Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

MAURÍCIO NEVES BRANCO

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD

Belém-PA

2020

MAURÍCIO NEVES BRANCO

Uma sequência didática para o ensino de inequações quadráticas à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva.

Belém-PA

2020

MAURÍCIO NEVES BRANCO

Uma sequência didática para o ensino de inequações quadráticas à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva.

Data da Avaliação: 15/12/2020

Banca Examinadora

_______________________________________ - Orientador
Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva
Doutor em Educação
Universidade do Estado do Pará.

_______________________________________ - Membro interno
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação
Universidade do Estado do Pará.

_______________________________________ - Membro externo
Prof. Dr. Reginaldo da Silva
Doutor em Educação
Instituto Federal do Pará

RESUMO

BRANCO, Maurício N. **Uma sequência didática para o ensino de inequações quadráticas à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud**. 2020, 135f. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

Esta pesquisa é resultante do curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática e trata do ensino de inequações quadráticas e por meio dela obtiveram-se resultados e reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem desse objeto matemático. Este trabalho teve por objetivo desenvolver uma sequência didática que sensibilizasse o sistema cognitivo de estudantes para assimilação do conceito de inequação quadrática, sobretudo avaliar os efeitos dessa aplicação, procurando investigar quais conhecimentos os estudantes utilizam na busca por soluções em situações matemática que envolve inequações quadráticas. Nesse sentido, buscou-se responder a questão de pesquisa: a sequência didática desenvolvida sensibilizará o sistema cognitivo dos estudantes de modo a favorecer a assimilação do conceito de inequações quadráticas? Essa investigação, cuja abordagem é de cunho quali-quantitativo, foi embasada à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) que aborda a aquisição de conceitos através de situações. Utilizamos o estudo de Vygotsky, que afirma que aprendizagem e o desenvolvimento se dão por meio da interação social, como recurso metodológico para justificar a estratégia escolhida na formação das equipes de trabalho. A sequência didática é composta por um teste de verificação de aprendizagem (pré-teste e pós-teste) e quatro atividades de ensino, onde duas delas foram baseadas no ensino por atividade, segundo os estudos de Sá (2009). A aplicação dessa sequência ocorreu em cinco encontros, no segundo semestre de 2019, e foi executada numa turma do primeiro ano do ensino médio de uma escola pública localizada no município de Belém-PA. A produção de informações deu-se por meio dos protocolos respondidos pelos estudantes. A análise quantitativa ocorreu por meio da comparação percentual dos resultados e a qualitativa, por meio da avaliação do desempenho do estudante em seu trabalho matemático, de acordo com os objetivos dessa pesquisa. Os resultados mostram que embora não consolidados, os estudantes tratam satisfatoriamente as informações que retém, revelando seus invariantes operatórios. Conclui-se, portanto, que a sequência didática desenvolvida é potencialmente favorável e recomendada para uso no processo de ensino das inequações quadráticas.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; inequações quadráticas; Sequencia didática; teoria dos campos conceituais.

ABSTRACT

BRANCO, Maurício N**. A didactic sequence for teaching quadratic inequalities in the light of Vergnaud's Conceptual Field Theory**. 2020, 135f. Dissertation (Professional Master in Mathematics Teaching) – University of Pará State, Belém, 2020.

This research is the result of the Postgraduate Course in Mathematics Teaching and deals with the teaching of quadratic inequalities and through it results and reflections on the teaching and learning process of this mathematical object were obtained. This work aimed to develop a didactic sequence that sensitized the students' cognitive system to assimilate the concept of quadratic inequality, especially to evaluate the effects of this application, trying to investigate what knowledge students use in the search for solutions in mathematical situations that involves quadratic inequalities. In this sense, we sought to answer the research question: will the didactic sequence developed sensitize the students' cognitive system in order to favor the assimilation of the concept of quadratic inequalities? This investigation, whose approach is of a qualitative and quantitative nature, was based in the light of Vergnaud's Conceptual Field Theory (1990) which addresses the acquisition of concepts through situations. We used Vygotsky's study, which states that learning and development occur through social interaction, as a methodological resource to justify the strategy chosen in the formation of work teams. The didactic sequence consists of a learning verification test (pre-test and post-test) and four teaching activities, where two of them were based on teaching by activity, according to studies by Sá (2009). The application of this sequence occurred in five meetings, in the second half of 2019, and was carried out in a class of the first year of high school at a public school located in the municipality of Belem-PA. The production of information took place through the protocols answered by the students. The quantitative analysis occurred through the percentage comparison of the results and the qualitative, through the evaluation of the student's performance in his mathematical work, according to the objectives of this research. The results show that although not consolidated, students treat the information they retain satisfactorily, revealing their operative invariants. It is concluded, therefore, that the didactic sequence developed is potentially favorable and recommended for use in the process of teaching quadratic inequalities.

Keywords: Mathematics teaching; quadratic inequalities; Following teaching; conceptual field theory;

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática, principalmente, na última etapa do ensino básico – o ensino médio – apresentou, nos últimos anos, queda nos índices de aprendizagem em avaliações de grande escala. Isso gera preocupação, uma vez que a Matemática é essencial para a formação do cidadão, pois o seu ensino, dentre muitos benefícios, nos condiciona a pensar e raciocinar frente a tarefas do dia-a-dia. Frisamos que um dos motivos ligados diretamente a esse cenário de queda nos índices pode está relacionado às metodologias utilizadas em sala de aula, às vezes de maneiras inadequadas e em momentos inoportunos. Contudo, através da revisão da literatura realizada para essa pesquisa, destacamos que imposição de conteúdos e conceitos abstratos sem aparente significado, a exigência por memorização de fórmulas e regras e o desprezo dos conhecimentos que os estudantes possuem oriundos de suas experiências são episódios que não colaboram positivamente com o processo de ensino e consequentemente com a aprendizagem, resultando em estudantes com raciocínio limitado, com postura passiva e sem interesse pelo ensino. Tais fatos são incoerentes com o que se espera do ensino de Matemática.

Essa produção textual está voltada a aprendizagem de conceitos relacionados ao ensino das inequações quadráticas, onde buscou-se responder a questão de pesquisa: a sequência didática desenvolvida sensibilizará o sistema cognitivo dos estudantes de modo a favorecer a assimilação do conceito de inequações quadráticas? Nesse sentido, essa pesquisa tem como objetivo desenvolver e aplicar uma sequência de atividades (Sequência Didática - SD) que sensibilize o sistema cognitivo dos estudantes para obtenção do conceito de inequações quadráticas e avaliar os efeitos dessa aplicação. As inequações são expressões algébricas que apresentam uma desigualdade em sua estrutura analítica e as quadráticas, por sua vez, são inequações que carregam um polinômio do segundo grau. As inequações têm importância tanto quanto as equações. É um conhecimento que auxilia na busca por soluções de diversos problemas, surgem, sobretudo, em situações que envolvem problemas de otimização, quando se quer, por exemplo, maximizar os lucros de determinado negócio. Mesmo assim, seu ensino acaba sendo negligenciado acarretando em prejuízos como estudantes sem conhecimento da simbologia utilizada para representá-las. Este objeto matemático chegou até nós por indicação do programa e, após a revisão de literatura, percebemos o quão escassas são as pesquisas acadêmicas no trato dessas inequações, sobretudo pesquisas cuja fundamentação apoiam-se na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Com isso, senti-me motivado, pois poderia, por meio desta pesquisa, conceder uma contribuição à academia e enriquecer, também, minha prática docente.

A teoria dos Campos Conceituais, segundo Vergnaud (1990), discute sobre a aquisição de conceitos quando o sujeito está ativamente em situação, valorizando o trabalho matemático dos estudantes, isto é, os conhecimentos que eles utilizam na busca pela solução do problema. Nesse sentido, exploramos as produções/registros dos estudantes e comparamos os resultados obtidos com a aplicação de um teste de verificação de aprendizagem (pré-teste e pós-teste). Assim, a investigação e análise desta pesquisa são de natureza quali-quantitativa, onde os objetivos específicos são investigar os invariantes operatórios utilizados pelos estudantes na busca por soluções em situações matemáticas que envolvem inequações quadráticas; verificar se a Sequência Didática surtiu o efeito esperado e favorecer a aprendizagem por meio da interação social em grupos cooperativos. Além disso, apresentamos um sistema avaliativo compatível com a SD e que revelasse a Teoria dos Campos Conceituais.

Em relação aos grupos cooperativos, o interesse foi atingir o maior quantitativo de estudantes no que diz respeito à aprendizagem das inequações quadráticas, presumimos, portanto, que por meio desses grupos de trabalho, no qual fazem parte estudantes com maiores potencialidades de aprendizagem e através da interação entre eles, é mais acessível a aquisição desse conteúdo, ou seja, os estudantes se ajudam mutuamente. Para essa hipótese, traçamos uma estratégia baseada nos estudos de Lev Vygotsky que aborda a interação social como elemento essencial para o desenvolvimento e aprendizagem do sujeito. Aplicou-se um pré-teste para identificar os estudantes com maiores potencialidades e formar, a partir disso, as equipes de trabalho. Esse pré-teste, também, auxiliou na análise quali-quantitativa a qual ocorreu por meio de comparação dos resultados obtidos nele com os obtidos com a aplicação de um pós-teste. Além, naturalmente, da apreciação, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, das respostas dada pelos estudantes em ambas as atividades.

Com os resultados do pré-teste e as equipes formadas, iniciou-se a aplicação das atividades de ensino que compõem a sequência didática. No total de quatro, as atividades de ensino foram concebidas com o objetivo de prover situações aos estudantes para que estes, em ação, pudessem assimilar os conceitos relativos às inequações quadráticas. A primeira atividade foi elaborada com o objetivo de reconhecimento das expressões algébricas das inequações quadráticas; a segunda e a terceira foram baseadas no ensino de matemática por atividade (também chamado de ensino por redescoberta) de acordo com os estudos de Sá (2009); estas duas tem o objetivo de permitir que os estudantes descubram relações algébricas, relativas ao gráfico de funções quadráticas, imprescindíveis à aprendizagem das inequações quadráticas; e, finalmente, a quarta atividade que compreende as situações-problemas propostas que envolvem inequações quadráticas a fim de que os estudantes utilizem os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores em busca da solução.

A aplicação da SD ocorreu no segundo semestre do ano de 2019 em uma escola da rede Estadual de ensino, com uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, considerando que o conteúdo inequações quadráticas deve ser lecionado nessa etapa do ensino. Os resultados dessa pesquisa evidenciam diversos aspectos. Dentre os positivos, destacam-se o grande número de avanços cognitivos que obtivemos com a aplicação das atividades e a observância da ajuda mútua dos estudantes com o trabalho em equipe. Dentre os aspectos negativos, destacamos a incompletude do sistema cognitivo dos estudantes, oriundos de séries anteriores, no qual não permite a consolidação do conceito ensinado, considerando a terna SIR.

Essa pesquisa está redigida em oito capítulos na seguinte configuração: Inicialmente, a introdução que você, caro leitor, está lendo. No capítulo dois apresentamos nosso aporte teórico, ou seja, a Teoria dos Campos Conceituais e, em seguida, o capítulo três, a revisão de literatura que consiste em um levantamento de pesquisas realizadas sobre as inequações quadráticas. O capítulo quatro traz uma abordagem matemática sobre as inequações quadráticas seguida pelo capítulo cinco referente à metodologia. Nesse último, apresentamos as teorias que embasaram os procedimentos metodológicos e a SD proposta nessa pesquisa, sobretudo como se deu sua concepção. O capítulo seis detalha como se deu a aplicação da SD. Nele, caracterizamos o ambiente e os sujeitos envolvidos e apresentamos os resultados da aplicação das quatro atividades. E, por fim, têm-se os dois últimos capítulos: capítulo sete é referente à análise quali-quantitativa dos resultados obtidos com a aplicação do pré-teste e pós-teste; e o oito, as considerações finais.

2 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

As primeiras pesquisas sobre didática da matemática tiveram forte influência das teorias psicológicas de Piaget e Vygotsky e iniciaram-se há aproximadamente 50 anos. “A didática matemática (...) tem por objeto investigar os fatores que influenciam o ensino e aprendizagem da matemática e o estudo de condições que favorecem a sua aquisição pelos alunos” (ALMOULOUD, 2007, p.17). Em relação a essa aprendizagem e favorecimento da aquisição dela que concentramos nossa pesquisa.

A aprovação em determinado ano escolar não significa necessariamente que tenha ocorrido o desenvolvimento cognitivo do estudante. De fato, a aprendizagem e aquisição de conceitos ocorrem ao longo do tempo através de experiências e na busca por soluções em situações variadas, inclusive em situações reais. Contudo, segundo Schoenfeld (1992), crenças como: matemática é para resolver sozinho e não tem que compreender, conduzem os estudantes a nutrirem sentimentos negativos. O ‘resolver sozinho’ apontado por Schoenfeld decorre, segundo Silva (2016), de aula expositiva, e isso demonstra incompletude do professor em relação à zona de desenvolvimento proximal e à necessidade de interação social entre dois sujeitos, um sendo mais capaz que o outro. O ‘não tem que compreender’ é oriundo “da concepção de que, para aprender matemática, deve-se exercitar à exaustão” (SILVA, 2016, p.66). Silva (2016) aponta que o problema não é a técnica algorítmica ou ainda a repetição de exercícios por meio dela, mas a indução feita aos estudantes de que aqueles exercícios serão cobrados em provas (avaliação somativa). Não somos contra o ensino do algoritmo; referimo-nos ao ensino com ênfase nele, acreditando equivocadamente que matemática se resume a técnica. Não é difícil de constatar que há estudantes que estudam apenas na véspera da prova com o objetivo de memorizar as regras para obter sucesso, todavia um equivocado sucesso, pois será que o estudante, naquele momento, efetivamente compreendeu o conceito ensinado? Como foi apontada, a didática da matemática investiga condições favoráveis de aprendizagem do estudante e, no que diz respeito a esse tema, diversos pesquisadores debruçaram-se sobre ele para formular implicações ligadas à sala de aula. Entre eles, o psicólogo francês Gérard Vergnaud.

Vergnaud é considerado uma referência na didática da matemática, pois seus estudos têm implicações diretas nas salas de aula, embora ele mesmo em diversas ocasiões, afirma que sua teoria não é uma teoria didática, mas é significativa a ela por oferecer contribuições à compreensão do desenvolvimento cognitivo dos estudantes em situações de aprendizagem. Com influências Piagetianas[1], ele desenvolveu importantes estudos relativos à psicologia cognitiva, no qual destacamos a Teoria dos Campos Conceituais. Essa teoria psicológica refere-se ao desenvolvimento cognitivo dos indivíduos e tem por finalidade repensar as condições de aprendizagem em termos conceituais, de tal modo que torne a aprendizagem mais acessível à compreensão dos estudantes.

> Un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. A través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver es como un concepto adquiere sentido para el niño (VERGNAUD, 1990, p.1).

Dessa forma, a teoria desenvolvida por Vergnaud tem a conceitualização como essência do desenvolvimento cognitivo. Assim, não podemos impor a definição de um objeto matemático e obter aprendizado dos estudantes. Segundo o Vergnaud, não podemos contornar as dificuldades conceituais; devemos enfrentá-las e superá-las. E para que isso ocorra, é necessário “propor situações suscetíveis de provocar a evolução adaptativa da atividade e dos conhecimentos dos alunos, quaisquer que sejam suas idades” (NOGUEIRA E REZENDE, 2014 p. 48). A expressão ‘situações’ merece destaque por ser um conceito-chave da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

> El concepto de situación no tiene aquí el sentido de situación didáctica sino más bien el de tarea, la idea es que toda situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas de las que es importante conocer la naturaleza y la dificultad propias. La dificultad de una tarea no es ni la suma ni el producto de la dificultad de las diferentes subtareas, pero está claro que el fracaso en una subtarea implica el fracaso global (VERGNAUD, 1990, p.8).

Assim, situação tem o sentindo de tarefa e dessa maneira, Vergnaud busca relacionar o desenvolvimento do indivíduo com as tarefas que este é levado a resolver. Segundo Moreira (2002, p.11), “toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, para as quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias”. Para Vergnaud (1990) são essas situações que dão significado aos conceitos matemáticos que se quer ensinar, isto é, são elas que dão sentindo ao conceito, porém o significado não está nas próprias situações. Por essa razão, concordamos quando ele afirma que “conhecimento é adaptação”

[1] Gérard Vergnaud foi orientando de Doutorado de Jean Piaget e ampliando os estudos dele, Vergnaud redireciona os seus para o estudo do funcionamento cognitivo do "sujeito-em-situação”.

(VERGNAUD, 2009b, p.13). Portanto, precisamos propor aos estudantes situações que os estimulem, a fim de que eles possam assimilar os conceitos e mecanismos. Caso contrário, “eles não têm razão para aprender, isto é, os alunos não veem utilidade no que está sendo ensinado e pensam: Isso não me interessa. É abstrato e não serve para nada” (VERGNAUD, 2008).

Vergnaud considera, no sentindo psicológico, os processos cognitivos e as respostas do sujeito como funções das situações a que são confrontados. Além disso, Vergnaud aponta duas ideias relevantes relacionadas ao sentindo de situação: variedade e história.

> Variedade: há uma grande variedade de situações em um determinado campo conceitual, e as variáveis de situação são um meio de gerar sistematicamente o conjunto de classes possíveis; (...) história**:** o conhecimento dos alunos é modelado pelas situações que eles encontraram e progressivamente dominam, especialmente pelas primeiras situações que podem dar sentido aos conceitos e procedimentos que eles querem ensinar (VERGNAUD, 1990, p.10) (tradução nossa).

De acordo com Moreira (2002), Vergnaud diz que muitas de nossas concepções vêm das primeiras situações que fomos capazes de dominar ou de nossa experiência tentando modificá-las: “o indivíduo se adapta às situações; é por meio de uma evolução da organização de sua atividade que (...) se adapta” (VERGNAUD, 2009b, p.13). Nesse sentindo, Vergnaud em sua Teoria, introduz o conceito de esquema como “uma organização invariante da atividade para uma classe de situações dada” (ibid, p.21). Nogueira e Rezende (2014) ratificam que o conceito de esquema é fundamental para a compreensão da atividade do sujeito que aprende. “Aprender é construir conhecimentos e o conhecimento, segundo a teoria piagetiana, é um processo de adaptação” (ibid, p. 47).

Vergnaud (2009b) cita a atividade gestual como fundamental na atividade humana. Naturalmente, existe grande diferença entre os gestos de um bebê que aprende a pegar pequenos objetos e os gestos, por exemplo, de um químico trabalhando em seu laboratório. Entretanto, em qualquer caso, a organização da atividade gestual contém os mesmos componentes: o objetivo; o sequenciamento, a regulagem e o ajustamento do gesto; a identificação dos objetos materiais e de suas propriedades e o cálculo das ações a serem efetuadas, das informações a serem obtidas e dos controles a serem realizados. Segundo ele, são estes componentes que conduzem à definição de esquema[2]. Além disso, "é nos esquemas que se deve investigar o conhecimento em ato do sujeito[3]" (VERGNAUD, 1990, p.2, tradução nossa). Logo, entendemos por esquemas os comportamentos do sujeito e sua organização que são estimulados pelas características particulares de cada uma das situações. Assim, "frente a uma determinada situação, o sujeito age segundo as representações que dela faz, sendo o esquema o elo entre as representações e a sua conduta" (CARVALHO JR, 2008, p. 215).

> A conduta não é formada somente por ações, mas também por informações necessárias à continuidade da atividade, e os controles que permitem ao sujeito ter segurança de que ele fez o que pensava fazer e que ele continua no caminho escolhido (VERGNAUD, 2009b, p.22).

Segundo Vergnaud (2009b), representações tem o significado de categorias de pensamento com as quais um sujeito compreende as informações que existem em uma situação. Dessa forma, a representação é formada de sistemas de objetos e de predicados pertinentes ao qual o sujeito é levado a utilizar durante sua atividade.

> Para compreender a realidade e agir sobre ela, a criança constrói representações mentais dessa realidade. Entre essas representações, algumas não são acessíveis ao observador externo e o educador está, às vezes, despreparado para interpretar o que a criança acreditou compreender ou fazer (VERGNAUD, 2009a, p.86).

Nosso papel, o de educadores, é fundamental no processo, pois como sujeitos experientes e mediadores, temos a incumbência de provocar estímulos nos estudantes para que eles expressem seu raciocínio e sua criticidade, isto é, permitir que se manifeste a forma operatória do conhecimento, ou seja, "o que permite fazer e ter êxito" (VERGNAUD, 2009b, p.17).

Considerado outro conceito-chave da teoria, Vergnaud (2009b, p.21) afirma que um esquema é formado necessariamente por quatro componentes:

- Um objetivo, subobjetivos e antecipações;
- Regras em ação de tomada de informações e de controle;
- Invariantes operatórios: conceitos em ação e teoremas em ação;
- Possibilidades de inferência em situação.

Moreira (2002, p.12) descreve cada um dos componentes. Segundo ele, um esquema se dirige sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode

[2] Segundo Vergnaud (2009b) essas componentes também são observadas em outros registros de atividades como do discurso e diálogo.
[3] "En los esquemas es donde se debe investigar los conocimientos-en-acto del sujeto" (VERGNAUD, 1990, p.2).

descobrir uma possível finalidade de sua atividade e, eventualmente, subobjetivos; regras de ação do tipo "se... então" constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema, isto é, aquela que permite a produção e a continuidade da sequência de ações do sujeito; os invariantes operatórios dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são eles que constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas e, por fim, as possibilidades de inferência (ou raciocínios) que permitem "calcular" as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito, ou seja, toda a atividade implicada nos três outros ingredientes requer cálculos "aqui e imediatamente" em situação.

Como já mencionado, os esquemas estão ligados às situações. Desse modo, Vergnaud (1990, p.2) distingue duas classes de situações. A primeira classe são aquelas para as quais o sujeito tem em seu repertório, em um dado momento de seu desenvolvimento e, em certas circunstâncias, as competências necessárias para o tratamento relativamente imediato da situação. A segunda, as quais o sujeito não possui todas as habilidades necessárias, o que o obriga a um momento de reflexão e exploração, de dúvidas, tentativas abortadas e, eventualmente, leva ao sucesso ou fracasso. Segundo Vergnaud (1990) o conceito de esquema é interessante para ambos os tipos de classes de situações, porém não funciona da mesma maneira. No primeiro tipo, são observados para a mesma classe de situações, comportamentos automatizados, organizados por um único esquema; por outro lado, no segundo tipo, observa-se o uso continuado de vários esquemas, que podem entrar em competição e que, para chegar à solução procurada, devem ser ordenados, separados e recombinados.

Considerando que é nos esquemas que devemos pesquisar os conhecimentos-em-ação do estudante e eles, por sua vez, são fundamentais para a compreensão da atividade do sujeito que aprende quando submetidos às diversas situações, o terceiro item na lista dos componentes que formam um esquema é outro conceito-chave para a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud: os invariantes operatórios.

> O conceito de esquema pode conduzir a análise dos conhecimentos-em-ação do sujeito. Uma das maneiras de se verificar tais conhecimentos é por meio do acompanhamento dos diversos momentos em que os estudantes são chamados a dar respostas a problemas. É possível que se verifique, por meio da análise das estratégias utilizadas na resolução de um problema, os

> esquemas que um determinado sujeito lança mão, bem como os modelos mentais construídos frente a novas situações. Essa análise permite compor um quadro no qual se observa a evolução temporal dos modelos explicativos dos sujeitos, inferida a partir dos **conceitos-em-ação** e dos **teoremas-em-ação** utilizados ao longo de uma atividade de ensino (CARVALHO JR, 2008, p.216) (grifo nosso).

As expressões em destaque na citação de Carvalho Jr são o que Vergnaud chama de invariantes operatórios, isto é, “los conocimientos contenidos en los esquemas” (VERGNAUD, 1990, p.4). Segundo Nogueira e Rezende (2014), Vergnaud atribui grande relevância à reflexão nas aprendizagens matemáticas, e tenta compreender, nas ações dos sujeitos, as que estão relacionados a conhecimentos implícitos falsos ou verdadeiros. São esses conhecimentos que Vergnaud chama de invariantes operatórios, classificados em duas categorias: conceitos em ação e teoremas em ação. Segundo ele, são os invariantes que garantem o êxito da representação, permitindo-lhes integrar sua dupla função: refletir a realidade e prestar-se a um cálculo relacional. “São os invariantes que dão à representação seu carácter operatório. Daí seu nome” (VERGNAUD, 2009a, p.308)

> Os invariantes operatórios é um dos elementos da composição dos esquemas. Concernem às propriedades estruturais de qualquer esquema, generalizáveis ou não a diversas situações, aos mais diversos objetos a conhecer. Estes conhecimentos, chamados de conhecimentos em ação, podem ser explicitáveis ou não, conscientes ou não. Os conhecimentos tornam-se explicitáveis quando há tomada de consciência do sujeito (NOGUEIRA E REZENDE, 2014, p. 51).

Dessa forma, entendemos que os invariantes operatórios dizem respeito as atitudes do estudante, as estratégias que ele utiliza frente a uma situação e que se modifica de acordo com os conhecimentos prévios que ele possui. Segundo Vergnaud (1990) são esses invariantes operatórios que fazem a articulação entre teoria e prática. Assim, de acordo com Nogueira e Rezende (2014), para Vergnaud, não é apenas a resolução de um problema pelos sujeitos que interessa, mas sim o modo pelo qual eles resolvem e, principalmente, os invariantes operatórios que mobilizam ao resolver um problema. Portanto, “a observação de alunos em situação de solução de problemas, a análise de suas dúvidas e seus erros, mostra que os comportamentos em situação também são estruturados pelos esquemas” (VERGNAUD, 1990, p.4).

> (...) o professor deve estar atento ao interpretar as condutas das crianças e a não rejeitar como errados os caminhos não clássicos que ela pode empregar. Mesmo diante dos insucessos das crianças (...) existem

> elementos que permitem ver o que a criança compreendeu e o que ela não compreendeu, e de, assim sendo, apoiar-se nos próprios insucessos para fornecer as explicações necessárias (VERGNAUD, 2009a, p.212).

É necessário que nós educadores reflitamos sobre um hábito recorrente nas aulas de matemática: fornecer enunciados com uma sequência pré-definida. Esse modelo clássico de propor exercícios não estimula criatividade e autonomia dos estudantes (Sá, 2009). Além disso, não dá espaço à análise das relações que estão em jogo e, menos ainda, não se valoriza o trabalho matemático dos estudantes, onde o que está errado é descartado. Em relação a isso, Vergnaud (2009a, p.271) declara que "as respostas erradas não devem ser tratadas como aberrantes. Elas mostram que a criança trata corretamente as informações que retém".

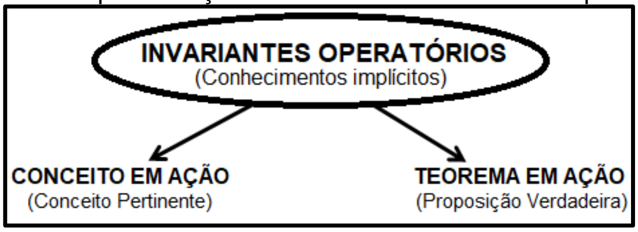
Nesse sentindo, concordamos com Vergnaud e sua Teoria que nos instrui a propor aos estudantes diversas situações-problemas para que eles, frente a elas, possam obter a aquisição e/ou assimilação de conceitos. Para Vergnaud (2009a), a aquisição de conceitos não é independente da solução de problemas que colocam esses conceitos em ação. Segundo ele, a solução de problemas é, ao mesmo tempo, um meio e um critério da aquisição de conceitos. Um meio porque a análise dos problemas, das soluções e dos erros é essencial para fazer com que a criança compreenda quais relações são importantes e como elas podem ser tratadas. E um critério porque o fracasso no tratamento das relações é um indicativo de lacunas ou desconhecimentos.

