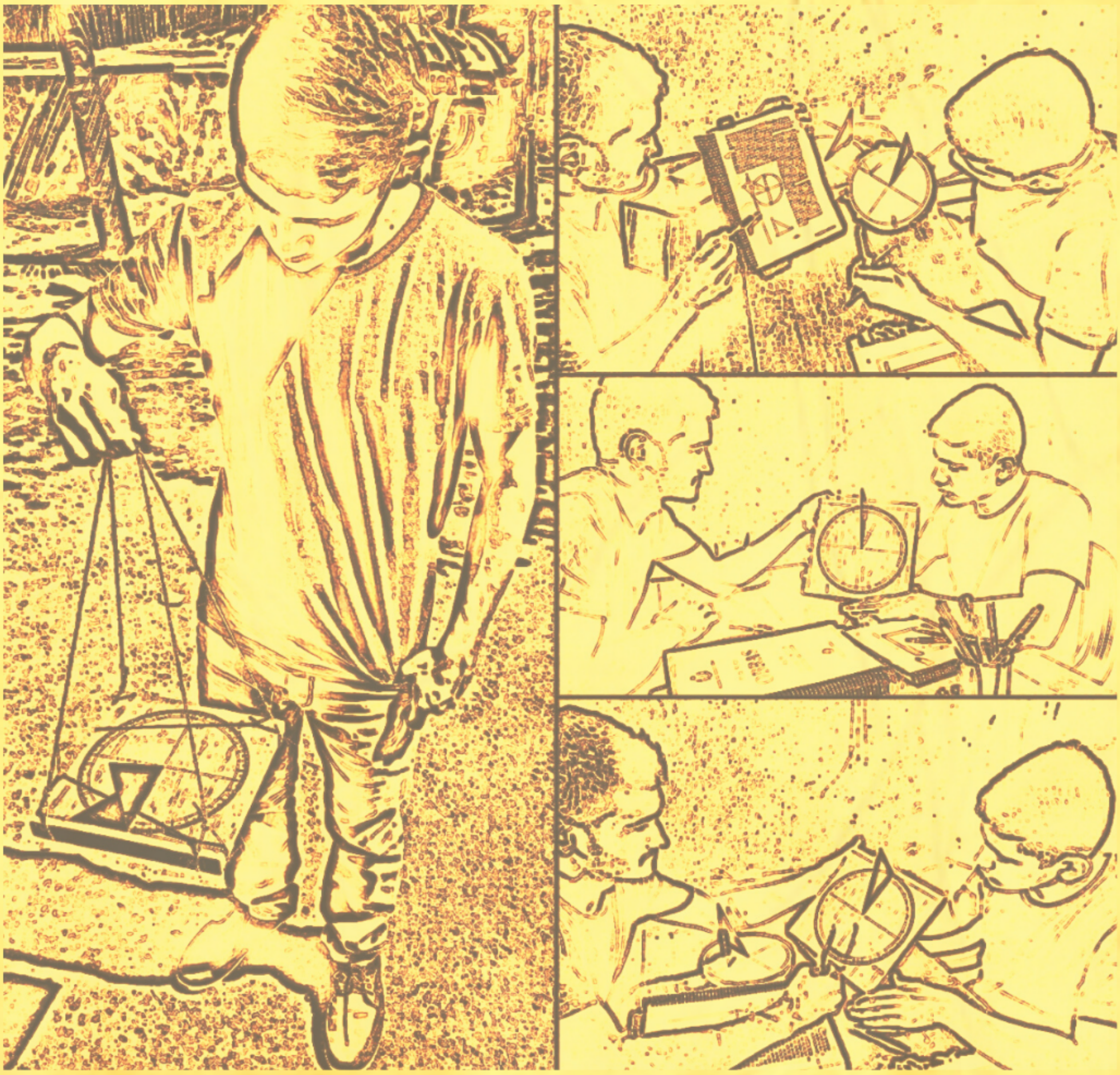
SOBRE OS CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS INCORPORADOS NA CONSTRUÇÃO E NO USO DO INSTRUMENTO JACENTE NO PLANO DE PEDRO NUNES (1502-1578) NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

FRANCISCO WAGNER SOARES OLIVEIRA
ANA CAROLINA COSTA PEREIRA



Quipá
Editora

SOBRE OS CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS INCORPORADOS NA CONSTRUÇÃO E NO USO DO INSTRUMENTO JACENTE NO PLANO DE PEDRO NUNES (1502-1578) NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Quipá Editora

Francisco Wagner Soares Oliveira
Ana Carolina Costa Pereira

SOBRE OS CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS INCORPORADOS NA CONSTRUÇÃO E NO USO DO INSTRUMENTO JACENTE NO PLANO DE PEDRO NUNES (1502-1578) NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

1ª Edição

QUIPÁ EDITORA

2021

© 2021 por Francisco Wagner Soares Oliveira e Ana Carolina Costa Pereira

Todos os direitos reservados.

O conteúdo deste livro, bem como seus dados, forma, correção e confiabilidade são de exclusiva responsabilidade do autor. Devem ser atribuídos os devidos créditos autorais.

Arte da Capa: Francisco Wagner Soares Oliveira
Normalização e revisão: os autores.

Conselho Editorial:

Me. Adriano Monteiro de Oliveira, Editor-chefe, Quipá Editora

Dra. Anny Kariny Feitosa, Instituto Federal do Ceará, campus Iguatu

Me. Antoniele Silvana de Melo Souza, Secretaria de Educação de Pernambuco

Dra. Francione Charapa Alves, Universidade Federal do Cariri

Me. Francisco Odécio Sales, Instituto Federal do Ceará, campus Crateús

Dra. Mônica Maria Siqueira Damasceno, Instituto Federal do Ceará, campus Juazeiro do Norte

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

O48s

Oliveira, Francisco Wagner Soares
Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de matemática / Francisco Wagner Soares Oliveira e Ana Carolina Costa Pereira. — Iguatu, CE : Quipá Editora, 2021.

148 p. : il.

ISBN 978-65-89091-55-4
DOI 10.36599/qped-ed1.038

1. Geometria - Conhecimento. 2. Matemática - Professor. 3. Instrumento jacente no plano. I. Pereira, Ana Carolina Costa. II. Título.

CDD 516

Elaborada por Rosana de Vasconcelos Sousa — CRB-3/1409

Esta obra foi publicada pela Quipá Editora em abril de 2021.

[...] nada existe de mais exacto, nada de mais certo e nada de mais evidente do que a demonstração matemática, à qual certamente jamais alguém poderá opor-se (NUNES, 2008, p. 282).

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Seguindo na direção de pesquisas que procuram explorar instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII, como forma de apresentar elementos que venham favorecer o ensino de matemática, dando destaque em particular ao ensino e aprendizagem de conhecimentos geométricos e a formação inicial de professores, trabalhou-se com o instrumento jacente no plano. Ele foi concebido por Pedro Nunes (1502-1578) e tem sua primeira descrição nas *Petri Nonii Salaciensis Opera* (1566).

Como forma de explorar o conhecimento incorporado nele, estudou-se sua construção e uso com base na proposta de construção de interface entre história e ensino da matemática, na qual se deve considerar tanto questões de ordem didática como também histórica. À luz dessa postura de pesquisa, teve-se como objetivo geral conhecer o potencial didático do instrumento jacente no plano para o ensino de conhecimentos geométricos na formação inicial de professores. Para tanto, trabalhou-se sob uma perspectiva qualitativa de pesquisa e ainda se deu espaço a uma abordagem metodológica multirreferencial.

As primeiras abordagens de pesquisas utilizadas foram a documental e a bibliográfica, isso para, a partir da obra, elencar elementos de ordem contextual, historiográfica e epistemológica sobre o instrumento. De posse de informações dessa natureza, foi proposta uma atividade voltada a discentes do curso de matemática da Universidade Estadual do Ceará, em que se buscou explorar conhecimentos geométricos da construção e do uso do instrumento jacente no plano. Ela foi sustentada em uma abordagem etnográfica de pesquisa e ainda seguiu os pressupostos teóricos-metodológicos da atividade orientadora de ensino (AOE) para organização, coleta e análise dos dados.

Como resultados, aponta-se que o estudo da construção e uso do instrumento jacente no plano, a partir da análise de suas partes pode, favorecer o movimento do pensamento que o estudante faz para apreender, significar, e reconfigurar alguns conhecimentos geométricos, como, por exemplo, os de plano do horizonte, de paralelismo entre planos, de corda e arco, de homotetia, de reta tangente, de perpendicularismo entre planos e entre reta e planos, de triângulos e de construções geométricas. Nesse sentido, nota-se que o instrumento jacente no plano tem um potencial didático para desencadear o movimento do pensamento de discentes acerca de conhecimentos geométricos.

Os autores.

INTRODUÇÃO

No campo da Educação Matemática, tem-se constantemente buscado refletir sobre o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Desse trabalho, cabe observar que reflexões dessa ordem já vêm fazendo parte mais fortemente da prática do professor desde o século XIX, período em que essa área surgiu como campo de pesquisa e vem se modelando e ganhando cada vez mais destaque em estudos nacionais.

A esse respeito, Flemming, Luz e Mello (2005) destacam que a Educação Matemática só começou a ser discutida com maior intensidade no Brasil a partir do surgimento da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), na década de 1980. Momento em que os educadores passaram a perceber, com mais frequência, a necessidade de elaboração de práticas inovadoras que auxiliassem tanto o professor como os alunos no processo de ensino e aprendizagem de conhecimentos matemáticos, sejam estes algébricos, aritméticos ou mesmo geométricos.

Desse período, no que se refere a esses temas da matemática, uma informação que chamou a atenção foi tomar conhecimento, segundo Pavanello (1993), de que o ensino de Geometria era um dos ramos da matemática que mais passava por dificuldades, tanto de inserção na educação básica como de inovação de práticas de ensino. Difícil ficar apático a esse cenário, haja vista se compreender que os conhecimentos advindos da Geometria possibilitam um entendimento dedutivo, espacial e matemático de situações práticas do cotidiano.

No contexto atual da Educação Matemática, Barros (2017) aponta que ainda se tem um esvaziamento no ensino de geometria, o autor destaca que isso perdura desde o movimento da matemática moderna, ocorrido entre os anos de 50 e 60 do século XX. Como consequência disso, o problema que mais chama a atenção, que se entende que necessita ser solucionado, é o fato de, até agora, conhecimentos geométricos de estudantes da educação básica e ensino superior serem algo muito superficial.

Esse problema já vem sendo levantado por outros autores. Silva (2017), por exemplo, afirma que o desempenho dos alunos em Geometria continua baixo, para tanto, ele toma como referência resultados de estudantes na Prova Brasil e Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). No que se refere aos anos iniciais do ensino fundamental, Souza (2018) destaca que alunos, já do 5º ano, não possuem conhecimentos adequados sobre conceitos da geometria. No campo da formação inicial de professores, Santos (2018) observa que, em geral, os conhecimentos prévios de estudantes sobre conceitos básicos de geometria plana ainda estão em um nível de aprendizagem insatisfatório.

Tendo em vista a superação desse problema, por reconhecer, assim como expresso na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), que os conhecimentos geométricos são importantes para interpretação e resolução de problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento, desenvolveu-se esta pesquisa na intenção de trazer contributos ao ensino e aprendizagem de conhecimentos geométricos.

Em pesquisas nacionais que abordam temas da geometria, notam-se diversos esforços no sentido de favorecer seu ensino e aprendizagem. Tem-se visto sua incorporação em documentos curriculares nacionais, a exemplo destes, tem-se os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) (BRASIL, 2006) e, mais recentemente, na BNCC (BRASIL, 2017), o trabalho com recursos tecnológicos, como os softwares GeoGebra e WinPlot; o uso de materiais concretos, como sólidos geométricos; a incorporação da história da matemática como recurso didático, entre outros.

Dentre essas estratégias, aqui, procura-se articular ao ensino de conhecimentos geométricos elementos da história da matemática. Essa escolha se deve a duas experiências vivenciadas no período da graduação. Uma delas se trata de uma aula ministrada aos demais alunos da turma de estágio supervisionado na educação básica II, em que se abordou a ideia de seno, a partir de algumas questões históricas sobre as primeiras considerações que levaram à sua construção. Nela, ainda se fez uso de um quadrante geométrico para encontrar a altura de um prédio usando a definição de seno. Dessa experiência, foi possível apontar que a história da matemática pode favorecer o ensino de matemática, pois, além de fornecer recursos para o ensino, também pode ajudar a dar significado aos conhecimentos e torná-los mais interessantes.

A outra aproximação com a história da matemática, igualmente nesse período, deve-se ao Trabalho de Conclusão de Curso (OLIVEIRA, 2017), em que foram tecidas considerações sobre concepções de professores de matemática sobre o uso da história no ensino. As falas dos professores vieram reforçar o valor da história para o ensino que se tinha conjecturado durante a referida aula ministrada, na disciplina de estágio supervisionado na educação básica II.

No que se refere à história da matemática, sabe-se que ela tem valor formativo no processo de desenvolvimento dos saberes e práticas dos professores. O fato de possibilitá-los conhecer a matemática do passado, ampliar a compreensão de conteúdos a serem ensinados e ainda expandir o entendimento do desenvolvimento do currículo são exemplos da função da história em ambientes de formação. Nessa perspectiva, entende-se que a incorporação da história na formação docente viria a ampliar as perspectivas e possibilidades do professor no ensino da matemática (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2004).

Como uma das iniciativas que reforçam esse entendimento, tem-se a participação orgânica apresentada por Miguel e Miorim (2004), a qual equivale a conceber a história como fonte de problematização e considerar na matemática as suas dimensões: lógica, epistemológica, ética, dentre outras. Dessa forma, o professor, possivelmente, passaria a reconhecer que o conhecimento matemático não está dissociado da vida fora do ambiente escolar.

Diante disso, compreende-se que a incorporação da história no ensino pode, de fato, favorecer a abertura para o professor visualizar as relações de influência recíproca da matemática com a cultura, sociedade, arte, tecnologia, filosofia da matemática, etc. (MIGUEL; MIORIM, 2004). Consequentemente, isso pode trazer, para o professor, um entendimento mais amplo sobre o conhecimento matemático e, provavelmente, consequências positivas ao ensino de matemática.

Nesse sentido, articular história e ensino da matemática se apresenta como uma proposta que tem certo valor dentro do processo de formação docente. No que se refere ao ensino, sabe-se que as concepções e ações praticadas pelo professor são influenciadas, em parte, pela multiplicidade de informações e representações sociais dominantes que coletou em sua formação inicial (PONTE, 2000).

Assim, entende-se que o conhecimento assimilado pelo professor sobre a matemática será o que, de certa forma, irá pôr à disposição para seus alunos. Por conta disso, compreende-se ser plausível buscar articular a história na formação desses educadores, visto que ela pode, presumivelmente, contribuir para a identificação das relações da matemática com outras práticas realizadas fora da escola, apresentando-a dessa forma como um saber humanizado.

Os estudos de Saito (2014, 2016a, 2016b) e Saito e Dias (2013) são exemplos de pesquisas em que se pode observar uma valorização da aproximação da história da matemática na formação inicial e/ou continuada de professores. Nelas, considerando questões de caráter histórico e didático, os pesquisadores buscam construir interfaces entre história e ensino da matemática.

Por interface, entende-se que seja um conjunto de ações e produções que emergem do diálogo entre duas áreas de estudo, tendo como foco o ensino e que se constituem mediante uma aproximação entre as partes que as envolvem e nutrem os temas em questão (SAITO, 2016a). A Educação Matemática e a própria história da matemática são as áreas de estudo a que Saito (2016a) se refere. Ambas emergindo como campo de investigação científica que podem dialogar entre si, dentre outros elementos, por meio do conhecimento matemático.

Sob tal perspectiva, como exemplo de iniciativas que buscam construir interface entre história e ensino da matemática, têm-se as pesquisas que estudam o processo de construção e/ou uso de instrumentos matemáticos[1]. Nelas, os instrumentos são estudados a partir de uma obra que os descreve, levando-se em consideração, para tanto, o contexto histórico no qual os conceitos

1 Instrumentos matemáticos são, aqui, designados de forma geral como aqueles que servem para a realização de medidas ou mesmo para realizar cálculos (cf. SAITO; DIAS, 2011).

incorporados na obra e instrumento foram construídos e o movimento do pensamento na formação desses conceitos[2].

Para o estudo acerca do contexto de desenvolvimento dos conceitos presentes na obra e instrumento, é que se valoriza a escrita da história da matemática, em que a história é apresentada dentro de um viés de narrativas historiograficamente atualizadas[3]. Nesse sentido, busca-se, a partir de uma articulação entre a análise historiográfica, epistemológica e contextual, identificar e explorar alguns elementos e informações contidos no documento que revelem tanto o seu contexto de elaboração como também o do instrumento (SAITO, 2016a).

Em linhas gerais, para construir uma interface, dois movimentos são necessários: o movimento do pensamento na formação do conceito matemático e o contexto no qual os conceitos matemáticos foram desenvolvidos. Em um momento inicial, a partir do diálogo entre educador e historiador, costuma-se eleger um tratado que contenha um texto, em que se possa observar a descrição de construção e/ou uso de algum instrumento matemático. De posse do instrumento e obra, buscar-se-á, com base em questões de caráter histórico, elencar informações do contexto de elaboração deles (PEREIRA; SAITO, 2019a; SAITO; DIAS, 2013).

Posteriormente ou mesmo em conjunto, tem-se privilegiado fazer um estudo quanto ao movimento do pensamento na formação dos conceitos presentes no texto elencado. Sobre ele, entende-se que se trata de um momento em que o pesquisador deve buscar e atribuir significado aos objetos incorporados no texto, sejam eles matemáticos ou não. A depender das concepções e experiências de quem analisa os objetos, podem emergir para eles diferentes significados. (PEREIRA; SAITO, 2019a; SAITO; DIAS, 2013).

Dessa etapa, propõe-se que o pesquisador, com base em suas concepções pedagógicas e/ou didáticas, passe a explorar todo o texto ou mesmo apenas alguns dos conceitos nele observados, de tal forma que possa elaborar atividades e estratégias de ensino para a formação de professores; as quais, a depender da intenção do educador, podem culminar, por exemplo, em propostas, como a aplicação de um curso ou mesmo de uma atividade (PEREIRA; SAITO, 2019; SAITO; DIAS, 2013).

Em um momento final, compreende-se que a ação valorizada nessa etapa é a que busque desenvolver uma pesquisa sobre os processos realizados durante a produção voltada a ambientes

2 Sobre pesquisas que buscam aproximar/articular história e ensino da matemática, a partir de uma investigação sobre o processo de construção e/ou uso de instrumentos matemáticos, consulte, por exemplo: Alves e Pereira (2018), Batista e Pereira (2017), Castillo e Saito (2016), Dias e Saito (2010), Martins, Pereira e Fonseca (2016), Moraes (2017), Pereira e Batista (2016), Saito (2014, 2016a, 2016b, 2017), Saito e Dias (2011), Saito e Dias (2013), Silva, Batista e Pereira (2018).

3 A perspectiva da historiografia atualizada assume que o processo de construção do conhecimento matemático não se deu de forma linear e progressista, no sentido de que houve apenas um caminho pelo qual o conhecimento poderia se estabelecer, mas sim de que tal processo é fruto de muitas circunstâncias que conduziram seu desenvolvimento (cf. SAITO, 2015).

formativos ligados à docência. Sendo válido, aqui, elucidar considerações sobre as possíveis potencialidades didáticas a serem construídas, tanto quanto outras potencialidades que possam ainda, posteriormente, serem trabalhadas, dentre outras (PEREIRA; SAITO, 2019; SAITO; DIAS, 2013).

Dessa etapa, vale destacar que uma potencialidade didática emerge do conjunto de conhecimentos que são mobilizados no processo de construção e no uso do instrumento e se constitui com a articulação desses conhecimentos com o currículo, público alvo e com a intencionalidade do professor, estabelecendo, dessa forma, um diálogo entre um registro de conhecimento antigo e um moderno (DIAS; SAITO, 2014; SAITO, 2016b; MORAES, 2017). "Nesse sentido, a história confere significados aos conteúdos matemáticos ali dispostos e permite que o educador os (re)signifique, uma vez que ele percebe as diferentes relações entre conceitos e noções já bem sedimentados matematicamente" (SAITO, 2016b, p. 13).

Seguindo na direção desses estudos, para o desenvolvimento desta pesquisa, elencou-se o instrumento jacente no plano[4] de Pedro Nunes (1502-1578), descrito em sua obra *De arte atque ratione navigandi* (1573)[5]. A escolha desse instrumento se deve mediante leitura, a priori, em sua descrição. Com ela, pode-se observar, dentre outros elementos que ele aborda, a divisão de uma circunferência em 360 partes e a construção de um triângulo retângulo isósceles, procedimentos esses que têm sido incorporados à mobilização de conhecimentos de geometria, os quais, por sua vez, são o foco desta pesquisa.

O instrumento jacente no plano é uma concepção de Pedro Nunes, inserida no contexto da navegação, tal instrumento é indicado para a determinação da altura do Sol acima do horizonte. Para ser utilizado, é necessário apenas que seja posto paralelamente ao plano do horizonte do observador, de forma que sobre ele incidam os raios do Sol, os quais serão responsáveis por indicar a medida procurada.

Outro fator, que levou à escolha do instrumento jacente no plano, deveu-se ao fato de seu autor ter se envolvido com as matemáticas[6] presentes em seu tempo. Algumas das provas, que convergem para essa afirmação, são as funções de professor de assuntos científicos, cosmógrafo e cosmógrafo-mor que desempenhou (LEITÃO, 2003, 2013).

4 Pedro Nunes, ao apresentar seu instrumento, não o nomeia, diante disso, destaca-se que a nomenclatura, aqui adotada, é uma das presentes na literatura de trabalhos que já teceram informações a seu respeito. Nesta pesquisa, ao se tratar desse instrumento será dito «instrumento jacente no plano». No próximo capítulo, apresenta-se uma discussão a esse respeito.

5 *De arte atque ratione navigandi* (1573) é uma obra em que se pode observar os tratados de navegação de Pedro Nunes, apresentados anteriormente em suas *Petri Nonii Salaciensis Opera* (1566). Dessa forma, ressalta-se que o instrumento jacente no plano foi apresentado pela primeira vez pelo quinhentista nesse trabalho de 1566. No capítulo a seguir, faz-se um detalhamento sobre essas questões editoriais sobre o conteúdo da *De arte atque ratione navigandi* (1573).

6 O termo matemáticas se refere a conhecimentos matemáticos de um período anterior ao final do século XIX, visto que ainda não se tinha a matemática como campo do conhecimento da forma como é estabelecida na modernidade. Tais conhecimentos estavam atrelados a outros segmentos, como, por exemplo, com a astronomia (cf. SAITO, 2015).

De arte atque ratione navigandi (1573)[7] está disponível em Latim na biblioteca digital Luso-Brasileira.[8] Em edição moderna, nomeada de: Pedro Nunes – Obras vol. IV *De arte atque ratione navigandi* (2008), que é utilizada para esse estudo, pode-se observar tanto o texto de 1573 do cosmógrafo escrito em latim, como a sua tradução para a língua portuguesa. A escolha pelo texto em português dessa edição atual se fez, dentre outros pontos, por esta ser a língua materna no Brasil, fato que se entende que possa favorecer o estudo e incorporação de seu texto na formação de professores e ensino de matemática nesse País.

Feitas essas observações, como forma de construir a presente pesquisa, fez-se uma busca no meio acadêmico a fim de verificar o que já foi produzido em trabalhos que abordaram o instrumento jacente no plano, conhecimentos geométricos e ainda a proposta de interface entre história e ensino da matemática assumida. Nesse momento de coleta, procurou-se apontar estudos em que tenha sido feita uma articulação/aproximação entre esses temas.

Quanto a pesquisas que abordam o instrumento jacente no plano, encontraram-se dois trabalhos no Repositório da Universidade de Lisboa[9]. Um deles é o estudo de Nunes (2012), em seus resultados, o autor destaca sobre os instrumentos de Pedro Nunes, entre os quais está o instrumento jacente no plano, são escassas referências que indiquem a utilização prática deles. No entanto, no que se refere a uma abordagem teórica, já se é possível notar o trabalho com eles. Em complemento a essa observação, o autor ainda afirma que os instrumentos tiveram impacto, principalmente, entre os astrônomos teóricos que entendiam a necessidade da ciência da navegação e da astronomia.

A outra pesquisa, que aborda o instrumento jacente no plano, é a de Canas (2011a), em que por meio de um estudo acerca da obra náutica de João Baptista de Lavanha (c.1550-1624), dá ênfase, em determinado momento, à presença do instrumento jacente no plano no *Tratado del Arte de Navegar*. Em suas análises, o autor indica que existe uma semelhança bastante acentuada no texto apresentado pelos cosmógrafos sobre o referido instrumento, fato esse que fortalece suas observações acerca da apropriação de Pedro Nunes por parte de Lavanha.

Tanto na pesquisa de Nunes (2012) como na de Canas (2011a), verifica-se que se têm valorizado explorar o instrumento jacente no plano com vistas a identificar e apresentar informações de caráter historiográfico e contextual a seu respeito. Entretanto, sabe-se que instrumentos matemáticos também podem revelar informações de caráter epistemológico, conhecimentos

7 NUNES, Pedro. ***Petri Nonii Salaciensis De Arte Atque Ratione Nauigandi Libri Duo...Crepusculorum***. - Conimbricae: in aedibus Antonij à Marijs, 1573. Disponível em: <http://purl.pt/14448>. Acesso em: 12 jul. 2018.

8 Sobre a obra *De arte atque ratione navigandi* (1573), consulte: Almeida (2011), Leitão (2006, 2008), Nunes (2012), Penteado (2011), Silva (1921).

9 Repositório da Universidade de Lisboa. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/>. Acesso em: 12 jul. 2018.

matemáticos e potencialidades didáticas para o ensino de matemática (BEO, 2017; DIAS; SAITO, 2014; MORAES, 2017; PEREIRA; SAITO, 2019a; SAITO, 2016a; 2016b; SAITO; DIAS, 2013).

Em relação a pesquisas que exploraram conhecimentos geométricos, a partir de um instrumento matemático e da interface entre história e ensino da matemática, tem-se o estudo de Silva (2019), realizado com o Quadrante Geométrico, presente no tratado *Del modo di misurare* (1564), de Cosimo Bartoli (1503-1572). Em seus resultados, a autora destaca que foram elucidados conhecimentos matemáticos sobre medida, números racionais, reta oblíqua, razão, proporção e semelhança de triângulos. Aponta, ainda, que foi proporcionada uma mobilização e articulação de conceitos empíricos com teóricos desses objetos matemáticos. Com isso, indica que, com base nas ações teóricas e práticas dos alunos, teve-se um salto na aprendizagem desses conceitos.

Como outra pesquisa realizada nesse sentido, tem-se a de Beo (2015), considerando os conhecimentos geométricos mobilizados no instrumento Radio Latino, a autora destaca que foram explanadas noções sobre mediatriz, raio da circunferência, circunferência, perpendicularismo, incomensurabilidade de segmentos, hipotenusa de um triângulo isósceles e do teorema de Pitágoras. Em seus resultados, indica que o estudo possibilitou tanto refletir sobre a prática de ensino desses conteúdos como também identificar os significados apreendidos pelos alunos sobre esses objetos.

Seguindo nessa direção, na pesquisa de Pereira e Saito (2019b), com base no estudo de uma situação de uso do báculo (1636), de Petrus Ramus (1515-1572), os autores apontam as ações realizadas pelos participantes que lhes possibilitaram ressignificar algumas noções geométricas básicas. Por exemplo, tem-se a utilização do fio de prumo para garantir perpendicularidade. Os autores também destacam que os estudantes já possuíam uma noção teórica sobre os conceitos e definições de perpendicularidade e de paralelismo, mas quando se passa a tratar esses objetos em situações de ordem prática, apresentam dificuldades de compreensão.

Ao que se observou, a abordagem de conhecimentos geométricos a partir de uma análise sobre o processo de construção e/ou uso de instrumentos matemáticos pode favorecer o ensino de temas da geometria. Visto isso, quanto a pesquisas já realizadas sobre o processo de construção de interface entre história e ensino da matemática, destacam-se a seguir as de Castillo (2016), Dias e Saito (2014) e a de Moraes (2017).

Castillo (2016), apoiado no contexto da obra e autor, bem como nos conhecimentos mobilizados no báculo (*cross-staff*), identificou como era realizado os cálculos, tanto da área de terrenos, como também da altura de objetos com o báculo. A autora traz elementos da esfera de análise historiográfica, epistemológica e contextual. Dados esses que, na perspectiva de construção de interfaces entre história e ensino da matemática, correspondem a informações do contexto no qual os conceitos matemáticos foram desenvolvidos e do movimento do pensamento na formação do conceito matemático (SAITO; DIAS, 2013).

Dias e Saito (2014), estudando o contexto de elaboração do “setor trigonal”, da articulação dos dados desse estudo com os conhecimentos matemáticos mapeados, apresentam algumas potencialidades didáticas do instrumento. Dentre elas, destacam-se: a construção de significados, representação de qualquer triângulo retângulo, representação de qualquer triângulo obtusângulo e a representação de qualquer triângulo acutângulo. No que concerne à construção de interface entre história e ensino da matemática, observa-se que, mesmo diante de todos os procedimentos já realizados, os autores concluíram apenas um “ciclo da interface”, pois sua constituição por completo requer a aplicação das atividades em sala (PEREIRA; SAITO, 2019a).

Moraes (2017) fez uso de potencialidades didáticas, verificadas no instrumento *setor trigonal*, para estudar o movimento do pensamento de alunos do ensino médio na formação dos conceitos mobilizados na atividade. Com isso, a autora indica, em suas considerações, que elas possibilitaram aos participantes estabelecerem um diálogo entre conhecimentos do passado com outros atuais e ainda lhes permitiram relacionar o pensamento empírico com o teórico.

Diante do verificado nesses estudos e por não se ter encontrado pesquisas que busquem explorar o instrumento jacente no plano, com vistas a elencar contributos para o ensino de conhecimentos geométricos, foi fortalecida a proposta de desenvolver um estudo nesse sentido. Assim, sob a perspectiva de construção de interface entre história e ensino da matemática, em que são comtempladas questões históricas e didáticas, fez-se a seguinte indagação: como o instrumento jacente no plano pode favorecer o ensino de conhecimentos geométricos na formação inicial de professores de matemática?

De tal pergunta, foi estabelecido como objetivo geral: conhecer o potencial didático do instrumento jacente no plano para o ensino de conhecimentos geométricos na formação inicial de professores. Diante dessa intenção, como forma de alcançá-la, elencam-se os seguintes objetivos específicos: identificar. a partir da obra *De arte atque ratione navigandi* (1573). o contexto no qual o instrumento jacente no plano foi elaborado; reconhecer conhecimentos geométricos mobilizados na construção e uso do instrumento jacente no plano; descrever a atividade de construção e uso do instrumento jacente no plano, aplicado à formação inicial de professores.

Para tanto, como forma de alcançar esses objetivos, trabalhou-se a partir de uma abordagem qualitativa de pesquisa. Ainda de maneira a guiar e validar metodologicamente a pesquisa, fez-se uso de uma abordagem multirreferencial, isso porque, foi necessário buscar aporte em diferentes metodologias. Foi feito, por exemplo, em alguns momentos, um estudo do tipo bibliográfico, em outros do tipo qualitativo documental.

Assim, com base nesses tipos de pesquisa, é que se estudou elementos do contexto de elaboração do instrumento jacente no plano. Já para a organização e análise do curso de extensão, foi agregado como método alguns elementos da abordagem etnográfica na pesquisa educacional com sujeitos e ainda os procedimentos metodológicos da atividade orientadora de ensino (AOE). Em linhas gerais, tal método possibilita a organização da atividade e também favorece a compreensão das ações e do movimento do pensamento dos indivíduos envolvidos na atividade (MOURA *et al.*, 2016).

É com base nesses aportes metodológicos e à luz dos objetivos elucidados anteriormente, que são elaborados os capítulos desta pesquisa. Logo, imediatamente a essa introdução, no primeiro capítulo, tem-se informações de cunho contextual e historiográfico que ajudam a identificar o contexto de elaboração do instrumento jacente no plano no século XVI.

Essas informações estão dispostas em conjunto e trazem dados sobre a obra *De arte atque ratione navigandi* (1573), outras em torno de uma possível razão pela qual Pedro Nunes incorpora esse instrumento nessa obra e ainda elementos que indicam o contexto de utilização do instrumento jacente no plano no século XVI.

No segundo capítulo, apresentam-se alguns conhecimentos matemáticos reconhecidos, tanto durante a leitura do trecho em que está descrito o instrumento, como também a partir de seu processo de construção e uso. Os dados desse capítulo possuem a seguinte divisão: inicialmente, expõe-se elementos referentes a uma “conversa com o texto” em que está descrito o instrumento jacente no plano e, em seguida, discorre-se sobre os conhecimentos incorporados em sua construção e uso.

Já no terceiro capítulo, expõem-se informações metodológicas que embasaram a pesquisa e a atividade. Destacam-se a abordagem de pesquisa assumida (qualitativa), as técnicas para coleta dos dados (observações e entrevista) e o método utilizado para organização e análise dos dados (atividade orientadora de ensino). Quanto à atividade, descrevem-se a intencionalidade e plano de ação, o tratamento didático e o seu desenvolvimento.

No capítulo quatro, tem-se uma apresentação, discussão e análise acerca das ações, reflexões, compreensões e conhecimentos geométricos mobilizados pelos discente durante o curso de extensão. Desse momento, buscou-se elucidar o movimento do pensamento feito pelos participantes no sentido de compreensão e apreensão de conceitos.

Ao final, é apresentado um fechamento sobre as informações apresentadas. Para tanto, buscou-se confrontar a questão proposta com os dados coletados, para verificar se foi possível respondê-la. Nesse momento, por ter verificado a possibilidade de ampliar esta pesquisa, ainda, apontam-se novos estudos que dela podem ser explorados.

Diante dessas considerações preliminares, dando sequência na descrição desta pesquisa, a seguir se expõem os dados coletados do objetivo de identificar o contexto de elaboração do instrumento jacente no plano.

CAPÍTULO 1

CONHECENDO *DE ARTE ATQUE RATIONE NAVIGANDI* (1573) E O INSTRUMENTO JACENTE NO PLANO EM SEU TEMPO E ESPAÇO

O contexto de elaboração de instrumentos matemáticos tem incorporado tanto elementos matemáticos como também extramatemáticos. Ao situá-los em seu período de elaboração, é possível conhecer os processos que estão por trás deles, desde que, para tanto, busque-se considerar toda a teia de conhecimentos que os nutrem (SAITO, 2014).

Partindo-se desse pressuposto, nesse capítulo, são elencados elementos do contexto de elaboração do instrumento jacente no plano. Com base na história, é tratado, por exemplo, do uso do instrumento jacente no plano no século XVI, da obra *De arte atque ratione navigandi* (1573), na qual o mesmo está descrito e do autor responsável por sua concepção.

Elementos do contexto da obra *De arte atque ratione navigandi* (1573)

Na obra *De arte atque ratione navigandi* (1573), Pedro Nunes apresenta dois tratados latinos de navegação, os quais traziam contributos tanto à arte[10] como à ciência[11] de navegar. Em um, são abordados dois problemas acerca da arte de navegar e, no outro, é dado destaque às regras e instrumentos para descobrir, com base nas matemáticas, a aparência das coisas, sejam elas marítimas ou celestes.

Esses documentos derivam da ampliação de estudos publicados no *Tratado da Sphera* (1537) e ainda estiveram presentes em mais duas publicações do quinhentista no século XVI, sendo uma, nas *Petri Nonii Salaciensis Opera*, em Basiléia, no ano de 1566 e a outra, já após a morte de Pedro Nunes, nas *Petri Nonii Salaciensis Opera*, também de Basiléia, mas agora do ano de 1592 (SILVA, 1921). São possíveis justificativas, para esse número de publicações, o fato de Pedro Nunes compreendê-los como um de seus trabalhos mais significativos para o período e/ou eles terem sido bastante procurados (LEITÃO, 2013).

Recentemente, esses tratados tiveram mais duas publicações, uma em edição facsimilada no ano de 2002[12], a qual se refere à edição de 1566 e outra em edição moderna no ano de 2008, Pedro Nunes – Obras vol. IV *De arte atque ratione navigandi*. Essa edição de 2008 é referente ao texto

10 A arte de navegar anunciada por Pedro Nunes está associada a uma abordagem mais prática e empírica das questões voltadas à navegação (cf. LEITÃO, 2006).

11 A ciência de navegar, concebida por Pedro Nunes, busca tratar as questões de náutica sob uma perspectiva mais teórica e matematizada (cf. LEITÃO, 2006).

12 Reprodução facsimilada da edição publicada em Basiléia, em 1566, João Filipe Queiró (ed.), Coimbra: Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, 2002.

apresentado por Pedro Nunes em *De arte atque ratione navigandi* (1573). Sobre as publicações dos tratados de navegação de Pedro Nunes, tem-se a seguinte cronologia (Figura 1):

Figura 1 — Cronologia de publicação dos tratados de navegação de Pedro Nunes

Fonte: Elaboração própria.

Visto isso, observa-se que os tratados de navegação de Pedro Nunes percorreram grande parte do século XVI. Ainda sobre as publicações desses trabalhos, cabe destacar mais duas edições do *Tratado da Sphera & Astronomia Introductorii de Spaera Epitome*, ambas sob a responsabilidade da Academia das Ciências de Lisboa. Uma delas corresponde ao primeiro volume das Obras de Pedro Nunes, o qual foi publicado em 1940 e a outra se refere ao *Tratado da Sphera & Astronomici Introductorii de Spaera Epitome*, de 2002. Como forma de compreendê-los em seu tempo e espaço, entende-se que um elemento que pode revelar um pouco do contexto deles em quinhentos é buscar conhecer o cenário da navegação portuguesa nesse período.

A esse respeito, observou-se que o impulso para a expansão e exploração portuguesa esteve ligado ao comércio de artigos de luxo e especiarias que utilizavam para conservar alimentos, dentre outros. As suas relações comerciais com árabes, assim como nos demais países da Europa, davam-se por uma navegação costeira ao longo do mar mediterrâneo. Contudo, inicialmente, com o acordo das cidades italianas de Genova e Veneza junto aos árabes e, posteriormente, pela tomada de Constantinopla pelo império otomano, em que proibiram o acesso dos europeus à China e à Índia, o comércio interno e a economia de Portugal estavam muito frágeis.

Com vistas a favorecer o progresso comercial e social, Portugal sente a necessidade de desbravar novas rotas, que possibilitassem, na melhor das hipóteses, chegar ao oriente para manter as relações comerciais com esses povos, antes interrompidas. Para tanto, os lusitanos passaram a aperfeiçoar tanto as suas técnicas de navegação e instrumentos náuticos como os de outros países árabes e europeus, observados em suas artes de navegar.

Com esse empenho e por estar situado geograficamente em um local favorável à prática da navegação, quando comparado a outros países da Europa, Portugal conquista Ceuta e as ilhas da Madeira e das Canárias. Com as tentativas de contornar o sul da África, consegue explorar da costa ocidental desse continente escravos, marfim, ouro, dentre outros.

No final do século XV, após contornar o continente africano, Vasco da Gama (1469-1524) consegue chegar à Índia, fato que permitiu aos portugueses o monopólio das especiarias. Com o estabelecimento dessa relação, em outra viagem com destino à Índia, em 1500, agora sob o comando de Pedro Álvares Cabral (1467-1520) com sua esquadra, por orientações desse homem do mar, fazem um desvio para se afastar de zonas de calmaria e acabam atravessando o atlântico e chegando ao Brasil, local que, pouco tempo depois, vem a ser explorado e colonizado por Portugal. Os lusitanos também exploraram terras em que se encontram China, Japão, Califórnia, Nova Zelândia e Austrália.

É nesse contexto de descobrimentos, proporcionados pela náutica, que o século XVI se inicia em Portugal e que Pedro Nunes percorre sua vida durante quinhentos. A seu respeito já é consenso, entre estudiosos e historiadores portugueses, como Leitão (2003), Santos (1806) e Ventura (1985), ter ele nascido em 1502, em Alcácer do Sal e falecido no ano de 1578, ainda indicam que ele foi um cidadão ativo no que se refere ao envolvimento com alguns conhecimentos das ciências em Portugal.

Saito (2015) destaca que os conhecimentos, nesse período, desenvolviam-se ao lado das artes (associada aos conhecimentos práticos/mecânicos que não eram registrados em textos) e da literatura (voltada ao resgate de textos, como forma de recuperar conhecimentos perdidos). Desse fato, o autor elenca algumas características que indicam um panorama geral desse cenário,[13] como duas delas tem-se: o debate que se iniciou a partir da recuperação e análise de textos antigos de autores como Aristóteles (384-322 a.C.) e Euclides (séc. III a.C.-?) e o valor dado à observação e experimentação na construção e desenvolvimento do conhecimento.

Cabe observar ainda que, no século XVI, conhecimentos de navegação, astronomia e medicina desenvolvidos por determinadas regiões, inacessíveis a outras, a partir da intensificação da exploração marítima, tiveram, de certa forma, seus saberes expostos e compartilhados. Como

13 Maiores detalhes sobre tais características ver Saito (2015): "História da matemática e suas (re)construções contextuais".

exemplo desse intercâmbio, tem-se o caso já destacado, anteriormente, dos Europeus com povos do Extremo Oriente (SAITO, 2015).

Foi sob esse cenário que, possivelmente, Pedro Nunes fez seus estudos e elaborou suas contribuições ao desenvolvimento das ciências em Portugal. Conforme apresentado por Leitão (2003), o quinhentista, assim como muitos interessados no período por assuntos científicos, dedicou-se, inicialmente, a estudos voltados à medicina, na então renomada universidade de Salamanca. Sabe-se, ainda, que foi nessa mesma instituição que obteve o título de Bacharel.

Um elemento bastante elucidado, por autores que apresentam informações quanto à biografia de Pedro Nunes, é o fato de, em 16 de novembro de 1529, ter sido nomeado cosmógrafo[14] do reino de Portugal pelo próprio rei D. João III (1502-1557). Segundo Costa (1969), já em 22 de dezembro de 1547, sendo o primeiro a receber essa titulação, foi nomeado o cosmógrafo-mor[15] do reino, cargo que, posteriormente, foi assumido por personagens, como Tomás d'Orta (?-1594), João Baptista Lavanha (1550-1624)[16] e Manuel de Figueiredo (1568-1622)[17]. Uma possível justificativa da escolha desse lusitano para esse cargo é que "[...] com a medicina devia ter aprendido a astronomia, que os médicos de então precisavam de conhecer para a aplicarem à clínica astrológica" (COSTA, 1969, p. 16).

Durante esse seu período de estadia e obrigações no cargo de cosmógrafo, ele exerceu outras atividades, como a de docente na universidade de Coimbra. A convite do rei D. João III, recebeu a oportunidade de assumir uma cadeira de matemática nessa instituição, a qual só foi de fato estabelecida em 1544. Também foi tutor no ambiente da corte de figuras como príncipes, jovens, fidalgos e intelectuais (LEITÃO, 2003).

Dessas atividades, Santos (1806) destaca que Pedro Nunes fez alguns discípulos[18], dos quais menciona: Francisco Nicoláo Coelho do Amaral (?-1568) e Manuel de Figueiredo, este veio a se tornar, tempos depois, um cosmógrafo-mor real substituto. Foi ainda mestre do infante D. Luis (1506-1555), do Senhor D. Henrique (1512-1580), do Vice-Rei da Índia D. João de Castro (1500-1548) e do Senhor Rei D. Sebastião (1544-1578). Uma das evidências, a essa tutoria de Pedro Nunes a um dos referidos personagens, pode ser observada na dedicatória do *tratado da Sphera* (1537), a qual a obra é dedicada a seu aluno D. Luis.

14 Figura que estava ligada com questões voltadas à náutica.
15 Chefe dos cosmógrafos.
16 Sobre esta figura quinhentista, verificar com maiores detalhes Canas (2011b): "Apropriação de Pedro Nunes por João Baptista Lavanha".
17 Manuel de Figueiredo foi cosmógrafo-mor substituto durante a titularidade de João Baptista Lavanha sobre esse cargo. Outras infomações sobre Manuel de Figueiredo, ver Batista (2018): "Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso da balhestilha, inserida no documento chronographia, reportório dos tempos..., aplicado na formação de professores".
18 Outro discípulo de Pedro Nunes foi Martim Afonso de Sousa (1490-1564).

Com essa tutoria ministrada a essas figuras, é que Pedro Nunes se transforma em um professor. Assim, diante do já observado no que se refere às obrigações e estudos por ele realizados, convém destacar que, em linhas gerais:

> Os anos entre o final da década de vinte e meados da década de trinta foram centrais na definição da carreira, do perfil intelectual, e dos interesses de Pedro Nunes. Foram os anos em que o jovem bacharel concluiu a sua formação como médico mas em que, ao mesmo tempo, se ocupa a dar aulas nos Estudos Gerais em Lisboa, da tutoria científica dos príncipes irmãos de D. João III, e das suas obrigações como cosmógrafo do reino. São, pois, os anos em que o bacharel se transforma no professor, matemático e cosmógrafo (LEITÃO, 2003, p. 68).

Um ponto indicado, nesse panorama geral, que ainda faltam informações, diz respeito à indicação de, durante esse período, Pedro Nunes se transformar em um matemático. No sentido de elencar dados a esse respeito, destacam-se, a seguir, informações gerais relativas às matemáticas no século XVI e, posteriormente, sobre a aproximação de Pedro Nunes com elas, que o faz ser adjetivado de matemático.

De Saito (2015), entende-se que o século XVI foi um período em que se pôde observar a intenção de quinhentistas em organizar o conhecimento até então já elaborado. Os esforços realizados, nesse sentido, eram para que os conhecimentos viessem a atender as atuais necessidades, tal como a de compreender alguns aspectos da física[19]. Como possibilidade de atender a esse fato, as matemáticas, como aritmética (associada à noção de número) e geometria (associada à noção de grandeza), passaram a ganhar espaço nas explicações de estudiosos do período.

Conforme o observado em Saito (2015), também eram ciências matemáticas: astronomia, astrologia, música, arquitetura, mecânica, óptica, cartografia e comércio, dentre outras. Com base no trabalho com elas, os matemáticos quinhentistas podem ser caracterizados socialmente nos seguintes níveis:

> Esta começava no nível mais baixo do “matemático-artesão”, um homem que resolvia problemas práticos empregando alguns processos numéricos (calculava o volume de pipas, estabelecia calendários, ensinava aritmética comercial, etc.) e, em geral ganhava a vida impressionando clientes e público com a sua destreza no manejo dos números, e indo até o “matemático-humanista”, geralmente um universitário de fortes interesses pela filosofia clássica, muitas vezes ocupado na recuperação textual de obras científicas do passado. Pelo meio havia a considerar várias outras variantes, como matemáticos ligados ao fabrico de instrumentos, ou matemáticos que agiam como consultores de assuntos técnicos, militares ou astrológicos (LEITÃO, 2013, p. 24).

Nesse sentido, no que se refere à caracterização de Pedro Nunes como um “matemático”, cabe destacar que, embora por vezes, suas atividades se aproximem das mencionadas anteriormente, como, por exemplo, a de um matemático-humanista por ter dedicado tempo à tradução de textos, como o livro I da *Geografia*, de Ptolomeu, ele não pode receber essa caracterização (LEITÃO,

19 No século XVI, a palavra física, no âmbito das ciências, era designada a estudos da natureza (cf. SAITO, 2015).

2013). Uma justificativa, para esse trabalho do quinhentista, pode ser o fato da geografia ser uma das ciências matemáticas do período, que ele se interessava por estudar.

Uma observação, que indica esse fato, consta no frontispício de Johannes de Luneschlos (?-1699, em sua obra sobre álgebra, intitulada de *Thesaurus Mathematum Reservatus per Algebram Novam*, publicada em Passau, no ano de 1646. Nela, o nome de Pedro Nunes se encontra ao lado de figuras ímpares no estudo da álgebra, como Euclides e Cardano (1501-1576) (LEITÃO, 2006 - 2007).[20]

Outra, das possíveis indicações dessa sua característica, pode ser observada em seu programa intelectual de investigação da realidade física, o qual Leitão (2006) apresenta como "programa noniano". Em linhas gerais, entende-se que Pedro Nunes buscava estudar a realidade física por meio de aspectos teóricos da matemática, sob um víeis que objetivava examiná-la matematicamente.[21]

Nessa perspectiva, ele elaborou suas obras, as quais são o *Tratado da Sphera* (1537), *De crepusculis* (1542), *De erratis Orontii Finaei* (1546), *Petri Nonii Salaciensis Opera* (1566), *Libro de algebra en arithmeticay geometria* (1567), *De erratis Orontii Finaei* (1571), *De arte atque ratione navigandi* (1573), *Petri Nonii Salaciensis Opera* (1592).

Essas obras são elaboradas a partir da observação e/ou análise de textos teóricos. Como exemplos disso, tem-se: suas leituras nos *Elementos* de Euclides (fl.ca. 295 a.C.), relacionado às matemáticas; no *tractatus de Sphaera* de João de Sacrobosco (ca. 1195-ca. 1256), relacionado a elementos iniciais sobre cosmografia; e no resumo *Epytoma in Almagestum Ptolemaei* (Veneza, J. Hamann, 1496), elaborado por Purbáquio (1423-1461) e Regiomontano (1436-1476)[22], a partir do Almagesto de Ptolomeu sobre astronomia (LEITÃO, 2002a).[23]

Visto isso, a seguir, é dado destaque à obra intitulada por *De arte atque ratione navigandi* (1573)[24], que, em língua portuguesa, equivale à "Sobre a arte e a ciência de navegar". Com esse título, Pedro Nunes anuncia um navegar pela arte, que está associado a uma abordagem mais prática

20 Maiores detalhes, sobre questões relacionadas à aproximação de Pedro Nunes com a Matemática, ver Leitão (2013): "Pedro Nunes e a Matemática do Século XVI".

21 Sobre o "programa noniano", verificar com maiores detalhes Leitão (2006): "*Ars e Ratio:* A náutica e a constituição da ciência moderna".

22 Sobre esse erudito, verificar maiores detalhes em Pereira (2010): "A obra "de Triangulis Omnimodis Libri Quinque" de Johann Müller Regiomontanus (1436 – 1476): uma contribuição para o desenvolvimento da Trigonometria".

23 Para observar maiores detalhes sobre Pedro Nunes na cosmografia, física, cosmologia, geometria e na álgebra, ver Teixeira (1934): "História das Matemáticas em Portugal".

