., n\}$

(2) Ou $B - \{a_0\} \neq$, ou existe uma bijeção $k : B - \{a_0\} \to \{1, ..., p\}$ para algum $p < n$.

O procedimento do lema combinado com (1) implica que não há bijeção de B com $\{1,..., n+1\}$. Esta é a primeira parte de nossa prova.

Para a segunda parte, notemos que, se $B - \{a_0\} =$, há uma bijeção de B com o conjunto (1), ao mesmo tempo se $B - \{a_0\} \neq$, nós usaremos o procedimento do lema junto com (2), para concluir que há uma bijeção de B com $\{1, ..., p+1\}$.

Neste caso, há uma bijeção de B com $\{1,...,m\}$, para algum $m < n + 1$, que na verdade é o que desejávamos. Pelo princípio da indução provamos que é válido para todo $n \in \mathbb{Z}+$.

Corolário 6.3: Se A é finito, não existe uma bijeção de A com um subconjunto próprio dele.

Prova: Assumimos que B é um subconjunto próprio de A e que $f : A \to B$ é uma bijeção. Por suposição, há uma bijeção $g : A \to \{1, ..., n\}$ para algum n. A composição $g \circ f^{-1}$ é então uma bijeção de B com $\{1, ..., n\}$. O que contradiz o corolário.

Corolário 6.4: O número de elementos de um conjunto A é unicamente determinado por A.

Prova: Seja $m < n$, supomos que há duas bijeções,

$$f : A \to \{1,..., n\}$$
$$g : A \to \{1,...,m\}$$

Então a composição,

$$g \circ f^{-1} : \{1,..., n\} \to \{1,...,m\}$$

é uma bijeção do conjunto finito $\{1, ..., n\}$ com o subconjunto próprio dele, contradizendo o corolário provado.

Corolário 6.5: Se B é um subconjunto do conjunto finito A, então B é finito. Se B é um subconjunto próprio de A, então o número de elementos de B é menor que o número de elementos de A.

Corolário 6.6: $\mathbb{Z}+$ não é finito.

Prova: A função $f : \mathbb{Z}+ \to \mathbb{Z}+ - \{1\}$ definida por $f(n) = n + 1$ é uma bijeção de $\mathbb{Z}+$ com subconjunto próprio dele.

Teorema 6.7: Seja B um conjunto não vazio; seja n um inteiro positivo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) Existe uma função sobrejetiva $f : \{1,..., n\} \rightarrow B$

(2) Existe uma função injetiva $g : B \rightarrow \{1,..., n\}$

(3) B é finito e possui exatamente n elementos.

Prova: Nós provaremos que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1); isto será suficiente para provar a equivalência das afirmações. Seja $A = \{1, ..., n\}$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Dada uma função sobrejetiva $f : A \rightarrow B$, definimos $g : B \rightarrow A$ pela equação: $g(b)$ = menor elemento de $f^{-1}(\{b\})$.

Por f ser sobrejetiva, o conjunto $f^{-1}(\{b\})$ é não vazio. Nós sabemos pelas propriedades de ordem que cada subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}+$ tem um único menor elemento, assim g está bem definida. A função g é injetiva, para $b \neq b'$, então o conjunto $f^{-1}(\{b\})$ e $f^{-1}(\{b'\})$ são disjuntos, logo os menores elementos são diferentes.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja $g : B \rightarrow A$ uma função injetiva. Seja C a imagem do conjunto $g(B)$; então a função g': $B \rightarrow C$ é bijetora. Por que C é um subconjunto de $A = \{1, ..., n\}$, existe uma bijeção $h : C \rightarrow \{1, ..., p\}$ para algum $p \leq n$. A composição $h \circ g'$ é uma bijeção de B com $\{1, ..., p\}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Seja B o conjunto com m elementos, onde $1 \leq m \leq n$. Então ele é uma bijeção: $h : \{1, ...,m\} \rightarrow B$.

Se $m = n$, então h é sobrejetora de A em B quando quisermos. Se $m < n$, nós estendemos h para a sobrejetiva desejada $f : \{1, ..., n\} \rightarrow B$ por definição $f(i) = h(1)$ para $m < i \leq n$.

Corolário 6.8: Seja $\{A_a\}_{a \in J}$ uma família indexada de conjuntos. Se cada conjunto A_a é finito e se o conjunto dos índices J é finito, então o conjunto $\bigcup_{\alpha \in J} A_a$ e $\prod_{\alpha \in J} A_a$ são finitos.

De forma sucinta, esse corolário declara que uniões finitas e produtos finitos de conjuntos finitos são finitos.

7 I CONJUNTOS ENUMERÁVEIS E NÃO ENUMERÁVEIS

Enquanto o conjunto $\{1, ..., n\}$ é um modelo de conjunto finito, o conjunto $Z+$ de todos os inteiros positivos é um modelo do que chamamos de **Conjunto Infinito Enumerável**. Nesta seção nós estudaremos esses conjuntos, nós também iremos construir alguns conjuntos que não são nem finitos e nem infinitos enumeráveis.

Definição: Um conjunto qualquer A é chamado de **infinito** se ele não é finito. Ele é chamado de **infinito enumerável** se tem uma bijeção correspondente, $f : Z+ \rightarrow A$.

Por exemplo, o conjunto Z de todos os inteiros é infinito enumerável. Podemos ver facilmente que a função $f : Z \rightarrow Z+$ definido por:

$$f(x) = \begin{cases} 2n \text{ se } n > 0 \\ -2n + 1 \text{ se } n \geq 0 \end{cases}$$

é uma bijeção.

Ou ainda podemos citar que o produto cartesiano ℤ+ X ℤ+ é infinito enumerável. Se nós representarmos os elementos do produto ℤ+ X ℤ+ pelos pontos dos inteiros positivos, no primeiro quadro que está à esquerda na figura 12 sugere como contar os pontos, que é, como eles expressão a bijeção correspondente com os inteiros positivos.

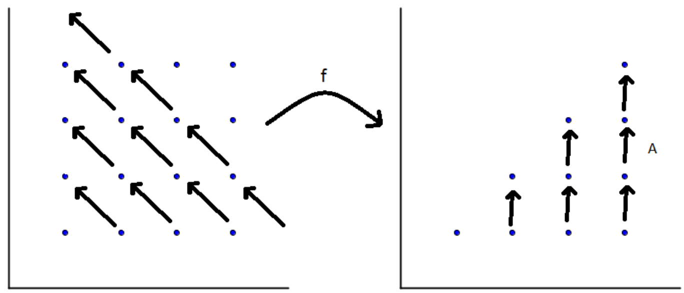

Figura 12 – Expressão da bijeção correspondente com os inteiros positivos

Fonte: Autor

A figura não é a prova, mas, esta figura sugere a prova. Primeiro nós construiremos uma bijeção denotada por f : ℤ+ X ℤ+ → A onde A é o subconjunto de ℤ+ X ℤ+ que consiste dos pares (x, y), tal que, $y \leq x$, definido pela equação $f(x, y) = (x + y - 1, y)$.

