Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

MAURÍCIO NEVES BRANCO
FRANCISCO HERMES SANTOS DA SILVA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD

Produto Educacional

Belém-PA

2020

MAURÍCIO NEVES BRANCO
FRANCISCO HERMES SANTOS DA SILVA

Uma sequência didática para o ensino de inequações quadráticas à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud
Produto Educacional

Produto Educacional apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva.

Belém-PA

2020

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Esta produção intitulada “uma sequência didática para o ensino de inequações quadráticas à luz da teoria dos campos conceituais de Vergnaud” foi desenvolvida ao longo do curso de Mestrado do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

Com o passar dos anos, o processo de ensino exige cada vez mais dos professores do que apenas aulas expositivas que priorizam a tríade ‘definição, exemplo e exercícios’. Nesse cenário, criam-se métodos de ensino como propostas para serem agregadas ao processo. Assim, elaboramos esse produto educacional, fruto da dissertação de mestrado de Branco (2020), destinado para professores e estudantes do ensino médio para o ensino e aprendizagem das inequações quadráticas. Esse recurso didático foi experimentado e validado em nossa pesquisa, que ocorreu com uma turma do primeiro ano do ensino médio de uma escola da rede Pública, e apresentou resultados favoráveis no trato do ensino da inequações quadráticas.

Esse potencial produto foi embasado pela Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Essa Teoria nos ajudou a compreender a maneira pela qual os estudantes assimilam os conceitos envolvidos no ensino de inequação quadrática. Além disso, ela, também, nos auxiliou na análise quali-quantitativa dos dados obtidos com a aplicação das atividades que compõem esse produto educacional, levando-nos a compreensão dos invariantes operatórios que os estudantes manifestam na tentativa de resolver uma situação-problema.

A sequência didática (SD) apresentada nessa produção é composta por um pré-teste, quatro atividade de ensino e um pós-teste e foi aplicada nessa ordem em nossa pesquisa. O pré-teste foi a atividade inicial que nos forneceu um panorama da turma no qual seria realizada a investigação. Os objetivos desse pré-teste foi identificar sujeitos com maiores potencialidades de aprendizagem e fornecer elementos para analisar os efeitos e potencialidade da aplicação da sequência didática. As quatro atividades de ensino são auto orientadas, ou seja, não houve necessidade de explicações e intervenções do professor. No roteiro das atividades constam os objetivos e os procedimentos necessários para que os estudantes (ou equipes) prossigam com a atividade. Duas das quatro atividades foram elaboradas segundo a metodologia do ensino por atividade de redescoberta, segundo as pesquisas de Sá (2009). Ao final da aplicação das atividades de ensino, reaplicamos o pré-teste, renomeado como pós-teste, com objetivo de verificar quantitativamente o proveito da sequência didática.

Essa produção conta ainda com uma abordagem matemática para dar suporte técnico ao professor que for fazer uso da SD. Essa abordagem é uma contribuição para o professor, servindo-lhe como instrumentos de formação.

A aplicação da SD ocorreu em equipes, exceto a aplicação dos testes. Utilizamos a correção do pré-teste para identificar os sujeitos com maiores potencialidades e fazer com que eles estivessem ao menos um, nas equipes. Caso o professor deseje trabalhar em equipes, sugerimos que elas sejam formadas de 2 a 4 estudantes, para garantir que haja socialização entre todos e haja manutenção da zona de desenvolvimento proximal. Tal caminho metodológico foi embasado pelos estudos de Vygotsky que afirma que aprendizagem e desenvolvimento se dão por meio de interações sociais. Assim, em cada atividade, os estudantes (ou equipes) precisam registrar suas observações e conclusões e, em seguida, num momento predeterminado no planejamento do professor, fazer a socialização dessas conclusões às demais equipes.

Todo material necessário à utilização desse produto educacional, sobretudo aporte teórico, resultados de nossa investigação e sugestões ao estimados professores estão disponíveis a seguir.

Boa Leitura!

Maurício Branco

Francisco Hermes Silva

1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

As primeiras pesquisas sobre didática da matemática tiveram forte influência das teorias psicológicas de Piaget e Vygotsky e iniciaram-se há aproximadamente 50 anos. “A didática matemática (...) tem por objeto investigar os fatores que influenciam o ensino e aprendizagem da matemática e o estudo de condições que favorecem a sua aquisição pelos alunos” (ALMOULOUD, 2007, p.17). Em relação a essa aprendizagem e favorecimento da aquisição dela que concentramos nossa pesquisa.

A aprovação em determinado ano escolar não significa necessariamente que tenha ocorrido o desenvolvimento cognitivo do estudante. De fato, a aprendizagem e aquisição de conceitos ocorrem ao longo do tempo através de experiências e na busca por soluções em situações variadas, inclusive em situações reais. Contudo, segundo Schoenfeld (1992), crenças como: matemática é para resolver sozinho e não tem que compreender, conduzem os estudantes a nutrirem sentimentos negativos. O ‘resolver sozinho’ apontado por Schoenfeld decorre, segundo Silva (2016), de aula expositiva, e isso demonstra incompletude do professor em relação à zona de desenvolvimento proximal e à necessidade de interação social entre dois sujeitos, um sendo mais capaz que o outro. O ‘não tem que compreender’ é oriundo “da concepção de que, para aprender matemática, deve-se exercitar à exaustão” (SILVA, 2016, p.66). Silva (2016) aponta que o problema não é a técnica algorítmica ou ainda a repetição de exercícios por meio dela, mas a indução feita aos estudantes de que aqueles exercícios serão cobrados em provas (avaliação somativa). Não somos contra o ensino do algoritmo; referimo-nos ao ensino com ênfase nele, acreditando equivocadamente que matemática se resume a técnica. Não é difícil de constatar que há estudantes que estudam apenas na véspera da prova com o objetivo de memorizar as regras para obter sucesso, todavia um equivocado sucesso, pois será que o estudante, naquele momento, efetivamente compreendeu o conceito ensinado? Como foi apontada, a didática da matemática investiga condições favoráveis de aprendizagem do estudante e, no que diz respeito a esse tema, diversos pesquisadores debruçaram-se sobre ele para formular implicações ligadas à sala de aula. Entre eles, o psicólogo francês Gérard Vergnaud.

Vergnaud é considerado uma referência na didática da matemática, pois seus estudos têm implicações diretas nas salas de aula, embora ele mesmo em diversas ocasiões, afirma que sua teoria não é uma teoria didática, mas é significativa a ela por oferecer contribuições à compreensão do desenvolvimento cognitivo dos estudantes em situações de aprendizagem. Com influências Piagetianas[1], ele desenvolveu importantes estudos relativos à psicologia cognitiva, no qual destacamos a Teoria dos Campos Conceituais. Essa teoria psicológica refere-se ao desenvolvimento cognitivo dos indivíduos e tem por finalidade repensar as condições de aprendizagem em termos conceituais, de tal modo que torne a aprendizagem mais acessível à compreensão dos estudantes.

> Un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. A través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver es como un concepto adquiere sentido para el niño (VERGNAUD, 1990, p.1).

Dessa forma, a teoria desenvolvida por Vergnaud tem a conceitualização como essência do desenvolvimento cognitivo. Assim, não podemos impor a definição de um objeto matemático e obter aprendizado dos estudantes. Segundo o Vergnaud, não podemos contornar as dificuldades conceituais; devemos enfrentá-las e superá-las. E para que isso ocorra, é necessário "propor situações suscetíveis de provocar a evolução adaptativa da atividade e dos conhecimentos dos alunos, quaisquer que sejam suas idades" (NOGUEIRA E REZENDE, 2014 p. 48). A expressão 'situações' merece destaque por ser um conceito-chave da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

> El concepto de situación no tiene aquí el sentido de situación didáctica sino más bien el de tarea, la idea es que toda situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas de las que es importante conocer la naturaleza y la dificultad propias. La dificultad de una tarea no es ni la suma ni el producto de la dificultad de las diferentes subtareas, pero está claro que el fracaso en una subtarea implica el fracaso global (VERGNAUD, 1990, p.8).

Assim, situação tem o sentindo de tarefa e dessa maneira, Vergnaud busca relacionar o desenvolvimento do indivíduo com as tarefas que este é levado a resolver. Segundo Moreira (2002, p.11), "toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, para as quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias". Para Vergnaud (1990) são essas situações que dão significado aos conceitos matemáticos que se quer ensinar, isto é, são elas que dão sentindo ao conceito, porém o significado não está nas próprias situações. Por essa razão, concordamos quando ele afirma que "conhecimento é adaptação"

---

[1] Gérard Vergnaud foi orientando de Doutorado de Jean Piaget e ampliando os estudos dele, Vergnaud redireciona os seus para o estudo do funcionamento cognitivo do "sujeito-em-situação".

(VERGNAUD, 2009b, p.13). Portanto, precisamos propor aos estudantes situações que os estimulem, a fim de que eles possam assimilar os conceitos e mecanismos. Caso contrário, "eles não têm razão para aprender, isto é, os alunos não veem utilidade no que está sendo ensinado e pensam: Isso não me interessa. É abstrato e não serve para nada" (VERGNAUD, 2008).

Vergnaud considera, no sentindo psicológico, os processos cognitivos e as respostas do sujeito como funções das situações a que são confrontados. Além disso, Vergnaud aponta duas ideias relevantes relacionadas ao sentindo de situação: variedade e história.

> Variedade: há uma grande variedade de situações em um determinado campo conceitual, e as variáveis de situação são um meio de gerar sistematicamente o conjunto de classes possíveis; (...) história**:** o conhecimento dos alunos é modelado pelas situações que eles encontraram e progressivamente dominam, especialmente pelas primeiras situações que podem dar sentido aos conceitos e procedimentos que eles querem ensinar (VERGNAUD, 1990, p.10) (tradução nossa).

De acordo com Moreira (2002), Vergnaud diz que muitas de nossas concepções vêm das primeiras situações que fomos capazes de dominar ou de nossa experiência tentando modificá-las: "o indivíduo se adapta às situações; é por meio de uma evolução da organização de sua atividade que (...) se adapta" (VERGNAUD, 2009b, p.13). Nesse sentindo, Vergnaud em sua Teoria, introduz o conceito de esquema como "uma organização invariante da atividade para uma classe de situações dada" (ibid, p.21). Nogueira e Rezende (2014) ratificam que o conceito de esquema é fundamental para a compreensão da atividade do sujeito que aprende. "Aprender é construir conhecimentos e o conhecimento, segundo a teoria piagetiana, é um processo de adaptação" (ibid, p. 47).

Vergnaud (2009b) cita a atividade gestual como fundamental na atividade humana. Naturalmente, existe grande diferença entre os gestos de um bebê que aprende a pegar pequenos objetos e os gestos, por exemplo, de um químico trabalhando em seu laboratório. Entretanto, em qualquer caso, a organização da atividade gestual contém os mesmos componentes: o objetivo; o sequenciamento, a regulagem e o ajustamento do gesto; a identificação dos objetos materiais e de suas propriedades e o cálculo das ações a serem efetuadas, das informações a serem obtidas e dos controles a serem realizados. Segundo ele, são estes componentes que conduzem à definição de esquema[2]. Além disso, "é nos esquemas que se deve investigar o conhecimento em ato do sujeito[3]" (VERGNAUD, 1990, p.2, tradução nossa). Logo, entendemos por esquemas os comportamentos do sujeito e sua organização que são estimulados pelas características particulares de cada uma das situações. Assim, "frente a uma determinada situação, o sujeito age segundo as representações que dela faz, sendo o esquema o elo entre as representações e a sua conduta" (CARVALHO JR, 2008, p. 215).

> A conduta não é formada somente por ações, mas também por informações necessárias à continuidade da atividade, e os controles que permitem ao sujeito ter segurança de que ele fez o que pensava fazer e que ele continua no caminho escolhido (VERGNAUD, 2009b, p.22).

Segundo Vergnaud (2009b), representações tem o significado de categorias de pensamento com as quais um sujeito compreende as informações que existem em uma situação. Dessa forma, a representação é formada de sistemas de objetos e de predicados pertinentes ao qual o sujeito é levado a utilizar durante sua atividade.

> Para compreender a realidade e agir sobre ela, a criança constrói representações mentais dessa realidade. Entre essas representações, algumas não são acessíveis ao observador externo e o educador está, às vezes, despreparado para interpretar o que a criança acreditou compreender ou fazer (VERGNAUD, 2009a, p.86).

Nosso papel, o de educadores, é fundamental no processo, pois como sujeitos experientes e mediadores, temos a incumbência de provocar estímulos nos estudantes para que eles expressem seu raciocínio e sua criticidade, isto é, permitir que se manifeste a forma operatória do conhecimento, ou seja, "o que permite fazer e ter êxito" (VERGNAUD, 2009b, p.17).

Considerado outro conceito-chave da teoria, Vergnaud (2009b, p.21) afirma que um esquema é formado necessariamente por quatro componentes:

- Um objetivo, subobjetivos e antecipações;
- Regras em ação de tomada de informações e de controle;
- Invariantes operatórios: conceitos em ação e teoremas em ação;
- Possibilidades de inferência em situação.

Moreira (2002, p.12) descreve cada um dos componentes. Segundo ele, um esquema se dirige sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode

---

[2] Segundo Vergnaud (2009b) essas componentes também são observadas em outros registros de atividades como do discurso e diálogo.

[3] "En los esquemas es donde se debe investigar los conocimientos-en-acto del sujeto" (VERGNAUD, 1990, p.2).

descobrir uma possível finalidade de sua atividade e, eventualmente, subobjetivos; regras de ação do tipo "se... então" constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema, isto é, aquela que permite a produção e a continuidade da sequência de ações do sujeito; os invariantes operatórios dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são eles que constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas e, por fim, as possibilidades de inferência (ou raciocínios) que permitem "calcular” as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito, ou seja, toda a atividade implicada nos três outros ingredientes requer cálculos "aqui e imediatamente" em situação.

Como já mencionado, os esquemas estão ligados às situações. Desse modo, Vergnaud (1990, p.2) distingue duas classes de situações. A primeira classe são aquelas para as quais o sujeito tem em seu repertório, em um dado momento de seu desenvolvimento e, em certas circunstâncias, as competências necessárias para o tratamento relativamente imediato da situação. A segunda, as quais o sujeito não possui todas as habilidades necessárias, o que o obriga a um momento de reflexão e exploração, de dúvidas, tentativas abortadas e, eventualmente, leva ao sucesso ou fracasso. Segundo Vergnaud (1990) o conceito de esquema é interessante para ambos os tipos de classes de situações, porém não funciona da mesma maneira. No primeiro tipo, são observados para a mesma classe de situações, comportamentos automatizados, organizados por um único esquema; por outro lado, no segundo tipo, observa-se o uso continuado de vários esquemas, que podem entrar em competição e que, para chegar à solução procurada, devem ser ordenados, separados e recombinados.

Considerando que é nos esquemas que devemos pesquisar os conhecimentos-em-ação do estudante e eles, por sua vez, são fundamentais para a compreensão da atividade do sujeito que aprende quando submetidos às diversas situações, o terceiro item na lista dos componentes que formam um esquema é outro conceito-chave para a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud: os invariantes operatórios.

> O conceito de esquema pode conduzir a análise dos conhecimentos-em-ação do sujeito. Uma das maneiras de se verificar tais conhecimentos é por meio do acompanhamento dos diversos momentos em que os estudantes são chamados a dar respostas a problemas. É possível que se verifique, por meio da análise das estratégias utilizadas na resolução de um problema, os

> esquemas que um determinado sujeito lança mão, bem como os modelos mentais construídos frente a novas situações. Essa análise permite compor um quadro no qual se observa a evolução temporal dos modelos explicativos dos sujeitos, inferida a partir dos **conceitos-em-ação** e dos **teoremas-em-ação** utilizados ao longo de uma atividade de ensino (CARVALHO JR, 2008, p.216) (grifo nosso).

As expressões em destaque na citação de Carvalho Jr são o que Vergnaud chama de invariantes operatórios, isto é, “los conocimientos contenidos en los esquemas” (VERGNAUD, 1990, p.4). Segundo Nogueira e Rezende (2014), Vergnaud atribui grande relevância à reflexão nas aprendizagens matemáticas, e tenta compreender, nas ações dos sujeitos, as que estão relacionados a conhecimentos implícitos falsos ou verdadeiros. São esses conhecimentos que Vergnaud chama de invariantes operatórios, classificados em duas categorias: conceitos em ação e teoremas em ação. Segundo ele, são os invariantes que garantem o êxito da representação, permitindo-lhes integrar sua dupla função: refletir a realidade e prestar-se a um cálculo relacional. “São os invariantes que dão à representação seu carácter operatório. Daí seu nome” (VERGNAUD, 2009a, p.308)

> Os invariantes operatórios é um dos elementos da composição dos esquemas. Concernem às propriedades estruturais de qualquer esquema, generalizáveis ou não a diversas situações, aos mais diversos objetos a conhecer. Estes conhecimentos, chamados de conhecimentos em ação, podem ser explicitáveis ou não, conscientes ou não. Os conhecimentos tornam-se explicitáveis quando há tomada de consciência do sujeito (NOGUEIRA E REZENDE, 2014, p. 51).