24 No frontispício, tem-se como título principal: *De arte atque ratione nauigandi*. Contudo, como forma de detalhar o conteúdo que será abordado, o autor descreve: *Petri Nonii Salaciensis de arte atque ratione navigandi libri duo. Eiusdem in Theoricas planetarum Georgij Purbachij annotationes, et in problema mechanicum Aristotelis de motu navigij ex remis annotatio una. Eiusdem de erratis Orontij Finoei liber unus. Eiusdem de crepusculis lib. I cum libello Allacen de causis crepusculorum* (Conimbricae: Antonij à Marijs, 1573).

e empírica das questões voltadas à navegação e um navegar pela ciência, em que se busca tratar as questões de náutica sob uma perspectiva mais teórica e matematizada (LEITÃO, 2006).

Assim, ele expõe sua concepção acerca da existência de dois tipos de navegar, em que, para ele, a *Ars* está subordinada a *Ratio*. Com esse posicionamento, Pedro Nunes recebia recorrentes críticas de alguns estudiosos, pilotos e homens do mar de seu tempo, principalmente, pelo fato dele não ter experiência prática com a arte de navegar. Do observado em documentos do período, tem-se que seu principal crítico foi Diogo de Sá (?-?), visto ele ter publicado o *De navigatione libri três* (1549), como forma de refutar as ideias de Pedro Nunes sobre náutica, publicadas, inicialmente, em seu *Tratado da Sphera*. (LEITÃO, 2006).

O lusitano sofreu a crítica de Diogo de Sá pelo fato do programa que inaugura se diferenciar da lógica e da filosofia natural de Aristóteles, que tem a experiência como um dos elementos fundamentais para a construção do conhecimento. Para Pedro Nunes, a interpretação e o entendimento de situações da realidade natural devem ser, antes de tudo, examinados matematicamente, nesse sentido, aponta para a possibiildade de matematizar a natureza (LEITÃO, 2006).

Apesar dessa crítica, que o fez ser chamado, por alguns homens do período, de “sábio de gabinete”, os trabalhos de navegação de Pedro Nunes foram apreciados de alguma forma em seu tempo por figuras, como Francisco da Costa (1567-1604), João Baptista Lavanha e Antonio de Naiera.[25] O padre jesuíta Francisco da Costa apresentava a influência das características do programa de Pedro Nunes em suas aulas no final do século XVI, na Aula da Esfera, no colégio de Santo Antão (LEITÃO, 2008).

Já João Baptista Lavanha apreciou e fez uso das ideias de Pedro Nunes, principalmente, durante as aulas teóricas sobre novidades e técnicas que ministrava para gente da corte na Academia das Matemáticas em Madrid.[26] Como prova dessa apropriação, tem-se algumas considerações presentes no *Tratado del Arte de Navegar* de Lavanha, um exemplo é a apresentação do instrumento jacente no plano (CANAS, 2011b).

Antonio de Naiera, por sua vez, é também tido como um dos homens que apreciaram, de alguma forma, os estudos de Pedro Nunes, pois, em sua *Navegacion Especulativa y Prática* (1628)[27], é possível notar que o cosmógrafo contempla “[...] muitos temas de origem noniana, e procura

25 Sobre a apreciação e influência dos textos de Pedro Nunes, ver Almeida (2011): “A influência da obra de Pedro Nunes na náutica dos séculos XVI e XVII: um estudo de transmissão de conhecimento”.

26 Maiores detalhas, sobre a apropriação de Pedro Nunes por Lavanha, ver Canas (2011b): “Apropriação de Pedro Nunes por João Baptista Lavanha”.

27 Maiores detalhes sobre a obra *Navegacion Especulativa y Prática* de Antonio de Naiera ver Albuquerque (1981): “Uma tradução portuguesa da ‘Navegacion Especulativa de António de Naiera”.

explicar aos práticos do mar mesmo alguns dos assuntos mais complicados tratados por Nunes"(LEITÃO, 2008, p. 559).

Pelo pontuado, entende-se que eles apreciavam o trabalho de Pedro Nunes pelo fato deles também se envolverem com questões de ordem teórica voltadas aos temas de navegação. Vistos esses exemplos de utilização/impacto da obra "Sobre a arte e a ciência de navegar" em seu período, destaca-se a seguir o seu frontispício (Figura 2):

Figura 2 — Frontispício da *De arte atque ratione navigandi*, Coimbra, 1573

PETRI NONII
SALACIENSIS DE ARTE
ATQVE RATIONE NAVIGANDI
LIBRI DVO.

EIVSDEM in theoricas Planetarum Georgij Purbachij annotationes,& in Problema mechanicum Aristotelis de motu nauigij ex remis annotatio vna.

EIVSDEM de erratis Orontij Finæi Liber vnus.

EIVSDEM de Crepusculis Lib.I.Cum libello Allacen de causis Crepusculorum.

BIBLIOTECA NACIONAL DE LISBOA

CONIMBRICÆ,
In ædibus Antonij à Marijs,Vniuersitatis Typographi. Anno 1573.
Cum facultate Inquisitoris.

Fonte: Nunes (1573, frontispício).

Nesse frontispício, observa-se que, em sequência ao título principal (sobre a arte e a ciência de navegar), Pedro Nunes apresenta uma descrição geral do que será abordado no decorrer da obra, sobre essa indicação, pretende-se retornar mais à frente. Outro elemento contemplado na "capa" é o escudo das armas reais, o qual pode ter, como possível justificativa para sua presença na obra, o fato de com ele se pretender manifestar ou solicitar o patrocínio real (LEITÃO, 2008).

Ao final do frontispício, observa-se que a obra foi publicada em Coimbra, na casa tipográfica de António Mariz, no ano de 1573. Na página seguinte, o referido tipógrafo faz uma dedicatória ao rei D. Sebastião I e apresenta algumas das justificativas que o levaram juntamente com Pedro Nunes a publicar esse documento. Nessa folha, verifica-se que seu conteúdo deriva do trabalho publicado em 1566, que tem como título principal: *Petri Nonii Salaciensis Opera*.

António Mariz explica que essa edição de 1566 se encontrava com alguns erros tipográficos, tais como omissões e desconfigurações, as quais levaram seu próprio autor a não reconhecer alguns dos trechos. Fato que fez o tipógrafo, com o auxílio de Pedro Nunes, trabalhar em uma segunda edição para a obra.

Quanto aos tratados latinos de navegação de Pedro Nunes, abordados nas *Petri Nonii Salaciensis Opera* (1566), sabe-se que eles foram apresentados, a princípio, mesmo que de forma ainda inicial, já em parte dos textos do *Tratado da Sphera* (1537)[28], em que Pedro Nunes o elaborou como forma de responder a duas dúvidas do navegador Martim Afonso de Sousa (1490-1564)[29], ao chegar em Portugal após sua viagem pelas costas do Brasil (SILVA, 1921).

Leitão (2013) indica que, com as respostas, descritas no *Tratado da Sphera* (1537), Pedro Nunes inaugura o trabalho com questões voltadas à navegação por meio de métodos matemáticos. Visto isso, cabe ainda destacar do observado em Silva (1921) que, como forma de possibilitar que outros quinhentistas externos a Portugal lessem seus tratados de náutica, ele fez neles várias ampliações e os traduziu para o latim, esse trabalho é parte do que, posteriormente, vem a publicar na sua *Opera* (1566), que foi destinada certamente aos:

> [...] matemáticos, astrónomos e homens de ciência de formação muito elevada, das universidades e círculos eruditos da Europa. A simples circunstância de o idioma escolhido para esta redação ser o latim, e, sobretudo, o facto de o conteúdo ser sofisticado e tecnicamente avançado, elimina qualquer possibilidade de o livro se dirigir a pilotos, marinheiros ou outros ‹‹homens do mar›› (LEITÃO, 2008, p. 554).

Ainda no que se refere aos tratados latinos de navegação do cosmógrafo-mor, vale destacar que eles foram novamente publicados na reedição da *Opera* (1566), que ocorreu já após algum tempo da morte de Pedro Nunes. Além de conter o conteúdo da *Opera* (1566) e manter seus problemas tipográficos, a obra de 1592 começa a se aproximar da edição de 1573 ao trazer também o *De crepusculis* e o *De erratis Orontii Finaei* (LEITÃO, 2008).

A seguir, com base na tradução do latim para o português da obra *De arte atque ratione navigandi* (1573), realizada por A. Guimarães Pinto, que ainda foi revisada pela comissão científica de Pedro Nunes – Obras, Vol. IV, publicada em 2008, faz-se uma breve descrição dos materiais de tal

28 Para maiores informações e detalhes sobre o *Tratado da Sphera*, verificar Leitão (2002b): “ Anotações ao *Tratado da Sphera*. In Pedro Nunes. Obras, vol. I”.

29 Quanto a essas dúvidas de Martim Afonso de Sousa, ver Silva (1921): “A primeira edição dos tratados latinos sobre a arte de navegar, de Pedro Nunes”.

obra. No quadro 1 a seguir, organizaram-se seus materiais e, posteriormente, a ele também são elencadas algumas informações sobre eles.

Quadro 1 — Materiais da obra *De arte atque ratione navigandi* (1573).

MATERIAIS	TÍTULO	PAGINAÇÃO
M1	António Mariz, tipógrafo conimbricense, deseja perpétua felicidade ao rei D. Sebastião primeiro, rei invictíssimo e nosso senhor.	s/p
M2	Pedro Nunes, de Alcácer do Sal, ao leitor.	s/p
M3	Principais considerações do primeiro livro.	s/p
M4	Principais considerações do segundo livro.	s/p
M5	Principais considerações entre as que anotamos as Teóricas dos Planetas de Jorge Purbáquio.	s/p
M6	Argumento do primeiro livro.	01
M7	Sobre dois problemas acerca da arte de navegar, de Pedro Nunes, de Alcácer do Sal. Livro I.	01 - 08
M8	Sobre as regras e os instrumentos para descobrir as aparências das coisas, tanto marítimas como celestes, partindo das ciências matemáticas, de Pedro Nunes, de Alcácer do Sal. Livro II.	08 - 121
M9	Uma anotação a um problema mecânico de Aristóteles acerca do movimento do barco a remo.	121 - 126
M10	Algumas anotações de Pedro Nunes, de Alcácer do Sal, às Teóricas dos Planetas, de Jorge Purbáquio.	127 - 201

Fonte: Elaboração própria

Assim, observa-se que a obra *De arte atque ratione navigandi*, de 1573, pode ser descrita em dez materiais. Sabe-se que a ela, ainda, são incorporados, com folha de rosto e paginações próprias, o *De erratis Orontii Finaei* (1546) e a *De crepusculis* (1542). Contudo, elencam-se, posteriormente. informações apenas dos elementos contemplados nesse quadro 1.

O primeiro material é o espaço em que o tipógrafo António Mariz utiliza para destacar alguns pontos que dizem respeito à impressão e elaboração da edição. Como exemplo desses, informa que, nessa obra, são abordadas questões de náutica, que foram elaboradas com o intuito de corrigir alguns erros tipográficos da edição da *Opera* (1566), que, pela procura no período da *De erratis Orontii Finaei* (1546) e da *De crepusculis* (1542), foram incorporados na coleção e que o patrônomo que vislumbrou para dedicar tal obra foi a então Vossa Majestade, D. Sebastião.

No segundo material, Pedro Nunes trata de apresentar, de forma geral, alguns dos temas que serão abordados no livro, destacando que buscará elucidar princípios relativos à ciência de navegar. Nesse sentido, introduz definições que dizem respeito ao estudo das linhas de rumo, como exemplo destas, fala o que é um rumo de Noroeste-Sueste, um Nordeste-Sudoeste e um Norte-Sul.

Já no terceiro e quarto materiais, Pedro Nunes indica as principais considerações que serão abordadas nos respectivos materiais, a partir delas já é possível observar que são tratados vários temas e questões relacionadas à náutica. Neles, o lusitano também apresenta algumas definições de forma direta, sem a preocupação no momento de elencar referências e/ou mecanismos de prova que sustentem seus argumentos.

No quinto material, o quinhentista apresenta de forma direta suas principais considerações acerca da obra *Theoricae nouae planetarum* (1472), de Georg Peurbach. Nesse material, ele deixa explicito, por meio de mecanismos, tais como refutações e demonstrações, que suas anotações foram realizadas no sentido de corrigir e explicar o que, em sua concepção, necessitava ser esclarecido.

Já no sexto material, o cosmógrafo-mor trata de apesentar algumas informações gerais no sentido de justificar a elaboração de tal material. Indica que tal livro foi elaborado com vistas a expor suas explicações concedidas a Martim Afonso de Sousa, sobre certas dúvidas de navegação por ele adquiridas ao navegar. Explica ainda que, de forma a possibilitar que outros homens de seu tempo lessem suas considerações, decidiu traduzi-las para o latim.

No sétimo material, Pedro Nunes trata de expor suas respostas às seguintes dúvidas de Martim Afonso de Sousa: o que explica o fato de que, ao navegarmos mantendo a rosa leste, permanecemos sobre um mesmo paralelo, sem jamais chegarmos ao círculo equinocial, para o qual a proa sempre está apontada? E por que, em certo lugar austral, distante 35º da Equinocial, quando o Sol estava no princípio do Capricórnio, observa-se que o seu nascimento ocorria a sueste quarta a Leste?

Para tanto, o lusitano faz uso de demonstrações, as quais, por vezes, levam em consideração, argumentos de figuras como Ptolomeu e Euclides. Elas são ainda acompanhadas por ilustrações que ajudam a visualizar o exposto. Por fim, o quinhentista destaca que suas respostas devem ser tomadas como verdadeiras, pois estavam ancoradas em demonstrações matemáticas, que, para ele, ninguém pode questionar sua validade.

No oitavo material, também sob a perspectiva do crédito e validade que as ciências matemáticas podem atribuir às suas considerações, Pedro Nunes trata de discutir algumas questões relacionadas às regras e aos instrumentos para descobrir a aparência das coisas, sejam elas marítimas ou celestes. Seu trabalho, nesse livro, é dividido em 27 capítulos.

Já no nono material, Pedro Nunes trata de apresentar suas anotações ao investigar o problema de Aristótelis sobre o movimento de barco a remo. De forma geral, observa-se que ele busca analisar a opinião de Aristótelis e expor suas inferências a partir de proposições geométricas apresentadas em livros, como o primeiro e o sexto de Euclides.

No conteúdo apresentado no décimo material, o lusitano traz os esclarecimentos sobre a obra *Theoricae nouae planetarum* (1472), de Georg Peurbach, que, em sua concepção, mereciam ser realizados. Sua opinião é expressa por meio de 36 anotações, nas quais busca esclarecer questões sobre temas, tais como da teoria do Sol, da Lua e do movimento da oitava esfera.

Diante do exposto anteriormente, entende-se que essa obra e seu autor estiveram dentro do contexto em que se encontrava Portugal no século XVI, principalmente, no que se refere à prática da navegação. A importância dada por Pedro Nunes à investigação da realidade física, por meio de métodos matemáticos, ilustra sua proximidade com o fato da busca de aperfeiçoamento das técnicas de observação astronômicas e de instrumentos necessários ao desenvolvimento da náutica.

Quanto à *De arte atque ratione navigandi* (1573), que também está ligada ao refinamento da náutica, em especial a uma navegação teórica, verificam-se registros de sua presença em seu tempo e espaço. Como Pedro Nunes indicava a subordinação do navegar pela arte até então praticado a um navegar pela razão, sua obra não teve muita aceitação pelos homens práticos, porém, sabe-se que o lusitano almejava para seus tratados leitores eruditos.

O que Pedro Nunes inicia em sua obra, com a busca de sistematizar de forma fundamentada na teoria algumas atividades da prática da navegação, é o que se pode observar de forma mais expressiva em séculos posteriores, em todos os campos científicos. Fato que, de certa forma, já convergia para o desenvolvimento e sistematização dos conhecimentos modernos que conhecemos.

Elementos do contexto e das razões pelas quais Pedro Nunes apresenta o instrumento jacente no plano em *De arte atque ratione navigandi* (1573)

O instrumento jacente no plano, assim como outros instrumentos, é apresentado por Pedro Nunes no sexto capítulo do segundo livro da obra *De arte atque ratione navigandi* (1573), em que traz alguns instrumentos com que se pode tomar as alturas e as distâncias dos astros. A escolha por estudar o instrumento jacente no plano se justifica mediante à sua descrição e imagem ali apresentadas, pois elas despertaram interesse em pesquisar mais a fundo a seu respeito, no sentido de entender, principalmente, sua construção e uso.

Na descrição do instrumento, o quinhentista não dá um nome para o aparato, antes de sua descrição de construção e uso, diz apenas que “a altura do Sol pode tomar-se não só com instrumentos erectis sobre o plano do horizonte como também usando instrumentos que estão jacentes, paralelos a esse plano” (NUNES, 2008, p. 358). Por que então alguns autores têm se referido a ele como instrumento jacente no plano (ALBUQUERQUE, 1972, 1988; LEITÃO, 2008, CANAS, 2011a, ALMEIDA, 2011), instrumento jacente (NUNES, 2012) e/ou instrumento de sombras (ALBUQUERQUE, 1988)?

Em obras secundárias, tem-se registro da apresentação do instrumento jacente no plano em duas obras, uma na arte de navegar de João Baptista Lavanha, publicada em 1588 e outra em uma Arte de Navegar do século XVII. Em ambas as obras, ao tratarem do instrumento, também não designam nenhum nome a ele. Nessa última, por exemplo, ao apresentar o instrumento, é falada apenas sua função e que sua concepção é de Pedro Nunes.

No livro *Curso de história da náutica*, de 1972, sob a autoria de Luís Albuquerque, o referido instrumento de Pedro Nunes volta a ser abordado em um texto científico, diferentemente dos demais, dessa vez ele recebe uma nomenclatura. Em seu livro, Albuquerque (1972) se refere ao instrumento pelo nome de "instrumento jacente no plano". O autor diz ainda que D. João de Castro o chamou de "instrumento de sombras".

Albuquerque (1972, 1988) não destaca o porquê dessa nomenclatura, mas Canas (2011a), ao chamá-lo de «instrumento jacente no plano», diz que isso se deve às primeiras palavras da descrição de Pedro Nunes: «sed etiam ex iacentibus». Para a nomenclatura desse aparato, entende-se que uma leitura, para além dessas palavras iniciais, pode apontar outra variante para o nome do instrumento.

> A altura do Sol pode tomar-se não só com instrumentos erectis sobre o plano do horizonte como também usando instrumentos que estão jacentes, paralelos a esse plano. Divida-se, então, uma tábua circular **abcd** em 360 graus, como é costume, colocando-a paralela ao horizonte e fabrique-se, num material duro, um triângulo rectângulo e isósceles **fgh**, de modo que os lados **fg** e **gh** façam um ângulo recto e sejam iguais ao semidiâmetro do círculo traçado (NUNES, 2008, p. 358, sublinhado nosso).

Por esse texto, entende-se que o instrumento poderia ser chamado de "instrumento jacente ao plano", "ao plano" porque Pedro Nunes diz que a tábua deve ser posta paralela ao horizonte. Do ponto de vista matemático, um plano (tábua) paralelo ao outro (horizonte) dá a entender que ele pode estar sobre (sem qualquer altura entre os planos) ou acima do outro plano (com uma altura maior que zero entre os planos). Mesmo compreendendo que seria acertado chamar o aparato de "instrumento jacente ao plano", com vistas a não dar abertura para eventuais confusões sobre sua nomenclatura, resolveu-se por continuar a chamá-lo de «instrumento jacente no plano».

Um olhar acerca dos títulos de cada capítulo do livro em que o instrumento jacente no plano está descrito, permite-se elencar, de forma bem superficial, que, dentre as questões de náutica, são tratadas considerações quanto à carta de marear, à construção de instrumentos para se achar a altura e a distância dos astros, ao processo de traçar rumos em um dado globo, à determinação da distância entre dois lugares, com base na latitude e longitude, dentre outras.

Quase que na totalidade dos temas que Pedro Nunes aborda nesse livro, têm-se traços de conhecimentos incorporados à astronomia. Suas principais leituras sobre esse tema foram o livro *Adversus novam Marci Beneventati Astronomiam* (1522), de Albert Pighe (ca. 1490-1542); o *Elucidatio fabricae ususque astrolabii* (1513), de Johann Stöffer (1452-1531); o *De astrolabo catbolico* (1556), de Gemma Frisio (1508-1555); o *Almagesto* de Ptolomeu (ca. 100 – ca. 170) e o *Epytoma in Almagestum Ptolemaei* (Venesa, J. Hamann, 1495), resumo do *Almagesto*, elaborado por Georg Purbáquio e Regiomontano (LEITÃO, 2006).

Essas referências, ao que tudo indica, até pela expressividade de citações a elas realizadas pelo lusitano em suas obras, foram possivelmente a sua base teórica. No que se refere ao capítulo seis, além de tratar de discutir alguns instrumentos que podem ser utilizados para tomar a altura e as distâncias dos astros, ainda apresenta algumas considerações quanto a assuntos voltados à determinação de medidas astronômicas. Diante desses temas, pode-se supor que ele está a abordar, nesse capítulo, práticas relacionadas à navegação astronômica.

Essa náutica não pode ser compreendida na totalidade de observações de astros para se orientar, seja por terra ou pelo mar. A navegação, já há tempos praticada, pode receber a designação de astronômica, desde que esteja baseada em processos que permitam determinar a posição fiel ou aproximada de um navio em alto mar, por meio da medição de, pelo menos, uma coordenada astronômica de um astro (ALBUQUERQUE, 1972).

Nessa perspectiva, com vistas a dimensionar a aproximação do instrumento jacente no plano com essa definição, sabe-se que Pedro Nunes o indica para determinar a altura do Sol acima do horizonte. Essa medida, por sua vez, não apresenta de forma direta uma coordenada astronômica de localização, como, por exemplo, a latitude ou a longitude, mas, se determinada ao meio-dia do lugar (horário em que o Sol passa pelo meridiano do lugar), pode-se tomar a distância zenital e apenas somar à ela, ou subtrair, a declinação do Sol correspondente ao respectivo dia e, assim, obter a latitude do lugar.

Para quando a altura do Sol não se encontra no meridiano do local, existiam outros processos para a determinação dessa coordenada astronômica. Pedro Nunes, em seus tratados de navegação, discorre algumas considerações quanto aos procedimentos necessários. Contudo, dando destaque ao instrumento jacente no plano, infere-se que ele teria utilidade no processo para o cálculo da latitude, fato que indica uma certa aproximação com a navegação astronômica[30].

Ainda nesse sentido, chama atenção observar que Pedro Nunes, na abertura do capítulo seis, destaca que os mareantes não podem ter no mar um horizonte firme e estável. A partir dessa afirmação, começa-se a se pensar sobre a possibilidade de o instrumento jacente no plano ter sido ou não utilizado na navegação astronômica, pois, quando o autor descreve o instrumento, ele destaca a necessidade de mantê-lo paralelo ao plano do horizonte. Quanto à palavra horizonte, pelo apresentado por Pedro Nunes em sua epitome da introdução astronômica da esfera, ele define que "[...] horizonte é o círculo maior que separa a parte visível do mundo da que se não ver, pois um hemisfério está acima da terra, o outro debaixo da terra, sendo um mesmo hemisfério e metade da esfera" (NUNES, 2014, p. 213).

30 Maiores detalhes sobre a aproximação do instrumento jacente no plano com o cálculo da latitude no século XVI, ver Oliveira e Pereira (2019): "Elementos iniciais da relação entre o instrumento de Pedro Nunes, jacente no plano, e o cálculo da latitude no século XVI".

Assim, infere-se que esse instrumento, possivelmente, não teve uma ligação direta com a navegação astronômica de seu tempo. Visto que, segundo Albuquerque (1972), as práticas de náutica fazem parte do processo da determinação de coordenadas, para serem consideradas astronômicas, deveriam ser realizadas em mar, ação essa que dificultava o uso do instrumento jacente no plano, devido à necessidade de mantê-lo paralelo ao horizonte.

Na obra em que Pedro Nunes descreve o instrumento jacente no plano, não se verifica qualquer indicação para uso desse instrumento, a não ser a própria instrução de uso apresentada no documento. No capítulo quatorze, em que apresenta o processo para achar a altura do polo acima do horizonte por meio dos raios do Sol, em um dos procedimentos a serem realizados, solicita que se ache a altura do Sol acima do horizonte.

Momento esse, aparentemente, muito oportuno para indicar seu instrumento, porém ele indica o astrolábio para a determinação dessa medida. Uma possível justificativa, para essa indicação, pode ser o fato do astrolábio ser mais conhecido entre os homens do mar e outra é que ele não necessitava de um horizonte firme.

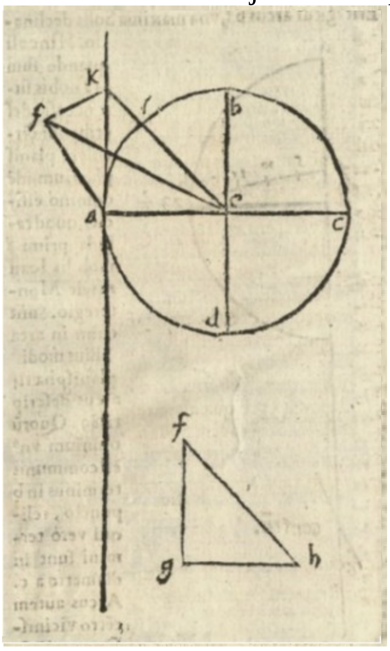
Ao iniciar a descrição do instrumento jacente no plano, o quinhentista afirma que a "[...] altura do Sol pode tomar-se não só com instrumentos erectis sobre o plano do horizonte como também usando instrumentos que estão jacentes, paralelos a esse plano" (NUNES, 2008, p. 358). Ao destacar que a altura do Sol é tomada por "instrumentos erectos", possivelmente, está a se referir ao astrolábio, o quadrante e a balhestilha, dentre outros. Aparatos esses que, para fornecer a referida medida, entende-se que necessitam estar posicionados perpendicularmente (erectos) ao plano do horizonte. Esses instrumentos, davam a altura que se encontrava na vertical, na própria vertical, a partir de uma certa perpendicularidade entre o plano do horizonte.

A expressão "instrumentos que estão jacentes", seguida a tom de explicação por "paralelos a esse plano", indica, pela construção do excerto, que a altura do Sol também pode ser determinada por instrumentos na horizontal e que essa é a significação dada por Pedro Nunes ao termo *jacente*. Nesse sentido, compreende-se que a altura que estava na vertical, passa a ser observada na longitudinal sobre um plano que faz ângulos retos com o que se encontrava a referida grandeza.

Contudo, com base nas considerações desses parágrafos anteriores, buscou-se, a seguir, verificar outras hipóteses, tais como: o instrumento jacente no plano pode não ter sido construído, pode não ter sido utilizado na navegação, pode ter sido utilizado apenas para medições em terra firme.

Nesse sentido, convém destacar, inicialmente, que, em *De arte atque ratione navigandi* (1573), o instrumento jacente no plano é ilustrado por meio da seguinte Figura 3:

Figura 3 — Instrumento jacente no plano



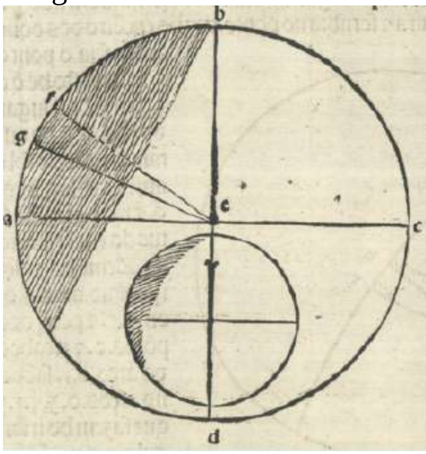
Fonte: Nunes (1573, p. 46).

Dessa ilustração, imagina-se que façam parte do instrumento, dentre outros elementos, uma circunferência e alguns triângulos. Com base nas figuras geométricas expressas nessa imagem e da informação já destacada anteriormente, de que os tratados de navegação de Pedro Nunes, apresentados em *De arte atque ratione navigandi* (1573), são uma reedição dos já publicados por Pedro Nunes nas *Petri Nonii Salaciensis Opera* (1566), fez-se uma observação nessa primeira publicação.

Nela, pode-se notar que o instrumento jacente no plano já estava de fato contemplado e que a imagem que o representa traz as mesmas figuras geométricas dessa outra publicação. Em sua descrição, não se observou qualquer mudança (omissão ou desconfiguração) tipográfica que viesse a prejudicar por quem dela se orientasse para a construção e/ou uso do aparato.

Visto isso, guiando-se agora pelo fato de o instrumento jacente no plano ter sido publicado, pela primeira vez, por Pedro Nunes, em sua *Opera* (1566) e que, como já destacado anteriormente, nela constam algumas ideias iniciais e elementos já apresentados no *Tratado da Sphera* (1537), procurou-se, nessa última, traços desse instrumento. Nela, não se observou qualquer trecho ou imagem que indicasse a presença do instrumento jacente no plano, no que se refere a instrumentos do cosmógrafo-mor, notou-se o aparato ilustrado a seguir (Figura 4):

Figura 4: Lâmina de Sombras



Fonte: Nunes (1537, p. 88).

Ao descrevê-lo, o quinhentista se refere a ele sob a denominação de *lâmina de Sombras*, segundo Nunes (2012), sua principal função era a de determinar o nordestear e noroestear das agulhas. Nota-se, que o *lâmina de sombras* (também conhecido por *instrumento de sombras*) é diferente do instrumento jacente no plano e que esse último teve sua primeira apresentação pelo lusitano em sua *Opera* (1566). Porém, quanto a esses instrumentos, é possível verificar, na historiografia que versa sobre eles, a seguinte consideração:

> Entre os instrumentos aconselhados por Pedro Nunes para observação de alturas do Sol, conta-se um dispositivo a que chamou ‹‹instrumento jacente no plano››, e com mais propriedade D. João de Castro, que o usou, veio a chamar de ‹‹instrumento de sombras›› (ALBUQUERQUE, 1988, p. 45).

Essa afirmação gerou algumas confusões sobre esses instrumentos, isso fez alguns leitores pensarem que se tratava de um mesmo aparato. Nunes (2012) faz uma discussão sobre essa consideração de Albuquerque (1988) e indica que esse historiador fez uma confusão ao interpretar de forma errônea o que D. João de Castro contou do roteiro que fez de Lisboa à Goa, no ano de 1538, sobre o uso de um instrumento de Pedro Nunes.

Devido aos esclarecimentos de Nunes (2012), que chega à conclusão de que D. João de Castro não estava de posse de um instrumento jacente no plano em sua viagem, não se buscou mais realizar uma discussão nesse sentido.[31] Contudo, destaca-se que, até pelo próprio ano de 1538, em que o marinheiro fez sua viagem, não existe a possibilidade de ter usado o instrumento jacente no plano, pois Pedro Nunes só o apresenta, pela primeira vez, em 1566, nas *Petri Nonii Salaciensis Opera*.

Nesse sentido, concorda-se com Nunes (2012) e Leitão (2008) ao destacarem que o nome *instrumento de sombras*, adjetivado por tal homem do mar, faz referência à *lâmina de sombras,*

31 Para maiores detalhes sobre a discussão entre esses instrumentos, ver Nunes (2012): “Os instrumentos náuticos na obra de Pedro Nunes”.

apresentada pelo quinhentista em seu *Tratado da Sphera* (1537) e não ao instrumento jacente no plano como indicado por Albuquerque. Quanto ao instrumento jacente no plano, esses autores afirmam que não se conhece qualquer referência de sua utilização no mar, por parte dos navegadores. A esse respeito, verifica-se ainda que:

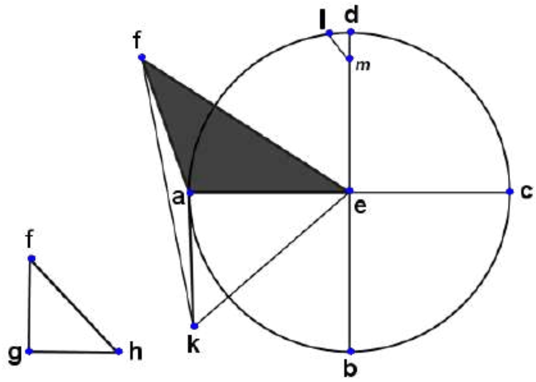
> A limitação que torna este instrumento muito pouco adequado ao uso no mar é óbvia: exige um plano horizontal estável, o que nunca se dá a bordo. Esta inadequação ao uso no mar tounou-o apenas numa concepção teórica e explica porque está praticamente ausente da literatura de náutica da época, e porque não se conhecem quaisquer exemplares (LEITÃO, 2008, p. 688).

Essa inadequação do instrumento à utilização no mar, faz-se observar um certo sentido, no fato já elucidado anteriormente, sobre as críticas feitas a Pedro Nunes por homens do mar de seu tempo. Contudo, pelo quinhentista ter sido uma figura bastante envolvida com as ciências do período e por saber, como já destacado anteriormente, que ele sabia da dificuldade de se conseguir um plano firme e estável no mar, entende-se que a intenção de Pedro Nunes com a apresentação dele pode, de fato, tratar-se apenas da indicação de uma concepção teórica.

No que se refere à utilização teórica do instrumento jacente no plano, Leitão (2008) indica dois exemplos, um nas notas de aula de João Baptista Lavanha de 1588 e o outro em uma Arte de Navegar do século XVII. Quanto à primeira indicação, ela refere-se ao *Tratado del arte de navegar* (1588), de Lavanha, o qual se constitui das lições que ministrou na Academia das Matemáticas em Madrid, mesmo não tendo sido escrito à mão pelo próprio autor, reflete todas as suas ideias. Os temas abordados, nesse tratado, são todos de cunho teórico e estão embasados nas contribuições de Pedro Nunes (CANAS, 2011b).

Prova desse embasamento, como já elucidado, tem-se o caso da lição em que Lavanha aborda o instrumento jacente no plano. Nela, Lavanha indica seu uso aos navegantes como objeto a ser utilizado em terra para encontrar a altura do sol, descreve uma de suas versões de construção, destacando a possibilidade de construí-lo numa tábua quadrada e explica seu funcionamento. Todas as descrições que apresenta são semelhantes às realizadas por Pedro Nunes. Até a ilustração de Lavanha para o instrumento, apresentada a seguir (Figura 5), lembra bastante a exposta em *De arte atque ratione navigandi* (1573):

Figura 5 — Instrumento jacente no plano descrito por João Baptista Lavanha



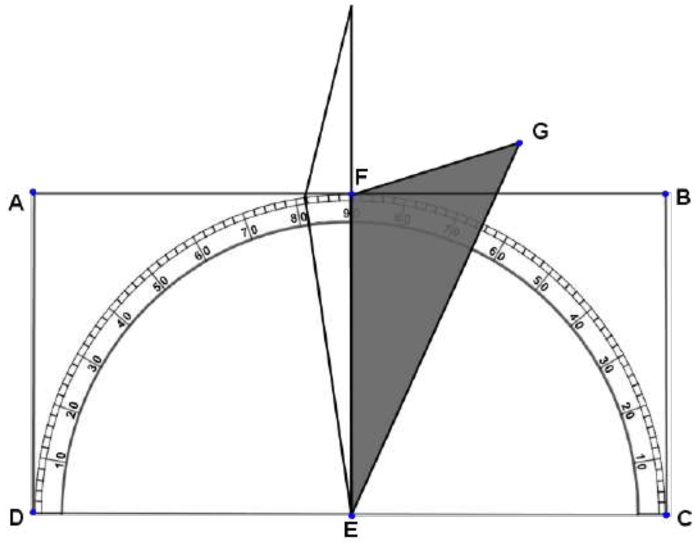
Fonte: Lavanha, ms. 2317 (1588).

Pela configuração desse desenho, sabe-se que ela faz referência ao caso da construção do instrumento em uma tábua circular, pois o cosmógrafo faz uso do estilo, o qual está representado por ml na figura. Ainda nessa perspectiva de tratados, com embasamento nas contribuições teóricas de Pedro Nunes, principalmente, no que se refere ao trabalho com o instrumento jacente no plano, tem-se, a seguir, o segundo exemplo mencionado anteriormente.

Em Leitão (2008), observou-se a indicação de que o instrumento jacente no plano também está abordado em uma Arte de Navegar do século XVII. Sobre ela, sabe-se que se trata de um manuscrito conhecido por Códice 27 do fundo Manizola, do catálogo da Biblioteca de Évora, o qual foi provavelmente composto na cidade de Lisboa, no entanto, não se sabe ao certo o nome de seu autor e nem a data exata em que foi escrito, mas se acredita que foi elaborado depois de 1632 (ALMEIDA, 2011).

Em anexo à redação de sua pesquisa, Almeida (2011), por estudar a obra náutica de Pedro Nunes, dá ênfase à apresentação de alguns trechos em que são feitas algumas considerações que podem ser atribuídas ao cosmógrafo-mor. Neles, observa-se uma descrição do instrumento jacente no plano, a qual se assemelha com a do cosmógrafo-mor para a versão elaborada sob uma tábua quadrada. Como imagem (figura 6) que representa o instrumento no manuscrito, tem-se:

Figura 6 — Instrumento jacente no plano descrito em uma Arte de navegar do século XVII



Fonte: BPE, Manizola, Cod. 27 (Séc. XVII, fl. 13r, apud Almeida, 2011).

Vistos esses dois exemplos de abordagem teórica do instrumento jacente no plano, percebe-se que ele foi utilizado apenas em um contexto teórico. Não se localizou qualquer referência de sua construção física no período, tampouco de sua utilização no mar, fato que o distancia de um instrumento útil à navegação astronômica praticada em alto mar, pelos pilotos.

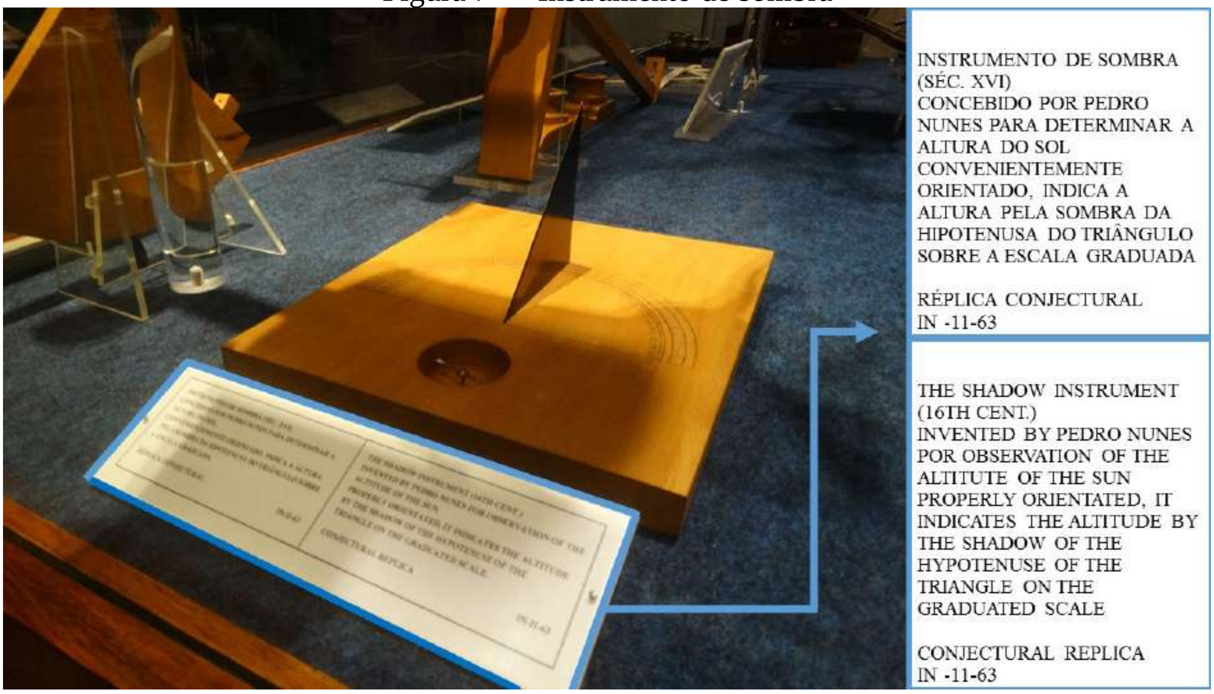
Com base nesse fato, em linhas gerais, entende-se que Pedro Nunes, em *De arte atque ratione navigandi* (1573), dá ênfase a uma abordagem mais matematizada para explicar a náutica e que não a destinava diretamente aos homens do mar. O simples fato de ter sido escrita em latim demonstra que estava voltada ao erudito e o encaminhamento dedutivo-euclidiano, com que seu conteúdo é apresentado, ilustra a importância dada ao rigor matemático. No mais, compreende-se, assim como Leitão (2006), que ele está a indicar uma subordinação da arte a ciência de navegar.

O instrumento jacente no plano é um dos elementos da obra de Pedro Nunes, em que se pode observar a valorização dada às questões teóricas, como forma de abordar temas da realidade física, em especial da náutica. O fato de não ter tido lugar no ambiente dos navegantes em alto-mar, mas ter tido espaço em um contexto teórico, como no caso das aulas de Lavanha, corrobora para exemplificar a frente de ação do quinhentista.

Entretanto, a partir das informações elucidadas nessa seção, espera-se, no capítulo a seguir, encontrar tantas outras, principalmente de ordem epistemológica, que venham a clarificar considerações quanto ao movimento do pensamento na formação dos conceitos incorporados e mobilizados na construção e uso do instrumento jacente no plano.

Antes porém de prosseguir, destaca-se que, na modernidade, sabe-se da existência de um instrumento de Pedro Nunes no museu da marinha de Portugal, que lá recebe o nome de instrumento de sombra (Figura 7). Seria ele então a lâmina de sombras do quinhentista? Da observação de sua indicação de uso expressa na imagem a seguir, nota-se que o aparato está cumprindo a função do instrumento jacente no plano (determinar a altura do Sol) e não a determinação do nordestear e noroestear das agulhas que faz a lâmina de sombras.

Figura 7 — Instrumento de sombra



Fonte: Museu da marinha Portugal.

Seria esse então o instrumento jacente no plano? No próximo capítulo, a partir da descrição de Pedro Nunes para construção e uso do instrumento jacente no plano apresentada em *De arte atque ratione navigandi* (1573), procurou-se responder essa indagação. Nesse momento, busca-se destacar possíveis aproximações e/ou distanciamentos que possam existir entre esses instrumentos

Ainda no capítulo a seguir, intensifica-se o estudo sobre o instrumento jacente no plano. Nele, com base nas informações do contexto de elaboração do instrumento vistas aqui, apresentam-se agora elementos observados durante o movimento do pensamento realizado para compreender a construção e uso do instrumento jacente no plano.

CAPÍTULO 2

RECONHECENDO CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS MOBILIZADOS NA CONSTRUÇÃO E USO DO INSTRUMENTO JACENTE NO PLANO

Sabe-se que os instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII, por incorporarem uma variedade de conhecimentos das matemáticas praticadas nesse período, podem revelar informações do processo de construção do conhecimento, que podem ajudar a (re)significar conhecimentos da matemática moderna (SAITO, 2014).

Nessa perspectiva, no presente capítulo, busca-se, inicialmente, mobilizar os conhecimentos incorporados no texto em que o instrumento jacente no plano está descrito, isso como forma de reconhecer alguns dos conhecimentos geométricos presentes em sua descrição de construção e uso. Posteriormente, como forma de identificar ainda mais conhecimentos, realiza-se sua (re)construção e se discute, mesmo que de forma inicial, alguns elementos de seu uso. Nesses momentos, valoriza-se, principalmente, a observação de questões de ordem epistemológicas incorporadas no instrumento.

O texto da construção do instrumento jacente no plano

A descrição do instrumento jacente no plano é apresentada em *De arte atque ratione navigandi* (1573), da página 46 a 47, logo após a descrição do *anel náutico*. No primeiro trecho, Pedro Nunes instrui que:

> Divida-se, então, uma tábua circular **abcd** em 360 graus, como é costume, colocando-a paralela ao horizonte e fabrique-se, num material duro, um triângulo rectângulo e isósceles **fgh**, de modo que os lados **fg** e **gh** façam um ângulo recto e sejam iguais ao semidiâmetro do círculo traçado. Coloque-se então esse triângulo perpendicularmente à tábua circular, de tal modo que o lado **gh** se ajuste perfeitamente a **ae**, semidiâmetro do círculo, isto é, que fique **g** com **a**, e **h** com **e**; por conseguinte o ponto **f** ficará para cima. Coloque-se também um estilete perpendicularmente ao plano, em qualquer ponto do diâmetro **bd** (NUNES, 2008, p. 358).

Nesse excerto, pode-se observar que Pedro Nunes já faz as indicações para a construção do instrumento jacente no plano, sua primeira instrução foi que se divida “uma tábua circular **abcd** em 360 graus, como é costume”, a qual deve ser colocada paralela ao horizonte. Ele não apresenta qualquer referência de como possa ser realizada essa divisão. Quanto a esse fato, compreende-se ir ao encontro da observação de Saito e Dias (2011) realizada sobre o tratado *Del modo de misurare* (1564), de Cosimo Bartoli (1503-1572), em que destacam que o documento não é um manual do “tipo faça você mesmo” destinado a qualquer pessoa, mas sim a um público que tinha conhecimentos de geometria e de práticas de ofício necessários à construção de instrumentos.

Sabe-se que essa divisão de ângulos envolve conhecimentos da geometria que se encontravam à disposição no período. Na tentativa de encontrar elementos que indicassem o “costume” a ser realizado para a divisão da circunferência em 360 graus, foram observados, inicialmente, os textos a que Pedro Nunes dispunha. Segundo Leitão (2006), o matemático teve acesso a muitas das edições dos *Elementos* de Euclides, tais como a publicada por Erhard Ratoldf, em 1482 e a de Luca Pacioli, de 1509.

Nos *Elementos,* verificou-se que eles não apresentam, de forma explícita, os procedimentos para a divisão da circunferência em 360 graus. Contudo, entende-se que algumas das proposições, neles descritas, podem favorecer essa divisão, as quais podem ser observadas no quadro 2 a seguir:

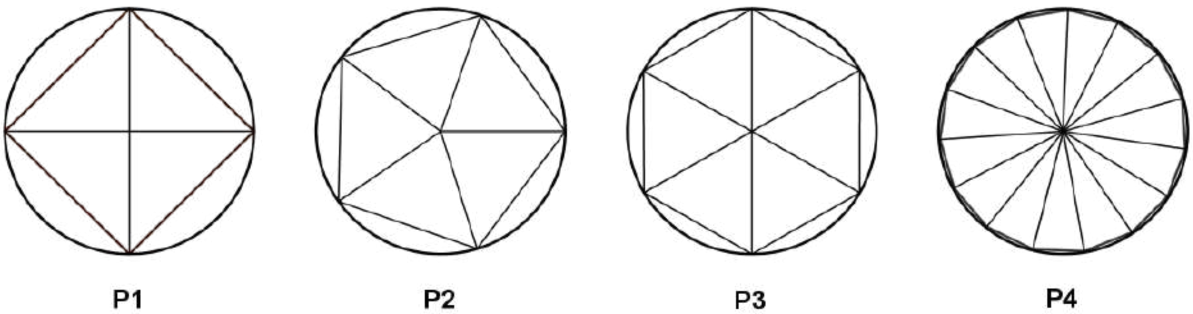
Quadro 2 — Proposições de Euclides que podem ser utilizadas para divisão da circunferência em seus 360 graus

PROPOSIÇÕES	TÍTULO	LIVRO	PAGINAÇÃO
P1	Inscrever um quadrado no círculo dado.	IV	192 - 193
P2	Inscrever, no círculo dado, um pentágono tanto equilátero quanto equiângulo.	IV	196 - 197
P3	Inscrever, no círculo dado, um hexágono equilátero e também equiângulo.	IV	201 - 202
P4	Inscrever no círculo dado, um pentadecágono equilátero e também equiângulo.	IV	203
P5	Cortar a reta dada não cortada semelhante à dada cortada.	VI	242
P6	Cortar em dois o ângulo retilíneo dado.	I	105

Fonte: Elaboração própria.

Com as proposições P1, P2, P3 e P4, verifica-se que poderia obter a divisão da circunferência, respectivamente, em 4 ângulos retos, 5 ângulos de 72 graus, 6 ângulos de 60 graus e em 15 ângulos de 24 graus. Essas possibilidades são ilustradas na seguinte Figura 8:

Figura 8 — Quadrado, pentágono, hexágono e pentadecágono inscritos na circunferência



Fonte: Elaboração própria.

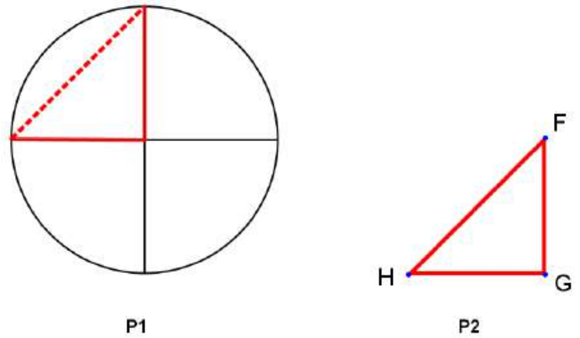
Tomando P4 como exemplo, sabe-se que, para obter a divisão da circunferência em 360 graus, uma possibilidade seria utilizar P6 para dividir os ângulos de 24 graus ao meio, obtendo assim 30 ângulos de 12 graus, procedimento esse que pode ser realizado sem prejuízo à construção até se obter 120 ângulos de 3 graus. O passo seguinte, tomando por base P5, seria construir um segmento unindo dois pontos da circunferência que representam a abertura de três graus. Dessa forma, seria possível aplicar P5 e obter a divisão da tábua em 360 graus.

Assim, utilizadas as proposições P5 e P6, conclui-se que existem inúmeras possibilidades para se dividir a circunferência em 360 graus a partir das proposições P1, P2, P3 e P4 dos *Elementos*, de Euclides. No entanto, esses procedimentos aparentam ser bastante exaustivos, principalmente, ao se pensar em realizá-los apenas com régua, esquadros não graduados e compasso, os quais eram alguns dos instrumentos disponíveis para esse fim no século XVI.

Não foi localizada qualquer referência de que esses procedimentos sejam, de fato, o "costume" a que Pedro Nunes se refere. Maiores indícios do "costume", a que praticavam para dividir a circunferência em 360 graus, credita-se ao procedimento descrito por Simão de Oliveira em sua *Arte de Navegar*, de 1606.[32] Corrobora para esse fato, ter-se observado que, em uma de suas primeiras folhas, é possível visualizar que as suas considerações estão baseadas em muitos eruditos, tanto antigos como modernos e que Pedro Nunes foi um desses homens.[33]

Feita a divisão da circunferência em 360 graus, Pedro Nunes instrui que se fabrique um triângulo isósceles *FGH*, que tenha seus lados *FG* e *GH* congruentes ao semidiâmetro da circunferência graduada, de tal forma que seja retângulo em $\hat{G}$. Quanto à essa construção, não se verificou, em *De arte atque ratione navigandi* (1573) e em nenhuma outra obra dele, os procedimentos a se fazer. Entretanto, com base nos *Elementos*, de Euclides, entende-se que era possível obtê-lo, conforme exposto na imagem (Figura 9) a seguir:

Figura 9 — Um dos procedimentos para obtenção do triângulo



Fonte: Elaboração própria.