Então nós construiremos uma bijeção de A com os inteiros positivos, definindo $g : A \to Z+$ pela formula $g(x,y) = (x - 1)x + y$.

Definição: Um conjunto é chamado de enumerável ou contável se ele é finito ou infinito enumerável. Um conjunto que não é enumerável é dito não enumerável ou incontável.

Existe um teorema sobre os conjuntos enumeráveis que se parece muito com o teorema 6.7 de conjuntos finitos. Ele é o seguinte:

Teorema 7.1: Se B é um conjunto não vazio. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) Existe uma função sobrejetiva f : ℤ+ → B

(2) Existe uma função injetiva $g : B \to Z+$

(3) B é enumerável.

Prova: Nós provaremos as implicações (1) → (2) → (3) → (1).

(1) → (2): Seja f : ℤ+ → B uma função sobrejetiva. Definimos g : B → ℤ+ pela equação $g(b)$ = menor elemento de $(\{b\})$.

Por f ser sobrejetora, $f-1$ é não vazia, assim g está bem definida. A função g é injetiva, se $b \neq b'$, os conjuntos $f(\{b\})$ e $f-1(\{b'\})$ são disjuntos deste modo seus menores elementos são diferentes.

(2) → (3): Seja g : B → ℤ+ uma função injetora, nós provaremos que B é enumerável. Mudando o contradomínio de g nós obtemos uma bijeção de B com um subconjunto de ℤ+. Assim para provarmos o resultado basta provar que todo subconjunto de ℤ+ é enumerável.

Deste modo, seja C o subconjunto de $\mathbb{Z}+$. Se C é finito, ele é enumerável por definição. Logo diremos que C será infinito. Nós temos que provar que C é infinito enumerável, ou seja, nós temos que construir uma bijeção $h : \mathbb{Z}+ \rightarrow C$.

Nós definiremos h por indução. Definiremos $h(1)$ como sendo o menor elemento de C, ele existe pois todo subconjunto não vazio C de $\mathbb{Z}+$ possui um menor elemento. Então assumimos que $h(1), ..., h(n-1)$ são definidos, definiremos então, $h(n)$ = menor elemento de $[C - h(\{1, ..., n-1\})]$.

O conjunto $C - h(\{1, ..., n-1\})$ é não vazio, porque se fosse vazio, então $h : \{1, ..., n-1\} \rightarrow C$ deve ser sobrejetiva, logo C deve ser finito (pelo teorema 7.1). Assim $h(n)$ está bem definido. Por indução, nós temos definido $h(n)$ para todo $n \rightarrow \mathbb{Z}+$.

Para provar que h é injetiva é fácil. Dado $m < n$, podemos observar que $h(m)$ pertence ao conjunto $h(\{1, ..., n-1\})$, uma vez que por definição $h(n)$ não pertence. Por tanto $h(n) \neq h(m)$.

Para demonstrar que h é sobrejetiva, seja c algum elemento de C, nós demonstraremos que c está no conjunto das imagens de h. Primeiro vejamos que $h(\mathbb{Z}+)$ não contém o conjunto $\{1, ..., c\}$, pois, $h(\mathbb{Z}+)$ é infinito e h é injetiva. Portanto, existe $n \in \mathbb{Z}+$ tal que $h(n) > c$. Seja m o menor elemento de $\mathbb{Z}+$ tal que $h(m) \geq c$. Então para todo $\imath < m$, nós teremos $h(\imath) < c$. Assim c não pertence ao conjunto $h(\{1, ...,m-1\})$. Desde então, $h(m)$ é definido quando o menor elemento do conjunto $C - h(\{1, ...,m-1\})$, nós temos $h(m) \leq c$. Colocando as duas desigualdades juntas, nós teremos $h(m) = c$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Suponha que B é enumerável. Se B for infinito enumerável, existirá uma bijeção $f : \mathbb{Z}+ \rightarrow B$, por definição. Se B é finito, existirá uma bijeção $h : \{1, ..., n\} \rightarrow B$ para algum $n \geq 1$. Nós estendemos a função h para uma sobrejetora $f : \mathbb{Z}+ \rightarrow B$ definida por:

$$f(i) = \begin{cases} h(i) \text{ para } i \leq i \leq n; \\ h(1) \text{ para } i > n \end{cases}$$

isto completa a prova do teorema.

Corolário 7.2: Um subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.

Corolário 7.3: O conjunto $\mathbb{Z}+ \text{ X } \mathbb{Z}+$ é infinito enumerável.

Prova: Pelo teorema é suficiente para a prova construir uma função injetora $f : \mathbb{Z}+ \text{ X } \mathbb{Z}+ \rightarrow \mathbb{Z}+$. Nós definimos f pela equação $f(n,m) = 2^n3^m$.

É fácil para verificar que f é injetiva. Por suposição temos que $2^n3^m = 2^p3^q$. Se $n < p$, então $3^m = 2^{p-n}\ 3^q$, contradizendo o fato que 3^m é ímpar para todo m. Portanto, $n = p$. Quando $3^m = 3^q$. Então se $m < q$, segue que $1 = 3^{q-m}$ condizendo novamente. Logo $m = n$.

O conjunto $\mathbb{Q}+$ dos números racionais positivos é infinito enumerável. Nós definimos a função sobrejetora g: $\mathbb{Z}+ \text{ X } \mathbb{Z}+ \rightarrow \mathbb{Q}+$ pela equação $g(n,m) = \frac{m}{n}$.

Por que $\mathbb{Z}+ \text{ X } \mathbb{Z}+$ é enumerável, existe uma função sobrejetora definida por $f : \mathbb{Z}+ \rightarrow \mathbb{Z}+ \text{ X } \mathbb{Z}+$. Então a composição $g \circ f : \mathbb{Z}+ \rightarrow \mathbb{Q}+$ é uma sobrejetora, logo $\mathbb{Q}+$ é enumerável. E $\mathbb{Q}+$ é infinito, pois, contém o conjunto $\mathbb{Z}+$ dos inteiros positivos.

Existe um ponto na prova do teorema 7.1, onde nós estendemos uma parte para o princípio da lógica. Ele ocorre no ponto em que provamos a implicação (2) $\Rightarrow$ (3), onde nós dizemos que **usando o princípio da indução**, nós definimos a função h para todo inteiro positivo *n*.