Dessa forma, entendemos que os invariantes operatórios dizem respeito as atitudes do estudante, as estratégias que ele utiliza frente a uma situação e que se modifica de acordo com os conhecimentos prévios que ele possui. Segundo Vergnaud (1990) são esses invariantes operatórios que fazem a articulação entre teoria e prática. Assim, de acordo com Nogueira e Rezende (2014), para Vergnaud, não é apenas a resolução de um problema pelos sujeitos que interessa, mas sim o modo pelo qual eles resolvem e, principalmente, os invariantes operatórios que mobilizam ao resolver um problema. Portanto, “a observação de alunos em situação de solução de problemas, a análise de suas dúvidas e seus erros, mostra que os comportamentos em situação também são estruturados pelos esquemas” (VERGNAUD, 1990, p.4).

> (...) o professor deve estar atento ao interpretar as condutas das crianças e a não rejeitar como errados os caminhos não clássicos que ela pode empregar. Mesmo diante dos insucessos das crianças (...) existem

> elementos que permitem ver o que a criança compreendeu e o que ela não compreendeu, e de, assim sendo, apoiar-se nos próprios insucessos para fornecer as explicações necessárias (VERGNAUD, 2009a, p.212).

É necessário que nós educadores reflitamos sobre um hábito recorrente nas aulas de matemática: fornecer enunciados com uma sequência pré-definida. Esse modelo clássico de propor exercícios não estimula criatividade e autonomia dos estudantes (Sá, 2009). Além disso, não dá espaço à análise das relações que estão em jogo e, menos ainda, não se valoriza o trabalho matemático dos estudantes, onde o que está errado é descartado. Em relação a isso, Vergnaud (2009a, p.271) declara que “as respostas erradas não devem ser tratadas como aberrantes. Elas mostram que a criança trata corretamente as informações que retém”.

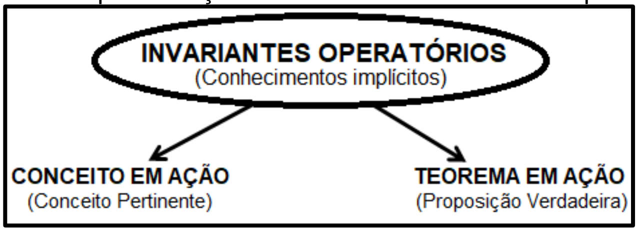
Nesse sentindo, concordamos com Vergnaud e sua Teoria que nos instrui a propor aos estudantes diversas situações-problemas para que eles, frente a elas, possam obter a aquisição e/ou assimilação de conceitos. Para Vergnaud (2009a), a aquisição de conceitos não é independente da solução de problemas que colocam esses conceitos em ação. Segundo ele, a solução de problemas é, ao mesmo tempo, um meio e um critério da aquisição de conceitos. Um meio porque a análise dos problemas, das soluções e dos erros é essencial para fazer com que a criança compreenda quais relações são importantes e como elas podem ser tratadas. E um critério porque o fracasso no tratamento das relações é um indicativo de lacunas ou desconhecimentos.

Componentes essenciais dos esquemas, Vergnaud (2009b, p.23) define conceito em ação como um conceito considerado pertinente na ação em situação e teorema em ação como uma proposição tida como verdadeira na ação em situação. Os conceitos em ação não precisam ser necessariamente verdadeiros, eles precisam ser significativos ou não para a situação. “Esses conceitos-em-ação permanecem, em sua maioria, implícitos ao longo da ação do sujeito” (CARVALHO JR, 2008, p. 219). Por outro lado, os teoremas em ação podem ser verdadeiros ou falsos de acordo com a situação. “Essas proposições permanecem, em sua maioria, implícitas nas ações do sujeito, podendo se tornar explícitas” (ibid, 2008, p. 220).

> Os invariantes operatórios são relevantes no ponto de vista cognitivo, uma vez que os conceitos em ação permitem retirar do meio as informações pertinentes e selecionar os teoremas em ação necessários ao cálculo, ao mesmo tempo, dos objetivos suscetíveis de serem formados, e de regras em ação, de tomada de informação e de controle permitindo atingi-los (VERGNAUD, 2009b, p.22).

Vergnaud (2009b) chama a atenção de que é preciso atentar que a condição de uma proposição pode oscilar entre o particular e o universal, isto é, entre todos os teoremas em ação alguns tem a condição de proposição tida como verdadeira no momento presente; enquanto outros são universalmente verdadeiros, para toda classe de situações. Isso deixa evidente a natureza distinta dos tipos de invariantes operatórios.

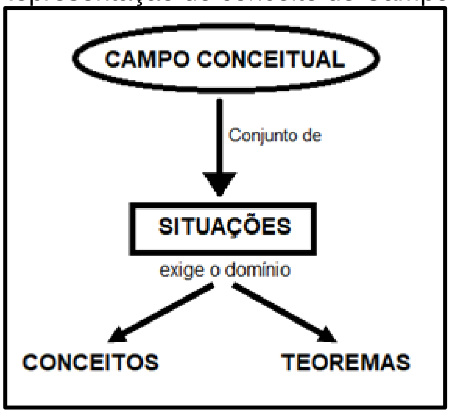
Figura 1 – Representação do conceito de invariantes operatórios



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Como foi mencionado, a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud é uma teoria referente ao desenvolvimento cognitivo que tem por finalidade repensar as condições de aprendizagem em termos conceituais: “teoria sobre a cognição que busca compreender o desenvolvimento dos conceitos, suas filiações e rupturas, no decorrer da aprendizagem escolar” (NOGUEIRA E REZENDE, 2014, p. 47). Além disso, Vergnaud afirma que “por trás da ação encontra-se sempre a conceitualização” (2009b, p. 18). Segundo Moreira (2002), para Vergnaud, o conhecimento está organizado em campos conceituais, cujo domínio ocorre durante um largo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizado. Assim, Vergnaud (1982, p. 40) define Campo Conceitual como “um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição”.

Figura 2 – Representação do conceito de Campo Conceitual



Fonte: Jenske (2011)

Segundo Carvalho Jr (2008), Vergnaud apresenta três justificativas para que se utilize o conceito de Campo Conceitual como forma de análise para a questão da obtenção de conhecimento: (1) Um conceito não se forma a partir de um só tipo de situação; (2) Uma situação não se analisa com um só conceito; (3) A construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo longo.

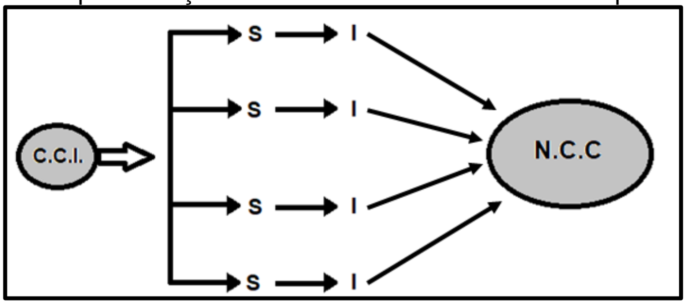
> Para Vergnaud um conceito não pode ser examinado, apreendido isoladamente; são necessárias diversas situações para compreendê-lo. E, igualmente, uma única situação pode estar ligada a diversos outros conceitos. Daí justifica-se a ideia de campo conceitual (NOGUEIRA E REZENDE, 2014, p. 49).

Carvalho Jr (2008) explica as três justificativas. A primeira diz respeito da necessidade de se diversificar as atividades de ensino em um movimento que permita o estudante a aplicação de um determinado conceito em diversas situações. A segunda implica a necessidade de uma visão integradora do conhecimento. As atividades realizadas em sala de aula que permitem uma visão generalizante do conhecimento podem contribuir para uma melhor apropriação dele por parte dos estudantes. E por último, a terceira justificativa, Carvalho Jr explica que o estudante percorre uma longa trajetória de aprendizagem para atingir os diversos patamares do seu desenvolvimento cognitivo. Vergnaud (2009b) define um conceito como uma terna de três conjuntos distintos:

- **S** é o conjunto de situações que dão sentindo (significado) ao conceito;
- **I** é o conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações;
- **R** é o conjunto das representações linguísticas e simbólicas que permitem representar os conceitos e suas relações, e, consequentemente, as situações e os esquemas que elas evocam.

Dessa forma, para Vergnaud a construção do conceito envolve a terna **S I R**. Assim, “para estudar o desenvolvimento e uso de um conceito, ao longo da aprendizagem ou de sua utilização, é necessário considerar esses três conjuntos simultaneamente” (MOREIRA, 2002, p.10). E isso nos faz reforçar a concepção de Vergnaud (1990) quando diz que um conceito não pode ser reduzido à sua definição e que é por meio de situações que se pretende resolver que um conceito adquire sentido para a criança. Bini (2008) ilustra através de um esquema (figura 1) o desenvolvimento de um conceito, de acordo com as ideias de Vergnaud.

Figura 3 – Representação do desenvolvimento de um Campo Conceitual

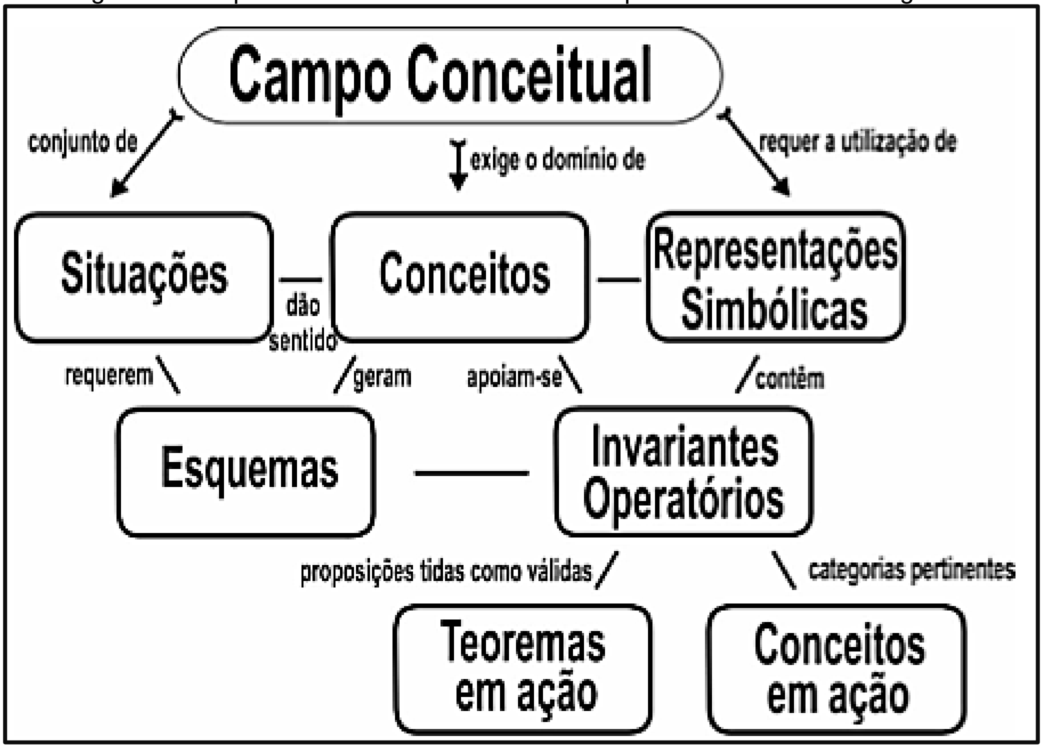


Fonte: Bini (2008)

De acordo com a autora, quando um estudante se depara com novas situações (S), ele já possui um Campo Conceitual Inicial (C.C.I.). Diante dessas situações, surgem os invariantes operatórios (I) que expressam a compreensão do estudante (conceito em ação e teorema em ação). Esse conjunto constitui um novo conceito, oriundo dentro do segundo tipo de classes de situações, no qual o sujeito não possui capacidade imediata de desenvolver esquemas e precisa de meios que o conduzam à reflexão e à ações na busca de caminhos, possibilitando o desenvolvimento do seu campo conceitual, o que está representado por N.C.C (Novo Campo Conceitual). Os esquemas permeiam todo o processo, fazendo-se presentes desde o campo conceitual inicial até o novo campo conceitual. Contudo, devemos frisar que o estudante não adquire um novo campo conceitual, mas um campo conceitual mais amplo.

Para Vergnaud (2009a, p.313) “a criança não adquire hábitos, mas regras, as quais podem e devem aplicar-se a problemas novos”. Portanto, “ao se deparar com situações novas, os sujeitos mobilizam seus conhecimentos prévios, os reformulam e tentam adaptá-los à nova situação, ou seja, são estabelecidas composições novas e generalizadoras” (NOGUEIRA E REZENDE, 2014 p. 50). A figura 4 a seguir ilustra o mapa conceitual da Teoria dos Campos Conceituais. Ela representa uma estrutura gráfica que organiza as ideias que foram apresentadas nessa seção sobre a Teoria de Vergnaud.

Figura 4 – Mapa conceitual da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud



Fonte: Jenske (2011)

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud foi escolhida para apoiar na análise qualitativa de nossa pesquisa e na compreensão das dificuldades que surgem no momento da assimilação de um conceito, isto é, irá colaborar de modo a nos levar a compreensão do processo de conceitualização dos estudantes em situações matemáticas que envolvem inequações quadráticas, sobretudo aferindo os invariantes operatórios que eles lançam mão na busca pelas soluções em situações matemáticas sobre inequações quadráticas. “As formulações das crianças não são independentes das operações mentais que elas, as crianças, são capazes de realizar, e as dificuldades de utilização de certas expressões traduzem, de fato, dificuldades de conceitualização” (VERGNAUD, 2009a, p.110).

2 ABORDAGEM MATEMÁTICA

Esse capítulo traz uma abordagem matemática sobre as inequações quadráticas. Entendemos que se faz necessária uma abordagem matemática, pois tais informações podem contribuir e auxiliar o docente em sua formação inicial e continuada, capacitando-o, inclusive, à aplicação da sequência de atividades proposta nessa pesquisa.

As inequações surgem em diversas situações do dia-a-dia, inclusive em área como engenharia, administração e na própria matemática, como por exemplo, os problemas de otimização, no qual se pretende a busca por maximização de lucros ou minimização de consumo. Entende-se por inequação uma desigualdade entre expressões matemáticas, onde os sinais usados para escrever essas expressões são: $>$ (maior do que), $<$ (menor do que), $\geq$ (maior do que ou igual a) e $\leq$ (menor do que ou igual a). Nessa seção, trataremos dos conceitos e propriedades das inequações quadráticas. E para isso, iremos expor conceitos prévios necessários para esse estudo, iniciando pelo conceito de conjunto dos números reais.

Definição 1: *Ao conjunto formado por todos os números com representação decimal exata ou periódica (racionais) e não exata e nem periódica (irracionais), chama-se de conjunto dos números reais* ($\mathbb{R}$).

Em algumas ocasiões, utilizam-se notações especiais para representar subconjuntos importantes:

(1) O conjunto dos números reais não nulos:

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

(2) O conjunto dos números reais não negativos:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

(3) O conjunto dos números reais positivos:

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

(4) O conjunto dos números reais não positivos:

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

(5) O conjunto dos números reais negativos:

$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

Naturalmente, utilizaremos as notações $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ para reportar aos conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais, respectivamente.

Definição 2: *Sejam a e b dois números reais quaisquer. Diz-se que a é menor do que b, denotado por $a < b$, quando $b - a \in \mathbb{R}_+^*$ e diz-se que a é maior do que b, denotado por $a > b$, quando $a - b \in \mathbb{R}_+^*$.*

Usa-se a notação $a \leq b$ para dizer que $a < b$ ou $a = b$. Assim, $a \leq b$ lê-se: "a é menor do que ou igual a b". Ou equivalente, $b \geq a$ lê-se: "b é maior do que ou igual a a".

Proposição 1: *A relação de ordem $a < b$ em $\mathbb{R}$, goza das propriedades:*

(1) Transitividade

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, *se* $a < b$ *e* $b < c$ *então* $a < c$.

(2) Tricotomia

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se que exatamente uma das três alternativas ocorre: ou $a = b$ ou $a < b$ ou $b < a$.

(3) Monotonicidade da adição:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

(4) Monotonicidade da multiplicação:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, *com* $0 < c$, $a < b \Rightarrow a.c < b.c$

No entanto, se $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, *com* $c < 0$, $a < b \Rightarrow b.c < a.c$

Demonstração:

(1) Como $a < b$ então $b - a \in \mathbb{R}_+^*$. Do mesmo modo, $c - b \in \mathbb{R}_+^*$. Logo, $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, $(b - a) + (c - b) = (c - a)$ e $(c - a) \in \mathbb{R}_+^*$. Portanto, conclui-se $a < c$.