O triângulo *FGH* dessa ilustração pode ser obtido a partir da construção de uma nova circunferência de diâmetro igual ao da graduada anteriormente, traçando-se, posteriormente, sobre

32 Na página 59, tem-se a apresentação dos procedimentos de divisão da circunferência descritos por Simão de Oliveira, para maiores detalhes sobre eles, ver Oliveira (1606): "*Arte de Navegar*".

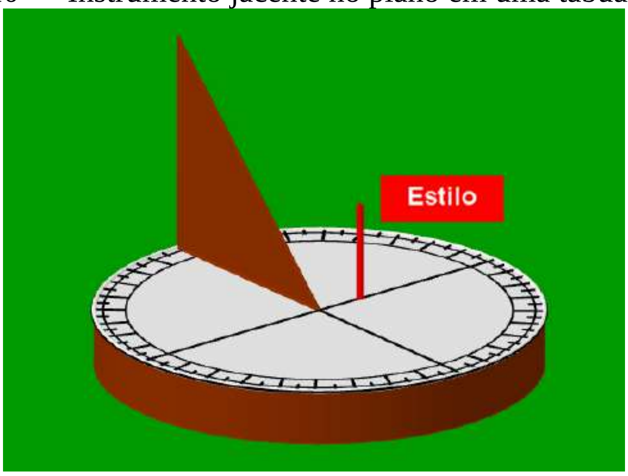
33 Ainda mais informações sobre o costume de se dividir a circunferência em 360 graus, ver Oliveira e Pereira (2020, no prelo): "Indícios do *costume* relacionado a divisão da circunferência em seus 360 graus presente na fabricação do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes".

ela, dois de seus diâmetros a ângulos retos, ter-se-ia a sua divisão em quatro quadrantes. Assim, construindo um segmento, que ligue dois pontos da circunferência localizados na extremidade dos semidiâmetros de um quadrante, os quais formem entre si ângulos retos, basta, subsequentemente, recortar o triângulo. A fabricação do ΔFGH, ao que se acredita, não foi uma tarefa difícil no século XVI.

Para a construção do instrumento, Pedro Nunes ainda menciona ser necessário um *estilete*. Com base na definição do dicionário de Figueiredo (1913), esse termo está a se referir a um aparato de aço, fino e pontiagudo. Vale destacar que Lavanha (1588), em sua descrição do instrumento jacente no plano, ao invés de *estilete*, menciona um *estilo*. Aparato que, em termo antigo, seria “ponteiro ou pequeno instrumento, com que os antigos escreviam em tábuas enceradas (Lat. stilus)” (Figueiredo, 1913, p. 820). Diante dessas duas possibilidades e suas respectivas definições, compreende-se que o *estilete* ou *estilo* se assemelha a um prego.

Com esse último objeto, encerram-se os elementos que compõem o instrumento jacente no plano. Quanto à organização deles, conforme excerto, em que está descrito o instrumento, Pedro Nunes instrui que se deve fixar o triângulo e o estilete perpendicularmente à tábua circular. Para esses procedimentos, acredita-se que, dentre os aparatos disponíveis no período, como compasso, régua e esquadro, fazia-se uso desse último para assegurar a perpendicularidade exigida. À luz da descrição de Pedro Nunes, entende-se que o instrumento teria a seguinte forma (Figura 10):

Figura 10 — Instrumento jacente no plano em uma tábua circular



Fonte: Elaboração própria.

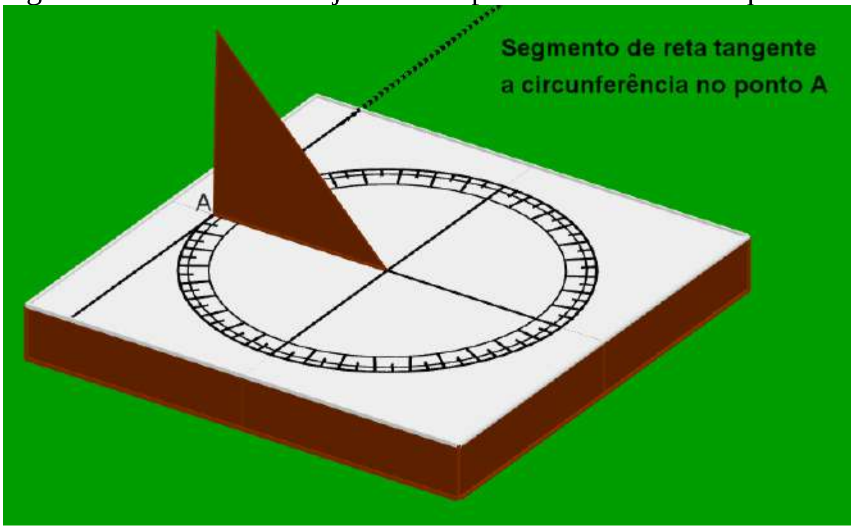
Ainda no que se refere à construção do instrumento jacente no plano, Pedro Nunes (1573), após uma demonstração da validade do instrumento, que será abordada mais à frente, afirma que:

> **A partir desta demonstração pode ver-se, se este tipo de instrumento tiver forma quadrada, de modo a que nele se possa traçar a recta ak tangente ao círculo no ponto a, não será necessário um estilete ou uma haste cuja sombra se projecte na reta bd.** Basta rodar o próprio instrumento até que a sombra da recta **af** se projecte sobre a recta **ak**, pois assim a sombra da recta **ef** indicará o arco da altura do Sol acima do horizonte. Se se

> duplicarem os lados do triângulo **fgh**, de maneira a que o lado **gh** seja igual ao diâmetro **ac** e se ajuste perfeitamente a ele, poder-se-á dividir o semicírculo **abc** em noventa partes iguais e então os graus da altura do Sol serão duplamente maiores (NUNES, 2008, p. 359, grifo nosso).

Na parte grifada desse excerto, pode-se verificar, assim como Leitão (2008) e Canas (2011a), que Pedro Nunes indica uma outra “versão” para o instrumento. Nessa nova configuração, o instrumento jacente no plano passa apenas por duas mudanças significativas. A primeira é que, ao invés de ser construído em uma tábua circular, agora será em uma quadrada e a outra é a substituição do estilete por um segmento de reta tangente[34] ao círculo no ponto *A*. Em linhas gerais, compreende-se que ele passaria a ter uma configuração semelhante à seguinte imagem (Figura 11):

Figura 11 — Instrumento jacente no plano em uma tábua quadrada



Fonte: Elaboração própria.

Pelo que Pedro Nunes indica, essa troca do estilo pelo segmento de reta tangente, assim como a da tábua circular por uma quadrada, não traria prejuízos à determinação da altura do Sol acima do horizonte, fato que se discute mais à frente. Nessa mesma perspectiva de não comprometer a obtenção da referida grandeza, no excerto anterior, ainda se percebe que ele apresenta uma terceira configuração para o instrumento jacente no plano.

Chama a atenção observar que, nessa terceira versão, o quinhentista instrui que seja feita a divisão de um semicírculo em 90 partes iguais, fato que, segundo ele, expressará os graus da altura do Sol de forma duplamente maiores. Em *De arte atque ratione navigandi* (1573), observa-se que,

34 Levando em consideração as leituras de Pedro Nunes expressas no capítulo anterior, credita-se que a noção que o lusitano detinha de reta tangente, possivelmente, está associada às contribuições de Euclides, apresentadas em seus *Elementos*. Outra possibilidade, que não anula essa anterior, é que ele também tenha lido as considerações de reta tangente presentes em obras de Regiomontanus. Sobre uma possível aproximação entre Pedro Nunes e Regiomontanus, ver Pereira e Morey (2018): “Traços de uma história: um primeiro olhar da influência de Johann Müller Regiomontanus nas obras do matemático português Pedro Nunes”.

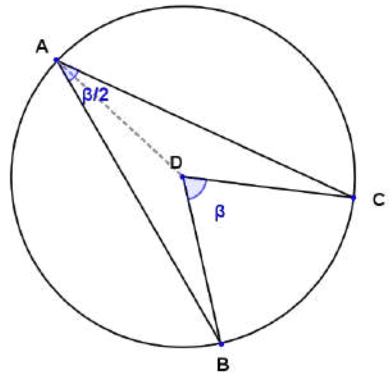
antes de descrever o instrumento jacente no plano, o autor já indicou algo semelhante para a construção do *anel náutico*.

Ao que tudo indica, esse procedimento de graduar a circunferência em graus duplamente maiores era algo que o lusitano possivelmente "dominava". Das fontes teóricas que o cosmógrafo possuía, entende-se, assim como Reis (2003), que seu conhecimento sobre isso tem correspondência com a seguinte proposição apresentada por Euclides, em seu terceiro livro dos *Elementos*:

> **20. Em um círculo, o ângulo junto ao centro é o dobro do sobre a circunferência, quando os ângulos tenham a mesma circunferência como base.**
> Seja o círculo ABC, e sejam, por um lado, o sob BEC um ângulo junto ao centro dele, e, por outro lado, o sob BAC um sobre a circunferência, e tenham a mesma circunferência BC como base; digo que o ângulo sob BEC é o dobro do sob BAC.
> Pois, tendo sido ligada a AE, fique traçada através até o E.
> Como, de fato, a EA é igual à EB, também o ângulo sob EAB é igual ao sob EAB; portanto, os ângulos sob EAB, EBA são o dobro do sob EAB. Mas o sob BEF é igual aos sob EAB, EBA; portanto, também o sob BEF é o dobro do sob EAB. Pelas mesmas coisas, então, também o sob FEC é o dobro do sob EAC. Portanto, o sob BEC todo é o dobro do sob BAC todo.
> Fique, então, inflectida de novo, e seja o sob BDC um outro ângulo, e, tendo sido ligada a DE, fique prolongada até o G. Do mesmo modo, então, provaremos que o ângulo sob GEC é o dobro do sob EDC, dos quais o sob GEB é o dobro do sob EDB; portanto, o sob BEC restante é o dobro do sob BDC.
> Portanto, em um círculo, o ângulo junto ao centro é o dobro do sobre a circunferência, quando [os ângulos] tenham a mesma circunferência como base; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p. 169-170).

Em linhas gerais, o que Euclides diz é que, dada uma circunferência, tomando um mesmo arco de circunferência, o ângulo ao centro é o dobro do ângulo inscrito. Nessa perspectiva, fez-se a seguinte representação (Figura 12):

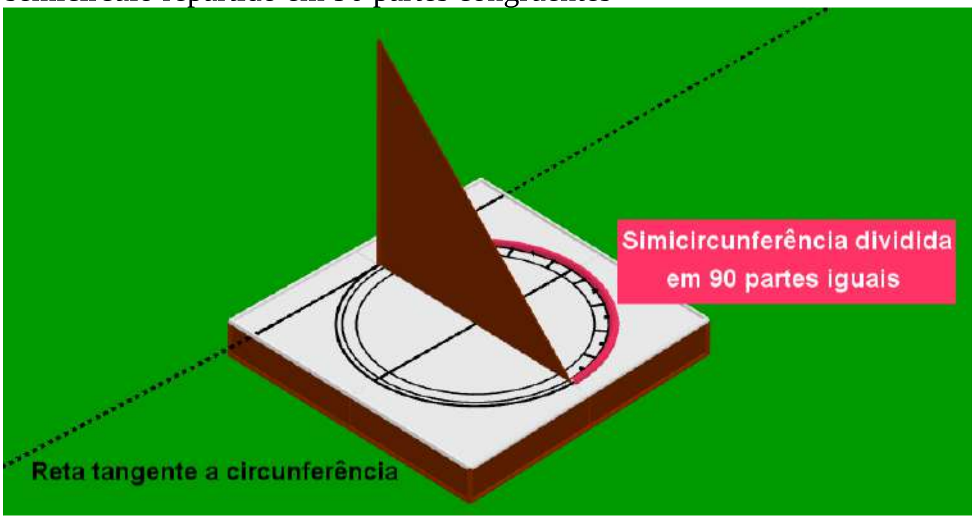
Figura 12 — Para um mesmo arco de circunferência,
o ângulo ao centro é o dobro do ângulo inscrito



Fonte: Elaboração própria.

Essa ilustração traz os pontos *A*, *B* e *C* da circunferência, a qual tem o ângulo $\widehat{BDC}$ ao centro e o ângulo $\widehat{BAC}$ inscrito, ambos com o mesmo arco de circunferência. Nessas condições, segundo a proposição vinte, do terceiro livro dos *Elementos*, o ângulo $\widehat{BDC}$ tem o dobro de graus de $\widehat{BAC}$. Portanto, compreende-se que a última configuração apresentada por Pedro Nunes para o instrumento jacente no plano, em que instrui a divisão de um semicírculo em 90 partes congruentes, pode ser representada por (Figura 13):

Figura 13 — Instrumento jacente no plano com o triângulo duplicado e o semicírculo repartido em 90 partes congruentes



Fonte: Elaboração própria.

No excerto, em que o lusitano apresenta essa versão, verificou-se, assim como expresso nessa ilustração, que os lados congruentes do triângulo isósceles agora se encontram duplicados, ou seja, cada um deles tem a mesma medida do diâmetro da circunferência. Nela, ainda se buscou representar, de forma ilustrativa, a graduação do semicírculo em 90 partes congruentes, divisão essa que faz um grau da altura do Sol corresponder fielmente a dois graus no instrumento.

Ademais, são, com esses excertos discutidos acima, que Pedro Nunes apresenta a descrição em que instrui a construção do instrumento jacente no plano. Como se pode observar, o lusitano não mostra preocupação em expressar as informações como um manual do tipo “faça você mesmo”. Fato que, possivelmente, pode ser compreendido, visto saber que o público a que sua obra estava dirigida eram pessoas que detinham conhecimentos geométricos.

Outro elemento, que se julga importante, foi observar a indicação de três versões para o instrumento jacente no plano, uma em uma tábua circular e duas em uma tábua quadrada. Ainda no que se refere às configurações do instrumento, à primeira vista, em uma *arte de navegar* do século XVII, acredita-se na possibilidade de existência de uma outra versão (uma quarta configuração), a qual já foi exposta anteriormente na Figura 6.

Como não foi descrita por Pedro Nunes, não se discute a seu respeito nessa seção. Contudo, suas principais diferenças quando comparadas às três configurações anteriores é que seria construída em uma tábua retangular e que seria necessário, ao invés da construção e divisão de uma circunferência em 360 graus, apenas da elaboração e divisão de um semicírculo em 180 partes.

Curioso observar a proposta de diferentes versões para o mesmo instrumento jacente no plano, principalmente, pela instrução de que ambas fornecem a mesma medida da altura do Sol. Após discutir mais conhecimentos matemáticos sobre a construção desse aparato e também outros referentes ao seu uso, ao final desse capítulo, expõem-se algumas considerações sobre a validade e unidade existente entre as referidas versões.

A seguir, mobiliza-se o texto do uso do instrumento jacente no plano descrito por Pedro Nunes.

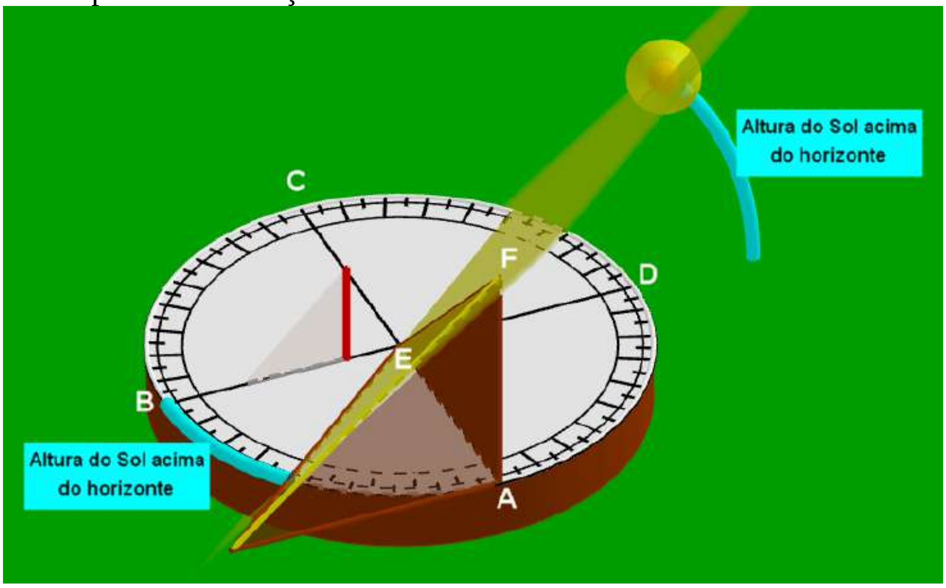
O texto de instruções para o uso do instrumento jacente no plano

A instrução para o uso do instrumento jacente no plano é apresentada por Pedro Nunes, logo após trazer a primeira possibilidade de configuração para o instrumento, na qual ele seria construído em uma tábua circular. Assim, com base nessa versão, ele faz a seguinte indicação:

> Quando se quiser achar a altura do Sol acima do horizonte, rodar-se-á o instrumento até que a sombra do estilete se projecte sobre a recta **bd**. Então, a sombra do lado **fh**, ou **fe**, no quadrante **ab**, indicará a altura procurada, calculada a partir do ponto **b** na direcção de **a**. A restante parte do quadrante até **a** será a distância entre o Sol e o Zénite (NUNES, 2008, p. 358).

Nesse excerto, o lusitano explica, em poucas palavras, como se tomar a altura do Sol acima do nível do horizonte por meio do instrumento. Dela, elenca-se Zênite como um termo que merece uma definição. Em linhas gerais, ele é compreendido como sendo o ponto mais alto da esfera celeste, correspondente à extremidade superior de uma linha imaginária que se projeta na vertical acima da cabeça de um observador. Visto isso, da indicação de uso feita pelo quinhentista, imaginou-se a seguinte ilustração (Figura 14):

Figura 14 — Interpretação da indicação de uso do instrumento jacente no plano a partir da descrição de Pedro Nunes



Fonte: Elaboração própria.

Nessa imagem, pode-se observar como se tomar a altura do Sol acima do horizonte com o instrumento jacente no plano. A sombra do *estilete* (representada pelo segmento de reta em vermelho, posto na vertical) está sobre o segmento de reta *BD* e a luz do Sol, que está incidindo sobre o triângulo, está fazendo com que ele projete sua sombra sobre o quadrante *AEB* da circunferência de centro *E*. Assim, a altura procurada corresponde ao arco que se inicia em *B* e vai até à sombra projetada pelo lado *EF* do Δ*FAE*. Em outras palavras, o arco em "azul claro", que se encontra na horizontal é igual ao arco que se encontra na vertical formado entre o Sol e o plano do horizonte.

A esse respeito, o cosmógrafo indica que:

> A demonstração é a seguinte: Imagine-se que a superfície do círculo **abcd**, que está paralela ao horizonte, é prolongada para o lado em que as sombras se projectam, e seja o triângulo **ake** a sombra do triângulo rectângulo **afe**, perpendicular a esse plano e projectada no mesmo plano; que a recta **af** projecte a sombra **ak**, e seja **ek** a sombra da recta **ef**, cortando **1** o quadrante **ab**. Visto que os raios solares à superfície da terra são tidos como paralelos, a linha recta **ak** e a sombra do estilete projectada na reta **eb** serão paralelas. Sabemos que o ângulo **aeb** é recto; portanto será recto o ângulo **eak**, assim como é recto **eaf**, e por consequência será recto o ângulo **fak**, pela terceira definição do livro 11º de Euclides. Portanto, nos dois triângulos **ake** e **afk**, como o lado **ae** de um é igual ao lado **af** do outro, e **ak** é lado comum, os dois ângulos contidos pelos lados iguais são iguais, ou seja, rectos, e por isso os dois ângulos **afk** e **aek** serão iguais entre si pela quarta proposição do primeiro livro de Euclides. Por outro lado, o ângulo **afk** é oposto ao ângulo de vértice em **f** que subtende o arco da distância entre o Sol e o zénite, pelo que o ângulo **aek** subtenderá de modo idêntico o arco **a1** no quadrante ab. O restante **b1** será semelhante ao arco da altura do Sol acima do horizonte, que era o que se pretendia demonstrar (NUNES, 2008, p. 359).

Como conhecimento incorporado a essa demonstração, verifica-se que o lusitano indica a terceira definição do décimo primeiro livro e a quarta proposição do primeiro livro, ambas dos *Elementos* de Euclides. As quais, em linhas gerais, correspondem, respectivamente, a: (1) condição necessária e suficiente para uma reta ser perpendicular a um plano e (2) igualdade entre triângulos tomando por base seus lados e ângulos (EUCLIDES, 2009).

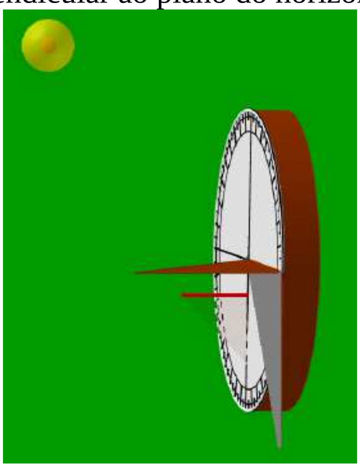
Nessa perspectiva, Pedro Nunes faz uso de (1), para provar que o segmento de reta *AF* é perpendicular ao plano do instrumento (do horizonte). Para isso, ele mostra que os segmentos de retas *AK* e *AE* pertencentes ao plano, ao qual *AF* se encontra perpendicular, tocam *AF* a ângulos retos. Já (2) é para ilustrar que $\Delta AKE \cong \Delta AFK$, visto possuírem um lado em comum e outro congruente e, a partir disso, destacar que os ângulos $\widehat{\mathrm{AFK}}$ e $\widehat{\mathrm{AEK}}$ são congruentes.

Visto isso, ainda no que se refere ao uso do instrumento, já no excerto final da descrição do instrumento jacente no plano, o cosmógrafo diz:

> Se o instrumento assim construído for colocado perpendicularmente ao plano do horizonte, e posto diante do Sol de maneira que a sombra da recta **af**, que já não será recta, mas versa, se projecte na reta **ak**, será **a1** o arco da altura do Sol acima do horizonte, e o restante **b1** será o arco da distância entre o Sol e o zénite. Por esta razão, a sombra recta e a versa permutam-se, por forma que, tomadas duas alturas do Sol que perfaçam 90 graus, será tanta a sombra recta de um mesmo gnómon, para uma desta alturas, quando a versa que corresponde à outra. Para uma mesma altura do Sol acima do horizonte, quer os gnómones sejam iguais, quer desiguais, a sombra recta estará em relação ao seu gnómon como qualquer outro [gnómon] estará em relação à sua sombra versa. A demonstração disto é fácil, pela quarta proposição do sexto livro de Euclides. Portanto, pela regra usual das proporções, conhecereis a sombra versa a partir da recta e, por sua vez, a recta partir da versa (NUNES, 2008, p. 359-160).

Pelo que se pode observar nesse trecho, Pedro Nunes sugere que, para encontrar a altura do Sol acima do horizonte, o instrumento seja colocado perpendicularmente ao plano do horizonte (na vertical). Contudo, em sua instrução, não deixa claro de qual versão está a se referir, ou se sua indicação é válida para todas as configurações. Sobre a indicação do cosmógrafo, compreende-se que a nova situação de uso seria algo próximo à seguinte ilustração (Figura 15):

Figura 15 — Uso do instrumento jacente no plano com ele perpendicular ao plano do horizonte



Fonte: Elaboração própria.

Nessa situação, Pedro Nunes, no que se refere a conhecimentos das matemáticas do período, trabalha com a noção de reta tanto na horizontal (reta) como também na vertical (versa) e ainda com conhecimentos de sombra reta e versa. Com base nisso, destaca que o ângulo formado pela sombra no quadrante *AEB* da circunferência de centro *E*, que antes representava a medida da altura do Sol acima do horizonte, agora passa a indicar a distância entre o Sol e o zênite e que seu complemento passará agora a ilustrar a altura do Sol em relação ao plano do horizonte.

Como outro elemento das matemáticas, incorporado na sustentação teórica do instrumento, tem-se a quarta proposição do sexto livro dos *Elementos* de Euclides. Tal proposição demonstra que "os lados à volta dos ângulos iguais dos triângulos equiângulos estão em proporção, e os que se estendem sob os ângulos iguais são homólogos" (EUCLIDES, 2009, 235). O lusitano fez uso dela para destacar a relação entre as sombras reta e a versa projetadas pelo triângulo sobre a circunferência graduada.

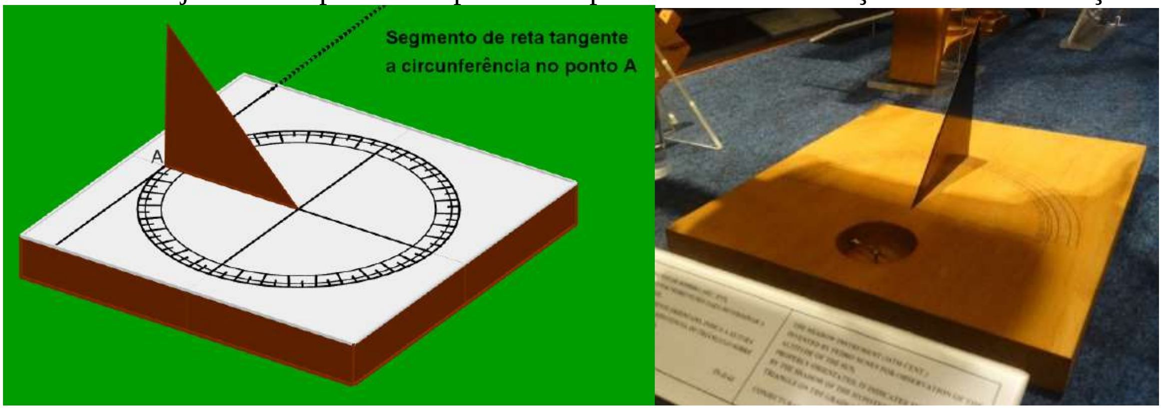
Ainda no que se refere à compreensão do excerto anterior, o termo gnómon que, por vezes é referido, tem como significado "ponteiro ou qualquer instrumento, que marque a altura do Sol pela direcção da sombra" (FIGUEIREDO, 1913, p. 820). Nesse sentido, entende-se que, com ele, o cosmógrafo está se referindo ao triângulo retângulo isósceles, o qual projeta a sombra sobre circunferência graduada e, assim, indica a altura do Sol.

Visto isso, encerou-se a observação do texto de uso do instrumento jacente no plano. Dela, pode-se destacar, de forma geral, que Pedro Nunes buscou abordar, na descrição do uso, todas as situações que, em seu entendimento, seriam possíveis de serem realizadas (o uso do instrumento tanto paralelamente, como também perpendicularmente ao plano do horizonte).

Esse fato indica a aproximação e o apreço de Pedro Nunes com as matemáticas presentes do período, principalmente, no que se refere a uma análise da realidade física de forma mais matematizada. Provas disso foram sua dedicação em elaborar um instrumento que pudesse ser usado para se tomar a altura de um astro (aproximação com a astronomia), seu empenho em apresentar três configurações para ele e também as constantes referências a que fez aos *Elementos*, de Euclides.

Feitas essas considerações acerca da descrição de construção e instruções de uso apresentadas por Pedro Nunes, já é possível responder ao questionamento levantado ao final do capítulo anterior sobre a réplica de um instrumento do quinhentista presente no museu da marinha em Portugal, o qual, em exposição, recebe o nome de instrumento de sombra. Como se observou, o instrumento jacente no plano pode ser confeccionado tanto em uma tábua quadrada, como em uma circular. Como, visualmente, o aparato presente no museu remete à versão na tábua quadrada, tem-se:

Figura 16 — Da direita para a esquerda: instrumento presente no museu e configuração do instrumento jacente no plano compreendido pela leitura da descrição de sua construção.



Fonte: Museu da marinha e acervo dos autores.

Como se pode observar, a réplica presente no museu se distancia da versão elaborada com base na descrição de Pedro Nunes pelo fato dela conter uma bússola, pelo texto do lusitano, ela deveria ter apenas uma circunferência graduada, uma reta tangente e um triângulo. A imagem que se dispõe do instrumento presente no museu não favorece uma visualização de todas suas partes, mas cabe destacar que nela consta o segmento de reta tangente.

A partir de uma aproximação visual sobre essa réplica, é possível notar outros distanciamentos com o instrumento jacente no plano além da incorporação da bússola, são eles: o fato da tábua ser retangular e de se ter a graduação apenas de um semicírculo. Outro problema dessa réplica, cuja imagem de que se dispõe também não favorece a visualização, é o fato da escala presente no instrumento está invertida. Como em sua descrição Pedro Nunes não discorre sobre a forma correta de graduação ou disposição da escala, não se entende essa configuração como um distanciamento da versão do quinhentista.

Diante dessas observações e levando em consideração que as informações presentes na targeta de apresentação da réplica presente no museu indicam que o instrumento serve para determinar a altura do Sol, compreende-se que ele, de fato, trata de uma réplica do instrumento jacente no plano. Seus distanciamentos da versão original do quinhentista indicam que ele, possivelmente, foi (re)construído sob uma perspectiva historiográfica tradicional, ou seja, que não se procurou seguir rigorosamente o texto de Pedro Nunes. A seguir, à luz de uma perspectiva historiográfica atualizada, trata-se da (re)construção do instrumento jacente no plano e dos conhecimentos geométricos nele incorporados.

A (re)construção e uso do instrumento jacente no plano a partir do texto descrito por Pedro Nunes, como forma de identificar os conhecimentos geométricos mobilizados

Nessa seção, descreve-se a situação de (re)construção e uso do instrumento jacente no plano, na versão da tábua quadrada, a partir da mobilização dos conhecimentos geométricos incorporados no texto descrito por Pedro Nunes. Durante o processo de (re)construção, é dado destaque à observação de questões de ordem tanto materiais e epistemológicas como também matemáticas. Na situação de uso, procurou-se contemplar temas de caráter prático, matemático e epistemológico. Em linhas gerais, nos dois momentos, busca-se valorizar a identificação de conhecimentos geométricos incorporados no instrumento.

A (re)construção do instrumento jacente no plano

A tentativa de (re)construção do instrumento jacente no plano, apresentada a seguir, tem como ponto de partida o argumento de Saito (2014), no qual destaca ser impossível a reconstrução exata de instrumentos matemáticos antigos, pois fatores, tais como o não conhecimento das técnicas empregadas no período e a multiplicidade de saberes e materiais que dispomos atualmente, podem influenciar o processo de elaboração do aparato.

Feita essa ressalva, destaca-se, também, que, nessa tentativa de reconstrução, guiou-se para esse processo da “conversa” realizada anteriormente com o texto descrito por Pedro Nunes para a construção do instrumento jacente no plano. Com essa articulação entre a descrição teórica e a mobilização das instruções na prática de fabricação, procurou-se levantar ainda mais questões de ordem matemáticas, epistemológicas e materiais incorporadas no instrumento.

Deve-se ter em conta, além disso, que, conforme observado na seção anterior, a descrição do cosmógrafo sobre o instrumento não é um texto do tipo “faça você mesmo”, dedicada a qualquer pessoa do período, mas sim para aquelas que deteinham conhecimentos, por exemplo, das matemáticas e do fabrico de instrumentos. Nesse sentido, com vistas a reconhecer saberes das matemáticas do século XVI, teve-se o cuidado de buscar identificar grande parte dos conhecimentos que podem estar em torno das instruções de Pedro Nunes.

Tendo em vista construir a versão do instrumento, na qual é realizada sob uma tábua quadrada, sistematizaram-se suas instruções no seguinte quadro 3:

Quadro 3 — Sistematização dos elementos e instruções para construção do instrumento jacente no plano na versão da tábua, conforme a descrição de Pedro Nunes

INSTRUÇÕES PARA CONSTRUÇÃO DO INSTRUMENTO JACENTE NO PLANO NA TÁBUA QUADRADA		
PARTES DO INSTRUMENTO	**(1)**	Divisão de um círculo *ABCD* em 360 graus, como é costume, em uma tábua quadrada.
	(2)	Fabrica-se, num material duro, um triângulo rectângulo e isósceles *FGH*, de modo que os lados *FG* e *GH* façam um ângulo reto e sejam iguais ao semidiâmetro do círculo traçado.
	(3)	Reta tangente
DISPOSIÇÃO DAS PARTES DO INSTRUMENTO	**(a)**	Ponha a tábua circular paralela ao horizonte
	(b)	Coloque-se o triângulo perpendicularmente à tábua quadrada, de tal modo que o lado *GH* se ajuste perfeitamente a *AE*, semidiâmetro do círculo, isto é, que fique *G* com *A*, e *H* com *E*; por conseguinte o ponto *F* ficará para cima.
	(c)	Coloque-se também uma reta tangente ao ponto *A* do diâmetro *AC*.

Fonte: Adaptado da descrição de Nunes (1573).

Ressalta-se que, com a disposição das instruções de Pedro Nunes nesse terceiro quadro, não se busca fixar uma sequência a ser seguida para a construção do instrumento jacente no plano, mas apenas atribuir uma identificação [**(1)**, **(2)**, **(3)**, **(a)**, **(b)** e **(c)**] para otimizar a discussão durante o processo de construção. Compreende-se, com base em uma vertente historiográfica atualizada, que, ao tentar impor uma ordenação com base na descrição do quinhentista, poder-se-ia perder algumas questões de ordens matemáticas, epistemológicas e materiais incorporadas no processo de (re)construção.

Sob esse entendimento, deu-se início à tentativa de reconstrução. Um dos primeiros questionamentos levantado foi de ordem material, pois Pedro Nunes não indica sobre que madeira ou revestimento suas partes devam ser confeccionados. Ainda nesse sentido, outra coisa que não é exposta para guiar a fabricação são as dimensões de cada objeto, como no caso do semidiâmetro da circunferência (forma como Pedro Nunes se refere ao que na modernidade se chama costumeiramente de raio).

Partindo-se da tomada de uma régua não graduada, compasso e esquadro sem escala, elementos que se acredita serem os utilizados para as construções no século XVI, guiou-se a escolha dos demais. Tendo como norteador esses materiais e visando ainda uma possível reconstrução em um ambiente escolar, apresenta-se a seguir (quadro 4), no que se pensou para trabalhar a fabricação:

Quadro 4 — Materiais para a construção do instrumento jacente no plano.

TÁBUA QUADRADA	**TRIÂNGULO**	**ELEMENTOS EXTRAS**	
Tábua de madeiraTábua de madeira	Borracha	Martelo	

Isopor	Isopor	Caneta	Cola
Papelão	Papelão	Lápis	Tesoura
Chapa de plástico	Chapa de plástico	Cerra para corte da madeira	Barbante/ linha

Fonte: Elaboração própria.

Listadas essas possibilidades, o passo seguinte foi a reconstrução do instrumento. Decidiu-se tomar como ponto de partida a instrução **(1)**. Uma possibilidade para trabalho com uma tábua quadrada de madeira seria já se obtê-la recortada de um local apropriado. Contudo, essa alternativa poderia inibir possíveis discussões em sala, pois caso viessem com tamanho já testado para realizar o procedimento da divisão em 360 graus (pré-estabelecido), os estudantes possivelmente não visualizariam algumas relações entre conceitos matemáticos, tais como a existente entre o semidiâmetro e o comprimento da circunferência.

Entende-se que reflexões, nesse sentido, são essenciais ao se pensar em levar a reconstrução do instrumento jacente no plano para o ambiente escolar. No entanto, mediante o que se objetiva nesse momento da pesquisa, discute-se a seguir, principalmente, questões de ordem matemática e epistemológica sobre o processo de realização da instrução **(1)**.

Como já destacado anteriormente, do observado na *Arte de Navegar*, de 1606, de Simão de Oliveira, compreende-se que uma possível possibilidade para o costume a que Pedro Nunes se refere seria a realização dos seguintes procedimentos:

I. Construa, com uma linha do tamanho igual à metade do diâmetro da tábua circular tomada, uma circunferência;

II. Com uma linha diametral, que com a primeira se cruze em ângulos retos no centro, corte a circunferência em quatro quadrantes;

III. Faça outro círculo próximo ao primeiro na parte de dentro, formando um pequeno intervalo em que ficarão descritos os graus de um em um intervalo;

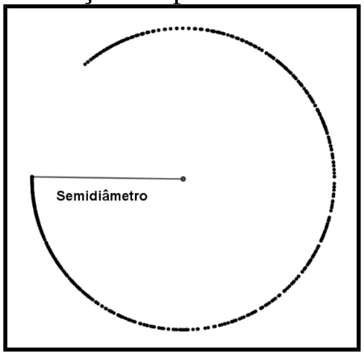
IV. Trace outro círculo na parte de dentro, que com o segundo faça outro intervalo maior que o anterior, em que ficarão os graus de cinco em cinco e de dez em dez;

V. Cada quadrante se divida em três partes iguais, as quais cada uma se repartirá em outras três, formando nove partes iguais. Reparta cada parte por dois e serão dezoito. Que divididas uma a uma por cinco se terão as 90 partes;

VI. Do centro do círculo, traçar linhas pequenas que repartirão, primeiramente, os intervalos de 10 em 10 graus, posteriormente, de 5 em 5 e, por fim, de 1 em 1, fazendo estes últimos sequencialmente um branco e outro preto.

O primeiro procedimento **I** pode ser representado da seguinte forma (Figura 17):

Figura 17 — Construção do primeiro círculo sobre a tábua



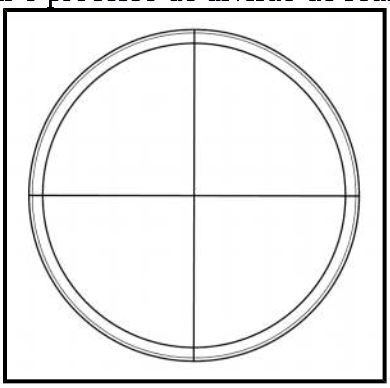
Fonte: Elaboração própria.

Nota-se que, com uma linha de medida igual ao semidiâmetro da circunferência, constrói-se o primeiro círculo, o qual se localiza na extremidade da tábua circular. Em linhas gerais, vê-se que esse simples procedimento envolve a noção intuitiva de circunferência, momento em que se pode destacar que ela é formada por um conjunto de pontos equidistantes ao centro, os quais formam uma linha fechada circular.

Quanto à realização do segundo procedimento **II**, em que se pede para dividir a circunferência em quatro quadrantes a ângulos retos, destacam-se duas possibilidades. Uma delas seria, após a construção da primeira linha diametral, traçar a sua mediatriz a partir dos pontos comuns à extremidade da circunferência (noção de mediatriz de um segmento). A outra seria construir uma reta perpendicular ao primeiro semidiâmetro traçado, tomando como ponto inicial dessa nova reta o centro da circunferência (ideia de reta perpendicular).

Feito isso, o passo seguinte é a realização dos procedimentos **III** e **IV**, os quais se entende que podem serem realizados tanto como o primeiro **I**, como também por meio de um compasso. Após o que se compreendeu desses passos, a construção encontra-se disposta na imagem a seguir (Figura 18):

Figura 18 — Tábua circular com elementos iniciais para começar o processo de divisão de seus graus



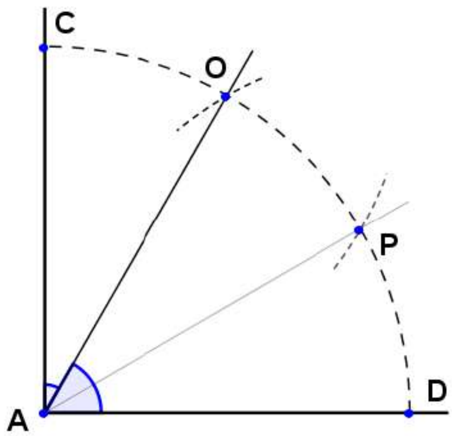
Fonte: Elaboração própria.

Feito isso, na sequência, deve-se realizar o quinto procedimento (**V**). Para tal, é necessário, para a primeira repartição, fazer a “divisão de um ângulo reto em três ângulos congruentes” (linguagem atual). Uma alternativa para tanto seria traçar dois ângulos com “quantidades” iguais a 60 graus cada, os quais devem ser um a um construído, tendo como base um lado distinto do ângulo reto (REZENDE, QUEIROZ, 2008). Em outras palavras, tem-se a seguinte explicação e sua respectiva representação (Figura 16):

> Seja o ângulo $\widehat{A}$
> Com centro no seu vértice *A* descrevemos com qualquer raio o arco $\widehat{CD}$.
> Centrando agora em *D* com o mesmo raio cortemos o arco $\widehat{CD}$ no ponto *O*. Em seguida com o mesmo raio, façamos centro em *C* e cortemos $\widehat{CD}$ em *P*.
> Os pontos *O* e *P* unidos ao vértice *A* do ângulo em questão dividi-lo-ão em três partes iguais como queríamos.
> Imaginando *A* o centro de uma circunferência e *AC* o seu raio; temos que o segmento que une $\acute{OD}$ ou $\acute{PC}$ é o lado do hexágono inscrito (Núm. 200) (CARVALHO, 1958, p. 104).

Nesse caso, pode-se observar que o que garante ao ângulo $\widehat{\mathrm{DAO}}$ a medida de 60 graus, é o fato dele corresponder a um dos ângulos internos de um triângulo equilátero, pois é fato que um triângulo desse tipo possui seus três lados congruentes e, consequentemente, três ângulos congruentes. Assim, compreende-se que, para essa trissecção, bastaria construir apenas um triângulo equilátero inscrito no ângulo reto, desde que ele tenha um lado comum a um dos lados congruentes do triângulo retângulo. Dessa forma, $\widehat{\mathrm{DAC}}$ estaria dividido em dois ângulos, um de 30 graus e outro de 60 graus, o qual pelo traço de sua bissetriz forneceria dois ângulos de 30 graus. Como representação para essa situação, tem-se (Figura 19):

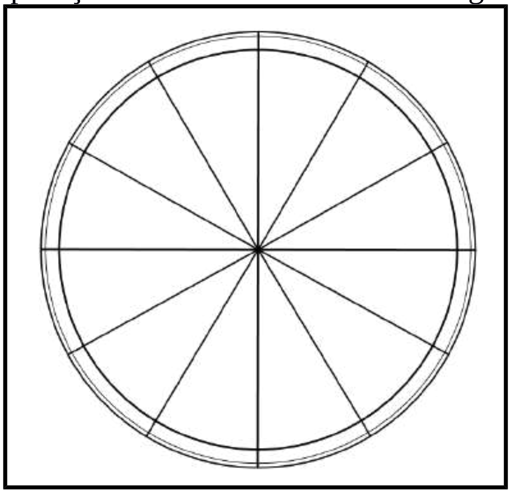
Figura 19 — Trissecção de um ângulo reto.



Fonte: Elaboração própria.

Realizada essa divisão e utilizando esses mesmos procedimentos nos demais quadrantes, obtém-se já uma repartição da circunferência em 12 ângulos congruentes de 30 graus. Dessa maneira, tem-se (Figura 20):

Figura 20 — Repartição da circunferência em 12 ângulos congruentes.

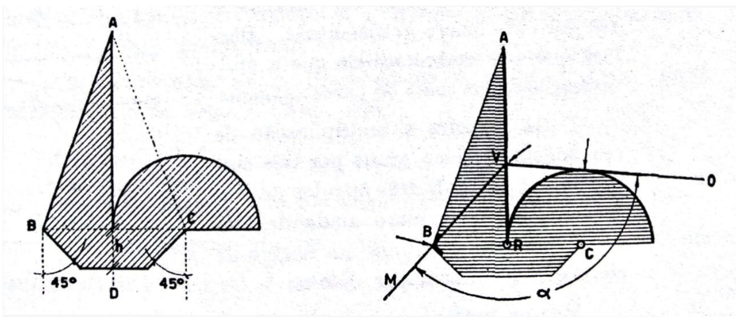


Fonte: Elaboração própria.

Ainda, para o cumprimento do quinto procedimento, a instrução seguinte é a divisão de cada um desses ângulos de 30 graus em três ângulos congruentes. A esse respeito, cabe destacar que "[...] a trissecção de um ângulo qualquer não pode ser resolvido com régua e compasso, a não ser por processos aproximados ou "marcando pontos na régua" (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p. 130).

Nesse sentido, uma das alternativas seria fazer uso de um instrumento que pode ser confeccionado a partir de uma cartolina[35]. Composto por um triângulo retângulo de lados distintos, uma semicircunferência de semidiâmetro congruente ao menor lado do triângulo e ainda de um trapézio, o qual será confeccionado por meio de um prolongamento das figuras anteriores como forma de sustentá-las unidas (CARVALHO, 1958). Na ilustração a seguir (Figura 21), tem-se sua representação:

Figura 21 — Instrumento para a trissecção de ângulos.



Fonte: Carvalho (1958, p. 105).

Para a trissecção com esse aparato, em linhas gerais, deve-se fazer com que o vértice *B* do triângulo coincida com um dos lados do ângulo $\widehat{VMO}$ e que, ao mesmo tempo, a semicircunferência esteja tangente ao lado *VM*. No passo seguinte, tem-se que verificar se o

35 Informações referentes à construção e uso desse instrumento ver Carvalho (1958): "Desenho geométrico".

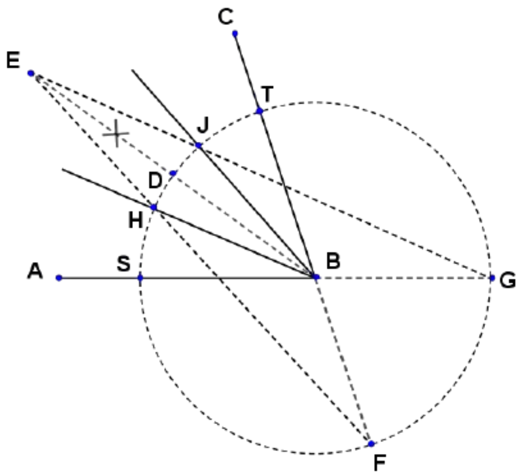
segmento de reta *AR* está sob o vértice *V*, caso esteja, já se pode dividir o ângulo pela construção de duas retas, uma partindo de *VR* e a outra de *VC* (CARVALHO, 1958).

No que se refere à trissecção de um ângulo agudo, agora com régua e compasso, uma possibilidade de aproximação seria:

> Fazendo centro em B, descreve-se uma circunferência que corte os lados AB e BC do ângulo dado em S e T: em seguida prolonguem-se o lado AB até a circunferência em G e o lado CB até F; depois trace-se a bissetriz EB do ângulo ABC; tome-se BD e sobre ela marque-se DE igual a BD; liguem-se os pontos E e F e E e G pelas retas EF e EG; estas duas retas cortam a circunferência em H e J; tracem-se HB e JB que dividirão o ângulo dado ABC em três partes iguais: SH, HJ e JT (BRAGA, 1997, p. 31).

Esses procedimentos podem ser ilustrados pela seguinte Figura 22:

Figura 22 — Representação da trissecção de um ângulo agudo.



Fonte: Elaboração própria.

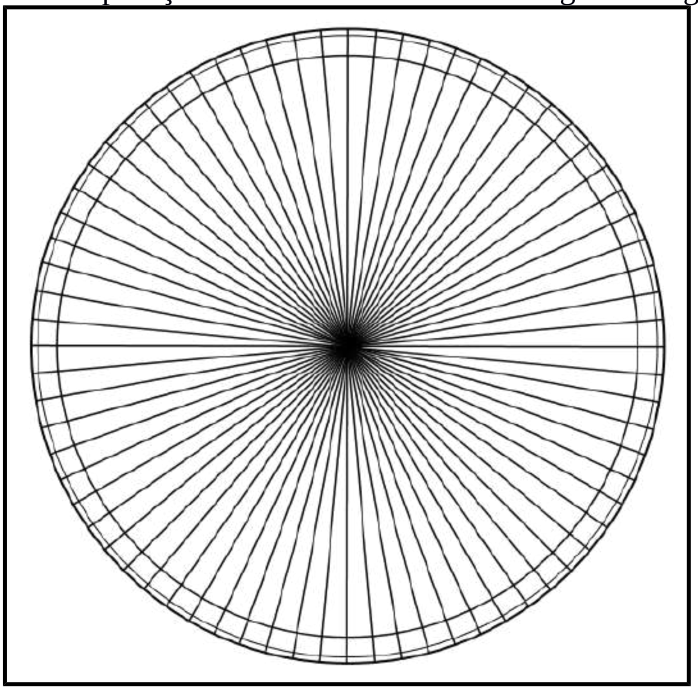
Relativamente à trissecção de um ângulo com régua e compasso, tem-se conhecimento da existência de mais três possibilidades. Uma delas é atribuída a Arquimedes (Siracusa, 287 – c. 211 a.C.) e a outra a Pappus (sec. IV d.C.), que faz uso de uma hipérbole. A última teria surgido nos Estados Unidos da América, já há algum tempo e se diferencia por utilizar, para a trissecção, um esquadro de carpinteiro (PINTO, 2010).[36]

Feita uma nova trissecção em cada ângulo da divisão anterior na circunferência representada na figura 20, tem-se 36 ângulos congruentes de 10 graus, os quais, com base no quinto procedimento (**V**), devem, em seguida, ser repartidos ao meio. Para essa nova divisão, basta traçar a bissetriz de cada ângulo[37]. Com isso, considere-se (figura 23):

36 Maiores informações sobre esses três procedimentos de trissecção, ver Pinto (2010): "Os instrumentos náuticos de navegação e o ensino da geometria".

37 Quanto aos procedimentos para o traço da bissetriz de um ângulo, consulte: Carvalho (1958), Rezende, Queiroz (2008) e Wagner (1993).

Figura 23 — Repartição da circunferência em 72 ângulos congruentes.



Fonte: Elaboração própria.