Mas existe um problema ai. Depois de todo, o princípio da indução afirma que se $\mathbb{Z}_0$ é um conjunto indutivo dos inteiros positivos e que $\mathbb{Z}_0$ contém 1, então $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}+$. Para usarmos o princípio para provarmos um teorema **por indução**, começamos a prova pela declaração, **Seja $\mathbb{Z}_0$ o conjunto de todos os inteiros positivos *n* para que o teorema seja válido**, e então partimos para adiante para provarmos que $\mathbb{Z}_0$ contém 1 e que $\mathbb{Z}_0$ seja indutivo, quando em $\mathbb{Z}_0$ deve estar todos de $\mathbb{Z}+$.

No teorema anterior, no entanto, onde realmente nós não provamos o teorema por indução, mas definimos algo por indução. Agora então nós devemos iniciar a prova? Nós começaremos pelo que falamos **Seja $\mathbb{Z}_0$ o conjunto de todos os inteiros *n* para que a função *h* esteja definida**. Mas é um absurdo, o símbolo *h* não tem significado no início da prova. Deste modo necessitamos de mais algumas coisas. Que é o que chamamos do princípio recursivo. Na prova do teorema anterior, nós queríamos definir o seguinte: Dado um subconjunto infinito *C* de $\mathbb{Z}+$, existe uma única função $h : \mathbb{Z}+ \rightarrow C$ que satisfaz a fórmula:

$$h(1) \text{ é o menor elemento de } C$$

$$h(i) \text{ é o menor elemento de } [C - h(\{1, ..., i - 1\})] \text{ para todo } i > 1.$$

Esta fórmula é chamada de fórmula recursiva para *h*, ela define a função *h* em termos dela mesma. Uma definição dada por uma fórmula semelhante é chamada de definição recursiva.

Agora pode-se entrar em dificuldades lógicas, quando se tenta define algo de forma recursiva. Nem toda fórmula recursiva faz sentido.

A fórmula recursiva $h(i)$ = menor elemento de $[C - h(\{1, ..., i - 1\})]$, por exemplo, se alto contradiz, embora $h(i)$ necessariamente pertença ao conjunto $h(\{1, ..., i - 1\})$, esta formula diz que não pertence ao conjunto. Outro exemplo clássico é o paradoxo: Seja o barbeiro de Paraíso, o barbeador de todos os homens de Paraíso, mas que não se barbeia.

Quem irá barbear o barbeador? Nesta declaração o barbeiro aparece duas vezes. Uma vez na frase **o barbeiro de Paraíso** e outra vez como elemento do conjunto **homens de Paraíso**, e essa definição de que o barbeiro irá barbear é uma definição recursiva e única. Acontece que ele também está se contradizendo.

Algumas fórmulas recursivas fazem sentido, então, especificamente tem-se o seguinte princípio.

Princípio de definição recursiva: Seja *A* um conjunto. Dado uma fórmula que define $h(1)$ como o único elemento de *A*, e para $i > 1$ definimos $h(i)$ unicamente quando um elemento de *A* nos termos dos valores de *h* para os inteiros positivos menores que i, esta fórmula define uma única função dada por $h : \mathbb{Z}+ \rightarrow A$.

Este é o princípio que usamos na nossa realidade para provarmos o teorema 7.1. Pode-se simplesmente aceita-lo em nossas vidas, mas ele pode ser provado rigorosamente usando o princípio de indução.

Matemáticos raramente se referem a esse princípio especificamente. Eles são muito mais utilizados para escrever uma prova como a do teorema 7.1, uma prova em que utiliza o princípio da indução para definir uma função, quando o que eles são realmente usado é a definição do princípio recursivo.

Agora nós daremos mais algumas regras para determinarmos se o conjunto é ou não contável.

Teorema 7.4: A união enumerável qualquer de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Prova: Seja $\{A\alpha\}\alpha \in J$ uma família indexada de conjuntos enumeráveis, onde o conjunto de índice J é enumerável. Neste caso $J = \emptyset$ é trivial, então vamos assumir que $J \neq \emptyset$. Considere também que cada $A\alpha$ é não vazio, por conveniência essa hipótese não muda nada.

Por cada $A\alpha$ ser enumerável, podemos escolher uma função sobrejetiva dada por g: Z+ → J.

Agora definimos:

$$h : \mathbb{Z}+ \text{ X } \mathbb{Z}+ \cup_{\alpha \in J} A\alpha$$

pela equação:

$$h(n,m) = f g(n)(m)$$

sendo fácil de ver que h é sobrejetiva. Desde que $\mathbb{Z}$+ X $\mathbb{Z}$+ seja uma bijeção com $\mathbb{Z}$+ a contagem decorre do teorema 7.1.

Teorema 7.5: O produto finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Prova: Primeiro iremos mostrar que o produto de dois conjuntos A e B é enumerável. O resultado é trivial se A ou B for vazio. Caso contrário, escolha funções sobrejetivas f : $\mathbb{Z}+ \to A$ e $g : \mathbb{Z}+ \to B$. Então a função $h : \mathbb{Z}+ \text{ X } \mathbb{Z}+ \to A \text{ X } B$ definida pela equação $h(n,m) = (f(n), g(m))$ é sobrejetiva de modo que $A \times B$ é enumerável.

Em geral é feito por indução. Assumimos que $A_1 \times ... \times A_{n-1}$ é enumerável se cada A_i também é, nós provamos a mesma coisa para o produto $A_1 \times ... \times A_n$. Primeiro note que há uma bijeção correspondente:

$$g : A_1 \times ... \times A_n \to (A_1 \times ... \times A_{n-1}) \times A_n$$

definida pela equação:

$$g(x_1, ..., x_n) = ((x_1, ..., x_{n-1}), x_n).$$

Desde que o conjunto $A_1 \times ... \times A_{n-1}$ seja enumerável pela indução assumida e A_n é enumerável por hipótese, o produto destes dois conjuntos é enumerável, como provamos anteriormente. Nós concluímos que $A_1 \times ... \times A_n$ é enumerável também.

É muito tentador para afirmar que os produtos enumeráveis de conjuntos enumeráveis deve ser enumerável, mas essa afirmação não é de fato verdadeira.

Teorema 7.6 : Seja X o conjunto composto por dois elementos {0, 1}. Então o conjunto X^ω é não enumerável.

Prova: Nós demonstraremos que dado alguma função:

$$g : \mathbb{Z} + \to X^\omega,$$

g não é sobrejetiva. Para esse propósito nos denotamos como sendo $g(n)$ o seguinte:

$$g(n) = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, ..., x_{nm}, ...).$$

Onde cada x_{ij} é ou 0 ou 1. Então nós definimos o ponto $y = (y1, y2, ..., yn, ...)$ de p

X^ω ela expressão:

$$y_n \begin{cases} 0 \text{ se } x_{nn} = 1; \\ 1 \text{ se } x_{nn} = 0 \end{cases}$$

(se nós escrevermos o número *xní* em uma matriz retangular, os elementos particulares x_{nn} aparecem quando a diagonal das entradas desta matriz, nós escolhemos y de modo que suas enésimas coordenadas diferenciam-se das entradas da diagonal x_{nn}).