Componentes essenciais dos esquemas, Vergnaud (2009b, p.23) define conceito em ação como um conceito considerado pertinente na ação em situação e teorema em ação como uma proposição tida como verdadeira na ação em situação. Os conceitos em ação não precisam ser necessariamente verdadeiros, eles precisam ser significativos ou não para a situação. "Esses conceitos-em-ação permanecem, em sua maioria, implícitos ao longo da ação do sujeito" (CARVALHO JR, 2008, p. 219). Por outro lado, os teoremas em ação podem ser verdadeiros ou falsos de acordo com a situação. "Essas proposições permanecem, em sua maioria, implícitas nas ações do sujeito, podendo se tornar explícitas" (ibid, 2008, p. 220).

> Os invariantes operatórios são relevantes no ponto de vista cognitivo, uma vez que os conceitos em ação permitem retirar do meio as informações pertinentes e selecionar os teoremas em ação necessários ao cálculo, ao mesmo tempo, dos objetivos suscetíveis de serem formados, e de regras em ação, de tomada de informação e de controle permitindo atingi-los (VERGNAUD, 2009b, p.22).

Vergnaud (2009b) chama a atenção de que é preciso atentar que a condição de uma proposição pode oscilar entre o particular e o universal, isto é, entre todos os teoremas em ação alguns tem a condição de proposição tida como verdadeira no momento presente; enquanto outros são universalmente verdadeiros, para toda classe de situações. Isso deixa evidente a natureza distinta dos tipos de invariantes operatórios.

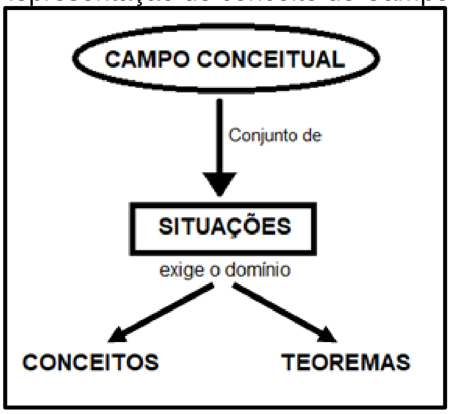
Figura 1 – Representação do conceito de invariantes operatórios



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Como foi mencionado, a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud é uma teoria referente ao desenvolvimento cognitivo que tem por finalidade repensar as condições de aprendizagem em termos conceituais: “teoria sobre a cognição que busca compreender o desenvolvimento dos conceitos, suas filiações e rupturas, no decorrer da aprendizagem escolar” (NOGUEIRA E REZENDE, 2014, p. 47). Além disso, Vergnaud afirma que “por trás da ação encontra-se sempre a conceitualização” (2009b, p. 18). Segundo Moreira (2002), para Vergnaud, o conhecimento está organizado em campos conceituais, cujo domínio ocorre durante um largo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizado. Assim, Vergnaud (1982, p. 40) define Campo Conceitual como “um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição”.

Figura 2 – Representação do conceito de Campo Conceitual



Fonte: Jenske (2011)

Segundo Carvalho Jr (2008), Vergnaud apresenta três justificativas para que se utilize o conceito de Campo Conceitual como forma de análise para a questão da obtenção de conhecimento: (1) Um conceito não se forma a partir de um só tipo de situação; (2) Uma situação não se analisa com um só conceito; (3) A construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo longo.

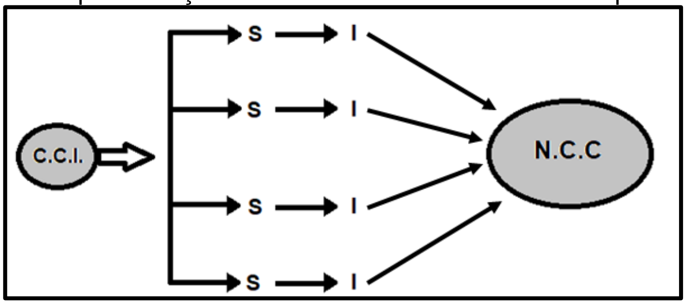
> Para Vergnaud um conceito não pode ser examinado, apreendido isoladamente; são necessárias diversas situações para compreendê-lo. E, igualmente, uma única situação pode estar ligada a diversos outros conceitos. Daí justifica-se a ideia de campo conceitual (NOGUEIRA E REZENDE, 2014, p. 49).

Carvalho Jr (2008) explica as três justificativas. A primeira diz respeito da necessidade de se diversificar as atividades de ensino em um movimento que permita o estudante a aplicação de um determinado conceito em diversas situações. A segunda implica a necessidade de uma visão integradora do conhecimento. As atividades realizadas em sala de aula que permitem uma visão generalizante do conhecimento podem contribuir para uma melhor apropriação dele por parte dos estudantes. E por último, a terceira justificativa, Carvalho Jr explica que o estudante percorre uma longa trajetória de aprendizagem para atingir os diversos patamares do seu desenvolvimento cognitivo. Vergnaud (2009b) define um conceito como uma terna de três conjuntos distintos:

- **S** é o conjunto de situações que dão sentindo (significado) ao conceito;
- **I** é o conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações;
- **R** é o conjunto das representações linguísticas e simbólicas que permitem representar os conceitos e suas relações, e, consequentemente, as situações e os esquemas que elas evocam.

Dessa forma, para Vergnaud a construção do conceito envolve a terna **S I R**. Assim, "para estudar o desenvolvimento e uso de um conceito, ao longo da aprendizagem ou de sua utilização, é necessário considerar esses três conjuntos simultaneamente" (MOREIRA, 2002, p.10). E isso nos faz reforçar a concepção de Vergnaud (1990) quando diz que um conceito não pode ser reduzido à sua definição e que é por meio de situações que se pretende resolver que um conceito adquire sentido para a criança. Bini (2008) ilustra através de um esquema (figura 1) o desenvolvimento de um conceito, de acordo com as ideias de Vergnaud.

Figura 3 – Representação do desenvolvimento de um Campo Conceitual

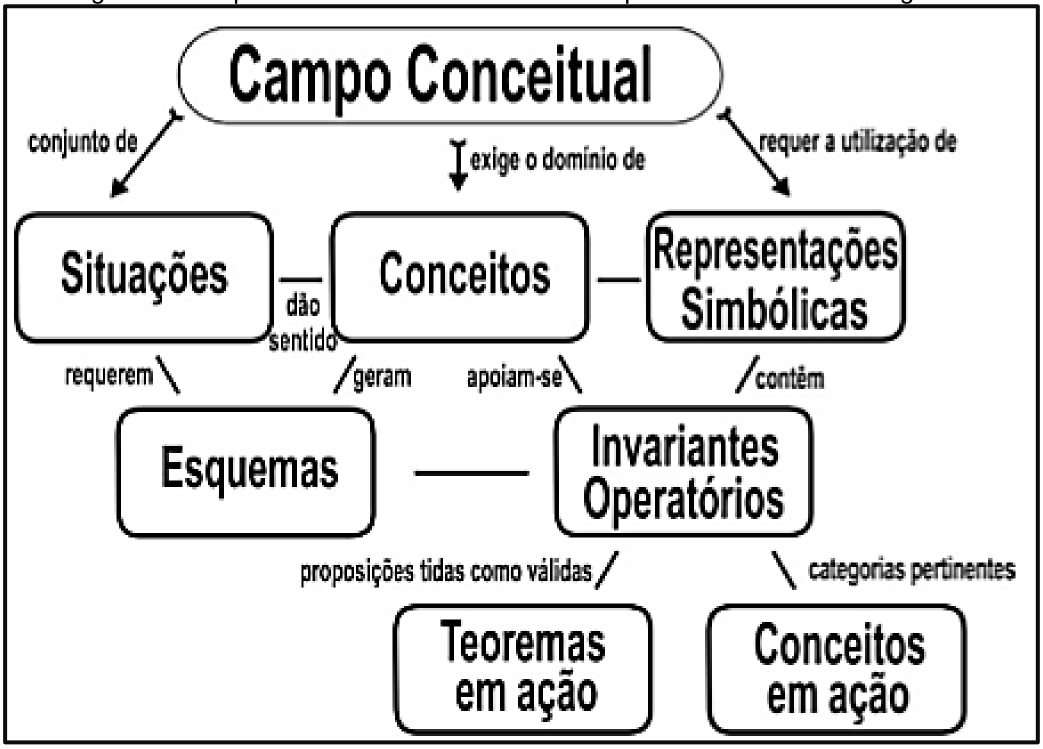


Fonte: Bini (2008)

De acordo com a autora, quando um estudante se depara com novas situações (S), ele já possui um Campo Conceitual Inicial (C.C.I.). Diante dessas situações, surgem os invariantes operatórios (I) que expressam a compreensão do estudante (conceito em ação e teorema em ação). Esse conjunto constitui um novo conceito, oriundo dentro do segundo tipo de classes de situações, no qual o sujeito não possui capacidade imediata de desenvolver esquemas e precisa de meios que o conduzam à reflexão e à ações na busca de caminhos, possibilitando o desenvolvimento do seu campo conceitual, o que está representado por N.C.C (Novo Campo Conceitual). Os esquemas permeiam todo o processo, fazendo-se presentes desde o campo conceitual inicial até o novo campo conceitual. Contudo, devemos frisar que o estudante não adquire um novo campo conceitual, mas um campo conceitual mais amplo.

Para Vergnaud (2009a, p.313) “a criança não adquire hábitos, mas regras, as quais podem e devem aplicar-se a problemas novos”. Portanto, “ao se deparar com situações novas, os sujeitos mobilizam seus conhecimentos prévios, os reformulam e tentam adaptá-los à nova situação, ou seja, são estabelecidas composições novas e generalizadoras” (NOGUEIRA E REZENDE, 2014 p. 50). A figura 4 a seguir ilustra o mapa conceitual da Teoria dos Campos Conceituais. Ela representa uma estrutura gráfica que organiza as ideias que foram apresentadas nessa seção sobre a Teoria de Vergnaud.

Figura 4 – Mapa conceitual da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud



Fonte: Jenske (2011)

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud foi escolhida para apoiar na análise qualitativa de nossa pesquisa e na compreensão das dificuldades que surgem no momento da assimilação de um conceito, isto é, irá colaborar de modo a nos levar a compreensão do processo de conceitualização dos estudantes em situações matemáticas que envolvem inequações quadráticas, sobretudo aferindo os invariantes operatórios que eles lançam mão na busca pelas soluções em situações matemáticas sobre inequações quadráticas. “As formulações das crianças não são independentes das operações mentais que elas, as crianças, são capazes de realizar, e as dificuldades de utilização de certas expressões traduzem, de fato, dificuldades de conceitualização” (VERGNAUD, 2009a, p.110). O próximo capítulo desse trabalho consiste na revisão de literatura.

3 REVISÃO DA LITERATURA

A revisão da literatura é um levantamento de trabalhos realizados por outros pesquisadores. Ela é importante para dá ao pesquisador uma visão abrangente do objeto matemático e de pesquisa. Segundo Gil (2008, p.197)

> Para interpretar os resultados, o pesquisador precisa ir além da leitura dos dados, com vista a integrá-los num universo mais amplo em que poderão ter algum sentido. (...) Daí a importância da revisão da literatura. (...) Essa revisão auxilia na etapa de análise e interpretação para conferir significado aos dados (GIL, 2008, p.197).

O número de pesquisas em educação matemática tem crescido ao longo dos últimos anos, sobretudo àquelas que apontam os principais obstáculos enfrentados pelos estudantes, bem como propostas de metodologias que melhoram o processo de ensino-aprendizagem. Para dissertar sobre as inequações quadráticas, buscamos por pesquisas que mostram as dificuldades no processo de ensino desse conteúdo, inclusive propostas metodológicas de ensino. Esse tipo de consulta enriquece a prática docente, pois permite ao educador ter uma visão mais ampla do ensino de determinado conceito matemático e se apropriar de novos mecanismos que possam evitar obstáculos durante o processo.

Essa revisão da literatura consiste em uma síntese de pesquisas realizadas sobre o ensino de inequações quadráticas objetivando identificar os obstáculos que os estudantes enfrentam no ensino, os métodos de ensino mais utilizados pelos educadores e os resultados de aplicações desses métodos. Além disso, destacamos, também, os aportes teóricos utilizados pelos pesquisadores. Buscamos as pesquisas em repositórios de instituições de ensino superior como da Universidade de Brasília (UNB), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC) e Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), assim como no catálogo de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Buscamos, ainda, as dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) e utilizamos a versão de busca de trabalhos acadêmicos da Google (Google Acadêmico) como instrumento que nos levasse a artigos de periódicos como a Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT), Revista Principia e *Acta Scientiae.* E após realizar o levantamento, nosso objetivo foi identificar e analisar os problemas de aprendizagem e de ensino; a categoria e a abordagem da pesquisa; como este assunto é abordado; as metodologias utilizadas, os resultados e conclusões dos pesquisadores.

Assim, selecionamos um total de dez trabalhos relacionados ao ensino e aprendizagem de inequações, no qual cinco são dissertações, quatro artigos publicados em anais ou revistas e uma tese de doutorado. É relevante mencionar que devido à falta de pesquisas exclusivas de inequações quadráticas, optamos em analisar alguns que tratam, de modo geral, de inequações polinomiais e suas aplicações. Além disso, nota-se que há, nesse caso, muitos trabalhos de cunho diagnóstico, porém poucos experimentais. O quadro a seguir apresenta uma síntese de cada uma das dez pesquisas selecionadas, apontando o tipo de estudo realizado, o título e autor da pesquisa, o ano no qual a pesquisa foi realizada e sua natureza.

Quadro 1 – Síntese das pesquisas selecionadas

TIPO DE ESTUDO	TÍTULO DO TRABALHO	AUTOR (ANO)	NATUREZA
Experimental	O uso de vários registros na resolução de inequação: uma abordagem funcional gráfica	Vera Lúcia Giusti de Souza (2007)	Tese
	Estudo das inequações: contribuições para a formação do professor de matemática na licenciatura	Adil Ferreira Magalhães (2013)	Dissertação
Diagnóstico	Dificuldades dos alunos para resolver problemas com inequações	Rinaldo César Beltrão (2010)	Artigo
	Um estudo sobre inequações: entre alunos do ensino médio	Gerson Martins Fontalva (2006)	Dissertação
	Erros na resolução de inequações: consequências de dificuldades relativas a conteúdos dos ensinos fundamental e médio	Maria Luísa Perdigão Diz Ramos e Edda Curi (2014)	Artigo
	Funções quadráticas e inequações do 2ª grau	Ângela Maria Martins Gonçalves Coelho Reis (2013)	Dissertação
	Desenvolvendo o raciocínio matemático: generalização e justificação no estudo das inequações	Joana Mata-Pereira e João Pedro da Ponte (2013)	Artigo
	Registros de Representação semiótica e o conceito de inequação: análise do desempenho de licenciados em matemática à luz da congruência semântica	Willian Barbosa Travassos e Marcelo Carlos de Proença (2018)	Artigo
	Análise do conhecimento de professores sobre o ensino de inequações	Regina Aparecida Xavier Gomes Dias (2014)	Dissertação
	O ensino de desigualdades e inequações em curso de licenciatura em matemática	Marcelo de Melo (2007)	Dissertação

Fonte: Revisão Bibliográfica (2019)

Pesquisas experimentais são aquelas que ocorrem intervenção realizada em sala de aula, isto é, o pesquisador propõe e aplica uma atividade ou uma sequência de atividades com o objetivo de ensinar determinado conceito. Souza (2007) parte de três questões de pesquisa: uma sequência didática envolvendo o tratamento e a conversão de registros pode fornecer aos alunos condições de inter-relacionarem os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos envolvidos na resolução de inequações com uma incógnita real? O tratamento e a conversão de registros pode proporcionar aos alunos uma apreensão significativa de que é preciso trabalhar sempre com inequações equivalentes? A abordagem envolvendo o tratamento e a conversão de registros, no caso da resolução de equação e inequações com uma incógnita real, pode desencadear a discussão global sobre esta resolução?

Para elaborar sua proposta, a autora levou em consideração os insatisfatórios resultados apresentados em uma pesquisa diagnóstica sobre a resolução algébrica de inequações com uma variável por parte de alunos. Nesse sentindo, ela buscou uma abordagem que não fosse estritamente algébrica e se essa abordagem poderia oferecer melhores resultados no processo de ensino e aprendizagem da resolução de inequações. Souza (2007) teve o objetivo de estudar problemas ligados ao ensino e à aprendizagem de inequações com uma incógnita real e assim contribuir para o processo de resolução dessas inequações por meio de uma abordagem funcional gráfica. Dessa forma, com abordagem qualitativa, o ambiente teórico escolhido é formado pela conjunção entre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1999) e os aspectos formais, algoritmos e intuitivos que estão sempre presentes numa atividade matemática, conforme Efraim Fischbein (1993).

A pesquisa foi desenvolvida em três etapas, inspiradas pela engenharia didática, segundo Artigue (1995). Essa pesquisa consistiu em aplicar uma sequência de atividades a dois grupos de sujeitos. O primeiro grupo são alunos do curso de licenciatura numa formação inicial e o segundo, de professores da rede estadual numa formação continuada. O objetivo da sequência de atividades foi apresentar a esses dois grupos a resolução funcional gráfica genérica de inequação com uma incógnita real. Souza (2007) trabalhou com três sistemas de representação que serviu como norte para a elaboração da sequência: algébrica, segundo ela é usual e eficiente; o gráfico, pois o uso seria facilitado com advento de tecnologias e a língua materna como catalisador entre os registros. A autora utiliza o método de entrevistas para que os sujeitos da pesquisa explicassem a resposta dada e essa análise foi feita à luz do modelo cognitivo sugerido por Fischbein (1993). A partir das entrevistas, a autora concluiu que os sujeitos entrevistados utilizam aspectos intuitivos quando lidam com a resolução de uma inequação e, por conta disso, transferem as regras de resolução de equações para a de inequações. A análise mostrou, também, a ausência de aspectos formais lógicos em todos os protocolos dos dois grupos investigados e a presença de aspectos intuitivos numéricos.

Magalhães (2013) supõe, inicialmente, que a grande dificuldade no trabalho com as inequações refere-se a uma deficiência global no desenvolvimento do pensamento algébrico tanto por parte dos estudantes do ensino básico como pelos estudantes de licenciatura em matemática. O trabalho desenvolvido por ele procurou contribuir para o enfrentamento das dificuldades no trabalho de formação inicial de professores através de uma sequência de atividades de sala de aula. O objetivo foi desenvolver um estudo acreditando na possibilidade de enfrentar essas dificuldades no processo de formação do professor, através de um trabalho sistemático de retomada do desenvolvimento do pensamento funcional e algébrico do licenciando.

Magalhães (2013) utiliza como aporte teórico a Teoria de Representação semiótica de Raymond Duval e sua pesquisa está organizada em elaboração, aplicação e análise dos resultados de um conjunto sequencial de seis atividades propostas a alunos do curso de licenciatura em matemática de uma instituição pública de Belo Horizonte. A análise dos dados se deu através de acompanhamento da trajetória de aprendizagem de cada estudante ao longo da sequência de atividades avaliando, a partir dos dados obtidos, o avanço ou não em diferentes etapas. Com a análise dos dados, ele concluiu que a tendência dominante entre estudantes e professores da escola básica é restringirem-se ao tratamento algébrico, não distinguindo adequadamente os procedimentos, dando ênfase na memorização de regras operacionais que acabam sendo equivocadamente generalizadas.

Por pesquisas diagnósticas, entendemos que são aquelas feitas para fazer levantamentos, investigações, explorações e análises de uma dada situação. Beltrão (2010) investiga as dificuldades encontradas por alunos concluintes do ensino fundamental de escolas públicas de Recife, pois, segundo ele, as pesquisas em educação matemática e os resultados em larga escala têm apontado que os estudantes apresentam dificuldades para aprender matemática desde as séries iniciais e que essas dificuldades aumentam à medida que se avança nas séries. O objetivo do autor é identificar as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver questões de álgebra, em particular as questões de inequação, do exame de proficiência do Sistema de Avaliação do Estado de Pernambuco (SAEPE). O aporte teórico utilizado é baseado nas teorias sobre didática da Matemática e linguagens, de acordo com Bruno D’Amore (2007). A proposta do autor foi selecionar as questões de álgebra do SAEPE e aplica-las a um grupo de 468 alunos, convertendo questões de múltipla escolha em questões abertas para que fosse possível a análise da produção dos alunos. Beltrão (2010) utiliza, ainda, o método de entrevistas. Ele selecionou alguns casos e realizou entrevistas vídeo-gravadas para que os alunos explicassem o trabalho matemático desenvolvido. Beltrão (2010) concluiu que a ausência de significado é um dos principais problemas que surgem no trabalho com as desigualdades e que a notação formal não pode ser desconectada da aquisição do significado, além de que essa falta de conexão é um dos principais problemas que enfrentamos no processo de ensino da matemática. Por isso, é necessário que seja dada atenção à forma como o conceito é introduzido.

Fontalva (2006) realiza um estudo qualitativo sobre inequações entre alunos do ensino médio. Sua pesquisa diagnóstica foi aplicada em trinta alunos do terceiro ano do ensino médio de uma escola estadual técnica, buscando investigar quatro questões: De quais recursos os estudantes lançam mão na resolução de inequações? Quais domínios fazem interagir? Que justificativas fornecem para as diversas etapas na resolução de inequações? Nessas justificativas, explicam ferramentas tais como conceitos e propriedades ou explicitam apenas termos relativos a técnica de resolução de inequações? Quais tipos de erros apresentam e quais são os erros mais frequentes? Fontalva (2006) aplica as questões, analisa as respostas e erros dos alunos. Ele realizou uma entrevista com o professor de matemática que ministrou o assunto de inequações para os sujeitos de sua pesquisa em séries anteriores, consultando livro didático adotado e o plano de trabalho docente da instituição. Nessa pesquisa, ele utilizou a técnica *Thinking aloud* e para análise dos resultados, usou como referencial teórico a interação entre domínios de Douady (1986) e a categorização de técnicas segundo Assude (2000). Com a análise das respostas dos alunos, Fontalva verificou que em geral as respostas se fundamentam em técnicas e há uma fraca tendência à explicitação de conceitos e propriedades, isto é, o processo de ensino-aprendizagem de inequações privilegiou o aspecto algorítmico centrado na técnica.

Erros na resolução de inequações: consequências de dificuldades relativas a conteúdos dos ensinos fundamental e médio é o título do artigo da autoria de Ramos e Curi (2014) cujo objetivo foi classificar, analisar e identificar as dificuldades e erros cometidos na resolução de inequação-produto e inequação exponencial. Segundo as autoras, é importante analisar os erros cometidos pelos alunos, pois dessa forma o professor é capaz de identificar as defasagens que os alunos trazem. Ramos e Curi (2014) realizaram uma pesquisa diagnostica com 37 alunos do primeiro ano da educação profissional tecnológica de nível médio de uma escola pública. A pesquisa consiste em uma investigação na qual ocorreu um aprofundamento da compreensão dos tipos de erros e das dificuldades encontradas pelos alunos utilizando-se de suas produções escritas. O método adotado foi de pesquisa qualitativa por meio da análise de conteúdo da produção escrita dos alunos. As autoras afirmam que a verificação e análise dos erros são importantes, pois sem eles os erros podem se tornar recorrentes e se transformar em obstáculos para novas aprendizagens.

Com os resultados obtidos foi possível perceber, segundo as autoras, que os alunos apresentaram dificuldades e erros provenientes de lacunas do ensino fundamental na resolução de função quadrática, prejudicando o aprendizado de inequações no ensino médio. Segundo as autoras, o aprendizado de novos conteúdos é prejudicado em função de erros recorrentes e que é importante o professor definir estratégias que possam auxiliar o aluno a superar suas dificuldades. Elas concluem afirmando que através da análise dos erros cometidos pelos alunos o professor tem condições de definir estratégias que possam auxiliar o aluno a superar os obstáculos que o impedem à aquisição de um novo conteúdo.

O estudo de Reis (2013) teve o objetivo de investigar o modo como os alunos identificam as expressões algébricas das funções quadráticas e o modo como resolvem inequações quadráticas, inclusive a maneira que interpretam enunciados de problemas que envolvem situações reais. A metodologia utilizada no desenvolvimento do estudo seguiu uma abordagem qualitativa de investigação, baseada em estudos de caso. O estudo foi realizado em sala de aula, onde o professor assumiu papel de investigador. Os dados foram obtidos através de quatro grupos de alunos, onde foram aplicadas sete tarefas de carácter investigativo e exploratório. Foi usada uma sequência de tarefas de modo que os alunos apliquem e revejam processos já aprendidos e compreendam os conceitos, conseguindo uma aprendizagem mais sólida. A recolha dos dados se deu por meio da observação participante e pela análise das notas de aulas e produções dos alunos. Os resultados obtidos mostram que os alunos revelam diversas dificuldades na interpretação e compreensão dos enunciados dos problemas das funções quadráticas e na resolução de inequações também quadráticas, bem como no processo de passar uma função quadrática da forma geral para a forma canônica. Reis (2013) notou em sua investigação que os alunos possuem conhecimentos sobre funções, mas revelam um conhecimento compartimentado; não conseguindo estabelecer a conexão entre várias representações e conteúdos que consideram objetos matemáticos distintos.

Desenvolver a capacidade dos alunos raciocinarem matematicamente é uma das metas mais importantes do ensino. É nesse sentindo que Pereira e Ponte (2013) elaboraram seu artigo objetivando analisar os processos de raciocínio matemático de alunos na resolução de tarefas algébricas envolvendo inequações na tentativa de compreender o modo que os processos de raciocínio se relacionam com as representações usadas e com a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos. Segundo os autores, raciocinar matematicamente é usar a informação existente para chegar a novas conclusões fazendo inferências de natureza dedutiva, indutiva ou abdutiva. Por meio de abordagem qualitativa, Pereira e Ponte (2013) segue uma metodologia de investigação de observação participante em uma turma de 9ª ano composta por 17 alunos que apresentam diferentes níveis de desempenho. A recolha de dados se deu por meio de observação e gravação áudio e vídeo das aulas, além da recolha documental. Os resultados apresentados pelos autores dizem respeito a formulação de generalizações produzidas. Em relação a isso, os alunos seguem uma abordagem indutiva, generalizando as relações observadas em caso particular para uma classe de objetos mais ampla. No que diz respeito à justificação, os alunos não dão relevância às características necessárias para que seja matematicamente válida, apresentando tanto justificações válidas como não válidas. No que diz respeito às representações, os alunos utilizam a linguagem natural oral e escrita e a linguagem simbólica sem e com variáveis, não apresentando dificuldades significativas nas transformações, sejam tratamentos ou conversões. Pereira e Ponte (2013) concluem afirmando que as relações estabelecidas entre raciocínio, representações e significação revelaram-se um instrumento útil, pois mostra como alguns alunos são capazes de realizar certas generalizações e justificações, utilizando raciocínio indutivo, abdutivo e dedutivo.

Sobretudo, organizar o ensino e aprendizagem enquadrando raciocínio, representação e processos de significação constitui uma condição para a aprendizagem da matemática com compreensão.

Travassos e Proença (2018) nos concede sua pesquisa intitulada “Registros de representação semiótica e o conceito de inequação: Análise do desempenho de licenciados em matemática à luz da congruência semântica”. A teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009) é o aporte teórico utilizado pelos autores cujo objetivo foi analisar o desempenho de estudantes de um curso de licenciatura em Matemática em atividades envolvendo o conceito de inequação do primeiro grau com uma variável nos diferentes níveis de congruência semântica. O estudo é de natureza quati-qualitativa voltada a modalidade de pesquisa exploratória. A pesquisa foi realizada com 16 estudantes, sendo quatro acadêmicos de cada ano do curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública. Para o desenvolvimento da pesquisa, os autores elaboraram um instrumento composto por oito exercícios de inequação do primeiro grau com uma variável em língua natural de modo que atendesse aos quatro níveis possíveis de congruência semântica. Este instrumento foi elaborado com o objetivo de propiciar a análise do conhecimento dos sujeitos da pesquisa referentes a conversão do registro em língua natural para a escrita algébrica, sobretudo analisar a capacidade dos estudantes em identificar e converter as unidades significantes em diferentes níveis de congruência semântica para a linguagem matemática.