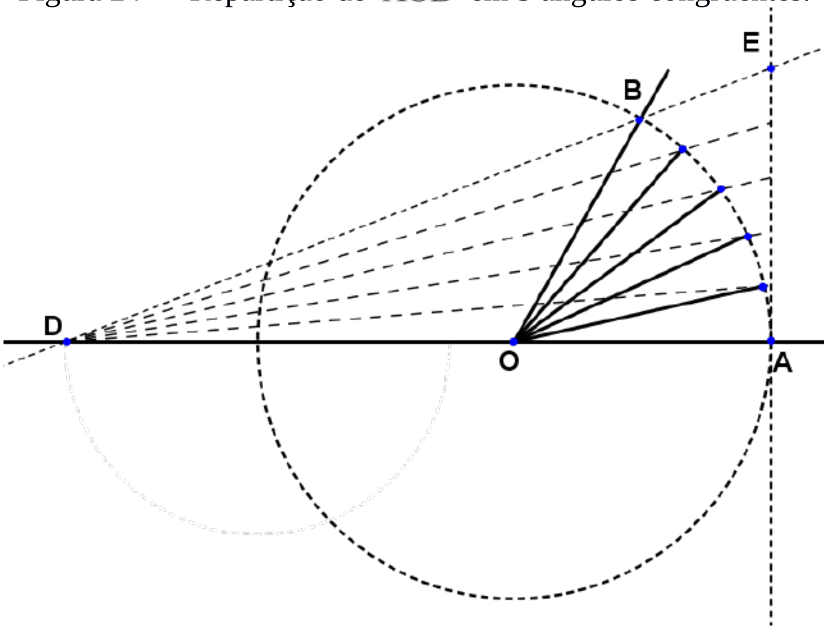
Por fim, para obtenção da divisão da circunferência em 360 ângulos congruentes, basta dividir cada um dos 72 ângulos de 5 graus em cinco partes congruentes. Para tanto, uma das possibilidades de aproximação, a qual também pode ser aplicada para a trissecção ou bissecção, seria a de dividir um ângulo em *n* partes iguais. A esse respeito, tem-se o seguinte exemplo:

> Dividir um ângulo agudo em um número *n* qualquer de partes iguais ou proporcionais.
> Seja n=5. Consideremos o ângulo *AOB* dado.
> **Procedimento**. Retificamos o arco *AB* do ângulo dado obtendo o segmento *AE*, cujo comprimento é aproximadamente igual a $l(\widehat{AB})$.
> Dividimos o segmento *AE* em *n* partes iguais e unimos as partes da divisão ao ponto *D*.
> O arco ficará dividido em *n* arcos congruentes; consequentemente, ficará dividido em *n* ângulos congruentes o ângulo central correspondente *AOB* (REZENDE, QUEIROZ, 2008, p. 205).

Nessa situação, verifica-se que a repartição do ângulo $\widehat{AOB}$ em 5 partes congruentes é feita com base na divisão do comprimento do arco AB em partes congruentes. Como forma de obtenção do segmento *AE*, que corresponde ao comprimento do arco *AB*, fez-se a retificação[38] desse arco. A esse respeito, apresenta-se a seguinte ilustração (figura 24):

38 Para informações referentes aos procedimentos a serem realizados para a retificação de um arco, ver Rezende e Queiroz (2008): “GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA e construções geométricas”.

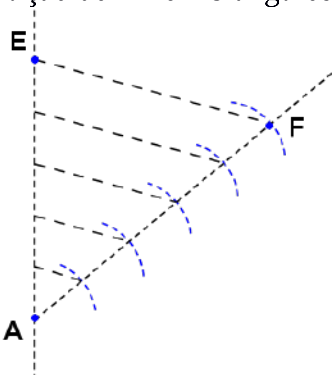
Figura 24 — Repartição de $\widehat{AOB}$ em 5 ângulos congruentes.



Fonte: Elaboração própria.

Já para a divisão de AE em 5 partes congruentes, pode-se aplicar o Teorema de Tales, o qual nos dará uma certa certeza de que o segmento estará repartido em partes proporcionais. A seguir, traz-se a repartição com base nesse dito teorema (Figura 25):

Figura 25 — Repartição de *AE* em 5 ângulos congruentes.



Fonte: Elaboração própria.

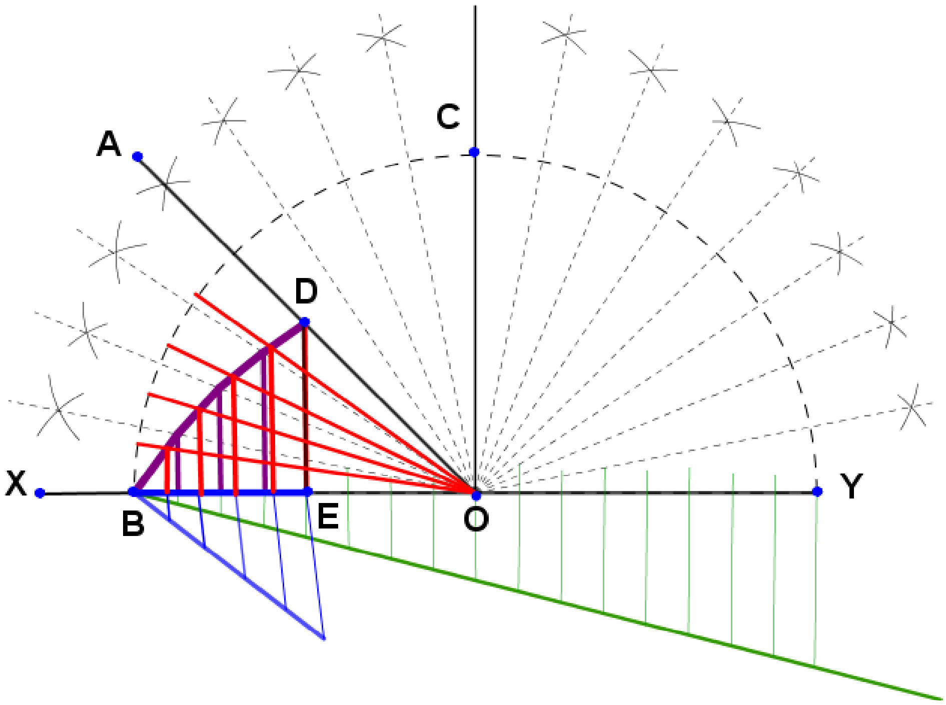
Para essa divisão, traçou-se, inicialmente, uma semirreta auxiliar *AF*, posteriormente, com o auxílio de um compasso, com abertura constante, marcou-se em *AF* 5 segmentos congruentes. Como o ponto *F* representa a extremidade da repartição feita sobre a reta auxiliar *AF*, bastou traçar uma semirreta que liga *F* a *E* e adiante, sob as marcações em *AF* traçar semirretas paralelas a *FE*. Está repartido, portanto, *AE* em 5 partes congruentes, com base no Teorema de Tales, os segmentos determinados sobre a transversal *AF* são proporcionais a seus correspondentes determinados sobre *AE*.

Também no que tange à divisão de um ângulo em *n* partes iguais, sabe-se que outra possibilidade é trabalhar com o emprego da Quadratriz de Hippias. Sobre os procedimentos para repartição do ângulo por meio dela, tem-se o seguinte exemplo:

> Seja o ângulo $\widehat{XOA}$
> De um ponto qualquer do seu lado *XO*, *B* por exemplo, traça-se uma quadratriz. Essa curva vai cortar o lado *AO* do ângulo no ponto *D*.
> Por este ponto baixa-se uma perpendicular ao lado *XO*, determinando *E*. Divide-se agora *BE* no número de partes em que se deseja dividir o ângulo – no caso 5.
> Por esses pontos de divisão: 2, 3, 4, 5, e *E* levantam-se perpendiculares que cortarão a quadratriz em igual número de pontos. Estes pontos unidos ao vértice *O*, dão os ângulos resultantes da divisão de $\widehat{XOA}$ em 5 partes iguais (CARVALHO, 1958, p. 105-106).

Como forma de ilustrar essa situação, fez-se a seguinte representação (Figura 26):

Figura 26 — Repartição de um ângulo pela quadratriz.



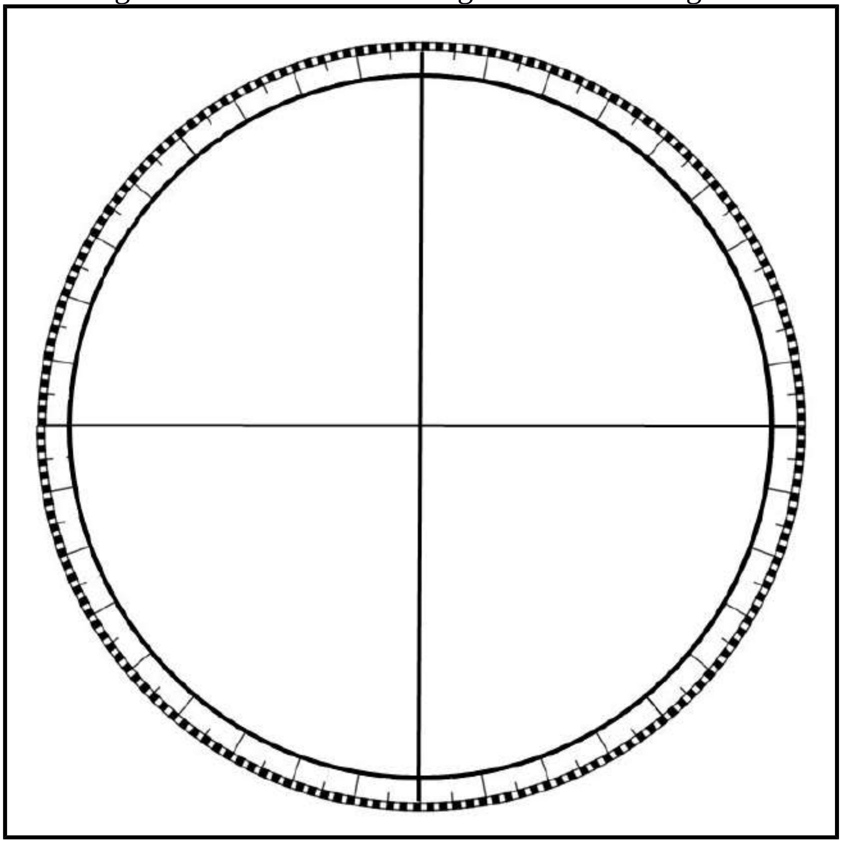
Fonte: Adaptado de Carvalho (1958).

Nesse caso, a curva da quadratriz do ângulo $\widehat{XOA}$ está representada pela linha mais acentuada da cor lilás. Para sua construção, inicialmente, dividiu-se a semicircunferência em 16 ângulos congruentes a partir do traço de sucessivas bissetrizes, a esse procedimento correspondem as semirretas pontilhadas. Posteriormente, para localizar uma nova coordenada, que possibilite determinar os pares ordenados da curva quadratriz, com a aplicação do Teorema de Tales, foi repartido o diâmetro *BY* em 16 segmentos congruentes, essa ação está representada pelas semirretas em verde. Por fim, considerando o traço da curva apenas para o ângulo $\widehat{XOA}$, levantaram-se as perpendiculares em lilás que intersectam as divisões da semicircunferência realizada anteriormente, fornecendo, assim, os pontos da quadratriz.

Da curva em lilás, tem-se o segmento *BE*, as paralelas em azul que o intersectam ilustram a aplicação do teorema de Tales para reparti-lo na quantidade que se deseja dividir o ângulo. Já as perpendiculares a *BE,* representadas em vermelho, intersectam a quadratriz, fornecendo os pontos em que se devem traçar as semirretas que repartem o ângulo $\widehat{XOA}$ em outros cinco congruentes.

Com esses métodos de repartição do ângulo em cinco congruentes (pelo uso da retificação de um ângulo ou pelo uso da quadratriz), dividindo cada um dos 72 ângulos de 5 graus, obtém-se a repartição da circunferência em seus 360 graus. Tomando por base as indicações de Simão de Oliveira para repartição da circunferência e os conhecimentos geométricos descritos anteriormente, entende-se que a circunferência repartida em 360 graus sob a tábua, pode ser ilustrada por (Figura 27):

Figura 27 — Circunferência graduada em 360 graus



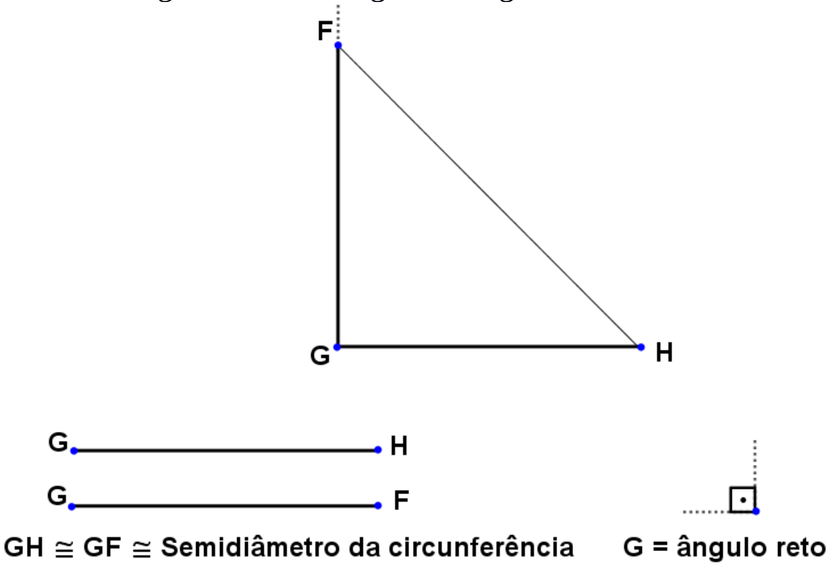
Fonte: Elaboração própria.

Em linhas gerais, nessa divisão, pode-se observar que foi feita uma repartição da circunferência em quatro quadrantes e que cada um deles está repartido em nove partes congruentes de 10 graus. Nos arcos de 10 graus, também se pode notar uma divisão em duas partes congruentes de 5 graus e que, entre eles, tem-se os cinco ângulos de 1 grau, os quais são dispostos obedecendo uma alternância entre as cores branca e preta (os graus imediatamente à direita e à esquerda de cada grau estão representados de uma cor diferente).

Ainda no que se refere à construção dos elementos do instrumento jacente no plano, após a divisão da circunferência em 360 graus congruentes, Pedro Nunes instrui que seja construído um triângulo retângulo e isósceles *FGH*, em que seja retângulo em $\hat{G}$ e seus lados *FG* e *GH* sejam congruentes ao semidiâmetro do círculo traçado. Uma possibilidade, para essa construção, seria trabalhar com o método de construção de um triângulo, sendo conhecidos dois de seus lados e o ângulo que estes formam entre si.

Dados *FG* e *GH*, ambos congruentes ao semidiâmetro da circunferência traçada, assim como o ângulo $\hat{G}$ reto, traça-se o seguimento *GH*, em seguida, transporta-se para a extremidade *G* o ângulo $\hat{G}$. Sobre uma linha imaginária que sustenta a abertura do ângulo reto, marca-se o lado *FG*, por fim, unindo-se os pontos *F* e *H* se tem o triângulo requerido (CARVALHO, 1958). A esse respeito, obtém-se a seguinte imagem (Figura 28):

Figura 28 — Triângulo retângulo e isósceles.



Fonte: Elaboração própria.

Quanto a outras possibilidades para construção do triângulo retângulo e isósceles *FGH*, tem-se: 1) construir um triângulo retângulo e isósceles, conhecendo-se a sua altura (a altura seria um dos lados *GH* ou *GF*); 2) construir um triângulo isósceles, sendo dados um de seus lados e um ângulo da base (sabe-se que os ângulos do triângulo *FGH* são um de 90 graus e dois de 45 graus) e 3) construir um triângulo, conhecendo-se dois de seus ângulos e um lado oposto a um desses ângulos.[39]

Outro elemento, que Pedro Nunes indica para o instrumento jacente no plano, é o traço de um segmento de reta *AK* tangente ao círculo no ponto *A*, para o caso do aparato ser construído em uma tábua quadrada. Para a construção dela, basta apenas traçar uma reta perpendicular ao raio *AE* pelo

39 Maiores informações sobre essas possibilidades de construção para um triângulo retângulo e isósceles, ver Carvalho (1958): "Desenho geométrico".

ponto *A*, isso porque uma "[...] condição necessária e suficiente para que uma reta seja tangente a uma circunferência é que ela seja perpendicular ao raio que une o centro ao ponto de tangência" (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p. 87).

Com esse procedimento, encerram-se as instruções de Pedro Nunes para a construção do instrumento jacente no plano na tábua quadrada. Com base nelas, fez-se (Figura 29):

Figura 29 — Instrumento jacente no plano (re)construído.

Fonte: Elaboração própria.

Em linhas gerais, esse objeto concreto foi o que se elaborou a partir de um exercício de interpretação da imagem do instrumento jacente no plano e das instruções apresentadas por Pedro Nunes em *De arte atque ratione navigandi* (2008). Nessa (re)construção, é válido destacar que não se buscou fazer uma réplica fielmente idêntica, visto se saber, segundo Saito (2014), que isso é praticamente impossível, haja vista, por exemplo, não se ter conhecimento dos materiais utilizados. A intenção foi identificar conhecimentos geométricos mobilizados e incorporados em seu processo de construção.

Um primeiro olhar acerca de uma situação real de uso do instrumento jacente no plano

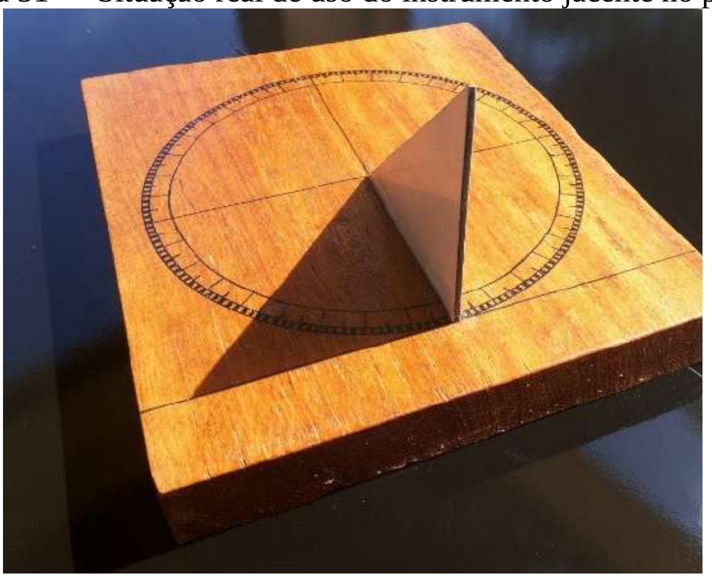
Para o uso do instrumento jacente no plano, como já indicado anteriormente, uma primeira observação é que se deve cuidar para que o instrumento esteja posto de forma paralela ao plano do horizonte. Pedro Nunes não descreve nenhuma informação que indique os procedimentos que podem ser realizados para esse fim, entende-se que uma alternativa seria o uso de um nível de bolha[40], aparato bastante conhecido na construção civil (Figura 30):

Figura 30 — Nível de bolha.

Fonte: Imagem disponível em: http://www.solardistribuidora.com.br/produtos/item/nivel-de-aluminio. Acesso em: 16 jan. 2019.

Assim, sob o aporte desse aparato, antes de observar a altura do Sol acima do horizonte com o instrumento jacente no plano, já então posto sobre uma superfície em que estava recebendo incidência dos raios do Sol, foi verificado se o instrumento estava, de fato, jacente (paralelo) sobre o plano do horizonte. Quando assegurada essa condição e as demais instruções de Pedro Nunes, obteve-se a seguinte medida da altura (Figura 31):

Figura 31 — Situação real de uso do instrumento jacente no plano.



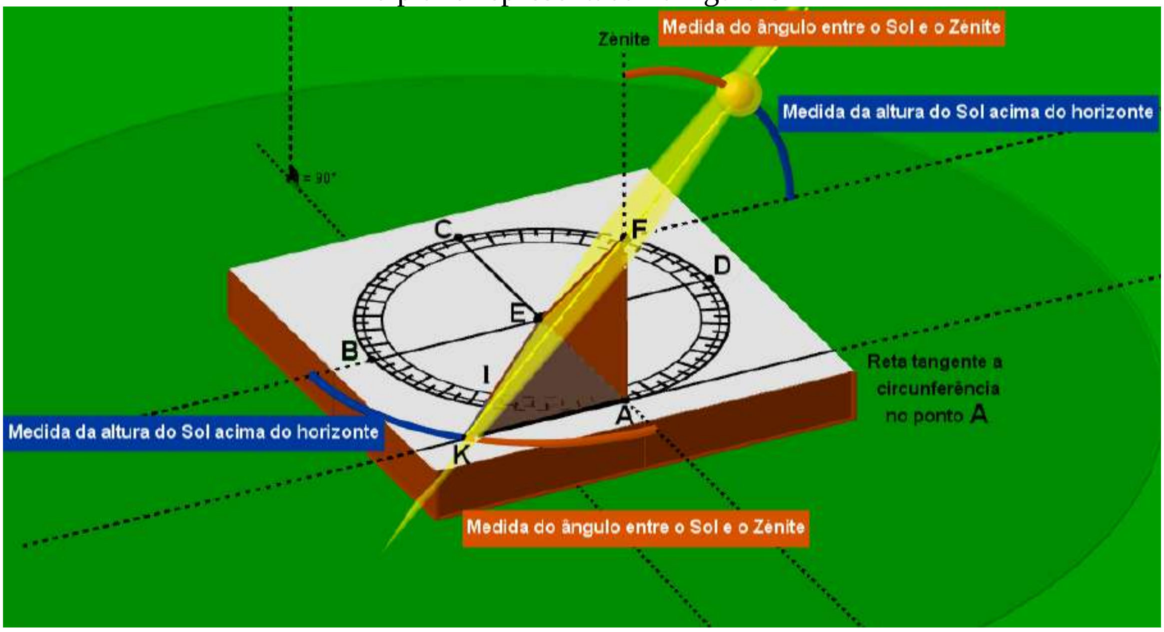
Fonte: Elaboração própria.

Nessa situação, pode-se observar que a altura do Sol acima do horizonte é de 45 graus e que a distância entre o Sol e o Zênite também tem essa mesma medida, o que é certo, já que esse último

40 Maiores informações sobre o nível de bolhas ver: Tudo sobre o nível de bolha. São utilizados os ***níveis com bolha de água*** porque a água e os fluidos são os únicos elementos que garantem a verificação imediata do nível. Atualmente, os níveis em bolha estão sendo substituídos pelos níveis a laser autonivelantes.

ângulo é complementar em relação ao primeiro. Como forma de ampliar as possibilidades de compreensão desse exemplo de uso, na imagem a seguir (Figura 32), procura-se melhor representá-lo:

Figura 32 — Representação hipotética de uso do instrumento jacente no plano representada na figura 31



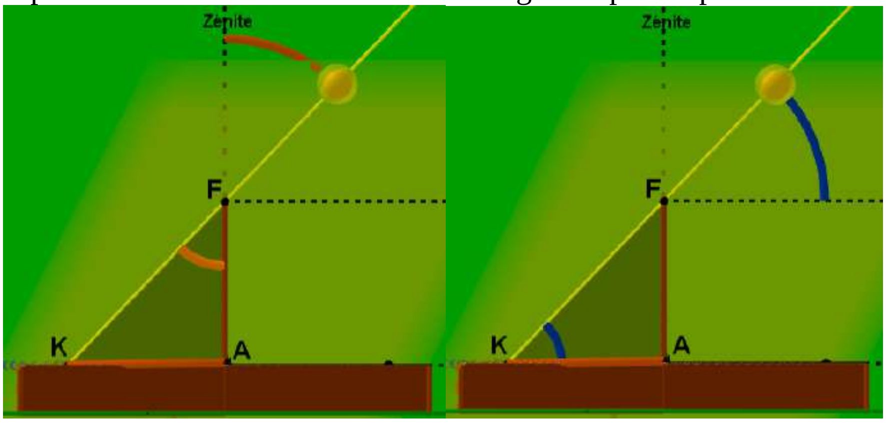
Fonte: Elaboração própria.

Ao que se observa, o que garante que *Bl* representa o arco da altura do Sol acima do horizonte são sucessivos fatores que se somam, tais como o fato do triângulo *AFE* ter que ser retângulo e isósceles e, ainda, ser posto perpendicularmente à tábua quadrada, a posição da tábua que se encontra paralelamente ao plano do horizonte, a disposição da reta tangente ao círculo, dentre outros.

Conforme representado nessa ilustração e nas considerações de Pedro Nunes, nota-se que a medida da altura do Sol acima do horizonte é representada pelo arco em azul e que a medida do ângulo entre o Sol e o Zênite é destacada pelo arco na cor laranja. Isso se deve tanto ao fato de o $\widehat{AFK} \cong \widehat{AEK}$, como também por conta da medida do Sol ao Zênite ainda ser congruente à $\widehat{AFK}$, com isso, tem-se que seu arco complementar (*Bl*) é a medida da altura do Sol acima do horizonte.

Quando se afirma que o ângulo $\widehat{AFK}$ tem a mesma medida do arco correspondente à distância do Sol ao Zênite, é possível observar que, assim como destaca Pedro Nunes, ele está de fato a trabalhar com o conceito de ângulo oposto. Também se nota que, nesse caso, pode estar associada à propriedade fundamental de paralelismo. “Duas retas paralelas, cortadas por uma transversal, determinam ângulos correspondentes congruentes” (SILVEIRA; MARQUES, 2013, p. 199, v. 3). A esse respeito, tem-se (Figura 33):

Figura 33 — Da direita para a esquerda: ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal a elas e ângulos opostos pelo vértice



Fonte: Elaboração própria.

Quanto à afirmação de que o ângulo $\widehat{AFK}$ é oposto pelo vértice *F* ao arco que representa a medida da distância entre o Sol e o Zênite, sabe-se que ela é verídica, pois, conforme essa representação da esquerda, nota-se que ela repousa no fato de que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes[41]. Dessa forma, ela tem incorporada à definição matemática que anuncia que “dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as semirretas opostas aos lados do outro” (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p. 24).

Na representação da esquerda, pode-se observar que o ângulo $\widehat{AKF}$ é congruente ao arco da circunferência em azul que expressa a altura do Sol acima do nível do horizonte. Como já indicado anteriormente, isso se deve à propriedade fundamental de paralelismo, haja vista que o segmento de reta que parte do ponto *F* é paralelo à reta tangente à circunferência no ponto *A* e a reta que passa pelos pontos *A* e *F* é transversal a elas.

Ainda sobre os procedimentos de uso do instrumento jacente no plano, em especial aos que corroboram para que a medida da altura do Sol acima do horizonte corresponda ao arco *Bl*, Pedro Nunes deixa claro que o segmento de reta *AK* (sombra de *AF*) é paralelo ao segmento *EB*. Essa indicação do cosmógrafo é verídica porque, pela disposição das retas, observa-se um dos teoremas de paralelismo[42], a exemplo deles: duas retas distintas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas.

Nesse caso, as retas distintas são *AK* e *EB*, e ambas estão perpendiculares à *AE*, logo são paralelas entre si, *EB* é perpendicular porque cruza *AE* formando um dos quadrantes do círculo

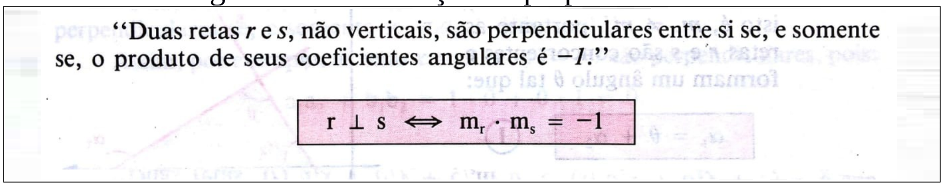
41 Informações sobre a noção de ângulo oposto, disseminada no século XVI , ver Euclides (2009): “*Os Elementos*”.

42 Maiores detalhes sobre as condições de paralelismo entre retas, consulte: Rezende e Queiroz (2008), Iezzi (1993).

ABCD, já *AK* se deve ao fato dela ser uma reta tangente[43] à circunferência no ponto *A*, ponto esse que é extremo do diâmetro *AB* que cruza *BD* a ângulos retos.

Quanto ao ângulo $\widehat{FAK}$, como já indicado anteriormente na seção 3.2, Pedro Nunes, com base na terceira definição do décimo primeiro livro dos *elementos* de Euclides (condição necessária e suficiente para uma reta ser perpendicular a um plano), afirma que ele é reto em $\widehat{A}$. A essa afirmação, também se pode notar, a ela incorporada, a seguinte noção matemática que trata da condição necessária para uma reta ser considerada perpendicular à outra (Figura 34):

Figura 34 — Condição de perpendicularismo

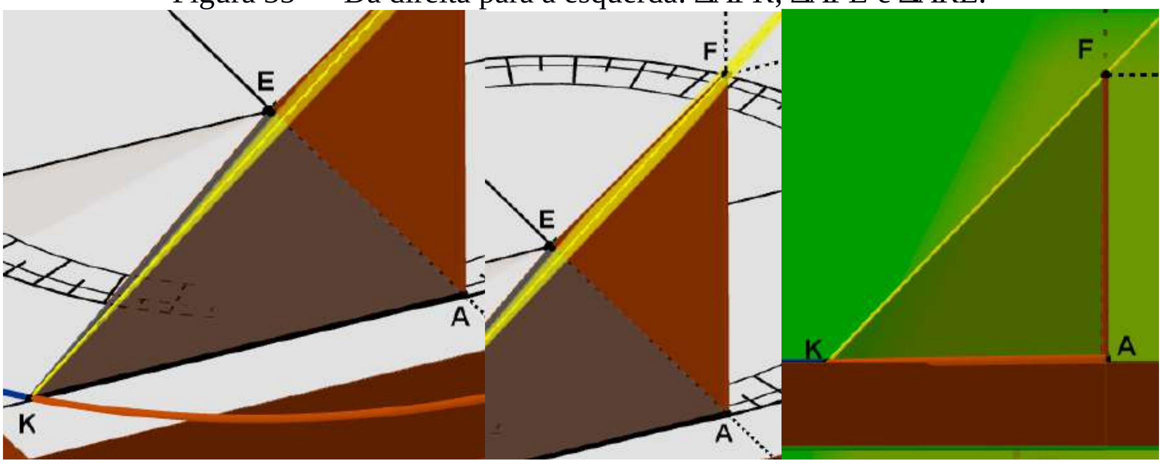

“Duas retas *r* e *s*, não verticais, são perpendiculares entre si se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é −*1*.”

$$\boxed{r \perp s \iff m_r \cdot m_s = -1}$$

Fonte: Iezzi (1993, p. 71).

Esse teorema[44] assegura que a reta *AF* é perpendicular à *AK*, assim, sabe-se que o ângulo $\widehat{FAK}$ é reto. Nesse sentido, considerando um plano formado pelas retas *AF* e *AK*, o ângulo $\widehat{EAK}$ também seria reto, pois *AF* é perpendicular à *AE*. Sobre o fato do ângulo $\widehat{EAK}$ ser reto, ainda se tem outra justificativa matemática, antes, porém, de indicá-la, destacam-se a seguir os triângulos que se vêm discutindo e que compõem o instrumento jacente no plano (Figura 35):

Figura 35 — Da direita para a esquerda: Δ*AFK*, Δ*AFE* e **Δ***AKE*.



Fonte: Elaboração própria.

Quanto aos triângulos expressos nessa ilustração, como já mencionado anteriormente, sabe-se que o triângulo *AKE*, destacado mais à esquerda, constitui-se pela sombra projetada pelo triângulo *AFE* ao receber a incidência dos raios do Sol. Já o triângulo *AFE*, destacado ao centro, é o indicado

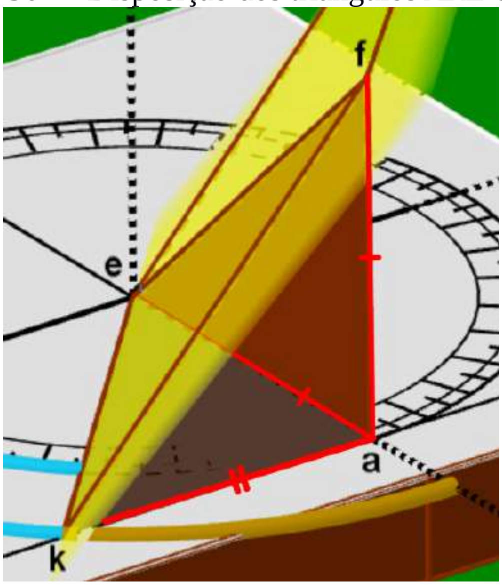
43 Uma reta tangente toca uma curva em um único ponto e nele faz, em relação à curva, um ângulo reto (cf. WAGNER, 1993).

44 Para maiores detalhes sobre esse teorema, que expressa a condição de perpendicularismo e sua demonstração, ver Iezzi (1993): “Fundamentos de matemática elementar, 7 - geometria analítica”.

por Pedro Nunes para compor o instrumento. O triângulo da direita *AFK* é outro polígono perpendicular à superfície da tábua quadrada.

No que se refere ao ângulo $\widehat{EAK}$ ser reto, isso pode ser justificado matematicamente a partir de uma comparação entre os triângulos *AKE* e *AFK*. A esse respeito, como já observado anteriormente, Pedro Nunes indica a quarta proposição do primeiro livro de Euclides[45]. Nessa alusão, nota-se que, em uma linguagem moderna, está incorporada a noção de congruência de triângulos. Na ilustração a seguir, tem-se a disposição dos triângulos *AKE* e *AFK* (Figura 36):

Figura 36 — Disposição dos triângulos *AKE* e *AFK*.



Fonte: Elaboração própria.

Nessa representação, é possível observar que o lado *AE* do triângulo *AKE* é congruente ao lado *AE* do triângulo *AFE*. Visto isso, como *AF* do triângulo *AFE* é congruente a seu outro lado *AE*, logo os triângulos *AKE* e *AFK* possuem um lado congruente. Ainda sobre os lados desses triângulos, observa-se que o lado *AK* é comum aos dois triângulos em questão. Assim, sabendo que “dois triângulos que possuem dois lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes são congruentes (SILVEIRA; MARQUES, 2013, p. 245, v. 3).

Com isso, entende-se que, para qualquer triângulo formado pela sombra do triângulo *AFE*, ele sempre será congruente ao triângulo *AFK* pelo caso L.A.L. (Lado-Ângulo-Lado). Nesse caso especial, em que o ângulo $\widehat{EAK}$ mede 45 graus, ainda se pode observar a semelhança entre os triângulos pelos casos A.L.A. (Ângulo-Lado-Ângulo) e L.A.Ao. (Lado-Ângulo-Ângulo oposto).

Vistas essas considerações sobre o uso do instrumento jacente no plano e diante dos dados observados em seu processo de construção, retoma-se a curiosidade levantada ao final da seção 3.1 (O texto da construção do instrumento jacente no plano) deste capítulo. Na ocasião, chamou a

45 Informações sobre a quarta proposição do primeiro livro de Euclides ver Euclides (2009): “*Os Elementos*”.

atenção observar a proposta de diferentes versões para o aparato, uma em uma tábua circular e duas em uma tábua quadrada e ainda outra em uma tábua retangular.

Do uso do instrumento, notou-se que a medida do ângulo da altura do Sol pode atingir no máximo 90 graus, o que é representado na tábua do instrumento por um quadrante da circunferência. Nesse sentido, vê-se que é necessária apenas a divisão de um quadrante em 90 ângulos congruentes, dessa forma, todas as configurações indicadas para a tábua satisfazem a necessidade de conter no mínimo um arco de 90 graus. No caso da versão ilustrada na figura 13, cada dois graus na tábua do instrumento representam um grau da altura do Sol.

Quanto às partes do instrumento jacente no plano, presente nas diferentes versões, é possível observar que elas mantêm o funcionamento do aparato. Ao construir, por exemplo, em uma tábua circular ou em uma quadrada, ainda se tem a divisão de um quadrante em 90 ângulos congruentes. Na substituição do estilete pela reta tangente, pode-se posicionar corretamente a sombra do triângulo *AFE* sobre a tábua em que está o arco dividido em 90 graus.

A troca do triângulo *AFE* que tem seus lados *AE* e *AF* congruentes ao semidiâmetro da circunferência por outro triângulo que tenha a medidada de seus lados duas vezes maiores, também não apresenta prejuízos ao funcionamento do instrumento. Quando feita a substituição para o triângulo com lados duplicados, Pedro Nunes instrui que se divida a semicircunferência em 90 partes congruentes, assim, mede-se a altura do Sol acima do horizonte em um arco de 90 graus.

Diante disso, nota-se que, em termos matemáticos e práticos, não existem diferenças entre as possíveis versões que o instrumento jacente no plano pode assumir. Em todas as configurações, obtém-se a medida da altura angular do Sol acima do horizonte e a medida do ângulo que está entre o Sol e o Zênite. As diferentes variantes do aparato possuem particularidades apenas no que se refere à construção e disposição de suas partes.

Aos dados coletados nesse capítulo, em especial os que dizem respeito a conhecimentos geométricos, somam-se os vistos no capítulo anterior sobre o contexto de elaboração do instrumento jacente no plano, para propor a atividade de estudo da construção e uso do aparato na formação inicial de professores. Sobre esse percurso, a seguir, expõem-se os elementos metodológicos que embasaram todo o caminhar da pesquisa.

CAPÍTULO 3

ELEMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

A proposta de construção de interface entre história e ensino da matemática não tem estipulada uma perspectiva metodológica para ser seguida. Diante disso, de forma a sustentar metodologicamente essa pesquisa, faz-se uma abordagem multirreferencial, na qual, a depender do objetivo, foi-se utilizando elementos de diferentes metodologias.

A esse respeito, nesse capítulo, expõem-se os pressupostos teóricos-metodológicos que embasam o caminhar dessa pesquisa, nele, destacam-se, tanto a abordagem de estudo assumida, como também as metodologias e técnicas de organização, coleta e análise dos dados. Posteriormente, descreve-se, em especial, a atividade orientadora de ensino, discorrendo a seu respeito sobre os sujeitos, a universidade, o tratamento didático, a intencionalidade e plano de ação e seu desenvolvimento.

Abordagens metodológicas

No presente estudo, com base nos objetivos propostos e nos fundamentos de sustentação da construção de interface entre história e ensino da matemática, notou-se uma maior aproximação com investigações realizadas no âmbito da educação do que propriamente histórica. Sob essa compreensão e conforme as intenções desse estudo, trabalha-se com uma abordagem qualitativa de pesquisa.

Segundo Lüdke e André (2013), essa perspectiva coloca o pesquisador em contato direto com o ambiente e situação da pesquisa. Esses autores também destacam que os dados coletados são, em sua maioria, descritivos, que o pesquisador tem lugar privilegiado na investigação, que é dada importância ao significado que os sujeitos dão às coisas, que é dada maior relevância ao processo do que ao produto da pesquisa, dentre outros.

Ainda nessa perspectiva de fundamentação teórico-metodológica da pesquisa, destaca-se que tendo como objetivo geral conhecer o potencial didático do instrumento jacente no plano para o ensino de conhecimentos geométricos na formação inicial de professores, trabalha-se com base na proposta de construção de interfaces entre história e ensino da matemática, na qual se busca considerar tanto questões didáticas como também históricas. Sobre essa interface, já se sabe que são previstos dois momentos: “o movimento do pensamento na formação do conceito matemático” e o "contexto no qual os conceitos matemáticos foram desenvolvidos" (SAITO, 2016a, 2016b; SAITO, DIAS, 2013).

Dentre as pesquisas, as de Beo (2015), Castillo (2016), Moraes (2017) e Batista (2018) já realizadas nesse sentido. Observa-se que, diferentemente da Teoria das Situações Didáticas que apresenta a Engenharia Didática como método para sustentar as investigações, a construção de interfaces entre história e ensino ainda não tem estabelecido um método que embase toda a pesquisa. Diante disso, conforme indicado anteriormente no capítulo introdutório, faz-se uso de uma abordagem metodológica multirreferencial, a qual, segundo Borba (1998), pode ser compreendida como uma "bricolagem" no ato de "fazer ciência". Essa concepção aponta tanto para a possibilidade de se agregar diferentes metodologias dentro de uma pesquisa, como também para o fato de que:

> Precisamos sair do conforto das metodologias prontas. É o fazer ciência, o criar, o construir ciência que definirá a "composição" (a bricolagem) metodológica. É na construção do campo de pesquisa que se define a elaboração (in loco) das metodologias (a composição inteligente das mesmas) e não o inverso. Não é a ciência que deve andar a reboque (servilmente) da metodologia e sim o contrário (BORBA, 1998, p. 17).

Foi necessário se apropriar de uma abordagem multireferencial para se conseguir cumprir os dois momentos previstos pela proposta de interface destacados previamente. À luz desses momentos, foram estabelecidos os dois primeiros objetivos específicos que buscam identificar, com base na obra *De arte atque ratione navigandi* (1573), o contexto no qual o instrumento jacente no plano foi elaborado e reconhecer conhecimentos geométricos mobilizados na construção e uso do instrumento jacente no plano. Como forma de alcançá-los, fez-se o estudo a partir do aporte metodológico de uma pesquisa qualitativa documental, em que:

> O exame de materiais de natureza diversa, que ainda não receberam um tratamento analítico, ou que podem ser reexaminados, buscando-se novas e/ ou interpretações complementares, constitui o que estamos denominando pesquisa documental. A palavra "documentos", neste caso, deve ser entendida de uma forma ampla, incluindo os materiais escritos (como, por exemplo, jornais, revistas, diários, obras literárias, científicas e técnicas, cartas, memorandos, relatórios), as estatísticas (que produzem um registro ordenado e regular de vários aspectos da vida de determinada sociedade) e os elementos iconoto de um fenômeno (GODOY, 1995, p. 21-22).

A escolha por esse tipo de estudo se fez por entender, fundamentado em Godoy (1995), que ela não se apresenta como uma proposta rigidamente estruturada, no sentido de que, por meio dela, não importando qual seja o documento selecionado, identificam-se os resultados e discute-se sempre os mesmos achados e questões.

Conforme a autora, esse tipo de pesquisa permite ao pesquisador explorar o documento sobre diferentes perspectivas e enfoques. Assim, compreende-se que, com base nos objetivos propostos e nos pressupostos de um estudo pautado na construção de interfaces entre história e ensino da matemática, o aporte da investigação qualitativa documental, possivelmente, poderá colaborar para assegurar um caráter inovador ao estudo e para trazer novas contribuições ao tema.

Adotando a pespectiva de Godoy (1995) sobre a pesquisa documental, o primeiro passo foi a escolha do documento (*De arte atque ratione navigandi* (1573), na sequência, fez-se a análise do conteúdo da obra, que teve como etapas um momento inicial de pré-análise, posteriormente, outro de exploração e, por fim, o tratamento dos resultados.

Considerou-se fontes secundárias[46], a fim de possibilitar ainda mais recursos e subsídios a esse tipo de pesquisa, para que suas contribuições frente ao estudo, possam emergir. Pretende-se, de igual forma, agregar a ela uma pesquisa bibliográfica, a qual tem por finalidade "[...] colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito, dito ou filmado sobre determinado assunto, inclusive conferências seguidas de debates que tenham sido transcritos por alguma forma, quer publicadas, quer gravadas" (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 183).

Para cumprir o terceiro objetivo específico, em que se busca desenvolver uma atividade para formação inicial de professores, com vistas a observar elementos que apontem como o instrumento jacente no plano pode favorecer o ensino de conhecimentos geométricos na formação inicial de professores de matemática, usa-se tanto o aporte metodológico da abordagem etnográfica na pesquisa educacional, como também a atividade orientadora de ensino. Sobre a pesquisa do tipo enográfica, sabe-se que:

> [...] é um esquema de pesquisa desenvolvido pelos antropólogos para estudar a cultura e sociedade. Etimologicamente etnografia significa "descrição cultural". Para os antropólogos, o termo tem dois sentidos: (1) um conjunto de técnicas que eles usam para coletar dados sobre os valores, os hábitos, as crenças, as práticas e os comportamentos de um grupo social; e (2) um relato escrito resultante do emprego dessas técnicas. Se o foco de interesse dos etnógrafos é a descrição da cultura (práticas, hábitos, crenças, valores, linguagens, significados) de um grupo social, a preocupação central dos estudiosos da educação é com o processo educativo. Existe, pois, uma diferença de enfoque nessas duas áreas, o que faz com que certos requisitos da etnografia não sejam – nem necessitem ser – cumpridos pelos investigadores das questões educacionais (ANDRÉ, 2008, p. 27-28).

No que se refere à apropriação da abordagem etnográfica na presente pesquisa, cabe destacar o fato dela se desenvolver por meio de uma observação participante e ainda por ter como critérios/pressupostos colocar o pesquisador em contato direto com os sujeitos e a situação, requerer que o pesquisador tenha passado anteriormente pela mesma atividade que está propondo, exige também que se mergulhe na situação de forma a possibilitar o refinamento da pesquisa, dentre outros (LÜDKE; ANDRÉ, 2013). Nessa perspectiva, fez-se uso dela por conta da interação ampla e temporal com os sujeitos da pesquisa durante o desenvolvimento da proposta de atividade.

46 São trabalhos secundários sobre um determinado assunto textos escritos por contemporâneos (cf. BELTRAN; SAITO; TRINDADE, 2014).

Já no que se refere ao trabalho com a atividade orientadora de ensino, corroboram para essa escolha, dentre outras justificativas, o fato da AOE possibilitar a organização da atividade e ainda favorecer a compreensão das ações e do pensamento teórico dos indivíduos envolvidos na atividade (MOURA *et al*., 2016).

É devido a essa característica que se acredita no potencial da AOE para favorecer a identificação de possíveis *insights* de ordem matemática, que possam desencadear a indicação de potencialidades didáticas a partir dos conhecimentos matemáticos observados. Esses *insights* podem, possivelmente, serem observados pelo pesquisador, durante parte do movimento do pensamento realizado pelos participantes do curso ao mobilizarem os conhecimentos incorporados na construção do instrumento (SAITO, 2016b, PEREIRA; SAITO, 2019a).

Nesse sentido, compreende-se que a identificação de uma potencialidade didática emerge de uma necessidade/ação feita por um estudante em formação inicial ao se deparar com a precisão de realizar uma determinada atividade. Ao que se entende, essa necessidade/ação pode não apresentar, à primeira vista, ao aluno uma validade direta, mas o pesquisador responsável por realizar um movimento do pensamento acerca do que propôs na atividade, provavelmente, notará a importância da natureza da necessidade/ação executada pelo estudante.

A grosso modo, com base em Saito (2016b), compreende-se que uma potencialidade didática deriva da identificação desses possíveis *insights*, os quais emergem de um processo em que o conhecimento matemático foi abordado de forma historicamente contextualizada e se constitui a partir da articulação dos conhecimentos com o currículo, público alvo e com a intencionalidade do professor.

Para a coleta dos dados, além da AOE, busca-se agregar os métodos de observação e de entrevista. Conforme Lüdke e André (2013), o método de observação é valioso ao se pretender conhecer mais aspectos de uma situação. O conteúdo a ser registrado pode variar a depender das intenções do pesquisador. As autoras indicam ainda que, nessa estratégia, podem ser combinadas formas de registros como anotações, gravações e fotografias, dentre outras.

Por sua vez, vê-se a entrevista como uma estratégia valiosa de coleta de dados, devido ao fato dela possibilitar uma captação direta das informações. Ao trabalhar com ela, deve-se considerar o caráter de interação entre o pesquisador e o pesquisado, a preparação de um roteiro para guiá-la, cuidado para não forçar o rumo das respostas, dentre outras exigências (LÜDKE; ANDRÉ, 2013).

A seguir, apresenta-se a proposta de atividade (curso de extensão universitária) que foi aplicada. Dela, são destacados elementos do tratamento didático, da intencionalidade e plano de ação e do desenvolvimento. Com essa atividade, buscou-se obter dados que possibilitassem produzir inferências que indicassem como o instrumento jacente no plano pode favorecer o ensino de conhecimentos geométricos na formação inicial de professores.

Atividade de estudo da construção e uso do instrumento jacente no plano

Nesta seção, apresenta-se a proposta de atividade intitulada “mobilizando conhecimentos geométricos a partir da construção e uso do instrumento português jacente no plano (1566)”. Ressalta-se que essa atividade faz parte do Projeto Guarda-chuva, o qual está associado ao Programa de Formação Docente (PFD). Iniciativa essa que ainda está atrelada ao Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) e que tem, dentre suas finalidades, construir interfaces entre história e ensino da matemática a partir do estudo de instrumentos matemáticos históricos, sob uma perspectiva historiográfica atualizada.

Visto o presente curso fazer parte do Projeto Guarda-chuva, o qual está associado à Pró-reitoria de Extensão da Universidade Estadual do Ceará (UECE), realizou-se o curso na UECE. Como sala desta instituição, levando em consideração o espaço e materiais disponíveis, a atividade foi aplicada no Laboratório de Matemática e Ensino Professor Bernardo Rodrigues Torres (LAbMAtEn/UECE).

De forma a assegurar a validade da atividade e observar se os aspectos éticos estavam sendo respeitados, submeteu-se a proposta na página da Plataforma Brasil para a obtenção do parecer favorável do comitê de ética, tanto do IFCE, como também da UECE. A esse projeto de pesquisa, com base nas normas da instituição proponente (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE), foram anexados alguns documentos, como, por exemplo, o termo de consentimento livre e esclarecido.

Esses procedimentos burocráticos foram necessários, tendo em vista, como já indicado anteriormente, a aplicação da atividade a seres humanos, em especial, a formação inicial de professores de matemática. Essa intenção parte do pressuposto de que essas etapas são momentos oportunos para se apresentar aos educadores o conhecimento matemático historicamente contextualizado, favorecendo, dessa forma, sua compreensão e possibilitando a ampliação de iniciativas e propostas voltadas à sala de aula (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2004; MIGUEL; MIORIM, 2004).

Outro elemento, que reforçou a escolha desse público, diz respeito ao objetivo dentro das etapas da interface entre história e ensino da matemática. Como ainda se pretende conhecer o potencial didático do instrumento jacente no plano para o ensino de conhecimentos geométricos na formação inicial de professores, entende-se que propor essa atividade na formação de professores, considerando o conhecimento que possuem e a proximidade com o ensino, possivelmente, poderão realizar estratégias, ações e *insights* de resolução de situações que poderão favorecer a compreensão e desenvolvimento de conhecimentos geométricos.

Sobre os pressupostos da teoria histórico-cultural e da teoria da atividade (LEONTIEV, 1983 apud MOURA *et al*., 2016), considerou-se esse momento da pesquisa com o curso de extensão como uma atividade. Nessa pesquisa, a teoria da atividade traz contributos para a compreensão da noção de atividade, já a teoria histórico-cultural é utilizada como meio para compreender a produção de conhecimentos e verificar como ele é apropriado pelos sujeitos.

No que se refere à noção de atividade, Moura *et al*. (2016) destacam que nela se devem levar em consideração o conteúdo de ensino, as ações educativas e os sujeitos que fazem parte da atividade (Figura 37).

Figura 37 — Elementos que fundamentam o conceito de atividade assumida.

Fonte: Elaboração própria.

Como se pode observar, nessa ilustração, esses elementos funcionam como uma engrenagem que dá corpo à atividade educativa. Sobre essa relação e aproximação entre eles, Moura *et al*. (2016) elucidam a importância de se considerar a interdependência que os permeiam durante toda a ação pedagógica. Como destacado previamente, trabalhou-se nesse estudo sob a perspectiva da atividade orientadora de ensino proposta por Moura (1997, 2010). Sobre ela, sabe-se que:

> [...] mantém a estrutura de atividade proposta por Leontiev ao indicar uma necessidade (apropriação da cultura), um motivo real (apropriação do conhecimento historicamente acumulado), objetivos (ensinar e aprender) e propõe ações que considerem as condições objetivas da instituição escolar (MOURA *et al*., 2010, p. 217).