(2) Considerando $a, b \in \mathbb{R}$, com $\mathbb{R}$ um corpo ordenado, tem-se:

(i) $a - b = 0 \Rightarrow a = b$

(ii) $a - b \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow b < a$

(iii) $-(a - b) \in \mathbb{R}_-^* \Rightarrow (b - a) \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow a < b$

(3) Como $a < b$, então $b - a \in \mathbb{R}_+^*$.

Logo, $(b + 0 - a) \in \mathbb{R}_+^*$. Desde que *0* é o elemento neutro da adição, então $0 = c + (-c)$. Assim, $(b + c + (-c) - a) = (b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}_+^*$. Portanto, $(a + c) < (b + c)$.

(4) Como $a < b$ então $b - a \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) Se $0 < c$, então $c \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, $(b - a).c \in \mathbb{R}_+^*$. Logo, $b.c - a.c \in \mathbb{R}_+^*$. Portanto, conclui-se $a.c < b.c$.

(ii) Se $c < 0$, então $-c \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, $(b - a).(-c) \in \mathbb{R}_+^*$. Logo, $a.c - b.c \in \mathbb{R}_+^*$. Portanto, conclui-se $b.c < a.c$.

De modo análogo, verifica-se a relação de ordem $a > b$, inclusive com a substituição dos sinais "$<$" e "$>$" por "$\leq$" e "$\geq$". A partir disso, considera-se o conjunto $\mathbb{R}$, como um conjunto ordenado. Isso significa dizer que dados dois números reais quaisquer podemos inferir quem é o maior deles. É indispensável que o professor considere a importância do conjunto dos números reais, pois ele é um dos conhecimentos imprescindíveis para uma plena aprendizagem das funções reais, sobretudo, para esta pesquisa, no qual, a partir do gráfico funcional, faz-se o estudo das inequações quadráticas.

Outro conhecimento fundamental para o estudo das inequações quadráticas é o conceito de intervalo numérico, uma vez que pode-se representar a solução de inequações por meio desse objeto. Os intervalos são subconjuntos do conjunto dos números reais.

Definição 3 (Intervalos): *Dados a, b ∈ $\mathbb{R}$, com a < b, chama-se de intervalos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:*

- *Intervalos limitados de extremos a e b:*

I_1) Intervalo aberto: $]a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$

I_2) Intervalo fechado: $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$

I_3) Intervalo aberto a direita: $[a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$

I_4) Intervalo aberto a esquerda: $]a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$

- *Intervalos ilimitados:*

I_5) semirreta de origem em a: $]-\infty, a] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \}$

I_6) semirreta aberta de origem em a: $]-\infty, a[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}$

I_7) semirreta de origem em a: $[a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$

I_8) semirreta aberta de origem em a: $]a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}$

Os intervalos numéricos possuem outra representação: a geométrica sobre a reta real. No quadro a seguir estão exibidas essas representações e, em seguida, algumas considerações a respeito delas.

Quadro 1 - Representação e descrição de intervalos

Representação geométrica	**Representação algébrica**	**Descrição**
	$]a, b[$	Intervalo aberto
	$[a, b]$	Intervalo fechado
	$[a, b[$	Intervalo aberto à direita
	$]a, b]$	Intervalo aberta à esquerda
	$]-\infty, a]$	semirreta de origem em a
	$]-\infty, a[$	semirreta aberta de origem em a
	$[a, +\infty[$	semirreta de origem em a
	$]a, +\infty[$	semirreta aberta de origem em a

Fonte: Leonardo (2013)

(1) Na representação geométrica, bolinha vazia (○) indica que aquele extremo não pertence ao intervalo. Por outro lado, bolinha cheia (•) indica que aquele extremo pertence ao intervalo.

(2) O símbolo ∞ representa infinito e nunca deve-se utilizar os sinais que indicam "fechado" ao lado dele. Ele indica que uma variável pode crescer indefinitivamente (+∞) ou decrescer indefinitivamente (–∞).

(3) Algumas literaturas trazem uma notação algébrica diferente: utilizam os símbolos "(" e ")" em intervalos abertos, isto é, $]a, b[$ é equivalente a (a, b).

Para se estudar inequações quadráticas por meio da análise do gráfico funcional, naturalmente se faz necessário perpassar pelo estudo de funções[4].

Definição 4 (Função): *Sejam X e Y conjuntos não-vazios. Uma função $f: X \rightarrow Y$ é uma regra que associa à cada elemento $x \in X$ um único elemento $y \in Y$.*

Em $f: X \rightarrow Y$ *lê-se "função f de X em Y".* Ao conjunto X dá-se o nome de domínio e Y de contradomínio da função f e para cada $x \in X$, o elemento $y = f(x)$ chama-se imagem de x pela função f. Nesse sentindo, quando pensamos em função, necessariamente, precisamos pensar em três elementos: domínio, contradomínio e a correspondência $x \longmapsto f(x)$. Assim, segue a definição 5.

[4] A pesquisa é voltada ao ensino básico, desse modo, limitamos às funções reais de variável real, isto é, funções *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Definição 5 (Domínio e Imagem): *Seja* f uma função de X em Y

- Chama-se de domínio o conjunto *D(f)* dos elementos $x \in X$ para os quais existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.
- Chama-se de imagem o conjunto I*m(f)* dos elementos $y \in Y$ para os quais existe $x \in X$ tal que $(x, y) \in f$, ou seja, $Im(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X; f(x) = y\}$.

É pertinente mencionar que o conjunto Imagem de uma função é um subconjunto do contradomínio, podendo ser o próprio conjunto. Em posse das definições de função, domínio e imagem, segue a definição das funções expressas por polinômios do 2º grau, isto é, as funções quadráticas.

Definição 6 (função quadrática): *Uma função real,* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, é dita quadrática quando existirem números reais* a, b e c*, com* $a \neq 0$*, tais que*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Em outras palavras, uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número real x associa ao número $ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, é chamada de função quadrática. Aos números reais a, b e c chamaremos de coeficientes, em especial, de quadrático ao coeficiente “a”. Assim sendo, são exemplos de funções quadráticas:

$f(x) = x^2 + 3x - 1$, onde $a = 1$, $b = 3$ e $c = -1$

$f(x) = -3x^2 + 4x$, onde $a = -3$, $b = 4$ e $c = 0$

$f(x) = 5x^2 + 2$, onde $a = 5, b = 0$ e $c = 2$

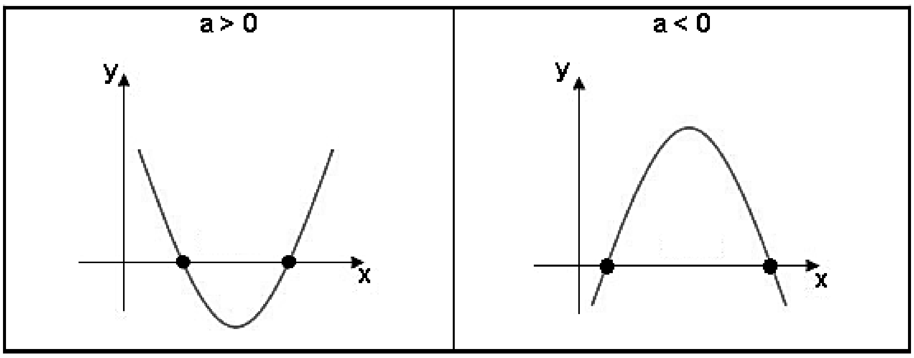
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$, onde $a = \frac{1}{2}, b = 0$ e $c = 0$

Para as inequação quadráticas, a análise do gráfico de funções é importante, pois fazendo tal análise consegue-se obter o conjunto solução da inequação em questão. Assim, dada uma função f real chama-se de gráfico G_f ao conjunto dos pares ordenados definidos por:

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}$$

Assim, o gráfico de uma função quadrática é uma parábola e quando a representamos, ela pode ter a concavidade (abertura) voltada para cima ou para baixo. O coeficiente quadrático influencia esse fato: se o coeficiente quadrático for positivo, $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima. Por outro lado, se for negativo, $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo.

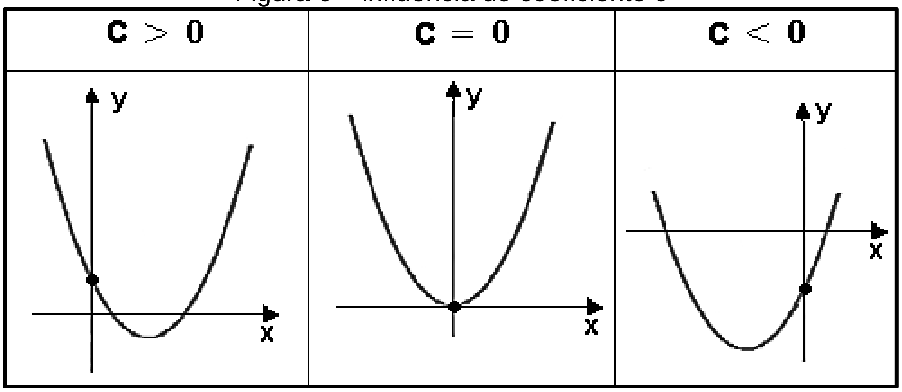
Figura 5 – concavidade da parábola



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Além do coeficiente quadrático, os coeficientes b e c, também são elementos que compõem importantes pontos do gráfico da função quadrática. O coeficiente c corresponde à ordenada do ponto em que a parábola intersecta o eixo y.

Figura 6 – influência do coeficiente c

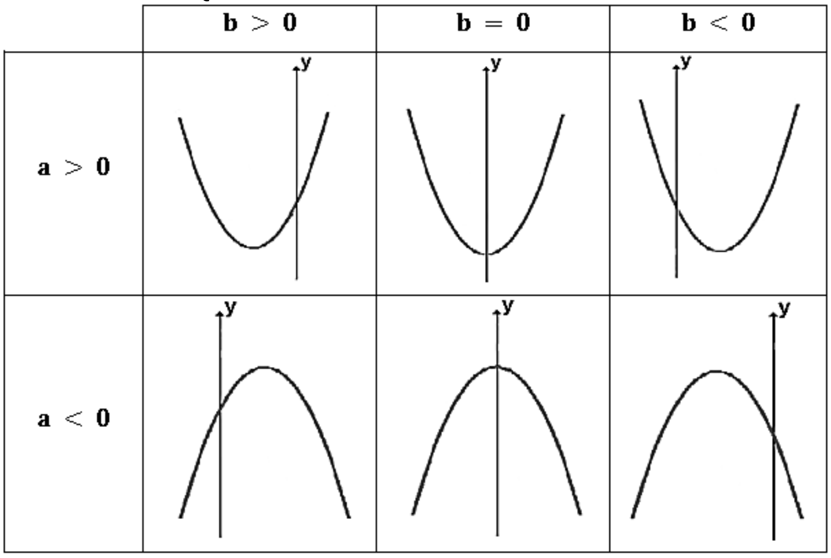


Fonte: elaborado pelo autor (2020)

De fato, a intersecção do gráfico no eixo y ocorre quando $x = 0$. Assim, substituindo x por 0 na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, tem-se $f(0) = c$. Portanto, $(0, c)$ é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.

O coeficiente b indica se a parábola intersecta o eixo das ordenadas (eixo y) em seu ramo crescente ou em seu ramo decrescente.

Quadro 2 – influência do coeficiente b



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Com a compreensão das influências dos coeficientes na parábola, torna-se mais inteligível o esboço do gráfico de uma função quadrática. Para prosseguir a explanação, utilizaremos uma forma mais conveniente: a forma canônica.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \;=\; a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \;=\; a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \;= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \;=\; a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ, temos a forma canônica expressa por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \;=\; a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

onde o símbolo Δ chama-se de discriminante.

Definição 7 (Zeros da função quadrática): *Os zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores reais de x para os quais f se anula, isto é, $f(x) = 0$.*

Analiticamente, para se determinar os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ quadrática, deve-se resolver a equação do 2ª grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Geometricamente, calcular os zeros da função quadrática é descobrir a abscissa dos pontos em que a parábola intersecta o *eixo x*. Utilizando a forma canônica, tem-se:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right] = 0$$

Como $a \neq 0$, então

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Logo,

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \Leftrightarrow \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2(\pm a)} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Portanto, tem-se a fórmula resolutiva de equações do 2ª grau:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Definição 8: *Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dizemos que um número* $\boldsymbol{\alpha}$ *é raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$ se $f(\alpha) = 0$.*

A quantidade de zeros[5] da função quadrática depende, em $\mathbb{R}$, da natureza do valor do discriminante obtido. Sendo assim, em relação a esse valor, três casos são possíveis:

(1) Quando $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ apresentará duas raízes x_1 e x_2 reais e diferentes, expressas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(2) Quando $\Delta = 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ apresentará duas raízes x_1 e x_2 reais e iguais (raiz dupla), expressas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \Longrightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

(3) Quando $\Delta < 0$, ocorre que $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$. Nesse caso, diremos que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não apresenta raízes reais.

[5] As raízes da equação são os zeros da função.

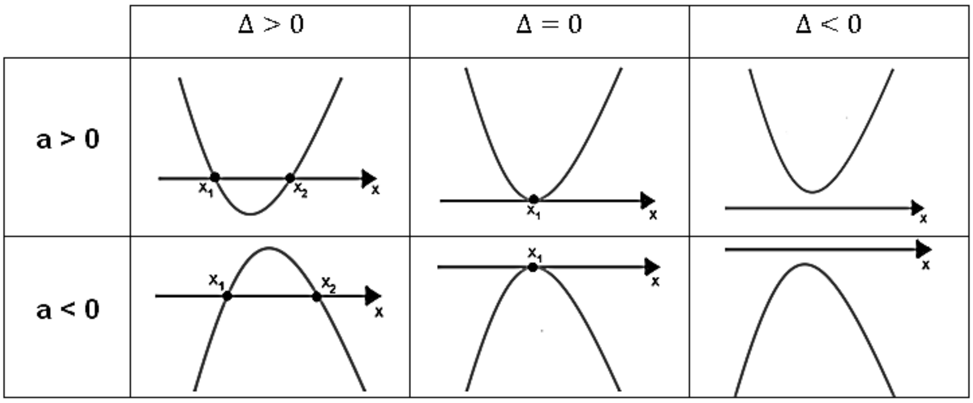
Para exemplificar esses fatos, considere as funções reais e quadráticas: $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$ e $h(x) = 2x^2 + 3x + 4$. Os valores dos discriminantes são: $\Delta = 16$, $\Delta = 0$ e $\Delta = -23$, respectivamente. Dessa forma,

- A função f possui $\Delta > 0$, logo tem duas raízes reais e diferentes que são $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$;
- A função g possui $\Delta = 0$, logo tem uma raiz dupla que é $x_1 = x_2 = 3$.
- A função h possui $\Delta = -23$, logo não têm raízes reais, pois $\sqrt{-23} \notin \mathbb{R}$.

Note, novamente, a importância do conjunto dos Reais para este estudo. Tal conjunto sustenta todo processo de construção algébrico e geométrico relativo ao estudo das inequações quadráticas.

Além dessa análise analítica, recomenda-se uma interpretação geométrica. Sendo assim, de acordo com as características dos gráficos das funções quadráticas, pode-se organizar o quadro a seguir.

Quadro 3 – influência da natureza do discriminante.



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Nas representações geométricas, de acordo com o quadro 5, considera-se:

(1) Quando $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes x_1 e x_2 reais e diferentes e a parábola intercepta o eixo x em dois pontos distintos de coordenadas $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.

(2) Quando $\Delta = 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes x_1 e x_2 reais e iguais e a parábola tangencia o eixo x no ponto de coordenada $(x_1, 0)$.

(3) Quando $\Delta < 0$, ocorre que $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$. Logo a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raízes reais e a parábola não intercepta o eixo x.

Com as definições que foram apresentadas, têm-se os recursos necessários para o esboço da parábola tal que seja útil na resolução das inequações quadráticas. É possível, também, por meio do estudo do sinal da imagem da função quadrática, determinar os valores do domínio cuja imagem é nula, positiva ou negativa. Este estudo é relevante, pois observando o gráfico funcional cujo conjunto imagem representa a situação, o domínio é o conjunto solução.