Para analisar as resoluções dos acadêmicos, os procedimentos consistiram inicialmente na verificação dessas resoluções referente a cada exercício, separando-os em acertos e erros, e a partir das resoluções incorretas, analisavam-se as conversões dos registros, em especial, as unidades significantes identificadas e convertidas, bem como o tratamento realizado para determinar a solução do exercício. Das sete resoluções incorretas, os autores observaram que todas elas apresentaram erros relacionados à conversão do registro em língua natural para registro algébrico. Travassos e Proença (2018) concluem sua pesquisa apontando que ela apresentou, de modo geral, dados preocupantes, visto que o conceito de inequação do primeiro grau com uma variável é um conteúdo do ensino fundamental e médio. Os resultados evidenciam dificuldades dos acadêmicos referentes a exercícios cujos critérios de univocidade semântica terminal e correspondência semântica não são satisfeitos. Apresentam, também, erros envolvendo operações de tratamento, tais como multiplicação, divisão e propriedades do conceito de inequação. Os autores afirmam que um fator que contribui para os erros dos acadêmicos está relacionado a atenção dos estudantes com o enunciado dos exercícios, visto que as unidades significantes são convertidas corretamente, porém erros no tratamento algébrico envolvendo operações matemáticas simples invalidam suas respostas. De modo geral, identificou-se baixo desempenho dos acadêmicos.

Dias (2014), em sua dissertação, parte de um questionamento comum aos autores dessa revisão de estudos: Por que o conteúdo inequações é visto pelos professores de matemática como complemento de equações e, muitas vezes, deixado de ser ensinada ou dada pouca importância a ele? Dessa forma, a pesquisa de Dias (2014) teve por objetivo investigar os procedimentos e os saberes utilizados pelos professores sobre desigualdades ou inequações, isto é, buscou-se compreender de que forma o tema é apresentado aos estudantes e qual o modo de resolução é priorizado pelos docentes que participaram da pesquisa. Para isso, utilizou como auxílio a Teoria de Representação Semiótica de Duval (2003) e os estudos de saberes docentes segundo Shuman (1986), Tardif (2002) e Charlot (2005). De cunho investigativo com abordagem qualitativa, Dias (2014) selecionou cinco professores da rede pública e estadual de Carapicuíba (São Paulo) que lecionam no 8ª ano do ensino fundamental e 1ª ano do ensino médio. A autora utiliza um questionário composto por 17 perguntas de caráter didático e sobre o conteúdo investigado e entrevista com o sujeito. A autora analisou as respostas dadas nos questionários e na entrevista e apontou que os professores não percebem o quanto seria importante empregar as diferentes representações que são usadas no ensino de Matemática e isso demonstra que pode haver lacunas em sua formação inicial. Segundo a autora, a forma no qual é apresentado um conceito pode facilitar ou dificultar a aprendizagem dos estudantes, bem como o processo de relacionar um novo conhecimento a outro já assimilado. Dias (2014) afirma que é necessário que o estudante compreenda toda simbologia envolvida na resolução de uma inequação e se o professor não perceber o erro de seu registro, realiza-o na lousa e o repassa a seus alunos. A autora conclui afirmando que o professor conhece a resolução técnica das inequações e prioriza-a.

O último trabalho analisado para essa revisão de literatura é a dissertação de Melo (2007). Sua pesquisa, cuja modalidade é estudo de caso, teve o objetivo de detectar como professores de um curso de licenciatura em matemática desenvolvem desigualdades e inequações com suas classes e quais as fontes orientadoras de seu trabalho a respeito desses assuntos. Registros de representação semiótica de Duval foi o aporte teórico utilizado para embasar sua pesquisa investigativa de abordagem qualitativa. O autor selecionou quatro docentes de uma instituição de ensino superior que oferece o curso de licenciatura em matemática e, por meio de entrevistas gravadas e transcritas por escrito, permitiu a recolha de dados. A análise das entrevistas se deu verificando o perfil dos sujeitos; a utilização dos registros de representação semiótica; evidenciando os recursos e as formas de avaliação empregadas e as principais dificuldades dos alunos no trato de desigualdades e inequações; as opções fornecidas pelos docentes entrevistados para sanar as dificuldades dos alunos e resultados de exame de livros didáticos ou apostilas e cadernos de alunos. De acordo com o depoimento dos entrevistados foi possível afirmar que os professores utilizam diversos registros de representação semiótica e todos afirmaram usar a revisão para sanar as dificuldades de seus alunos. Melo (2007) relata que foi apontado nas entrevistas um obstáculo comum percebido por três docentes que é a dificuldade que seus alunos apresentam no trato com desigualdades e inequações: o uso incorreto da propriedade de compatibilidade da relação de ordem com a multiplicação.

O objetivo dessa revisão foi tomar consciência de prováveis problemas que circundam as salas de aula no ensino de matemática, particularmente no ensino das inequações, além de verificar o que vem dando certo no ensino desse conteúdo. Separamos as pesquisas em três categorias, como mostra o quadro a seguir, de acordo com os sujeitos (público alvo) de cada uma.

Quadro 2 – classificação das pesquisas de acordo com os sujeitos envolvidos

SUJEITOS DA PESQUISA	AUTORES
Estudantes do Ensino Básico (fundamental ou médio)	Beltrão (2010) Fontalva (2006) Ramos e Curi (2014) Reis (2013) Pereira e Ponte (2013)
Estudantes do curso de licenciatura em matemática	Souza (2007) Magalhães (2013) Travassos e Proença (2014)
Docentes do ensino básico ou superior	Souza (2007) Dias (2014) Melo (2007)

Fonte: Revisão Bibliográfica (2019)

Após a apreciação dessas pesquisas, elencamos as principais dificuldades detectadas pelos pesquisadores por parte dos sujeitos da pesquisa:

(1) Defasagens de aprendizagem de séries anteriores que impossibilitam o aprendizado total ou parcial de um novo conceito;

(2) Raciocínio e trabalho matemático deixado de lado e priorizado o processo mecânico e braçal na resolução de inequações;

(3) Dificuldades nas conversões de linguagem, principalmente da linguagem materna para a linguagem algébrica ou gráfica;

(4) Dificuldades na linguagem matemática (simbólica, inclusive), bem como na interpretação e compreensão dos enunciados dos problemas.

Além dessas dificuldades, os pesquisadores apontam preocupações e problemas no ensino de inequações. Destacam-se:

(1) O ensino privilegiando o aspecto mecânico e algorítmico de resolução das inequações;

(2) O ensino com restrição ao tratamento algébrico, com ênfase na memorização de regras operacionais e sem a demonstração de outras formas de registros;

(3) A preocupação dos professores pela resposta final do exercício, sem levar em conta o raciocínio e trabalho matemático do aluno;

(4) O ensino de inequações dado de forma complementar ao de equações, levando os estudantes a um processo de resolução indutivo;

(5) O ensino com ausência de significado e falta de conexão dos conceitos com a realidade.

É relevante mencionar os anos em que as pesquisas foram realizadas: a mais antiga em 2006 e a mais recente, 2018; e mesmo com essa diferença de período, os problemas continuam semelhantes. De acordo com os objetivos dessa revisão de literatura, constatou-se que as pesquisas selecionadas contribuíram de modo significativo com nossa visão, tornando-a mais clara em relação ao processo de ensino e aprendizagem de inequações, inclusive do tipo quadrática. Essa revisão, portanto, foi essencial para a elaboração da nossa sequencia de atividades.

4 ABORDAGEM MATEMÁTICA

Esse capítulo traz uma abordagem matemática sobre as inequações quadráticas. Entendemos que se faz necessária uma abordagem matemática, pois tais informações podem contribuir e auxiliar o docente em sua formação inicial e continuada, capacitando-o, inclusive, à aplicação da sequência de atividades proposta nessa pesquisa.

As inequações surgem em diversas situações do dia-a-dia, inclusive em área como engenharia, administração e na própria matemática, como por exemplo, os problemas de otimização, no qual se pretende a busca por maximização de lucros ou minimização de consumo. Entende-se por inequação uma desigualdade entre expressões matemáticas, onde os sinais usados para escrever essas expressões são: $>$ (maior do que), $<$ (menor do que), $\geq$ (maior do que ou igual a) e $\leq$ (menor do que ou igual a). Nessa seção, trataremos dos conceitos e propriedades das inequações quadráticas. E para isso, iremos expor conceitos prévios necessários para esse estudo, iniciando pelo conceito de conjunto dos números reais.

Definição 1: *Ao conjunto formado por todos os números com representação decimal exata ou periódica (racionais) e não exata e nem periódica (irracionais), chama-se de conjunto dos números reais* ($\mathbb{R}$).

Em algumas ocasiões, utilizam-se notações especiais para representar subconjuntos importantes:

(1) O conjunto dos números reais não nulos:

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

(2) O conjunto dos números reais não negativos:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

(3) O conjunto dos números reais positivos:

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

(4) O conjunto dos números reais não positivos:

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

(5) O conjunto dos números reais negativos:

$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

Naturalmente, utilizaremos as notações $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ para reportar aos conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais, respectivamente.

Definição 2: *Sejam a e b dois números reais quaisquer. Diz-se que a é menor do que b, denotado por $a < b$, quando $b - a \in \mathbb{R}_+^*$ e diz-se que a é maior do que b, denotado por $a > b$, quando $a - b \in \mathbb{R}_+^*$.*

Usa-se a notação $a \leq b$ para dizer que $a < b$ ou $a = b$. Assim, $a \leq b$ lê-se: "a é menor do que ou igual a b". Ou equivalente, $b \geq a$ lê-se: "b é maior do que ou igual a a".

Proposição 1: *A relação de ordem $a < b$ em $\mathbb{R}$, goza das propriedades:*

(1) Transitividade

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, *se* $a < b$ *e* $b < c$ *então* $a < c$.

(2) Tricotomia

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se que exatamente uma das três alternativas ocorre: ou $a = b$ ou $a < b$ ou $b < a$.

(3) Monotonicidade da adição:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

(4) Monotonicidade da multiplicação:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, *com* $0 < c$, $a < b \Rightarrow a.c < b.c$

No entanto, se $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, *com* $c < 0$, $a < b \Rightarrow b.c < a.c$

Demonstração:

(1) Como $a < b$ então $b - a \in \mathbb{R}_+^*$. Do mesmo modo, $c - b \in \mathbb{R}_+^*$. Logo, $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, $(b - a) + (c - b) = (c - a)$ e $(c - a) \in \mathbb{R}_+^*$. Portanto, conclui-se $a < c$.

(2) Considerando $a, b \in \mathbb{R}$, com $\mathbb{R}$ um corpo ordenado, tem-se:

(i) $a - b = 0 \Rightarrow a = b$

(ii) $a - b \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow b < a$

(iii) $-(a - b) \in \mathbb{R}_-^* \Rightarrow (b - a) \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow a < b$

(3) Como $a < b$, então $b - a \in \mathbb{R}_+^*$.

Logo, $(b + 0 - a) \in \mathbb{R}_+^*$. Desde que *0* é o elemento neutro da adição, então $0 = c + (-c)$. Assim, $(b + c + (-c) - a) = (b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}_+^*$. Portanto, $(a + c) < (b + c)$.

(4) Como $a < b$ então $b - a \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) Se $0 < c$, então $c \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, $(b - a).c \in \mathbb{R}_+^*$. Logo, $b.c - a.c \in \mathbb{R}_+^*$. Portanto, conclui-se $a.c < b.c$.

(ii) Se $c < 0$, então $-c \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, $(b - a).(-c) \in \mathbb{R}_+^*$. Logo, $a.c - b.c \in \mathbb{R}_+^*$. Portanto, conclui-se $b.c < a.c$.

De modo análogo, verifica-se a relação de ordem $a > b$, inclusive com a substituição dos sinais "<" e ">" por "≤" e "≥". A partir disso, considera-se o conjunto $\mathbb{R}$, como um conjunto ordenado. Isso significa dizer que dados dois números reais quaisquer podemos inferir quem é o maior deles. É indispensável que o professor considere a importância do conjunto dos números reais, pois ele é um dos conhecimentos imprescindíveis para uma plena aprendizagem das funções reais, sobretudo, para esta pesquisa, no qual, a partir do gráfico funcional, faz-se o estudo das inequações quadráticas.

Outro conhecimento fundamental para o estudo das inequações quadráticas é o conceito de intervalo numérico, uma vez que pode-se representar a solução de inequações por meio desse objeto. Os intervalos são subconjuntos do conjunto dos números reais.

Definição 3 (Intervalos): *Dados a, b ∈ $\mathbb{R}$, com a < b, chama-se de intervalos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:*

- *Intervalos limitados de extremos a e b:*

I_1) Intervalo aberto: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

I_2) Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

I_3) Intervalo aberto a direita: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

I_4) Intervalo aberto a esquerda: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

- *Intervalos ilimitados:*

I_5) semirreta de origem em a: $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

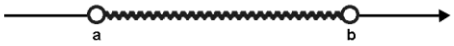
I_6) semirreta aberta de origem em a: $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

I_7) semirreta de origem em a: $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

I_8) semirreta aberta de origem em a: $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

Os intervalos numéricos possuem outra representação: a geométrica sobre a reta real. No quadro a seguir estão exibidas essas representações e, em seguida, algumas considerações a respeito delas.

Quadro 3 - Representação e descrição de intervalos

Representação geométrica	Representação algébrica	Descrição
	$]a, b[$	Intervalo aberto
	$[a, b]$	Intervalo fechado
	$[a, b[$	Intervalo aberto à direita
	$]a, b]$	Intervalo aberta à esquerda
	$]-\infty, a]$	semirreta de origem em a
	$]-\infty, a[$	semirreta aberta de origem em a
	$[a, +\infty[$	semirreta de origem em a
	$]a, +\infty[$	semirreta aberta de origem em a

Fonte: Leonardo (2013)

(1) Na representação geométrica, bolinha vazia (○) indica que aquele extremo não pertence ao intervalo. Por outro lado, bolinha cheia (•) indica que aquele extremo pertence ao intervalo.

(2) O símbolo ∞ representa infinito e nunca deve-se utilizar os sinais que indicam “fechado” ao lado dele. Ele indica que uma variável pode crescer indefinitivamente (+∞) ou decrescer indefinitivamente (–∞).

(3) Algumas literaturas trazem uma notação algébrica diferente: utilizam os símbolos “(“ e “)” em intervalos abertos, isto é, $]a, b[$ é equivalente a (a, b).

Para se estudar inequações quadráticas por meio da análise do gráfico funcional, naturalmente se faz necessário perpassar pelo estudo de funções[4].

Definição 4 (Função): *Sejam X e Y conjuntos não-vazios. Uma função $f: X \to Y$ é uma regra que associa à cada elemento $x \in X$ um único elemento $y \in Y$.*

Em $f: X \to Y$ *lê-se “função f de X em Y”.* Ao conjunto X dá-se o nome de domínio e Y de contradomínio da função f e para cada $x \in X$, o elemento $y = f(x)$ chama-se imagem de x pela função f. Nesse sentindo, quando pensamos em função, necessariamente, precisamos pensar em três elementos: domínio, contradomínio e a correspondência $x \longmapsto f(x)$. Assim, segue a definição 5.

[4] A pesquisa é voltada ao ensino básico, desse modo, limitamos às funções reais de variável real, isto é, funções *f* de ℝ em ℝ.

Definição 5 (Domínio e Imagem): *Seja* f uma função de X em Y

- Chama-se de domínio o conjunto *D(f)* dos elementos $x \in X$ para os quais existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.
- Chama-se de imagem o conjunto I*m(f)* dos elementos $y \in Y$ para os quais existe $x \in X$ tal que $(x, y) \in f$, ou seja, $Im(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X; f(x) = y\}$.

É pertinente mencionar que o conjunto Imagem de uma função é um subconjunto do contradomínio, podendo ser o próprio conjunto. Em posse das definições de função, domínio e imagem, segue a definição das funções expressas por polinômios do 2º grau, isto é, as funções quadráticas.

Definição 6 (função quadrática): *Uma função real,* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, é dita quadrática quando existirem números reais* a, b e c*, com* $a \neq 0$*, tais que*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Em outras palavras, uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número real x associa ao número $ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, é chamada de função quadrática. Aos números reais a, b e c chamaremos de coeficientes, em especial, de quadrático ao coeficiente "a". Assim sendo, são exemplos de funções quadráticas:

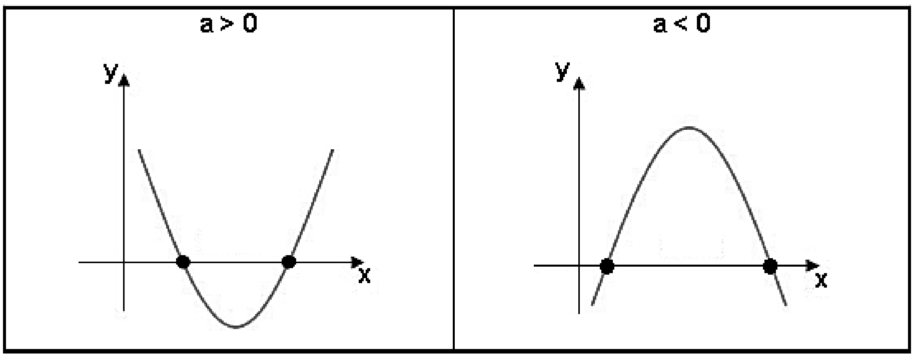
$f(x) = x^2 + 3x - 1$, onde $a = 1$, $b = 3$ e $c = -1$
$f(x) = -3x^2 + 4x$, onde $a = -3$, $b = 4$ e $c = 0$
$f(x) = 5x^2 + 2$, onde $a = 5, b = 0$ e $c = 2$
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$, onde $a = \frac{1}{2}, b = 0$ e $c = 0$

Para as inequação quadráticas, a análise do gráfico de funções é importante, pois fazendo tal análise consegue-se obter o conjunto solução da inequação em questão. Assim, dada uma função f real chama-se de gráfico G_f ao conjunto dos pares ordenados definidos por:

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}$$

Assim, o gráfico de uma função quadrática é uma parábola e quando a representamos, ela pode ter a concavidade (abertura) voltada para cima ou para baixo. O coeficiente quadrático influencia esse fato: se o coeficiente quadrático for positivo, $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima. Por outro lado, se for negativo, $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo.

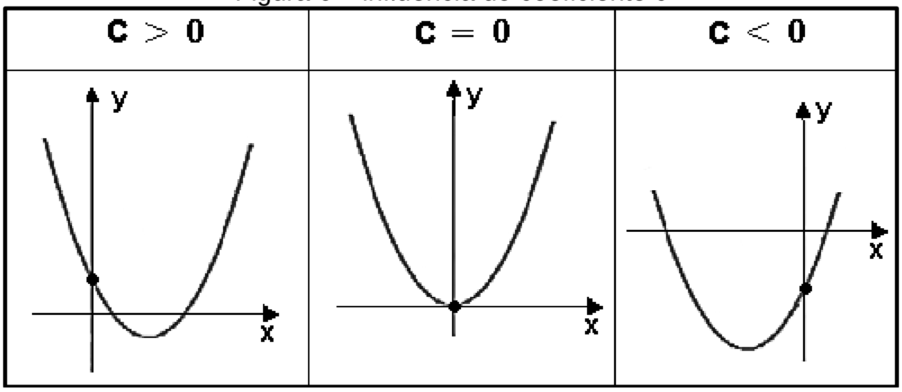
Figura 5 – concavidade da parábola



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Além do coeficiente quadrático, os coeficientes b e c, também são elementos que compõem importantes pontos do gráfico da função quadrática. O coeficiente c corresponde à ordenada do ponto em que a parábola intersecta o eixo y.

Figura 6 – influência do coeficiente c

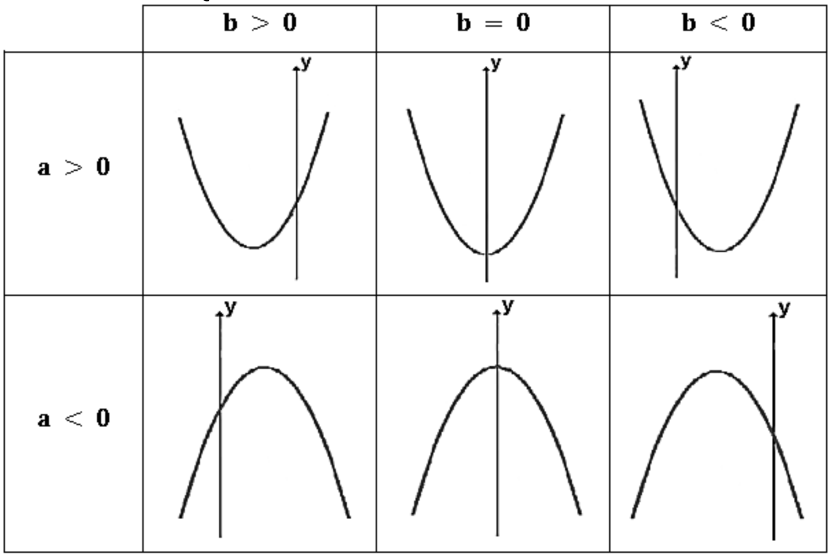


Fonte: elaborado pelo autor (2020)

De fato, a intersecção do gráfico no eixo y ocorre quando $x = 0$. Assim, substituindo x por 0 na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, tem-se $f(0) = c$. Portanto, $(0, c)$ é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.

O coeficiente b indica se a parábola intersecta o eixo das ordenadas (eixo y) em seu ramo crescente ou em seu ramo decrescente.

Quadro 4 – influência do coeficiente b



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Com a compreensão das influências dos coeficientes na parábola, torna-se mais inteligível o esboço do gráfico de uma função quadrática. Para prosseguir a explanação, utilizaremos uma forma mais conveniente: a forma canônica.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \; = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \; = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \; = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \; = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ, temos a forma canônica expressa por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \; = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

onde o símbolo Δ chama-se de discriminante.

Definição 7 (Zeros da função quadrática): *Os zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores reais de x para os quais f se anula, isto é, $f(x) = 0$.*

Analiticamente, para se determinar os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ quadrática, deve-se resolver a equação do 2ª grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Geometricamente, calcular os zeros da função quadrática é descobrir a abscissa dos pontos em que a parábola intersecta o *eixo x*. Utilizando a forma canônica, tem-se:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right] = 0$$

Como $a \neq 0$, então

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Logo,

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \Leftrightarrow \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2(\pm a)} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Portanto, tem-se a fórmula resolutiva de equações do 2ª grau:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

> ***Definição 8:*** *Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dizemos que um número **α** é raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$ se $f(\alpha) = 0$.*

A quantidade de zeros[5] da função quadrática depende, em $\mathbb{R}$, da natureza do valor do discriminante obtido. Sendo assim, em relação a esse valor, três casos são possíveis:

(1) Quando $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ apresentará duas raízes x_1 e x_2 reais e diferentes, expressas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(2) Quando $\Delta = 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ apresentará duas raízes x_1 e x_2 reais e iguais (raiz dupla), expressas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \Longrightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

(3) Quando $\Delta < 0$, ocorre que $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$. Nesse caso, diremos que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não apresenta raízes reais.

[5] As raízes da equação são os zeros da função.

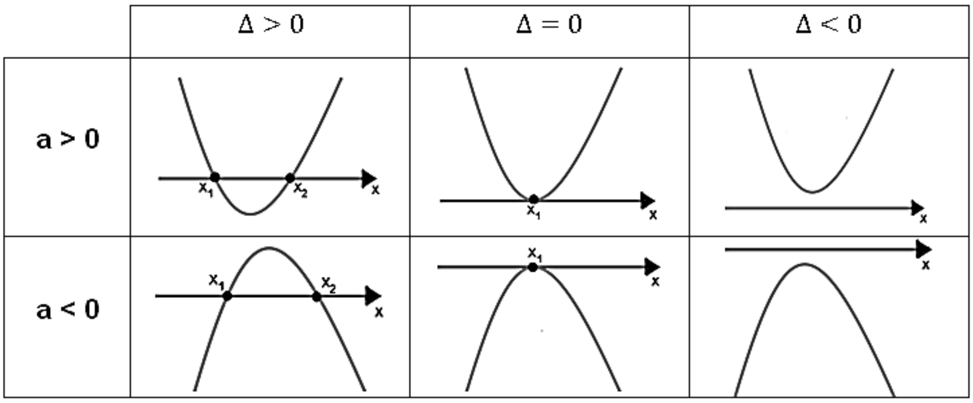
Para exemplificar esses fatos, considere as funções reais e quadráticas: $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$ e $h(x) = 2x^2 + 3x + 4$. Os valores dos discriminantes são: $\Delta = 16$, $\Delta = 0$ e $\Delta = -23$, respectivamente. Dessa forma,

- A função f possui $\Delta > 0$, logo tem duas raízes reais e diferentes que são $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$;
- A função g possui $\Delta = 0$, logo tem uma raiz dupla que é $x_1 = x_2 = 3$.
- A função h possui $\Delta = -23$, logo não têm raízes reais, pois $\sqrt{-23} \notin \mathbb{R}$.

Note, novamente, a importância do conjunto dos Reais para este estudo. Tal conjunto sustenta todo processo de construção algébrico e geométrico relativo ao estudo das inequações quadráticas.

Além dessa análise analítica, recomenda-se uma interpretação geométrica. Sendo assim, de acordo com as características dos gráficos das funções quadráticas, pode-se organizar o quadro a seguir.

Quadro 5 – influência da natureza do discriminante.



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Nas representações geométricas, de acordo com o quadro 5, considera-se:

(1) Quando $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes x_1 e x_2 reais e diferentes e a parábola intercepta o eixo x em dois pontos distintos de coordenadas $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.

(2) Quando $\Delta = 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes x_1 e x_2 reais e iguais e a parábola tangencia o eixo x no ponto de coordenada $(x_1, 0)$.

(3) Quando $\Delta < 0$, ocorre que $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$. Logo a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raízes reais e a parábola não intercepta o eixo x.

Com as definições que foram apresentadas, têm-se os recursos necessários para o esboço da parábola tal que seja útil na resolução das inequações quadráticas. É possível, também, por meio do estudo do sinal da imagem da função quadrática, determinar os valores do domínio cuja imagem é nula, positiva ou negativa. Este estudo é relevante, pois observando o gráfico funcional cujo conjunto imagem representa a situação, o domínio é o conjunto solução.

Sendo assim, considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, estudar o sinal da função f significa determinar os valores de $x \in D(f)$ para os quais a função f se anula $(y = 0)$, f é positiva $(y > 0)$ ou f é negativa $(y < 0)$. O estudo do sinal da função quadrática depende do valor do discriminante e do coeficiente quadrático. Baseando-se no quadro 5, tem-se as possibilidades:

1ª Caso: $\Delta < 0$

Se $\Delta < 0$ então $-\Delta > 0$. Da forma canônica, segue:

$$a\,.f(x) = \underbrace{a^2}_{\text{positivo}} \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{não negativo}} + \underbrace{\left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)}_{\text{positivo}} \right]$$

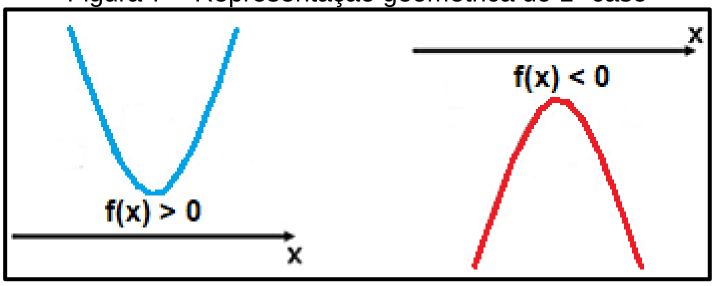
$\therefore\ a\,.f(x) > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

Isso quer dizer que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando $\Delta < 0$, tem o mesmo sinal do coeficiente quadrático para todo $x \in \mathbb{R}$, ou melhor:

$$\begin{cases} a > 0 \ \Rightarrow \ f(x) > 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ a < 0 \ \Rightarrow \ f(x) < 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

A representação geométrica[6] de funções para esse caso é:

Figura 7 – Representação geométrica do 1ª caso



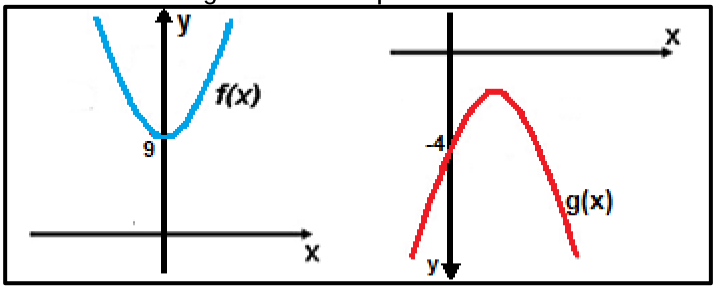
Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Para exemplificar considere a função $f(x) = x^2 + 9$ onde o discriminante é $\Delta = 0^2 - 4.1.9 = -36 < 0$. Como $a = 1 > 0$, conclui-se que $f(x) > 0$, para todo x real.