A necessidade está associada tanto à origem da atividade como também a determinados objetos (conteúdos) a serem ensinados. O motivo, por sua vez, refere-se à aquisição de conceitos teóricos, já os objetivos estão ligados a ações educativas de ensinar e aprender, as ações em um contexto mais amplo dizem respeito a operações práticas que conduzem ao desenvolvimento da atividade. No jogo de interações entre o conteúdo de ensino, as ações educativas e os sujeitos, a apreensão do objeto a ser ensinado deve ser compreendida pelo estudante como uma necessidade para cumprimento da atividade proposta (MOURA *et al*., 2010, 2016).

Ainda no que se refere ao desenvolvimento da atividade, cabe destacar que, nesse movimento de interações, também está incorporada a mobilização do pensamento empírico e do teórico. Sobre eles, sabe-se que "[...] o pensamento empírico compara, classifica, cataloga objetos e fenômenos por meio de abstrações dos seus aspectos externos, o pensamento teórico revela suas leis de movimento, no processo de análise de suas relações no sistema" (DIAS, 2007, p. 50). Nessa perspectiva, entende-se que, ao confrontar esses dois tipos de pensamentos, possivelmente, estar-se-á potencializando a observação do movimento do pensamento realizado pelos discente durante a atividade.

Complementando essas orientações teóricas metodológicas assumidas, ainda cabe destacar considerações sobre a atividade orientadora de ensino, a qual:

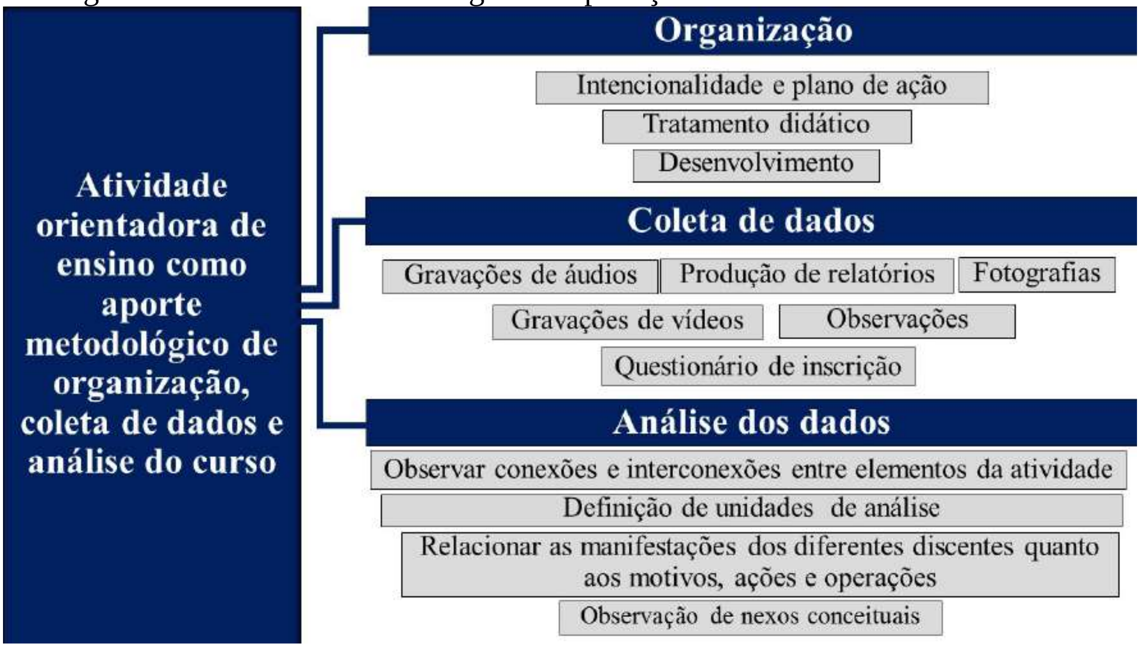
> [...] constitui-se em um modo geral de organização do ensino, em que seu conteúdo principal é o conhecimento teórico e seu objeto é a constituição do pensamento teórico do indivíduo no movimento de apropriação do conhecimento. Assim, o professor, ao organizar as ações que objetivam o ensinar, também requalifica seus conhecimentos, e é esse processo que caracteriza a AOE como unidade de formação do professor e do estudante (MOURA, 1996, 2001, *apud* MOURA *et al*., 2010, p. 221).

Diante dessa definição, nota-se que a AOE pode potencializar o desenvolvimento intelectual dos participantes, isso porque leva em consideração o movimento de apropriação do conhecimento, o qual, segundo Moura *et al*. (2016), estabelece-se, dentre outros pontos, pela articulação entre teoria e prática. Assim, os discentes poderão dar significado e/ou (re)significar seus conhecimentos.

No campo da pesquisa em educação, Panossian *et al*. (2017) catalogam algumas pesquisas que já se desenvolveram a partir dos pressupostos teóricos-metodológicos da AOE. Sobre elas, os autores destacam a utilização da AOE na organização da atividade, na coleta e na análise dos dados. Pelo exposto, foi possível notar contributos da teoria histórico-cultural na constituição da AOE, principalmente, no momento da análise dos dados, isso porque algumas das pesquisas trabalharam definindo, inicialmente, algo isolado para ser analisado ou uma unidade mínima de análise de um fenômeno.

À luz dos pressupostos teóricos metodológicos da AOE, do levantamento de Panossian *et al*. (2017) e da proposta de construção de interface entre história e ensino (PEREIRA; SAITO, 2019a; SAITO; DIAS, 2013), foi proposto o seguinte panorama metodológico para a atividade (figura 38):

Figura 38 — Desenho metodológico da aplicação da AOE no curso de extensão.



Fonte: Elaboração própria.

A organização da atividade segue o modelo que Saito e Dias (2013) apontam para o trabalho com um instrumento histórico a partir da construção de interfaces entre história e ensino da matemática. Os autores propõem que se realizem de forma inter-relacionadas: 1) tratamento didático do documento; 2) intencionalidade e plano de ação; e 3) desenvolvimento.

Quanto ao momento de coleta de dados, o estabelecimento das estratégias de produção de relatórios, gravações de áudios e vídeos das discursões e socializações entre os participantes, registro fotográfico, dentre outros, deve-se do observado em outras pesquisas que também trabalharam com a AOE e com a construção de interface que se assumiu nessa pesquisa. Ainda como forma de captação de dados, aplicou-se um questionário de inscrição, no qual os discentes tiveram que expor algumas informações sobre sua formação acadêmica e geométrica. Pelo que se pode observar, esses meios são suficientes para identificar o jogo de interações entre o conteúdo de ensino, as ações educativas e os sujeitos que fazem parte da atividade.

No que se refere à análise dos dados, com uma observação acerca das manifestações dos diferentes discentes envolvidos, procurou-se elencar as unidades minímas de análise e, a partir delas, estabelecer as etapas de estudo. Serão valorizados a observação de nexos conceituais, as conexões e interconexões entre elementos da atividade, o agrupamento de elementos indicadores, dentre outros.

Intencionalidade e plano de ação

Como já elucidado em seções anteriores, as principais intenções com a aplicação dessa atividade foram reconhecer os conhecimentos matemáticos incorporados no processo de construção e uso do instrumento jacente no plano e ainda promover discussões, análises e sínteses sobre esses conhecimentos. A partir delas é que se propôs apresentar elementos que indiquem o potencial didático do instrumento jacente no plano para o ensino de conhecimentos geométricos na formação inicial de professores.

Haja vista, a atividade em questão está fundamentada na AOE, a qual segue os pressupostos da perspectiva histórico-cultural e da teoria da atividade de Leontiev, sabe-se que um dos passos iniciais deve ser a elaboração de um problema desencadeador de aprendizagem (MOURA *et al.*, 2016). Pensando nisso, foi proposta, como situação-problema, calcular a altura do Sol acima do horizonte, utilizando o instrumento jacente no plano de Pedro Nunes.

Com esse problema desencadeador, esperou-se que os participantes mobilizassem conhecimentos geométricos tanto sobre o uso do instrumento como também de sua construção. A mobilização de conhecimentos foi esperada para que se pudesse promover as discussões, análises e sínteses sobre a apropriação e significação dada a esses conceitos pelos participantes.

Um elemento da descrição do instrumento jacente no plano que pode desencadear discussões, nesse sentido, é a expressão semidiâmetro do círculo (linguagem usada por Pedro Nunes no século XVI), a qual, em linguagem atual, utiliza-se raio da circunferência. Sobre as expressões/excertos desses textos antigos, vale destacar que:

> [...], por não terem sido retirados de um livro didático, as palavras nesses excertos não expressão definições ou conceitos como atualmente a ele nos referimos. Não há uma definição formal do objeto matemático "proporção" ou "perpendicular" por exemplo. Esses objetos adquirem significado e, portanto, são conceituados na medida em que são mobilizados. Assim, diferentemente de hoje em que os conceitos matemáticos são abordados no sistema de ensino a partir de uma definição, a atividade a ser elaborada deve propiciar espaço para que o estudante elabore, ou construa, ou ressignifique esses mesmos conceitos (SAITO, PEREIRA, 2019, p. 70-71).

Nessa perspectiva, tendo em vista proporcionar esse espaço aos participantes da atividade, foi elaborado um programa do curso de extensão universitária. Com base nele, propõe-se um plano de ação para o seu desenvolvimento. No quadro 5 a seguir, expõe-se esse plano:

Quadro 5 — Organização da atividade.

ATIVIDADE	ETAPA DA ATIVIDADE ✓	ORIENTAÇÕES AOS DISCENTES	PRODUTO DO GRUPO
1º dia	Estudo do instrumento jacente no plano a partir da descrição de construção apresentada por Pedro Nunes.	A partir do texto que traz a descrição da construção do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes: ✓ Acompanhe e entenda no que consiste o instrumento e procure reconhecer como seria(m) sua(s) forma(s) física(s). ✓ Entenda cada uma das partes do instrumento jacente no plano e para que servem.	Liste os conhecimentos geométricos mapeados e anote suas primeiras impressões sobre as partes do instrumento a partir da **construção**.

2º dia	Estudo do instrumento jacente no plano a partir da descrição de construção e uso de Pedro Nunes e de uma réplica física do instrumento.	A partir do instrumento (físico) e do texto que traz a descrição da construção e uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes: ✓ Acompanhe e entenda no que consiste o instrumento e procure reconhecer e mapear os diferentes conhecimentos geométricos incorporados em sua construção e uso. ✓ Entenda cada uma das partes do instrumento jacente no plano e para que servem.	Liste os conhecimentos geométricos mapeados, anote outras impressões sobre as partes e o funcionamento do instrumento e formalize, matematicamente, suas conclusões.
3º dia	Estudo do uso do instrumento jacente no plano.	A partir do instrumento (físico) na forma quadrada, versão essa que foi selecionada para trabalho nessa atividade e ainda da possível situação de que João Baptista Lavanha (c.1550–1624) poderia ter realizado (cartão de recursos 02), cumpra os seguintes momentos: **Parte 01:** ✓ Compreenda a situação de uso que João Baptista Lavanha (c.1550–1624) poderia ter realizado (cartão de recursos 02) ✓ Efetue a medição da altura do Sol **Parte 02:** ✓ Acompanhe e entenda no que consiste o instrumento e procure reconhecer e mapear os diferentes conhecimentos geométricos incorporados na situação de uso.	Liste os conhecimentos geométricos mobilizados na situação de uso e anote outras impressões sobre as partes do instrumento.

Fonte: Elaboração própria.

Para cumprimento desse desenho metodológico, em todos os dias de curso, foi disponibilizado, a cada grupo, um cartão de recurso, o qual forneceu, nos dois primeiros dias de atividade, a descrição de construção e uso do instrumento jacente no plano, já para o último dia de curso, foi disponibilizado um outro cartão recurso, no qual estava contida uma situação hipotética de uso para o instrumento jacente no plano no século XVI. A partir do segundo dia de atividade, ainda foi disponibilizado um instrumento jacente no plano na forma quadrada para cada um dos grupos de discentes.

As orientações metodológicas aos discentes, para desenvolvimento da atividade, estiveram disponíveis em cartões de atividades. O quadro anterior é um recorte dos cartões fornecidos durante os dias de curso. Foram propostos, no total, três cartões, um para cada dia da atividade. Durante o desenvolvimento da atividade, docente e observador estiveram circulando entre as mesas, fazendo anotações e instigando os participantes a apresentarem seus conhecimentos.

Sabe-se que docente e observador de maneira alguma podem interferir nas discussões dos grupos, de forma a que venham interferir no movimento do pensamento dos discentes, o que os cabe é fomentar questionamentos a partir das ações, dúvidas e certezas dos participantes. Para favorecer o desempenho dessa função, elaborou-se alguns cartões de hipóteses, os quais apresentam hipóteses de ações que podem ser realizadas pelos discentes para cumprimento de determinadas demandas, alguns conhecimentos geométricos que podem ser mobilizados, possibilidades de configuração do instrumento, dentre outros elementos observados pelo movimento do pensamento dos pesquisadores quanto à atividade proposta.

Ao final de cada dia do curso, como forma de coletar informações de cada grupo de discentes, ainda se propôs a entrega de um relatório, o qual teve que seguir um guia de relatório de atividade produzido previamente pelos pesquisadores. A ideia, com ele, é que os discentes tivessem um local apropriado para a apresentação do produto solicitado no cartão de atividade, por essa aproximação, entre esses documentos, a intenção é que sejam entregues juntos ao início de cada atividade.

Também como forma de coleta de dados, propôs-se, ao final de cada dia, o preenchimento de uma ficha de avaliação diária. A intenção é que, com ela, os discentes apontem conhecimentos apreendidos, o que funcionou ou não na atividade e do que ainda seria necessário (recurso didático, material concreto) para um pleno desenvolvimento da atividade proposta.

A atividade foi proposta para ser realizada com doze discentes (alunos de formação inicial), que foram distribuídos proporcionalmente, em quatro grupos; para o controle e gestão da atividade, teve-se um docente (observador) e um observador (docente). Esses dois tiveram um papel próximo ao desempenhado por um “participante observador”, tendo sempre o cuidado de não interferir nas discussões dos grupos, de forma que venham a influenciar ou provocar alterações no comportamento ou no desenvolvimento de estratégias/ações para resolver as situações incorporadas na atividade (LÜDKE; ANDRÉ, 2013).

Para o planejamento e gestão da atividade a ser desempenhada pelos grupos, buscou-se atribuir funções aos participantes, são elas a de facilitador, relator, verificador, gerenciador de materiais, organizador e de oficial de segurança (COHEN; LOTAN, 2017). A justificativa para essa organização foi favorecer as discussões e inferências dos grupos.

Tratamento didático do documento

Quanto ao texto utilizado nessa pesquisa, em capítulos anteriores, já se destacou que se faz uso da edição moderna Pedro Nunes – Obras vol. IV (2008), a qual foi traduzida por A. Guimarães

Pinto. No que se refere a essa tradução, vale destacar que ela demandou um trabalho exaustivo, visto que, em alguns trechos, Pedro Nunes apresenta um estilo de escrita complexo e não muito claro. Nesse sentido, A. Guimarães Pinto, juntamente com a comissão científica, procuraram se guiar com base em alguns critérios, que podem ser observados em *obras*, vol. II, pp. 389-396 (LEITÃO, 2008).

Apesar dessa dificuldade de interpretação, acredita-se que, em Pedro Nunes – Obras vol. IV (2008), consegue-se manter uma fidelidade com as palavras e ideias do quinhentista. Sobre as figuras do documento moderno, sabe-se que elas foram feitas por Bruno Almeida e que nelas sempre se buscou preservar as apresentadas, originalmente, por Pedro Nunes (LEITÃO, 2008). Tem-se grande apreço a essa tradução, pois ela possibilitou estudar o texto de construção e instrução de uso do instrumento jacente no plano e de onde se busca partir para encontrar, no século XVI, elementos que façam parte do contexto de elaboração do instrumento em questão.

Visto isso, vale destacar que, por tratamento didático, toma-se todo o processo de seleção, tradução e organização das partes do texto a serem postas à disposição dos alunos na atividade. Esse procedimento tem como finalidade favorecer a compreensão do texto por parte dos sujeitos e levar em consideração as intenções didáticas e/ou objetivos da pesquisa (SAITO; DIAS, 2011, 2013; SAITO; PEREIRA, 2019).

Com base nessa definição e levando em consideração que o texto em que o instrumento jacente no plano está descrito, no século XVI, a primeira ação do tratamento realizado sobre o texto foi buscar significado para as palavras estilete, gnómon e zênite. A justificativa, para tanto, é que esses termos não são muito recorrentes na modernidade, fato que poderia dificultar a compreensão dos participantes.

Ainda no tratamento didático, decidiu-se preservar a disposição do texto e imagem apresentados por Pedro Nunes, inicialmente, em suas *Petri Nonii Salaciensis Opera* (1566). Justifica-se essa escolha pelo fato de se acreditar que a posição e/ou ordem do texto ou imagem pode influenciar na compreensão do texto e interpretação da configuração e/ou funcionamento do instrumento. Visto isso, decidiu-se incorporar o resultado dessas ações ao texto de descrição do instrumento.

Desenvolvimento

A atividade foi desenvolvida em três etapas/episódios, assim como previsto, os encontros ocorreram nos dias 01, 02 e 03 de agosto de 2019. No primeiro dia, os estudantes estudaram o instrumento jacente no plano a partir da descrição de construção e uso de Pedro Nunes, já no segundo dia, continuaram o estudo tendo como aporte tanto a referida descrição como também uma réplica do instrumento. No último encontro, os discentes procuraram realizar a medida da altura do Sol acima do horizonte. A seguir, tem-se os dois espaços utilizados no curso (Figura 39):

Figura 39 — Da direita para a esquerda: praça da rotatória da UECE e LAbMAtEn/UECE.

Fonte: Acervo dos autores.

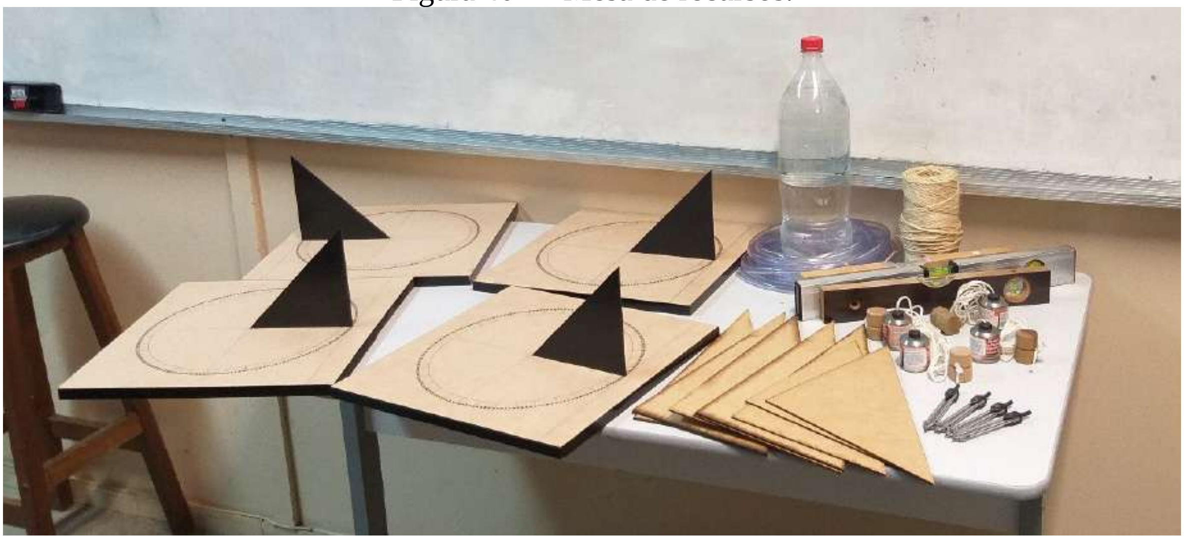
Na praça da rotatória da UECE, desenvolveu-se a atividade de uso do instrumento jacente no plano, a escolha por esse espaço se deve ao fato de, em momentos anteriores ao curso, ter-se visualizado que ela poderia favorecer o uso do aparato, haja vista tal ambiente possuir vários locais que recebem a incidência direta dos raios solares. No LAbMAtEn/UECE, foram realizados os dois primeiros dias da atividade.

No primeiro dia de atividade, foi feita, inicialmente, uma apresentação do curso de extensão universitária, na ocasião, expôs-se que a atividade proposta faz parte de uma pesquisa de mestrado, na qual se busca construir uma interface entre história e ensino da matemática a partir do instrumento jacente no plano. Posteriormente, os discentes foram solicitados à análise e assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido; cumprido esse momento, fez-se uma apresentação do contexto de elaboração do instrumento a partir da obra em que está descrito. Ainda nesse primeiro dia, após a concessão de um breve intervalo aos participantes, eles receberam a primeira proposta de atividade que deveriam realizar, ao final, preencheram a ficha de avaliação do dia.

No segundo dia, o curso foi iniciado com a exposição de algumas observações feitas acerca do primeiro encontro. Reafirmou-se, por exemplo, a importância da divisão das funções (de facilitador, relator, verificador, gerenciador de materiais, organizador e de oficial de segurança) dentro dos grupos. Como forma de finalizar esse momento inicial, ainda se fez uma retomada das discussões do dia anterior. Em continuidade, propôs-se aos discentes o desenvolvimento da segunda atividade, antes de terminá-la, foi concedido um intervalo aos participantes. Ao final, eles preencheram a ficha de avaliação diária.

Antes de apresentar o desenvolvimento do terceiro dia, cabe pontuar ainda sobre o segundo encontro que, como já indicado anteriormente, nessa segunda parte da atividade, juntamente com o cartão de atividade 02, foi disponibilizado, a cada grupo de discentes, uma réplica do instrumento jacente no plano. Tais aparatos estão ilustrados a seguir na mesa de recursos utilizada no terceiro dia de atividade (figura 40):

Figura 40 — Mesa de recursos.



Fonte: Elaboração própria.

Essas réplicas, assim como a apresentada ao final da discussão sobre a construção do instrumento jacente no plano, tecida no capítulo anterior, foram confeccionadas artesanalmente a partir das instruções de Pedro Nunes. Na tábua quadrada de madeira, fez-se a graduação da circunferência, tendo como recursos lápis, borracha, caneta, régua e esquadros não graduados e um compasso. Em um compensado de madeira, desenhou-se o triângulo retângulo e isósceles, após isso, ele foi recortado, pintado e colado perpendicularmente sobre o semidiametro da circunferência.

Nessa mesa de recursos, como se pode observar, ainda estavam disponíveis esquadros, nível de bolha, uma mangueira e garrafa com água usados em aferimento do nível na construção cívil, fios de prumos, barbantes e compassos. A ideia para disponibilização da mesa de recursos parte do verificado em algumas pesquisas que já trabalharam o uso de instrumentos matemáticos dos séculos XVI e/ou XVII, a exemplo delas, tem-se os estudos de Batista (2018), Pereira e Saito (2019b) e Silva (2019).

Nessas pesquisas, os participantes das situações propostas sentiam a necessidade de fazer uso de objetos auxiliares para realizarem a medida. No caso do trabalho com o instrumento jacente no plano, a necessidade de uso de objetos auxiliares se confirma, haja vista como exposto no segundo capítulo, para a realização da medida, teve-se que se fazer uso de um nível de bolhas para verificar o paralelismo da tábua do instrumento com o plano do horizonte.

No que se refere ao último dia, cabe destacar que ele teve um encaminhamento inicial semelhante ao do dia anterior e também foi finalizado com a retomada e discussão de alguns elementos do dia anterior. Posteriormente, os discentes receberam o terceiro cartão de atividade, o qual solicitou que se dirigissem à praça da rotatória da UECE para determinarem a altura do Sol. De posse de tal cartão, foram à praça para a realização da atividade. Após esse momento, antes de retomar ao LAbMAtEn/UECE, foi concedido um intervalo aos discentes. De volta à sala de aula, passou-se a discutir a situação prática de uso do instrumento, o curso foi finalizado com o preenchimento da ficha de avaliação do dia.

Durante todos esses dias de curso, sempre que possível foi feita uma socialização e análise sobre os conceitos geométricos e ações levantadas pelos discentes, tenham elas ocorridas entre os participantes de um grupo ou mesmo entre os grupos. A ideia dessa socialização foi criar um ambiente favorável ao diálogo e ao desenvolvimento de um fórum de discussões.

Com as considerações dessa socialização, das discussões e análises que permearam os momentos do curso, foi possível levantar vários conhecimentos mobilizados na construção e na situação de uso do instrumento jacente no plano. Também se conseguiu identificar como os discentes significam e (re)significam alguns objetos matemáticos, em especial, os geométricos, em outras palavras, notou-se como eles conceituam alguns objetos da geometria.

No capítulo a seguir, expõe-se elementos que ilustram essas considerações extraídas do curso de extensão universitária. Como forma de favorecer a disposição e compreensão deles, destaca-se que, no primeiro dia de atividade, participaram 12 discentes em formação inicial, os quais foram divididos de forma proporcional em quatro grupos: Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3 e Grupo 4. Os discentes receberam o codinome de aluna 1, aluna 2 e aluno 3 (Grupo 1), aluno 4, aluna 5, aluno 6 (Grupo 2), aluna 7, aluna 8 e aluno 9 (Grupo 3) e aluna 10, aluno 11 e aluno 12 (Grupo 4). No segundo e terceiro dias, o aluno 9 do Grupo 3 não participou mais do curso, deixando, assim, esse grupo com apenas dois participantes.

Antes de adentrar ao próximo capítulo, cabe destacar outros elementos metodológicos que embasam a descrição da análise e discussão da atividade. Por assumir a pesquisa como atividade e ainda à luz da perspectiva histórico-cultural, a qual é uma das teorias que nutrem a AOE, como primeiro produto da análise, foram elencadas as unidades mínimas de análise (isolados). Já como segundo produto da análise, identificaram-se alguns episódios, os quais indicam:

> [...] não apenas a organização dos dados, mas, sobretudo, um modo de exposição que recompõe o fenômeno na sua totalidade, em uma nova sistese, explicitando o movimento lógico-histórico da pesquisa e os modos de ação para a compreensão teórica do objeto, de forma que a exposição se constitui como produto do segundo movimento de análise, como afirmado anteriormente. Nesse sentido, os episódios relacionam-se com os isolados, há coincidência, mas não identidade; ou seja, em uma unidade dialética, os isolados

> configuram-se como conteúdos de análise e os episódios como forma de expor a análise de modo que evidenciem as unidades de análise que permitiram compreender o fenômeno em seu processo de mudança (ARAUJO; MORAES, 2017, p. 68).

Nesse sentido, nota-se que os episódios se constituem a partir do conjunto de unidades minímas de análise a serem estudadas e que se apresentam como forma de estruturação e exposição do todo. Diante dos pressupostos teóricos metodológicos assumidos, entende-se ainda que, a partir das unidades mínimas de análise, será possível "[...] determinar as relações essenciais e necessárias que organizam o fenômeno em questão" (ARAUJO; MORAES, 2017, p. 67). Elas têm como papel destacar algo que foi isolado para estudo, contudo, não significa que necessitam ser isoladas da totalidade da atividade (ARAUJO; MORAES, 2017).

No que se refere às unidades mínimas de análise e aos episódios elencados nesse estudo, vale destacar que, a partir do conteúdo do segundo capítulo e dos cartões de hipóteses, fez-se uma primeira estrutura para orientar a análise e discursão dos dados. Sobre ela, tem-se o quadro 6:

Quadro 6 — Estrutura para análise e dicussão da atividade

COM BASE NO OBSERVADO NO SEGUNDO CAPÍTULO	
UNIDADES MÍNIMAS DE ANÁLISE	EPISÓDIOS
• A tábua quadrada como parte do instrumento jacente no plano; • Tábua circular como parte do instrumento jacente no plano; • O triângulo retângulo isósceles como parte do instrumento jacente no plano; • O estilete como parte do instrumento jacente no plano.	• Estudo do instrumento jacente no plano a partir da descrição de construção apresentada por Pedro Nunes; • Estudo do instrumento jacente no plano a partir da descrição de construção e uso de Pedro Nunes e de uma réplica física do instrumento; • Estudo do uso do instrumento jacente no plano.

Fonte: Elaboração própria.

Como exposto nesse quadro, as unidades mímimas de análise elencadas pelo estudo da construção e uso do instrumento jacente no plano foram as suas partes. Fez-se vizualizá-las, dessa forma, o fato de notar que são nas partes e na relação existente entre elas, em que estão incorporados os conhecimentos geométricos do aparato.

Nessa perspectiva, de forma a conhecer o potencial didático do instrumento jacente no plano para o ensino de conhecimentos geométricos na formação inicial de professores, suas partes foram tomadas como critérios para seleção e disposição dos dados a serem considerados da atividade. No que se refere à análise e interpretação das partes do instrumento, cabe destacar que elas foram realizadas pela observação das ações dos sujeitos no decorrer da atividade.

Com base nas partes do instrumento jacente no plano e no movimento do pensamento realizado para a construção do segundo capítulo, foi possível observar que a análise e compreensão de suas partes se ampliam ao agregar ao estudo de sua construção o estudo de seu uso. Dessa forma, entende-se que as partes do instrumento podem ser agrupadas em episódios, isso porque as impressões dos discentes sobre elas se solidificam, ampliam-se e/ou se modificam dependendo da proposta (construção e/ou uso) e dos recursos fornecidos (apenas a descrição de Pedro Nunes e/ou uma réplica física do instrumento) para o estudo.

De uma análise acerca dos dados coletados na atividade, em especial aos apresentados nos relatórios dos grupos de discentes, considerando os episódios previstos a priori, os quais foram expostos no sexto quadro apresentado anteriormente, foi possível observar o surgimento de outras unidades mínimas de análise. A esse respeito, tem-se o quadro 7 a seguir:

Quadro 7 — Estrutura para análise e dicussão da atividade a partir da realização da atividade

COM BASE NO OBSERVADO NA ATIVIDADE	
UNIDADES MÍNIMAS DE ANÁLISE	EPISÓDIOS
• O triângulo retângulo isosceles como parte do instrumento jacente no plano;Estudo do instrumento jacente no plano a partir da descrição de construção apresentada por Pedro Nunes;Tábua circular como parte do instrumento jacente no plano; • A tábua circular/quadrada como parte do instrumento jacente no plano; • A sombra como parte do instrumento jacente no plano; • O segmento de reta tangente como parte do instrumento jacente no plano; • O triângulo retângulo isósceles como parte do instrumento jacente no plano; • O estilete como parte do instrumento jacente no plano; • Partes adjacentes do instrumento jacente no plano;	• Estudo do instrumento jacente no plano a partir da descrição de construção e uso de Pedro Nunes e de uma réplica física do instrumento;
• A tábua quadrada como parte do instrumento jacente no plano; • O triângulo retângulo isósceles como parte do instrumento jacente no plano.	• Estudo do uso do instrumento jacente no plano.

Fonte: Elaboração própria.

Como se pode observar, além das partes já indicadas no segundo capítulo, os discentes ainda compreendem outros elementos do instrumento jacente no plano como sendo uma parte dele. Sobre a visualização dessas novas partes, entende-se que elas podem, possivelmente, elucidar ainda mais conhecimentos geométricos incorporados em seu processo de construção e uso, pois, com a ampliação da quantidade de suas partes, subentende-se que haverão novas possibilidades de relações e dependências entre elas.

À luz da estrutura indicada nesse sétimo quadro, expõe-se o estudo a partir dos três episódios elencados com base nas unidades mínimas de análise identificadas na atividade, as quais também estão indicadas no referido quadro. No primeiro episódio, é dado destaque ao estudo do instrumento jacente no plano a partir da descrição de construção apresentada por Pedro Nunes, já no segundo, é contemplado o estudo do instrumento jacente no plano a partir da descrição de construção e uso de Pedro Nunes e de uma réplica física do instrumento. No último episódio, fala-se do estudo do uso do instrumento jacente no plano a partir de uma situação real de uso.

Após a explanação sobre o percurso metodológico e a definição das unidades mínimas de análise a serem observadas em cada episódio (categoria), aborda-se, a seguir, os resultados da pesquisa. Em tal momento, busca-se valorizar a observação de nexos conceituais, as conexões e interconexões entre elementos da atividade, o agrupamento de elementos indicadores, dentre outros.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE E DISCUSSÃO DA ATIVIDADE

Dando espaço aos dados coletados no momento de apreensão da realidade (realização da atividade) e nas relações que possam existir entre eles e os dicutidos em capítulos anteriores, descreve-se, nesse capítulo, elementos potencialmente didáticos do instrumento jacente no plano para o ensino de conhecimentos geométricos na formação inicial de professores.

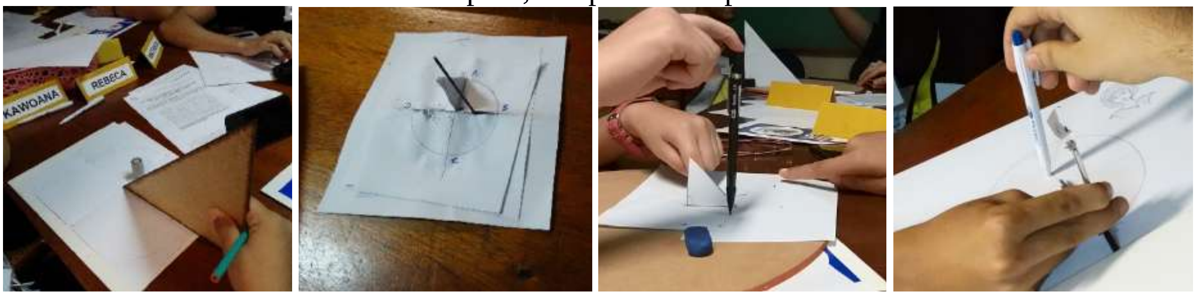
Nessa perspectiva, expõem-se os conhecimentos geométricos incorporados na construção e uso do instrumento jacente no plano. Procura-se, ainda, por exemplo, apresentar algumas ações realizadas pelos sujeitos que indiquem elementos de seu movimento do pensamento na direção de atribuir significado a determinados conhecimentos geométricos e também de compreender o instrumento e a incorporação de suas partes.

Estudo do instrumento jacente no plano a partir da descrição de construção e instrução de uso apresentada por Pedro Nunes

Como se pode observar no quadro 5 do capítulo anterior, no primeiro dia de atividade, solicitou-se aos estudantes listarem os conhecimentos geométricos mapeados e anotarem suas primeiras impressões sobre as partes do instrumento a partir da construção. Para tanto, foi indicado aos discentes que, com base no texto em que Pedro Nunes descreve a construção do instrumento jacente no plano, buscassem tanto acompanhar e entender no que consiste o instrumento, procurando reconhecer como seria(m) sua(s) forma(s) física(s), como também entender cada uma das partes do instrumento jacente no plano e para que servem (Cartão de atividade 01).

O trabalho dos discentes teve início com a leitura do texto de Pedro Nunes (Cartão de recursos 01) acerca do instrumento jacente no plano. Nesse momento, pôde-se observar que todos os grupos de estudantes procuravam compreender o instrumento tendo como aporte tanto a descrição do lusitano, como também o esboço geométrico do instrumento que o autor apresenta. Dessa observação entre texto e imagem, logo traduziram suas primeiras compreensões em formas físicas do instrumento, as quais estão expostas na Figura 41 a seguir.

Figura 41 — Da direita para a esquerda: tentativa de representação física do instrumento do Grupo 4, Grupo 3, Grupo 2 e Grupo 1



Fonte: Arquivo pessoal dos autores (GRUPO 1; GRUPO 2; GRUPO 3; GRUPO 4, 2019).

Ainda sobre a compreensão do instrumento jacente no plano, a partir do texto e imagem de Pedro Nunes, é possível observar que os discentes não tinham chegado a conclusões firmes e estáveis sobre a configuração do instrumento. A incerteza dos discentes fica evidente na seguinte colocação que um deles apresenta: “[...] acho que não deu para concluir muito bem qual a imagem final do instrumento” (ALUNA 7, 2019).

Segundo eles, no que se refere, em especial, à imagem apresentada por Pedro Nunes sobre o instrumento, “aquela da segunda página é confusa, é mais fácil imaginar do primeiro texto do que quando você olha para a imagem e você fica, não foi nada do que eu pensei” (ALUNA 1, 2019). Nesse mesmo sentido, outra participante da atividade afirma que: “quando você começa a ler, eu pelo menos construí uma coisa na minha cabeça para o instrumento, aí quando fui para a outra página desconstruí totalmente e fiquei sem entender e sem conectar ele” (ALUNA 5, 2019). Ainda nessa direção, outro discente complementa, elucidando que:

> Pois é na segunda página aquela imagem está se referindo ao texto seguinte, eu acho que teria ficado mais coerente se a imagem ficasse logo abaixo e não em cima. Aí você só ia olhar a imagem depois do que? De ler o texto. [...] como a gente já tinha lido o outro texto e entendido de outra forma, utilizando outro método, virou a página você fica, oi? A primeira coisa que o olho bate é sempre a imagem, nunca o texto, não espera, sempre não é geralmente é a imagem (ALUNO 4, 2019).

Diante dessas considerações destacadas pelos discentes, faz-se necessário reafirmar que a disposição do texto e imagem apresentadas a eles, por meio do primeiro cartão de recursos, seguem fielmente a disposição do conteúdo feita pelo lusitano nas *Petri Nonii Salaciensis Opera* (1566), obras nas quais, como já apontado anteriormente, o autor traz, pela primeira vez, a concepção do instrumento jacente no plano. Essa disposição do texto foi mantida para se verificar a compreensão dos discentes sobre a versão original.

Sabe-se que, a depender das intenções didáticas e/ou objetivos estipulados para uma atividade, o tratamento didático sobre o texto, em que está descrito o instrumento, tem papel fundamental para dosar o estágio de compreensão acerca do aparato. Haja vista esse tratamento ser responsável por revelar, indicar e/ou destacar elementos que possam ampliar a possibilidade dos estudantes entenderem o instrumento (SAITO; DIAS, 2011, 2013; SAITO; PEREIRA, 2019).

Como forma de favorecer a compreensão do instrumento jacente no plano, a partir da descrição de Pedro Nunes, uma possibilidade seria, além de incorporar o significado de alguns termos, ainda apresentar algumas imagens do aparato. Dentre as figuras que podem ser usadas para tanto, tem-se as apresentadas no segundo capítulo, a exemplo podem utilizar a figura 10, em que se traz a versão do instrumento em uma tábua circular, a figura 29 em que se pode observar uma réplica do instrumento para a tábua quadrada e a figura 13 para ilustrar a versão do instrumento em que se tem os lados do triângulo duplicados.

O triângulo retângulo isósceles como parte do instrumento jacente no plano

Essa unidade se fez presente nas discussões de todos os quatro grupos da atividade, uma possível justificativa, para tal, é que, para qualquer uma das versões apresentadas por Pedro Nunes para a construção do instrumento, tem-se a presença do triângulo retângulo isósceles. Sobre o que os grupos compreenderam acerca dessa parte do instrumento jacente no plano, no quadro 8 a seguir, tem-se a transcrição literal do apresentado por cada grupo em seus relatórios.

Quadro 8 — Sobre o triângulo retângulo isósceles.

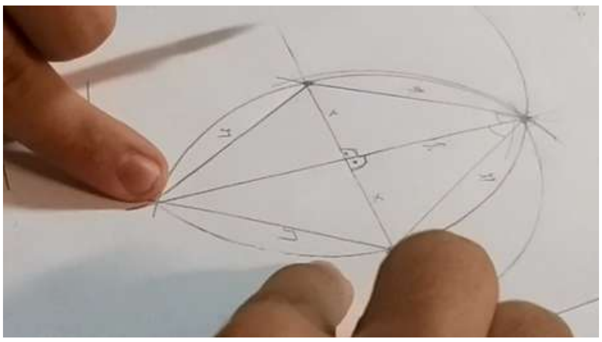
Grupo	Função	Conhecimentos geométricos mobilizados	Justificativa para incorporação no instrumento
Grupo 1	Funciona como ponteiro para a projeção das sombras necessárias para as mensurações.	Classificação dos triângulos quanto à área e seus lados.	São dados três pontos e um ângulo reto.
Grupo 2	Projetar a sombra pelo Sol, para efetuar o cálculo da altura do Sol em relação ao horizonte e ao zênite.	-Geometria Plana e Espacial; -Paralelismo entre planos e retas; -Perpendicularismo entre planos e retas.	Parte não sombreada (altura do Sol ao horizonte); Parte sombreada (distância do Sol ao zênite).
Grupo 3	Auxiliar na procura da altura do Sol, pois a hipotenusa e sombra indicam o que procuramos.	- Ângulo; - Perpendicularidade; - Retângulo; - Isósceles; -Duplicação dos lados do triângulo.	Porque se não for o triângulo, não encontraríamos a altura, pois não teríamos a sombra.
Grupo 4	Projetar a sombra para a visualização das distâncias requeridas para obtenção dos dados para a análise.	- Perpendicularismo; -Arco de circunferência.	Sem este instrumento, haveriam dificuldades para projeção de uma sombra e sem esta não teríamos possivelmente as informações necessárias.

Fonte: Arquivo dos autores (Relatório dos grupos, 2019).

Como se pode observar, os grupos apresentam algumas compreensões bem semelhantes, a exemplo, de forma geral, compreenderam que seu papel é projetar a sombra que permitirá a observação da altura do Sol acima do horizonte, em relação aos conhecimentos mobilizados, destaca-se o fato de três grupos apontarem a presença do perpendicularismo. Quanto a uma justificativa para sua incorporação, conseguem destacar apenas que, sem ele, não seria possível observar a medida procurada, haja vista não ter a projeção da sombra.

A instrução de Pedro Nunes, de se fabricar o triângulo retângulo isósceles, levou os discentes a refletirem sobre a possibilidade para sua construção. Instruídos, assim, a pensarem em uma estratégia para sua construção, tendo como ferramentas apenas régua não graduada e um compasso, um dos participantes apresentou a seguinte compreensão:

> Eu pego uma reta qualquer, coloco dois pontos, esses pontos serão meus centros, vou pegar o raio da minha tábua, no caso deixei em escala maior porque eu criei uma tábua pequena, que é só mesmo um exemplo. Traço aqui em cima e aqui embaixo, faço um outro centro com mesmo raio, traço aqui em cima e aqui embaixo. Se eu ligar deste ponto aqui que vai ter um encontro raio, daqui para cá raio, raio, raio, por causa das circunferências, que é de centro a uma borda das circunferências, raios. Vou ter dois raios e um lado em comum. Eu sei que este ângulo aqui está observando este arco que tem uma corda *r*, assim como este ângulo está observando essa corda, não este arco de corda r. Por estes dois arcos terem a mesma corda, então estes dois arcos têm a mesma medida. Por eles terem a mesma medida, então estes ângulos são iguais, certo. Então eu tenho dois ângulos iguais, dois lados iguais e um lado em comum, ou seja, por lado ângulo lado eu tenho uma congruência de triângulos. Ou seja, este ângulo é igual a esse ângulo, por eles serem suplementares, então a soma deles tem que dar 180, como são iguais cada um deles é 90, tenho um triângulo retângulo. Ah, como é que eu crio um triângulo retângulo isósceles, traço um centro exatamente onde está esses ângulos, pego essa distância *L*, não pego a distância do raio, certo, e traço aqui. O ponto de encontro, que no caso este aqui, e um canto bem aqui, será um triângulo retângulo também, certo, em que daqui para cá é raio e daqui para cá é raio. Ou seja, eu tenho aqui, raio, raio e um ângulo de 90 graus, ou seja, tenho um triângulo retângulo com catetos iguais idênticos ao da base.



(ALUNO 4, 2019, Grupo 2).

Como se pode observar, o discente apresenta, inicialmente, como se pode proceder para a construção de um triângulo retângulo, a partir disso, ele indica a alternativa que pode ser realizada para se obter o triângulo retângulo isósceles. Considerando o pontuado no segundo capítulo, nota-se que a estratégia do estudante se refere a uma das possibilidades observadas no estudo de Carvalho

(1958), em particular, a que trata da construção tendo por base um de seus lados (semidiametro) e um ângulo da base (o ângulo de 90 graus definido pelo aluno).

Outra instrução de Pedro Nunes, que elucidou conhecimentos geométricos, refere-se à indicação de se colocar o triângulo perpendicular à tábua do instrumento jacente no plano. A esse respeito, os discentes destacaram que, para tanto, seria necessário se basear na definição de perpendicularidade entre planos. Como diálogo, que ilustra as discussões realizadas internamente nos grupos, acerca dessa instrução do lusitano, tem-se:

> Aluno 9: "Como é que eu mostro que algo esteja perpendicular ao plano? [...] quando é que dois planos são perpendiculares, um perpendicular ao outro?
> Aluna 7: "Isso aí já é geometria espacial".
> Aluno 9: "Espera aí, é quando eles têm uma reta em comum".
> Aluna 8: "E eles têm uma reta em comum".
> Aluna 7: "Quando eles têm uma reta em comum? É não menino".
> Aluno 9: "Espera aí, é não! Como eu demonstro que esse plano está perpendicular ao outro plano? Porque o triângulo é como se fosse um plano".
> Aluna 7: "Ah é verdade eles têm uma reta em comum".
> Aluno 9: "Definição de plano, pera aí".
> Aluno 9: "Eu quero saber como é que eu mostro que dois planos são perpendiculares". [...]
> Aluno 9: "Mas tipo, para mim, mostrar que dois planos são perpendiculares, plano α e plano β, eles têm que ter uma reta em comum, e que todos os pontos da reta *BD* sejam comuns a ambos os planos".
> Professor: "vocês concordam com o que ele disse?"
> Aluna 7: "Eu lembro disso, eu sei que eu vi, mas não consigo lembrar para falar".
> Aluno 9: "Se você tem dois planos, para mostrar que dois planos são perpendiculares, vamos supor que isso é um plano α esse aqui um plano β. Se eu quero demonstrar que esse plano é perpendicular a esse, preciso pegar pelo menos uma reta comum tanto a esse plano como a esse plano, a intersecção de alfa com beta tem que ser uma reta *r*. *r* tem que está contido em α e *r* tem que está contido em β. E todos os pontos de *r* tem que ser comum aos dois planos, certo. Então como ele perguntou se eu tinha certeza que esse plano estava perpendicular, né eu tenho que provar que todos os pontos do cateto *GH* também estejam no plano *ABCD*. O que eu quero agora demonstrar é que a reta *GH* tem que estar em ambos os planos, é isso?"
> Aluna 8: "E ele diz no texto que *GH* é o semidiâmetro".
> Aluno 9: "Semidiâmetro é o raio".
> Aluna 7: "Isso".
> Aluno 9: "Eu peguei o plano do triângulo *FGH*, peguei o plano dado que é *ABCD*. Disso aqui eu quis demonstrar que o plano *FGH* é perpendicular ao plano *ABCD*. Por definição de perpendicularidade entre dois planos eu precisaria pegar uma reta *r* qualquer que estaria contida em α e essa reta também estaria que está contida em β. Para eu provar que α e β, que α seria esse plano aqui e β esse plano aqui. Então eu teria que pegar uma reta de modo que essa reta seria a intersecção entre dois planos, aí eu demonstraria que esse plano, que seria o triângulo estaria realmente perpendicular ao plano *ABCD*" (GRUPO 3, 2019).

Nesse diálogo, percebe-se que os discentes vão, aos poucos, relembrando conceitos que os ajudam a conceituar determinados objetos matemáticos. Nesse sentido, entende-se que o instrumento apresenta um potencial para desencadear discussões de ordem matemática que favorecem a apreensão dos objetos pelos sujeitos. No que se refere aos argumentos apresentados sobre a perpendicularidade entre planos, nota-se que, do ponto de vista matemático, o grupo não chegou a uma conclusão suficiente. Como o grupo destacou, de fato, é necessário que exista uma reta pertencente aos dois planos, mas isso não é garantia de que estarão perpendiculares.

Em relação à possibilidade de perpendicularismo a partir de uma reta, com base no texto de descrição do instrumento feito por Pedro Nunes, o qual foi discutido no segundo capítulo, nota-se que ele faz uso da terceira definição do décimo livro dos *Elementos*, de Euclides, para sustentar a perpendicularidade de uma reta em relação a um plano. Essa definição sustenta que quando uma reta se encontra a ângulos retos em relação a duas outras retas pertencentes a um plano, a reta inicial estará perpendicular ao plano (EUCLIDES, 2009).

Ainda em relação às possibilidades para se garantir o perpendicularismo entre o triângulo e a tábua do instrumento, outro grupo apresenta a seguinte estratégia para o posicionamento do triângulo:

> Eu posso criar um segundo triângulo, não necessariamente tem que ser idêntico, idêntico não, é congruente, mas que seja semelhante, contanto que seja de 90 graus, portanto, que seja retângulo, por que com este outro triângulo, eu vou poder colocar ele como uma face não necessariamente paralela, mas também não pode ser, não necessariamente perpendicular, portanto, que não seja paralela, pois eu vou utilizar retas, pois com ele eu vou poder pegar um triângulo, eu vou poder botar este triângulo aqui, e com outro triângulo eu vou colocar do lado, de tal forma que o ângulo de 90 graus, esteja também na base. Porque quando eu colocar aqui, a face do triângulo que eu quero ela vai ficar perpendicular a tábua, por causa deste ângulo que tem aqui no outro triângulo, porque que não pode ser paralela, porque se for paralela não tem como eu garantir. Eu só preciso de dois triângulos retângulos, está aqui um deles, está aqui o outro. Contanto que não seja, por menor que seja, vai ter como encontrar o ângulo exatamente de 90 graus. Eu só preciso de dois triângulos, ei meninas, vocês poderiam me emprestar o de vocês aí rapidinho, para poder mostrar em escala maior. Está aqui, vamos supor que esse aqui, está aqui minha base esse aqui é o triângulo que eu vou querer colocar, se eu colocar paralelo não tem como eu garantir, mas se eu colocar perpendicular, não necessariamente perpendicular, mas não paralelo vai ter como eu prender aqui. Como que eu demonstraria é, eu vou pegar esta reta aqui é comparada a esses dois planos, o que esta reta vai ser deste plano aqui e do plano da base, vai ser 90 graus para este plano, por causa deste triângulo, oficialmente, o plano deste triângulo essa reta será 90 graus com a base, certo, ou seja, como esta reta também pertencente a este plano, então este plano tem 90 graus com essa base. Eu tenho uma reta em comum entre dois planos, como este a gente já sabe que é 90 graus, este aqui vai ter que ser necessariamente 90 graus. Entendeu. É por transitividade, entendeu. […]

(ALUNO 4, 2019).