Agora y é um ponto de X^ω e y não encontre-se na imagem de g; dado n, o ponto $g(n)$ e o ponto y diferem em pelo menos uma coordenada, isto é, a enésima (x_{nn}). Logo g não é sobrejetiva.

O produto cartesiano $\{0,1\}^\omega$ é um exemplo de um conjunto não enumerável. Outro exemplo é o seguinte:

Teorema 7.7: O conjunto $P(\mathbb{Z}+)$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{Z}+$ é não enumerável.

Prova: Uma prova consiste em provar que $P(\mathbb{Z}+)$ é correspondentemente bijetora com o conjunto $\{0,1\}^\omega$.

Outra é mais direta. Nós iremos provar que A é um conjunto arbitrário, não há função sobrejetora $g : A \to P(A)$. Então em particular, o conjunto $P(\mathbb{Z}+)$ é não enumerável.

Deste modo, seja $g : A \to P(A)$ uma função. Para cada $a \in A$, a imagem $g(a)$ de a é um subconjunto de A que pode ou não conter o mesmo ponto a. Seja B o subconjunto de A que consiste de todos esses pontos a, tal que, $g(a)$ não contém a; $B = \{a;\ a \in A - g(a)\}$.

Agora B pode ser vazio ou ele pode ser todos de A, mas não é a questão. Nós afirmamos que B é um subconjunto de A que não encontra-se na imagem de g. Podemos supor que $B = g(a_0)$ para algum $a_0 \in A$. Nos questionamos o seguinte a_0 pertence a B ou não? Por definição de B, $a_0 \in B \Leftrightarrow a_0 \in A - g(a_0) \Leftrightarrow a_0 \in A - B$. Neste caso nós temos um absurdo. Logo B não é imagem de nenhum $a \in A$.

8 | CONJUNTOS INFINITOS E AXIOMA DA ESCOLHA

Nós já temos vários critérios para um conjunto ser finito. Nós sabemos, por exemplo, que um conjunto A é infinito se ele tem um subconjunto infinito enumerável, ou se A possui uma bijeção com um subconjunto próprio dele. Cada uma destas propriedades é suficiente para caracterizar um conjunto infinito. Estes nós iremos provar agora. A prova nos leva a uma discussão de um ponto da lógica que ainda nós não mencionamos que é o **Axioma da Escolha**.

Teorema 8.1: Seja A um conjunto. As seguintes afirmações sobre A são equivalentes:

(1) existe uma função injetiva $f : Z+ \to A$

(2) Existe uma bijeção de A com um seu subconjunto próprio

(3) A é infinito

Prova: Nós provaremos as implicações (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Para provar que (1) $\Rightarrow$ (2) nós assumimos que há uma função injetiva $f : \mathbb{Z}+ \to A$. Seja o conjunto imagem $f(\mathbb{Z}+)$ denotado por B; e seja $f(n)$ denotado por a_n. Por f ser injetiva, $an \neq am$ se $n \not= m$. Definindo $g : A \to A - \{a1\}$ pela equação

$$g(a_n) = a_{n+1} \text{ para } a_n \in B,$$

$$g(x) = x \text{ para } x \in A - B$$

A função g é indicada na figura 13 verificando facilmente que é uma bijeção!

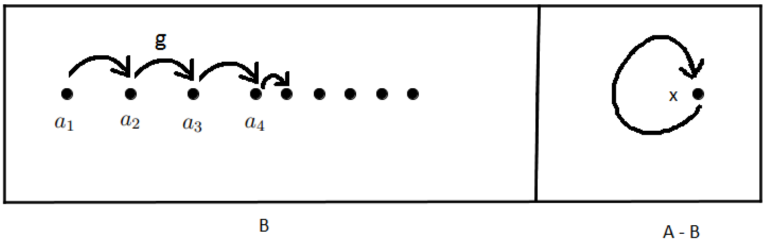

Figura 13 – Bijeção da função g

Fonte: Autor

A aplicação (2) $\Rightarrow$ (3) é justamente a contra positiva do corolário 6.3, logo ele já está provado. Para provar que (3) $\Rightarrow$ (1) nós assumimos que A é infinito, e construímos por indução uma função injetiva $f: \mathbb{Z}+ \rightarrow A$.

Primeiro, já que o conjunto A é não vazio, nós escolheremos um ponto $a1$ de A, definindo como sendo $f(1)$ o ponto escolhido. Então nós assumimos que nós temos definido $f(1), ..., f(n–1)$, queremos então definir a função $f(n)$. O conjunto $A – f(\{1, ..., n–1\})$ é não vazio; pois, para que ele seja vazio teriamos a função $f: \{1, ..., n – 1\} \rightarrow A$ seria uma sobrejetora e A seria finito.

Portanto, nós escolhemos um elemento do conjunto $A – f(\{1, ..., n–1\})$ e definimos $f(n)$ por este elemento. Usando o princípio da indução, nós temos definido f para todo $n \in \mathbb{Z}+$. É fácil ver que f é injetiva. Por supor que $m < n$. Então $f(m)$ pertence ao conjunto $f(\{1, ..., n–1\})$, uma vez que $f(n)$ por definição não pertence. Portanto, $f(n) \neq f(m)$.

Sendo esta tentativa para reformular de forma mais cuidadosa a prova por indução, assim quando faz-se explicitamente nós usamos o princípio da definição recursiva.

Dado um conjunto infinito A, nós tentamos definir $f : \mathbb{Z}+ \rightarrow A$ recursivamente pela formula:

$$(\star)\ f(1) = a1$$

$f(i)$ = um elemento arbitrário de $[A – f(\{1, ..., i – 1\})]$ para $i > 1$.

Mas essa não é uma fórmula recursiva aceitável sempre! Pois, $f(i)$ não está definido unicamente em termos de $f|\{1, ..., i – 1\}$.

Nesta respectiva fórmula notamos diferenças para a fórmula recursiva, considerada na prova do teorema 7.1. Nós temos um subconjunto infinito C de $\mathbb{Z}+$, e nós definimos h pela fórmula:

$$h(1) = \text{menor elemento de } C$$

$$h(i) = \text{menor elemento de } [C – h(\{1, ..., i – 1\})] \text{ para } i > 1$$

Nesta fórmula definimos $h(i)$ unicamente em termos de $h|\{1, ..., i-1\}$.

Outro caminho considera que $(\star)$ que a fórmula recursiva não é aceitável, para observar que se ele está, o princípio de definição recursiva implica que há uma única função f : $\mathbb{Z}+$ satisfazendo $(\star)$. Mas por não se estender da imagem $(\star)$ especifica f unicamente. De fato, essa definição de f envolve infinitamente muitas escolhas arbitrárias.