[6] Adotamos a cor azul para indicar imagem positiva e vermelha para imagem negativa.

De modo análogo, a função $g(x) = -2x^2 + 3x - 4$ tem $\Delta = 3^2 - 4.(-2).(-4) = -23 < 0$ e como $a = -2 < 0$, conclui-se que $f(x) < 0$, para todo x real.

Figura 8 – Exemplo do 1ª caso



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

2ª caso: $\Delta = 0$

Da forma canônica, segue:

$$a\,.\,f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{0}{4a^2}\right)\right] = \underbrace{a^2}_{\text{positivo}}.\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{não\ negativo}$$

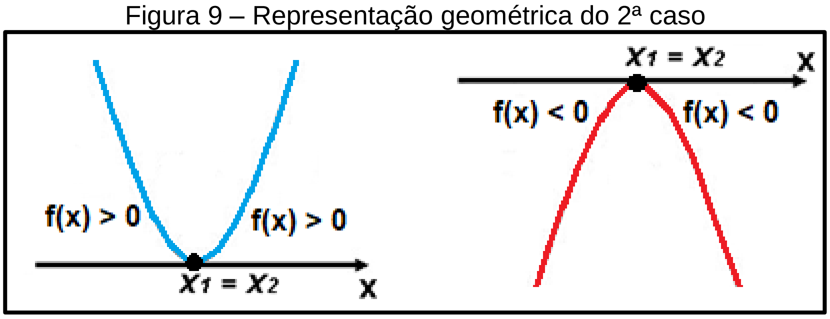
$\therefore\ a\,.\,f(x) \geq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Isso quer dizer que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando $\Delta = 0$, tem o mesmo sinal do coeficiente quadrático para todo $x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$, sendo $x_1 = \frac{-b}{2a}$ o zero duplo de f, ou melhor:

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ a < 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

A representação geométrica de funções para esse caso é:

Figura 9 – Representação geométrica do 2ª caso



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

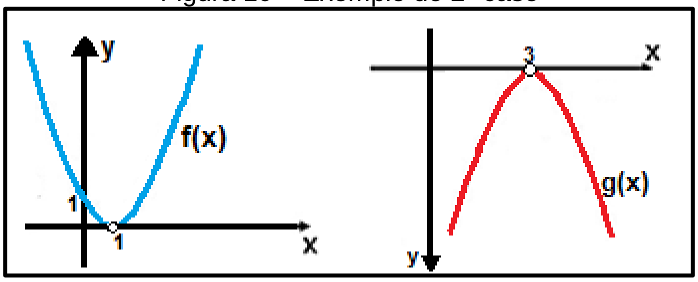
Para exemplificar considere a função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ onde o discriminante é $\Delta = (-2)^2 - 4.1.1 = 0$, então f tem um zero duplo $x_1 = \frac{-(-2)}{2.1} = 1$ e, como $a = 1 > 0$, conclui-se que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 0, & se\ x = 1 \end{cases}$$

Do mesmo modo, a função $g(x) = -x^2 + 6x - 9$, tem $\Delta = 6^2 - 4.(-1).(-9) = 0$, então f tem um zero duplo, $x_1 = \frac{-6}{2.(-1)} = 3$ e, como $a = -1 < 0$, conclui-se que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \forall x \in \mathbb{R} - \{3\} \\ f(x) = 0, & se\ x = 3 \end{cases}$$

Figura 10 – Exemplo do 2ª caso



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

3ª caso: $\Delta > 0$

Da forma canônica, segue:

$$a\,.\,f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

Aplicando o método da diferença de dois quadrados, tem-se:

$$\begin{aligned} a\,.\,f(x) &= a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \\ a\,.\,f(x) &= a^2\left[\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \\ a\,.\,f(x) &= a^2\left[\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \\ a\,.\,f(x) &= a^2\,.(x - x_1).(x - x_2) \end{aligned}$$

O sinal de $a\,.\,f(x)$ depende do sinal dos fatores $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$. Sendo assim, admitindo $x_1 < x_2$

(1) Se $x < x_1$, tem-se:

$$x < x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases}$$

Logo, $a\,.\,f(x) = \underbrace{a^2}_{\text{Positivo}}\,.\,\underbrace{(x - x_1)}_{\text{Negativo}}\,.\,\underbrace{(x - x_2)}_{\text{Negativo}}$

$\therefore\ a\,.\,f(x)\ > 0$

(2) Se $x_1 < x\ <\ x_2$, tem-se:

$$x_1 < x\ <\ x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases}$$

Logo, $a\,.\,f(x) = \underbrace{a^2}_{\text{Positivo}}\,.\,\underbrace{(x - x_1)}_{\text{Positivo}}\,.\,\underbrace{(x - x_2)}_{\text{Negativo}}$

$\therefore\ a\,.\,f(x)\ < 0$

(3) Se $x\ >\ x_2$, tem-se:

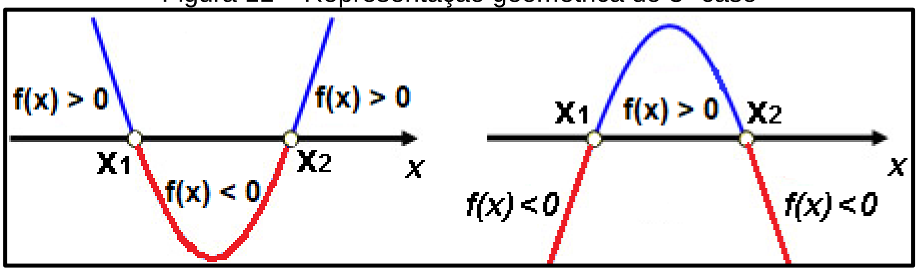
$$x > x_2 >\ x_1 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases}$$

Logo, $a\,.\,f(x) = \underbrace{a^2}_{\text{Positivo}}\,.\,\underbrace{(x - x_1)}_{\text{Positivo}}\,.\,\underbrace{(x - x_2)}_{\text{Positivo}}$

$\therefore\ a\,.\,f(x)\ > 0$

Isso quer dizer que o sinal de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o mesmo sinal do coeficiente quadrático para todo x, tal que $x\ <\ x_1$ ou $x\ >\ x_2$. Do mesmo modo, o sinal de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o sinal oposto do coeficiente quadrático para todo x, tal que $x_1 < x\ <\ x_2$. A representação geométrica de funções para esse caso é:

Figura 11 – Representação geométrica do 3ª caso



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Para exemplificar considere a função $f(x) =\ x^2 - 7x$ onde o discriminante é $\Delta = (-7)^2 - 4.1.0 = 49 > 0$, então f tem duas raízes reais e diferentes:

$$x_1 = \frac{-(-7)\ + \sqrt{49}}{2.1} =\ 7 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-(-7)\ - \sqrt{49}}{2.1} =\ 0$$

Como $a = 1 > 0$, conclui-se que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{para } x < 0 \text{ ou } x > 7 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = 0 \text{ ou } x = 7 \\ f(x) < 0 & \text{para} \quad 0 < x < 7 \end{cases}$$

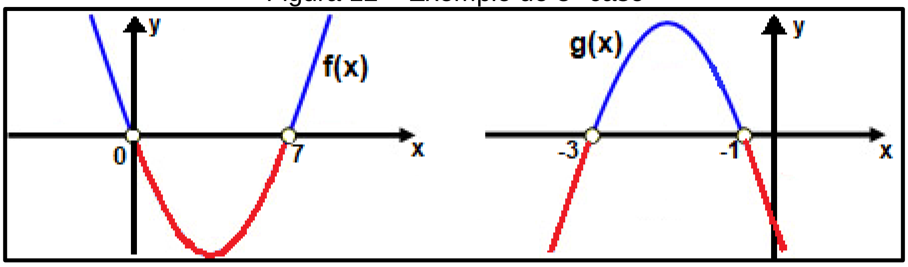
Agora, considere a função $g(x) = -x^2 - 4x - 3$ que apresenta $\Delta = (-4)^2 - 4.(-1).(-3) = 4 > 0$, então f tem duas raízes reais e diferentes:

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2.(-1)} = -3 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2.(-1)} = -1$$

Como $a = -1 < 0$, conclui-se que:

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para } x < -3 \text{ ou } x > -1 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = -3 \text{ ou } x = -1 \\ f(x) > 0 & \text{para} \quad -3 < x < -1 \end{cases}$$

Figura 12 – Exemplo do 3ª caso



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Leia a seguinte situação: uma indústria produz diariamente q unidades de sapatos infantis, e vende tudo o que produz a um preço de R$ 100,00 cada unidade. Se q sapatos são produzidos a cada dia, o custo total da produção diária, em reais, é igual a $q^2 + 20q + 700$. Para que essa indústria tenha lucro $L(q)$ diário maior que 500,00 reais, qual deve ser a quantidade produzida e vendida de sapatos por dia?

Para responder essa pergunta, precisa-se determinar a quantidade q produzida e vendida de sapatos para que a indústria tenha $L(q) > 500$. Assim, como o preço unitário de cada sapato é R$ 100,00, então o faturamento diário, em reais, é igual a $100q$. Sabendo que o lucro é dado pela diferença entre o faturamento e o custo, tem-se:

$$L(q) = 100q - (q^2 + 20q + 700) = -q^2 + 80q - 700$$

Logo, para determinar a quantidade q pretendida, faz-se:

$$L(q) > 500 \Rightarrow \overbrace{-q^2 + 80q - 700}^{L(q)} > 500 \Rightarrow -q^2 + 80q - 1200 > 0$$

Nessa situação, usou-se uma desigualdade envolvendo função quadrática. A essa desigualdade dá-se o nome de inequação quadrática.

Definição 9 (inequação quadrática): *As desigualdades, na variável real x, que podem ser reduzidas à uma das formas:*

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

são chamadas de inequações quadráticas, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$.

Resolver uma inequação significa determinar o conjunto de todos os valores reais de x que tornam a desigualdade verdadeira. Aqui se ressalta, mais uma vez, a importância do conjunto dos números Reais para este estudo. Se o estudante apresentar incompletudes nesse conhecimento matemático, poderá não compreender, de fato, o estudo das inequações quadráticas, acarretando em falhas, por exemplo, na apresentação do conjunto solução.

Definição 10 (conjunto solução): *O número real x_0 é solução da inequação $f(x) > g(x)$ se, e somente se, é verdadeira a sentença $f(x_0) > g(x_0)$. O conjunto S de todos os números reais tais que $f(x) > g(x)$ é uma sentença verdadeira chama-se de conjunto solução da inequação.*

Nessas condições, se não existir o número x tal que $f(x) > g(x)$ seja verdadeira, então a inequação é impossível e indica-se por $S = \emptyset$. Portanto, resolver uma inequação significa determinar o seu conjunto solução e, em particular, para resolver inequações quadráticas aplica-se o estudo do sinal da função quadrática.

Para ilustrar essa teoria considere a inequação quadrática $x^2 - 7x + 10 < 0$, com x real. Resolver essa inequação é responder a pergunta: "quais os valores de x tais que $f(x) = x^2 - 7x + 10$ é negativa?". Dessa forma, tem-se:

- $a = 1 > 0$, ou seja, a concavidade do gráfico de f está voltada para cima;
- $\Delta = (-7)^2 - 4.1.10 = 9 > 0$, tem-se $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$ como zeros.

Pela inequação, devemos determinar os valores de x para os quais $f(x) < 0$, aplicando o estudo do sinal da função quadrática:

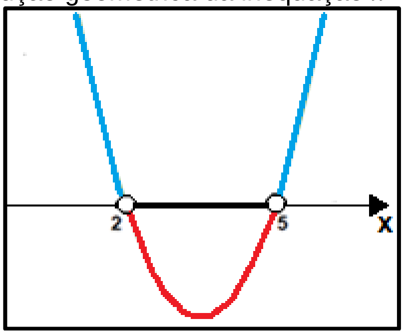
$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{para } x < 0 \text{ ou } x > 7 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = 2 \text{ ou } x = 5 \\ f(x) < 0 & \text{para} \quad 2 < x < 5 \end{cases}$$

Portanto, a solução da inequação $x^2 - 7x + 10 < 0$ é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}\ ou\ ]2,5[$$

Geometricamente, tem-se:

Gráfico 1 – solução geométrica da inequação $x^2 - 7x + 10 < 0$



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Considere outra inequação quadrática, com x real: $-x^2 + 4x + 5 \leq 0$. Resolver essa inequação é responder a pergunta: “quais os valores de x tais que $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ é negativa ou nula (não positiva)?”. Dessa forma, tem-se:

- $a = -1 < 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para baixo;
- $\Delta = (+4)^2 - 4.(-1).5 = 36 > 0$, tem-se $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$ como zeros.

Pela inequação, devemos determinar os valores de x para os quais $f(x) \leq 0$, aplicando o estudo do sinal da função quadrática:

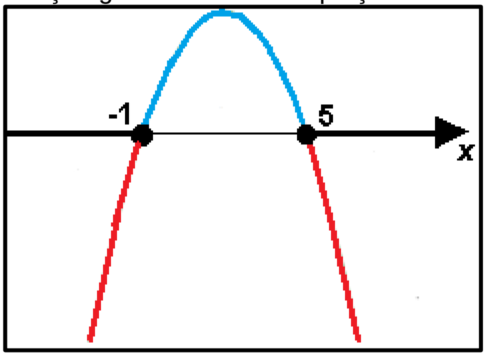
$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para } x < -1 \text{ ou } x > 5 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = -1 \text{ ou } x = 5 \\ f(x) > 0 & \text{para} \quad -1 < x < 5 \end{cases}$$

Portanto, a solução da inequação $-x^2 + 4x + 5 \leq 0$ é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 5\}\ ou\ ]-\infty, -1] \cup [5, +\infty[$$

Geometricamente, tem-se:

Gráfico 2 – solução geométrica da inequação $-x^2 + 4x + 5 \leq 0$



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

O texto matemático, proposto nesse capítulo, foi pensado para traçar um aprofundamento do ponto de vista matemático que pode servir de contribuição na formação inicial e continuada de professores. E, além disso, foi pensado para auxiliar o educador na aplicação das atividades de ensino que formam a SD proposta nessa pesquisa, sobretudo na atividade de ensino 4, no qual trata das situações-problemas.

Até esse momento, apresentaram-se algumas leituras fundamentais desta pesquisa. Inicialmente, a Teoria que a embasou: os Campos Conceituais de Vergnaud. Em seguida, a revisão da literatura e a abordagem matemática de inequações quadráticas. A partir desse momento, o próximo capítulo tratará a respeito da metodologia adotada.

5 METODOLOGIA

Esse capítulo trata da metodologia adotada na pesquisa, iniciando com as teorias que a fundamentaram: interação social de acordo com Vygotsky e o Ensino por Atividades de redescoberta. A primeira justifica a dinâmica de formação das equipes e, a segunda, a elaboração de duas atividades de ensino da sequência didática. Além disso, nesse capítulo, são descritas as tarefas que compõem a sequência didática: teste de verificação da aprendizagem (pré-teste e pós-teste), as quatro atividades de ensino, inclusive como se deu sua elaboração e a descrição da instituição escolhida para essa investigação, bem como a caracterização dos estudantes que participaram.

5.1 Os caminhos metodológicos

5.1.1 Vygotsky e a interação social

Os debates sobre os diversos enfoques acerca do ensino tornaram-se corriqueiro em pesquisas acadêmicas, principalmente quando tratam do ensino de matemática. Quando iniciamos uma leitura com esse tema, já aguardamos duelos entre modelos construtivistas e de ensino tradicional. Porém, o âmago de nossa pesquisa é a aprendizagem do estudante. Logo, priorizamos aulas com participação ativa deles no processo em detrimento de aulas apenas expositivas de conteúdo pronto. Por outro lado, assim como há estudantes com facilidade de aprender matemática, há aqueles que apresentam dificuldades e "geralmente, o aluno não tem condições de percorrer sozinho o caminho do aprendizado" (UENO E MORAES, 2007, p.225). Essas dificuldades se apresentam de diversas maneiras, no qual a mais comum são as lacunas de conhecimentos oriundas de séries anteriores.

> A ignorância do professor para com o campo conceitual de seus alunos permite a este acreditar que o que o aluno não aprendeu das séries anteriores é problema somente do aluno, concorrendo para a exclusão, a baixa autoestima e a crença falsa de que aquela disciplina é difícil, até mesmo inacessível (SILVA, 2016, p.41-42).

De acordo com as ideias de Silva (2016), quando o professor passa a ter conhecimento sobre o campo conceitual de seus alunos começa a compreender que é na retomada dos conceitos não compreendidos pelos estudantes que reside o êxito da aprendizagem. Tendo em vista que pretendemos ter a participação ativa dos estudantes, presumindo essas dificuldades, consideramos a interação social uma estratégia que poderá trazer bons resultados. Assim, concordamos com Luria (2010, p.27) quando diz que "desde o nascimento, as crianças estão em constante interação com os adultos" e, ainda segundo ele, é através dessas mediações entre eles, que os processos psicológicos[7] mais complexos da criança começam a se formar. Assim, entendemos que o processo de ensino e aprendizagem também pode se desenvolver por meio de interações que acontecem nas salas de aula, essencialmente, naquelas entre os próprios estudantes, onde "o professor deixa de ser a autoridade do saber e passa a ser um membro integrante dos grupos de trabalho" (D'AMBROSIO, 1993, p.37). É nesse sentindo que Vergnaud (2009a), coloca que se faz necessário aproveitar dos conhecimentos que a criança compreende e ajudá-la a desenvolver outros conceitos mais complexos. Segundo ele, "a criança não percebe de uma vez só; (...) ela compreende progressivamente, à luz de sua experiência ativa no espaço e percorrendo as diferentes etapas de seu desenvolvimento intelectual" (ibid, 2009a, p.82).

Lev Vygotsky foi o grande pensador que desenvolveu a ideia de interação social. Em seus estudos, ele relaciona a interação de crianças à sua aprendizagem e esta ao desenvolvimento.

> (...) já no período de suas primeiras perguntas, quando a criança assimila os nomes de objetos em seu ambiente, ela está aprendendo. De fato, (...) a criança aprende a falar com os adultos; ou que, através da formulação de perguntas e respostas, a criança adquire várias informações; ou que, através da imitação dos adultos e através da instrução recebida de como agir, a criança desenvolve um repositório completo de habilidades. De fato, aprendizado e desenvolvimento estão inter-relacionados desde o primeiro dia de vida da criança (VYGOTSKI, 1991, p.58).

No decorrer da vida, o ser humano defronta-se com diversas situações cuja busca por soluções são importantes para seu desenvolvimento. Em outros termos, o ser humano está sempre em processo de aprendizagem. Desde o nascimento e durante as experiências pessoais e profissionais, o desenvolvimento está relacionado à aprendizagem. Vygotsky afirma que "a aprendizagem da criança começa muitos antes da aprendizagem escolar" (VIGOTSKII, 2010, p.109) e exemplifica apontando que a criança começa a estudar aritmética na escola, mas já bem antes adquiriu experiências aritméticas com situações referentes à quantidades e operações com essas quantidades. Sendo assim, segundo Coelho e Pisoni (2012), infere-se dois grupos de conhecimentos: aqueles conhecimentos do cotidiano oriundos de observações e vivências e os conhecimentos científicos, no qual a

[7] Esses processos são: sensação, atenção, memória, linguagem, motivação, aprendizagem, etc.

escola desempenha o papel de transmiti-los. Cabe, portanto, ao docente não ignorar o conhecimento empírico dos estudantes, mas agrega-los aos conhecimentos científicos. Como se observa, de fato, desenvolvimento e aprendizagem estão conectados. O desenvolvimento humano, a aprendizagem e as relações entre desenvolvimento e aprendizagem foram temas centrais dos estudos de Vygotsky.

> A primeira tarefa a que se dedicou foi a de tentar explicar as formas mais complexas da vida consciente do homem, não no interior do cérebro ou da alma, mas sim nas suas condições externas de vida social, no seu trabalho, nas formas histórico-sociais de existência (MOYSÉS, 2003, p.22).

De acordo com Moysés (2003), Vygotsky buscava construir uma teoria psicológica da consciência que unisse a personalidade e o meio social. Ele “tinha como objetivo constatar como as funções psicológicas (...) aparecem primeiro na forma primária para, posteriormente, aparecerem em formas superiores” (COELHO E PISONI, 2012, p. 147). Ele dedicou-se a estudos que o levasse a compreensão dos processos mentais humanos. De acordo com Coelho e Pisoni (2012), as características humanas são resultados de interações entre homem, a sociedade, o contexto social e cultural, “pois quando o homem transforma o meio na busca de atender suas necessidades básicas, ele transforma a si mesmo” (ibid, 2012, p.146).

Segundo Moysés (2003), Vygotsky considerava que a aprendizagem dos conceitos se dava por meio das práticas sociais em uma perspectiva sociocultural. E uma consequência desse pensamento reflete hoje nas salas de aula: a contextualização do ensino. Nós, educadores de matemática, por sua vez, enfrentamos essa complexidade, ou seja, de que maneira contextualizar o ensino de modo a favorecer a aprendizagem? Com efeito, essa contextualização é importante, pois o contexto

> permite que não se perca o fio do raciocínio ao se resolver um problema matemático. Mantendo-se o sentindo do todo e de cada operação mental, em particular, está-se mais apto a resolver adequadamente o problema, como também a transferir para novas situações o conhecimento construído na prática (MOYSÉS, 2003, p.68).

Chama a atenção à expressão “o conhecimento construído na prática”, pois segundo a Teoria de Vergnaud, uma vez que fica evidente a importância da aquisição de conceito por meio de situações práticas quando na busca por soluções de problemas de matemática. Nesse sentindo, confirma-se que a sala de aula é um ambiente propício para realização dessa prática, pois é nesse ambiente e durante o processo de ensino-aprendizagem que o professor propõe situações da vida real e seus estudantes, na busca pelas soluções, assimilam os conceitos.

Segundo Ueno e Moraes (2007), Vygotsky afirmava que era possível compreender o processo de ensino e aprendizagem por meio do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Ele desenvolveu esse estudo para discutir e explicar a relação entre desenvolvimento e aprendizagem. Para seus experimentos, Vygotsky selecionou duas crianças com mesma idade cronológica e mental, isto é, elas podiam lidar, de maneira independente, com tarefas até o grau de dificuldade que foi padronizado para o nível da idade delas. Em seguida, Vygotsky demonstrou que por meio de sua ajuda as duas crianças conseguiram lidar com tarefas de níveis que estavam acima do grau de dificuldade padronizado. Os resultados desse experimento chamou a atenção de Vygotsky no qual para a diferença entre esses níveis, ele chamou de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), ou seja,

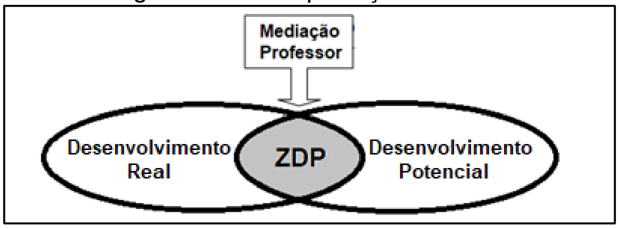
> é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (VYGOTSKI, 1991, p.59).

Vygotsky caracteriza o nível de desenvolvimento real como aquele onde a criança já tem suas funções amadurecidas, ou seja, “os produtos finais do desenvolvimento” (VYGOTSKI, 1991, p.59).

> A zona de desenvolvimento proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão (...). Essas funções poderiam ser chamadas de "brotos" ou "flores" do desenvolvimento, ao invés de "frutos" do desenvolvimento. O nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente (VYGOTSKI, 1991, p.60).

Nesse sentindo, entendemos que por meio de interações que ocorrem entre os estudantes, sob orientação do professor, ocorrerá mudanças no desenvolvimento e na aprendizagem deles.

Figura 13 – Interpretação da ZDP



Fonte: Adaptado de Silva (2016)

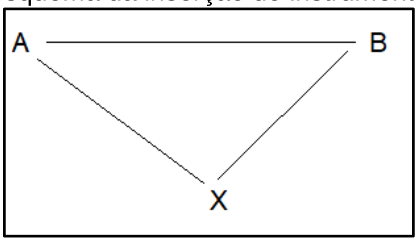
A ZDP é um instrumento imprescindível e intrínseco a prática docente, pois os educadores podem, através de observações, identificar não apenas aquilo que o estudante já assimilou (desenvolvimento real), sobretudo o desenvolvimento potencial, isto é, as tarefas que eles conseguem realizar com auxílio. Desta maneira, ele – o educador – sempre buscará novos caminhos para melhorar o processo de ensino e aprendizagem.

Como bem foi enfatizado, no processo de interação, o educador desempenha um papel fundamental: o de mediador. Nesse caso, não se pode deixar de mencionar um dos principais marcos teóricos de Vygotsky: a mediação. Segundo Luria (2010), Vygotsky costumava chamar de instrumental o estudo de psicologia. Esse termo refere-se à natureza mediadora de todas as funções psicológicas complexas. Vygotsky introduziu um novo elemento na noção estímulo-resposta, formando uma relação triangular: o “instrumento psicológico” (MOYSÉS, 2003, p.24).

> Diferentemente dos reflexos básicos, os quais podem caracterizar-se por um processo de estímulo-resposta, as funções superiores incorporam os estímulos auxiliares, que são tipicamente produzidos pela própria pessoa. O adulto não apenas responde aos estímulos apresentados por um experimentador ou por seu ambiente natural, mas também altera ativamente aqueles estímulos e usa suas modificações como um instrumento de seu comportamento (LURIA, 2010, p.26).

Moysés (2003) dá exemplos de instrumento psicológico, como uma marca num papel para recordar uma palavra ou um barbante amarrado no dedo para se lembrar de algo. Nesse sentindo, Moysés (2003) apresenta a seguinte configuração:

Figura 14 – esquema da inserção do instrumento psicológico



Fonte: Moysés (2003)

Nessa configuração, A é o estímulo, B, por sua vez, é um estímulo associado a A e X é o instrumento psicológico. Esse esquema estabelece que ao invés da conexão direta A $\rightarrow$ B, duas novas conexões passam a existir com auxílio do instrumento: A $\rightarrow$ X e X $\rightarrow$ B. Segundo destaca Moysés (2003), embora o resultado seja o mesmo, o caminho (processo) é distinto e, além disso, “esse elemento X tanto pode ser algo introduzido pelo próprio sujeito quanto por alguém de fora. A sua principal característica (...) reside no fato de ter significado” (ibid, 2003, p.25). Assim, o educador como mediador precisa ter consciência de que cabe a ele realizar a conexão dos conhecimentos que o estudante já possui (aqueles acumulados social e culturalmente) com o novo conhecimento que se queira ensinar (conhecimento científico) e com isso, consequentemente, o educador estará atuando na Zona de Desenvolvimento Proximal de seus estudantes. Por outro lado, é natural que com o passar do tempo, após algumas experiências, o sujeito deixe de necessitar do elemento externo e auxiliar. Esse sujeito, portanto, passa a utilizar elementos internos, isto é, representações mentais que substituem os objetos do mundo real (MOYSÉS, 2003). Logo, os conhecimentos que faziam parte da ZDP passam a fazer parte do nível de desenvolvimento real.