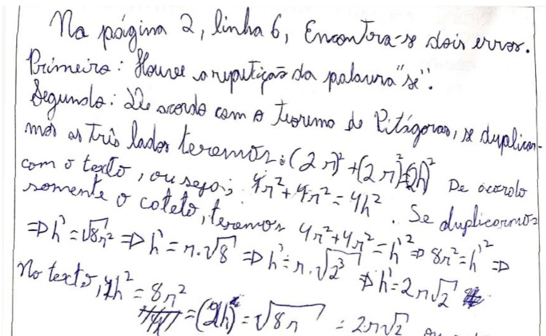
Essa possibilidade, para posicionamento do triângulo, já havia sido pontuada no segundo capítulo. Da ação apresentada pelo discente, cabe destacar o fato dele apontar que o esquadro (segundo triângulo) não pode estar paralelo ao que se quer pôr de forma perpendicular à tábua, pois, assim, ficaria difícil garantir o que se pretende. Em suas conclusões, é possível observar que elas recaem na terceira definição do décimo livro dos *Elementos*, de Euclides, elucidada anteriormente, isso porque ele toma como base para sua justificativa a reta formada pela intersecção entre o triângulo e o esquadro.

Nota-se que, nesse caso, o discente não se limitou a pensar as definições matemáticas apenas em uma dimensão teórica imaginária, a elas, ele busca agregar um objeto material (aqui, no caso, um esquadro) para garantir a perpendicularidade e, assim, ilustrar seu pensamento. Dessa forma, ele consegue atribuir significado ao conceito de perpendicularidade, fato que, possivelmente, pode potencializar o desenvolvimento de uma apreensão ainda mais ampla acerca desse objeto geométrico.

Como aconteceu nas pesquisas de Batista (2018) e Pereira e Saito (2019b), as quais se desenvolveram à luz da perspectiva de construção de interfaces aqui assumida, nota-se que os discentes também sentiram a necessidade de usar o fio de prumo para ajudar a justificar os procedimentos tomados. Dessa maneira, vê-se que essa estratégia de pensamento (uso de objetos auxiliares) é familiar em estudos que procuam explorar a construção e/ou uso de instrumentos matemáticos.

Ainda no que se refere a esse triângulo, para uma das versões do instrumento jacente no plano, Pedro Nunes instrui que o triângulo seja duplicado. Essa indicação desencadeou uma dúvida a alguns dos discentes, o argumento de um deles contra essa duplicação está ilustrado na figura 42 a seguir:

Figura 42 — Argumento do segundo grupo quanto à duplicação do triângulo.


Na página 2, linha 6, Encontra-se dois erros.
Primeiro: Houve a repetição da palavra "se".
Segundo: De acordo com o teorema de Pitágoras, se duplicarmos os três lados teremos: $(2r)^2 + (2r)^2 = (2h)^2$ De acordo com o texto, ou seja: $4r^2 + 4r^2 = 4h^2$. Se duplicarmos somente o cateto, teremos $4r^2 + 4r^2 = h'^2 \Rightarrow 8r^2 = h'^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h' = \sqrt{8r^2} \Rightarrow h' = r.\sqrt{8} \Rightarrow h' = r.\sqrt{2^3} \Rightarrow h' = 2r\sqrt{2}$
No texto, $4h^2 = 8r^2$
$= (2h) = \sqrt{8r} = 2r\sqrt{2}$ ou seja
$h' = (2h)$

Fonte: Arquivo pessoal dos autores (GRUPO 2, 2019).

Como argumentos que defendem a possibilidade dessa duplicação, um estudante pontua que: “o triângulo 3, 4 e 5 que é um triângulo retângulo, os múltiplos também funcionam” (ALUNO 11, 2019). Ao perceber a dúvida de alguns discentes, a observadora indaga: “duplicar significar o que?”, um deles responde: “multiplicar por dois, vai ser um múltiplo do triângulo” (ALUNO 11, 2019) e outro complementa: “não seria lados proporcionais, não?” (ALUNO 3, 2019). Ao final da discussão sobre a impossibilidade de duplicação levantada, chegam-se à conclusão de que ela é possível, quem discordava afirma que: “[...] não estava certo, eu pensei em espelhar em 2 $\sqrt{2}$, só que $\sqrt{2}$ já está inserido no primeiro triângulo” (ALUNO 4, 2019).

Pelo exposto na figura 42, nota-se que, de fato, o Grupo 2 se equivocou ao tentar apresentar seu argumento contra tomando por base o teorema de pitágoras. Visto que, pelo contrário, com base nesse teorema, pode-se ver que realmente a duplicação é possível. Para o triângulo sem lados duplicados, tem-se $h^2 = r^2 + r^2$, o que implica que $h = r\sqrt{2}$, o mesmo é válido para o triângulo com lados duplicados, pois $(2h)^2 = (2r)^2 + (2r)^2$ implica em $h = r\sqrt{2}$.

Tábua circular como parte do instrumento jacente no plano

Como já destacado no segundo capítulo desta pesquisa, no texto de descrição do instrumento jacente no plano, Pedro Nunes instrui que se divida uma tábua circular em 360 graus. A partir do texto do quinhentista, todos os grupos da atividade apresentaram algumas compreensões sobre essa tábua circular incorporada no aparato, no quadro 9, a seguir, tem-se a transcrição literal do pontuado por cada grupo em seus relatórios.

Quadro 9 — Sobre a tábua circular.

Grupo	Função	Conhecimentos geométricos mobilizados	Justificativa para incorporação no instrumento
Grupo 1	Base para todo o instrumento e seus respectivos ponteiros.	- Círculo; - Ponto; - Diâmetro; - Semidiâmetro; - Quadrante; - Conhecimento de circunferência.	Fala-se de uma tábua circular no plano horizontal.
Grupo 2	Marcação da sombra.	- Circunferência; - Pontos; - Retas; - Ângulos.	Construção da mediatriz, posteriormente, a circunferência.
Grupo 3	-Base do instrumento; -Servia para os pontos cardinais, para a direção.	- Círculo; - Raio; - Diâmetro; - Graus; - Ângulos.	Para as pessoas terem noção de direção.
Grupo 4	Determinar os quadrantes em que a sombra vai se localizar para termos noção de perpendicularismo, exatidão e precisão.	- Círculos; - Ângulos; - Quadrantes; - Paralelismo.	-Para a projeção da sombra; -Facilidade no manuseamento; -Facilidade nos círculos (?).

Fonte: Arquivo dos autores (Relatório dos grupos, 2019).

Ao analisar essas considerações, percebe-se que, quanto à função da tábua, os discentes pontuam que ela serve não apenas para marcação da sombra, mas também como aparato para orientação acerca da direção. Essa compreensão extrapola as palavras da descrição de Pedro Nunes, visto que o lusitano fala apenas que, sobre ela, será projetada a sombra que indicará a altura do Sol. No diálogo a seguir, é possível observar como os discentes chegaram a tal conceituação.

> Aluno 9: “Para mim, eu acho que isso aqui indicaria, tipo ó. Eu acho que isso aqui seria tipo norte, sul, leste e oeste”.
> Aluna 8: “Tu acha que serviria para direção?
> Aluno 9: “Direção”.
> Aluno 9: “O sol nasce em qual direção?”
> Alenas 7 e 8: “Oeste e se põe leste”.
> Aluno 9: “O **b** seria o Oeste, então seria onde o Sol nasceria”.
> Aluno 9: “Em geografia, como é o nome disso aqui?”
> Aluna 7: “Em geografia?”
> Aluna 8: “Coordenadas”.
> Aluno 9: “Estávamos falando em matemática, já estamos em geografia”.
> Alunos 7, 8 e 9: “Pontos cardeais”.
> Aluno 9: “Eu acho que, para ser um instrumento e dividir em 4 quadrantes seria justamente norte, sul, leste e oeste, e tanto é que se o lado *BD*, se estivermos certo e o Sol realmente nascer a oeste”.
> Aluna 8: “é por isso que ele pede para usar o lado *BD*”.
> Aluna 8: Hum então tem uma **interdisciplinaridade** nesse instrumento ou não, ou a gente está viajando legal?”
> Aluno 9: “Isso não é um instrumento de navegação! Eu tenho quase certeza que isso vai servir como pontos cardeais” (GRUPO 3, 2019, grifo dos autores).

A partir dessas falas, nota-se que eles sustentam sua ideia tendo como base o contexto de elaboração do instrumento. Sobre esse contexto, sabe-se, a partir da obra em que o instrumento jacente no plano está inserido, que, de fato, ele foi concebido no ambiente da navegação. Nesse sentido, é justificada a compreensão para a tábua circular atribuída pelos discentes, haja vista ainda ter conhecimento que a determinação da direção para a navegação era um dos temas de conhecimento de Pedro Nunes. Um exemplo que atesta a ligação do quinhentista com esse conteúdo é a indicação da lâmina de sombras como forma de se conhecer a direção magnética do Sol (CANAS, 2011a; NUNES, 2012).

Também sobre esse diálogo, cabe destacar que a significação atribuída pelos discentes para a tábua circular não havia sido pensada anteriormente no decorrer do segundo capítulo desta pesquisa. Quando falam da possível associação do instrumento jacente no plano com a área de geografia, vê-se um dos três aspectos apontados por Saito e Dias (2013) sobre propostas que buscam articular história e ensino, em particular, o que se refere à interdisciplinaridade. Segundo Dias e Saito (2009, p. 8), ela “[...] tem se mostrado eficaz ao abordar o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, na medida em que os insere num contexto particular e estabelece relações com outras áreas do conhecimento científico, tecnológico e social”.

O estilete como parte do instrumento jacente no plano

Na descrição de Pedro Nunes sobre o instrumento jacente no plano, aqui discutida no segundo capítulo, observa-se que ele indica o uso do estilete para a versão do aparato na tábua circular e, de acordo com o autor, ele deve ser posicionado de forma perpendicular ao plano da tábua. Essa instrução desencadeou uma série de compreensões dos discentes ao analisarem o estilete no contexto geral do instrumento. No quadro 10, a seguir, tem-se a transcrição literal do apresentado por cada grupo em seus relatórios acerca dessa parte do instrumento jacente no plano.

Quadro 10 – Sobre o estilete.

Grupo	Função	Conhecimentos geométricos mobilizados	Justificativa para incorporação no instrumento
Grupo 1	Funciona como marcador.	- Ponto; - Reta.	No texto, é falado estilete como um ponteiro, onde adquire uma suma importância para a procura dos resultados
Grupo 2	Auxiliar no alinhamento da sombra sobre o diâmetro BD, pois o estilete ajuda no norteamento da direção do barco.	- Geometria plana e espacial; - Paralelismo entre planos e retas; - Perpendicularismo entre planos e retas.	Uso de planos perpendiculares à base para criação do estilete na reta de intersecção.
Grupo 3	Direcionamento para encontrar a altura.	- Perpendicularidade entre retas e planos.	- Sem o estilete, não conseguiríamos direcionar a sombra para o cálculo da altura.
Grupo 4	Alinhar a sombra à reta $\acute{BD}$ para fins de localização.	- Perpendicularismo; - Sobreposição.	Tem que projetar a sombra necessária para determinar o arco da circunferência

Fonte: Arquivo dos autores (Relatório dos grupos, 2019).

No que se refere à função e justificativa para incorporação do estilete no instrumento, nota-se que os grupos apontam ele como aparato auxiliador, responsável por projetar uma sombra sobre o segmento de reta *BD*. O diálogo interno de um dos grupos apresenta ainda mais compreensões sobre ele, são palavras de uma discente: “eu acho que o estilete é tipo uma referência para ti” (ALUNA 8, 2019), em resposta a essa colocação, outro apresenta seu entendimento, dizendo: “eu acho que o estilete seria tipo o observador, o estilete representaria a pessoa que está observando” (ALUNO 9, 2019).

Em relação ao posicionamento do estilete de forma perpendicular à tábua do instrumento, os discentes não apresentaram uma proposta para tal. Entretanto, como já observado anteriormente[47],

47 A referência feita, anteriormente, pelos discentes sobre a perpendicularidade de uma reta em relação a um plano, pode ser observada nos cinco parágrafos que antecedem a figura 42 do item: 5.1.1 O triângulo retângulo isósceles como parte do instrumento jacente no plano.

um dos discentes já se referiu indiretamente a essa possibilidade, isso quando estava a falar do perpendicularismo entre o triângulo e a tábua do instrumento. Na ocasião, ele recorreu à perpendicularidade de uma reta em relação a um plano.

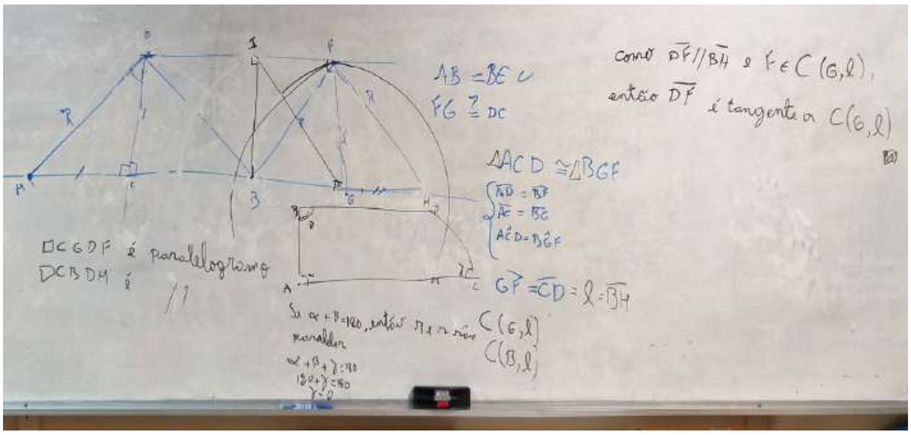
Partes adjacentes do instrumento jacente no plano

Nos relatórios individuais dos grupos, são mencionadas outras partes para o instrumento, o Grupo 4 indica a sombra e o Grupo 2 aponta o segmento de reta tangente e os segmentos de retas perpendiculares ao centro da circunferência. Quanto ao entendimento da sombra como uma parte, o grupo pontua que sua função é determinar distâncias e referências para estudo; sobre os conhecimentos geométricos incorporados, falam de sobreposição, projeção e arco de circunferência. Sobre a justificativa para sua incorporação, afirmam que: “sem a sombra não teríamos a existência de referenciais para o estudo” (GRUPO 4, 2019).

Sobre os segmentos de retas perpendiculares ao centro da circunferência, o Grupo 2 aponta que sua função é servir como: “retas de referência para a projeção das sombras e localização dos materiais” (GRUPO 2, 2019). Quanto aos conhecimentos geométricos incorporados listam: mediatriz, perpendicularismo, arco de circunferência, ângulos e arcos e ângulos suplementares. Como justificativa para a incorporação desses segmentos, falam da necessidade para criação da mediatriz e depois da circunferência.

Já em relação ao segmento de reta tangente, dizem que sua função consiste no: “alinhamento da sombra da reta $\acute{fg}$ ” (GRUPO 2, 2019). Como conhecimentos geométricos incorporados, pontuam: o ponto de tangência, paralelismo entre os segmentos de retas *AK* e *AD* e a construção da reta. Justificam sua necessidade no instrumento falando da criação de duas mediatrizes em uma mesma reta. Ainda sobre ela, fala-se sobre uma possibilidade para a sua construção:

> Eu tenho dois pontos *A* e *B*, aí eu vou colocar uma circunferência de raio *R*, coloco uma outra circunferência de raio *R*. Aqui é *R* por essa circunferência, *R* por essa circunferência de centro *A*. Tenho *R* por essa circunferência de centro *B*, daí vou colocar essa reta aqui, tenho esse lado em comum e dois triângulos *BCD* e *ACD*. É possível provar que eles são semelhantes, então esse lado é igual a estes, além disso esses lados são suplementares. Uma reta tangente é quando ela faz 90 graus, num ponto mais próximo, que ela seja ortogonal ao ponto mais próximo da circunferência, no caso o ponto mais próximo é exatamente o ponto de interseção. O que me garante que aqui seja 90 graus é que eu tenho lados opostos iguais e que essa distância *CG* seja igual a *FD*, mas quem garante que *FD* é igual a *CG*.



(ALUNO 4, 2019)

Em linhas gerais, o discente iniciou com a construção de uma reta e, a partir dela, faz a circunferência tangente a essa reta, ele iniciou com o inverso do que Pedro Nunes instrui no texto. Ele procura mostrar por absurdo que os segmentos *DF* e *CG* são paralelos, ainda, segundo sua explicação, como *DF//BH* e *F* é ponto de *C*(*G*, *L*), então o segmento *DF* é tangente à circunferência *C*(G, L).

Como se observa, essa estratégia utizada pelo discente preserva a condição necessária e suficiente indicada por Rezende e Queiroz (2008) para que uma reta seja tangente a uma circunferência. Isso porque se nota que o segmento de reta *DF* é perpendicular ao raio *L* da circunferência *C*(*G*, *L*), o qual liga o centro ao ponto de tangência.

Estudo do instrumento jacente no plano a partir da descrição de construção e uso de Pedro Nunes e de uma réplica física do instrumento

Como exposto no quadro 5 do capítulo anterior, no segundo dia de atividade, os estudantes tiveram como tarefa listar os conhecimentos geométricos mapeados e ainda anotar outras impressões sobre as partes e o funcionamento do instrumento, buscando formalizar matematicamente suas conclusões. De forma a favorecer a realização de tal instrução, foi indicado aos discentes que, a partir do instrumento físico na tábua quadrada e do texto em que Pedro Nunes traz a descrição da construção e uso do instrumento jacente no plano, buscassem tanto acompanhar e entender no que consiste o instrumento, procurando reconhecer e mapear conhecimentos geométricos, como também entender cada uma das partes do instrumento jacente no plano e para que servem (Cartão de atividade 02).

Desse episódio da atividade, foi possível extrair como unidades mínimas de análise o triângulo retângulo isósceles, a tábua circular/quadrada, a sombra e o segmento de reta tangente. Sobre elas, cabe destacar que, por vezes, não se consegue analisá-las de forma totalmente isolada, isso porque, nessa etapa da atividade, os discentes identificaram algumas relações e dependências entre elas.

O triângulo retângulo isósceles como parte do instrumento jacente no plano

O estudo dos discentes acerca do intrumento jacente no plano foram retomados com uma nova leitura no texto de Pedro Nunes. Após esse momento, tiveram acesso à réplica do instrumento jacente no plano, a intenção foi que, a partir dela, pudessem apresentar ainda mais significados às partes do instrumento, fomentando, assim, suas compreensões sobre o aparato. Durante as discusssões, os discentes voltaram a analisar a presença do triângulo retângulo isósceles no instrumento. No quadro 11 que se segue, tem-se a transcrição literal das considerações apresentadas pelos grupos em seus relatórios quanto ao referido triângulo.

Quadro 11 — Sobre o triângulo retângulo isósceles, compreensões do segundo dia de atividade.

Grupo	**Função**	**Conhecimentos geométricos mobilizados**	**Justificativa para incorporação no instrumento**
Grupo 1	Projeção, pois a partir dessa projeção, serão feitas as medidas.	- Ângulo; - Perpendicularidade; - Ângulo reto; - Classificação de triângulos; - Classificação de ângulos.	A necessidade da projeção, sem ele seria apenas uma tábua “quadrada”. O triângulo retângulo isósceles é perpendicular ao plano, porque $\hat{j}$ não está no plano e o ângulo possui 90º.
Grupo 2	Criar a sombra no objeto para análise da altura do Sol. Alinhamento com a reta referencial.	- Perpendicularismo de planos ângulos retos.	Mediatriz, transitividade das retas dos planos. Uso de um triângulo retângulo qualquer como referência ao terceiro plano.
Grupo 4	Projeção da sombra para análise do arco de circunferência dado.	- Perpendicularismo; - Triângulo retângulo isósceles; - Sobreposição; - Projeção.	Formação da sombra que sobrepões a reta tangente para a análise do arco.

Fonte: Arquivo dos autores (Relatório dos grupos, 2019).

Diante desse quadro, é possível observar que os discentes já apresentam ao triângulo retângulo isósceles ainda mais significados do que os pontuados no primeiro encontro da atividade. Como exemplo desse salto qualitativo, tem-se o fato da justificativa para incorporação desse triângulo no instrumento, em que já conseguem argumentar para além de uma consideração trivial, na qual se diz que, sem ele, não seria possível observar a medida procurada, haja visto não ter a projeção da sombra. Nesse momento, já conseguem compreendê-lo como uma referência dentro do funcionamento do instrumento e que ele deve ser responsável por projetar uma sombra sobre a reta tangente, que permitirá a análise do arco procurado. A figura 43, a seguir, ilustra esse exemplo.

Figura 43 — O triângulo retângulo isósceles e sua sombra sobre a tábua do instrumento.

Fonte: Arquivo pessoal dos autores (GRUPO 4, 2019).

Nessa ilustração, é possível observar o argumento que reforça o porquê de o triângulo *ACD* formado pela sombra ser retângulo, quando seu lado *AD* está sobre o segmento de reta tangente *AE*. A partir dessa constatação, conseguiram também apontar que, possivelmente, existe uma relação de semelhança entre o triângulo da sombra e o posto perpendicular à tábua, haja vista o lado *AC* ser comum aos dois triângulos e ambos possuírem um ângulo reto.

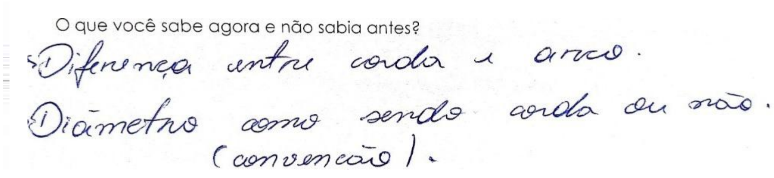
Durante o desenvolvimento da atividade, já de posse das réplicas do instrumento, os sujeitos passaram a analisar a instrução de Pedro Nunes de que a sombra *EK* do lado *EF* do Δ*AFE* cortará a circunferência na tábua do instrumento, indicando a medida do arco da altura do Sol acima do horizonte. Isso tanto para quando o Δ*AFE* tiver seus lados *AF* e *AE* congruentes ao semidiâmetro da circunferência, como também para o caso em que os lados *AF* e *AE* serão congruentes ao diâmetro da circunferência. Diante desse fato, emergiram discussões entre os discentes sobre a forma como conceituam o objeto arco e o objeto corda de circunferência. O diálogo teve início com a pergunta de uma discente ao professor, que, por sua vez, a lançou para toda a turma.

> Aluna 7: “O que é o arco da altura do Sol?”
> Professor: “Pessoal o que é o arco da altura do Sol, vocês podem ajudar ela?”
> Aluno 12: “É o arco que a sombra faz, agora o que significa eu não sei”.
> Aluna 7: “Eu sei que a sombra é o arco, mas o que é o arco?”
> Aluno 4: “Arco é uma parte de uma circunferência”.
> Aluna 8: “É uma corda, não eu ia falar que é uma corda”.
> Professor: “É uma corda como ela disse?”
> Aluna 8: “É não”.
> Aluno 4: “Não, corda é uma reta que se intersecta na circunferência em um ou dois pontos”.
> Aluna 8: “Não, o arco pode ser uma corda também, pode!”
> Aluna 7: “Pode!”
> Aluno 11: “Mas você não pode afirmar que uma parte do círculo é necessariamente um arco”.
> Professor: “Mas o arco pode ser uma corda?”
> Aluna 8: “Que eu lembre pode”!
> Aluno 4: “A corda é uma reta que intersecta a circunferência em até dois pontos, um ou dois pontos. Se for um ela tem o nome de tangente”.
> Aluna 1: “Mas não é o espaço entre esses dois pontos que tu estás falando que é a corda não!”
> Aluno 4: “É a corda!”
> Professor: “Então a corda pode ser o arco?”
> Aluno 11: “Não!”
> Aluna 7: “E o que é o arco se não pode ser a corda?”

> Aluno 4: "O arco é uma parte de circunferência".
> Aluna 5: "que é a corda!"
> Aluna 7: "Que é a corda!"
> Aluno 11: "Você não pode afirmar isso, não é uma parte de circunferência".
> Aluno 4: "A corda é a reta de intersecção".
> Aluna 7: "A corda num é o espaço entre o círculo e essa reta".
> Aluna 8: "A corda num é a ligação entre dois pontos em uma circunferência".
> Aluno 11: "É"!
> Aluno 3: "Mas tem que ser reto".
> Aluno 11: "É uma reta que liga dois pontos em uma circunferência que não inclua o ponto central".
> Aluno 4: "A corda é uma ligação entre dois pontos na menor distância".
> Aluno 11: "Que não inclua o ponto central".
> Aluno 4: "O arco é uma parte da circunferência".
> Aluno 11: "Mas não necessariamente é uma parte da circunferência".
> Aluna 7: "Então eu estudei corda o meu semestre todinho errado porque como eu entendi por corda foi isso aqui".
> Professor: "O arco é igual à corda?"
> Aluna 8: "Eu achava que era".
> Aluna 7: "Eu também achava que era".
> Aluno 11: "O arco vai ser a distância entre dois pontos da circunferência, percorrendo pela circunferência".
> Professor: "Existe uma definição de corda?"
> Aluno 4: "É um segmento de reta dentro da circunferência que liga dois pontos".
> Aluno 11: "Que não inclua o ponto central, que aí seria o diâmetro".
> Aluno 3: "Pode incluir".
> Aluno 4: "Pode incluir, se incluir é o diâmetro, o diâmetro é a maior corda".
> Aluno 11: "Dependendo do livro ele diferencia, tem livros que diferenciam o diâmetro da corda, ele coloca que a corda são a distância dos pontos que não inclua o ponto central".
> Aluno 3: "Então, no caso vai ser que nem os números naturais, tem livro que inclui o zero e outros não".
> Aluno 11: "É, é uma questão de autor, mas tem livro que considera que não tem que incluir o ponto central, por que se incluir vira diâmetro. Aí você coloca como o diâmetro. Que diâmetro vai ser a distância de dois pontos da circunferência que inclui o centro".
> Aluno 4: "O diâmetro é a maior corda da circunferência".
> Aluno 4: "Pois é, mas depende de autor, tem autor que não considera".
> Professor: "O que é o arco para vocês, diante das discussões?"
> Aluna 7: "O arco para mim é uma parte da circunferência, a parte externa, o contorno da circunferência".
> Aluno 12: "O contorno do setor circular, né!"
> Aluno 11: "Uma parte do comprimento, que quando você bota o comprimento você não inclui a área".
> [...]
> Aluno 4: "Corda é um segmento de reta, que liga dois pontos da circunferência. Arco é uma ligação entre dois pontos na circunferência.
> Aluna 8: "Agora faz sentido!" (GRUPO 1; GRUPO 2, GRUPO 3; GRUPO 4, 2019).

Nesse diálogo, percebe-se que alguns discentes ainda não conceituavam o objeto corda e arco da forma como a matemática significa esses conhecimentos. A discussão fez os participantes recorrerem a conhecimentos prévios e a eles atribuírem mais significados, favorecendo, dessa forma, a reconfiguração desses objetos. As expressões "eu achava que era" e, posteriormente, "agora faz sentido" ilustram esse salto qualitativo em relação à compreensão deles. Corrobora, do mesmo modo, para esse novo status de conhecimento, o fato de um participante fazer a seguinte colocação na ficha de avaliação diária preenchida ao final desse segundo dia de atividade (figura 44):

Figura 44 — Percepção de um discente sobre sua aprendizagem.


O que você sabe agora e não sabia antes?

1) Diferença entre corda e arco.

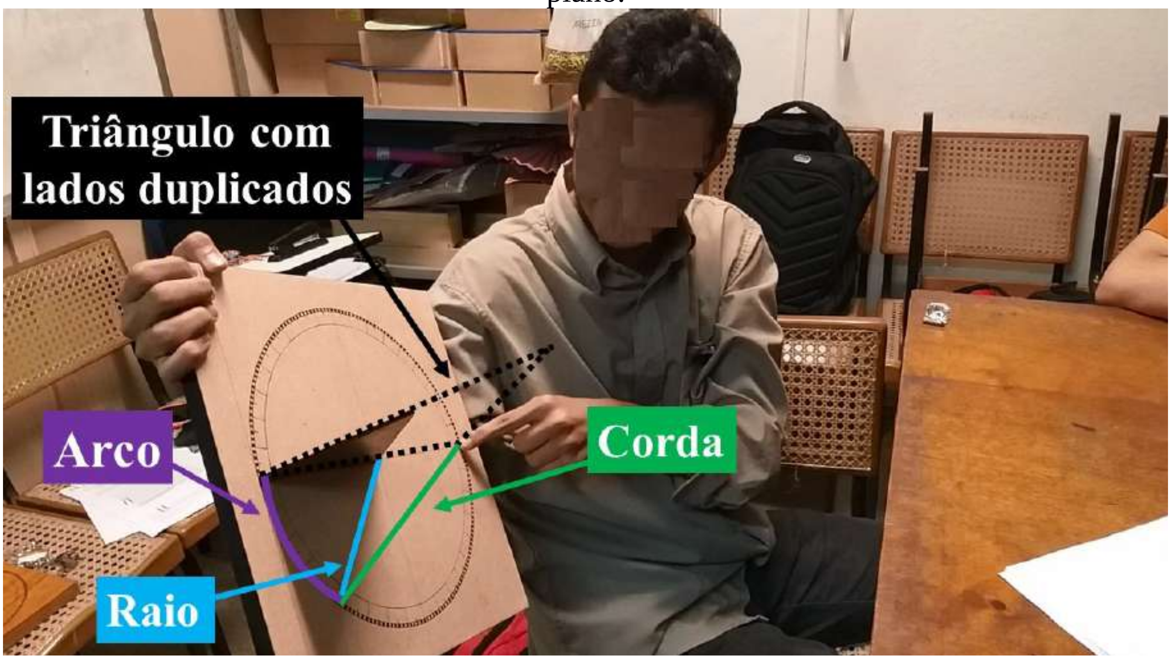
1) Diâmetro como sendo corda ou não. (convenção).

Fonte: Acervo pessoal dos autores (2019).

Diante dessas considerações, nota-se que, com efeito, o diálogo levou a compreender ainda mais a noção de arco e corda. Vê-se que o sujeito passou a visualizar que definir o diâmetro como uma corda ou não é apenas uma convenção, pois, como pontuado na discussão, existem autores que apontam o diâmetro como sendo a maior corda de uma circunferência.

Na imagem a seguir, buscou-se ilustrar, no instrumento jacente no plano, o que nele desencadeou a referida discussão acerca dos objetos geométricos corda e arco (figura 45).

Figura 45 — O trabalho com os objetos corda e arcos de circunferência no instrumento jacente no plano.

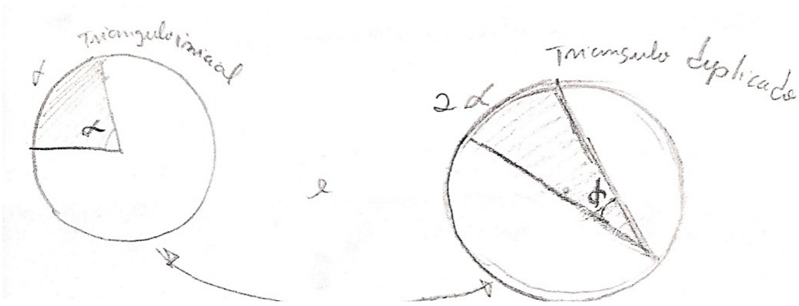


Fonte: Acervo pessoal dos autores (2019).

Nessa ilustração, é possível observar por que o instrumento jacente no plano potencializou a referida discussão. Quando o triângulo retângulo isósceles *AFE* tem como lado o semidiâmetro da circunferência, a sombra *EK* projetada por sua hipotenusa *EF* indica pelo traço sobre a circunferência o semidiâmetro, que, por sua vez, mostra a divisão do quadrante *AEB* em dois arcos (um que representa a medida da altura do Sol acima do horizonte e o outro a medida do ângulo do Sol ao zênite).

Com seus lados duplicados, o triângulo retângulo isósceles *AFE* passa a ter como lado o diâmetro da circunferência, nessa situação, a sombra projetada por sua hipotenusa pode ser compreendida como uma corda da circunferência. Também sobre essa segunda situação, um discente pontua que:

> [...] quando tu está trabalhando com circunferência, quando tu pega o centro daqui para cá é o α , essa separação é α . Quando tu aumenta isso aqui ó, aqui vai ser α dividido por 2. Arco de Circunferência. Quando tu aumenta para uma borda, tu aumenta o ângulo que vai formar lá, então é por isso que agora, como está vindo daqui para cá fica esse arco aqui agora



(ALUNO 11, 2019).

Nesse argumento, o discente está buscando justificar o porquê de os ângulos da altura do Sol serem duplamente maiores, como destacou Pedro Nunes, isso quando o Δ*AFE* estiver com seus lados duplicados. O que o estudante destacou vai ao encontro do que foi elucidado no segundo capítulo com base na vigésima proposição apresentada por Euclides em seu terceiro livro dos *Elementos*. Ou seja, que: “em um círculo, o ângulo junto ao centro é o dobro do sobre a circunferência, quando os ângulos tenham a mesma circunferência como base” (EUCLIDES, 2009, p. 169).

Ademais, entende-se que a necessidade dos discentes em compreender o Δ*AFE* e suas possíveis configurações (seus lados *AF* e *AE* congruentes ao semidiâmetro ou ao diâmetro da circunferência) dentro do funcionamento do instrumento, fê-los recorrer a alguns conceitos geométricos como diâmetro e segmento de reta para reconfigurar alguns objetos geométricos, como, por exemplo, os de corda e arco de circunferência.

A tábua circular/quadrada como parte do instrumento jacente no plano

Sobre essa unidade mínima de análise, vale destacar que, com a expressão “circular/quadrada”, tem-se a intenção de chamar atenção para o fato da dificuldade apresentada pelos discentes em compreender a forma física do instrumento, principalmente, quando Pedro Nunes passa a falar da versão na forma quadrada. Como se pode observar na figura 41, referente aos dados do primeiro dia de atividade, os estudantes até chegaram a apresentar um esboço físico do instrumento, em particular, para a configuração na tábua circular, pois ambos tentam representar o estilete.

Dentre as formas físicas do instrumento imaginadas pelos discentes, para sua versão na forma quadrada que Pedro Nunes instrui, eles chegaram a pensar que o triângulo deveria ser substituído por um quadrado (tendo, assim, um quadrado de lado igual ao semidiâmetro). Contudo, contra essa possibilidade de configuração, já no primeiro dia de atividade, um aluno destacou, em defesa da permanência do triângulo, que: “com a hipotenusa dele fica mais fácil para a gente ver o movimento pelas pontas, porque se fosse um quadrado ele teria uma outra ponta, e poderia ser que em algum momento essa ponta se escondesse na sombra” (ALUNO 4, 2019).

Essa justificativa, para permanência do triângulo, vai ao encontro do que foi previsto no terceiro cartão de hipóteses, em que também se considerou a possibilidade do triângulo ser substituído por um quadrado. Com efeito, compreende-se que um quadrado dificultaria a observação das medidas dos graus na circunferência, pois, para obtê-la, ainda seria necessário fazer uso de um outro aparato retilíneo que possibilitasse ligar o ponto *K* superior da sombra sobre a tábua com o ponto *E* ao centro da circunferência, assim, poder-se-ia visualizar na circunferência a medida da altura em que o Sol se encontra acima do plano do horizonte (uma ilustração dessa situação pode ser observada no cartão de hipóteses 03).

Aos poucos, eles foram reajustando suas ideias sobre a configuração do instrumento na forma quadrada. Antes mesmo de apresentar a réplica do aparato aos discentes, eles já haviam imaginado de forma correta como ficaria a forma física do instrumento. Isso pode ser observado no seguinte diálogo:

> Aluno 11: “Por exemplo, está aqui o círculo, se eu deixar esse círculo reto, como é que eu vou construir uma reta tangente no ar? E imaginar essa reta com uma sombra nela”.
> Aluno 12: “essa reta é imaginária não?”
> Aluno 11: “Não, eu acho que deve ter, não, não sei, mas eu acho que deve ter algum plano aqui por trás. Porque como é que eu vou projetar uma coisa numa reta imaginária, uma sombra. Essa tábua aqui de trás, talvez está contando na história e ela seja quadrada. Não dá para projetar um negócio no vento, tem que começar onde está projetando” (GRUPO 4, 2019).

Essa dificuldade de interpretação do texto de Pedro Nunes talvez tenha influenciado a fragmentação dos elementos dessa tábua. Em seus relatórios, os grupos apresentam como partes do instrumento jacente no plano: a tábua circular, o segmento de reta da circunferência, a tábua quadrada e a parte (desenho) circular da tábua. No quadro 12, a seguir, expõe-se a transcrição literal dos relatórios dos discentes sobre a compreensão acerca dessas partes.

Quadro 12 — Sobre a tábua circular/quadrada do instrumento jacente no plano.

Partes	Grupo	Função	Conhecimentos geométricos mobilizados	Justificativa para incorporação no instrumento
TÁBUA CIRCULAR	Grupo 2	Marcador da sombra.	- Circunferência; - Diâmetro; - Ângulos; - Arcos.	Criação de mediatriz e circunferência com centro no ponto de intersecção.
SEGMENTO DE RETA DA CIRCUNFE-RÊNCIA	Grupo 2	Parâmetro do triângulo à circunferência.	- Mediatrizes; - Perpendicularismo; - Planificador.	Criação da mediatriz.
TÁBUA QUADRADA	Grupo 1	Parâmetro do triângulo à circunferência.	- Figuras geométricas; - Definição de quadrado.	No texto já havia sido abordado, com o instrumento ele não é mais hipótese e sim algo concreto. Pode ser abordado com um plano (x) onde o círculo e o segmento ak estão contidos.
	Grupo 4	Possibilitar a construção da reta tangente. Garantir paralelismo (??). Dispensar o uso do estilete.	- Tangenciamento; Paralelismo (com relação ao horizonte).	Dispensa do estilete e facilitação do uso de instrumento, graças à construção de uma reta tangente.
PARTE (DESENHO) CIRCULAR DA TÁBUA	Grupo 1	Auxiliar nas medidas.	- Círculo; - Raio; - Diâmetro; - Cordas; - Setor circular; - Trigonometria; - Divisão de graus.	Desde o começo do texto, ele fala sobre um círculo e aborda as 360 partes. Onde essas partes são subdivididas em quadrantes em 9 partes iguais (ou 90).
	Grupo 4	Identificar os graus (semi-divisão em 36 partes de 10º e 360 partes de 1º). Posicionamento do triângulo e projeção e análise das sombras.	- Arco de circunferência; - Angulação; - Sobreposição; - Paralelismo (horizonte); - Trigonometria; - Diâmetro e semidiâmetro.	Facilitação compreensão dos ângulos e formação dos arcos.

Fonte: Arquivo dos autores (Relatório dos grupos, 2019).

Como se pode observar nesse quadro, o Grupo 2, apesar de já reconhecer que a forma quadrada a que Pedro Nunes se refere diz respeito à tábua do instrumento, seus integrantes ainda pontuam a tábua circular e o segmento de reta da circunferência. Uma justificativa, para tanto, pode estar associada ao movimento do pensamento de um desses discentes, em especial, o que diz no seguinte diálogo:

> Aluno 4: “Eu pensei assim, criei um plano circular, agora como é que eu vou fazer as retas perpendiculares. Eu pensei, assim é mais difícil, porque que eu não começo com essas retas e crio um plano circular, tábua circular encima dessas retas que é mais fácil”.
> Professor: “Por que seria mais fácil?”
> Aluno 4: “Como eu mostrei na aula de ontem, eu criei a mediatriz com muita facilidade, porque é, eu só tinha uma reta, uma reta única, uma reta qualquer, no caso eu teria uma reta *AC*, aí eu coloquei pontos, os pontos *A* e *C* e fui criando distâncias iguais, aí pronto eu encontrei a reta em que *BD* esteja lá. Aí eu pego a intersecção e faço a circunferência do raio que ele quiser. Pronto, agora eu tenho uma circunferência dentro da mediatriz” (ALUNO 4, 2019).

Nesse sentido, entende-se que o referido aluno trata da tábua circular e do segmento de reta da circunferência como forma de destacar uma conveniência na ordem de construção. Pelo pontuado na fala desse discente, nota-se que ele entende que seja mais fácil construir, inicialmente, um segmento de reta e traçar sua mediatriz (o que, na concepção dele, seria uma parte do instrumento). Em sequência, construir-se-ia o plano circular (o que também, na concepção dele, seria outra parte).

No quadro 12, igualmente, pode-se observar que os discentes também apontam a tábua quadrada e a parte circular (desenho) da tábua como partes do instrumento jacente no plano. A esse respeito, cabe destacar que os discentes, ao analisarem a réplica do instrumento a partir da descrição de Pedro Nunes, demonstraram um certo conforto, visto terem confirmado muitas das hipóteses levantadas anteriormente.

A sombra como parte do instrumento jacente no plano

Como se pode observar no primeiro episódio, o Grupo 4 foi o único a apresentar a sombra como uma parte do instrumento jacente no plano. Nesse segundo dia de atividade, mais dois grupos passaram a reconhecê-la dessa forma. Uma justificativa, para isso, é que a réplica do aparato tenha potencializado uma reflexão sobre a possibilidade de uso do instrumento. A seguir, expõe-se a transcrição literal dos relatórios dos grupos sobre os significados que atribuem à sombra (quadro 13).

Quadro 13 — Sobre a sombra projetada pelo triângulo retângulo isósceles.

Partes	Grupo	Função	Conhecimentos geométricos mobilizados	Justificativa para incorporação no instrumento
SOMBRA	**Grupo 1**	Indicar a altura do Sol procurada.	- Ângulo; - Ângulo entre duas retas; - Ângulos opostos pelo vértice; - Congruência de triângulos; - Arcos e ângulos.	Como a sombra é uma projeção do Δfgh, adotamos a mesma para medir ou concluir o que procuramos a partir de onde ela indica no plano e também como indica no segmento ak.

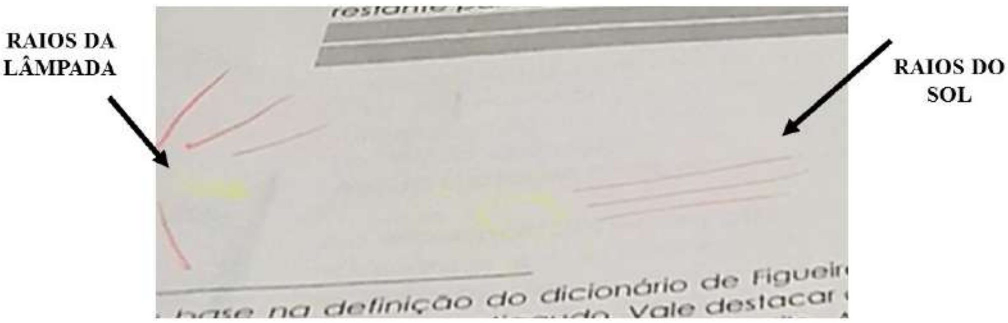
	Grupo 2	Indicador das distâncias do Sol ao horizonte e ao zênite.	- Projeção entre planos; - Perpendicularismo.	Projetores algébricos e espaciais.
	Grupo 4	Projetar o arco para estudo e análise.	- Sobreposição; - Coplanaridade; - Arco de circunferência; - Homotetia; - Projeção.	Formação do arco de circunferência.

Fonte: Arquivo dos autores (Relatório dos grupos, 2019).

Comparando o conteúdo desse quadro com as considerações sobre a sombra apresentadas no primeiro episódio, nota-se um salto qualitativo na compreensão da sua essência como parte do instrumento. Por exemplo, anteriormente, haviam justificado que ela estava incorporada no aparato pelo simples fato de que, sem ela, não se teria a referência para estudo. Nesse segundo dia, já conseguem atribuir à ela a função de parte indicadora do arco da altura do Sol e, também, no que se refere aos conhecimentos mobilizados nela, destacam ainda mais, como no caso da projeção entre planos, coplanaridade, arcos e ângulos, e homotetia.

Em relação à homotetia, cabe destacar que esse tema emergiu da reflexão de um discente, ao lembrar que, pela distância do Sol em relação à terra, seus raios solares chegam à terra quase que paralelos. Nas palavras dele, acontece o: “seguinte, lâmpada, Sol. A luz da lâmpada, ela segue esse formato aqui ó. As retas não são paralelas, perpendiculares. A do Sol não, porque a distância é tão grande que chega um ponto que elas ficam paralelas” (ALUNO 11, 2019). A esse respeito, veja a seguinte ilustração feita pelo aluno (Figura 46):

Figura 46 — Sobre os raios da luz de uma lâmpada e do Sol.



Fonte: Acervo pessoal dos autores (2019).

No tocante a isso, o discente pontua que ficou na: “dúvida se essa projeção tinha alguma coisa a ver com homotetia, que você vai ter um ponto de homotetia vai ter a projeção e você vai ter uma nova figura projetada” (ALUNO 11, 2019). Mas, na sua conclusão, destaca que: “a gente tem o astro celeste que é o sol, ele vai ser o ponto de luz, e a gente vai ter a projeção de uma nova figura.

Se a gente for levar em consideração que pela distância do Sol os raios ficam quase que paralelos, a gente vai ter uma homotetia bem construída” (ALUNO 11, 2019).

Segundo Rezende e Queiroz (2008), a homotetia entre figuras está condicionada à conservação de sua forma e à existência de uma semelhança entre elas. Desse modo, entende-se que não se tem uma homotetia entre o triângulo *AFE* posto perpendicular sobre a tábua do instrumento e o triângulo *AKE* formado pela sombra que se apresenta sobre a tábua, isso porque o triângulo retângulo da sombra, a depender do horário de realização da medida, varia a medida de seus ângulos agudos, enquanto que o triângulo inicial tem seus ângulos fixos com medidas de 90°, 45º e 45°.

Nesse sentido, ter-se-ia uma homotetia formada apenas quando o ΔAKE da sombra tivesse seus ângulos com medidas de 90°, 45° e 45°, o que o tornaria congruente ao ΔAFE que está perpendicular à tábua. Ainda sobre a suposta homotetia, como forma de explorar mais o pensamento do discente, a observadora fez a seguinte indagação: “nesses raios paralelos, quais os conhecimentos matemáticos incorporados?”. Em resposta, ele diz:

> Eu só lembro de homotetia, porque em homotetia se você tiver [...] as retas referenciais de uma homotetia elas precisam serem perpendiculares, perpendiculares não, concorrentes porque senão você nunca vai ter uma homotetia formada, uma vez que vai ser sempre a mesma razão, ele vai ter um mesmo desenho eternamente, mas quase paralelos com uma razão mínima de inclinação que é a ideia do Sol. Então você vai ter um desenho deformado por questão de inclinação do próprio plano, mas você ainda vai ter uma noção da figura. Aí eu fiquei viajando nisso aí como é que seria, porque eu estava vendo a pouco tempo atrás, uma diferença, como é que fica quando a imagem do Sol, não uma janela numa casa, a luz do Sol refletindo na janela e a sombra dentro de casa, ficam todos os quadradinhos da janela, eles continuam retangulares. Quando é a luz da casa refletindo para fora a noite já que a luz está mais próxima e tem essa questão, os quadrados deixam de ser mais retangulares e se tornam trapézios. Por causa que você já começa a investigar bem certinhos os desenhos e eles começam a inclinar. Ai talvez isso tenha alguma importância com essa sombra que vai ser projetada (ALUNO 11, 2019).

Nesse exemplo, verifica-se que compreender a sombra do ΔAFE projetada na tábua como parte do instrumento, levou o discente a recorrer e refletir sobre o conceito de homotetia. No seu movimento do pensamento para atribuir significado à sombra, ele estabeleceu um diálogo entre teoria e prática, isso porque buscou basear as suas considerações a partir de uma situação prática (o caso da luz de uma lâmpada e do Sol sobre uma janela aberta).

O segmento de reta tangente como parte do instrumento jacente no plano

No segundo episódio, o segmento de reta tangente emergiu com expressividade nas discussões e reflexões dos sujeitos, certamente, isso se deve ao fato dele se relacionar com outras partes do instrumento jacente no plano. Possui relações, por exemplo, com a circunferência, haja vista estar tangente à ela, com o triângulo da sombra projetado sobre a tábua do instrumento e, ainda, com a dispensa do estilete. Sobre o seu entendimento como uma parte do referido instrumento, no quadro 14, a seguir, tem-se a transcrição literal do destacado pelos grupos de alunos nos relatórios da atividade.

Quadro 14 — Sobre o segmento de reta tangente.

Partes	Grupo	Função	Conhecimentos geométricos mobilizados	Justificativa para incorporação no instrumento
SEGMENTO DE RETA TANGENTE	**Grupo 1**	Marcador, delimitar a sombra.	Paralelismo onde o segmento ak é paralelo ao segmento bd (diâmetro da circunferência), pois elas não possuem pontos em comum e o segmento ak está contido no plano.	A perpendicularidade é marcada pelo triângulo e não pela tangente, sendo ela necessária foi colocada rente ao plano, pois até mesmo na descrição ela se fazia necessária.
	Grupo 2	Alinhamento da sombra, servir de parâmetro.	- Tangenciamento; - Paralelismo; - Construção da reta perpendicular ao triângulo.	Mediatriz paralelas e equidistância entre pontos.
	Grupo 3	Alinhar a sombra de af com ak.	- Arcos de circunferência; - Tangenciamento; - Pontos na reta.	Com a reta tangente, o triângulo (sombra) fica alinhado formando 90º graus.
	Grupo 4	"Alinhar" a sombra de forma sobreposta e descartar o estilete	- Tangenciamento; - Paralelismo; - Perpendicularismo; - Sobreposição.	Garantir alinhamento.

Fonte: Arquivo dos autores (Relatório dos grupos, 2019).

No que se refere à função do segmento de reta tangente, ao se comparar o conteúdo desse quadro com a consideração apresentada no primeiro episódio, é possível observar um salto qualitativo na interpretação e entendimento dos discentes. Nesse momento, não a concebem apenas como elemento isolado responsável pelo alinhamento da sombra, já conseguem dar significado à sua relação com a dispensa do estilete e, também, notam a sua relação com o diâmetro da circunferência e com o lado *FG* do ΔAFE que está perpendicular à tábua.

Sobre o desenho desse segmento de reta na tábua quadrada, um discente conceitua que: "a reta não tem dimensão exata, no máximo, pode ser representada por uma linha" (ALUNO 4, 2019). No que se refere à sua função no instrumento, destacam que: "a reta tangente substitui o estilete, já que ela mesma garante a perpendicularidade da sombra projetada pelo triângulo, uma vez que a tangente é perpendicular ao raio da circunferência, que é um lado do triângulo" (GRUPO 4, 2019). No diálogo a seguir, veem-se indícios do movimento do pensamento que levaram à tal conclusão.