O que está sendo dito na verdade é que a prova do teorema 8.1 não é realmente uma prova. De fato, nas propriedades básicas de teoria dos conjuntos discutidas agora, esta prova do teorema não é possível.

Previamente, nós descrevemos admitindo certos métodos definidos para conjuntos específicos:

(1) Definir um conjunto pela lista de elementos, ou por tomar um dado conjunto A e especificando um subconjunto B de A por dar uma propriedade em que os elementos de B são satisfeitos.

(2) Tomando uniões ou interseções de uma dada coleção de conjuntos, ou tomando a diferença dos dois conjuntos.

(3) Tomando o conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto.

(4) Tomando o produto cartesiano de conjuntos.

Agora a regra para uma função f é realmente um conjunto: um subconjunto de $\mathbb{Z}+$ X A. Portanto, para provar a existência da função f nós devemos construir um subconjunto apropriado de $\mathbb{Z}+$ X A, utilizando os métodos permitidos para formar conjuntos. Os métodos já dados simplesmente não são adequados para esta proposta. Nos falta um novo caminho de afirmação da existência de um conjunto. Assim nós acrescentamos a lista de métodos permitidos de formação de conjuntos, é o seguinte:

8.2 Axioma da Escolha

Dado uma coleção $\mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos não vazios, existe um conjunto C tendo exatamente um elemento em comum com cada elemento de $\mathcal{A}$; isto é, para cada $A \in \mathcal{A}$, o conjunto $C \cap A$ contém um único elemento.

Este axioma afirma a existência de um conjunto que traz a ideia de existência obtida por escolha de um elemento para cada um do conjunto $A \in \mathcal{A}$.

O axioma da escolha certamente parece uma suficientemente inocente informação. E de fato, a maioria dos matemáticos de hoje aceita como parte da teoria dos conjuntos em que a matemática se baseia. Mas a alguns anos sua regra foi contestada como uma afirmação da teoria dos conjuntos.

Primeiro nós provaremos uma consequência fácil do axioma da escolha.

8.3 Existência de Função Escolha

Dado uma coleção $\mathcal{B}$ de conjuntos não vazios (não necessariamente disjuntos) existirá uma função

$$c : \mathcal{B} \rightarrow \cup_{B \in \mathcal{B}} B$$

tal que, $c(B)$ é um elemento de B, para cada $B \in \mathcal{B}$.

A função c é chamada de *função escolha* para a coleção $\mathcal{B}$.

A diferença entre esse lema e o axioma da escolha, é que neste lema, os conjuntos da coleção $\mathcal{B}$ não são necessariamente disjuntos. Por exemplo, admitir $\mathcal{B}$ como sendo a coleção de todos os subconjuntos não vazios de um dado conjunto.

Prova do lema: Dado um elemento B de $\mathcal{B}$, nós definimos um conjunto B' como o seguinte

$$B' = \{(B, x) | x \in B\}.$$

O qual B' é a coleção de todos os pares ordenados, onde a primeira coordenada do par é o conjunto B, e a segunda coordenada do par é um elemento de conjunto B. O conjunto B' é um subconjunto do produto cartesiano

$$\mathcal{B} \times \cup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Por B conter pelo menos um elemento x, o conjunto B' contem pelo menos o elemento (B, x), portanto ele é não vazio.

Agora nós assumiremos que se $B1$ e $B2$ são dois conjuntos diferentes em B, então os conjunto $B'1$ e $B'2$ são disjuntos. O elemento de $B'1$ é o par ordenado $(B1, x1)$ e o par ordenado $B'2$ é $(B2, x2)$, dois elementos semelhantes mas não iguais, pois, suas primeiras coordenadas são diferentes.

Agora nós deixaremos a formula da coleção

$$C = \{ B'| B \in \mathcal{B}\}.$$

Ela é a coleção dos subconjuntos disjuntos não vazios de

$$\mathcal{B} \times \cup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Pelo axioma da escolha então existe um conjunto c possuindo exatamente um elemento em comum com cada elemento de C . Nossa expectativa é que c seja a regra que desejamos na função escolha.

Em 1º lugar c é um subconjunto de $\mathcal{B} \times \cup_{B \in \mathcal{B}} B$.

Em 2º c contém exatamente um elemento para cada conjunto B'; portanto, para cada $B \in \mathcal{B}$, o conjunto c contém exatamente um par ordenado (B, x), tal que, a primeira coordenada é B. Logo c é de fato a regra da função da coleção $\mathcal{B}$ para o conjunto $\cup_{B \in \mathcal{B}} B$.Finalmente, se (B, x) c, então x pertence a B, de modo que $c(B)$ B, como desejado.

Uma segunda forma de provar o teorema 8.1. Usando esse lema, faremos a prova do teorema 8.1 de forma mais precisa. Dado um conjunto infinito A nós queremos construir uma função injetiva $f : Z+ \rightarrow A$. Nós formaremos a coleção B de todos os subconjuntos não vazios de A. O lema provado afirma da existência de uma função escolha para $\mathcal{B}$; que é, uma função

$$c : \mathcal{B} \rightarrow \cup_{B \in \mathcal{B}} B = A,$$

tal que, $c(B)$ B para cada $B \in \mathcal{B}$. Agora nós definiremos a função $f : \mathbb{Z}+ \rightarrow A$ pela fórmula recursiva

$$(*) f(1) = c(A);\ f(i) = c(A - f(\{1, ..., i - 1\})) \text{ para } i > 1.$$

Por A ser infinito, o conjunto $A - f(\{1, ..., i - 1\})$ é não vazio; portanto, o lado direito desta afirmação faz sentido. Desde então, esta fórmula define $f(i)$ unicamente em termos de $f|\{1, ..., i - 1\}$, usando o princípio de definição recursiva. Nós concluímos que existe uma única função $f : \mathbb{Z}+ \rightarrow A$ satisfazendo (*) para todo $i \in \mathbb{Z}+$. A injetividade de f segue como anteriormente.

Tendo enfatizado que, a fim de construir uma prova do teorema 8.1 que é logicamente correta, deve-se fazer uso especificado da função escolha. Agora voltar atrás é admitir que na pratica a maior parte dos matemáticos fazem tal coisa. Eles continuarão dando provas como na primeira versão, provas que envolvem um número infinito de arbitrárias escolhas. Eles sabem que estão realmente usando o axioma da escolha, e eles sabem que se for necessário eles poderiam colocar a prova em uma lógica mais satisfatória formada por uma função escolha especificada. Mas, geralmente, eles não fazem isso.

Utilizaremos a função escolha a frente; iremos introduzir a função escolha em algumas provas adiante, que são muito importantes para a matemática. Agora devemos confessar que em uma seção anterior, não é uma prova em que foi construída uma determinada função, fazendo um número infinito de escolhas arbitrárias. E nós nem mesmo mencionamos o axioma da escolha.