Moysés (2003) elenca o que seria a essência de um ensino voltado à compreensão de acordo com Vygotsky: o professor deve trabalhar *com* o estudante, *interagindo* com ele; *explicando*, *questionando* e o *corrigindo*. A preposição ‘com’ sugere a existência da ‘interação’. O ato de explicar é mais do que expor e impor conceitos; “é buscar na estrutura cognitiva dos alunos as ideias relevantes que servirão como ponto de partida para o que se quer ensinar, (...) ampliando os esquemas mentais já existentes, modificando-os (...)” (MOYSÉS, 2003, p.37). E, por fim, o ato de questionar sugere a verificação se houve ou não o entendimento e, em casos negativos, isto é, diante de possíveis erros, corrigi-los. Os estudos de Vygotsky proporcionam uma gama de elementos que incentivam à reflexão da prática docente. É brilhante o seu entendimento sobre a relação do desenvolvimento e da aprendizagem, e que ela dá-se por meio de interações sociais. Além disso, a compreensão sobre mediação e ZDP pode contribuir significativamente com o processo de ensino e aprendizagem.

No decorrer da elaboração das atividades que compõem a sequência didática contida nessa pesquisa, buscou-se atentar aos conhecimentos matemáticos prévios (os quais os estudantes podem apresentar lacunas) necessários para ocorrer o pleno aprendizado das inequações quadráticas. Não os ignorando e conjecturando a possibilidade dos sujeitos apresentarem tais lacunas e consequentemente mostrarem dificuldades durante a aplicação das atividades, traçamos uma estratégia para minimizar esse possível cenário. Lançamos mão de Vygotsky para fundamentar essa estratégia a qual consiste na formação de grupos cooperativos.

Através da aplicação individual de um pré-teste identificamos os estudantes com bons desempenhos, isto é, aqueles que, com a correção do pré-teste, possuem maior quantidade de conhecimentos prévios em sua bagagem cognitiva. Identificados, esses estudantes escolheram os próximos integrantes da equipe. Dessa forma, garantimos que em cada equipe fizesse parte um estudante com maiores possibilidades de aprendizagem e, pensando desse modo, estabelecemos nossa hipótese de pesquisa – os estudantes se ajudam mutuamente, por meio de grupos cooperativos, no qual fazem parte estudantes com maiores potencialidades de aprendizagem e através da interação dentro desse grupo com esses estudantes é mais acessível aquisição do conteúdo de inequações quadráticas. Frisamos que não foram divulgados os resultados do pré-teste, assim a escolha dos estudantes aparentou ser de modo aleatório.

Nesse sentindo, planejamos duas espécies de interações. A primeira é a interação entre os membros da equipe. Nesse momento de discussão entre eles, as dúvidas e lacunas, sobretudo dos conhecimentos prévios, poderão ter sido sanadas, através de interferências na ZDP, pois “aquilo que é a zona de desenvolvimento proximal hoje, será o nível de desenvolvimento real amanhã, ou seja, aquilo que uma criança pode fazer com assistência hoje, ela será capaz de fazer sozinha amanhã” (VYGOTSKI, 1991, p. 60).

Durante a aplicação das atividades, houve momentos que foi permitido a socialização das conclusões de cada equipe com as demais, concebendo, assim, a segunda espécie de interação mencionada anteriormente. Não descartamos o surgimento de outras dúvidas, todavia, a essência desse momento é a criação de um ambiente onde os estudantes sintam-se a vontade para relatar o trabalho matemático realizado por eles, expor suas dúvidas e apresentarem seus erros e acertos. Por trás dessa metodologia, estaremos trabalhando peculiaridades fundamentais: a autonomia dos estudantes na tomada de suas próprias decisões e garantindo que os estudantes que obtiveram baixo rendimento no pré-teste interajam com os estudantes que apresentaram maiores chances de aprendizagem em grupos cooperativos, onde todos possam ter êxito no ensino das inequações quadráticas.

5.1.2 O ensino por atividade de redescoberta

Com frequência, ouvimos dizer que a matemática é para poucos. Muitas pesquisas são realizadas com objetivos diversos, como investigar as razões que tornam o ensino da matemática inacessível ou ainda objetivando a eficiência de metodologias. Um dos objetivos dessa pesquisa é desenvolver um processo que possa contribuir com o ensino de inequações quadráticas, bem como avaliar a potencialidade e os efeitos da aplicação de uma sequência didática. Como o próprio título indica, elaboramos uma sequência de atividades para ensinar esse tipo de inequações. Assim, avaliamos diversas metodologias e decidimos utilizar o ensino por atividade (ou redescoberta[8]) por ela proporciona participação dos estudantes, pois

> O modelo de ensino que possibilita a reconstrução das ideias matemáticas por trás dos algoritmos “desalmados” na maioria das vezes, tem um efeito mais significativo e duradouro nas funções psicológicas superiores dos alunos. Nessa perspectiva é preciso que o professor seja incansável na promoção de um discurso dialógico que possibilite aos alunos a reconstrução de conceitos, a identificação de propriedades, a percepção de regularidades e o estabelecimento de generalizações, ainda que numa dimensão intuitiva (CABRAL, 2017, p.11).

Concordamos com diversas pesquisas[9] que classificam como obsoleto o método baseado em aulas que consistem na imposição do conteúdo e cobranças na memorização de regras, principalmente porque esse tipo de método não proporciona a troca de informações entre educador e educando que colaborem no processo e não permiti a eles à reconstrução do conhecimento. Sá (2009) elenca os aspectos que causam efeitos negativos na aprendizagem como: assuntos que são apresentados de forma pronta e acabados por meio da tríade definição, exemplos e exercícios, e quase sempre desvinculados da realidade e a ênfase nos cálculos e fórmulas em detrimento das ideias, estimulando dessa forma a memorização mecânica em detrimento da compreensão dos conceitos.

Esses aspectos, segundo Sá (2009), transformam os estudantes em atores passivos e sem ação, sem criatividade e pensamento crítico e, principalmente, sem autonomia. Por essas razões, optamos em utilizar essa metodologia, por julgá-la mais dinâmica e interessante para os fins dessa pesquisa e acreditamos, também, que ao utilizá-la favoreceremos o ensino das inequações quadráticas.

O ensino por atividade é uma metodologia baseada no processo de construção do conhecimento pelo estudante, tornando-o mais ativo e autônomo. De acordo com Sá (2009), essa prática metodológica oferece chances ao estudante de construir sua aprendizagem, por meio da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios. Segundo ele, “esse tipo de abordagem interativa permite

---

[8] Durante o desenvolvimento do texto, usaremos as duas nomenclaturas para referenciar essa metodologia.

[9] Autores como D’Ambrósio (2009), Sá (2009) e Cabral (2017) defendem metodologias distintas do modelo de ensino tradicional.

ao aluno realizar um grande número de experimentos, interpretá-los para depois discuti-los em classe com o professor e colegas" (SÁ, 2009, p.14-15, grifo nosso).

> O ensino por atividade é uma metodologia pautada na construção da autonomia do aluno na construção do seu conhecimento, sendo esta a principal peculiaridade desta metodologia, onde os conteúdos propostos possam ser descobertos pelo próprio aluno durante o processo de aprendizagem, tendo o professor apenas como orientador (MENDES E SÁ, 2006, p.13).

A proposição destacada anteriormente revela a importância do educador no processo. Perceba que ao utilizar o ensino por atividade, o educador não necessita iniciar sua aula pela exposição do conteúdo pronto. As atividades baseadas no ensino por redescoberta oportunizarão ao estudante à observação de uma regularidade, e, após essa dedução, o professor entra em cena para iniciar o diálogo com o objetivo de formalizar o que foi compreendido. Além disso, a interação professor-aluno e aluno-aluno é outro aspecto relevante a ser evidenciado, ainda, em relação a proposição em destaque, quando Sá (2009) utiliza os termos 'abordagem interativa' e 'discuti-los', pois já demonstramos, através dos estudos de Vygotsky, que a aprendizagem e o desenvolvimento ocorrem através de interações sociais com auxílio do professor mediador.

> O ensino de matemática por meio de atividades pressupõe mútua colaboração entre professor e aluno durante o ato de construção do saber, pois a característica essencial (...) está no fato de que os tópicos a serem apreendidos serão descobertos pelo próprio aluno durante o processo de busca, que é conduzido pelo professor até que ele seja incorporado à estrutura cognitiva do aprendiz (SÁ, 2009, p.19).

Logo, cabe a este professor a preocupação com a elaboração das atividades, tal como determinar o objetivo e as orientações aos seus estudantes. Sá (2009, p.18) apresenta sugestões de elementos essenciais presentes no momento da elaboração das atividades, destacamos:

- As atividades devem apresentar-se de maneira auto orientadas para que os estudantes consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
- As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre os estudantes, pois isso é fundamental para o crescimento intelectual do grupo;
- As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o estudante ao nível de representação abstrata das ideias

matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;

A partir dessas sugestões, sintetizamos que as atividades precisam ter uma descrição detalhada dos procedimentos que conduzirão de maneira gradativa os estudantes à observação da regularidade e, consequentemente, ao conceito desejado. Além disso, devem ser realizadas em equipes e que, em determinado momento, haja a socialização das observações e conclusões. O último item sugere que o professor não deva partir de ideias abstratas, mas precisa encaminhar seus estudantes a elas; ele pode iniciar com situações concretas, de preferência naquelas que façam parte do contexto sociocultural dos estudantes.

O educador que escolhe o ensino por redescoberta, busca contribuir para uma formação autônoma dos estudantes, no qual eles podem participar ativamente e alcançarem os objetivos propostos para a aula, possibilitando ainda, o desenvolvimento de habilidades de observação, levantamento de dados, análise e conclusão (SÁ, 2009). Nesse sentindo, o ensino por redescoberta permite essa contribuição ao processo, distintamente do ensino tradicional já mencionado no qual os estudantes são apenas receptores da transmissão unilateral do conhecimento e, sobretudo, ao considerar que "o ensino tradicionalista sempre se comprometeu com o fazer, e quase nunca com o compreender" (SILVA, 2016, p.30).

> O ensino de Matemática, ao longo do seu desenvolvimento histórico, seguiu um percurso metodológico no qual houve maior valorização da compreensão instrumental do que da compreensão relacional, impossibilitando ao estudante, o desenvolvimento de competências e habilidades que o levassem a uma formação educativa matemática que contribuísse para a sua formação cidadã (SÁ, 2009, p.22).

O ensino por redescoberta, portanto, possibilita que os próprios estudantes, no desenvolver das atividades sugeridas pelo professor, produzam os conceitos e propriedades, sem que, para isso, sejam impostos a eles. "Desse modo o aluno passa de mero espectador a um criador ativo, não numa perspectiva de ser um cientista, mas que participe, compreenda e questione o próprio conhecimento" (SÁ, 2009, p.14).

A metodologia do ensino de matemática por atividade embasou duas atividades de ensino (2 e 3) que compõe a sequência didática. Utilizamos essa metodologia para elaborar essas atividades com o objetivo de prover situações as quais os estudantes possam demonstrar quais conhecimentos eles utilizam em busca da solução e assim conseguirmos analisar os invariantes operatórios utilizados por eles.

5.2 A sequência didática

5.2.1 Concepção e descrição das atividades de ensino

De acordo com Zabala (1998) sequência didática é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelo professor como pelos alunos" (apud CABRAL, 2017, p.31). A sequência didática proposta nessa pesquisa foi elaborada a partir da compreensão da revisão da literatura e de nossa experiência como docentes de Matemática. Além disso, nos baseamos, também, na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud; propondo tarefas que possibilitem o desenvolvimento de esquemas nos estudantes. Após diversas discussões, deliberamos e elaboramos uma sequência didática composta por quatro atividades de ensino[10], objetivando o ensino das inequações quadráticas. Cada atividade proposta pode ser impressa em papel A4 e tem um roteiro configurado da seguinte maneira:

- Título da atividade;
- Objetivo;
- Materiais;
- Equipe;
- Procedimentos;
- Conclusão da equipe e/ou socialização.

Em objetivo apresentamos o conhecimento, habilidade ou competência que gostaríamos que os estudantes atingissem com a atividade; materiais referem-se aos recursos necessários para a realização da atividade; equipe é o espaço reservado para que os estudantes identifiquem o grupo ao qual fazem parte; em procedimentos há uma descrição detalhada das orientações que a equipe deve seguir para a execução da tarefa. Nas atividades 2 e 3 há um espaço para que os estudantes concluam a atividade, escrevendo, com suas palavras, qual regularidade eles observam e nas atividades 1, 2 e 3 há um momento de socialização, onde eles possam explanar essas conclusões com as demais equipes.

---

[10] As atividades encontram-se em Apêndice.

Quadro 6 – Síntese das atividades de ensino da Sequência Didática

Atividade de Ensino	**Título da Atividade**	**Objetivo da atividade**
1	Reconhecendo as Inequações quadráticas	Identificar as expressões algébricas das inequações quadráticas
2	Concavidade da Parábola	Descobrir uma relação entre o coeficiente quadrático e a concavidade do gráfico da função quadrática.
3	Variação do Sinal da função quadrática	Descobrir uma maneira de identificar a variação do sinal da imagem da função quadrática, a partir da expressão analítica e seu gráfico.
4	Situações problemas	Determinar o intervalo que satisfaz uma condição a partir de uma situação-problema.

Fonte: elaborado pelo autor (2019)

Não é difícil verificar que os estudantes apresentam dificuldades quanto ao uso da linguagem matemática. Segundo a revisão da literatura, eles costumam optar em usar a linguagem corrente (por extenso) ao invés da linguagem matemática ou uma mistura entre elas. Essa mistura, segundo D'Amore (2007), é um hábito consolidado pelos professores; uma espécie de "língua escolar" cujo assunto é a Matemática. Nota-se o desconhecimento dos símbolos utilizados nas inequações, fazendo assim os estudantes utilizarem aspectos intuitivos, transferindo as regras de resolução de equações para a de inequações, como aponta Souza (2007). A partir dessas considerações, propomos a atividade de ensino 1, cujo objetivo é levar os estudantes a reconhecerem as expressões algébricas (analítica) das inequação do tipo quadrática. Foi fornecido aos estudantes o roteiro da atividade e este continha 15 inequações de diversas classificações. Eles tiveram que dividi-las em 5 grupos com 3 inequações em cada grupo e apontar o critério de escolha utilizado para a divisão.

As atividades 2 e 3 são exemplos de ensino por atividade de redescoberta. A atividade de ensino 2 objetivou guiar os estudantes a descobrirem uma relação entre o sinal do coeficiente quadrático e a concavidade do gráfico da função quadrática. Cada equipe recebeu um quadro com 8 (oito) funções quadráticas e seus gráficos e o roteiro da atividade. Eles preencheram o quadro que constava no roteiro, identificando o sinal do coeficiente quadrático e a direção da concavidade de cada gráfico e, a partir do preenchimento completo do quadro, perceber a regularidade. A atividade de ensino 3 teve o objetivo de fazer com que os estudantes compreendam o estudo do sinal da imagem de uma função quadrática, ou seja, nessa atividade eles descobriram uma maneira de identificar a variação do sinal da imagem da função quadrática, a partir da expressão analítica e de seu gráfico. Utilizamos o mesmo quadro da atividade 2, com as oito funções quadráticas e seus gráficos. A atividade 3 foi dividida em 2 partes, pois consideramos mais favorável a percepção da regularidade.

As atividades 1, 2 e 3, descritas acima, têm os conhecimentos necessários para o estudante resolver uma inequação quadrática. Assim, segue a atividade de ensino 4 cujo objetivo foi determinar o intervalo numérico que satisfaz uma condição a partir de uma situação-problema. Sabemos que o ensino com ausência de significado para o estudante causa interferência em sua aprendizagem, mostramos na revisão de literatura que Beltrão (2010) concluiu que a ausência de significado é um dos principais problemas que surgem no trabalho com as desigualdades e que a notação formal não pode ser desconectada da aquisição do significado, além de que essa falta de conexão é um dos principais problemas que enfrentamos no processo de ensino da matemática.

Portanto, nos inspiramos na pesquisa de Renata Ueno e Mara Moraes para produzimos situações-problemas ampliados. De acordo com as autoras, problemas ampliados "destina-se à inserção de temas político-sociais propostos na realidade em que vivem e a formação do cidadão, que possa anunciar o caminho para a construção de uma sociedade justa" (UENO E MORAES, 2007, p.226).

Desse modo, num total de 3, as situações-problemas propostas na atividade de ensino 4 da sequência didática foram desenvolvidas sob dois aspectos: a primeira parte – questionamentos reflexivos – contem trechos de notícias de revistas, artigos ou jornais com base em algum tema político-social, com o objetivo de gerar discussão e reflexão pertinentes a respeito desse tema e, a segunda parte, contém um exercício de matemática envolvendo inequação quadrática de acordo com o tema abordado na primeira parte. Dessa maneira, acreditamos dar sentindo ao exercício proposto, aplicar o conhecimento adquirido nas atividades 1, 2 e 3 e despertar o pensamento crítico dos estudantes em relação aos assuntos de interesse da sociedade.

5.2.2 O pré-teste e pós-teste

O pré-teste (teste de verificação da aprendizagem) antecedeu a aplicação das quatro atividades de ensino e foi elaborado pensando em três finalidades específicas:

- Para identificação de sujeitos com maiores potencialidades de aprendizagem, isto é, os estudantes que possuem maior capacidade na aquisição de conhecimento, considerando sua bagagem cognitiva;
- Prover informações indicativas da situação da turma no tocante dos conhecimentos necessários à aprendizagem das inequações quadráticas;
- Fornecer dados para análise e discussão pertinentes à pesquisa.

Esse pré-teste é composto por seis exercícios. O quadro 7 a seguir ilustra os conteúdos de matemática e as competências/habilidades necessárias, por exercício.

Quadro 7 – conteúdos abordados no pré-teste

EXERCÍCIOS		**CONTEÚDOS ABORDADOS**	**COMPETÊNCIA/HABILIDADE**
1	(A)	Intervalos numéricos	Interpretar uma situação e utilizar a linguagem corrente para descrevê-la.
	(B)	Intervalos numéricos	Utilizar a representação algébrica e geométrica para representar uma situação.
2	(A)	Gráfico da função quadrática	Identificar a influência do coeficiente quadrático no gráfico da função.
	(B)	Imagem da função quadrática	Por meio do gráfico, identificar o sinal da imagem da função.
	(C)	Zeros da função quadrática	Por meio do gráfico, identificar os zeros da função.
3	(A)	Concavidade do gráfico de uma função quadrática	Identificar a direção da concavidade do gráfico a partir da expressão analítica da função quadrática.
	(B)	Imagem da função quadrática	Identificar intervalos do domínio cuja função possui imagem negativa
4		Inequação quadrática	Identificar, entre as inequações dadas, aqueles que são quadráticas e justificar a escolha.
5		Inequação quadrática	Determinar o intervalo solução da inequação quadrática.
6		Inequação quadrática	Resolver uma situação-problema envolvendo a resolução de uma inequação quadrática.

Fonte: elaborado pelo autor (2019)

Os três primeiros exercícios do pré-teste são constituídas por conteúdos que julgamos necessários à aprendizagem das inequações quadráticas. Foram eles que permitiram a identificação dos estudantes com maiores potencialidades e forneceram dados indicativos do nível da aprendizagem da turma. Em contrapartida, os três últimos exercícios envolvem inequação quadrática. O primeiro é para verificar se o estudante sabe identificar uma inequação quadrática; o segundo, um exercício direto, ou seja, proposto de forma concisa e com dados explícitos necessários para a resolução e, por fim, o último, uma situação-problema proposta por meio de uma contextualização, onde é necessária a compreensão do problema. Esses exercícios são propostos para fins comparativos, isto é, verificar a eficiência da sequência didática comparando o percentual de estudantes que acertaram (ou erraram) os exercícios no pré-teste com o percentual de estudantes que acertaram (ou erraram) no pós-teste. Tal verificação condiz com o objetivo dessa pesquisa.

Com a aplicação do pré-teste e das quatro atividades de ensino da sequência didática, aplicou-se a tarefa final – o pós-teste. Que nada mais foi que a reaplicação do pré-teste. Voltou-se a aplicar os mesmos exercícios, de forma individual e com identificação de cada estudante. O objetivo desse procedimento, além da verificação da hipótese da nossa pesquisa, é certificar, de modo quantitativo e qualitativo o proveito da sequência didática e se, de fato, ela contribuiu para aprendizagem das inequações quadráticas. Para isso, realizou-se uma comparação dos resultados obtidos nesse pós-teste com aqueles obtidos no pré-teste, por isso a importância da identificação dos estudantes nas duas tarefas. Além disso, analisamos a produção escrita dos estudantes, sobretudo suas tentativas e erros, identificando os invariantes operatórios utilizados por eles na busca pela solução do problema.

5.3 Caracterização da escola e sujeitos

A aplicação da sequência didática ocorreu do final de novembro ao início de dezembro de 2019 em uma Escola da rede Estadual de Ensino Fundamental e Médio localizada na cidade de Belém do Pará. Nosso primeiro desafio foi a escolha da instituição, pois estávamos em final de ano letivo e, sendo assim, existiram algumas dificuldades pelo caminho, tal como processo de avaliação escolar, eventos como jogos internos ou feiras culturais. Superados tais percalços e escolhida a instituição, nossa primeira visita se deu no dia 22 de novembro à tarde, onde conversamos com o docente responsável pela turma para explicar os objetivos da pesquisa e, com a permissão da direção, combinamos as datas que ocorreria a experimentação. Nesse dia, a convite do docente, apresentei a proposta à turma e como seria o experimento. A princípio, naturalmente, causou estranheza. No entanto, tranquilizamos a todos, apresentamos o cronograma e finalizamos o primeiro contato.

A instituição escolhida tem como missão oferecer um ensino com qualidade, por meio de profissionais qualificados para garantir a satisfação e o atendimento aos requisitos do público-alvo, direcionando para a formação de seres humanos completos com uma visão sistêmica do mundo. Em 2019, o regime de funcionamento da escola aconteceu nos três turnos. Nos turnos matutino e vespertino ocorreram aulas do 6ª ao 9ª ano do ensino fundamental num total de 11 turmas e do 1ª ao 3ª ano do ensino médio regula num total de 10 turmas. A noite foi ofertado do 1ª ao 3ª ano do ensino médio regular e Educação de Jovens e adultos (EJA) num total de 7 turmas. Nossa experimentação ocorreu em uma das turmas do 1ª ano do ensino médio do turno vespertino.

Quanto a estrutura física, a escola conta com salas em bom estado de conservação, porém sem climatização. Os espaços de lazer, recreação e para aulas de educação física encontram-se inacabados. A biblioteca, o auditório e os laboratórios de informática e pedagógico multidisciplinar precisavam ser revitalizados e climatizados.

Para a realização da aplicação da sequência didática, o docente responsável pela turma nos disponibilizou suas aulas semanais, pois estava em processo de revisão para a última avaliação escolar. O quadro a seguir apresenta os dias, as atividades desenvolvidas, o tempo de aula disponibilizado pelo docente e o quantitativo de estudantes presentes no dia de cada aplicação.

Quadro 8 – roteiro da aplicação da sequência didática

Dia da Aplicação	Atividade desenvolvida	Tempo (minutos)	Estudantes presentes
25/11	Pré-teste	45	19
26/11	Formação das equipes	45	21
28/11	Atividade de ensino 1 e 2	90	19
02/12	Atividade de ensino 3 – parte 1 e 2	90	18
05/12	Atividade de ensino 4	90	21
09/12	Pós-teste	45	18

Fonte: elaborado pelo autor (2019)

A turma selecionada foi do primeiro ano do ensino médio do turno vespertino. Segundo os registros da escola, a turma era composta por 24 estudantes em situação regular, sendo 14 do sexo masculino e 10 do feminino, com idades entre 14 e 16 anos. Não tive acesso as notas das provas dos estudantes, contudo, na disciplina matemática, por relatos dos próprios, a situação era regular e não havia estudante de dependência escolar. Questionado, o docente confirmou que a turma encontrava-se em um nível regular.

Sobre a aplicação, nos dias 28/11, 02/12 e 05/12, entregamos a cada estudante um material de apoio para que ele o levasse para casa e pudesse, em algum momento, rever o que tivera compreendido com a atividade do dia. Esse material encontra-se anexado nessa pesquisa e pode ser impresso em folha A4. É importante destacar que o cronograma das atividades foi apresentado à turma no dia 22 de novembro (primeiro contato). Dessa forma, participamos como se daria cada atividade, inclusive o pré e pós-teste.

6 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

No dia 25 de novembro aplicamos o pré-teste e no dia seguinte, com um horário vago na turma, aproveitamos para formar as equipes. Na aplicação do pré-teste, notamos expressões de aflição entre alguns dos estudantes. Com nossa experiência na docência, é comum os estudantes aparentarem ansiedade e angústia quando submetidos a testes de matemática. Percebemos, ainda, que uns se esforçaram para recordar os conhecimentos exigidos para resolver as questões propostas. Inclusive, fui chamado para esclarecer dúvidas em relação aos questionamentos feitos. O pré-teste ocorreu em menos de 30 minutos e após sua correção, escolhemos oito sujeitos que apresentaram maiores potencialidades de aprendizagem. Lembrando que o pré-teste e pós-teste foram as únicas atividades com exigência da identificação. Dessa maneira, solicitamos que cada um deles escolhessem os próximos integrantes para compor a equipe e, assim, formaram-se oito equipes. Cabe mencionar que, embora houvesse estudantes ausentes, depois de alocados os presentes, estes foram incluídos pelos próprios integrantes da equipe e dessa forma todas as equipes estavam formadas. Para preservar a identidade dos estudantes, utilizamos uma codificação: cada uma das oito equipes foi identificada por letras maiúsculas de A a H. Cada estudante, por sua vez, possuía um crachá. Nesse crachá estava grafada a letra correspondente a equipe que o estudante fazia parte e um número variando de 1 a 3.

Quadro 9 – Codificação da identificação das equipes

Equipe	A			B			...	G			H		
Estudantes	A1	A2	A3	B1	B2	B3	...	G1	G2	G3	H1	H2	H3

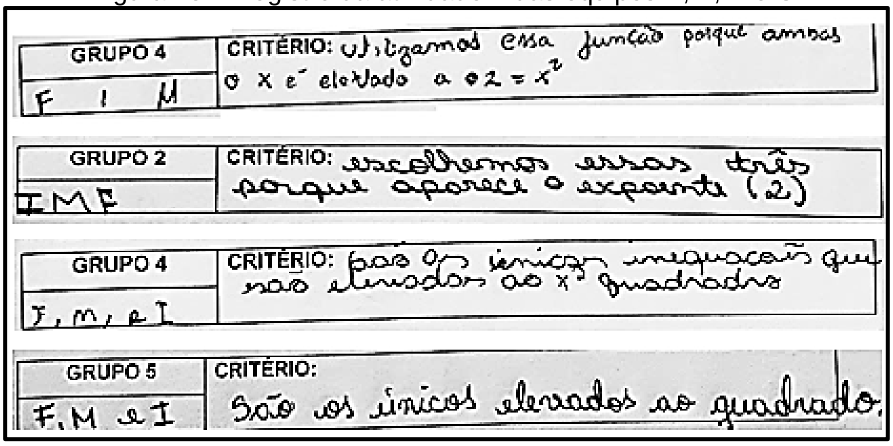
Fonte: elaborado pelo autor (2019)

Os estudantes com número 1 (A1, B1,..., H1) em seu crachá foram aqueles com maiores potencialidades identificados através da correção do pré-teste. Ressalto que informações dessa natureza não foram repassadas aos estudantes. Desse modo, a formação das equipes aparentou ser de forma aleatória.

No dia 28 de novembro, terceiro encontro com a turma, iniciamos a experiência modificando a disposição dos assentos dos estudantes, conduzindo-os às formações das equipes, de modo que elas ficassem afastadas uma das outras para garantir que a interação acontecesse naquele momento somente entre os membros da equipe. Distribuímos os crachás e o roteiro da atividade de ensino 1. Alguns registros dos estudantes serão ponderados.

Na atividade de ensino 1[11] solicitamos que as equipes separasse 15 inequações em cinco grupos (Grupo 1, Grupo 2...), onde em cada grupo teria 3 inequações de forma exclusiva, isto é, não poderia haver uma mesma inequação em grupos diferentes. Além disso, pedimos para que a equipe apontasse qual o critério usou para suas escolhas.