> Aluno 4: "A sombra ela não vai mudar muito, não vai interferir, se eu deixar a reta, a ponta da sombra em relação ao *F* constante, ela não vai interferir.
> Observadora: "Essa ponta vai projetar aonde?"
> Aluno 4: "Sempre na reta tangente, ou seja, se o *F* tivesse num ponto infinito da reta, o Sol ainda estaria saindo do horizonte, ele estaria no horizonte, a sombra ia ser projetada lá em baixo. E a medida que o Sol vai vindo essa ponta vai vindo também e, o ângulo vai reduzindo".

> Aluna 1: “Então no caso o ponto *F* seria eu mover o estilete”.
> Aluno 4: “O ponto *F* seria o estilete, o estilete saindo da *BD* e foi para *F*”.
> Aluna 1: “Ele fala que a tangente está no ponto *A* né, mas ele fala que é a reta *AK*, mas só que está andando o meu *K*, então eu posso andar meu *F*, então a minha sombra vai mudar, né!”
> Aluno 4: “É porque, tipo o meu estilete ele não ficava sempre projetando no *BD*, se eu mudo o estilete para o *A*, a minha reta *BD* vai ter uma paralela lá, essa paralela é exatamente a reta tangente, o estilete é exatamente esse cateto do triângulo (GRUPO 1; GRUPO 2, 2019).

Como se observa, o discente aponta que a função do estilete é posicionar a sombra do lado *FG* do triângulo *FGH*, de tal forma que *FG* fique perpendicular ao semidiâmetro da circunferência e, consequentemente, seja paralelo ao segmento de reta *EB* (semidiâmetro da circunferência). Elas são realmente paralelas, visto essas retas distintas serem ambas perpendiculares ao semidiâmetro *AE*, teorema no qual Rezende e Queiroz (2008) apresentam como condição de paralelismo entre retas.

Pelo apresentado nesse diálogo, entrende-se que o segmento de reta tangente não, necessariamente, dispensa o uso do estilete, mas apenas o faz coincidir com o cateto *FG* do triângulo *FGH*. No tocante a isso, cabe destacar que, da articulação do segmento de reta tangente com a sombra projetada pelo ΔFGH, o qual está perpendicular à tábua do instrumento, como se observou na seção anterior, os estudantes já haviam indicado que o alinhamento da sombra do segmento de reta *FG* sobre o segmento *AK* tornaria a sombra um triângulo retângulo. Entretando, ainda lhes faltam apresentar argumentos que justifiquem o porquê dessa necessidade para a determinação da medida da altura do Sol acima do horizonte.

Estudo do uso do instrumento jacente no plano

Nesse episódio, como já indicado no quadro 5 do capítulo anterior, os discentes tiveram como tarefa listar os conhecimentos geométricos mobilizados na situação de uso e também anotar outras impressões sobre as partes do instrumento (Cartão de atividade 03 – Apêncice H). De forma a favorecer a realização de tais instruções, foi indicado aos alunos que, a partir do instrumento (físico) na forma quadrada e ainda da possível situação de que João Baptista Lavanha (c.1550–1624) poderia ter realizado (cartão de recursos 02), cumprissem os seguintes momentos: compreender a situação atribuída a João Baptista Lavanha, efetuar a medida da altura do Sol acima do horizonte e acompanhar e entender no que consiste o instrumento.

Apesar de Pedro Nunes não trazer a indicação de uma situação de uso para o instrumento, decidiu-se elaborar e propor uma situação de uso com o instrumento jacente no plano. A justificativa, para isso, é que essa pesquisa está ancorada na proposta de construção de interface entre história e ensino da matemática com um instrumento matemático histórico, em que se consideram tanto questões históricas como didáticas. Diante dessa abordagem de estudo, entende-se que “[...] o conhecimento matemático mobilizado na construção do instrumento está intimamente relacionado ao seu uso, o que aponta para indissociabilidade entre o saber e o fazer” (DIAS; SAITO, 2010, p. 04).

Nessa perspectiva, compreende-se que uma proposta, em que se valorize a articulação entre a situação de uso e o estudo da construção de um instrumento, pode, possivelmente, potencializar tanto a mobilização e articulação de conhecimentos do passado e presente, como também favorecer o desenvolvimento de uma compreensão ampla, tanto da rede de conhecimentos incorporados como do funcionamento do aparato.

Pela atividade, até aqui discutida, sobre o estudo do instrumento jacente no plano, já é possível observar essa necessidade de articulação entre a construção e uso e também entre passado e presente. Essa necessidade está ilustrada nas seguintes colocações dos discentes, apresentadas na ficha de avaliação diária e no relatório do segundo dia da atividade (quadro 15).

Quadro 15 — Necessidades/dúvidas dos discentes.

Quando indagados na ficha individual de avaliação diária do que eles precisam.	**No relatório do Grupo 4**
- Utilizar o instrumento na prática; - Utilizar o instrumento na prática; - Da aplicação do instrumento para uma melhor compreensão do uso; - De utilizar o instrumento em campo; - Informações sobre o uso prático do instrumento e que o construiu (tirar do papel).	- O instrumento foi utilizado em navegação? Paralelismo, falta de precisão no mar. - Será que ele foi realmente utilizado? - Foi algo só teórico? - Os navegantes sabiam utilizá-lo?

Fonte: Arquivo dos autores (Relatório dos grupos, 2019).

Nesse quadro, em relação ao que os discentes julgam que ainda precisam conhecer, nota-se que eles associam o uso do instrumento como uma condição necessária para compreensão do aparato. Já os questionamentos do Grupo 4 apontam para a necessidade de se conhecer elementos do contexto de elaboração do instrumento jacente no plano. Pelo desenvolvimento da atividade, compreende-se que essas dúvidas emergiram da dificuldade de articulação entre os conhecimentos que detinham e os necessários para o uso do instrumento.

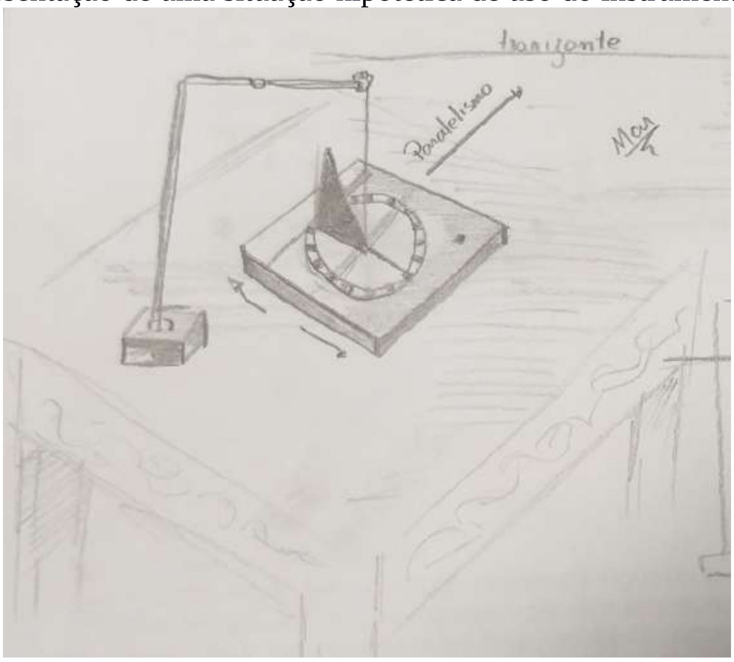
A seguir, discute-se o terceiro episódio, no qual foram elencadas como partes do instrumento jacente no plano (unidades mínimas de análise) a tábua quadrada e o triângulo retângulo isósceles. Diante da situação de uso, o segmento de reta tangente e a sombra são estudados em conjunto com o referido triângulo. Sobre eles, cabe destacar que, por vezes, não se consegue analisá-los de forma totalmente isolada, isso porque, nessa etapa final da atividade, os discentes identificam também outras relações e dependências entre essas partes.

A tábua quadrada como parte do instrumento jacente no plano

Pela instrução de Pedro Nunes, sabe-se que, para obter a altura do Sol acima do horizonte, a tábua do instrumento deve estar paralela ao plano do horizonte. A necessidade desse posicionamento impulsionou uma série de discussões e reflexões dos discentes, as quais lhes possibilitaram atribuir mais significado a determinados conhecimentos geométricos.

A primeira ação dos discentes, voltada ao uso do instrumento, teve início ainda na sala de aula, durante um momento concedido para que pudessem tanto selecionar alguns objetos auxiliares disponíveis na mesa de recursos e para que pensassem, previamente, em uma estratégia para uso do instrumento. Como já indicado no terceiro capítulo, estavam disponíveis na mesa: esquadros, nível de bolha, uma mangueira e uma garrafa com água usados em aferimento do nível, fios de prumos, barbantes e compassos. Sobre a ideia inicial dos estudantes para uso do instrumento jacente no plano, tem-se o seguinte exemplo (Figura 47):

Figura 47 — Representação de uma situação hipotética de uso do instrumento jacente no plano.

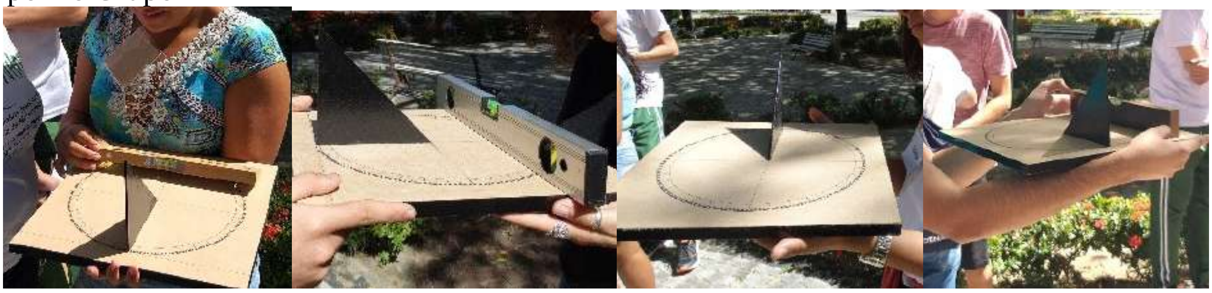


Fonte: Acervo pessoal dos autores (GRUPO 4, 2019).

Essa ilustração aponta a ideia do Grupo 4, a proposta deles era pôr um fio no centro do instrumento, de forma que ele sustentasse o aparato suspenso em relação ao solo. Em defesa dessa estratégia, afirmam que, se assim conseguissem erguê-lo, "[...] de modo que esse lado esteja com o mesmo peso desse lado, colocando um objeto de peso equivalente a esse triângulo aqui. Da balança, se for desconsiderar as ações naturais que a gente tem, o vento, essas coisas assim, ele vai ficar totalmente equilibrado" (ALUNO 11, 2019).

Feitas essas primeiras suposições para o uso do instrumento, foi-se à praça da rotatória da UECE para que pudessem realizar a medida da altura do Sol acima do horizonte. Já na praça, quase de modo automático, todos os grupos realizaram uma primeira medição. No entanto, a forma como posicionaram o instrumento foi questionada pelo professor e observadora acerca da sua validade. A seguir, tem-se a forma como posicionaram o instrumento (figura 48):

Figura 48 — Da direita para a esquerda: Primeira medição com o instrumento do Grupo 4, Grupo 3, Grupo 2 e Grupo 1



Fonte: Arquivo pessoal dos autores (GRUPO 1; GRUPO 2; GRUPO 3; GRUPO 4, 2019).

Como se pode observar, estavam tentando posicionar o instrumento paralelo ao plano do horizonte apenas com o uso das mãos e, em alguns casos, com o nível de bolhas. Dessa situação, compreende-se que, dificilmente, eles conseguiriam estabilizá-lo e, posteriormente, girá-lo para o posicionamento correto da sombra, de maneira que se mantivesse o suposto paralelismo da tábua com o plano do horizonte. Nesse sentido, foram questionados se dessa forma eles conseguiriam garantir a instrução de Pedro Nunes de manter a tábua paralela ao plano do horizonte.

Todos os grupos chegaram à conclusão de que não era possível, segurando o instrumento com as mãos, garantir esse paralelismo entre a tábua do instrumento e o plano do horizonte. A partir de então, passaram a refletir sobre uma estratégia que os garantissem cumprir a instrução do quinhentista. Diante desse desafio, foram desencadeadas algumas reflexões dos alunos, as quais, em determinados momentos, levaram-lhes a algumas dúvidas que, posteriormente, pela intensificação das ações, possibilitaram-lhes ressignificar e reconfigurar alguns conceitos.

Um exemplo desses momentos de dúvida refere-se ao posicionamento da tábua do instrumento de forma paralela ao plano do horizonte. Diante do instrumento em suas mãos, concebendo a tábua do instrumento como um plano, surgiu então a dúvida sobre o que seria esse segundo plano (plano do horizonte). No diálogo, a seguir, pode-se observar esse fato:

> Aluna 7: "O problema não é a posição, é porque que quando você acha ele paralelo, você acha a posição certa, só que a gente não está sabendo botar paralelo".
> Aluna 8: "Não a gente encontrou o paralelo ao horizonte só que a gente não sabe justificar".
> Aluna 7: "Aluna 8 o que é o horizonte?"
> Professor: "Se vocês estivessem na geometria, como vocês iam garantir que os planos estariam paralelos?" [...]
> Aluna 8: "Para os planos estarem paralelos uma condição é não ter nenhuma reta em comum, e qual é a outra condição que tu falou Aluna 7".

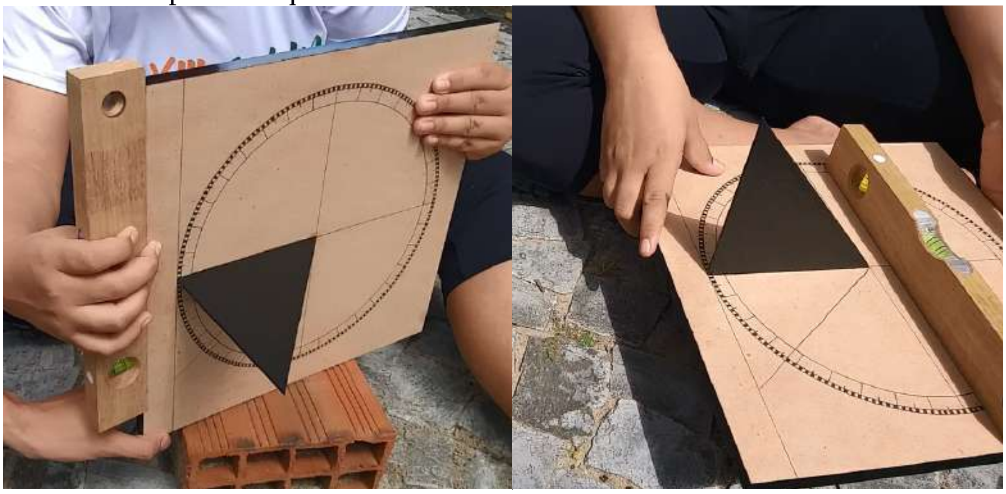
> Aluna 7: “Não é essa só não! Planos paralelos não contem reta em comum, ou pontos em comum”.
> Professor: “É isso mesmo?”
> Aluna 8: “Diz a Aluna 7: Não lembro amiga”. [...]
> Aluna 7: “A gente não sabe nem o que é o horizonte, onde é o horizonte”.
> Aluna 8: “A gente está tentando situar o horizonte, para poder fazer essa ligação de estar paralelo ou não”. [...]
> Aluna 7: “Horizonte é uma linha horizontal”.
> Professor: “Que no caso aqui qual seria nosso horizonte?”
> Aluna 7: “Não sei!” [...]
> Aluna 8: “Eu poderia traçar o horizonte como se fosse, tipo como se fosse um plano terrestre, é como se fosse essa parte plana. Não dizendo que a terra é plana. [...] Como eu vou garantir que isso aqui está paralelo ao horizonte, eu não sei te dizer, de verdade eu não consigo imaginar como garantir isso”.
> Aluna 7: “Nem eu!”
> Aluna 8: “Eu consigo ter uma visão do que é o horizonte, mas eu não, consigo garantir que isso aqui vai estar paralelo”. [...]
> Aluna 7: “Olha quando fala em plano do horizonte a primeira coisa que eu consigo imaginar é a praia, e o limite do mar, e aquilo para mim é, depois, até onde eu consigo ver o mar, depois dali é o horizonte. Aqui eu não consigo ter o final de nada, para definir o horizonte”.
> Aluna 8: “Para mim o horizonte está à minha frente”. [...]
> Aluna 7: “O final de tudo que eu vejo eu defino como horizonte”. [...]
> Aluna 8: “Eu posso tipo dizer que, a onde a gente está a gente está num plano horizontal, certo!”
> Professor: “Certo!”
> Aluna 8: “E se a gente está com esse instrumento e ele está aqui ele é o segundo plano, ele é um plano, ok. Então esse plano está paralelo a esse plano”. [...]
> Aluna 8: A gente já entendeu quase tudo, a gente só não está conseguindo raciocinar essa parte de como garantir que ele vai estar paralelo ao plano que a gente está. (GRUPO 3, 2019).

Como se pode observar, as discentes tinham dificuldades em conceituar o que seria o plano do horizonte, o conhecimento que elas detinham se referia à linha do horizonte. Aos poucos, eles foram ressignificando suas ideias e chegaram a uma conclusão mais próxima do que seria esse objeto. Ainda sobre esse plano, um outro discente diz que, para defini-lo: “eles olhavam todo o horizonte para pegar, pronto um círculo, tinha um círculo de horizonte ao redor deles no mar, a partir desse círculo a gente tinha um plano, eles tentavam deixar jacente ao plano do horizonte” (ALUNO 4, 2019). Nessa colocação, nota-se uma maior proximidade com a definição de plano do horizonte, que nada mais é do que um círculo máximo da esfera celeste.

De posse dessa compreensão, a dificuldade passou a ser agora a seguinte: “[...] como o horizonte que a gente viu é invisível, não teria como sustentar uma base em baixo. A não ser que a gente fizesse um formato no meio, para representar como se fosse um plano” (ALUNA 7, 2019). Diante desse novo desafio, passaram a pensar em estratégias para posicionar o instrumento paralelo a esse plano, que, nas palavras deles, era algo imaginário.

O Grupo 1 recorreu ao uso de um nível de bolhas e de um suporte embaixo da tábua (tijolo). A seguir, tem-se a forma como posicionaram o instrumento (figura 49):

Figura 49 — Da direita para a esquerda: Uso da tábua do instrumento na horizontal e uso na vertical



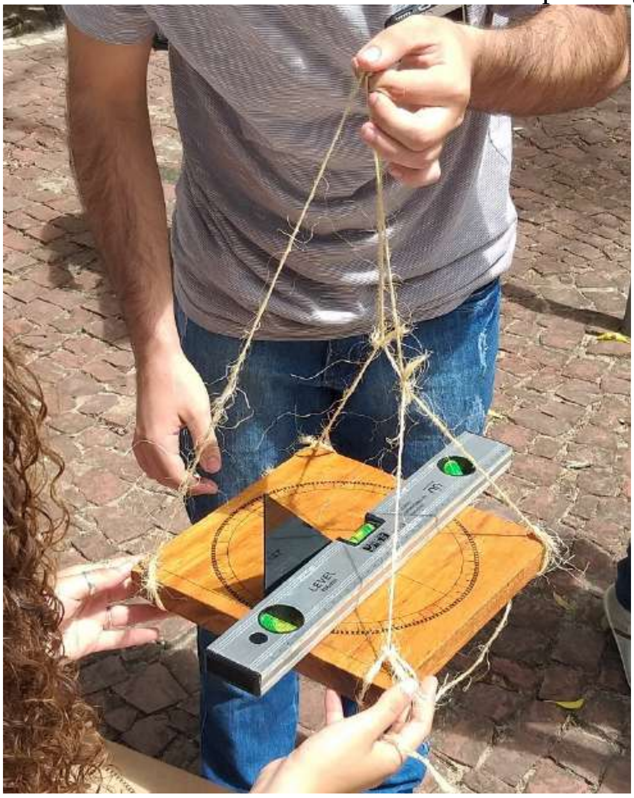
Fonte: Acervo pessoal dos autores (GRUPO 1, 2019).

Na concepção de um dos discentes desse grupo, o simples fato de utilizar o nível de bolhas, de maneira que se consiga: “[...] ajustar de forma suficiente que a bolinha fique no centro, eu vou conseguir fazer com que fique nivelado, entendeu! Que é isso que eu preciso, que o meu plano esse plano aqui quadrado fique nivelado com o horizonte, porque o horizonte é nivelado” (ALUNA 1, 2019). Nessa ilustração, com base nas instruções de Pedro Nunes, notou-se uma inconsistência no posicionamento do instrumento, haja vista o lusitano indicar o uso na vertical apenas para a versão com o triângulo duplicado.

Sobre essas alternativas, um outro integrante do grupo ainda complementa: “quando a gente calculou assim no horizonte deu um certo valor, quando a gente calculou assim deu um outro certo valor” (ALUNO 3, 2019). Em linhas gerais, na concepção desse grupo, a dificuldade dessa estratégia é encontrar nível suficiente para que se consiga deixar a tábua nivelada com o plano em questão. Uma das participantes chega à conclusão de que, se assim for feita a medição: “[...] no mar não tem como ficar plano” (ALUNA 2, 2019).

No que se refere às estratégias para uso do instrumento jacente no plano, o Grupo 2 pensou em suspender o aparato por meio de barbantes e ainda usar um nível de bolhas sobre a tábua. A seguir, vê-se a forma como fizeram (Figura 50):

Figura 50 — Posicionamento do instrumento realizado pelo segundo grupo.



Fonte: Acervo pessoal dos autores (GRUPO 2, 2019).

Eles amarraram um barbante em cada ponta da base quadrada do instrumento e procuraram ajustar a medida das cordas, de forma que o comprimento delas ficasse o mais próximo possível. Assim, conseguiram suspender o instrumento para realizar a medida, segundo eles, bastava observar, pelo nível, se a tábua estava nivelada e, em seguida, girar o instrumento até que a sombra do lado *FG* do ΔFGH se posicionasse sobre o segmento de reta tangente *AK*.

O Grupo 3, assim como o Grupo 4, recorreu ao uso do fio de prumo como forma de garantir o paralelismo entre a tábua do instrumento jacente no plano e o plano do horizonte. Uma primeira dúvida dessa estratégia foi saber o que era preciso para que os dois planos estivessem paralelos. Como já destacado em diálogo anterior do Grupo 3, as alunas estavam com dificuldades em dizer o que era necessário para dois planos estarem paralelos, pontuaram até que bastaria que não tivessem nenhum segmento de reta em comum. Ainda sobre essa questão do paralelismo entre planos, voltam a dialogar novamente. A seguir, tem-se a nova conversa:

> Aluna 7: “O que que dois planos precisam para serem paralelos?”
> Aluna 8: “Uma condição necessária que garanta que eles são paralelos”.
> Aluno 7: “Já sei, eu pensei aleatoriamente aqui, talvez seja assim, a distância de um plano tem que ser igual a distância do outro lado”.
> Professor: “Concorda com ela Aluna 8, se essas distâncias forem iguais, vai está paralelo?”
> Aluna 8: “Só não sei como medir essas distâncias, garantir que elas sejam. Tipo no nosso caso que a gente está trabalhando com esse horizonte que a gente não tem como de certa forma mensurar, digamos assim”. [...]

> Professor: “Se eles tivessem a mesma distância como vocês estavam falando aí, o que, que ia está acontecendo entre essa distância e os planos”.
> Aluna 7: “Se eles tivessem a distância de uma ponta igual a distância da outra é, significaria dizer que um plano está sobre o outro, que não tem reta em comum, e que esse plano está alinhado ao outro porque tem a mesma distância então ele não vai estar inclinado e não vai se cruzar”.
> Professor: “Essa distância, em relação ao plano, está acontecendo o que?”
> Aluna 7: “Essa distância está interceptando os dois planos, é perpendicular aos dois planos”.
> Professor: “Então vocês têm que garantir que essas medidas sejam perpendiculares!”
> Aluna 7: “E sejam iguais”.

(GRUPO 3, 2019).

Nesse diálogo, percebe-se que as discentes já passam a atribuir ainda mais significados ao paralelismo entre planos. Além da necessidade de os planos não possuírem nenhuma reta em comum, agora apontam que um deve estar a uma mesma medida do outro e que os segmentos de reta, que representam essa medida, devem estar perpendiculares aos dois planos. É, a partir desse entendimento, que chegam a propor usar o fio de prumo. No entanto, chegam a um novo empecilho, como e para que usar o fio de prumo? Nesse sentido, realizam o seguinte diálogo:

> Aluna 7: “Eu nunca pensei que ia precisar lembrar do meu pai para entender um prumo. Quando ele usa o prumo, Aluna 8 presta atenção [...], quando ele usa o prumo ele bota isso aqui sobre o tijolo e aí, é assim que um pedreiro usa o prumo né. Ele alinha o tijolo que ele colocou e garante que os outros estão alinhados a ele, né. Então para usar o prumo nisso”.
> Professor: “E tu fazendo esse alinhamento tu vai garantir que ele está o que, em relação ao plano do chão? Esse plano que tu está construindo de tijolo ele tá o que?”
> Aluna 7: “Ao chão ele está perpendicular”.
> Professor: “E o que é que vocês querem que o plano do instrumento esteja em relação ao outro”.
> Aluna 7: “Perpendicular!”
> Aluna 8: “Não a gente quer que ele esteja perpendicular à distância”.
> (GRUPO 3, 2019).

Nessa conversa, é possível observar que as discentes passam a observar, no fio de prumo, o conceito de perpendicularidade. Atribuindo, assim, ainda mais significados a esse objeto matemático. A seguir, veê-se a tentativa de uso do fio de prumo pelo Grupos 3 e Grupo 4 (Figura 51):

Figura 51 — Da direita para a esquerda: Uso do fio de prumo pelo Grupo 3 e pelo Grupo 4.

Fonte: Acervo pessoal dos autores (GRUPO 3; GRUPO 4, 2019).

Nessas ilustrações, é possível observar que os discentes procuram posicionar o fio de prumo nas extremidades da tábua do instrumento jacente no plano. Sobre esse procedimento, fez-se alguns questionamentos, em um deles, indagou-se quantos fios de prumos seriam necessários para alinhar a tábua do instrumento, como resposta, apontaram que bastariam três, visto que: “[...] para determinar um plano, eu só preciso de três pontos distintos não colineares” (ALUNA 10, 2019).

Diante dessa resposta, nota-se que a discente já está associando o plano do horizonte ao plano euclidiano estudado em matemática. Também em relação ao plano do horizonte, cabe destacar que o Grupo 4, como forma de encontrar esse plano, antes de partir para a tentativa com os fios de prumo, ainda haviam recorrido ao uso de uma mangueira[48] com água dentro. A justificativa deles, para tanto, foi que: “o nível da água sempre é paralelo ao horizonte” (ALUNA 10, 2019). Segundo eles, isso se deve à ação da gravidade, do mesmo modo, nas palavras deles: “[...] a partir do momento que a gente muda a nivelação da mangueira não mudava, mas a mangueira a própria nivelação da água muda, como se ela tentasse se adapta de alguma forma” (ALUNA 10, 2019). Apesar dessa alternativa fazer sentido para eles, os alunos desistiram de colocá-la em prática.

Como se pode observar, para conseguir realizar a instrução de Pedro Nunes de se posicionar a tábua de forma que fique paralela ao plano do horizonte, os discentes recorreram a várias estratégias, mas, na concepção deles, não conseguiram garantir que os planos estivessem, de fato, paralelos. Como forma de tentar fomentar o movimento do pensamento dos discentes, decidiu-se retornar à sala

48 A mangueira utilizada pelos discentes consta na mesa de recursos, aqui apresentada na figura 40.

de aula para se discutir o porquê de as estratégias não darem certo e o que poderia ser feito para que fossem tomadas como válidas. As discussões ocorreram a partir da apresentação de cada grupo acerca da estratégia utilizada.

O primeiro grupo a se apresentar foi o Grupo 2, o qual tentou equilibrar a tábua do instrumento jacente no plano com barbante e também fez uso de um nível de bolhas. Em sua apresentação, dizem que:

> Aluno 4: "A ideia dela era prender com barbantes para suspender. A ideia inicial era fazer um *X* no próprio objeto, só que não deu muito certo, porque iria jogar o triângulo mais para os lados. Aí Aluno 6 deu a ideia de prender pelas pontas, que nos ajudou bastante que ficou muito encima, deixando ele livre. [...] foi essa a nossa forma de nivelar e verificar as alturas mais aproximadas possíveis.
> Professor: Para conseguir esse equilíbrio entre o plano do instrumento, o que foi que vocês fizeram?
> Aluno 4: Neste nível, ele tem três retas, ou três segmentos de retas, o primeiro está localizado no meio, que no caso é a reta paralela a um dos catetos do triângulo, tem a dois que está na ponta mais perto de vocês que ela está perpendicular a um dos catetos do triângulo e tem a que está mais próximo de mim que está aproximadamente 45 graus. Ou seja, se está, se pelo menos duas destas estivessem niveladas a gente poderia ter um plano paralelo ao plano do horizonte (GRUPO 2, 2019).

Nesse diálogo, nota-se que o grupo apresenta uma justificativa para o uso do nível de bolhas, como o nível que estavam utilizando tinha três bolhas, eles associam as bolhas a segmentos de retas. Diante disso, vê-se que passam a reconfigurar e atribuir mais significados ao conceito de reta; tomando as bolhas como segmentos de retas, eles ainda trabalham a noção de plano, pois destacaram que bastariam duas bolhas para garantir a existência de um plano e que, de posse delas, era suficiente nivelar as duas para que se garantisse o paralelismo entre os planos.

Seguindo as apresentações, o Grupo 1 passou a expor a estratégia que utilizaram. Sobre ela, tem-se o seguinte diálogo:

> Aluna 1: "A gente usou esse instrumento, para poder achar o mais plano possível. Primeiro a gente colocou um apoio, por que lá naqueles pedregulhos da pracinha não dava para ficar reto. [...] do que ele fala na teoria, né, do instrumento ele fica perpendicular ao horizonte. Ai a gente tentou usar também dessa forma, fazendo com que também ficasse reto aqui e reto aqui, para ficar reto. Mas aí o professor fez vários questionamentos e a gente não sabe se é assim mesmo, mas a gente testou para ver, e foi isso basicamente".
> Professor: "Vamos ajudar eles, essa forma que eles usaram na vertical, está correto, vamos ver o texto, vamos consultar o texto?"
> Aluna 7: "Eu acho que ela deveria ter usado se o triângulo fosse o dobro né, se fosse até o diâmetro. Porque quando ele cita a parte perpendicular ao horizonte ele já falou do triângulo duplicado, então acho que era para ser usada com o triângulo duplicado".
> Professor: "Isso que eles fizeram, tirar o instrumento da calçada e colocar no asfalto, isso garantiu que ele estava paralelo ao plano do horizonte?"
> Aluna 11: "Não pela construção do próprio plano né, porque não tem como garantir que o asfalto estava plano".
> Professor: "A partir da matemática como eles iriam garantir isso?"
> Observadora: "Quando é que um plano está paralelo a outro? Essa deve ser a pergunta!"
> Aluno 4: "Quando duas retas ao mais concorrentes, são paralelas a um plano". [...]
> Professor: "A tábua do instrumento está paralela ao asfalto? Em relação ao asfalto?"
> Aluno 7: "Se for plano".
> Professor: "Se o asfalto for plano".

> Aluna 7: “Sim”.
> Professor: “Mas em relação ao plano do horizonte, vai estar?”
> Aluna 7: “Ai ao plano do horizonte não!”
> Aluna 10: “Eu não tenho como garantir!”
> Aluno 12: “Se o asfalto estiver paralelo ao horizonte sim!”
> Aluno 4: “Mas quem te garante”.
> Aluno 12: “Pois é”. [...]
> Observadora: “Por exemplo essa tábua aqui, assim ela está paralela? A linha do horizonte?”
> Aluno 4: “Depende de qual horizonte”.
> Observadora: “Existe mais de um plano do horizonte?”
> Aluno 4: “Existem infinitos”.
> Aluna 7: “Existe!”
> Professor: “Porque que existem infinitos planos do horizonte?”
> Aluno 4: “Porque depende de onde você vai estar localizado na esfera”.
> Professor: “No caso delas, que estavam em determinado ponto, elas tinham quantos planos do horizonte?”
> Aluno 4: “Elas tinham um, quando elas se moveram é, sei lá dois metros à para a esquerda elas foram para outro, o problema é que como a terra é grande a mudança desse plano é praticamente insignificante”. [...]
> Aluna 10: “Porque se a gente usasse o fio de prumo, a função do fio de prumo num é garantir a perpendicularidade de um objeto ao solo, ao plano que ele está, não é esse o objetivo do instrumento, é, está certo?”
> Professor: “Está certo o que ela disse aqui em relação ao fio de prumo?”
> Aluna 10: “O fio de Prumo, o objetivo do instrumento foi criado para isso, garantir a perpendicularidade de um objeto ao solo”.
> Professor: “É isso?”
> Os demais dizem – sim!
> Aluna 10: Então está muito certo! (GRUPO 1; GRUPO 2, GRUPO 3; GRUPO 4, 2019).

Nesse diálogo, é possível observar que os demais discentes questionam a validade da estratégia utilizada pelo Grupo 1. Diante disso, a apresentação se transforma em uma discussão, em que os alunos puderam atribuir mais significado à noção de plano do horizonte. Fez ainda os sujeitos retomarem o texto de Pedro Nunes para que pudessem compreendê-lo de forma ampla. A indicação desse possível salto na aprendizagem está ancorada na base teórica que fundamenta a AOE, visto indicar que:

> [...] o desenvolvimento psíquico do homem se realiza por meio do que Vigotski chamou de *processo de internalização* (VIGOTSKI, 2001b). Segundo ele, as relações intrapsíquicas (atividade individual) constituem-se com base nas relações interpsíquicas (atividade coletiva). É nesse movimento do social ao individual que se dá a apropriação de conceitos e significações, ou seja, que se dá a apropriação da experiência social da humanidade (MOURA *et al*., 2016, p. 95).

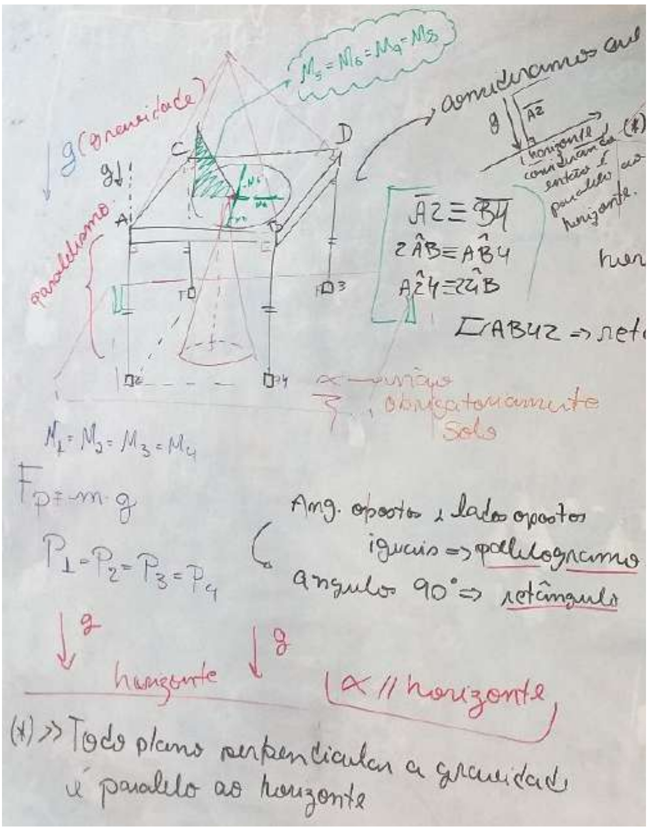
Nessa perspectiva, observa-se a importancia do diálogo e da apresentação de pontos de vista no processo de desenvolvilmento do pensamento. Assim, a atividade coletiva potencializa o movimento de um saber inferior a um superior, o qual deve ser um dos focos do processo de ensino e aprendizagem.

Na sequência, continuando as apresentações, o Grupo 4 passa a expor à turma a estratégia que idealizaram. Sobre essa exposição, tem-se o seguinte diálogo:

> Aluna 10: “No geral da nossa ideia, o que foi o principal problema, o primeiro é que a gente não tinha os quatro prumos, só tínhamos três. Então não tinha como realizar por completo,

mas a ideia geral era dar um jeito de a gente consegui fazer com dois e íamos fazer com quatro. Íamos amarrar os quatro prumos nas pontas, ou então na metade das laterais dos quadrados, de forma que as cordas, o tamanho das cordas ficassem iguais, já que os pesos dos prumos são os mesmos então ela não teria variação da inclinação, não teria inclinação, ficaria reto. E como os prumos estariam apoiados no solo eu teria como garantir a perpendicularidade do meu instrumento com o solo. Logo ele estaria reto, não estaria inclinado. Ai o Aluno 11 vai explicar a teoria, porque a gente conseguiu, entre aspas elaborar toda a teoria, mas a prática não".
Professor: "Os prumos, pelo que tu falou aí, os prumos deveriam tocar o solo?"
Aluna 10: "Sim, não é necessário, porque o tamanho das cordas seriam iguais, então não teriam uma variância de distâncias das cordas, eles não ficariam inclinado justamente pelos pesos serem iguais, não haveria a variância de um peso maior que o outro e o tamanho das cordas também seriam iguais". [...]
Aluno 4: "O que vocês fariam para ele não ficar mais à frente, mesmo com os quatro pesos. O que é que está garantindo?"
Aluno 11: "A gente vai garantir as angulações, se a gente conseguir garantir que esses ângulos são todos retos, e conseguir deixar eles todos perpendiculares a um plano α, onde α não obrigatoriamente é o solo". [...]
Aluno 11: "A gente tem que considerar a questão da gravidade, ele pediu para gente definir a gravidade e a gente ficou um pouco travado".
Aluno 3: "Como é que tu provou que os quatro pontos pertencem ao plano?"
Aluno 4: "Quem te garante o instrumento não está fora do plano?"
Aluno 11: "O Tamanho das cordas. A distância desse plano a esse plano em todos os pontos é a mesma. Então isso aqui também é uma questão de paralelismo". [...]
Aluno 11: "Se eu for considerar que a linha do horizonte, ela tem essa questão da gravidade, que seria ela um referencial, de uma referência geral que estou utilizando, eu vou ter, por exemplo, que o α vai ser paralelo ao horizonte, só que nisso que a gente parou. A gente tem que usar a questão da gravidade só que a gente não soube usar a gravidade. Porque tipo assim, se eu considerar, que eu consegui equilibrar, a questão da balança. Se eu consigo através de uma balança equilibrar os meus pesos, eles vão sempre, por mais que eu entorte isso aqui, os pesos vão sempre buscar ficar inclinados, ok, no plano horizontal". [...]
Aluno 4: '[...] todo plano, perpendicular à gravidade ele é paralelo ao horizonte". [...]
Aluno 11: "Ela poderia fazer uma artezinha aqui, tipo uma mesinha em baixo, e igualar todos os prumos com essas artezinhas aqui. E deixar eles no final todas alinhados no mesmo nível, já que teriam o mesmo tamanho da corda".
Aluna 7: "Uma superfície embaixo ajudaria muito".
Aluno 11: "O problema maior foi esse α, que ficou como sendo uma coisa avulsa.
Aluno 4: Ela ficaria tipo balanceada".
Aluno 11: "A não ser que a gente pegasse tipo a ideia de vocês, parte dela e fizesse assim ó".
Aluna 7: "Ou o que agente completou no teu desenho".
Observadora: "Usasse todos os artefatos para conseguir". [...]
Aluno 4: "Para isso, ele precisa estar perfeitamente é, o próprio objeto teria que está perfeitamente com o peso, o centro de massa dele exatamente no meio. Porque a única coisa que ele poderia fazer de influência seria o giro. Porque como o centro de massa dele já está mais para cá paro o lado do triângulo né, poderia atrapalhar. A não ser que vocês criassem um".
Aluna 10: "Mesmo que a gente criasse como que a gente garantiria que ele está perpendicular ao plano, ao chão?"
Aluno 4: "Fisicamente falando ele já provou, entendeu. O problema é vocês fazerem que o centro de massa ficasse no meio, exatamente no meio". [...]
Professor: "O que que vocês têm a dizer sobre essa ideia deles?"
Aluno 11: "Viajaram".
Aluno 7: "A gente entrou no barco da ideia deles, e terminamos, basicamente no que ele começou. Tanto que eu disse para ele que a nossa conclusão do que a gente pensou em fazer esta na folha deles porque a gente foi lá e terminou. Ele colocou os pêndulos né, só que no lugar dos pesos a gente ia colocar estrutura física mesmo, sólida sem ser algo que pudesse balançar, como madeira ou uma superfície de ferro, seriam quatro né, e seriam quatro que fossem até o solo, e o plano que ele representou aí, a gente poderia traçar, é pegar o barbante por exemplo que o Aluno 4 usou e contornar o meio dessas quatro barras e encima colocar o

objeto, que é o instrumento, encima a gente colocaria o instrumento. Então esse contorno que a gente fez nas quatro barras, representaria o horizonte e encima seria o instrumento paralelo ao plano do horizonte". [...]
Aluno 7: "E o que seria o plano do horizonte, que a gente não consegui descobrir, desde lá de fora?"
Aluno 4: "É qualquer plano perpendicular à gravidade, o vetor gravidade".
Aluna 8: "O plano do horizonte a gente descobriu, o que gente não descobriu, como que a gente vai garantir que o nosso segundo plano vai estar paralelo ao plano do horizonte".
Aluna 7: "Não, mas aí é o que a gente garantiu com isso aí, o questionamento que surgiu é como que a gente vai dizer que esse plano que a gente atribuiu ser paralelo ao instrumento". [...]
Aluno 4: "Todo plano perpendicular à gravidade é paralelo ao plano do horizonte".
Observadora: "Como deixar esse instrumento perpendicular à gravidade?" [...]
Observadora: "Qual a relação do prumo com a gravidade?"
Aluno 4: "O fio ele é, se parado, se ele estiver parado ele é exatamente, um dos, pode ser concluído exatamente com um dos vetores de gravidade. O fio é paralelo ao vetor da gravidade".
Aluna 10: "Então ele é automaticamente perpendicular ao horizonte".
Aluno 11: "O que está perpendicular à gravidade aqui, está sendo o objeto. O fio ele está paralelo ou sobreposto a gravidade".
Aluno 4: "Se a gravidade é paralela ao fio, e o fio está perpendicular a tábua, e pela definição de horizonte pela gravidade ser perpendicular também, então a tábua está paralelo ao horizonte, acho que uma forma mais simples seria assim".
Aluna 7: "Pelo que eu estou vendo aí, o pêndulo ele está na mesma direção que a gravidade e o plano ele está na mesma direção do plano horizontal. Então se o plano ele está perpendicular à gravidade e a gravidade é perpendicular ao horizonte, então o plano também é paralelo ao horizonte".
Professor: "Concordam com o que ela disse, faz sentido?"
Todos respondem: Sim! [...]
Aluna 1: "Como é que pode, Pedro Nunes estudou tudo isso em um curso de medicina né!".



(GRUPO 1; GRUPO 2, GRUPO 3; GRUPO 4, 2019).

Como se pode observar no decorrer desse diálogo, pelo uso do fio de prumo, os discentes reconfiguraram tanto os conceitos de perpendicularidade e de paralelismo entre planos, como também os de gravidade e de plano do horizonte. Isso porque, ao utilizar esse aparato, “[...] eles estão realaborando esses mesmos conhecimentos, agregando a eles novos significados além daqueles aprendidos no cotidiano escolar. A ressignificação desses conhecimentos, propiciada por um conjunto de ações, amplia o significado do conceito [...]” (PEREIRA; SAITO, 2019b, p. 427). Corrobora para essa indicação, o fato de que, para compreenderem a relação existente entre a tábua do instrumento e o plano do horizonte, tiveram que analisar esses conceitos de forma conectada.

Ainda nesse diálogo, também se verificou a estratégia utilizada pelo Grupo 3. A esse respeito, nota-se que, por ter sido semelhante a do Grupo 4, os dois foram se complementando, de forma que, ao final, ambos haviam exposto a ideia de posicionamento da tábua para uso do instrumento jacente no plano. Em relação a essa junção de ideias, também se verifica a incorporação da estratégia de uso do barbante levantada pelo Grupo 2, assim, a proposta final, para uso do instrumento construída nesse diálogo, constitui-se como um produto que pode ser atribuído ao movimento do pensamento de todos os sujeitos.

> Retomando a estrutura da atividade, temos que o sujeito em atividade tem objetivos ideais (individuais e coletivos), define ações para atingi-los e, conforme as condições reais executa as operações (outro dos elementos estruturadores da atividade) que sustentam as ações. Desse processo deriva o produto da atividade, que pode ser real ao ideal (MOURA *et al*., 2016, p. 116).

Nesse sentido, a estratégia de posicionamento da tábua pode, com efeito, ser atribuída à atividade coletiva desencadeada pelas discussões dos discentes. Como se observou no referido diálogo, o objetivo (posicionamento da tábua) passou a ser coletivo, assim como as ações e operações idealizadas para a sua execução.

Como se pode observar, certamente, por verificar que para o simples ato de posicionar a tábua paralela ao plano do horizonte foram mobilizados tantos conhecimentos, uma aluna, ao final, ainda demonstrou seu espanto ao se questionar como Pedro Nunes estudou tudo isso em um curso de medicina. Como exposto no capítulo 01, em que são tratados alguns elementos do contexto de elaboração do instrumento, no século XVI, não existia uma dissociação do conhecimento em áreas do conhecimento como se vê na modernidade. Diante das ações e discussões já destacadas, entende-se que o trabalho com instrumentos matemáticos é uma proposta que potencializa mobilizar “[...] não só os conhecimentos matemáticos incorporados nesses instrumentos, mas também a complexa rede de conhecimentos que "esteve" e "está" presente no processo de sua construção e uso” (SAITO, 2014, p. 28).

Em relação aos conhecimentos mobilizados para se conseguir a instrução de Pedro Nunes de se posicionar a tábua do instrumento paralela ao plano do horizonte, em especial, no que se refere ao paralelismo entre planos, uma discente afirma que:

> Não tinha parado para pensar [...] o que que precisava para ser paralelos, e tudo que eu dizia era: não deve ter nenhuma reta em comum. Só que eu não tinha parado para pensar que existiam coisas além, por exemplo a distância entre os dois planos elas teriam que ser iguais, e teriam que formar um ângulo de 90 graus. Eu fui parar para pensar nisso depois de muito tempo, pensando que se não fosse igual em alguns momentos os planos iriam se cruzar, então eu tive que pensar além do que eu já conhecia né. Eu só lembrava da parte de não ter nenhuma reta em comum (ALUNA 7, 2019).

Diante dessa fala, é possível apontar que, a partir da atividade, a estudante foi reconfigurando a noção de paralelismo entre planos. Durante todo o processo, desencadeado pela referida necessidade, a discente foi intensificando os processos, reflexões e conclusões no sentido de elaborar significados para esse objeto matemático e, assim, fazer uso dele. Ainda em relação à tábua quadrada como parte do instrumento, no quadro 16, a seguir, tem-se a transcrição literal do destacado pelos grupos de alunos em seus relatórios da atividade.

Quadro 16 — Sobre a tábua quadrada a partir da situação de uso.

Grupo	Função	Conhecimentos geométricos mobilizados	Justificativa para incorporação no instrumento
Grupo 1	Base do instrumento é essencial para as marcações, noção de onde está a reta que tangencia o círculo no ponto a.	- Plano; - Paralelismo.	De extrema importância para buscar manter o plano, para obter as medidas.
Grupo 2	Auxiliar com a tangente a medição da sombra.	- Círculo geométrico; - Semirretas; - Paralelismo; - Perpendicularidade.	Sobrepor o material e permitir o acréscimo da reta tangente.
Grupo 3	Garantir o paralelismo entre os planos.	- Paralelismo entre os planos; - Ângulos retos	Com o quadrado garantimos o paralelismo do instrumento ao horizonte com mais facilidade.
Grupo 4	- Facilitar a observação da sombra projetada sobre a tangente; - Permite a existência da tangente.	- Paralelismo; - Perpendicularismo; - Sobreposição; - Projeção.	- Garantir o centro de massa; - Facilitar a observação da sombra sobre a tangente.

Fonte: Arquivo dos autores (Relatório dos grupos, 2019).

Quando comparadas as considerações presentes nesse quadro com as destacadas nos dias anteriores sobre a tábua, é possível observar um salto qualitativo quanto à compreensão acerca de sua justificativa para incorporação no instrumento jacente no plano. Como se pode notar, nesse momento, os discentes, além de entendê-la como necessária para a construção do segmento de reta tangente, ainda apontam que ela pode tanto favorecer a determinação do centro de massa, como também o posicionamento da tábua do instrumento, de forma que fique paralela ao plano do horizonte.

O triângulo retângulo isósceles como parte do instrumento jacente no plano

O estudo dos alunos sobre o triângulo retângulo isósceles foi retomado a partir do momento em que “teoricamente” já haviam elaborado uma proposta para o posicionamento da tábua do instrumento de forma paralela ao plano do horizonte. A intenção da nova análise, acerca dessa parte do aparato, foi possibilitar que os discentes atribuíssem ainda mais significados a ela, fomentando, assim, suas compreensões sobre o instrumento. No quadro 17, a seguir, traz-se a transcrição literal das considerações apresentadas pelos grupos em seus relatórios quanto ao referido triângulo.

Quadro 17 — Sobre o triângulo retângulo isósceles, compreensões do terceiro dia de atividade

Grupo	Função	Conhecimentos geométricos mobilizados	Justificativa para incorporação no instrumento
Grupo 1	Ponteiro marcador.	Classificação de triângulos e ângulos.	Ainda não conseguimos justificar o porquê de ele utilizar especificamente um triângulo retângulo isósceles.
Grupo 2	Ter relações com os ângulos que indicam as distâncias do Sol ao zênite e do Sol ao horizonte.	Geometria plana: congruência de triângulos.	A sombra projetada pelos raios solares formam os ângulos que indicam a distância.
Grupo 3	Facilitar a congruência com os ângulos dos raios do Sol.	Congruência de triângulos.	Se o triângulo não fosse isósceles como mostrar a congruência de triângulos e ângulos, para mostrar a congruência dos ângulos com os raios do Sol.
Grupo 4	- Projetar a sombra; - Formar o arco (através da sombra) que nos fornece a altura do Sol e a distância de Sol à “Zênite”.	- Perpendicularismo; - Paralelismo; - Circulo trigonométrico; - Tipos de triângulos; - Angulação; - Sobreposição.	Triângulo é isósceles para a formação de um triângulo semelhante da seguinte forma: $\Delta ALK \cong \Delta KFA$.

Fonte: Arquivo dos autores (Relatório dos grupos, 2019).