Sendo assim, considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, estudar o sinal da função f significa determinar os valores de $x \in D(f)$ para os quais a função f se anula $(y = 0)$, f é positiva $(y > 0)$ ou f é negativa $(y < 0)$. O estudo do sinal da função quadrática depende do valor do discriminante e do coeficiente quadrático. Baseando-se no quadro 5, tem-se as possibilidades:

1ª Caso: $\Delta < 0$

Se $\Delta < 0$ então $-\Delta > 0$. Da forma canônica, segue:

$$a\,.\,f(x) = \underbrace{a^2}_{\text{positivo}}\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{não negativo}} + \underbrace{\left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)}_{\text{positivo}}\right]$$

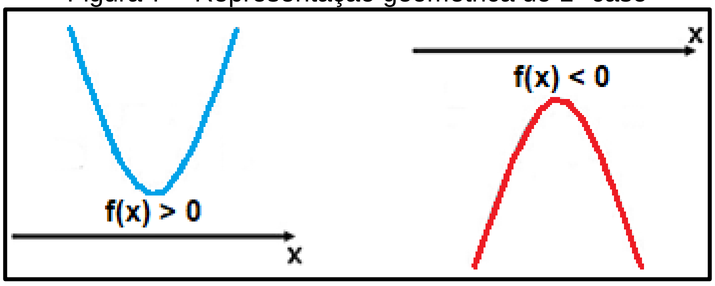
$\therefore\ a\,.\,f(x)\ > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Isso quer dizer que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando $\Delta < 0$, tem o mesmo sinal do coeficiente quadrático para todo $x \in \mathbb{R}$, ou melhor:

$$\begin{cases} a > 0 \ \Rightarrow \ f(x) > 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ a < 0 \ \Rightarrow \ f(x) < 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

A representação geométrica[6] de funções para esse caso é:

Figura 7 – Representação geométrica do 1ª caso



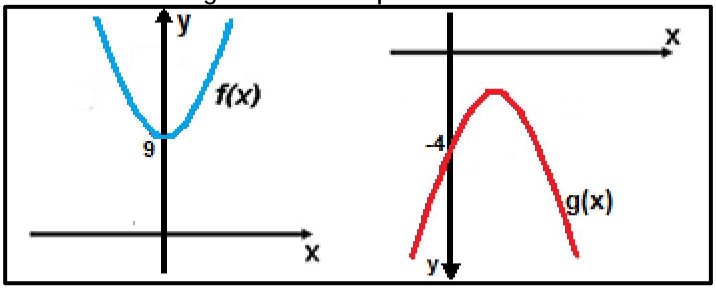
Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Para exemplificar considere a função $f(x) = x^2 + 9$ onde o discriminante é $\Delta = 0^2 - 4.1.9 = -36 < 0$. Como $a = 1 > 0$, conclui-se que $f(x) > 0$, para todo x real.

[6] Adotamos a cor azul para indicar imagem positiva e vermelha para imagem negativa.

De modo análogo, a função $g(x) = -2x^2 + 3x - 4$ tem $\Delta = 3^2 - 4.(-2).(-4) = -23 < 0$ e como $a = -2 < 0$, conclui-se que $f(x) < 0$, para todo x real.

Figura 8 – Exemplo do 1ª caso



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

2ª caso: $\Delta = 0$

Da forma canônica, segue:

$$a\,.f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{0}{4a^2}\right)\right] = \underbrace{a^2}_{\text{positivo}} .\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{não negativo}}$$

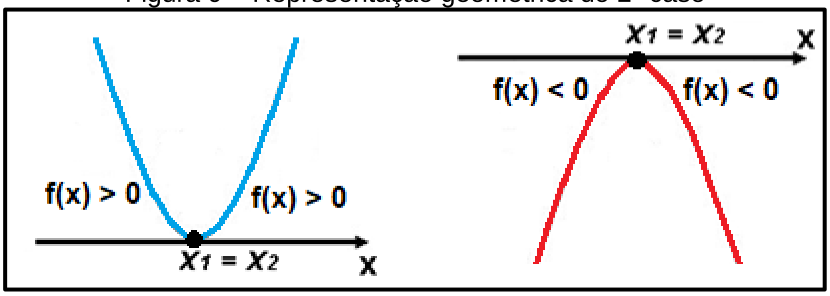
$$\therefore\ a\,.f(x) \geq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Isso quer dizer que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando $\Delta = 0$, tem o mesmo sinal do coeficiente quadrático para todo $x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$, sendo $x_1 = \frac{-b}{2a}$ o zero duplo de f, ou melhor:

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ a < 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

A representação geométrica de funções para esse caso é:

Figura 9 – Representação geométrica do 2ª caso



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

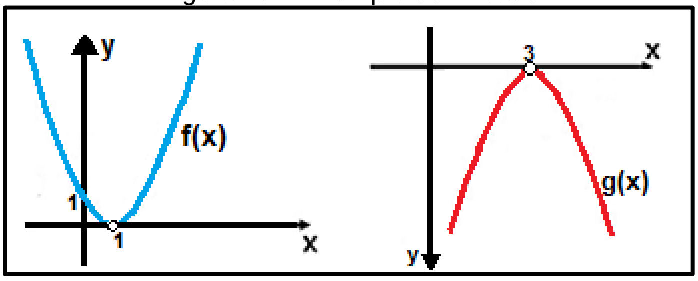
Para exemplificar considere a função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ onde o discriminante é $\Delta = (-2)^2 - 4.1.1 = 0$, então f tem um zero duplo $x_1 = \frac{-(-2)}{2.1} = 1$ e, como $a = 1 > 0$, conclui-se que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 0, & se\ x = 1 \end{cases}$$

Do mesmo modo, a função $g(x) = -x^2 + 6x - 9$, tem $\Delta = 6^2 - 4.(-1).(-9) = 0$, então f tem um zero duplo, $x_1 = \frac{-6}{2.(-1)} = 3$ e, como $a = -1 < 0$, conclui-se que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \forall x \in \mathbb{R} - \{3\} \\ f(x) = 0, & se\ x = 3 \end{cases}$$

Figura 10 – Exemplo do 2ª caso



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

3ª caso: $\Delta > 0$

Da forma canônica, segue:

$$a\,.\,f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

Aplicando o método da diferença de dois quadrados, tem-se:

$$a\,.\,f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

$$a\,.\,f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

$$a\,.\,f(x) = a^2\left[\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

$$a\,.\,f(x) = a^2\,.\,(x - x_1).(x - x_2)$$

O sinal de $a\,.\,f(x)$ depende do sinal dos fatores $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$. Sendo assim, admitindo $x_1 < x_2$

(1) Se $x < x_1$, tem-se:

$$x < x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases}$$

Logo, $a\,.\,f(x) = \underbrace{a^2}_{\text{Positivo}} \,.\, \underbrace{(x - x_1)}_{\text{Negativo}} . \underbrace{(x - x_2)}_{\text{Negativo}}$

$\therefore\ a\,.\,f(x)\ > 0$

(2) Se $x_1 < x\ <\ x_2$, tem-se:

$$x_1 < x\ <\ x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases}$$

Logo, $a\,.\,f(x) = \underbrace{a^2}_{\text{Positivo}} \,.\, \underbrace{(x - x_1)}_{\text{Positivo}} . \underbrace{(x - x_2)}_{\text{Negativo}}$

$\therefore\ a\,.\,f(x)\ < 0$

(3) Se $x\ >\ x_2$, tem-se:

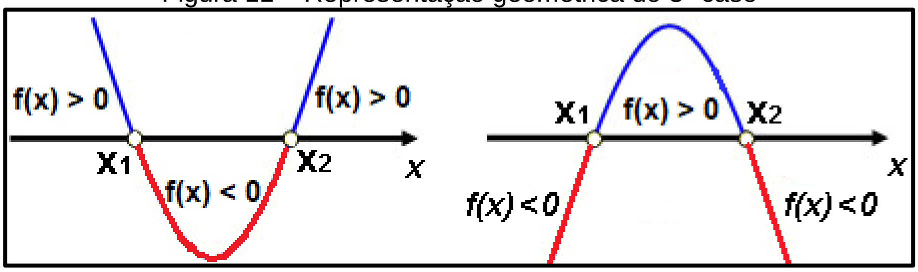
$$x > x_2 >\ x_1 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases}$$

Logo, $a\,.\,f(x) = \underbrace{a^2}_{\text{Positivo}} \,.\, \underbrace{(x - x_1)}_{\text{Positivo}} . \underbrace{(x - x_2)}_{\text{Positivo}}$

$\therefore\ a\,.\,f(x)\ > 0$

Isso quer dizer que o sinal de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o mesmo sinal do coeficiente quadrático para todo x, tal que $x\ <\ x_1$ ou $x\ >\ x_2$. Do mesmo modo, o sinal de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o sinal oposto do coeficiente quadrático para todo x, tal que $x_1 < x\ <\ x_2$. A representação geométrica de funções para esse caso é:

Figura 11 – Representação geométrica do 3ª caso



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Para exemplificar considere a função $f(x) =\ x^2 - 7x$ onde o discriminante é $\Delta = (-7)^2 - 4.1.0 = 49 > 0$, então f tem duas raízes reais e diferentes:

$$x_1 = \frac{-(-7)\ + \sqrt{49}}{2.1} =\ 7 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-(-7)\ - \sqrt{49}}{2.1} =\ 0$$

Como $a = 1 > 0$, conclui-se que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{para } x < 0 \text{ ou } x > 7 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = 0 \text{ ou } x = 7 \\ f(x) < 0 & \text{para } \quad 0 < x < 7 \end{cases}$$

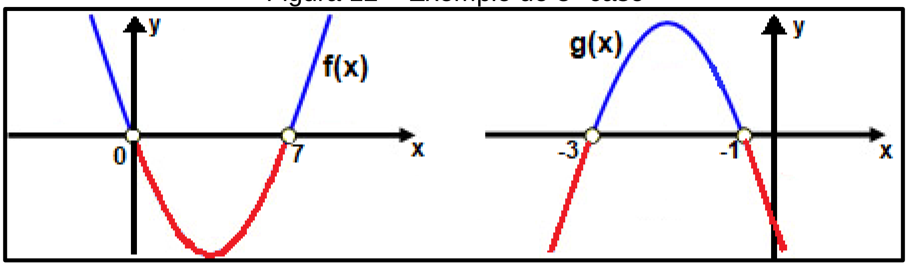
Agora, considere a função $g(x) = -x^2 - 4x - 3$ que apresenta $\Delta = (-4)^2 - 4.(-1).(-3) = 4 > 0$, então f tem duas raízes reais e diferentes:

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2.(-1)} = -3 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2.(-1)} = -1$$

Como $a = -1 < 0$, conclui-se que:

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para } x < -3 \text{ ou } x > -1 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = -3 \text{ ou } x = -1 \\ f(x) > 0 & \text{para } \quad -3 < x < -1 \end{cases}$$

Figura 12 – Exemplo do 3ª caso



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Leia a seguinte situação: uma indústria produz diariamente q unidades de sapatos infantis, e vende tudo o que produz a um preço de R$ 100,00 cada unidade. Se q sapatos são produzidos a cada dia, o custo total da produção diária, em reais, é igual a $q^2 + 20q + 700$. Para que essa indústria tenha lucro $L(q)$ diário maior que 500,00 reais, qual deve ser a quantidade produzida e vendida de sapatos por dia?

Para responder essa pergunta, precisa-se determinar a quantidade q produzida e vendida de sapatos para que a indústria tenha $L(q) > 500$. Assim, como o preço unitário de cada sapato é R$ 100,00, então o faturamento diário, em reais, é igual a $100q$. Sabendo que o lucro é dado pela diferença entre o faturamento e o custo, tem-se:

$$L(q) = 100q - (q^2 + 20q + 700) = -q^2 + 80q - 700$$

Logo, para determinar a quantidade q pretendida, faz-se:

$$L(q) > 500 \Rightarrow \overbrace{-q^2 + 80q - 700}^{L(q)} > 500 \Rightarrow -q^2 + 80q - 1200 > 0$$

Nessa situação, usou-se uma desigualdade envolvendo função quadrática. A essa desigualdade dá-se o nome de inequação quadrática.

Definição 9 (inequação quadrática): *As desigualdades, na variável real x, que podem ser reduzidas à uma das formas:*

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

são chamadas de inequações quadráticas, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$.

Resolver uma inequação significa determinar o conjunto de todos os valores reais de x que tornam a desigualdade verdadeira. Aqui se ressalta, mais uma vez, a importância do conjunto dos números Reais para este estudo. Se o estudante apresentar incompletudes nesse conhecimento matemático, poderá não compreender, de fato, o estudo das inequações quadráticas, acarretando em falhas, por exemplo, na apresentação do conjunto solução.

Definição 10 (conjunto solução): *O número real x_0 é solução da inequação $f(x) > g(x)$ se, e somente se, é verdadeira a sentença $f(x_0) > g(x_0)$. O conjunto S de todos os números reais tais que $f(x) > g(x)$ é uma sentença verdadeira chama-se de conjunto solução da inequação.*

Nessas condições, se não existir o número x tal que $f(x) > g(x)$ seja verdadeira, então a inequação é impossível e indica-se por $S = \emptyset$. Portanto, resolver uma inequação significa determinar o seu conjunto solução e, em particular, para resolver inequações quadráticas aplica-se o estudo do sinal da função quadrática.

Para ilustrar essa teoria considere a inequação quadrática $x^2 - 7x + 10 < 0$, com x real. Resolver essa inequação é responder a pergunta: “quais os valores de x tais que $f(x) = x^2 - 7x + 10$ é negativa?”. Dessa forma, tem-se:

- $a = 1 > 0$, ou seja, a concavidade do gráfico de f está voltada para cima;
- $\Delta = (-7)^2 - 4.1.10 = 9 > 0$, tem-se $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$ como zeros.

Pela inequação, devemos determinar os valores de x para os quais $f(x) < 0$, aplicando o estudo do sinal da função quadrática:

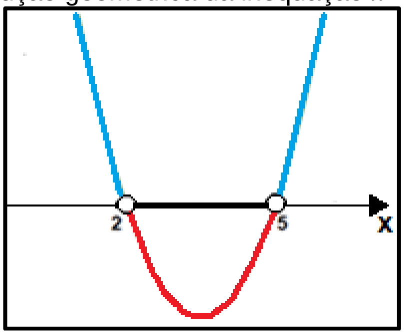
$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{para } x < 0 \text{ ou } x > 7 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = 2 \text{ ou } x = 5 \\ f(x) < 0 & \text{para} \quad 2 < x < 5 \end{cases}$$

Portanto, a solução da inequação $x^2 - 7x + 10 < 0$ é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\} \; ou \;]2{,}5[$$

Geometricamente, tem-se:

Gráfico 1 – solução geométrica da inequação $x^2 - 7x + 10 < 0$



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Considere outra inequação quadrática, com x real: $-x^2 + 4x + 5 \leq 0$. Resolver essa inequação é responder a pergunta: “quais os valores de x tais que $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ é negativa ou nula (não positiva)?”. Dessa forma, tem-se:

- $a = -1 < 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para baixo;
- $\Delta = (+4)^2 - 4.(-1).5 = 36 > 0$, tem-se $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$ como zeros.

Pela inequação, devemos determinar os valores de x para os quais $f(x) \leq 0$, aplicando o estudo do sinal da função quadrática:

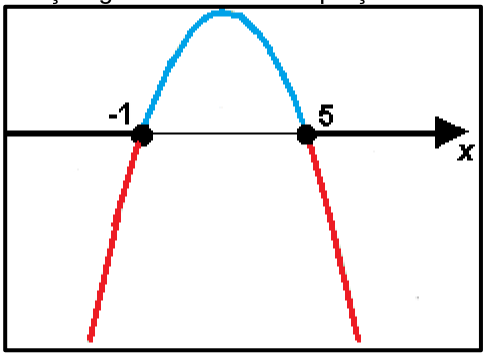
$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para } x < -1 \text{ ou } x > 5 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = -1 \text{ ou } x = 5 \\ f(x) > 0 & \text{para} \quad -1 < x < 5 \end{cases}$$

Portanto, a solução da inequação $-x^2 + 4x + 5 \leq 0$ é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 5\} \; ou \;]-\infty, -1] \cup [5, +\infty[$$

Geometricamente, tem-se:

Gráfico 2 – solução geométrica da inequação $-x^2 + 4x + 5 \leq 0$



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

O texto matemático, proposto nesse capítulo, foi pensado para traçar um aprofundamento do ponto de vista matemático que pode servir de contribuição na formação inicial e continuada de professores. E, além disso, foi pensado para auxiliar o educador na aplicação das atividades de ensino que formam a SD proposta nessa pesquisa, sobretudo na atividade de ensino 4, no qual trata das situações-problemas.

3 O TESTE DE VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM

O teste de verificação foi aplicado em dois momentos: antes das atividades de ensino (pré-teste) e depois (pós-teste). Ele é composto por 6 exercícios. O quadro a seguir exibe os conteúdos de matemática e as competências/habilidades mínimas necessárias por exercício.