Figura 15 – Registro da atividade 1 das equipes B, F, E e G.



Fonte: pesquisa de campo (2019)

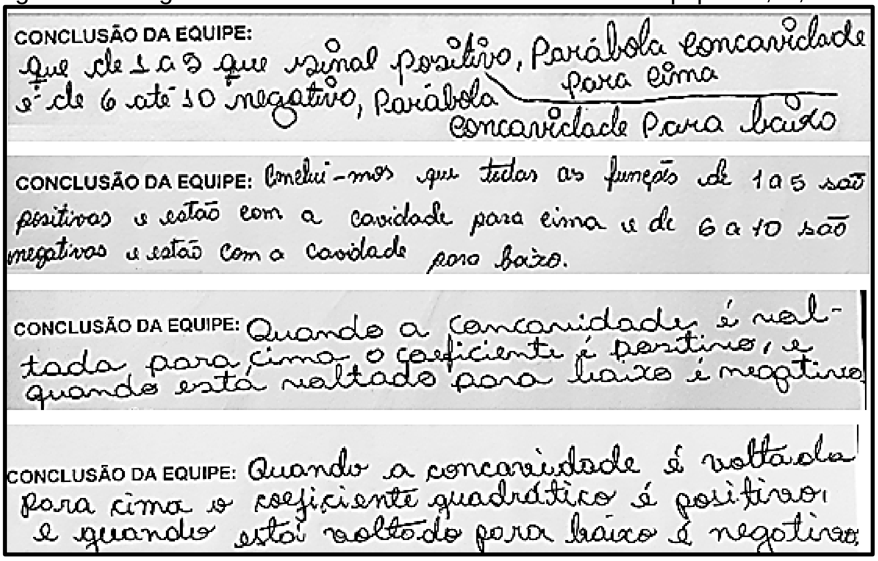
Observa-se que as equipes utilizam o elemento x² (x ao quadrado) como critério de escolha. Um registro interessante acontece no grupo E quando menciona a palavra ‘inequações’; o que leva acreditar que, pelo menos, um integrante dessa equipe sabe o que são inequações ou reconhece a expressão analítica de uma. O grupo B utiliza a expressão ‘função’. Presume-se que tal fato tenha ocorrido pela semelhança entre as expressões analíticas desses objetos matemáticos. Nesse caso, a equipe ignora a simbologia e considera apenas o polinômio em questão.

As equipes finalizaram a atividade em 40 minutos e em seguida iniciamos a socialização, onde estimulamos as equipes a exporem suas conclusões e dúvidas, pois a partir delas, finalizamos a atividade apresentando a definição de inequação quadrática, enfatizando, inclusive, a simbologia. Dada por finalizada a atividade de ensino 1, distribuímos o roteiro da atividade de ensino 2 e o quadro com os gráficos de 8 funções quadráticas. Nessa atividade, solicitamos que as equipes, com auxílio do quadro com oito funções quadráticas e seus gráficos, identificassem o sinal do coeficiente quadrático e a direção da concavidade da parábola e, com essas

[11] Todas as quatro atividades de ensino encontram-se em Apêndice.

informações, preenchessem um quadro a fim de descobrir a relação entre esses objetos. Após, 20 minutos de atividade, todas as equipes sinalizaram que tinham encerrado e apresentaram suas conclusões.

Figura 16 – registro das conclusões da atividade 2 das equipes A, B, F e H.



CONCLUSÃO DA EQUIPE: Que de 1 a 5 que sinal positivo, Parábola concavidade para cima e de 6 até 10 negativo, Parábola concavidade Para baixo

CONCLUSÃO DA EQUIPE: Concluí-mos que todas as funções de 1 a 5 são positivas e estão com a cavidade para cima e de 6 a 10 são negativas e estão com a cavidade para baixo.

CONCLUSÃO DA EQUIPE: Quando a concavidade é voltada para cima o coeficiente é positivo, e quando está voltado para baixo é negativo

CONCLUSÃO DA EQUIPE: Quando a concavidade é voltada para cima o coeficiente quadrático é positivo, e quando está voltado para baixo é negativo.

Fonte: pesquisa de campo (2019)

Novamente, percebemos falhas no trato da linguagem matemática. A equipe B afirmou equivocadamente que as cinco primeiras funções são positivas, quando o correto seria afirmar que as cinco primeiras funções têm o coeficiente quadrático positivo. Esse fato ocorre com frequência. Infere-se, a partir daí, que os estudantes tratam como sinônimos as expressões ‘função’ e ‘gráfico’. Os registros das equipes F e H são semelhantes, embora H aponte mais detalhes na escrita. No momento da socialização dessa atividade, cada equipe apresentou sua conclusão para as demais e, novamente, utilizamos partes das conclusões para formalizar matematicamente o que se pretendia, isto é, conduzir os estudantes à compreensão da influência do coeficiente quadrático no gráfico da função quadrática. Permanentemente, tomou-se o cuidado com a linguagem matemática na escrita e na fala. Finalizada a atividade, entregamos o material de apoio a cada um e solicitamos que estudassem em casa.

O quarto encontro aconteceu no dia 02/12, onde realizamos a atividade de ensino 3, partes 1 e 2. Nessa atividade, solicitamos que as equipes, a partir do mesmo quadro utilizado na atividade 2, identificassem o sinal do coeficiente quadrático e o sinal da imagem da função. Na parte 1, a equipe identificaria o sinal da imagem da função no intervalo limitado pelos zeros da função e, na parte 2, nos intervalos diferentes do intervalo determinado pelos zeros. Os estudantes receberam o roteiro da primeira parte da atividade e o quadro dos oito gráficos. Decorridos 5 minutos, percebemos que nenhuma equipe não tinha iniciado a atividade e, sendo assim, foi necessária a intervenção. Questionados, os estudantes apontaram não recordar o que seriam os zeros da função. Depois de uma breve conversa, eles relataram que não tiveram professor de matemática em grande parte do ano anterior[12]. Assim, com uma sucinta explicação e auxílio do quadro com os gráficos, foi elucidado o que seriam os zeros da função. O então docente da turma ratificou a ausência do colega no 9º ano da turma. Em nossa revisão de literatura, a investigação de Ramos e Curi (2014) mostrou que os alunos apresentaram dificuldades e erros provenientes de lacunas do ensino fundamental na resolução de função quadrática, prejudicando o aprendizado de inequações no ensino médio. Segundo as autoras, o aprendizado de novos conteúdos é prejudicado em função de erros recorrentes.

> Ao analisar os erros cometidos pelo aluno, o professor tem condições de verificar se são provenientes de conteúdos estudados em anos anteriores, além de averiguar se o aluno apresenta dificuldades no conteúdo atual. Sem essa verificação, o erro pode se tornar recorrente e se transformar em um obstáculo para novas aprendizagens (RAMOS e CURI, 2014, p.458).

Pactuamos com a conclusão delas e sugerimos que o docente não deixe de analisar o trabalho matemático de seus estudantes, pois “só conhecendo a forma como os alunos aprendem é possível ensinar” (VERGNAUD, 2008). Dessa maneira, o docente terá oportunidades de definir estratégias que auxiliem seus alunos a superar as defasagens que o impedem de ampliar seu campo conceitual.

> As concepções prévias dos alunos contêm teoremas e conceitos-em-ação que não são verdadeiros teoremas e conceitos científicos, mas que podem evoluir para eles. Porém, (...), o hiato entre os invariantes operatórios dos alunos e os do conhecimento científico é grande, de modo que a mudança conceitual poderá levar muito tempo (MOREIRA, 2002, p. 21).

Para Vergnaud, há para alguns sujeitos a necessidade de tempo para que haja assimilação dos conceitos, isto é, para que o estudante compreenda e domine a terna SIR. Segundo Moreira (2002), para Vergnaud, o domínio do campo conceitual ocorre durante um largo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizado.

Retornando ao imprevisto durante a aplicação, por ser um conhecimento imprescindível para o ensino das inequações quadráticas, fez-se necessário a intervenção. Dessa maneira, propus a turma de comparecer no dia seguinte (03/12),

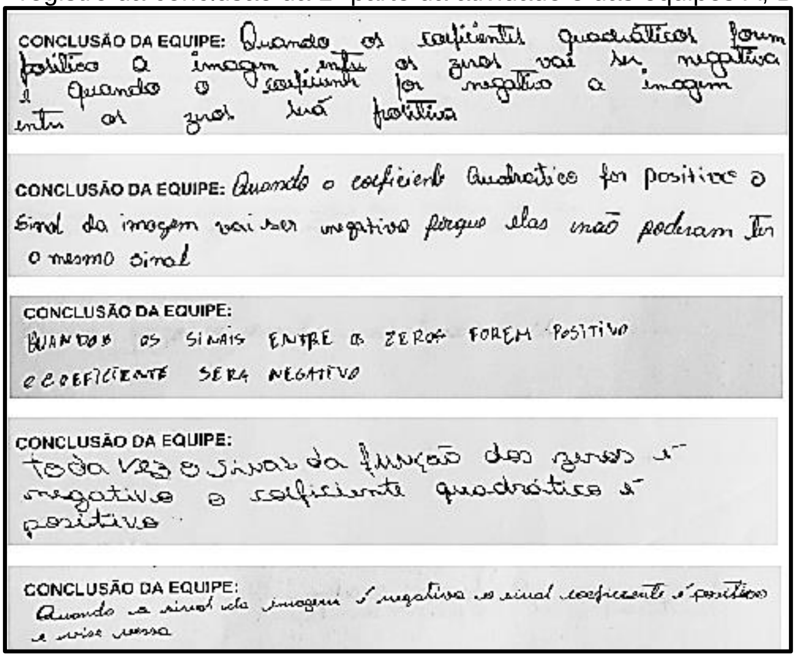
---

[12] A referência ao ano anterior é mencionada pelo fato de equação do segundo grau ser um conteúdo trabalhado no nono ano do ensino fundamental II.

no horário vago, para trabalhar o conceito de zeros da função e como calculá-los. A turma, sem muito alvoroço, aceitou. A aula expositiva durou 45 minutos.

A aplicação da primeira parte da atividade 3, após, possivelmente esclarecidas as dúvidas sobre os zeros das funções, as equipes finalizaram a atividade após 20 minutos. Cabe ressaltar que esclarecemos a coloração das parábolas no quadro de gráficos: se fosse azul, a imagem da função era positiva; vermelho, negativa. Tal esclarecimento, não afetou o objetivo da atividade, pelo contrário, colaborou com o andamento dela.

Figura 17 – registro da conclusão da 1ª parte da atividade 3 das equipes A, B, D, E e H.



CONCLUSÃO DA EQUIPE: Quando os coeficientes quadráticos forem positivo a imagem entre os zeros vai ser negativa e quando o coeficiente for negativo a imagem entre os zeros será positiva

CONCLUSÃO DA EQUIPE: Quando o coeficiente quadrático for positivo o sinal da imagem vai ser negativo porque elas não poderam ter o mesmo sinal

CONCLUSÃO DA EQUIPE: QUANDO OS SINAIS ENTRE OS ZEROS FOREM POSITIVO O COEFICIENTE SERÁ NEGATIVO

CONCLUSÃO DA EQUIPE: toda vez o sinal da função dos zeros é negativo o coeficiente quadrático é positivo

CONCLUSÃO DA EQUIPE: Quando o sinal da imagem é negativa o sinal coeficiente é positivo e vise versa

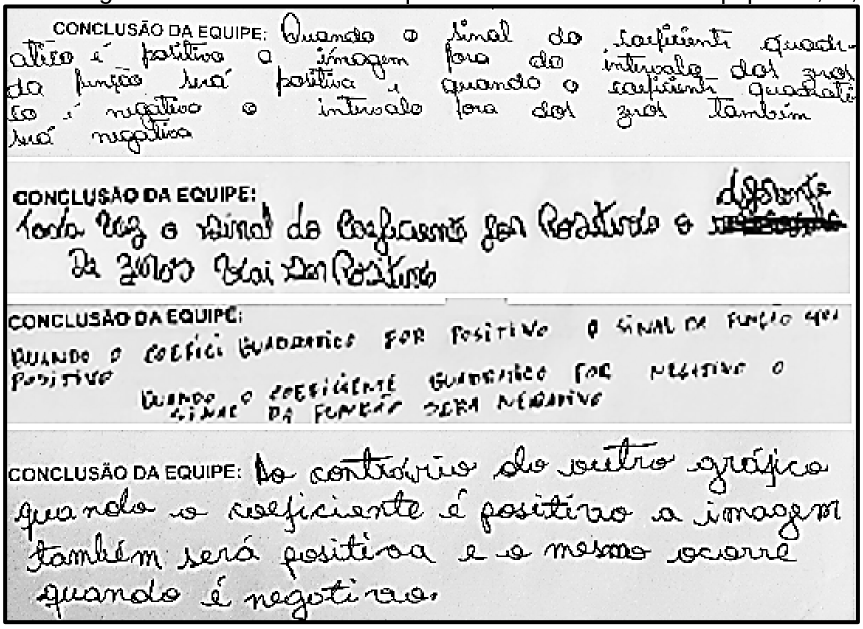
Fonte: Pesquisa de campo (2019)

A equipe A registrou a resposta mais completa, como mostra a imagem. A equipe B finaliza sua conclusão com a assertiva: “elas não poderam ter o mesmo sinal”. O que, nesse caso, é verdadeiro. A função cuja parábola com concavidade voltada para cima (coeficiente quadrático positivo) que intercepta o eixo das abscissas em dois pontos distintos, terá os sinais da imagem entre os zeros e do coeficiente quadrático, contrários. As equipes D, E e H formularam suas conclusões afirmando que o sinal da imagem da função entre os zeros implica no sinal do coeficiente quadrático. Acredita-se na possibilidade de algumas equipes formularem suas conclusões na mesma ordem que o preenchimento do quadro no roteiro da atividade é proposto. Todavia, esses descuidos foram vencidos no momento da socialização e formalização. As equipes C e G não concluíram por escrito a atividade, mas conseguiram perceber a regularidade com o término da atividade.

Ainda que surgissem esses impasses, concluímos satisfatoriamente a primeira parte da atividade de ensino 3.

Dando continuidade, entregamos a segunda parte da atividade. Essa parte avançou mais rapidamente do que a anterior, com as equipes concluindo em menos de 30 minutos.

Figura 18 – registro da conclusão da 2ª parte da atividade 3 das equipes A, C, D e F


CONCLUSÃO DA EQUIPE: Quando o sinal do coeficiente quadrático é positivo a imagem fora do intervalo dos zeros da função será positiva e quando o coeficiente quadrático é negativo o intervalo fora dos zeros também será negativa

CONCLUSÃO DA EQUIPE: toda vez o sinal do coeficiente for positivo o diferente da zeros vai ser positivo

CONCLUSÃO DA EQUIPE: QUANDO O COEFICI QUADRATICO FOR POSITIVO O SINAL DA FUNÇÃO SERÁ POSITIVO QUANDO O COEFICIENTE QUADRATICO FOR NEGATIVO O SINAL DA FUNÇÃO SERA NEGATIVO

CONCLUSÃO DA EQUIPE: Ao contrário do outro gráfico quando o coeficiente é positivo a imagem também será positiva e o mesmo ocorre quando é negativa.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

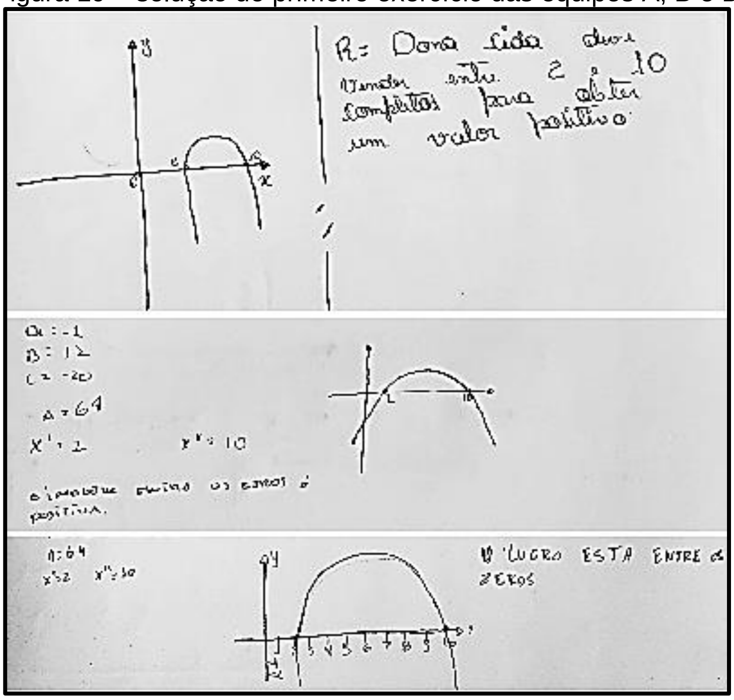
A equipe A teve um notável desempenho na atividade. A escrita da conclusão dessa equipe foi a mais completa. As demais equipes, por sua vez, que apresentaram conclusão, não souberam expressar na escrita a regularidade observada. Porém, verificou-se o correto preenchimento do quadro da atividade e, de maneira verbal, manifestaram a compreensão da atividade no momento da socialização. Naturalmente, não cremos ingenuamente que todos os estudantes assimilaram facilmente os conceitos ensinados, contudo acreditamos em nossa hipótese de que a interação social entre os integrantes da equipe e a socialização das conclusões contribuiu significativamente. E tal fato foi presenciado em diversos momentos, quando notamos estudantes esclarecendo dúvidas de outros colegas.

Na socialização, solicitamos que as equipes apresentassem as conclusões das duas partes da atividade. Depois dessas apresentações, convertendo a linguagem utilizada pelos estudantes, formalizou-se o estudo do sinal da imagem de uma função quadrática, frisando os elementos necessários para tal estudo, como o esboço do gráfico assinalando os zeros e a direção da concavidade. Um segundo material de apoio foi entregue a cada um dos estudantes e, novamente, destacando a importância de rever o conteúdo em casa.

No encontro do dia 05 de dezembro realizamos a atividade de ensino 4. Como já salientado, nessa atividade os estudantes deveriam utilizar todos os conhecimentos obtidos com as atividades anteriores para encontrar a solução do problema proposto. Nesse momento, trataremos de cada uma das três situações-problemas propostas. Recordamos que essa atividade consiste nos problemas ampliados. Contudo, para fins de análise, não levamos em consideração os questionamentos reflexivos, tendo em vista que não foram exigidas respostas escritas, apenas altercação. Esclarece-se, também, que nem todas as respostas, do exercício que envolve inequação quadrática, estão exibidas nessa pesquisa; elegemos algumas para discutir o trabalho matemático dos estudantes.

A primeira situação-problema consiste em um exercício que trata da função lucro. Essa função lucro é expressa por um polinômio do segundo grau, onde se pede para a equipe determinar a quantidade que precisa ser vendida para que haja lucro.

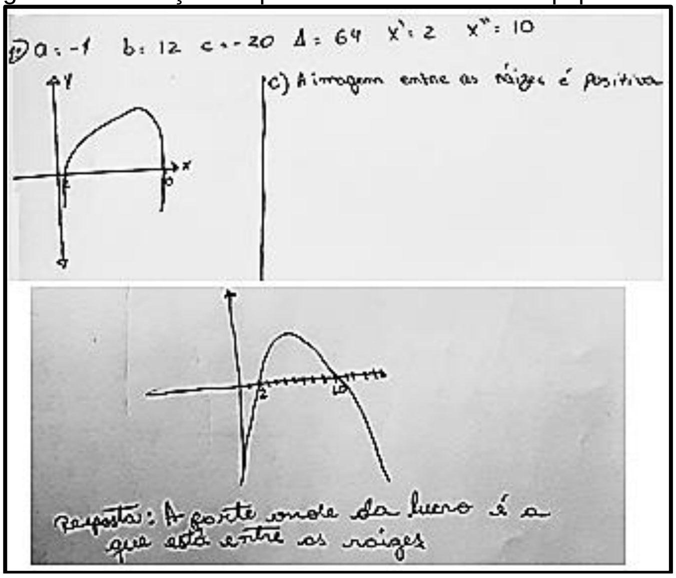
Figura 19 – solução do primeiro exercício das equipes A, B e D



Fonte: pesquisa de campo (2019)

Nesta imagem, é possível observar que as equipes tiveram benéficos rendimentos com as atividades precedentes, tais como a direção correta da concavidade da parábola e o uso da linguagem empregada. Todas as equipes desenvolveram e responderam corretamente o primeiro exercício da atividade 4. Algumas delas, com pequenos deslizes na linguagem. Como é o caso das respostas das equipes C e F que utilizaram a expressão “raízes” ao invés de “zeros”.

Figura 20 – solução do primeiro exercício das equipes C e F

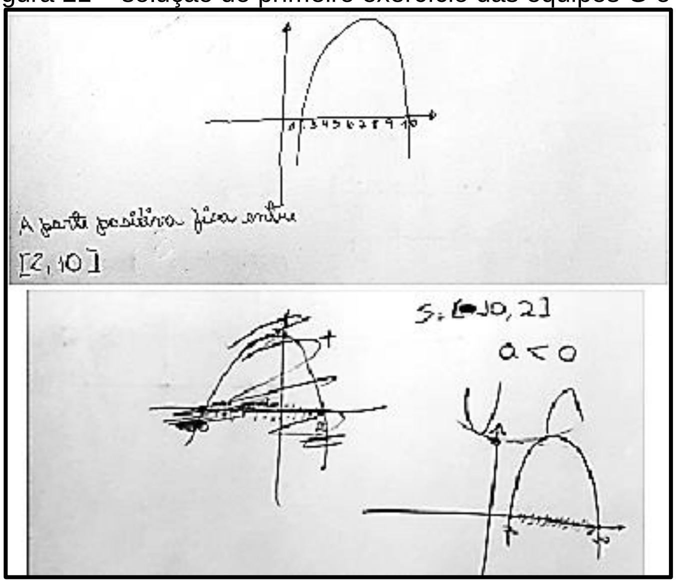


Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Esse equívoco de linguagem é recorrente. Acreditamos que isso foi motivado pela aula expositiva do dia 03 de dezembro, no qual tratamos dos zeros da função quadrática. Em algum momento fora mencionado que as raízes da equação do 2ª grau são os zeros da função quadrática. Os estudantes, portanto, assimilaram a ideia e reaplicaram de forma inexata.

As equipes G e H apresentaram soluções curiosas. Foram as únicas equipes, nesse exercício, a utilizarem intervalos numéricos como solução.

Figura 21 – solução do primeiro exercício das equipes G e H

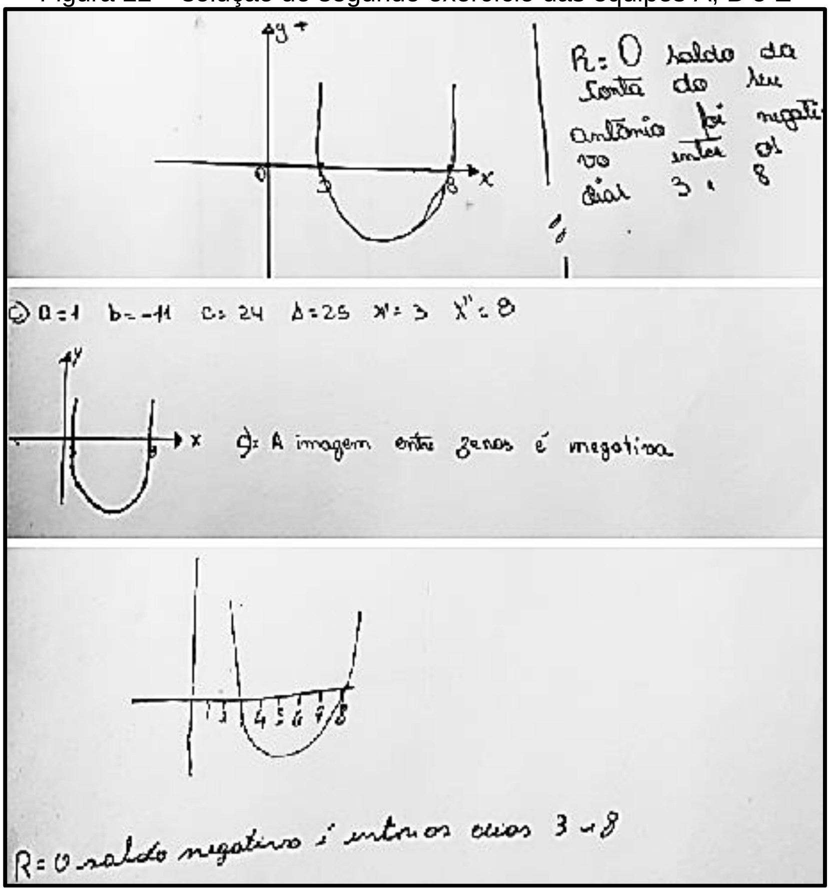


Fonte: pesquisa de campo (2019)

A equipe G utiliza intervalo fechado (quando deveria ser aberto de extremos 2 e 10) como parte da resposta dada por extenso. A equipe H também representa incorretamente o intervalo numérico, porém hachura corretamente no gráfico, isto é, apresenta, mesmo que intuitivo, a solução gráfica. As equipes, em evidencia, tentaram dar uma resposta eficientemente matemática, mas nota-se que ainda não dominam plenamente o conceito de intervalos numéricos para dar uma resposta totalmente correta, o que consolida a concepção de Vergnaud quando afirma que o sujeito necessita de tempo para a assimilação e domínio de um determinado conceito.

O exercício proposto na segunda situação-problema trata de uma das diversas aplicações dos números inteiros relativos: saldo bancário. O exercício traz uma função quadrática que determina o saldo de uma hipotética conta bancária em função dos dias transcorridos e se pede que as equipes determinem entre quais dias o saldo dessa conta foi negativo.

Figura 22 – solução do segundo exercício das equipes A, B e E

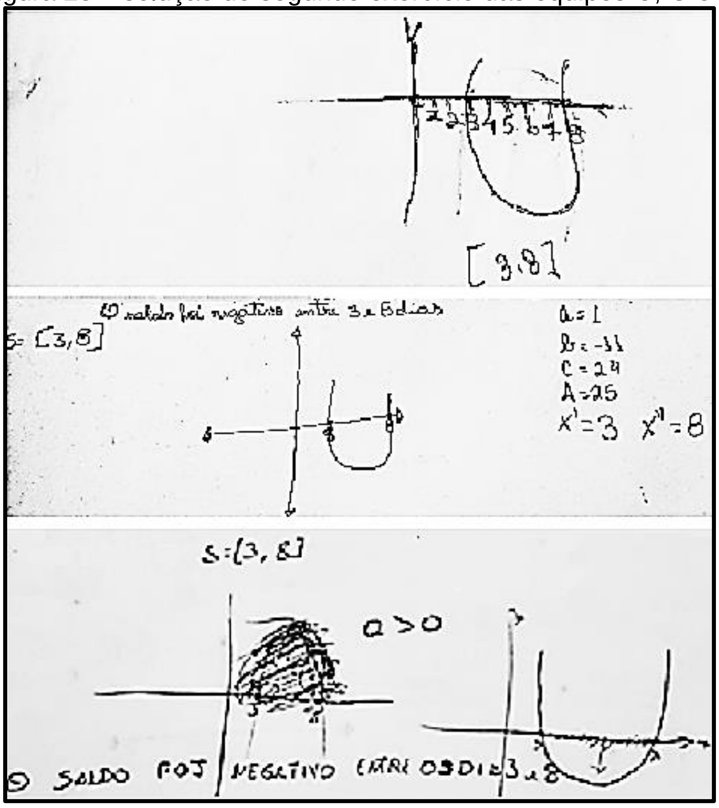


Fonte: pesquisa de campo (2019)

A equipe A e E, em seus registros dessa atividade, optaram pela linguagem corrente. Em nenhum deles foram identificadas representações algébricas e geométricas da solução, embora tenham esboçado o gráfico. A equipe B, novamente, optou pelo uso da linguagem utilizada na atividade 3. O que não faz disso um erro, apenas um fato passível de observação, levando em consideração que em nenhum momento foi pedido ou exigido que os estudantes memorizassem regras, apenas lhe foram apresentados caminhos que favorecessem a observação do conceito/propriedade que se pretendia ensinar com a atividade.