Diante desse quadro, é possível observar que os discentes já apresentam mais significados e compreensões sobre a presença do triângulo retângulo isósceles na composição do instrumento jacente no plano. Como exemplo desse salto qualitativo, nota-se que eles já apontam como justificativa, para sua incorporação, o fato dele ser responsável por formar a congruência entre ΔKAE e ΔFAK, necessária para assegurar a validade da medida encontrada.

Uma das primeiras reflexões, que fomentaram o movimento do pensamento realizado pelos discentes para se chegar às conclusões desse quadro 17, refere-se à análise da situação de uso. Até esse momento, cabe destacar que os discentes já haviam notado que o ΔKAE da sombra, quando posicionado sobre o segmento de reta tangente, passa a ser um triângulo retângulo e que ele tem um lado em comum com o ΔFGH que está perpendicular à tábua. Com uma nova análise sobre a situação, a aluna 2 do Grupo 1 afirma que está visualizando outro triângulo além desses dois destacados anteriormente, essa observação desencadeou o seguinte diálogo:

> Professor: “Oi, onde?”
> Aluno 3: “ΔKAF”.
> Professor: “Pedro Nunes fala desse triângulo?”
> Os discentes respondem: “Não”.
> Aluno 3: “Mas ele faz a ligação entre o F e o K”.
> Professor: “Esse outro triângulo que está sendo formado, que a menina disse que está sendo formado outro triângulo, ele tem alguma relação com os demais?”
> Aluno 11: “Ele também é retângulo pelo visto”.
> Aluna 5: “Ele é igual ao da sombra”.
> Professor: “Se supostamente ele está formando um triângulo aqui igual, ele tem o que em relação ao outro triângulo da sombra”. [...]
> Professor: “Qual é o ângulo que vocês falaram que é a altura do Sol? É o que é mostrado pela sombra ou o que fica sem sombra?”
> Discentes: “É o que está sem sombra!”
> Professor: “O que está sem sombra é o que?”
> Discentes: “A altura do Sol!”
> Professor: “E a outra parte é o que?”
> Discentes: “A distância do Sol ao zénite!
> Aluno 12: é o quanto falta ao Sol para chegar ao meio dia”.
> Professor: “Então a distância entre o Sol e o zénite corresponde a qual ângulo?”
> Aluno 11: “ao ângulo oposto ao lado AK”. [...]
> Aluna 5: “Quando o raio incide né, formando a sombra, aí no caso esse triângulo aqui vai ser igual a esse triângulo da sombra da base, por que, por lado, ângulo lado, aí eles compartilham lados iguais” (GRUPO 1; GRUPO 2, GRUPO 3; GRUPO 4, 2019).

Como se pode observar nesse diálogo, os discentes afirmam que $\Delta KAF \cong \Delta KAE$ por L.A.L. (Lado-Ângulo-Lado). Essa conclusão vai ao encontro do destacado, anteriormente, no terceiro capítulo, ao se analisar a situação de uso. Na ocasião, notou-se que a demonstração de validade do instrumento apresentada por Pedro Nunes indica essa relação de congruência entre os triângulos em questão. O quinhentista fala dela ancorado na terceira definição do décimo primeiro livro dos *Elementos*, de Euclides, em que se trata da: igualdade entre triângulos, tomando por base seus lados e ângulos. A seguir, dá-se destaque ao novo triângulo destacado no diálogo (Figura 52):

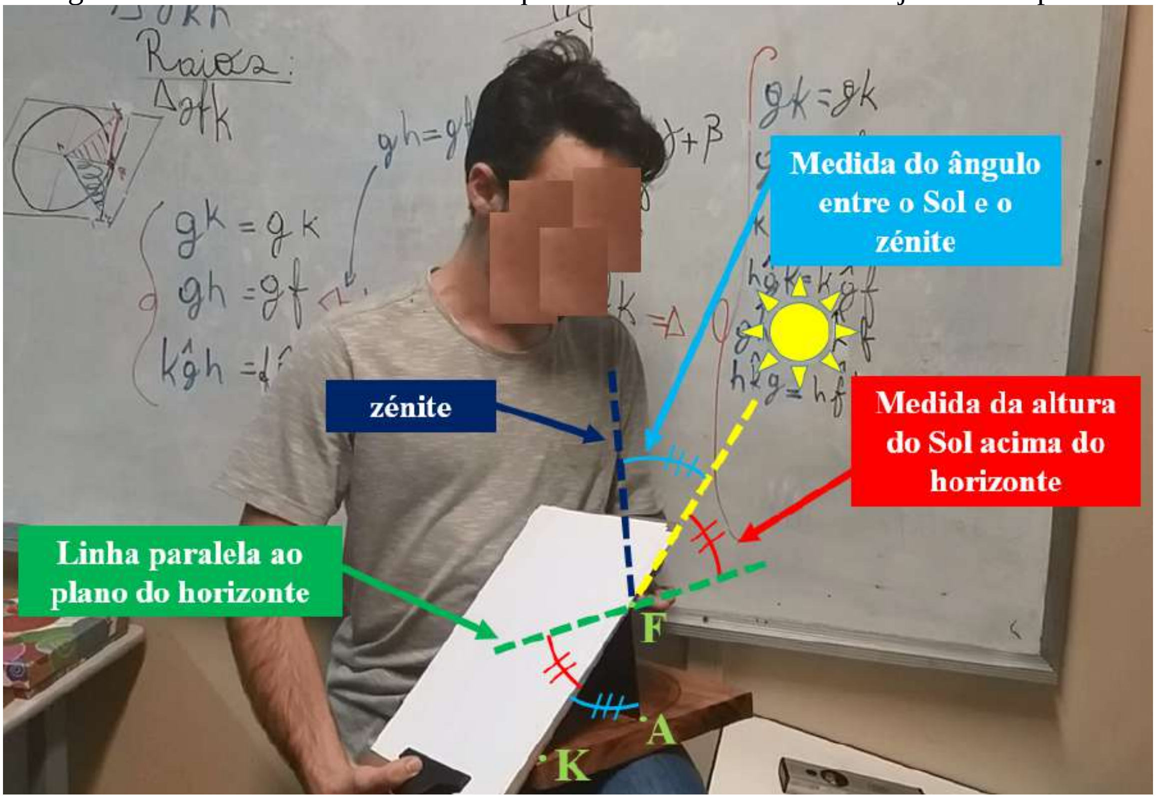
Figura 52 — Terceiro triângulo identificado na situação de uso pelos discentes.

Fonte: Arquivos dos autores (2019).

Nessa ilustração, a partir do texto de Pedro Nunes, é possível verificar que o triângulo *KAF*, identificado pelos discentes, tem como lados os segmentos *FG* do triângulo *FGH*, o *AK* do triângulo *AKE* e o *KF*. Diante dessa ilustração e com base na situação de uso, sabe-se que ele tem como lado fixo *FG*, que é igual ao semidiâmetro da circunferência e que os demais lados variam conforme a altura do Sol acima do horizonte. Essa compreensão dos participantes foi de suma importância para o entendimento da função do segmento de reta tangente, da sombra e, por fim, da validade do instrumento.

Ao final, chegam à conclusão de que a função do segmento de reta tangente é possibilitar ao observador fazer com que o triângulo *KAE* da sombra seja retângulo e, assim, possa estabelecer a relação de congruência com o triângulo *KAF*. Já em relação à sombra (triângulo *KAE* projetado sobre a tábua do instrumento), apontam que, sem ela, não teríamos a medida, pois ela marca a medida do arco no círculo graduado quando dois de seus vértices estão sobre o segmento de reta tangente. As conclusões dos discentes podem ser observadas na seguinte imagem (Figura 53):

Figura 53 — Conclusões dos alunos quanto ao uso do instrumento jacente no plano.



Fonte: Arquivos dos autores (2019).

Pelo destacado pelos discentes, o triângulo *KAE* da sombra projetado sobre a circunferência é congruente ao triângulo *AFK* por L.A.L. Partindo desse princípio, por definição de ângulo oposto pelo vértice[49], o ângulo $\widehat{\mathrm{AFK}}$ corresponde à altura do Sol ao zênite, logo, a parte sombreada sobre o quadrante da tábua também corresponderá a essa altura. Seguindo essa lógica, concluem que o complementar de $\widehat{\mathrm{AFK}}$ indicará a medida da altura do Sol acima do horizonte.

Questões de ordem prática, material e matemáticas incorporadas na situação de uso do instrumento jacente no plano

Como se pode observar na situação de uso do instrumento jacente no plano, as necessidades para realização da medida da altura do Sol acima do horizonte desencadearam nos discentes algumas dúvidas de ordem prática, material e matemática. Como exemplo, tem-se a tentativa de posicionar a tábua do instrumento paralela ao plano do horizonte, em que se depararam com questões adversas, como a influência do vento e necessitaram ainda recorrer a outros materiais e a conhecimentos geométricos. No quadro 18, a seguir, expõe-se, por meio de uma transcrição literal, as considerações

49 Como a linha que passa pelo ponto **f** é paralela ao horizonte e também à tábua do instrumento, com base na definição de ângulo oposto apresetanda por Rezende e Queiroz (2008), nota-se a existência de ângulos opostos pelo vértice, isso porque os lados do triângulo **afk** são também semiretas opostas aos lados do ângulo da distância do Sol ao Zênite.

e impressões dos discentes apresentadas em seus relatórios acerca das questões incorporadas na situação de uso.

Quadro 18 — Questões e considerações de ordem prática, material e matemática observadas no processo de uso do instrumento jacente no plano

Grupo	Questões de ordem Prática	Questões de ordem Material	Questões de ordem Matemática
Grupo 1	Na prática, a maior dificuldade foi o plano e, pela medida parecida das equipes, provavelmente tenha dado certo.	O uso de auxílios para a obtenção do plano reto, ou seja, paralelo a linha do horizonte. - Tijolos; - Apoio com as mãos.	A dificuldade do plano paralelo à linha do horizonte ocasionou medidas não exatas, e como a posição do Sol muda constantemente sempre saía uma nova graduação.
Grupo 2	Tivemos dificuldades de nivelar a tábua e percebemos que havia a necessidade de adicionar um novo material.	Acrescentamos barbante ao material, pois é o meio que achamos mais lógico para nivelar a tábua com precisão.	Com a construção do barbante do plano, fizemos um nó central, de modo que do nó aos vértices da tábua, o barbante fosse equidistante e o ponto central fosse ortogonal com o plano, assim como o plano fosse paralelo ao horizonte.
Grupo 3	- Dificuldades no nivelamento do instrumento; - Fatores naturais (vento).	- Notamos que seria preciso o auxílio de outros instrumentos ou suporte, para deixar o objeto paralelo ao horizonte. - A divisão dos ângulos foi algo essencial que antes tínhamos desconsiderado.	Os conhecimentos sobre planos paralelos, perpendicularidade e gravidade foram necessários para o funcionamento do instrumento.
Grupo 4	- Realmente foi utilizado no mar? - Possível uso apenas teórico.	- Necessidade de utilizar instrumentos terceiros para garantir a perpendicularidade do instrumento jacente com a gravidade e, posteriormente, o paralelismo com o horizonte.	É necessário conhecimento de Física, como gravidade, massa e peso para utilização possível do instrumento.

Fonte: Arquivo dos autores (Relatório dos grupos, 2019).

Como se pode observar nesse quadro, os discentes tiveram que considerar várias questões durante a situação de uso. Nesse sentido, entende-se que é importante preservar a relação de indissociabilidade existente entre essas questões, caso se tenha como intenção trabalhar com o ensino e aprendizagem de conhecimentos geométricos a partir da proposta de construção de interface entre história e ensino da matemática.

Na proposta de construção de interface aqui assumida, essas questões foram responsáveis por conduzir os alunos à apreensão de determinados objetos matemáticos. Diante do exposto, aponta-se ainda que, ao abordar o instrumento jacente no plano ou qualquer outro instrumento, “[...] devemos não só compreender as relações matemáticas implicadas nas partes de sua composição e no seu uso, mas também entender por que razão cada uma dessas partes lá estão e é mobilizada ao utilizá-lo” (SAITO, 2016a, p. 12).

O potencial didático do instrumento jacente no plano para o ensino e a aprendizagem de conhecimentos geométricos na formação inicial de professores

Como destacado no capítulo introdutório, esta pesquisa parte do fato de conhecimentos geométricos de estudantes da educação básica e ensino superior ainda serem algo muito superficial. Diante desse problema e a partir do instrumento jacente no plano como possível recurso didático, nesta seção, procura-se, a partir do estudo da construção e uso desse aparato, apresentar resposta para a pergunta diretriz desta pesquisa: como o instrumento jacente no plano pode favorecer o ensino de conhecimentos geométricos na formação inicial de professores?

Como resposta, entende-se que seja através da necessidade dos discentes em compreender os conceitos que estão sintetizados nele, os quais são mobilizados durante o processo de construção e uso do aparato. Nesse sentido, o instrumento favorece tanto a compreensão de conceitos geométricos que estão sintetizados, como também o entendimento de como os conceitos se relacionam e, assim, compreender os conhecimentos incorporados.

Como exemplo, tem-se a discussão entre arco e corda destacada na seção “5.2.1 o triângulo retângulo isósceles como parte do instrumento jacente no plano”. Nela, nota-se que os estudantes mobilizaram diferentes conceitos, tais como segmento de reta, diâmetro da circunferência, círculo, ponto central e setor circular para compreender os objetos corda e arco de circunferência e, ainda, observar a relação existente entre eles.

No que se refere aos conhecimentos abordados no instrumento jacente no plano, sabe-se que ele tem incorporado uma vasta quantidade de conhecimentos geométricos, os quais, em linhas gerais, correspondem a tópicos da geometria plana e espacial. Como exemplo, tem-se: construções geométricas, homotetia, perpendicularismo entre retas e entre planos, paralelismo entre planos, reta tangente, tipos de triângulos, congruência de triângulos, circunferência, arcos, cordas e projeção.

Em relação ao trabalho com esses conteúdos, pelo que se pode verificar na atividade de estudo do instrumento jacente no plano, entende-se que ele pode ser utilizado em sala de aula como recurso didático potencializador do desenvolvimento de processos de pensamento. Em relação ao movimento que o aluno faz para apreender esses conhecimentos geométricos, o instrumento se mostra valioso, visto desencadear discussões de ordem epistemológicas e também porque:

> [...] a construção de instrumentos e seu uso promove um deslocamento de concepções familiares para outras bastante incomuns. Esse deslocamento e a dialética proporcionada pela articulação entre duas diferentes concepções (do passado e do presente) favorecem a reconstrução das ideias matemáticas já preconcebidas e sedimentadas pelo discente, fazendo-o (re)significar o objeto matemático. Nesse movimento o objeto matemático é desconectado das malhas formais e reintegrado ao processo de sua elaboração, fazendo o discente tomar consciência de que a formalização é também uma construção (SAITO, 2014, p. 29).

Nessa perspectiva, nota-se um ambiente favorável para os discentes significarem e apreenderem os objetos matemáticos. Pelo trabalho com o instrumento jacente no plano, os professores podem enriquecer de história os conhecimentos geométricos, de tal forma que conduzam os processos de pensamento dos alunos a corrigi-los, complementá-los e desenvolvê-los.

Diante do analisado e discutido nesse capítulo, a seguir se faz uma explanação das conclusões dessa pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao assumir, como base para o desenvolvimento da pesquisa, a proposta de construção de interface entre história e ensino da matemática, na qual se deve considerar tanto questões didáticas como históricas, buscou-se estabelecer um diálogo entre história da matemática e educação matemática. Essa tentativa de aproximação, como se pode ver no decorrer dos demais capítulos, aponta, em seu movimento, a necessidade de articulação entre essas áreas de estudo para que se possa conhecer a essência de determinados objetos matemáticos.

Como um dos passos desta pesquisa, teve-se que selecionar um instrumento matemático presente na história que abordasse alguns conhecimentos geométricos, haja vista o ensino de conhecimentos geométricos serem o foco da pesquisa no campo da educação. Como já planificado em capítulos anteriores, o instrumento trabalhado foi o instrumento jacente no plano de Pedro Nunes, o primeiro olhar, acerca do texto desse aparato, apontava para o trabalho apenas com conteúdos escolares familiares do ensino de geometria.

À luz da proposta de construção de interface aqui assumida e da existência apenas de conteúdos familiares, foi que se propôs o objetivo geral deste estudo, que foi conhecer o potencial didático do instrumento jacente no plano para o ensino de conhecimentos geométricos na formação inicial de professores. Como forma de obtê-lo, voltou-se à proposta de interface para realizar os dois momentos que ela prevê: o movimento do pensamento na formação do conceito matemático e o contexto no qual os conhecimentos matemáticos foram desenvolvidos.

Por não haver uma determinação de qual deva ser realizado primeiro, achou-se conveniente iniciar pelo contexto em que os conhecimentos matemáticos foram desenvolvidos. Nessa direção, o objetivo foi identificar, a partir da obra *De arte atque ratione navigandi* (1573), o contexto no qual o instrumento jacente no plano foi elaborado. Para tanto, fez-se uso do aporte metodológico, tanto de uma pesquisa qualitativa documental, como também de uma bibliográfica. À luz dessas abordagens metodológicas, notou-se que ele não era algo isolado, que sua compreensão extrapolava a simples leitura dos trechos de instrução do quinhentista, que ele apontava as especificidades de seu autor e que era um produto de toda uma rede de conhecimentos.

Essas conclusões vieram de todo o contexto de elaboração desse instrumento, em que se pode observar, por exemplo, que as diferentes versões para o instrumento jacente no plano, possivelmente, estavam associadas ao apreço que Pedro Nunes detinha pelas matemáticas. O fato de não se ter registro de uma construção física do instrumento no século XVI, indica que ele foi apenas uma concepção teórica, fato que ainda aponta para as características do cosmógrafo-mor Pedro Nunes, o qual no período era visto como um teórico.

Ainda em relação ao contexto desse instrumento, cabe destacar que os conhecimentos matemáticos, incorporados nele, sustentavam a sua validade, já a altura que ele fornecia era utilizada nos processos de determinação da latitude, a qual estava ligada a questões de navegação, que, por sua vez, tinham sua expansão associada ao desenvolvimento de Portugal. Percebe-se, assim, que ao buscar localizar o instrumento em seu tempo e espaço, emergem tanto os conhecimentos internos da matemática e de outras áreas do saber, como também as necessidades que impulsionaram seu desenvolvimento, favorecendo, portanto, o entendimento da essência desse objeto.

A principal dificuldade, em identificar o contexto de elaboração do instrumento jacente no plano, foi construir a teia de conhecimentos a qual repousava. Para sua elaboração, além das instruções de sua construção e uso presentes em *De arte atque ratione navigandi* (1573), ainda foi necessário considerar elementos da obra no geral e outros textos do período. Além de textos secundários à obra, também se teve que buscar conhecer elementos do contexto de Portugal no período.

Quanto ao outro momento da interface, que se refere ao movimento do pensamento na formação do conceito matemático, teve-se como objetivo reconhecer conhecimentos geométricos mobilizados na construção e uso do instrumento jacente no plano. Para obtê-lo, ainda se trabalhou sob o aporte metodológico de uma pesquisa qualitativa documental e também de uma bibliográfica. Dessa intenção, cabe destacar que não se conseguiu cumpri-la, sem considerar elementos do contexto no qual os conhecimentos matemáticos foram desenvolvidos.

Ao passo que se buscava reconhecer os conhecimentos geométricos, sentia-se a necessidade de recorrer a elementos de seu contexto de elaboração. A exemplo, tem-se a tentativa de identificar o costume de se dividir a circunferência em 360 partes que Pedro Nunes instrui, apesar de se ter o entendimento de que essa tarefa é praticamente impossível, ainda assim, procurou-se apontar alguns indícios para esse costume.

Nesse sentido, fez-se então um movimento de ida ao contexto da obra *De arte atque ratione navigandi* (1573), na qual o instrumento jacente no plano está descrito, como forma de identificar as leituras que Pedro Nunes havia realizado para elaborar sua obra. Dessa atividade, notou-se que o quinhentista teve acesso às edições dos *Elementos*, de Euclides; de uma leitura acerca dos conteúdos dessa obra, foi possível apontar um indício para o referido costume.

Ainda na tentativa de reconhecer os conhecimentos geométricos mobilizados na construção e uso do instrumento jacente no plano, destaca-se que foi necessário buscar (re)construir o instrumento, bem como compreender as suas partes. Esse movimento possibitou tanto atribuir mais significados a ele e à incorporação de suas partes, como também tomar consciência da indissociabilidade entre o processo de construção e uso do instrumento, ou seja, entre o saber e o fazer. Ao focar em apenas um deles, sem considerar o outro, perde-se a oportunidade de compreender o instrumento em sua totalidade.

Como resultados dessa tentativa de reconhecer os conhecimentos geométricos incorporados no instrumento, notou-se que ele aborda alguns tópicos das construções geométricas, semelhança de triângulos, ângulos opostos, paralelismo entre planos, dentre outros conteúdos. Além disso, ainda se observou que as conclusões teóricas indicadas por Pedro Nunes, em sua obra, estavam em grande parte ancoradas nas definições e proposições matemáticas de Euclides e que o costume, a que o quinhentista elucida, pode estar indicado nas instruções de Simão de Oliveira, apresentadas em sua *Arte de Navegar* (1606).

Dentre as dificuldades para se chegar a esses dados, cabe destacar o movimento realizado para a (re)construção do instrumento jacente no plano. O primeiro trabalho foi consultar *De arte atque ratione navigandi* (1573), a fim de encontrar o costume de se dividir a circunferencia em 360 graus. Como não foi identificado nela, ainda foi necessário verificar outras fontes do período.

À luz dos dados coletados nesses dois momentos previstos pela interface, foi proposta uma atividade em que se buscou reconhecer ainda mais conhecimentos matemáticos incorporados no processo de construção e uso do instrumento jacente no plano e também promover discussões, análises e sínteses sobre esses conhecimentos. Nessa direção, o último objetivo da pesquisa foi descrever a atividade de construção e uso do instrumento jacente no plano, aplicado à formação inicial de professores. A atividade foi elaborada com base nos presupostos teóricos-metodológicos da AOE. Sua descrição possibilitou flagrar indícios do movimento do pensamento que os discentes realizavam para cumprir determinadas necessidades e para apreender alguns objetos matemáticos.

Como exemplo, pode-se destacar a necessidade de posicionar a tábua do instrumento jacente no plano paralela ao plano do horizonte. Para o cumprimento dessa instrução do quinhentista, os discentes tiveram que atribuir significado ao plano do horizonte e ao plano da tábua. Alguns ainda recorreram a conhecimentos historicamente acumulados, como forma de compreender o paralelismo entre planos, outros alunos apontaram que a atividade impulsionou atribuir mais significado a esse conteúdo. Somada essas observações com o fato de terem visualizado no fio de prumo uma possibilidade para o trabalho com perpendicularismo, entende-se que, possivelmente, eles tenham reconfigurado o conceito dos objetos matemáticos abordados.

Teve-se como dificuldade, para a descrição e análise do curso, encontrar unidades entre as ações e falas dos discentes acerca do estudo da construção e uso do instrumento jacente no plano. A saída encontrada, para tanto, foi tomar como base os episódios estabelecidos a priori, os quais já haviam sido elencados a partir de unidades mínimas de análise extraídas do segundo capítulo.

A atividade de estudo da construção e uso do instrumento jacente no plano, junto aos discentes, foi responsável por indicar ainda mais conhecimentos mobilizados além dos pontuados nos capítulos um e dois. Em relação aos conhecimentos geométricos, apontaram, por exemplo, o conceito de homotetia; quanto a tópicos de outras áreas, mobilizaram a noção de direção (área de geografia) e gravidade (área de física). Diante disso, vê-se que o intrumento jacente no plano tem incorporado tanto conhecimentos da própria matemática, como também de outras áreas, ilustrando, dessa forma, a possibilidade de interdisciplinaridade a partir desse aparato.

No que se refere à realização dos objetivos dessa pesquisa, verificou-se que existe uma dialética e unidade entre os dois movimentos previstos na interface. Visto que, ao se recorrer à história de determinados objetos para se aprofundar na compreensão de sua lógica e funcionamento, esse movimento e essa reflexão por ele desencadeados favorecem a compreensão de sua essência. Fato que reforça a proposta de que atividades elaboradas na interface entre história e ensino da matemática podem contribuir com o processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Diante da gama de conhecimentos geométricos mobilizados na atividade com o instrumento jacente no plano e dos dois momentos realizados na interface com esse instrumento, destaca-se que esta pesquisa pode ser tomada como ponto de partida para o trabalho do professor de matemática, seja no ensino superior ou educação básica. Isso porque, a partir deste estudo, a depender de sua intenção didática, os docentes poderão atribuir ainda mais significado a determinados objetos matemáticos e também elaborar propostas de atividades que venham a favorecer o movimento de apreensão e compreensão do conhecimento realizado pelos alunos.

No geral, cabe destacar três principais dificuldades vivenciadas para o desenvolvimento desta pesquisa. A primeira, refere-se à necessidade de entendimento da proposta de construção de interface entre história e ensino da matemática aqui assumida. A segunda, foi compreender os dois momentos previstos nessa interface (o movimento do pensamento na formação do conceito matemático e o contexto no qual os conhecimentos matemáticos foram desenvolvidos). A terceira, diz respeito à necessidade de se deixar de lado uma perspectiva historiográfica tradicional e passar a pensar e escrever na direção de uma perspectiva historiográfica atualizada.

Em relação a pesquisas futuras, a depender da intenção do pesquisador, entende-se que se pode, por exemplo, buscar elencar mais elementos do contexto de elaboração do instrumento jacente no plano ou ainda elaborar atividades voltadas ao ensino de determinados conhecimentos geométricos. No que se refere à sua contrução, pode-se explorar as outras configurações do aparato, como a versão na tábua circular e/ou a do triângulo duplicado. Em relação ao seu uso, seria válido discutir a possibilidade de posicionamento na vertical.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Luís de. **Curso de história da náutica.** Coimbra: Livraria Almeida, 1972.

ALBUQUERQUE, Luís de. **Instrumentos de Navegação.** Lisboa: Comissão Nacional para a Comemoração dos Descobrimentos Portugueses, 1988.

ALBUQUERQUE, Luís de. Uma tradução portuguesa da “Navegacion Especulativa” de António de Naiera. In: A Náutica e a Ciência em Portugal. **Notas sobre as navegações**, (Lisboa: Gradiva, 1989) 25-41.

ALMEIDA, Bruno José M. G. Pereira de. **A influência da obra de pedro nunes na náutica dos séculos XVI e XVII: um estudo de transmissão de conhecimento.** 2011. 595 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutoramento em História e Filosofia das Ciências, Universidade de Lisboa Faculdade de CiÊncias Secção Autónoma de História e Filosofia das Ciências, Lisboa, 2011. Disponível em: < http://repositorio.ul.pt/handle/10451/6699>. Acesso em: 12 jul. 2018.

ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Etnografia da prática escolar**. 14. ed. São Paulo: Papirus, 2008.

ALVES, Verusca Batista; PEREIRA, Ana Carolina Costa. A matemática por trás da construção física e graduação da régua de cálculo circular. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/online**, Sergipe, v. 8, n. 2, p.11-30, 2018. Disponível em: <https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/191/162>. Acesso em: 09 maio 2018.

ARAUJO, Elaine Sampaio Araujo; MORAES, Silvia Pereira Gonzaga de. Dos princípios da pesquisa em educação como atividade. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo de. (Org). **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017.

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; TEIXEIRA, Marcos Vieira; NOBRE, Sergio Roberto. A Investigação Científica em História da Matemática e suas Relações com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiane; BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 164-185.

BARROS, Priscila Bezerra Zioto. **A Arte na Matemática: contribuições para o ensino de geometria**. 2017. 206 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de pós-graduação em docência para a educação básica, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2017.

BATISTA, Antonia Naiara de Sousa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. A balestilha: um instrumento náutico como recurso para abordar conceitos matemáticos. **HipÁtia - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**, São Paulo, v. 2, n. 1, p.40-51, 2017. Disponível em: < http://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/265/180>. Acesso em: 09 maio 2018.

BATISTA, Antonia Naiara de Sousa. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso da balhestilha, inserida no documento *chronographia, reportorio dos tempos...*, aplicado na formação de professores.** 2018. 114 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2018.

BELTRAN, Maria Helena Roxo; SAITO, Fumikazu; TRINDADE, Lais dos Santos Pinto. **História da Ciência para formação de professores.** São Paulo: Livraria da Física, 2014.

BEO, Naci di. **O estudo do Tratado del Radio Latino: Possíveis contribuições para a articulação entre História da Matemática e ensino.** 2015. 115 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

BORBA, Sérgio da Costa. Aspectos do conceito de multirreferencialidade nas ciências e nos espaços de formação. In: BORBA, Sérgio da Costa (Org.). **Reflexões em torno da abordagem multirreferencial**. São Carlos: EdUFSCar, 1998.

BRAGA, Theodoro. **Desenho linear geométrico**. 14ª. São Paulo: Ícone, 1997.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias**. Brasilia: MEC, 2006.

CANAS, António José Duarte Costa. Apropriação de Pedro Nunes por João Baptista Lavanha. In: Encontro luso-brasileiro de história da matemática, 6., 2011b, Minas Gerais. **Anais do 6º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática.** Rio Grande do Norte: Sbhmat, 2014. p. 45 - 70.

CANAS, António José Duarte Costa. **A obra náutica de João Baptista Lavanha (c. 1550 – 1624).** 2011a. 401 f. Tese (Doutorado) - Doutoramento em história especialidade – História dos Descobrimentos e Expansão, Universidade de Lisboa Faculdade de Letras Departamento de História, Lisboa, 2011a. Disponível em: < http://repositorio.ul.pt/handle/10451/6140>. Acesso em: 08 nov. 2018.

CARVALHO, Benjamin de A. **Desenho Geométrico**. Rio de Janeiro: Ao livro técnico, 1958.

CASTILLO, Ana Rebeca Miranda; SAITO, Fumikazu. Algumas considerações sobre o uso do báculo (BACULUM) na elaboração de atividades que articulam história e ensino de matemática. In: FLORES SALAZAR, J.; UGARTE GUERRA, F.. (Org.). **Investigaticiones en Educatión Matemática**. 1ed. Lima: Fondo Editorial PUCP, 2016, v., p. 237-251.

CASTILLO, Ana Rebeca Miranda. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso do báculo (*cross-staff*) em *A Boke Named Tectonicon* de Leonard Digges**. 2016. 121 f. Tese (Doutorado). Educação Matemática, São Paulo: PUCSP, 2016.

COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A.. **Planejando o trabalho em grupo.** 3. ed. Porto Alegre: Instituto Sidarta, 2017.

COSTA, Abel Fontoura da. **Pedro Nunes (1502-1578)**. Lisboa: Agencia Geral do Ultramar, 1969.

DIAS, Marisa da Silva. **Formação da imagem conceitual da reta real –** um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica. 2007. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo, 2007.

DIAS, Marisa da Silva; SAITO, Fumikazu. A resolução de situações-problema a partir da construção e uso de instrumentos de medida segundo o tratado *Del modo di misurare* (1564) de Cosimo Bartoli. In: CONGRESSO INTERNACIONAL PBL 2010, São Paulo**. Anais...** São Paulo: Pan American Network of Problem Based Learning: USP, 2010.

DIAS, Marisa da Silva; SAITO, Fumikazu. Algumas potencialidades didáticas do "setor trigonal" na interface entre história e ensino de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 4, p. 1227-1253, 2014.

DIAS, Marisa. da Silva; SAITO, Fumikazu. Interface entre história da matemática e ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. In: IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2009, Brasília. **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Brasília: SBEM, 2009. p. G05-G05.

EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: UNESP, 2009. Tradução de: Irineu Bicudo.

FIGUEIREDO, Candido de. **Novo Diccionário da Língua Portuguesa.** Lisbôa: Portugal Brasil, 1913.

FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flemming; MELO, Ana Cláudia Collaço de. **Tendências em Educação Matemática.** 2. ed. Palhoça: Unisul Virtual, 2005. 87 p.

GODOY, Arilda Schmidt. Pesquisa Qualitativa Tipos Fundamentais. **Raje-revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n. 3, p.20-29,1995. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/rae/v35n3/a04v35n3.pdf>. Acesso em: 15 maio 2018.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 7 - geometria analítica**. São Paulo: Atual, 1993.

LAVANHA, João Baptista, ***Tratado del arte de navegar***. Ms. 2317, fols. 20r-45v, 1588. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/6140>. Acesso em: 15 maio 2018.

LEITÃO, Henrique. Anotações ao *De arte atque ratione nauigandi*. In ***Pedro Nunes. Obras,* vol. IV**, Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2008, p. 515-794.

LEITÃO, Henrique. Anotações ao *Tratado da Sphera*. In ***Pedro Nunes. Obras*, vol. I**, Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2002b, p. 221-280.

LEITÃO, Henrique. ***Ars* e *Ratio*: A Náutica e a Constituição da Ciência Moderna**, In: La ciencia y el mar. Valladolid: Los autores, p. 183-207, 2006.

LEITÃO, Henrique. **Novos resultados sobre a importância das obras de Pedro Nunes**. Memórias da Academia das Ciências de Lisboa. Classe de Ciências, v. 1, tomo 43, p. 317-340. 2006-2007.

LEITÃO, Henrique. Para uma biografia de Pedro Nunes: o surgimento de um matemático, 1502-1542. **Cadernos de Estudos Sefarditas**, Lisboa, v. 3, p.45-82, 2003. Disponível em:

<http://www.catedra-alberto-benveniste.org/_fich/15/HENRIQUE_LEITAO.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2018.

LEITÃO, Henrique. Pedro Nunes e a matemática do século XVI. **História da Ciência Luso-brasileira**: Coimbra entre Portugal e o Brasil, Coimbra, p.19-33, 2013.

LEITÃO, Henrique. Pedro Nunes, leitor de textos antigos e modernos. In: Aires A. Nascimento (Coord.), **Pedro Nunes e Damião de Góis, Dois rostos do humanismo português, Actas de colóquio no V Centenário do Nascimento 2002 – 28 de Junho** (Lisboa: Faculdade de Letras de Lisboa, Centro de Estudos Clássicos, Guimarães Editores), p. 31-58. 2002a.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2013.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARTINS, Eugeniano Brito; PEREIRA, Ana Carolina Costa; FONSECA, Paulo Henrique Souza. Redescobrindo o conceito de logaritmo por meio da construção da régua de cálculo linear. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, Espírito Santo, v. 6, n. 3, p.47-65, 2016. Disponível em: < http://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/498>. Acesso em: 09 maio 2018.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MORAES, Michele de Sousa. **"Setor trigonal: Contribuições de uma atividade didática na formação de conceitos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática"**. 2017. 113 f. Dissertação (mestrado) – Curso Programa de Pós-graduação em Docência para a Educação Básica, Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2017. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/150647>. Acesso em: 12 jul. 2018.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. A Atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, Rio Claro, v. 11, n. 12, p. 29-43, 1997.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. *et al*. ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO: unidade entre ensino e aprendizagem. **Rev. Diálogo Educ**., Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, 2010.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. *et al*. A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo de. (Org). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Campinas, São Paulo: Autores associados, 2016.

NUNES, Paulo Jorge Antunes. **Os instrumentos náuticos na obra de Pedro Nunes.** 2012. 162 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado de História Marítima, Universidade de Lisboa Faculdade de Letras Departamento de História, Lisboa, 2012. Disponível em: < http://repositorio.ul.pt/handle/10451/8968>. Acesso em: 12 jul. 2018.

NUNES, Pedro. ***Petri Nonii Salaciencis Opera*. Reprodução facsimilada da edição publicada em Basileia em 1566**. Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2002).

NUNES, Pedro, ***Tratado da Sphera Astronomici introdvctorii de spaera epitome. Pedro Nunes Obras, vol. I***. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2014.

NUNES, Pedro. Obras: ***De Arte Atque Ratione Navigandi***. vol. IV, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.

NUNES, Pedro. ***Petri Nonii Salaciensis De Arte Atque Ratione Nauigandi Libri Duo. Eiusdem in theoricas Planetarum Georgij Purbachiij annotationes, & in Problema mechanicum Aristotelis de motu nauigij ex remis annotatio vna. Eiusdem De erratis Orontij Finoei Liber vnus. Eiusdem de Crepusculis lib. I. Cum libello Allacen de causis Crepusculorum***. - Conimbricae : in aedibus Antonij à Marijs, 1573. Disponível em: <http://purl.pt/14448>. Acesso em: 12 jul. 2018.

NUNES, Pedro. ***Petri Nonnii Salaciensis Opera, quae complectuntur, primum, duos libros in quorum priore tractantur pulcherrima problemata. In altero traduntur ex Mathematicis disciplinis regulae & instrumenta artis nauigandi, quibus uaria rerum Astronomicarum... circa coelestium corporum motus explorare possumus. Deinde, Annotationes in Aristotelis Problema Mechanicum de Motu nauigij ex remis: Postremo, Annotationes in Planetarum Theoricas Georgii Purbachii***.... - Basileae : ex Officina Henricpetrina, 1566. Disponível em: <http://purl.pt/14447>. Acesso em: 12 jul. 2018.

NUNES, Pedro. ***Tratado da sphera com a Theorica do Sol e da Lua. E ho primeiro liuro da Geographia de Claudio Ptolomeo Alexãdrino. Tirados nouamente de Latim em lingoagem pello Doutor Pero Nunez Cosmographo del Rey dõ João ho terceyro deste nome nosso Senhor. E acrecẽtados de muitas annotações e figuras per que mays facilmente se podem entender. Item dous tratados que o mesmo Doutor fez sobre a Carta de marear. Em os quaes se decrarão todas as principaes duuidas da nauegação. Cõ as tauoas do mouimento do sol: e sua declinação. E o Regimẽto da altura assi ao meyo dia: como nos outros tempos***. Lisboa: Germão Galharde, 1537. Disponível em: <http://purl.pt/14445/4/res-410-v_PDF/res-410-v_PDF_24-C-R0150/res-410-v_0000_rosto-93v_t24-C-R0150.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2018.

OLIVEIRA, Francisco Wagner Soares. **Concepções de professores de matemática sobre o uso da história no ensino.** 2017. 70 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE, Canindé, 2017.

OLIVEIRA, Francisco Wagner Soares; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Elementos iniciais da relação entre o instrumento de Pedro Nunes, jacente no plano, e o cálculo da latitude no século XVI. **História da Ciência e Ensino: Construindo interfaces**, São Paulo, v. 19, p. 39-53, 2019. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/hcensino/article/view/42112/29300>. Acesso em: 14 set. 2019.

OLIVEIRA, Francisco Wagner Soares; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Indícios do *costume* relacionado a divisão da circunferência em seus 360 graus presente na fabricação do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes. **Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM),** São Paulo, 2020, no prelo.

OLIVEIRA, Simão de. ***Arte de Navegar***. Lisboa: Pedro Crasbeeck, 1606. Disponível em: <http://purl.pt/20845>. Acesso em: 12 jul. 2018.

PANOSSIAN, Maria Lucia *et al*. A atividade orientadora de ensino como pressuposto teóricometodológico de pesquisas. **Revista Reflexão e Ação**, Santa Cruz do Sul, v. 25, n. 3, p. 279-298, 2017. Disponível em: <https://online.unisc.br/seer/index.php/reflex/article/view/9765/pdf>. Acesso em: 14 set. 2019.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. In: **Revista Zetetiké**, ano 1, nº 1, p. 07-17. Campinas-SP: UNICAMP, Faculdade de Educação, 1993. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2611/2353>. Acesso em: 07 mar. 2016.

PENTEADO, Aline Mendes. **Pedro Nunes e a Distinção de Dois Tipos de Trajetórias na Navegação: A Linha de Rumo e o Círculo Máximo.** 2011. 208 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Instituto de Geociências e Ciências Exatas Câmpus de Rio Claro, São Paulo, 2011. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91026>. Acesso em: 12 jul. 2018.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **A obra "de Triangulis Omnimodis Libri Quinque" de Johann Müller Regiomontanus (1436 – 1476): uma contribuição para o desenvolvimento da Trigonometria.** 2010. 329 f. Tese (Doutorado) - Programa de pós-graduação em educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte centro de ciências sociais aplicadas, Natal, 2010. Disponível em: < ftp://ftp.ufrn.br/pub/biblioteca/ext/bdtd/AnaCCP_TESE.pdf>. Acesso em: 08 nov. 2018.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; BATISTA, Antônia Naiara de Sousa. A matemática do kamal: uma possibilidade de inserção no ensino. **Conexões - Ciência e Tecnologia**, Fortaleza, v. 10, n. 4, p.25-34, 2016. Disponível em: < http://conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/1141/834>. Acesso em: 09 maio 2018.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; MOREY, Bernadete Barbosa. Traços de uma história: um primeiro olhar da influência de Johann Müller Regiomontanus nas obras do matemático português Pedro Nunes. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 18, n. 35, p. 23-38, 2018.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. A reconstrução do báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Cocar**, Belém-PA, V. 13, n 25, p. 342-372, 2019a.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. Os conceitos de perpendicularidade e de paralelismo mobilizados em uma atividade com o uso do báculo (1636) de Petrus Ramus. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, p. 405-432, 2019b.

PINTO, Margarida Matias. Os instrumentos náuticos de navegação e o ensino da geometria. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2010.

PONTE, João Pedro da *et al*. **Por uma formação inicial de professores de qualidade**. Documento de trabalho da Comissão ad hoc do CRUP (Conselho de Reitores das Universidades Portuguesas). Lisboa, 2000. Disponível em: <https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/33978203/00-Ponte-etc%28CRUP%29.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1531402257&Signature=9gRBLUhTv%2BGu%2Ff4%2F1A9d9eyUGYU%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DPor_uma_formacao_POR_UMA_FORMACAO_INICIA.pdf>Acesso em: 12 julho 2018.

REIS, António Estácio do. Os instrumentos de medida. **As Novidades do Mundo: conhecimento e representação na Época Moderna, Lisboa**, Edições Colibri, 2003, pp. 145-167.

REZENDE, Eliana Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA e construções geométricas**. São Paulo: Unicamp, 2008.

SANTOS, António Ribeiro dos. **Da Vida Escritos de Pedro Nunes**. In: Memórias de Literatura Portuguesa publicadas pela Academia Real das Ciências de Lisboa, tomo VII. Lisboa, Academia das Ciências de Lisboa, 1806.

SANTOS, Tawana Telles Batista. **Contribuições do software GeoGebra para a formação de conceitos geométricos de acadêmicos ingressos na licenciatura em matemática**. 2018. 143f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Formação de Professores - Universidade estadual do sudoeste da Bahia, Jequié, 2018

SAITO, Fumikazu. Construindo interfaces entre história e ensino da matemática. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 3, n. 1, p.3-19, 2016a. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/29002/20273>. Acesso em: 03 jun. 2017.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. **Articulação de entes matemáticos na construção e utilização de instrumento de medida do século XVI**. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciências & Educação (Bauru)**, São Paulo, vol. 19, n. 1, p.89-111, 2013. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S151673132013000100007&lng=pt&tlng=pt>. Acesso em: 31 Jul. 2017

SAITO, Fumikazu. História e Ensino de Matemática: Construindo Interfaces. In: SALAZAR, Jesús Flores; GUERRA, Francisco Ugarte. **Investigaciones en Educación Matemática.** Lima: Fondo Editorial PUCP, 2016b. p. 253-291.

SAITO, Fumikazu. Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura** - Rematec, v. 9, n. 16, p. 25-47, 2014.

SAITO, Fumikazu. Número e grandeza: discutindo sobre a noção de medida por meio de um instrumento matemático do século XVI. **Ciência & Educação (Bauru)**, [s.l.], v. 23, n. 4, p.917-940, dez. 2017. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/1516-731320170040012.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SAITO, Fumikazu; PEREIRA, Ana Carolina Costa. **A elaboração de atividades com um antigo instrumento matemático na interface entre história e ensino**. São Paulo: Livraria da Física, 2019.

SILVA, Ana Paula Minhano da. **Uma interface entre história e ensino de matemática: contribuições na formação de conceitos de estudantes na construção e utilização de um instrumento de medida do século XVI – o quadrante geométrico**. 2019, 164 f. Dissertação

(Mestrado) - Curso de pós-graduação em docência para a educação básica, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2019.

SILVA, Evandro Ortiz da. **Problemas no ensino de geometria: uma proposta e análise da geometria como disciplina no ensino fundamental aliada ao ensino de desenho geométrico**. 2017. 92 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017.

SILVA, Isabelle Coelho da; BATISTA, Antonia Naiara de Sousa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Estudos iniciais sobre o instrumento cubit rod: teoria e prática na história da matemática. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/online**, Sergipe, v. 8, n. 2, p.1-10, maio 2018. Disponível em: <https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/189/160>. Acesso em: 09 maio 2018.

SILVA, Luciano Pereira da. **A primeira edição dos tratados latinos sobre a arte de navegar, de Pedro Nunes**. *Obras Completas*, Vol. II, (Lisboa: Agência Geral das Colónias, 1945) 209-217. Originalmente em: *Anais das Bibliotecas e Arquivos*, 2 (1921) 98-101.

SILVEIRA, Ê.; MARQUES, C. Matemática: compreensão e prática. Obra em quatro volumes para os 6º, 7º, 8º e 9º anos do ensino fundamental II. São Paulo: Moderna, 2013.

SOUZA, Patrícia Priscilla Ferraz da Costa. **O desenvolvimento do pensamento geométrico: uma proposta de recurso didático por meio da HQ**. 2018, 146 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2017

TEIXEIRA, Francisco Gomes, **História das Matemáticas em Portugal**. Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa, 1934.

VENTURA, Manuel Joaquim Sousa, **A Vida e Obra de Pedro Nunes**. Lisboa: Instituto de Cultura e Língua Portuguesa, 1985.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993.

SOBRE OS AUTORES

Francisco Wagner Soares Oliveira

Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (PGECM/IFCE) (2019), especialista em Metodologia do ensino de matemática e física pela Universidade Candido Mendes (2018), graduado em Licenciatura Plena em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - Campus Canindé (2017). Formador regional do MaisPaic na CREDE 7 Canindé na área de matemática nos anos finais do ensino fundamental (2019). Possui experiência como docente em matemática no Colégio Estadual Nazaré Guerra e como bolsista de iniciação à docência do Pibid de Matemática do IFCE Campus Canindé. Membro do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM/UECE).

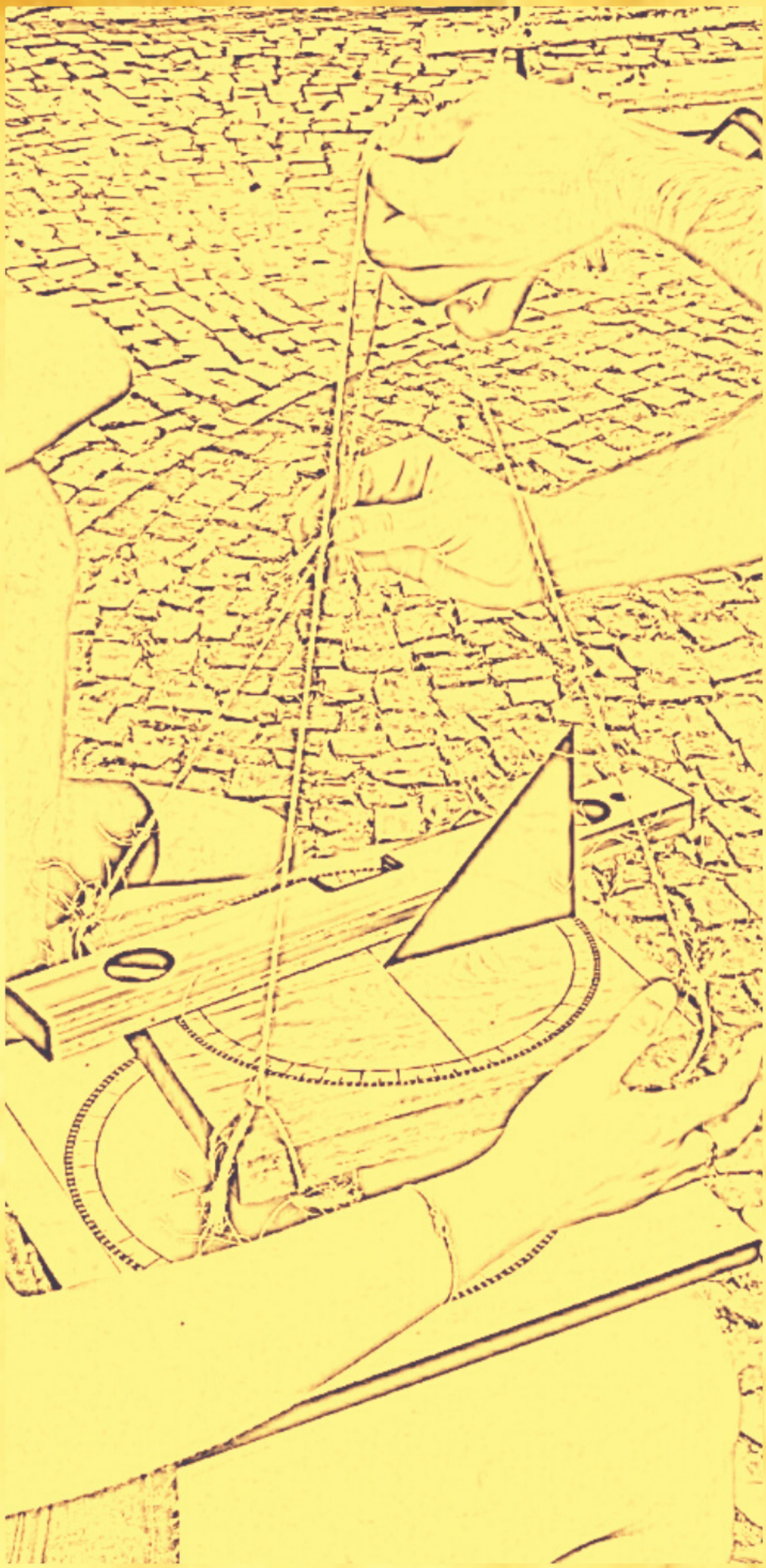
Ana Carolina Costa Pereira

Ana Carolina Costa Pereira possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará, mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte e pós-doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Atua como docente adjunta do curso de Licenciatura em Matemática e do Programa de Pós-graduação em Educação, ambos da Universidade Estadual do Ceará; e do Programa de Pós-Graduação de Ensino em Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Ela é Coordenadora do Curso de licenciatura em Matemática, modalidade semipresencial da UECE/EAD, Coordenadora da área da Matemática do Projeto Areninha junto a Secretaria de Educação do Município de Fortaleza, líder do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) e editora do Boletim Cearense de Educação e História da Matemática (BOCEHM). Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em História de Matemática, atuando principalmente na formação de professores de matemática e na interface entre história e ensino de matemática.

ÍNDICE REMISSIVO

Quipá Editora
www.quipaeditra.com.br
@quipaeditora

Quipá Editora
www.quipaeditra.com.br
@quipaeditora



ISBN 978-658909155-4