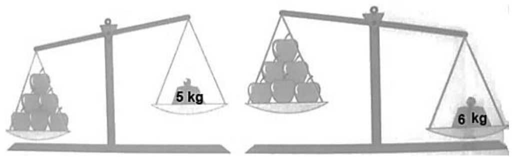
Quadro 4 – conteúdos abordados no pré-teste

EXERCÍCIOS		**CONTEÚDOS ABORDADOS**	**COMPETÊNCIA/HABILIDADE**
1	(A)	Intervalos numéricos	Interpretar uma situação e utilizar a linguagem corrente para descrevê-la.
	(B)	Intervalos numéricos	Utilizar a representação algébrica e geométrica para representar uma situação.
2	(A)	Gráfico da função quadrática	Identificar a influência do coeficiente quadrático no gráfico da função.
	(B)	Imagem da função quadrática	Por meio do gráfico, identificar o sinal da imagem da função.
	(C)	Zeros da função quadrática	Por meio do gráfico, identificar os zeros da função.
3	(A)	Concavidade do gráfico de uma função quadrática	Identificar a direção da concavidade do gráfico a partir da expressão analítica da função quadrática.
	(B)	Imagem da função quadrática	Identificar intervalos do domínio cuja função possui imagem negativa
4		Inequação quadrática	Identificar, entre as inequações dadas, aqueles que são quadráticas e justificar a escolha.
5		Inequação quadrática	Determinar o intervalo solução da inequação quadrática.
6		Inequação quadrática	Resolver uma situação-problema envolvendo a resolução de uma inequação quadrática.

Fonte: elaborado pelo autor (2019)

TESTE DE VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

EXERCÍCIO 1: Observe a figura a seguir:

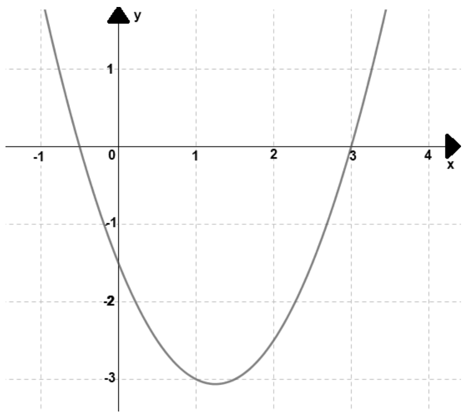
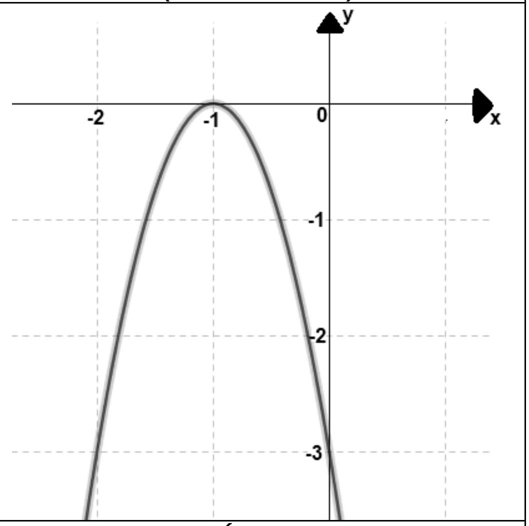
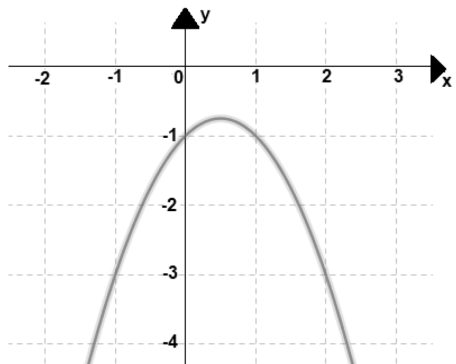
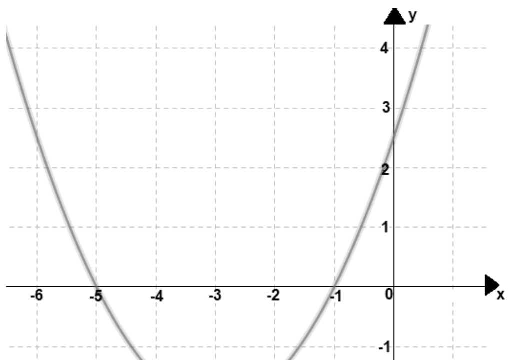


Apenas baseado nessa imagem, não há como dizer a massa exata das maçãs. Considere M a massa das maçãs, dada em quilogramas (kg).

(A) O que observa-se em relação a massa M das maçãs?

(B) Escreva o intervalo numérico que melhor representa essa situação e o represente graficamente.

EXERCÍCIO 2: Considere os gráficos a seguir:

(GRÁFICO A)	(GRÁFICO B)
	
(GRÁFICO C)	(GRÁFICO D)
	

(A) Em quais deles, o coeficiente quadrático da função é positivo?

(B) Em qual deles, a imagem da função é sempre negativa para qualquer valor real de x?

(C) Escolha um dos gráficos e identifique os zeros da função.

EXERCÍCIO 3: Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 4x$.

(A) O gráfico dessa função é uma parábola com concavidade voltada para cima ou para baixo? Por quê?

(B) Em qual intervalo do domínio essa função possui imagem negativa?

EXERCÍCIO 4: Dadas as expressões a seguir, identifique apenas as inequações quadráticas.

( )	$x^2 + 2x + 3 < 0$	( )	$3x + 2 > 0$	( )	$4x + 5 = 0$
( )	$x^2 + 2x = 0$	( )	$3x^2 - 6x \geq 0$	( )	$3x^2 - 4 \leq 0$

Qual critério você utilizou para essa escolha?

EXERCÍCIO 5: Em $\mathbb{R}$, determine o conjunto solução da inequação $x^2 - 6x + 5 < 0$.

EXERCÍCIO 6: O lucro mensal L de uma empresa é dada pela função $L(x) = -x^2 + 25x - 10$, onde x é a quantidade mensal vendida, em reais. Entre quais valores deve variar x para que o lucro mensal seja no mínimo 90?

4 AS ATIVIDADES DE ENSINO

As atividades de ensino, em um total de quatro, foram elaboradas a partir da Teoria dos Campos Conceituais, onde foram propostas tarefas que possibilitassem o analisar o trabalho matemático dos estudantes e analisar os invariantes operatórios manifestados por eles. Cada atividade proposta por ser impressa em papel A4. O quadro a seguir exibe o título e o objetivo de cada atividade.

Quadro 5 – Síntese das atividades de ensino da Sequência Didática

Atividade de Ensino	**Título da Atividade**	**Objetivo da atividade**
1	Reconhecendo as Inequações quadráticas	Identificar as expressões algébricas das inequações quadráticas
2	Concavidade da Parábola	Descobrir uma relação entre o coeficiente quadrático e a concavidade do gráfico da função quadrática.
3	Variação do Sinal da função quadrática	Descobrir uma maneira de identificar a variação do sinal da imagem da função quadrática, a partir da expressão analítica e seu gráfico.
4	Situações problemas	Determinar o intervalo que satisfaz uma condição a partir de uma situação-problema.

Fonte: elaborado pelo autor (2019)

ATIVIDADE DE ENSINO I - Reconhecendo as inequações quadráticas

OBJETIVO: Identificar as expressões algébricas das inequações quadráticas.

MATERIAL: roteiro da atividade, papel e caneta preta.

EQUIPE: _____

PROCEDIMENTOS:

- Observe o quadro a seguir composto por 15 (quinze) inequações que estão nomeadas de A a O.
- Divida essas inequações em 5 (cinco) grupos, onde cada grupo deve ser formado por apenas 3 (três) inequações;
- Não pode haver uma mesma inequação em grupos diferentes;
- Escolha um critério para essa divisão, lembrando que o critério é único em cada grupo;

(A)	$3x - 4 < 0$	**(F)**	$-x^2 - 6x + 1 \leq 0$	**(K)**	$x^3 + x^2 + 2x \geq 1$
(B)	$-3x^4 + x^2 + 4 \geq 0$	**(G)**	$\sqrt{x+1} > 0$	**(L)**	$-1 + x > 2x$
(C)	$x^4 + 2x^2 < 0$	**(H)**	$x^3 - 5x + 4 < 0$	**(M)**	$x^2 + 8 > 0$
(D)	$\sqrt{-x+8} \geq 0$	**(I)**	$x^2 + 4x > 0$	**(N)**	$-x + 10 \geq 0$
(E)	$2x^3 + 1 < 0$	**(J)**	$x^4 - 1 \leq 80$	**(O)**	$\sqrt{2x} - 1 \leq 0$

GRUPO 1	**CRITÉRIO:**

GRUPO 2	**CRITÉRIO:**

GRUPO 3	**CRITÉRIO:**

GRUPO 4	**CRITÉRIO:**

GRUPO 5	**CRITÉRIO:**

SOCIALIZAÇÃO:

ATIVIDADE DE ENSINO II - Concavidade da Parábola

OBJETIVO: Descobrir uma relação entre o coeficiente quadrático e a concavidade do gráfico da função quadrática.

MATERIAL: roteiro da atividade, quadro com gráficos, papel e caneta preta.

EQUIPE: _____

PROCEDIMENTOS: Você receberá um quadro com 8 (oito) funções quadráticas e seus gráficos.

- Em cada função, identifique o sinal do coeficiente quadrático;
- Em cada gráfico, identifique a direção da concavidade do gráfico;
- Com as informações obtidas, preencha o quadro a seguir.

FUNÇÃO		QUAL O SINAL DO COEFICIENTE QUADRÁTICO?		A PARÁBOLA TEM CONCAVIDADE VOLTADA PARA:	
		POSITIVO	NEGATIVO	CIMA	BAIXO
(1)					
(2)					
(3)					
(4)					
(5)					
(6)					
(7)					
(8)					

CONCLUSÃO DA EQUIPE:

SOCIALIZAÇÃO:

ATIVIDADE DE ENSINO III - Variação do Sinal da imagem da função quadrática **–** parte 1

OBJETIVO: Descobrir uma maneira de identificar a variação do sinal da imagem da função quadrática, a partir da expressão analítica e de seu gráfico.

MATERIAL: roteiro da atividade, quadro com gráficos, papel e caneta preta.

EQUIPE: ____

PROCEDIMENTOS: Você receberá um quadro com 8 (oito) funções quadráticas e seus gráficos. Em cada gráfico:

- Identifique os zeros da função;
- Identifique o sinal da imagem da função no intervalo determinado pelos zeros;
- Identifique o sinal do coeficiente quadrático da função;
- Com as informações obtidas, preencha o quadro a seguir.

FUNÇÃO		QUAL OS ZEROS DA FUNÇÃO?	QUAL O SINAL DA FUNÇÃO (IMAGEM) ENTRE OS ZEROS?		QUAL O SINAL DO COEFICIENTE QUADRÁTICO?	
			POSITIVO	NEGATIVO	POSITIVO	NEGATIVO
(1)						
(2)						
(3)						
(4)						
(5)						
(6)						
(7)						
(8)						

CONCLUSÃO DA EQUIPE:

SOCIALIZAÇÃO:

ATIVIDADE DE ENSINO III - Variação do Sinal da imagem da função quadrática **–** parte 2

OBJETIVO: Descobrir uma maneira de identificar a variação do sinal da imagem da função quadrática, a partir da expressão analítica e de seu gráfico.

MATERIAL: roteiro da atividade, quadro com gráficos, papel e caneta preta.

EQUIPE: ____

PROCEDIMENTOS: Você receberá um quadro com 8 (oito) funções quadráticas e seus gráficos. Em cada gráfico:

- Identifique os zeros da função;
- Identifique o sinal do coeficiente quadrático da função;
- Identifique o sinal da imagem da função nos intervalos diferente do intervalo determinado pelos zeros;
- Com as informações obtidas, preencha o quadro a seguir.

FUNÇÃO		QUAIS OS ZEROS DA FUNÇÃO?	QUAL O SINAL DO COEFICIENTE QUADRÁTICO?		QUAL O SINAL DA FUNÇÃO (IMAGEM) NOS INTERVALOS DIFERENTE DO INTERVALO ENTRE OS ZEROS?	
			POSITIVO	NEGATIVO	POSITIVO	NEGATIVO
(1)						
(2)						
(3)						
(4)						
(5)						
(6)						
(7)						
(8)						

CONCLUSÃO DA EQUIPE:

SOCIALIZAÇÃO:

ATIVIDADE DE ENSINO IV - Resolvendo situações-problemas

OBJETIVO: Determinar intervalos que satisfazem uma condição a partir de uma situação-problema

MATERIAL: Roteiro da atividade, papel e caneta preta.

EQUIPE: _______

QUESTÃO 01 – Desemprego sobe para 12% em janeiro e atinge 12,7 milhões. Segundo dados divulgados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a taxa de desemprego no Brasil aumentou para 12% em janeiro, atingindo 12,7 milhões de pessoas. Esse número é o maior registrado pelo Instituto desde agosto de 2018. O Instituto Brasileiro afirma ainda que chegam a 23,9 milhões o número de trabalhadores autônomos.

Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2019/02/27/desemprego-sobe-para-12-em-janeiro-diz-ibge.ghtml. Acesso: 16 mar. 2019.(Adaptado)

Nesse cenário atual, muitas pessoas buscam formas alternativas para conseguir uma renda. Porém, nem sempre é tão simples articular ideias para se obter sempre lucro no negócio. Dona Cida resolveu vender *salgados com sucos*, popularmente conhecido por *completo*. Com a relação entre a quantidade vendida e o valor arrecadado, pode-se construir a função lucro que é dada por:

$$L(x) = -x^2 + 12x - 20$$

em que x é a quantidade de completos vendidos. Se o valor **L** calculado, a partir do número **x** de vendas de completos, for positivo, então houve lucro; se for negativo, prejuízo.

(A) Você conhece pessoas que estão desempregadas?

(B) Em sua opinião, quais os motivos que levaram o Brasil a esse cenário?

(C) De acordo com a função lucro **L**, qual a quantidade de completos que Dona Cida deve vender para que ela tenha lucro?

QUESTÃO 02 – Hoje tornou-se habitual o uso de números negativos. Chamamos de negativos, aos números que são menores que zero e utilizamos em diversas situações como no registro de temperaturas, na representação de altitudes e profundidades em relação ao nível do mar, em saldos de gols ou bancários, etc. Estes números apareceram na história pela primeira vez na China antiga 202 a.C., mas acredita-se na existência de material mais antigo e um fato interessante de mencionar ocorreu na Índia: o matemático Brahmagupta (598 d.C.) afirmava que os números podiam ser entendidos como pertences ou dívidas. E, nesse sentindo, através de observações da prática adotada por comerciantes da época, os matemáticos criaram os sinais + (positivo) e – (negativo).

Saldo bancário é uma expressão conhecida e usual que significa uma quantia que você tem disponível em sua conta no banco para efetuar qualquer tipo de transação bancária, como pagamentos de contas ou compras e, através de extratos, você consegue visualizar o seu saldo. Podemos relacionar a ideia de números positivos e negativos com a de saldo bancário: suponha que há R$100,00 numa conta, representamos, então, por +100 (positivo). Por outro lado, se há apenas R$100,00 e forem debitados (subtraídos) R$200,00 dessa conta, rapidamente, ela fica com saldo negativo de R$100,00, representado por –100 (negativo).

(A) Você já tinha conhecimento sobre essas aplicações utilizando números positivos e negativos?

(B) Você conhece alguma outra aplicação dos números positivos e negativos?

(C) O que você entende por crédito e débito?

(D) Suponha que o saldo da conta bancária de Seu Antônio seja dado por:

$$\mathbf{S(t) = t^2 - 11t + 24}$$

onde S(t) é o saldo em reais da conta que está relacionado com o tempo t ($t>0$), em dias. Nessas condições, determine entre quais dias o saldo da conta de Seu Antônio foi negativo.

QUESTÃO 03 – Um dos assuntos mais discutidos sobre as mudanças climáticas é o aquecimento global. Esse aquecimento refere-se ao aumento anormal da temperatura média do planeta. Cientistas vêm registrando esse aumento de temperatura, que muitos acreditam ser causado como consequência de práticas humanas como poluição do ar e das águas, queimadas e desmatamento, vem causando a intensificação do efeito estufa. O efeito estufa é um fenômeno natural responsável em manter as temperaturas médias globais, evitando que haja grande amplitude térmica e possibilitando o desenvolvimento dos seres vivos. Os efeitos desse evidente aquecimento global são diversos como a elevação do nível dos oceanos, desequilíbrio climático, incidência de tufões e furacões e extinção de espécies de animais.

Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/geografia/aquecimento-global.htm. Acesso em: 1 abril 2019. (Adaptado)

(A) Combater o aquecimento global é um grande desafio e cabe a cada um de nós ter consciência disso. Que tipos de atitudes você tem ou poderia adotar para minimizar esse impacto ambiental?

(B) Como o evidente aquecimento do nosso planeta, a utilização de estufas agrícolas é cada vez mais comum. As estufas são estruturas que retêm o calor do sol, protegem as plantas contra possíveis ameaças externas. Suponha uma estufa cuja temperatura **T**, em graus Celsius, é determinada em função da hora **h** do dia pela expressão:

$$\mathbf{T(h) = -2h^2 + 22h}$$

Em que período do dia a temperatura dessa estufa é positiva?