Novamente, algumas equipes tentam utilizar intervalos numéricos para representar a solução. No entanto, pecam na representação. Como é o caso da solução das equipes C, G e H.

Figura 23 – solução do segundo exercício das equipes C, G e H

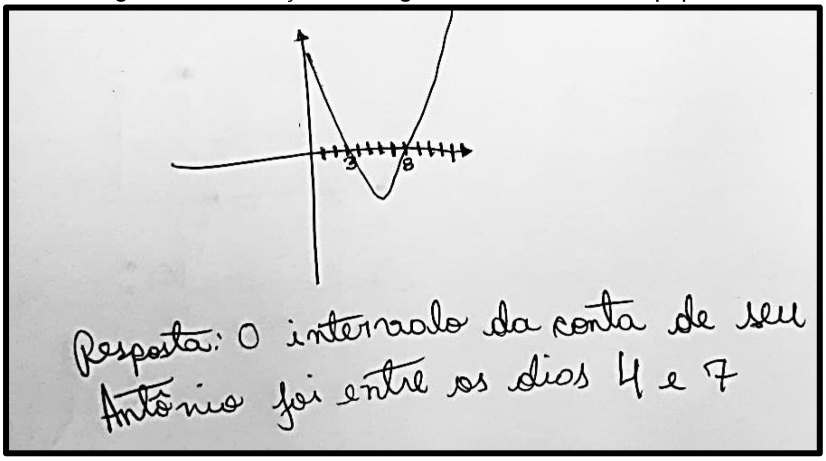


Fonte: pesquisa de campo (2019)

Vergnaud afirma que a construção de um conceito envolve três conjuntos: a terna SIR. Os resultados dessas equipes mostram que o conceito de inequação quadrática ainda não está consolidado; embora os estudantes indiquem que compreenderam a situação-problema, revelando seus invariantes operatórios, ainda não dominam a linguagem simbólica necessária para definir a consolidação do conceito estudado. Pela imagem, atentamos que as equipes utilizam intervalos numéricos fechados, quando deveriam ser abertos de extremos 3 e 8. As equipes G e H, por sua vez, registram por extenso a solução; o que não ocorre com a equipe C.

Além disso, a equipe H, da mesma forma que fizera com o primeiro exercício, representa geometricamente a solução do problema, hachurando no gráfico. A solução do segundo exercício apresentada pela equipe F nos chamou atenção.

Figura 24 – solução do segundo exercício da equipe F

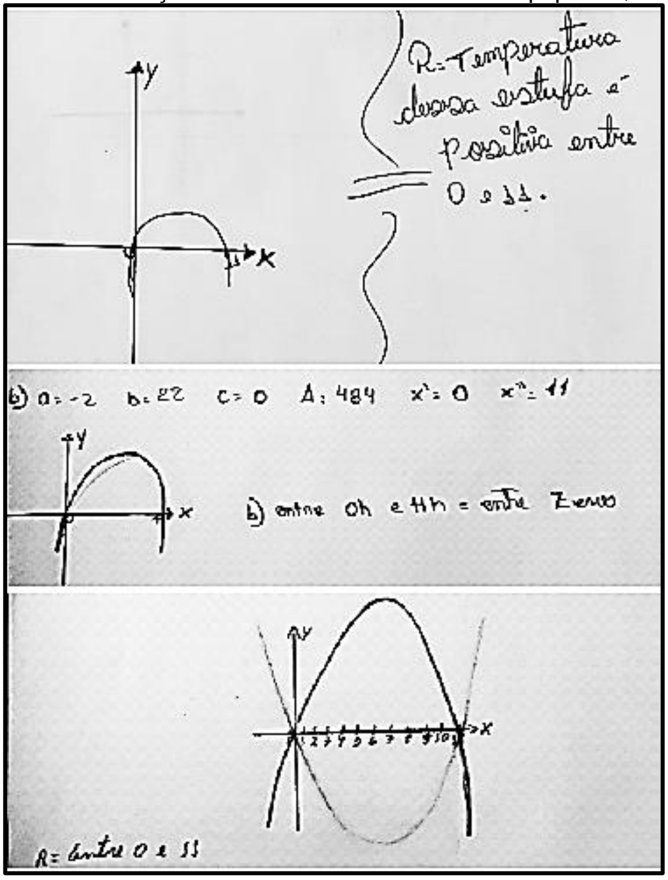


Fonte: pesquisa de campo (2019)

Nesse registro nota-se que a equipe F tenta fazer um esboço da parábola, assinalando os zeros da função que, segundo a equipe, são 3 e 8 e como resposta afirma “... foi entre os dias 4 e 7”. A equipe considera válido como resposta somente números inteiros, ou seja, uma solução de valores discretos, visto que t é dado em dias. Sendo assim, descarta os dias 3 e 8 (zeros da função), no qual o saldo é nulo e afirma que o saldo é negativo entre os dias 4 e 7. Nesse momento, vale ressaltar que não estamos tentando julgar a solução como corretas ou não, apenas apresentando os resultados e inferindo os invariantes operatórios que os estudantes lançam mão na busca pela solução da situação-problema.

O exercício da última situação-problema proposta refere-se ao aquecimento global. Esta apresenta às equipes uma função hipotética que calcula a temperatura em uma estufa em determinada hora do dia; e o que se pede é o período do dia que essa estufa apresentou a temperatura positiva.

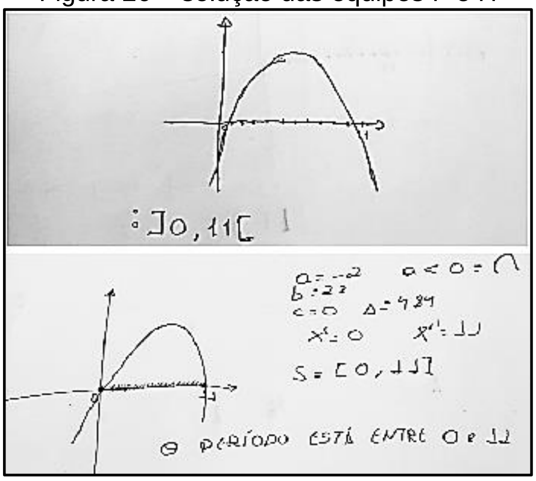
Figura 25 – solução do terceiro exercício das equipes A, B e E



Fonte: pesquisa de campo (2019)

A expressão analítica da função temperatura ilustrada nesse exercício é um polinômio incompleto da forma $ax^2 + bx$. Embora nenhuma das atividades da sequência didática fizera distinção de expressões analíticas formadas por polinômios completos ou incompletos, as equipes desenvolveram sem grandes complicações a situação-problema. Mas, não diferente das primeiras, algumas equipes utilizaram, além da linguagem corrente, a representação por intervalos numéricos.

Figura 26 – solução das equipes F e H



Fonte: pesquisa de campo (2019)

Com a observação do esboço dado pela equipe F, a parábola não passa exatamente pelos zeros da função, embora, ao expor a solução, a equipe utiliza corretamente a representação por intervalos abertos. Esse episódio ocorreu unicamente com essa equipe e nessa atividade. Assim, não temos elementos necessários para inferir o motivo que levou a equipe F a utilizar essa representação nesse momento.

A equipe H, como fez nos dois primeiros exercícios, utiliza vários meios para reproduzir a solução do exercício: algébrica através de intervalos fechados; escrita por extenso da solução e hachura no gráfico. Isso demonstra a tentativa da equipe em desenvolver o conjunto das representações necessárias à consolidação do conceito de inequação quadrática. A resposta dos estudantes dessa equipe mostra conversões de registros manifestando a tentativa de dominação do conceito matemático.

Não diferente dos demais dias, ao final, cada um dos estudantes recebeu o último material de apoio com o conteúdo matemático e exercícios, sendo reforçado o objetivo e a importância desse material de apoio – fixação dos conceitos trabalhados. Constava em nosso planejamento a socialização das soluções das três atividades, porém não houve tempo. Enquanto as equipes entregavam suas atividades e recebiam o material de apoio, lembramos que o próximo encontro aconteceria o pós-teste e orientamos que utilizassem o material de apoio para estudar.

Alguns dos eventos observados com a aplicação da sequência didática proposta nessa pesquisa já haviam sido retratados no capítulo três referente a revisão da literatura. Muitos desses eventos ocorreram, também, em nossa investigação, sendo a mais recorrente o uso da linguagem corrente. Os estudantes têm uma tendência de responder por extenso ao invés de representar as soluções de maneira algébrica ou geométrica, ou ainda, lançam mão de uma resposta mista, isto é, adicionam representações algébricas nas respostas dadas por extenso. Reis (2013) em sua investigação notou que os estudantes revelam ter conhecimentos compartimentados. Da mesma forma, ocorre com os registros de nossa investigação, no qual os estudantes revelam não estabelecer distinção ou conexão entre as representações; partem do pressuposto da melhor resposta é aquela que estiver mais completa.

Também, reparamos nas tentativas de dá-se precisão aos planos cartesianos, isto é, espaçar corretamente cada unidade no eixo x (haja vista que em nenhuma atividade foi registrado um cuidado com eixo y) com a finalidade de fazer com que a parábola intercepte exatamente os zeros da função, mesmo que seu esboço não resultasse em uma parábola simétrica.

Os pontos positivos da pesquisa de campo foram citados ao longo da seção. Porém, outro episódio que merece destaque é o uso da representação por intervalos numéricos utilizados pelos estudantes. A representação por intervalos foi um conhecimento deixado de fora das atividades da sequência didática, embora tal conhecimento tenha sido tratado indiretamente durante as atividades. E, ainda que em alguns casos, as equipes os tivessem utilizados incorretamente, apreciamos os registros feitos na tentativa de utilizá-los, pois como mencionamos em diversas passagens dessa produção, alguns sujeitos necessitam de tempo para assimilar um conceito, de acordo com Vergnaud em sua Teoria.

7 ANÁLISE DA APLICAÇÃO

A análise consiste na descrição da comparação dos resultados e registros dos estudantes no pré-teste e pós-teste, segundo a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Os exercícios propostos nos teste de verificação permitiram analisar os possíveis invariantes operatórios que os sujeitos lançaram mão na busca pela solução do problema. A análise das respostas dadas pelos estudantes permitiu investigar o trabalho matemático deles, isto é, o possível motivo dos seus erros e acertos. No que diz respeito aos acertos, será importante saber quais os meios que o estudante utilizou para alcançar o objetivo posto. E em relação aos erros, a necessidade de investiga-los é ainda mais evidente, pois essa investigação permitirá saber quais dificuldades o estudante enfrentou (VERGNAUD, 2009a).

Esta investigação tem uma abordagem quantitativa e qualitativa. De fato, quantitativa, pois se compara o percentual de acertos e erros obtidos no pré-teste com os obtidos no pós-teste; qualitativa, pois se avalia o desempenho dos estudantes, ou seja, a movimentação no sistema cognitivo deles, no qual essa movimentação será classificada em avanço, regressão ou sem movimento. Além disso, serão apontados os invariantes operatórios identificados nas respostas.

Nesse momento, deve esclarecesse que embora se utilizasse Vygotsky para fundamentar a formação das equipes, esta análise foi realizada de maneira individual, para que pudesse investigar a movimentação cognitiva de cada estudante. Assim, dos 24 estudantes submetidos a aplicação da SD, selecionamos 14, pois estes fizeram o pré-teste e pós-teste, e os identificaremos pelo código S_1, S_2, ...,S_{13} e S_{14}. Durante a apreciação dessa seção, o leitor precisará estar atento a algumas tonalidades e abreviações. Portanto, segue a descrição dessa coloração.

Quadro 10 – Descrição das tonalidades

Sem resposta (SR)	
Resposta sem sentido (RSS)	
Incorreto (INC)	
Parcialmente correto (PC)	
Correto (COR)	

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

O exercício recebeu cor cinza quando o estudante a deixou em branco, isto é, não apresentou nenhum registro; a cor azul representa as soluções que não foram observados conceitos ou teoremas em ação; vermelho, quando a solução apresentada está errada; amarelo, quando a solução está parcialmente correta e verde quando o exercício é resolvido em sua totalidade, apresentando estrutura e solução algébrica e/ou geométrica.

Como apontado, na comparação da correção dos testes de verificação, o desempenho dos estudantes foi observado, isto é, se foi identificado avanço, regresso ou sem movimento no sistema cognitivo dos estudantes. Aos casos em que não há observância de mudanças nos registros, consideramos como ‘sem movimento’. Aqui cabe uma ressalva: considera-se como “sem movimento” quando, na comparação das correções, um mesmo exercício é classificado com a mesma cor, ou seja, se num determinado exercício, o estudante, por exemplo, deixar em branco no pré-teste e no pós-teste, nesse exercício o desempenho do estudante será classificado como sem movimentação.

Depois de corrigidos os testes de verificação de aprendizagem, comparamos um a um os exercícios de cada um dos sujeitos selecionados. Assim, pôde-se classificar o desempenho do estudante em cada exercício. O quadro a seguir exibe como foi realizada essa classificação, de acordo com as mudanças de registros.

Quadro 11 – Desempenho: avanço e regressão

CLASSIFICAÇÃO	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
AVANÇO	Sem resposta	Incorreto
		Parcialmente correto
		Correto
	Resposta sem sentido	Incorreto
		Parcialmente correto
		Correto
	Incorreto	Parcialmente correto
		Correto
	Parcialmente correto	Correto
REGRESSÃO	Incorreto	Sem resposta
		Resposta sem sentido
	Parcialmente correto	Sem resposta
		Resposta sem sentido
		Incorreto
	Correto	Sem resposta
		Resposta sem sentido
		Incorreto
		Parcialmente correto

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Assim, feitos tais esclarecimentos, segue a tabela a seguir que demonstra o quantitativo de soluções observadas no pré-teste e pós-teste.

Tabela 1 – Quantitativo de soluções, por exercício, nos testes de verificação

	SEM RESPOSTA		**RESPOSTA SEM SENTIDO**		**INCORRETO**		**PARCIALMENTE CORRETO**		**CORRETO**	
EXERCÍCIOS	**PRÉ**	**PÓS**	**PRÉ**	**PÓS**	**PRÉ**	**PÓS**	**PRÉ**	**PÓS**	**PRÉ**	**PÓS**
EXERCÍCIO 1 – ITEM A	6	4	1	3	1	0	0	0	6	7
EXERCÍCIO 1 – ITEM B	7	5	0	1	6	0	0	1	1	7
EXERCÍCIO 2 – ITEM A	0	0	0	0	2	0	9	6	3	8
EXERCÍCIO 2 – ITEM B	1	0	0	0	10	11	0	0	3	3
EXERCÍCIO 2 – ITEM C	6	0	1	0	6	1	0	0	1	13
EXERCÍCIO 3 – ITEM A	9	0	0	0	3	4	2	2	0	8
EXERCÍCIO 3 – ITEM B	13	2	0	0	1	2	0	4	0	6
EXERCÍCIO 4	6	1	2	1	2	1	4	4	0	7
EXERCÍCIO 5	11	2	0	0	3	0	0	4	0	8
EXERCÍCIO 6	11	3	0	0	3	1	0	4	0	6
TOTAL	70	17	04	05	37	20	15	25	14	73
VARIAÇÃO	$-75{,}71\%$		$+25{,}0\%$		$-45{,}94\%$		$+66{,}66\%$		$+421{,}42\%$	

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Essa tabela apresenta a comparação quantitativa das correções dos pré-teste e pós-teste. A variação indicada na última linha da tabela exibe o crescimento (ou redução), em percentual, de cada categoria de correção, quando comparados os resultados do pré-teste e pós-teste. A partir da tabela, infere-se quantitativamente que a SD já demonstrou efeitos positivos nos estudantes, pois houve redução de 75,71% nas respostas deixadas em branco e 45,94% no número de exercícios incorretos. Além disso, houve um aumento expressivo de 421,42% na quantidade de exercícios considerados corretos e 66,66% nos parcialmente corretos. De maneira qualitativa, segue a análise dos exercícios.

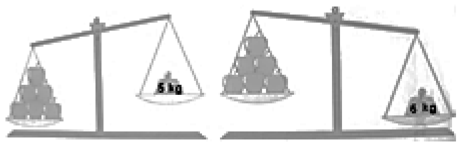
- Item (A) do Exercício 1

Nesse primeiro item do exercício 1, é solicitado a interpretação de uma situação utilizando duas balanças de dois pratos, como se observa a seguir:

Figura 27 – Item (A) do exercício 1 do teste de verificação

EXERCÍCIO 1: Observe a figura a seguir:

Apenas baseado nessa imagem, não há como dizer a massa exata das maçãs. Considere M a massa das maçãs, dada em quilogramas (kg).



(A) O que observa-se em relação a massa M das maçãs?

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

O quadro a seguir demonstra as respostas dadas pelos sujeitos.

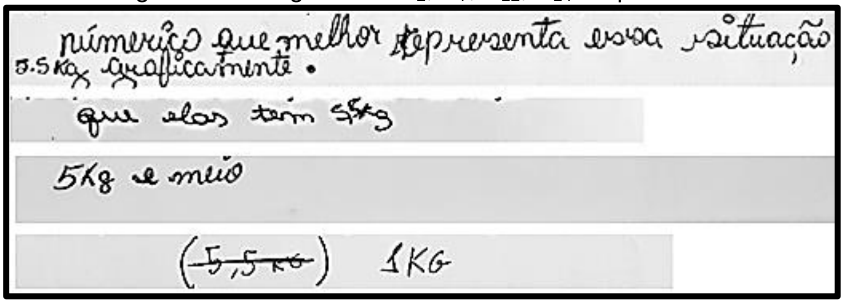
Quadro 12 – Respostas do item (A)

	Pré-teste	Pós-teste
Sem resposta	S_1, S_3, S_6, S_8, S_9, S_{11}	S_3, S_7, S_{11}, S_{12}
Resposta sem sentido	S_2	S_1, S_2, S_8
Incorreto	S_7	
Parcialmente correto		
Correto	S_4, S_5, S_{10}, S_{12}, S_{13}, S_{14}	S_4, S_5, S_6, S_9, S_{10}, S_{13}, S_{14}

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

No cuidadoso examinar dos registros, notamos que os sujeitos S_2, S_4, S_5, S_7, S_{10}, S_{12}, S_{14} buscaram um único valor numérico como solução. Observe alguns dos registros.

Figura 28 – Registro de S_2, S_7, S_{12}, S_{14} no pré-teste.


númerico que melhor representa essa situação
5.5Kg graficamente.
que elas tem 5,5Kg
5Kg e meio
(~~5,5 KG~~) 1KG

Fonte: pesquisa de campo (2019)

Segundo Silva (2016) existem certas atitudes dos professores que conduzem os estudantes a desenvolverem crenças sobre a matemática que podem influenciar a aprendizagem deles. Nesse caso, Schoenfeld (1992) aponta que uma prática comum dos professores que garante o controle do aprendizado de todos é propor problemas com uma única solução. Muitos estudantes quando submetidos a resolverem exercícios de matemática priorizam o algoritmo em busca de uma solução, geralmente um valor numérico. E estes mesmos estudantes ficam inseguros quando confrontados com situações-problemas cuja solução pode ser dada por um conjunto de valores. “É indispensável fazer as crianças observarem a pluralidade de caminhos para evitar que elas imaginem haver uma, e somente uma solução” (VERGNAUD, 2009a, p.282).

No que diz respeito ao desempenho, foi observado avanço nos sujeitos S_1, S_6, S_8 e S_9, regressão nos sujeitos S_7 e S_{12} e sem movimentação nos sujeitos S_2, S_3, S_4, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{13} e S_{14}.

- Item (B) do Exercício 1

Nesse item, o estudante deveria usar intervalos numéricos para representar algebricamente e geometricamente a situação dada no item anterior.

Figura 29 – Item (B) do Exercício 1 do teste de verificação

(B) Escreva o intervalo numérico que melhor representa essa situação e o represente graficamente.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

O quadro a seguir demonstra as respostas dadas pelos sujeitos.

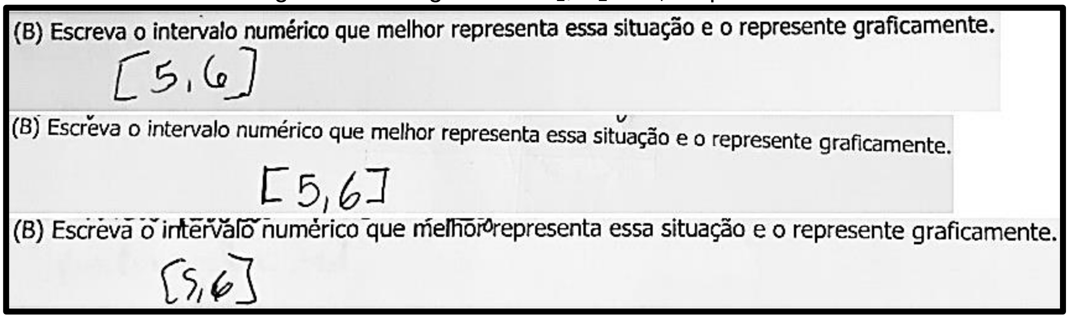
Quadro 13 – Respostas do item (B)

	Pré-teste	Pós-teste
Sem resposta	S_1, S_3, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{11}	S_3, S_7, S_9, S_{11}, S_{12}
Resposta sem sentido		S_{10}
Incorreto	S_2, S_4, S_5, S_{10}, S_{12}, S_{14}	
Parcialmente correto		S_5
Correto	S_{13}	S_1, S_2, S_4, S_6, S_8, S_{13}, S_{14}

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Os exercícios 1 e 2, como já frisado, exigia dos estudantes seus conhecimentos sobre intervalos numéricos. Nossa sequência didática não continha nenhuma atividade cujo objetivo era voltado para o ensino desse conhecimento. Dessa forma, a correção foi mais flexível. Os sujeitos S_1, S_2, S_4, S_5, S_6, S_8, S_{13}, S_{14}, cujas soluções foram consideradas corretas no pós-teste, acertaram os extremos do intervalo, porém erraram a representação, escreveram intervalo fechado, quando deveria ser aberto. Observe alguns desses registros.

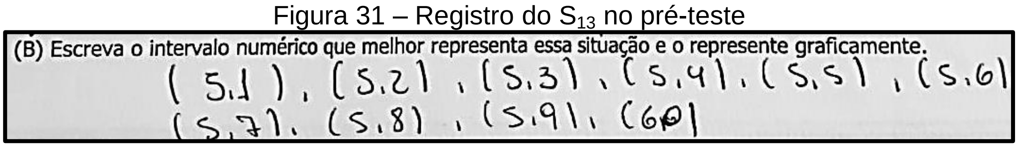
Figura 30 – Registro do S_1, S_2 e S_4 no pós-teste



Fonte: pesquisa de campo (2019)

A solução dado no pré-teste pelo S_{13} reincide no mesmo erro exibido anteriormente, porém, com uma diferença: ao invés dele buscar um único valor numérico, ele explicita valores numéricos como solução.

Figura 31 – Registro do S_{13} no pré-teste

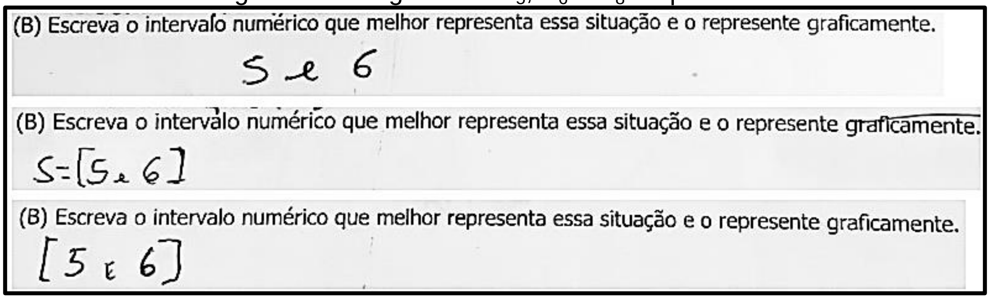


Fonte: pesquisa de campo (2019)

Não está incorreto, porém, nota-se uma incompletude no que diz respeito ao conjunto dos números reais. Por essa solução, entendemos que o sujeito sugere que as massas possíveis são: 5,1kg; 5,2kg; 5,3kg... Infere-se que o sujeito não possui pleno domínio sobre os números decimais; limita-se a um conjunto discreto.

As soluções dadas no pós-teste do S_5, S_6 e S_8 são curiosas. Eles, em seus registros, utilizam uma mistura de linguagem: corrente e matemática. A solução do S_5, não diferente, é registrada por extenso, porém sem utilizar a representação por intervalo numérico.

Figura 32 – Registro do S_5, S_6 e S_8 no pós-teste


(B) Escreva o intervalo numérico que melhor representa essa situação e o represente graficamente.

5 e 6

(B) Escreva o intervalo numérico que melhor representa essa situação e o represente graficamente.

S=[5 e 6]

(B) Escreva o intervalo numérico que melhor representa essa situação e o represente graficamente.

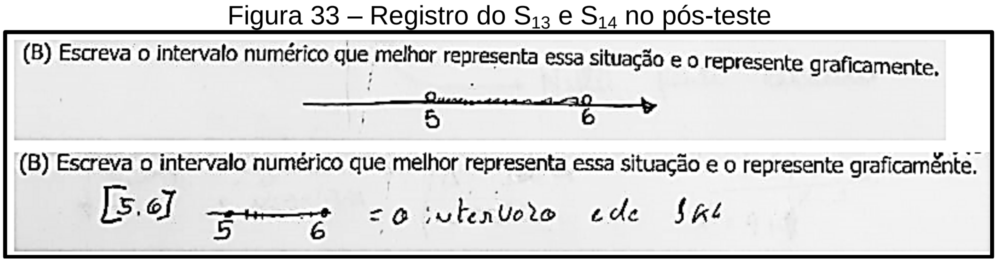
[5 e 6]

Fonte: pesquisa de campo (2019)

Segundo nossa revisão de literatura, os estudantes costumam optar por usar a linguagem corrente ao invés da linguagem matemática ou uma mistura delas. Essa mistura, segundo D’Amore (2007), é um hábito consolidado pelos professores; uma espécie de “língua escolar” cujo assunto é a Matemática.

A solução do item (B) do exercício 1, no pós-teste, dos sujeitos S_{13} e S_{14} também é passível de comentários, pois, embora os equívocos, eles foram os únicos que apresentaram uma representação geométrica.

Figura 33 – Registro do S_{13} e S_{14} no pós-teste


(B) Escreva o intervalo numérico que melhor representa essa situação e o represente graficamente.

(B) Escreva o intervalo numérico que melhor representa essa situação e o represente graficamente.

[5.6]

= o intervalo é de 1kg

Fonte: pesquisa de campo (2019)

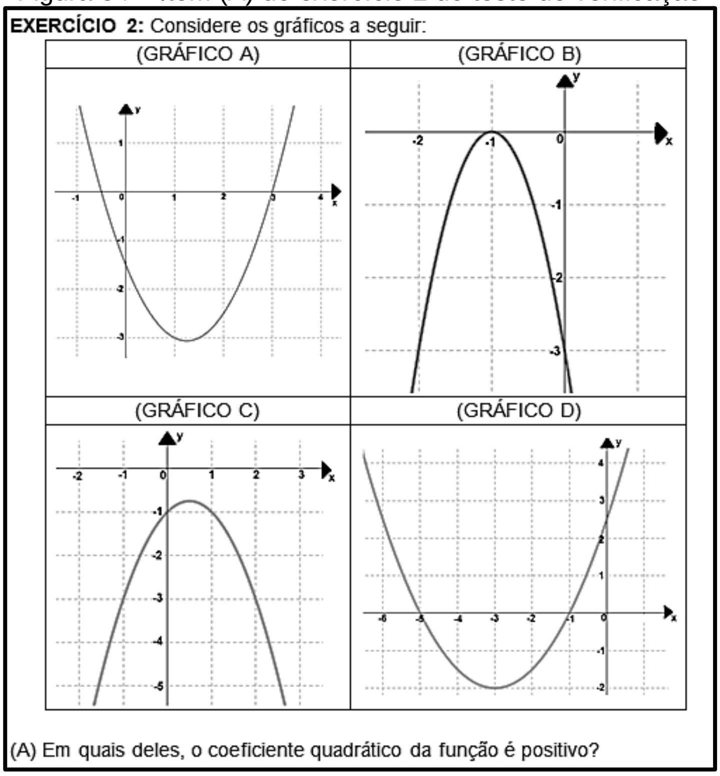
O S_{13} não registrou sua representação algébrica, todavia, em sua representação geométrica, ele apontou que os extremos não pertencem ao intervalo, isto é, intervalo aberto. Interessante atentar que no registro de sua resposta, o S_{14} indica que “o intervalo é de 1kg”. Levando a crer que este sujeito considera intervalo numérico como a amplitude de um conjunto, no qual se calcula fazendo a diferença entre o maior elemento desse conjunto e o menor.