Façamos um comentário sobre o axioma da escolha. Existem duas formas deste axioma. Podemos chamar de axioma da escolha finita, afirmando que dada uma coleção finita A de conjunto disjuntos não vazios, existe um conjunto C tendo exatamente um elemento em comum com cada elemento de A . É precisamente esta forma mais simples do axioma da escolha que usamos o tempo todo.

A forma mais forte do axioma do axioma da escolha, que se aplica a uma coleção arbitrária A de conjuntos disjuntos não vazios, é o que realmente é correto chamar de **axioma da escolha**. Quando um matemático escreve **esta prova depende do axioma da escolha**, é invariavelmente esta forma mais forte do axioma da escolha que é citada.

9 I ESPAÇOS VETORIAIS

Neste capitulo mostraremos algumas definições necessárias para as demonstrações que iremos fazer posteriormente que são as definições de **Espaço vetorial, subespaço vetorial e transformação linear.**

9.1 Espaço Vetorial

(LIMA, 2012) Chamamos de um espaço vetorial E um conjunto, cujo elementos são vetores, no qual podemos definir duas operações: **a adição** que é, para cada par de vetores $u, v \in E$ encontra-se um novo vetor $u + v \in E$, chamado soma de u e v, e **a multiplicação por um número real**, que é para cada número $a \in \mathbb{R}$ e cada vetor $v \in E$ encontra-se um vetor $a \,.\, v$ ou av chamado produto de a por v. As operações devem seguir as condições abaixo: $\forall a, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v, w \in E$;

comutatividade: $u + v = v + u$;

associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(a\beta)v = a(\beta v)$;

vetor nulo: Existe um vetor 0 E, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $v + 0 = 0 + v = v \; \forall v \in E$;

inverso aditivo: Para cada vetor $v \in E$ existe um vetor $-v \in E$, chamado de o inverso aditivo, ou simétrico de v, tal que $-v + v = v + (-v) = 0$;

distributividade: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

multiplicação por 1: $1 \cdot v = v$.

9.2 Subespaço Vetorial

(LIMA, 2012) Seja E um espaço vetorial, um subespaço vetorial de E (ou simplesmente um subespaço) será um subconjunto $F \subset E$ e que relativo as operações de E é um espaço vetorial, obedecendo assim as seguintes propriedades:

$$\textbf{I: } 0 \in F;$$

$$\textbf{II: } \text{Se } u, v \in F \text{ então } u + v \in F;$$

$$\textbf{III: } \text{Se } v \in F \text{ então, } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha v \in F.$$

Logo se v e u pertencem ao subespaço F e α, β pertencem ao conjunto dos números reais quaisquer então $\alpha u + \beta v \in F$.

O conjunto $\{0\}$, com o único elemento 0, e o espaço inteiro E são exemplos triviais de subespaço de E. Todo subespaço é, em si mesmo, um espaço vetorial.

9.3 Transformação Linear

(LIMA, 2012) Sejam E, F espaços vetoriais. Uma **transformação linear** $A : E \to F$ é uma função que associa a cada vetor $v \in E$ um vetor $A(v) = \alpha \cdot v = Av \in E$ de modo que sejam satisfeitas as seguintes propriedades: $\forall u, v \in E$ e $\alpha \in \mathrm{R}$,

$$A(u + v) = Au + Av,$$

$$A(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot Av.$$

APLICAÇÕES DO AXIOMA DA ESCOLHA (LEMA DE ZORN)

O axioma da escolha é utilizado como recurso necessário em diversas áreas da matemática, sendo de grande importância para a prova de vários teorema como demonstraremos a seguir.

1 I INTRODUÇÃO

Suponha que você entra em um mercado de frutas que tem um número (não nulo) de cestas de frutas. Se você pode escolher uma (e apenas uma) fruta de cada cesta como amostra grátis. Sabemos que não seria uma dificuldade essa tarefa. Mas seguindo a questão familiar o que pode ser convenientemente trivial no primeiro instante, é realmente complexo.

Dado um conjunto Y não vazio do qual seus elementos são conjuntos disjuntos não vazios S_a , será que não existe um conjunto C que tem como elementos um elemento c_a de cada S_a?

A confusão ocorre no caso em que Y é infinito. No início do século *XX*, Ernst Zermelo (1871-1953) e outros tentaram responder essa questão mas sem sucesso. Zermelo sentiu que essa questão poderia ser insolúvel e que somente a maneira para evitar a dificuldade seria um axioma que já foi conhecido, como o axioma da escolha (JESUS, 2010).

O axioma da escolha é para nós indispensável para provarmos muitos resultados importantes em várias áreas da matemática contemporânea.

Matemáticos descobriram vários outros princípios que muitas vezes podem ser usados como substitutos convenientes para o axioma da escolha. Como por exemplo, o princípio maximal de Hausdorff, o princípio da boa ordenação e o lema de Zorn. Estes princípios, apesar de aparentemente não ter semelhança para o axioma da escolha, logo foram mostrados serem equivalentes ao mesmo. Neste trabalho não será abordado essas equivalências, mas, elas podem ser consultadas de forma detalhada em meu trabalho de iniciação cientifica, que estará disponível em breve.

Para entender alguns destes princípios e prosseguirmos em nossos estudos, precisamos de algumas definições.

Definição: Uma relação ≤ é chamado de ordem de relação parcial se e somente se a ralação ≤ e reflexiva e transitiva sobre A e antissimétrica sobre A: que é, se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$. Um conjunto parcialmente ordenado é um par $(A,\leq)$, onde A é um conjunto e ≤ é a ordem de relação sobre A.

Definição: Uma ordem de relação total ≤ sobre um conjunto A é uma relação de ordem parcial, tal que, para qualquer par de elementos a e b em A, ou $a \leq b$ ou $b \leq a$. Um conjunto totalmente ordenado é um par $(A,\leq)$, onde A é um conjunto e ≤ é a ordem de relação total.

Então a ordem de relação parcial (total) ≤ sobre A inequivocamente claro a partir deste contexto, nós podemos dizer simplesmente que A é um conjunto parcialmente (totalmente) ordenado.

Relações de ordem total e conjuntos totalmente ordenados são também chamados

ordem de relações linear e **conjuntos linearmente ordenados**, respectivamente. Ele é evidente conforme a definição que um conjunto totalmente ordenado é um conjunto parcialmente ordenado, mas um conjunto parcialmente ordenado não é necessariamente um conjunto totalmente ordenado (veja no exemplo 2 abaixo).