5 ORIENTAÇÕES E SUGESTÕES AOS EDUCADORES

Estimado professor, naturalmente devemos observar o contexto sociocultural em que a escola está inserida, sobretudo a heterogeneidade de cada turma, e, sendo assim, aplicar a SD com adaptações de acordo com a realidade do estudante.

> É de extrema importância que o professor conheça seu aluno, saiba dados sobre sua realidade, sua família, que perceba e respeite as diferenças entre esses alunos em sala, tendo a sensibilidade para observar as dificuldades de alguns alunos e conseguir trabalhar essas dificuldades sem que o aluno se sinta diferente ou menos capaz que os demais (OSTI, 2004, p.27).

Segundo a Teoria dos Campos Conceituais, o trabalho matemático do estudante deve ser levado em consideração, em detrimento da correção baseadas apenas da dupla certo/errado. É importante para o professor, para o estudante e para o processo ouvir e sanar as possíveis e constantes dúvidas dos estudantes, levando em consideração, o tempo que cada um necessita para que ocorra a plena aprendizagem, pois segundo Vergnaud, alguns sujeitos precisam de um longo período de tempo para assimilar um conceito. Todo e qualquer registro do estudante precisa ser observado e levado em consideração, pois ali, encontram-se os conhecimentos que os estudantes retêm como corretos, pois de acordo com Vergnaud (2009b, p.271) os sujeitos tratam corretamente as informações que retém. O professor precisa ser sensível ao trabalho matemático de seu estudante, sobretudo no que concerne a avaliação. A avaliação escolar cuja correção está baseada na dupla certo/errado ignora os conhecimentos que os estudantes possuem e, consequentemente, despreza o trabalho matemático deles, sobretudo os invariantes operatórios que eles utilizam. Portanto, esse tipo de avaliação não prioriza o campo conceitual dos sujeitos envolvidos no processo.

Para adquirir maior aprofundamento sobre esses temas, sugerimos a leitura da dissertação fomentadora desse produto. Além disso, sugerimos as leituras que constam nas referências dessa produção, sobretudo

- CARVALHO JR, Gabriel Dias de. Os campos conceituais de Vergnaud como ferramenta para o planejamento didático. Caderno Brasileiro de Ensino de Física - UFSC. v.25, n.2, p.207-227, agosto, 2008.
- SILVA, Francisco Hermes Santos da. Educação matemática: caminhos necessários. Belém: Palheta, 2016.
- E as leituras de autoria de Vergnaud, referentes à sua Teoria dos Campos Conceituais.

Nesse produto educacional, apresentamos os resultados obtidos com a análise das correções dos testes de verificação da aprendizagem, por assim acreditar que é necessário o esclarecimento da maneira que demos mérito ao trabalho matemático do estudante, em termos avaliativos. Nesse sentido, exibiremos os quadros que apresentam a evolução do sistema cognitivo dos 14 estudantes, por exercício, quando comparada a correção dos testes. Estes sujeitos estão representados por S_1, S_2,..., S_{14}. Depois de corrigidos os testes, comparamos um a um os exercícios de cada um dos sujeitos. Assim, pôde-se classificar o desempenho do estudante em cada exercício. O quadro a seguir exibe como foi realizada essa classificação, de acordo com as mudanças de registros.

Quadro 6 – Desempenho: avanço e regressão

<table>
<tr><th>CLASSIFICAÇÃO</th><th>PRÉ-TESTE</th><th>PÓS-TESTE</th></tr>
<tr><td rowspan="9">AVANÇO</td><td rowspan="3">Sem resposta</td><td>Incorreto</td></tr>
<tr><td>Parcialmente correto</td></tr>
<tr><td>Correto</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Resposta sem sentido</td><td>Incorreto</td></tr>
<tr><td>Parcialmente correto</td></tr>
<tr><td>Correto</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Incorreto</td><td>Parcialmente correto</td></tr>
<tr><td>Correto</td></tr>
<tr><td>Parcialmente correto</td><td>Correto</td></tr>
<tr><td rowspan="9">REGRESSÃO</td><td rowspan="2">Incorreto</td><td>Sem resposta</td></tr>
<tr><td>Resposta sem sentido</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Parcialmente correto</td><td>Sem resposta</td></tr>
<tr><td>Resposta sem sentido</td></tr>
<tr><td>Incorreto</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Correto</td><td>Sem resposta</td></tr>
<tr><td>Resposta sem sentido</td></tr>
<tr><td>Incorreto</td></tr>
<tr><td>Parcialmente correto</td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Nos quadros que exibem a evolução cognitiva dos estudantes, as setas crescentes indicam avanço e as decrescentes, regressão. Há ainda as setas horizontais (constantes). Elas indicam que não foi observada movimentação cognitiva. Aqui cabe uma ressalva: considera-se como “sem movimento” quando, na comparação das correções, um mesmo exercício é classificado com a mesma cor, ou seja, se num determinado exercício, o estudante, por exemplo, deixar em branco no pré-teste e no pós-teste, nesse exercício o desempenho do estudante será classificado como sem movimentação. A coloração e abreviações utilizadas nos quadros de evolução cognitiva estão explicadas no quadro a seguir:

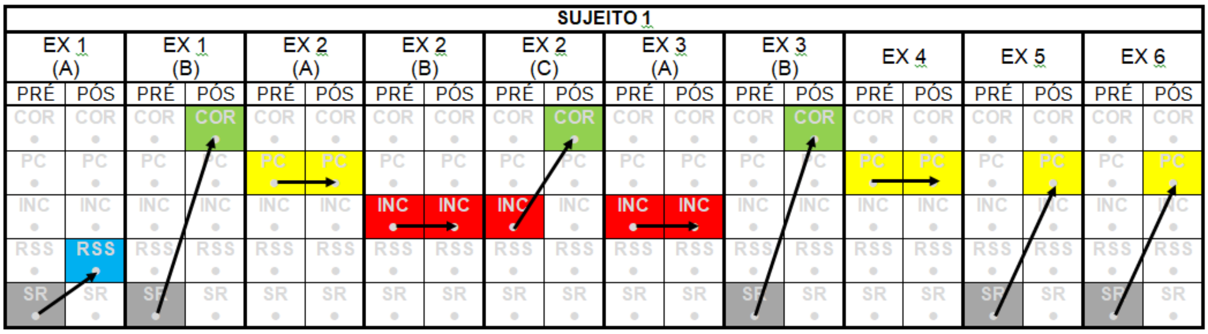
Quadro 7 – Descrição das tonalidades

Sem resposta (SR)	
Resposta sem sentido (RSS)	
Incorreto (INC)	
Parcialmente correto (PC)	
Correto (COR)	

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

O exercício recebeu cor cinza quando o estudante a deixou em branco, isto é, não apresentou nenhum registro; a cor azul representa as soluções que não foram observados conceitos ou teoremas em ação; vermelho, quando a solução apresentada está errada; amarelo, quando a solução está parcialmente correta e verde quando o exercício é resolvido em sua totalidade, apresentando estrutura e solução algébrica e/ou geométrica.

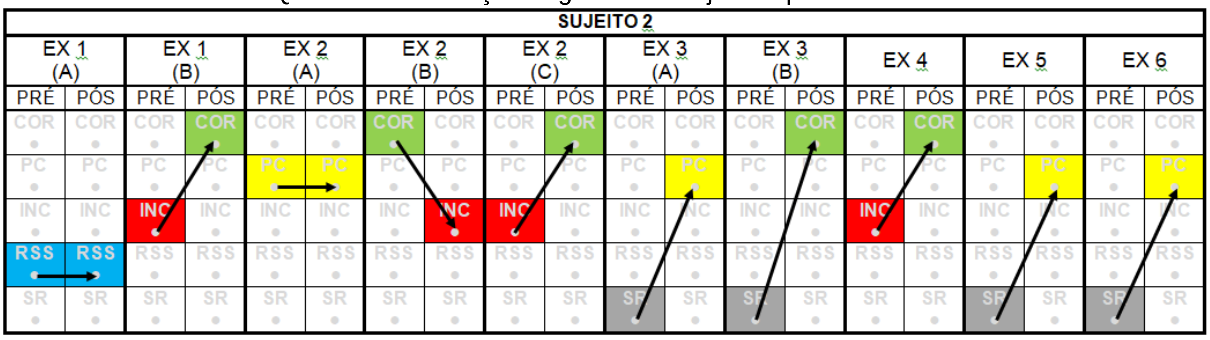
Quadro 8 – Evolução cognitiva do sujeito 1 por exercício



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O S_1, no pré-teste, contabilizou 5 questões sem resposta, 0 questões com respostas sem sentido, 3 questões incorretas, 2 parcialmente corretas e 0 corretas. No pós-teste, contabilizou 0 questões sem resposta, 1 questão com resposta sem sentido, 2 questões incorretas, 4 parcialmente corretas e 3 corretas.

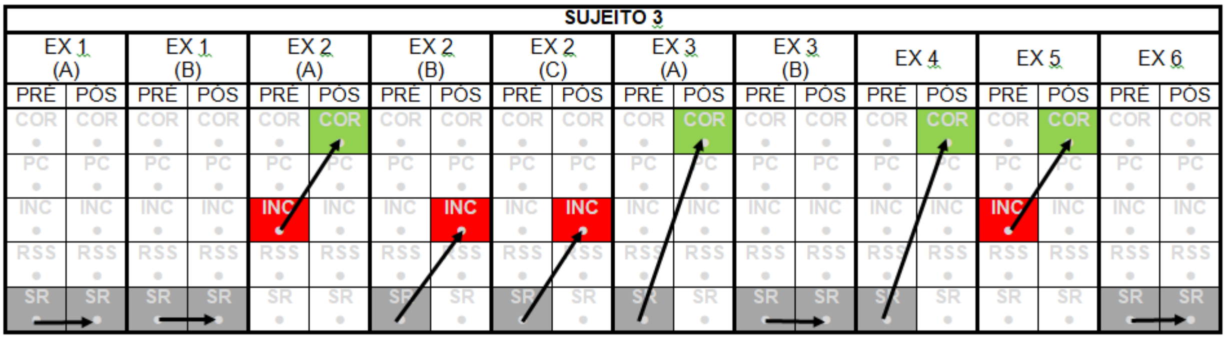
Quadro 9 – Evolução cognitiva do sujeito 2 por exercício



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O S_2, no pré-teste, contabilizou 4 questões sem resposta, 1 questão com respostas sem sentido, 3 questões incorretas, 1 parcialmente correta e 1 correta. No pós-teste, contabilizou 0 questões sem resposta, 1 questão com resposta sem sentido, 1 questão incorreta, 4 parcialmente corretas e 4 corretas.

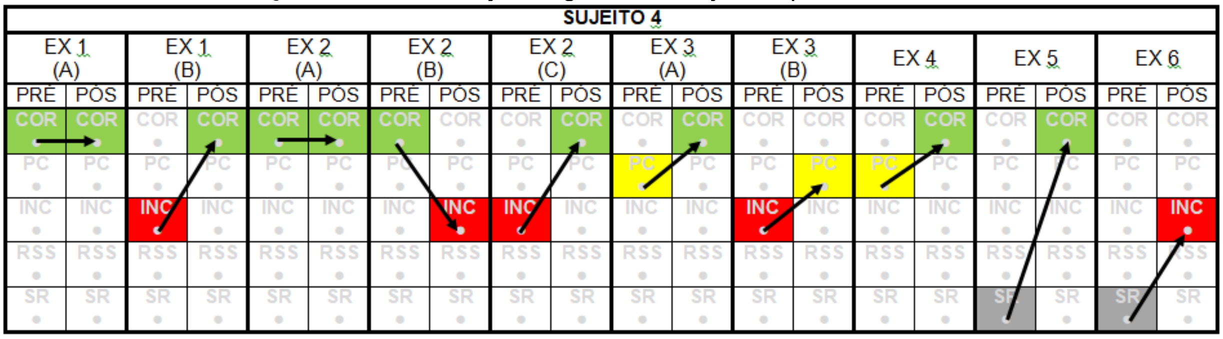
Quadro 10 – Evolução cognitiva do sujeito 3 por exercicio



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O S_3, no pré-teste, contabilizou 8 questões sem resposta, 0 questões com respostas sem sentido, 2 questões incorretas, 0 parcialmente correta e 0 correta. No pós-teste, contabilizou 4 questões sem resposta, 0 questão com resposta sem sentido, 2 questões incorretas, 0 parcialmente correta e 4 corretas.

Quadro 11 – Evolução cognitiva do sujeito 4 por exercício



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O S_4, no pré-teste, contabilizou 2 questões sem resposta, 0 questões com respostas sem sentido, 3 questões incorretas, 2 parcialmente corretas e 3 corretas. No pós-teste, contabilizou 0 questões sem resposta, 0 questões com resposta sem sentido, 2 questões incorretas, 1 parcialmente correta e 7 corretas.

Quadro 12 – Evolução cognitiva do sujeito 5 por exercício

SUJEITO 5																			
EX 1 (A)		EX 1 (B)		EX 2 (A)		EX 2 (B)		EX 2 (C)		EX 3 (A)		EX 3 (B)		EX 4		EX 5		EX 6	
PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS
COR	**COR**	COR	COR	COR	COR	COR	COR	COR	**COR**	COR	COR	COR	COR	COR	COR	COR	**COR**	COR	**COR**
PC	PC	PC	**PC**	**PC**	**PC**	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC
INC	INC	**INC**	INC	INC	INC	**INC**	**INC**	INC	INC	INC	**INC**	INC	**INC**	**INC**	**INC**	INC	INC	INC	INC
RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS
SR	SR	SR	SR	SR	SR	SR	SR	**SR**	SR	**SR**	SR	**SR**	SR	SR	SR	**SR**	SR	**SR**	SR

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O S_5, no pré-teste, contabilizou 5 questões sem resposta, 0 questões com respostas sem sentido, 3 questões incorretas, 1 parcialmente correta e 1 correta. No pós-teste, contabilizou 0 questões sem resposta, 0 questões com resposta sem sentido, 4 questões incorretas, 2 parcialmente corretas e 4 corretas.

Quadro 13 – Evolução cognitiva do sujeito 6 por exercício

SUJEITO 6																			
EX 1 (A)		EX 1 (B)		EX 2 (A)		EX 2 (B)		EX 2 (C)		EX 3 (A)		EX 3 (B)		EX 4		EX 5		EX 6	
PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS
COR	**COR**	COR	**COR**	**COR**	**COR**	COR	**COR**	COR	**COR**	COR	**COR**	COR	**COR**	COR	COR	COR	**COR**	COR	**COR**
PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	**PC**	PC	PC	PC	PC
INC	INC	INC	INC	INC	INC	**INC**	INC	INC	INC	**INC**	INC	INC	INC	INC	INC	**INC**	INC	**INC**	INC
RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	**RSS**	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS
SR	SR	**SR**	SR	SR	SR	SR	SR	**SR**	SR	SR	SR	**SR**	SR	SR	SR	SR	SR	SR	SR

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O S_6, no pré-teste, contabilizou 4 questões sem resposta, 1 questão com respostas sem sentido, 4 questões incorretas, 0 parcialmente correta e 1 correta. No pós-teste, contabilizou 0 questões sem resposta, 0 questões com resposta sem sentido, 0 questões incorretas, 1 parcialmente correta e 9 corretas.

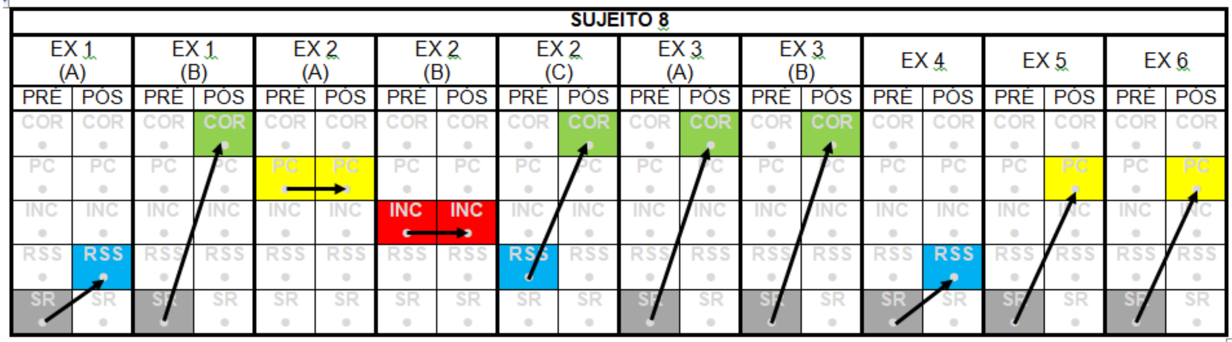
Quadro 14 – Evolução cognitiva do sujeito 7 por exercício

SUJEITO 7																			
EX 1 (A)		EX 1 (B)		EX 2 (A)		EX 2 (B)		EX 2 (C)		EX 3 (A)		EX 3 (B)		EX 4		EX 5		EX 6	
PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS
COR	COR	COR	COR	COR	**COR**	COR	COR	COR	**COR**	COR	COR	COR	COR	COR	**COR**	COR	COR	COR	COR
PC	PC	PC	PC	**PC**	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC	PC
INC	INC	INC	INC	INC	INC	**INC**	**INC**	INC	INC	INC	**INC**	INC	INC	INC	INC	INC	INC	INC	INC
RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS	RSS
SR	**SR**	**SR**	**SR**	SR	SR	SR	SR	**SR**	SR	**SR**	SR	**SR**	**SR**	**SR**	SR	**SR**	**SR**	**SR**	**SR**

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O S_7, no pré-teste, contabilizou 7 questões sem resposta, 0 questões com respostas sem sentido, 2 questões incorretas, 1 parcialmente correta e 0 correta. No pós-teste, contabilizou 5 questões sem resposta, 0 questões com resposta sem sentido, 2 questões incorretas, 0 parcialmente correta e 3 corretas.

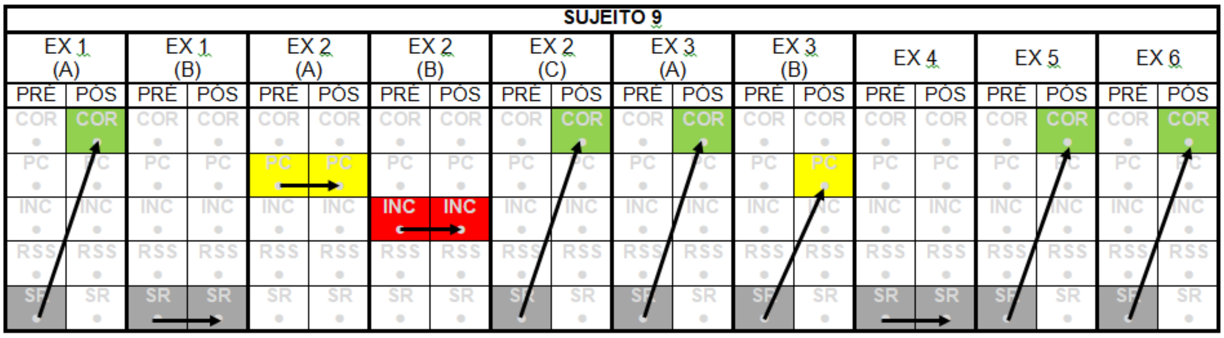
Quadro 15 – Evolução cognitiva do sujeito 8 por exercício



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O S_8, no pré-teste, contabilizou 7 questões sem resposta, 1 questão com respostas sem sentido, 1 questão incorreta, 1 parcialmente correta e 0 correta. No pós-teste, contabilizou 0 questões sem resposta, 2 questões com resposta sem sentido, 1 questão incorreta, 3 parcialmente corretas e 4 corretas.

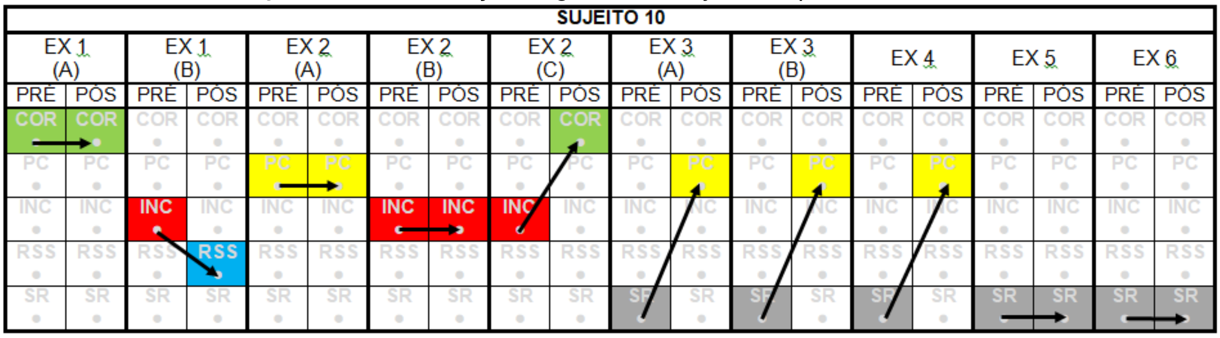
Quadro 16 – Evolução cognitiva do sujeito 9 por exercício



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O S_9, no pré-teste, contabilizou 8 questões sem resposta, 0 questões com respostas sem sentido, 1 questão incorreta, 1 parcialmente correta e 0 correta. No pós-teste, contabilizou 2 questões sem resposta, 0 questões com resposta sem sentido, 1 questão incorreta, 2 parcialmente corretas e 5 corretas.

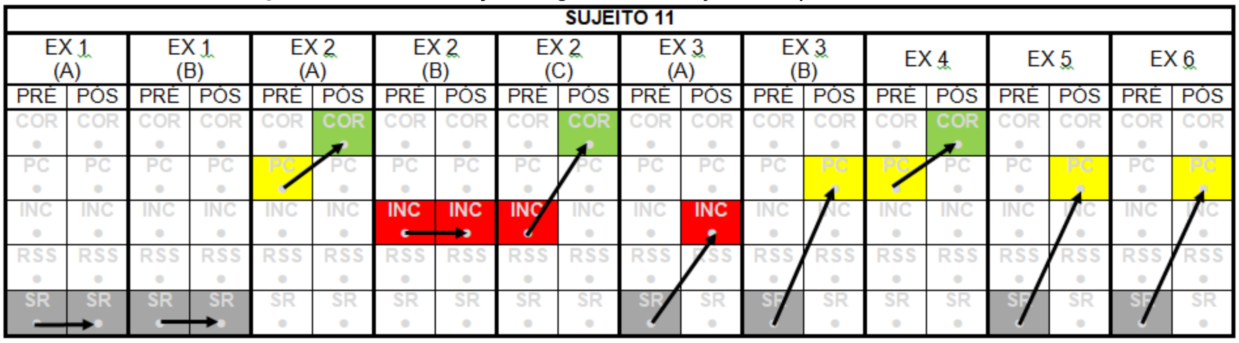
Quadro 17 – Evolução cognitiva do sujeito 10 por exercício



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O S_{10}, no pré-teste, contabilizou 5 questões sem resposta, 0 questões com respostas sem sentido, 3 questões incorretas, 1 parcialmente correta e 1 correta. No pós-teste, contabilizou 2 questões sem resposta, 1 questão com resposta sem sentido, 1 questão incorreta, 4 parcialmente corretas e 2 corretas.

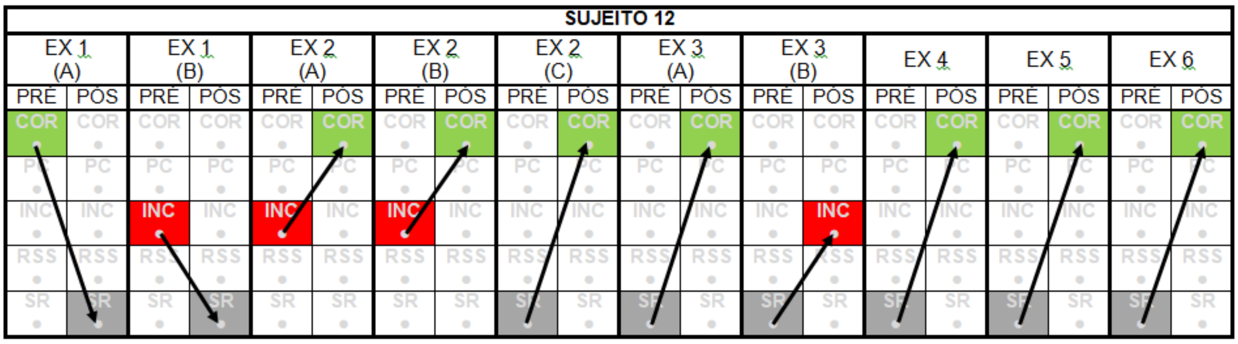
Quadro 18 – Evolução cognitiva do sujeito 11 por exercício



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O S_{11}, no pré-teste, contabilizou 6 questões sem resposta, 0 questões com respostas sem sentido, 2 questões incorretas, 2 parcialmente corretas e 0 correta. No pós-teste, contabilizou 2 questões sem resposta, 0 questões com resposta sem sentido, 2 questões incorreta, 3 parcialmente corretas e 3 corretas.

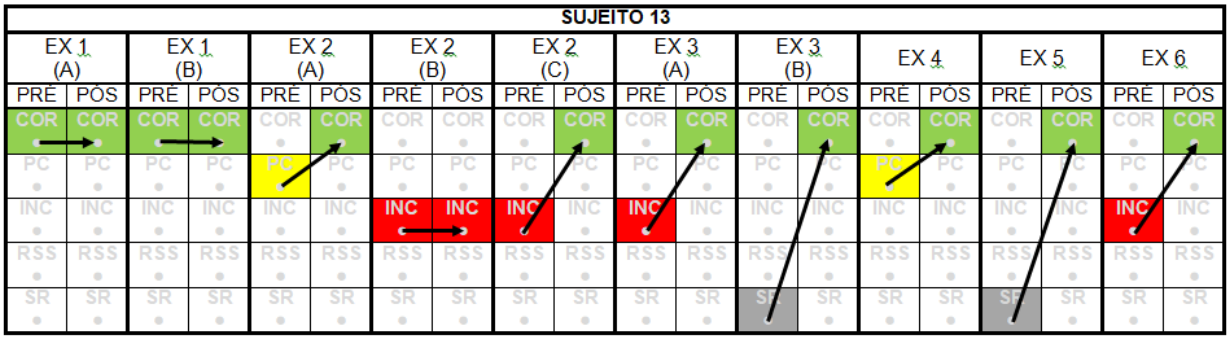
Quadro 19 – Evolução cognitiva do sujeito 12 por exercício



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O S_{12}, no pré-teste, contabilizou 6 questões sem resposta, 0 questões com respostas sem sentido, 3 questões incorretas, 0 parcialmente correta e 1 correta. No pós-teste, contabilizou 2 questões sem resposta, 0 questões com resposta sem sentido, 1 questão incorreta, 0 parcialmente correta e 7 corretas.

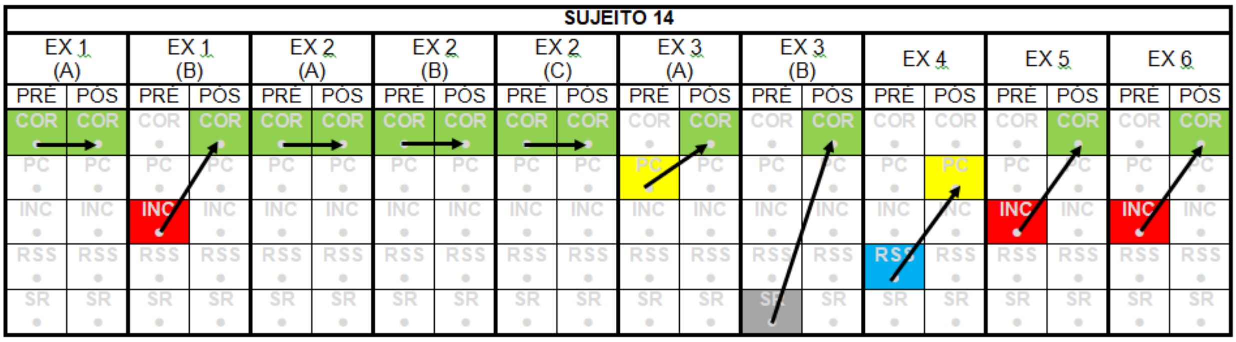
Quadro 20 – Evolução cognitiva do sujeito 13 por exercício



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O S_{13}, no pré-teste, contabilizou 2 questões sem resposta, 0 questões com respostas sem sentido, 4 questões incorretas, 2 parcialmente corretas e 2 corretas. No pós-teste, contabilizou 0 questões sem resposta, 0 questões com resposta sem sentido, 1 questão incorreta, 0 parcialmente correta e 9 corretas.

Quadro 21 – Evolução cognitiva do sujeito 14 por exercício



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O S_{14}, no pré-teste, contabilizou 1 questão sem resposta, 1 questão com respostas sem sentido, 3 questões incorretas, 1 parcialmente correta e 4 corretas. No pós-teste, contabilizou 0 questões sem resposta, 0 questões com resposta sem sentido, 0 questões incorretas, 1 parcialmente correta e 9 corretas.

A tabela a seguir mostra um panorama do quantitativo de avanços e regressões observados.

Tabela 1 – Panorama do desempenho de cada sujeito em relação ao total das questões

	AVANÇO	SEM MOVIMENTO	REGRESSÃO
S_1	6	4	0
S_2	7	2	1
S_3	6	4	0
S_4	7	2	1
S_5	6	4	0
S_6	9	1	0
S_7	4	5	1
S_8	8	2	0
S_9	6	4	0
S_{10}	4	5	1
S_{11}	7	3	0
S_{12}	8	0	2
S_{13}	7	3	0
S_{14}	6	4	0

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Nota-se que em relação ao desempenho dos estudantes obtemos resultados favoráveis com a aplicação da SD, pois os dados obtidos indicam evolução positiva no sistema cognitivo dos 14 sujeitos investigados. Além disso, acreditamos que tais benefícios se estendem aos demais estudantes que participaram da aplicação das atividades de ensino. A tabela a seguir apresenta um panorama do quantitativo de soluções dados pelos sujeitos na correção do teste de verificação.

Tabela 2 – Quantitativo de soluções, por exercício, nos testes de verificação

	SEM RESPOSTA		RESPOSTA SEM SENTIDO		INCORRETO		PARCIALMENTE CORRETO		CORRETO	
EXERCÍCIOS	**PRÉ**	**PÓS**	**PRÉ**	**PÓS**	**PRÉ**	**PÓS**	**PRÉ**	**PÓS**	**PRÉ**	**PÓS**
EXERCÍCIO 1 – ITEM A	6	4	1	3	1	0	0	0	6	7
EXERCÍCIO 1 – ITEM B	7	5	0	1	6	0	0	1	1	7
EXERCÍCIO 2 – ITEM A	0	0	0	0	2	0	9	6	3	8
EXERCÍCIO 2 – ITEM B	1	0	0	0	10	11	0	0	3	3
EXERCÍCIO 2 – ITEM C	6	0	1	0	6	1	0	0	1	13
EXERCÍCIO 3 – ITEM A	9	0	0	0	3	4	2	2	0	8
EXERCÍCIO 3 – ITEM B	13	2	0	0	1	2	0	4	0	6
EXERCÍCIO 4	6	1	2	1	2	1	4	4	0	7
EXERCÍCIO 5	11	2	0	0	3	0	0	4	0	8
EXERCÍCIO 6	11	3	0	0	3	1	0	4	0	6
TOTAL	70	17	04	05	37	20	15	25	14	73
VARIAÇÃO	$-75{,}71\%$		$+25{,}0\%$		$-45{,}94\%$		$+66{,}66\%$		$+421{,}42\%$	

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Com esta análise, observa-se que houve uma mudança positiva na conduta dos estudantes, isto é, eles mostraram mais interesse na tentativa de resolver as questões. Fato, comprovado quando olhamos a queda no número de questões deixadas em branco e o número de avanços observados.

Alguns pontos merecem ponderação sobre cada sujeito, a respeito das inferências feitas sobre a evolução do sistema cognitivo de cada um. Como sinalizamos, nossa maneira de avaliar é sensível ao trabalho matemático do estudante, isto é, abandonamos a forma de avaliar apenas pela observância da dupla certo/errado. Nossa análise teve o interesse de observar a evolução do sistema cognitivo dos estudantes, a forma que eles assimilam determinados conceitos e os invariantes operatórios que lançam mão na busca pela solução. Portanto, não se pode debruçar sobre isso, sem que mudemos nossa perspectiva de avaliação.

O S_1 obteve avanço cognitivo no item (A) do exercício 1. Observa-se que nessa tarefa, ele moveu de sem resposta (SR) no pré-teste para resposta sem sentido (RSS) no pós-teste. Todavia, consideramos avanço porque, como já foi frisado, nosso olhar é mais sensível ao trabalho matemático dos estudantes. Dessa forma, ponderamos que este sujeito, no pós-teste, tentou apresentar uma solução, embora não fosse correta. De forma análoga, acontece com S_3 no item (B) e (C) do exercício 2; S_4 no exercício 6; S_5 nos itens do exercício 3; S_7 no item (A) do exercício 3; S_8 no item (A) do exercício 1 e exercício 4; S_{11} item (A) do exercício 3 e S_{12} no item (B) do exercício 3.