Seja B um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado (A,R_A), sendo R uma relação, e seja $\leq B$ a interseção $R \cap (B \text{ X } B)$ de R com B X B. Então $(B,\leq B)$ é um conjunto parcialmente ordenado; pode ocorrer que $\leq B$ seja uma relação de ordem total em B, neste caso B é chamado de um subconjunto totalmente ordenado do conjunto parcialmente ordenado $(A,\leq)$. Um subconjunto totalmente ordenado de um conjunto parcialmente ordenado é também chamado de (grupo, série).

Se $(A,\leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado (totalmente ordenado), nós podemos dizer, equivalentemente, que o conjunto A é parcialmente ordenado (totalmente ordenado) por $\leq$. Nos dois casos, nós podemos transcrever $b \leq a$ para $a \geq b$, e $a < b$ ou $b > a$ por $a \leq b$ e $a \neq b$.

Exemplo 1: Seja X um conjunto não vazio. O conjunto $P(X)$ das partes de X é parcialmente ordenado pela relação de inclusão dada por $\subseteq$ em $P(X)$. Obs: $P(X) = \{A|A \subset X\}$.

Exemplo 2: Seja $\leq'$ a relação definida em $\mathbb{R}^2$ por $(a_1, a_2) \leq' (b_1, b_2)$ se, e somente se, $a_1 \leq b_1$ e $a_2 \leq b_2$. O leitor deve verificar que a relação $\leq'$ é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{R}^2$. Desde que nem $(1, 2) \leq' (2, 1)$ e nem $(2, 1) \leq' (1, 2)$, a relação $\leq'$ não é uma relação de ordem total em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3: No exemplo 2, a diagonal M= $\{(x, x)|x \ \ \mathbb{R}\}$ do plano $\mathbb{R}^2$ é uma cadeia.

Talvez uma das equivalências mais amplamente usadas é formada pelo axioma da escolha e o lema de Zorn que apareceu pela primeira vez em 1914. O nome lema de Zorn, que tem sido popularmente usado, é um pouco enganador; **princípio de Zorn** teria sido um nome mais adequado.

LEMA DE ZORN

Seja, $(A,\leq)$ **um conjunto parcialmente ordenado, em que cada subconjunto totalmente ordenado tem um limite superior. Então** A **possui um elemento maximal.**

Nas provas que serão apresentadas a seguir usaremos o lema de Zorn, tendo em vista sua equivalência com o axioma da escolha.

2 | TEOREMA DE HAHN-BANACH

(BRÉZIS, 1984) Seja E um espaço vetorial real e seja a seguinte forma linear $f : G \leq E \to \mathbb{R}$. Teremos então o **teorema de Hahn-Banach(forma analítica):** Seja $p : E \to \mathbb{R}$ uma aplicação que verifica:

$$\text{(i) } p(\lambda x) = \lambda p(x);\ \forall x \in E \text{ e } \forall \lambda > 0 \ \textit{positiva – homogênea}$$

$$\text{(ii) } p(x + y) \leq p(x) + p(y);\ \forall x, y \in E \ \textit{subaditiva}$$

Seja também $G \subseteq E$ um subespaço vetorial e $g : G \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear tal que $g(x) \leq p(x) \forall x \in G.$

Então existe uma forma linear f definida sobre E que estende a g, isto é, $f(x) = g(x) \forall x \in G$ e ,tal que, $f(x) \leq p(x)\ \forall x \in E$.

Demonstração:

(1) Consideremos o conjunto:

$$P = \left\{ h; \begin{array}{c} h: D(h) \subseteq E \to \mathbb{R};\ \text{com } D(h) \leq E \text{ (subespaço vetorial), h linear} \\ G \subseteq D(h), h(x) = g(x);\ \forall x\ \in \text{ G (h estende g) } e\ h(x) \leq p(x); \forall x\ \in \text{D(h)} \end{array} \right.$$

p possui a seguinte relação de ordem: $h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow D(h_1) \subseteq D(h_2)$ e h_2 estende $h1$. $P \neq \emptyset$. De fato pois $g \in P$.

(2) Todo subconjunto totalmente ordenado de P admite uma cota superior. De fato, seja $Q \subseteq P$, $Q \neq \emptyset$ totalmente ordenado ($\forall a,\ b \in Q$ temos $a \leq b$ ou $b \leq a$) denotado por:

$$Q = \{h_i\}_{i \in I}.$$

Definimos $h : D(h) \to \mathbb{R}$ onde $D(h) = \cup_{i \in I} D(h_i)$ e $h(x) = h_i(x)$ se $x \in D(h_i)$. h **está bem definida**. De fato, dado $x \in D(h_i)$ e $x \in D(h_i)$ então pela definição de h

$$h(x) = h_i(x) \text{ e } h(x) = h_j(x)$$

como Q é totalmente ordenado, ou h_j estende h_i, ou h_i estende h_j, logo $h_i(x) = h_j(x)$.

$h \in P$. De fato, $D(h) \leq E$ pois é união de uma família não decrescente de subespaços vetoriais. h é linear pois dado $x,\ y \in D(\text{h})$ então $ax + \beta y \in D(\text{h})\ \forall a,\ \beta \in \mathbb{R}$ então $h(ax + \beta y) = h_j(ax + \beta y) = ah_j(x) + \beta h_j(y) = ah(x) + \beta h(y)$. $G \subseteq D(h_j)\ \forall\ i \in I$ logo $G \subseteq \cup_{i \in I} D(h_i)$ então $G \subseteq D(h)$. h estende a g pois $h_i(x) = g(x)\ \forall x \in G$ e $\forall i \in I$ implicando $\text{h}(x) = g(x)\ \forall x \in G$ e por fim $h(x) \leq p(x)\ \forall x \in D(h)$ pois $h_i(x) \leq p(x)\ \forall x \in D(h_i)$ e $\forall i \in I$.

h é uma cota superior para Q. De fato, temos, $D(h_i) \subseteq D(h)$ e $h(x) = h_i(x)\ \forall x \in D(h_i)$ e $\forall i \in I$, $h(x) \leq p(x)\ \forall x \in D(h)$. Logo $h_i \leq h\ \forall i \in I$.

(3) Pelo lema de Zorn's e por (1) e (2)

"Um conjunto não vazio parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado admite uma cota superior, tem pelo menos um elemento maximal."

P possui um elemento maximal $f : D(f) \subseteq E \to \mathbb{R}$. O teorema estará demonstrado se mostrarmos que $D(f) = E$.

(4) Prova por absurdo! Suponhamos que $D(f) \neq E$. Seja $x_0 \in E - D(f)$. Consideremos o conjunto $D(f) + < x_0 > = \{x + tx_0;\ x \in D(f) \text{ e } t \in \mathbb{R}\}$.

$D(f) + < x_0 >$ é um subespaço de E, pois $D(f)$ e $< x_0 >$ são.

Definamos:

$$K : D(f) + < x_0 > \to \text{R}$$

$$x + tx_0\ f \to (x) + ta$$

Onde a é uma constante a ser determinada posteriormente de modo que $K \in P$.