O S_1 não apresentou movimento cognitivo no item (A) do exercício 2 e no exercício 4. Contudo, não há prejuízos em seu sistema cognitivo, considerando que sua resolução, em cada questão, foi considerada, no pré e no pós, como parcialmente correta. O mesmo ocorre com S_2, S_5, S_6, S_8, S_9 e S_{10} no item (A) do exercício 2; S_{13} nos itens do exercício 1 e S_{14} no item (A) do exercício 1 e 2, item (B) e (C) do exercício 2. Os sujeitos S_6, S_{13} e S_{14} tiveram suas soluções consideradas corretas, em ambos os testes.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este produto educacional é fruto de uma pesquisa realizada no curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática ofertado pela Universidade do Estado do Pará. O objetivo da pesquisa foi desenvolver uma sequência didática que sensibilizasse o sistema cognitivo de estudantes para a compreensão do conceito de inequação quadrática, sobretudo avaliar os efeitos dessa aplicação, procurando investigar quais conhecimentos e estratégias os estudantes mobilizam na busca por soluções em situações matemáticas que envolvem inequações quadráticas. Por meio dela, obtiveram-se resultados e reflexões sobre o processo de ensino e de aprendizagem, inclusive o processo avaliativo desse conhecimento matemático. Nesse sentido, buscou-se responder a questão de pesquisa: a sequência didática desenvolvida sensibilizará o sistema cognitivo dos estudantes de modo a favorecer a assimilação do conceito de inequações quadráticas?

Este Produto conta com uma abordagem matemática sobre inequações quadráticas, cuja finalidade foi oferecer uma perspectiva matemática sobre esse conteúdo e os conhecimentos necessários para esse estudo. Tal abordagem gerou contribuição, reflexão e suporte aos educadores. Contribuição, pois tais informações podem contribuir com a formação inicial e continuada; reflexiva, pois permite uma releitura do processo de ensino e avaliativo das inequações quadráticas e, por fim, de suporte para auxiliar na aplicação da SD.

A Teoria dos Campos Conceituais foi utilizada como aporte teórico para a pesquisa. Ela postula que a apropriação e compreensão de um conceito dependem da terna **SIR**, sendo **S** o conjunto de situações que dão sentido ao conceito, **I** o conjunto dos invariantes operatórios mobilizados pelo sujeito e **R** o conjunto das representações linguísticas e simbólicas. Além disso, para Vergnaud, não é apenas a resolução de um problema que interessa, mas o modo pelo qual os estudantes o resolvem. Nesse sentido, buscou-se valorizar o trabalho matemático dos estudantes, apreciando seus erros, acertos e estratégias, considerando que, de acordo com Vergnaud, cada indivíduo tem seu tempo de aprender. Assim, desenvolvemos um conjunto de tarefas com a finalidade de observar e analisar baseando-se na Teoria dos Campos Conceituais.

Paralelo à questão norteadora e ao objetivo geral, encontram-se os objetivos específicos, nos quais consistem na investigação dos invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes na busca pela solução em situações matemáticas;

verificação da potencialidade da SD e se houve favorecimento da aprendizagem por meio da interação social em grupos cooperativos. Além disso, sugere-se um sistema avaliativo compatível com a SD e que revela a Teoria dos Campos Conceituais.

Como procedimento metodológico se adotou o que avaliamos mais adequado segundo a Teoria dos Campos Conceituais. Os estudos de Vygotsky sobre interação social embasou a estratégia de formação das equipes. Esta estratégia garantiu que a interação ocorresse, em cada equipe, com este sujeito com maior potencial de aprendizagem. Outra socialização ocorreu entre as equipe ao final de cada atividade de ensino, onde cada equipe expos suas observações e conclusões. Esse procedimento acarretou resultados favoráveis, pois houve colaboração mútua entre os estudantes das equipes e entre as equipes, além de possibilitar a formalização do conceito ensinado. O ensino por atividade de redescoberta, conforme Sá, embasou duas, das quatro, atividades de ensino. Optou-se por esse método por ele se basear no princípio da ação preceder os conceitos.

As tarefas que compõem a SD foram desenvolvidas de modo a favorecer a aprendizagem de estudantes do 1ª ano do ensino médio do trato das inequações quadrática. A SD é composta por um teste de verificação de aprendizagem e quatro atividades de ensino. O teste de verificação é formado por 6 exercícios no qual os principais objetivos foram identificar os estudantes com maiores potencialidades de aprendizagem, levando em consideração sua bagagem cognitiva e prover informações e dados para análise quantitativa e qualitativa dessa pesquisa. Esse teste foi aplicado em dois momentos: antes das atividades de ensino (pré-teste) e depois (pós-teste). A análise quantitativa deu-se por comparação dos resultados obtidos com a aplicação do teste nos dois momentos. Por outro lado, a qualitativa, por investigação das respostas dadas pelos estudantes em ambos os testes. Esse procedimento permitiu a verificação da potencialidade e efeito das quatro atividades de ensino. Dessa forma, não se avaliou o processo, mas o antes e depois dele, e isso, por sua vez, relevou o potencial do produto.

Com a análise dos dados obtidos com a pesquisa, constatou-se que alguns estudantes não estabelecem distinção entre objetos matemáticos. O que faz acreditar que o ensino de inequações esteja sendo proposto como complemento ao ensino de equações, conduzindo os estudantes a um processo de resolução indutivo. Além disso, notou-se uma preocupação e cuidado, por parte dos estudantes, pela resposta final dos exercícios. Este fato é suficiente para refletirmos sobre o processo de ensino das inequações e da própria Matemática, no qual é sabido que um ensino com ausência de significado e sem levar em consideração o trabalho matemático dos estudantes acarreta em problemas sérios como processos avaliativos ineficazes e injustos, defasagens em conhecimentos importantes e desprezo pela matemática, cujo ensino é importante para formação do cidadão.

Baseando-se em todos os resultados, podemos afirmar que obtivemos mais respostas favoráveis do que desfavoráveis; o que nos fornece um indicativo de que, possivelmente, houve aprendizagem, isto é, ocorreu uma ampliação no Campo Conceitual do estudante, pois os invariantes operatórios manifestados revelaram que eles tratam bem as informações que possuem. Se estiverem corretas ou não, cabe a nós educadores tal investigação. E isso ocorre quando somos sensíveis ao trabalho matemático deles, sobretudo no processo avaliativo. Inferimos, portanto, que a aplicação da sequência de atividades propostas, além de ter contribuído na aquisição de conhecimentos e assimilação de conceitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem das inequações quadráticas, incentivou o interesse dos estudantes na busca pelas soluções das questões propostas. É importante salientar que Vergnaud afirma que alguns sujeitos não aprendem de forma instantânea; alguns levam dias, meses... para assimilar conceitos e, não obstante, com uma diferença de três dias da aplicação da última atividade para o pós-teste, conseguimos observar resultados favoráveis, embora não consolidados. Um fator importante, que merece ser destacado, é que conseguimos mostrar um movimento significativo na direção da consolidação do conceito de inequações quadráticas, ainda que pouco desenvolvido no que diz respeito à representação do conceito de forma linguisticamente correto do ponto de vista da linguagem matemática, como afirma Vergnaud na sua definição de um conceito.

Diante dos resultados, considera-se alcançado os objetivos da pesquisa e respondido a questão de pesquisa, isto é, a sequência didática desenvolvida sensibilizou o sistema cognitivo dos estudantes e favoreceu a compreensão do conceito de inequações quadráticas. Além disso, observou-se mais interesse pela aula com o uso da metodologia escolhida, no qual os estudantes participaram mais ativamente do processo, deixando a timidez de lado e expondo suas conclusões no momento da socialização. Tais fatos são comprovados quando se observa a queda no índice de questões deixadas em branco e no aumento de avanços cognitivos obtidos. Esses aspectos permitiram ratificar a potencialidade da SD. Portanto, essa

SD é potencialmente favorável para o ensino. Que essa pesquisa estimule os professores a atentarem ao trabalho matemático de seus alunos, verificando seus erros e acertos, seus avanços e regressões, abandonando suas correções, análises e avaliações apenas ao dueto certo/errado, pois concorre para que o estudante desenvolva atitudes negativas para com a matemática, e estas podem ser determinantes na vida escolar, pessoal e profissional dele. Portanto, esperamos que a SD e a metodologia adotada nessa pesquisa que revela ser uma alternativa para o ensino possa inspirar e auxiliar docentes e pesquisadores em seu labor, contribuindo e enriquecendo-o, sobretudo que motive dando-lhe novas ideias a fim de proporcionar resultados favoráveis.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da Matemática.** Curitiba: UFPR, 2007.

BINI, Márcia B. **Atividades interativas como geradoras de situações no campo conceitual da Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação em ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008.

CARVALHO JR, Gabriel Dias de. Os campos conceituais de Vergnaud como ferramenta para o planejamento didático. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física** - UFSC. v.25, n.2, p.207-227, agosto, 2008.

COELHO, Luana. PISONI, Silene. Vygotsky: sua teoria e a influência na educação. **Revista e-Ped**, Osório, v. 2, n. 1, agosto, 2012. p. 144-152.

JENSKE, Grazielle. **A teoria de Gérard Vergnaud como aporte para a superação da defasagem de aprendizagem de conteúdo básicos da matemática:** um estudo de caso. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2011.

LEONARDO, Fabio M. de. (Ed). **Conexões com a matemática**. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

MOREIRA, Marco. Antonio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, v.7, n.1, 2002.

NOGUEIRA, Clélia M. I. REZENDE, V. **A teoria dos campos conceituais no ensino de números irracionais:** implicações da teoria Piagetiana no ensino de Matemática. V.6, n.1, p.41-63, jan-jul, 2014.

OSTI, Andréia. **As dificuldades de aprendizagem na concepção do professor.** 2004. 157f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2004.

SCHOENFELD, A. **Learning to think mathematically: problem solong, metacognition, and sense-making in mathematics. Handbook for research on mathematics teaching and learning.** Cap. 15. P. 334-370. New York: Mac Millian, 1992.

SILVA, Francisco Hermes Santos da. **Educação matemática:** caminhos necessários. Belém: Palheta, 2016.

VERGNAUD, G. **La teoria de los campos conceptuales.** Recherches em Didáctique des Mathématiques, v.10, n.2, 3, p.133-170, 1990.

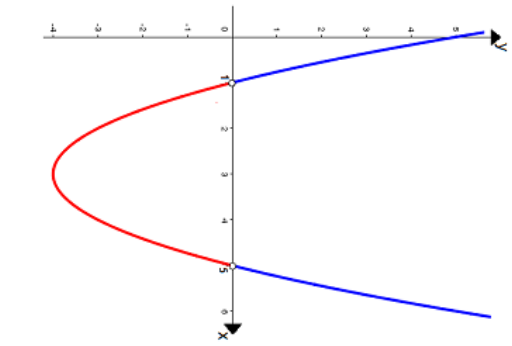
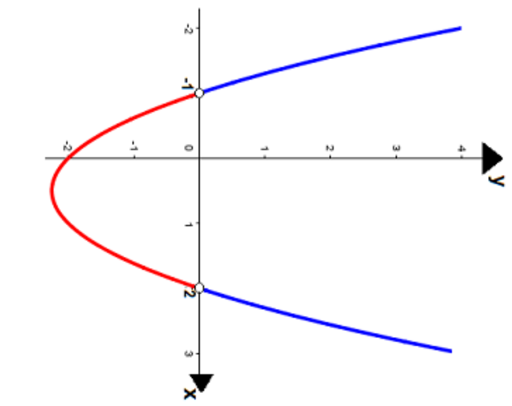
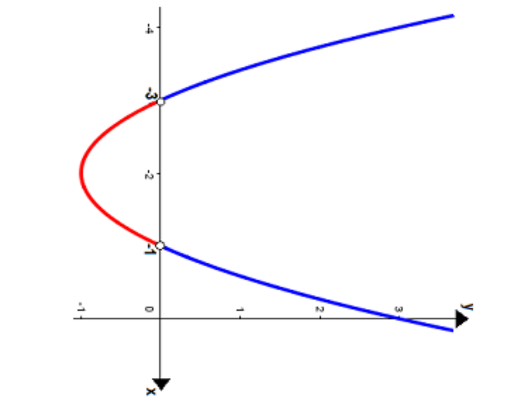
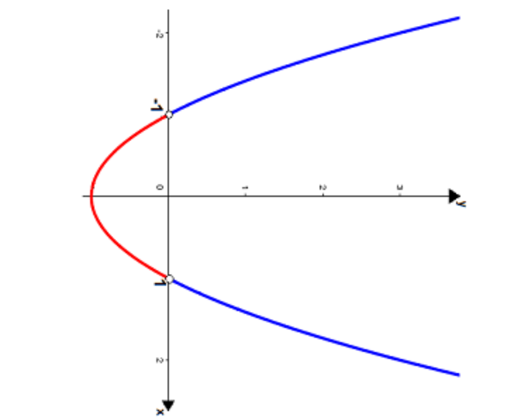
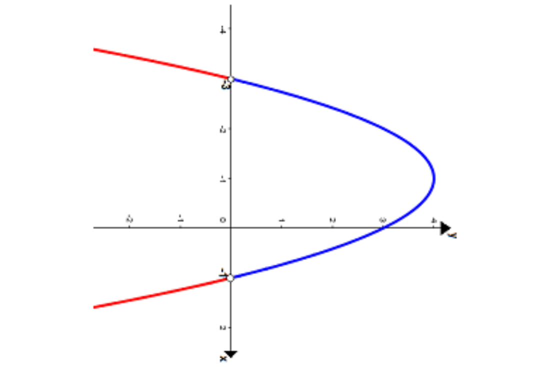
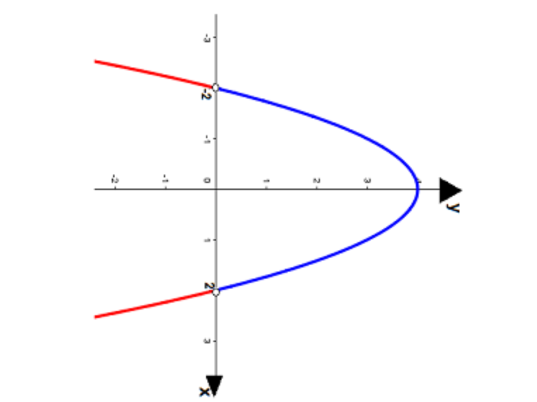
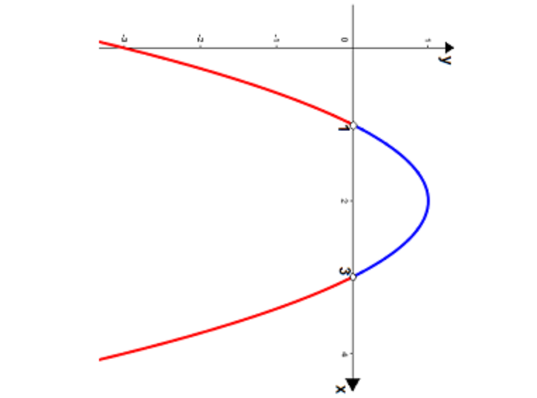
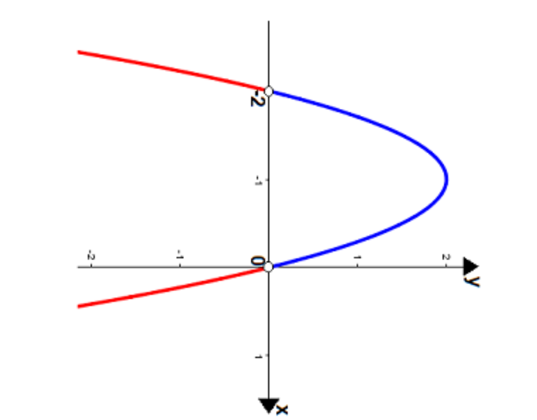
______, Todos perdem quando a pesquisa não é colocada em prática: depoimento. [01 de setembro, 2008]. **Revista Nova Escola.** Entrevista concedida a Gabriel Pillar Grossi. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/960/gerard-vergnaud-

todos-perdem-quando-a-pesquisa-nao-e-colocada-em-pratica> Acesso: 10 nov 2018.

______, **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução: Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Editora UFPR, 2009a.

______, O que é aprender? In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org). **A aprendizagem Matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais.** Editora CRV, Curitiba, 2009b.

APÊNDICE – Quadro de funções quadráticas

(1)	$f(x)= x^2 - 6x + 5$	
(2)	$g(x)= x^2 - x - 2$	
(3)	$h(x)= x^2 + 4x + 3$	
(4)	$c(x)= x^2 - 1$	
(5)	$p(x)= -x^2 - 2x + 3$	
(6)	$q(x)= -x^2 + 4$	
(7)	$t(x)= -x^2 + 4x - 3$	
(8)	$w(x)= -2x^2 - 4x$	

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66113-010 Belém-PA
www.uepa.br