(5) K está bem definida, pois dado $y \in D(f) + < x_0 >$, y se escreva de maneira única como $y = x + tx_0$ (de fato $D(f) \circ < x_0 >$).

K é linear; de fato, pois $K(\lambda y + y') = K(\lambda(x + tx_0) + x'' + t'x_0) = K(\lambda x + x' + (\lambda t + t')x_0) = f(\lambda x + x'') + (\lambda t + t'')a = \lambda(f(x) + ta) + f(x'') + t'a$. Logo $K(\lambda y + y') = \lambda K(x + tx_0) + K(x'' + t''x_0) = \lambda K(y) + K(y'')$. $G \subseteq D(K) = D(f) + < x_0 >$. De fato pois $G \subseteq D(f) \subseteq D(f) + < x_0 >$.

Se $x \in G$, $x \in D(f)$ e $x \notin < x_0 >$ portanto $K(x) = f(x)$ ou seja, K estende f.

(6) Como $f \in P$ temos que: dados x_1, x_2 $D(f)$; $f(x1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \leq p(x_1+x_2) = p(x_1+x_0+x_2-x_0) \leq p(x_1+x_0)+p(x_2-x_0)$ e portanto $f(x_2) - p(x_2\ x_0) \leq p(x1 + x_0) - f(x_1)$ $\forall x_1, x_2 \in D(f)$ escolhendo a de modo que:

$(\blacksquare) sup_{x \in D(f)}\{f(x) - p(x - x_0\} \leq a \leq (\blacktriangle) inf_{x \in D(f)}\{p(x + x_0) - f(x)\}$ isto implica que:

$K(x + x_0) = f(x) + a \leq p(x + x_0)$ $(\blacktriangle)$

$K(x - x_0) = f(x) - a \leq p(x - x_0)$ $(\blacksquare)$

para todo $x \in D(f)$. Se $t > 0$, temos de $(\blacktriangle)$

$tK(x + x_0) = tf\ (x) + ta \leq tp(x + x_0)$

$K(tx + tx_0) = f(tx) + ta \leq p(tx + tx_0)$

fazendo $tx = y \in D(f)$

$K(y + tx_0) = f(y) + ta \leq p(y + tx_0)$ $\forall y \in D(f)$

Se $t < 0$, temos de $(\blacksquare)$

$K(x - x_0) = a(x) - a \leq p(x - x_0)$

$K(-x - x_0) = a(-x) - a \leq p(-x - x_0)$ (é válido $\forall x \in D(f)$)

$(-t)K(-x - x_0) = -tf\ (-x) - (-t)a \leq (-t)p(-x - x_0)$ $(-t > 0)$

$K(tx + tx_0) = f(tx) + ta \leq p(tx + tx_0)$

fazendo $tx = y \in D(f)$ temos

$K(y + tx_0) = f(y) + ta \leq p(y + tx_0)$ $\forall y \in D(f)$

Se $t = 0$ então

$K(x + 0x0) = K(x) = f(x) + 0a = f(x) \leq p(x)$ $\forall y \in D(f)$.

Portanto

$K(x + tx_0) \leq p(x + tx_0)$ $\forall x \in D(f)$ e $t \in \mathbb{R}$.

Segue que $K \in P$, $f \leq K$ (K estende f; $D(f) \subseteq D(K)$) e $f \neq K$. Mas isso contradiz a maximalidade de f. Logo $D(f) = E$.

3 | TEOREMA DA BASE DE HAMEL

(COELHO; LOURENÇO, 2007) Seja V um espaço vetorial sobre K e seja C um conjunto "Linearmente Independente(LI)"em V. Então existe uma base B de V contendo C.

Para esta prova utilizaremos o lema de Zorn.

Demonstração:

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e C um conjunto LI de V. Considere P a classe de todos os subconjuntos linearmente independente de V que contenham C. É claro que P é não vazio, uma vez que o próprio conjunto C pertence a P. Também P é parcialmente ordenado por inclusão.

Para usarmos o lema de Zorn, precisamos mostrar que todo subconjunto totalmente ordenado de P tem uma cota superior. Para tanto, seja $D = \{Aa\}_{a \in A}$ um subconjunto totalmente ordenado de P. O candidato natural para a cota superior de D é a união A de todos os conjuntos A_a em D. É preciso mostra que A é um subconjunto LI. De fato, seja L = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um subconjunto finito de A. Então, para cada $i = 1, ..., n$, existe $a_i \in A$, tal que, $v_i \in A_{a_i}$. Da ordem total em D temos que, reordenado os elementos de L se necessário, $A_{a_1} \subseteq ... \subseteq A_{a_n}$ e, portanto, $v_i \in A_{a_n}$ para cada $i = 1, ..., n$. Assim L é LI como um subconjunto finito do conjunto LI A_{a_n}. Como L é qualquer, segue que A é linearmente independente. Logo, D tem A por uma cota superior. Segue do lema de Zorn que P tem um elemento maximal, que chamaremos de B. Afirmamos que B gera todo o espaço V. De fato, se existisse $v \in V$ que não fosso gerado por B, então $B \cup \{v\}$ seria linearmente independente, o que contradiz a maximalidade do conjunto B. Portanto, B gera V e é de fato uma base para V.

REFERÊNCIAS

BRÉZIS, H. ***Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones***. Madrid: Alianza Editorial, 1984.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. ***Um Curso de Álgebra Linear***. 2. ed. São Paulo: edusp, 2007.

JESUS, J. P. C. ***Espaços Métricos e Topológicos na Ausência do Axioma da Escolha***. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Instituto de Matemática (UFBA), Salvador, 2010.

LIMA, E. L. ***Elementos de Topologia Geral***. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

LIMA, E. L. ***Álgebra Linear***. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

SILVA, S. G.; JESUS, J. P. C. **Cem anos do axioma da escolha: Boa ordenação, lema de zorn e o teorema de tychonoff**. *Revista Matemática Universitária*, n. 42, p. 16–34, 2007.

SOBRE OS AUTORES

OSVALDO ANTONIO RIBEIRO JUNIOR - Possui graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal do Tocantins – IFTO, especialização em Metodologia do Ensino da Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa – FAEL e mestrado em Matemática, pela Universidade Federal do Tocantins - UFT. Atualmente é professor EBTT do Instituto Federal do Pará – IFPA, Campus Conceição do Araguaia.

FÁBIA MACENO RIBEIRO - Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Tocantins - UNITINS e especialização em Gestão Pública pela Faculdade Suldamérica. Atualmente é servidora do Instituto Federal do Tocantins – IFTO, Campus Paraíso do Tocantins.

O Axioma da Escolha e Aplicações

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2021

O Axioma da Escolha e Aplicações

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2021