No que diz respeito ao desempenho, foi observado avanço nos sujeitos S_1, S_2, S_4, S_5, S_6, S_8 e S_{14}, regressão nos sujeitos S_{10} e S_{12} e sem movimentação nos sujeitos, S_3, S_7, S_9, S_{11} e S_{13}.

- Item (A) do Exercício 2

Nesse exercício, o estudante analisou quatro gráficos de funções quadráticas, sem as expressões analíticas, e indicar quais deles, num total de dois, o coeficiente quadrático da função é positivo.

Figura 34 – Item (A) do exercício 2 do teste de verificação



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

O quadro a seguir demonstra as respostas dadas pelos sujeitos.

Quadro 14 – Respostas do Item (A)

	Pré-teste	Pós-teste
Sem resposta		
Resposta sem sentido		
Incorreto	S_3, S_{12}	
Parcialmente correto	S_1, S_2, S_5, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{13}	S_1, S_2, S_5, S_8, S_9, S_{10}
Correto	S_4, S_6, S_{14}	S_3, S_4, S_6, S_7, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

A aplicação da sequência didática nos forneceu pontos positivos, considerando que a atividade de ensino 02 abordava a relação do coeficiente quadrático com a concavidade da parábola. Assim, analisando a correção do pré-teste e pós-teste de cada sujeito, verificamos que S_3 e S_{12}, que erraram inicialmente no pré, acertaram no pós-teste; houve aumento no quantitativo de sujeitos que acertaram a questão e não houve registro de exercício sem resposta ou dados como incorretos. Além disso, os sujeitos S_1, S_2, S_5, S_8, S_9, S_{10}, que acertaram parcialmente no pós-teste, registram apenas um dos dois gráficos que seriam a resposta correta.

No que diz respeito ao desempenho, foi observado avanço nos sujeitos S_3, S_7, S_{11}, S_{12} e S_{13} e sem movimentação nos sujeitos S_1, S_2, S_4, S_5, S_6, S_8, S_9, S_{10}. Não foram registradas regressões.

- Item (B) do exercício 2

Nessa questão, o estudando, observando ainda os mesmos quatro gráficos da questão anterior, teria de apontar qual deles a imagem da função quadrática é sempre negativa para qualquer valor real de x.

Figura 35 – Item (B) do exercício 2 do teste de verificação

(B) Em qual deles, a imagem da função é sempre negativa para qualquer valor real de x?

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

O quadro a seguir demonstra as respostas dadas pelos sujeitos.

Quadro 15 – Respostas do item (B)

	Pré-teste	Pós-teste
Sem resposta	S_3	
Resposta sem sentido		
Incorreto	S_1, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}	S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{13}
Parcialmente correto		
Correto	S_2, S_4, S_{14}	S_6, S_{12}, S_{14}

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Dois erros são identificados mais recorrentes nas soluções. Os sujeitos S_1, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{13} (no pré-teste) e S_2, S_4, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11} S_{13} (no pós-teste) afirmam que o gráfico B (cf. apêndice A) é aquele que possui imagem sempre negativa, quaisquer seja o valor real de x. O primeiro equívoco ocorre na não observância do $x = -1$, cuja imagem é nula. Os sujeitos ignoram que o gráfico intercepta o eixo x nesse ponto. Portanto, este gráfico não possui os requisitos para ser a resposta correta da questão. O segundo erro infere-se a partir da recorrência do primeiro. Os sujeitos confundem domínio e imagem; admitem que quando a maior parte da parábola (parte esboçada) estiver do lado esquerdo do eixo y, o gráfico possui imagem negativa. As respostas dadas no pós-teste dos sujeitos S_1, S_3 e S_5 reforçam nossa dedução. Eles afirmam que o gráfico D possui imagem negativa para qualquer valor real de x e quando observado, este gráfico possui grande parte do esboço situado à esquerda do eixo y. Aqui há uma manifestação de forma implícita do que Vergnaud chama de invariante operatório.

No que diz respeito ao desempenho, foi observado avanço nos sujeitos S_3, S_6, e S_{12}, regressão nos sujeitos S_2 e S_4 e sem movimentação nos sujeitos S_1, S_5, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{13} e S_{14}. Essa análise chama atenção para o considerável quantitativo de sujeitos que não apresentaram movimentação nesse exercício. Seria necessária uma análise mais precisa e cuidadosa nesses registros, pois, a solução ser considerada incorreta no pré-teste e, também, incorreta no pós-teste, não significa necessariamente que o estudante não apresentou movimentação em seu sistema cognitivo.

- Item (C) do exercício 2

Nesse exercício, o estudante deveria escolher um dos quatro gráficos e apontar os zeros da função.

Figura 36 – Item (C) do exercício 2 do teste de verificação

(C) Escolha um dos gráficos e identifique os zeros da função.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

O quadro a seguir demonstra as respostas dadas pelos sujeitos.

Quadro 16 – Respostas do item (C)

	Pré-teste	Pós-teste
Sem resposta	S_3, S_5, S_6, S_7, S_9, S_{12}	
Resposta sem sentido	S_8	
Incorreto	S_1, S_2, S_4, S_{10}, S_{11}, S_{13}	S_3
Parcialmente correto		
Correto	S_{14}	S_1, S_2, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Em dois gráficos (B e D), dos quatro, era mais simples a visualização dos zeros da função, pois estes estavam explicitados. Com efeito, dos 13 sujeitos que acertaram no pós-teste, 12 apontaram o gráfico D e identificaram corretamente os zeros. O S_{14} foi o único sujeito que, em ambos testes, apontou o gráfico B, identificando corretamente o zero. É relevante notar o expressivo aumento de sujeitos que acertaram a questão no pós-teste. Lembramos ao leitor que nos dias 02 e 03 de dezembro foi realizado breve esclarecimento, com uma aula expositiva, sobre raízes de uma equação do 2ª grau e zeros da função quadrática e, dessa maneira, deduzimos que tal fato tenha influenciado diretamente no resultado dessa questão, tendo em vista que 13 dos 14 sujeitos erraram ou não responderam o exercício no pré-teste.

No que diz respeito ao desempenho, foi observado avanço em todos os sujeitos, exceto no sujeito S_{14}, identificado como sem movimentação. Não foi registrado regressão nesse exercício. Aqui, percebe-se, com mais clareza, que o desempenho classificado como ‘sem movimentação’ não significa que houve prejuízo, não houve aprendizagem ou, tampouco, que SD foi ineficaz. Nota-se que, embora, o desempenho do S_{14} fora considerado sem movimentação, a resposta dada por ele, nesse exercício, foi considerada correta em ambos os testes. Tal fato ratifica o que se frisou anteriormente: os desempenhos classificados como ‘sem movimentação’ necessitam de uma minuciosa análise.

- Exercício 3

O exercício 3 do teste de verificação exigia dos estudantes conhecimentos a respeito de funções quadráticas. No item (A) é fornecida a expressão analítica de uma função quadrática e solicitado que o estudante identifique se a concavidade do gráfico dessa função será voltada para cima ou para baixo, e, no item (B), o estudante deveria identificar o intervalo do domínio que a função apresenta imagem negativa.

Figura 37 – Exercício 3 do teste de verificação

EXERCÍCIO 3: Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 4x$

(A) O gráfico dessa função é uma parábola com concavidade voltada para cima ou para baixo? Por quê?

(B) Em qual intervalo do domínio essa função possui imagem negativa?

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

O quadro a seguir demonstra as respostas dadas pelos sujeitos.

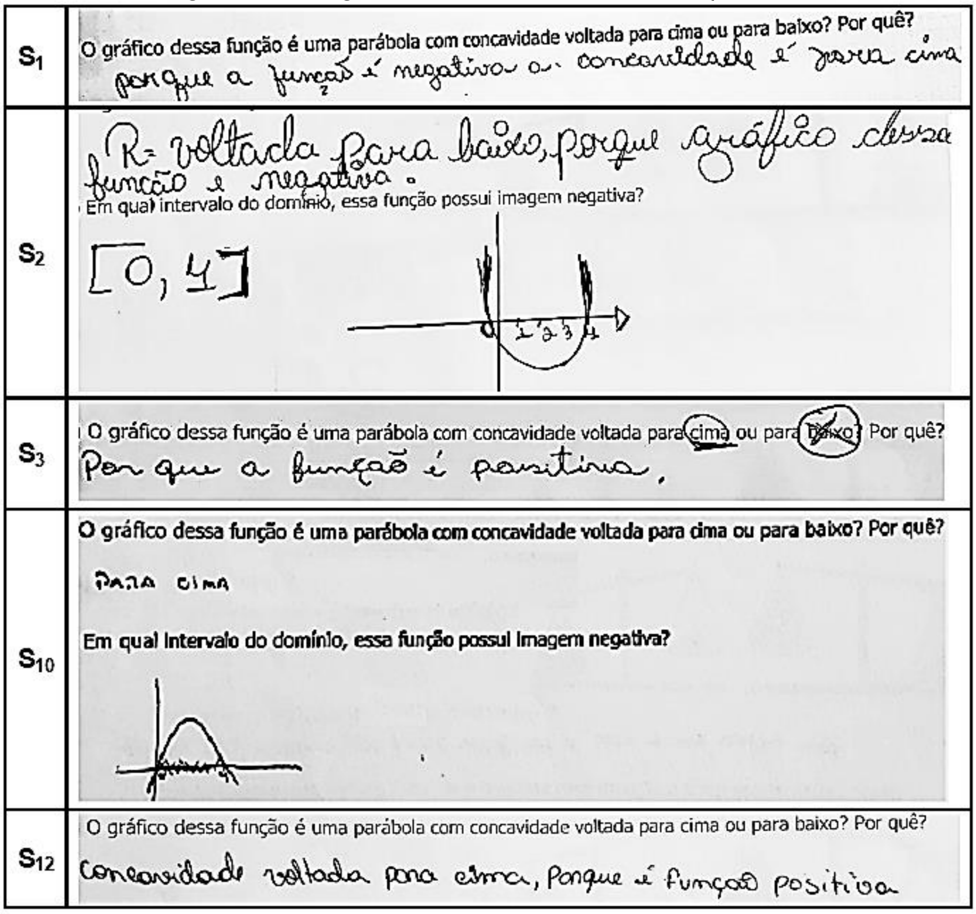
Quadro 17 – Respostas do Exercício 3

	Pré-teste		Pós-teste	
	Item (A)	Item (B)	Item (A)	Item (B)
Sem resposta	S_2, S_3, S_5, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}	S_1, S_2, S_3, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13} S_{14}		S_3, S_7
Reposta sem sentido				
Incorreto	S_1, S_6, S_{13}	S_4	S_1, S_5, S_7, S_{11}	S_5, S_{12}
Parcialmente correto	S_4, S_{14}		S_2, S_{10}	S_4, S_9, S_{10}, S_{11}
Correto			S_3, S_4, S_6, S_8, S_9, S_{12}, S_{13}, S_{14}	S_1, S_2, S_6, S_8, S_{13}, S_{14}

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Seguem a seguir alguns registros no qual desenvolveremos comentários acerca da solução apresentada pelos sujeitos.

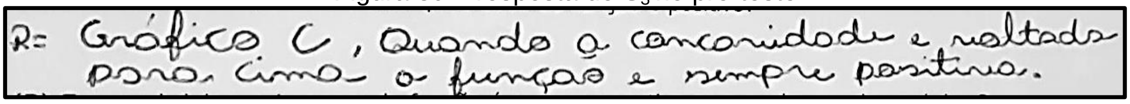
Figura 38 – Registro do S_1, S_2, S_3, S_{10}, S_{12} no pós-teste



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Enquanto analisavam-se as correções referentes a esse exercício, nota-se algo que chamou a atenção. Os sujeitos S_2 e S_{10} confundem os conceitos de côncavo e convexo; compreendem de maneira errada a definição de concavidade. A parábola cuja concavidade está voltada para cima, eles afirmam que está voltada para baixo e vice-versa, acreditando, erroneamente, que concavidade é a parte do gráfico que contém o ponto de inflexão (vértice da parábola). Portanto, eles tomam o ponto de vértice como elemento para determinar se a direção da concavidade. Atente, por exemplo, a solução do S_{10}, no qual afirma que a concavidade está voltada para cima, porém esboça o gráfico com concavidade para baixo. A resposta dada no pré-teste pelo sujeito S_3 corrobora para essa ilação.

Figura 39 – resposta do S_3 no pré-teste

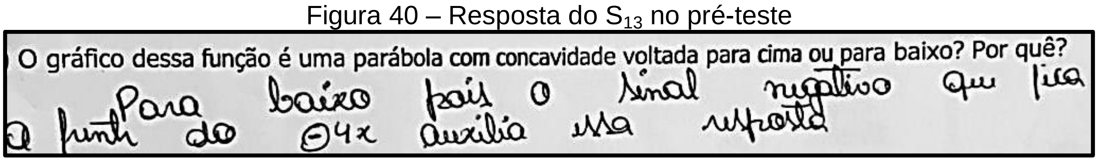

R= Gráfico C, Quando a concavidade e voltada para cima a função e sempre positivo.

Fonte: Pesquisa de Campo (2019)

Além disso, novamente se observa equívocos em relação ao uso da linguagem matemática. Não há compreensão da definição de certos objetos matemáticos, até mesmo confusão no momento do registro escrito, como se pode observar nos registros de S_1, S_3 e S_{12}. Eles utilizam a palavra 'função' para se referir a 'coeficiente'. Da mesma forma ocorre com S_2 que usa a expressão 'gráfico' para referir-se a coeficiente. Portanto, inferir-se que os sujeitos não possuem em sua bagagem cognitiva o conceito correto desses objetos e não os distinguem. Vergnaud afirma em sua Teoria, e concordamos com ele, que existem sujeitos que necessitam de tempo para assimilar um conhecimento. Além disso, existem sujeitos que, além do tempo de aprendizagem, apresentam lacunas de conhecimentos. Todas essas variáveis precisam ser consideradas por nós educadores afim de que se amplie o campo conceitual dos estudantes com sucesso.

Em outros registros, reparamos que alguns sujeitos adquiriram de maneira inverídica certos conceitos e propriedades relacionados a função quadrática. Como é o caso do sujeito S_{13} que, no item (A) do exercício 3 do pré-teste, responde:

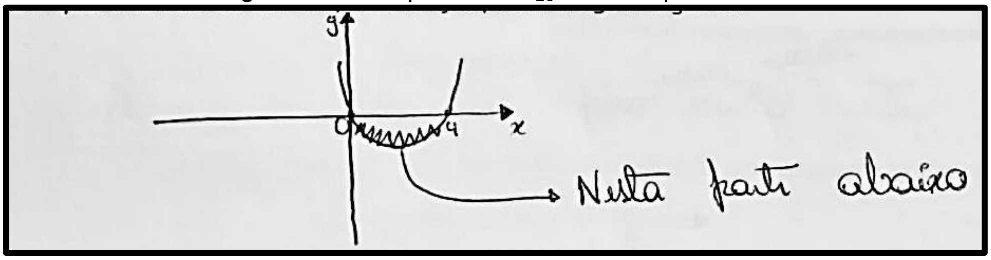
Figura 40 – Resposta do S_{13} no pré-teste


O gráfico dessa função é uma parábola com concavidade voltada para cima ou para baixo? Por quê?
Para baixo pois o sinal negativo que fica a funh do ⊖4x auxilia na resposta

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

A aplicação da SD favoreceu a aprendizagem desse sujeito, pois no exercício 3, no pré-teste, ele errou o item A e deixou sem resposta o item B e, posteriormente, no pós-teste, ele acertou ambas os itens desse exercício, como está sinalizado no quadro 17. Acerca do item (B), atente à resposta dada no pós-teste por ele.

Figura 41 – Resposta do S_{13} dada no pós-teste



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

O sujeito hachura uma seção do gráfico indicando que é a parte do domínio da função que assume valores negativos. Infere-se que o estudante construiu todas as condições para dá a solução, todavia, faltou-lhe compreensão do que é domínio e imagem da função e que são determinados por valores nos eixos coordenados.

No que diz respeito ao desempenho, no item (A) foi observado avanço em todos os sujeitos, exceto no sujeito S_1, identificado como sem movimentação. No item (B) todos os sujeitos apresentaram avanço, exceto S_3 e S_7. Não foi registrado regressão para nenhum sujeito em ambos os exercícios.

- Exercício 4

O exercício 4 do teste de verificação dispõe seis expressões algébricas (1 equação do primeiro grau, 1 equação do segundo grau, 1 inequação do primeiro grau e 3 inequações quadráticas), onde foi solicitado que o estudante identifique as inequações quadráticas e aponte o critério (motivo) que ele utilizou para fazer suas escolhas.

Figura 42 – Exercício 4 do teste de verificação

EXERCÍCIO 4: Dadas as expressões a seguir, identifique apenas as inequações quadráticas.

( )	$x^2 + 2x + 3 < 0$	( )	$3x + 2 > 0$	( )	$4x + 5 = 0$
( )	$x^2 + 2x = 0$	( )	$3x^2 - 6x \geq 0$	( )	$3x^2 - 4 \leq 0$

Qual critério você utilizou para essa escolha?

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

O quadro a seguir demonstra as respostas dadas pelos sujeitos.

Quadro 18 – Respostas do exercício 4

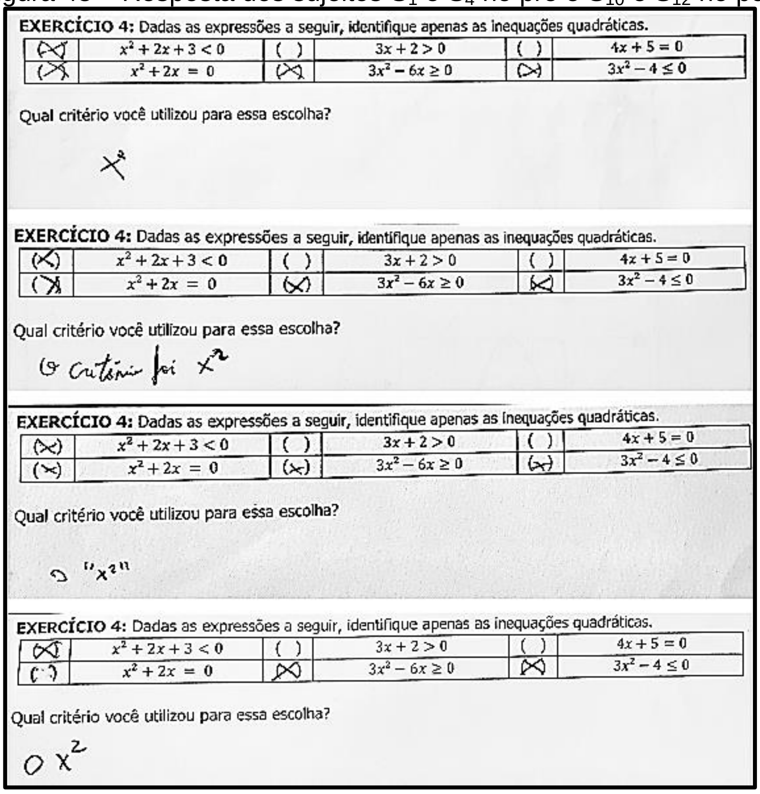
	Pré-teste	Pós-teste
Sem resposta	S_3, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{12}	S_9
Resposta sem sentido	S_6, S_{14}	S_8
Incorreto	S_2, S_5	S_5
Parcialmente correto	S_1, S_4, S_{11}, S_{13}	S_1, S_6, S_{10}, S_{14}
Correto		S_2, S_3, S_4, S_7, S_{11}, S_{12}, S_{13}

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

A princípio, aparentemente, é atípico submeter estudantes a questões de inequação quadrática quando ao menos foi ensinado este conteúdo a eles. Todavia, intencionalmente, esses exercícios foram propostos no pré-teste com o interesse de investigar os conhecimentos que estes estudantes possuíam e na verificação do desempenho deles após aplicação da sequência didática, ou seja, atestar os efeitos dessa sequência de atividades. Dessa forma, os três últimos exercícios do teste de verificação abordaram as inequações quadráticas.

Acredita-se que os sujeitos S_1 e S_4 (no pré-teste) e S_{10} e S_{12} (no pós-teste), intuitivamente, apontam o critério de suas escolhas, induzidos pela expressão 'quadrática'. Segundo a revisão de literatura, Souza (2007) já apresentou em sua pesquisa que os sujeitos tendem a usar aspectos intuitivos.

Figura 43 – Resposta dos sujeitos S_1 e S_4 no pré e S_{10} e S_{12} no pós



EXERCÍCIO 4: Dadas as expressões a seguir, identifique apenas as inequações quadráticas.

(X)	$x^2+2x+3<0$	( )	$3x+2>0$	( )	$4x+5=0$
(X)	$x^2+2x=0$	(X)	$3x^2-6x\geq 0$	(X)	$3x^2-4\leq 0$

Qual critério você utilizou para essa escolha?

x^2

EXERCÍCIO 4: Dadas as expressões a seguir, identifique apenas as inequações quadráticas.

(X)	$x^2+2x+3<0$	( )	$3x+2>0$	( )	$4x+5=0$
(X)	$x^2+2x=0$	(X)	$3x^2-6x\geq 0$	(X)	$3x^2-4\leq 0$

Qual critério você utilizou para essa escolha?

O critério foi x^2

EXERCÍCIO 4: Dadas as expressões a seguir, identifique apenas as inequações quadráticas.

(X)	$x^2+2x+3<0$	( )	$3x+2>0$	( )	$4x+5=0$
(X)	$x^2+2x=0$	(X)	$3x^2-6x\geq 0$	(X)	$3x^2-4\leq 0$

Qual critério você utilizou para essa escolha?

O "x^2"

EXERCÍCIO 4: Dadas as expressões a seguir, identifique apenas as inequações quadráticas.

(X)	$x^2+2x+3<0$	( )	$3x+2>0$	( )	$4x+5=0$
( )	$x^2+2x=0$	(X)	$3x^2-6x\geq 0$	(X)	$3x^2-4\leq 0$

Qual critério você utilizou para essa escolha?

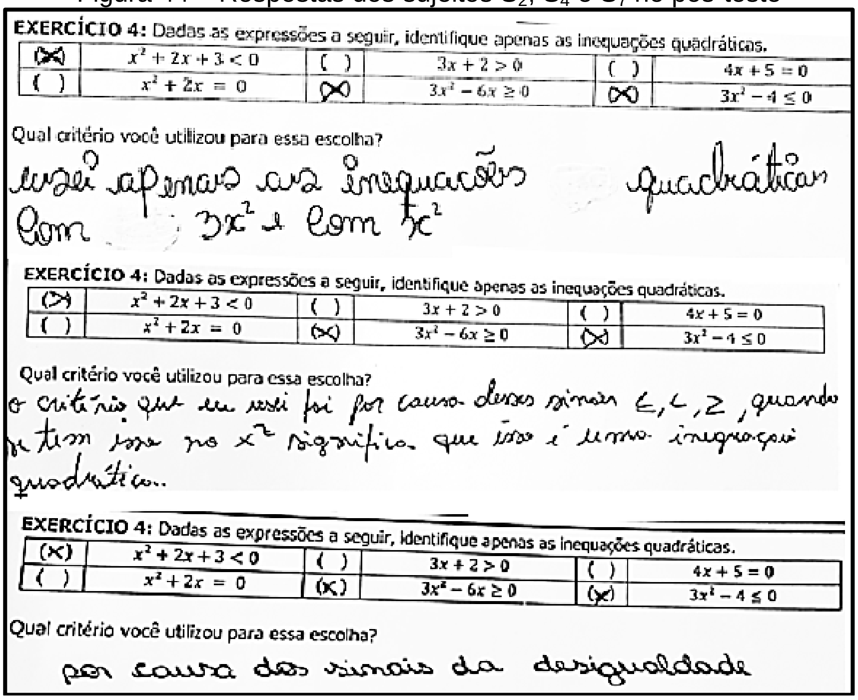
O x^2

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Nota-se que estes sujeitos ignoram a simbologia, não distinguindo equações de inequações. A atenção deles é voltada apenas para o termo x². Segundo Beltrão (2010) as pesquisas apontam que a manipulação de símbolos pode ser um aspecto importante da aprendizagem e as desigualdades possuem sua simbologia própria. Não é incomum encontrar estudantes que confundam conceitos matemáticos. Esses estudantes, de acordo com uma investigação feita por Souza (2007) usam aspectos intuitivos na resolução de inequações e, devido a isso, transferem as regras de identificação de equações para a de inequações.

O sujeito S_{12} no pós-teste identificou corretamente as três inequações quadráticas, porém registra que utilizou apenas o termo 'x²' como critério de escolha. Contudo entendemos que esse sujeito reconhece uma inequação quadrática. O mesmo ocorre com outros sujeitos.

Figura 44 – Respostas dos sujeitos S_2, S_4 e S_7 no pós-teste



EXERCÍCIO 4: Dadas as expressões a seguir, identifique apenas as inequações quadráticas.

(X)	$x^2+2x+3<0$	( )	$3x+2>0$	( )	$4x+5=0$
( )	$x^2+2x=0$	(X)	$3x^2-6x\geq 0$	(X)	$3x^2-4\leq 0$

Qual critério você utilizou para essa escolha?

usei apenas as inequações quadráticas com 3x² e com x²

EXERCÍCIO 4: Dadas as expressões a seguir, identifique apenas as inequações quadráticas.

(X)	$x^2+2x+3<0$	( )	$3x+2>0$	( )	$4x+5=0$
( )	$x^2+2x=0$	(X)	$3x^2-6x\geq 0$	(X)	$3x^2-4\leq 0$

Qual critério você utilizou para essa escolha?

o critério que eu usei foi por causa desses sinais ≤, <, ≥, quando tem isso no x² significa que isso é uma inequação quadrática...

EXERCÍCIO 4: Dadas as expressões a seguir, identifique apenas as inequações quadráticas.

(X)	$x^2+2x+3<0$	( )	$3x+2>0$	( )	$4x+5=0$
( )	$x^2+2x=0$	(X)	$3x^2-6x\geq 0$	(X)	$3x^2-4\leq 0$

Qual critério você utilizou para essa escolha?

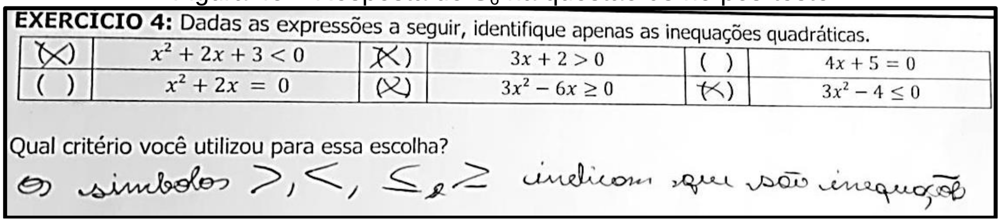
por causa dos sinais da desigualdade

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Estes sujeitos reconhecem as inequações quadráticas, mesmo apresentado dificuldades e incompletudes na escrita do critério de escolha. O sujeito S_{11} também, no pós-teste, identifica corretamente as três inequações, porém não apresenta nenhum critério. A Teoria dos Campos Conceituais nos diz que os invariantes operatórios se manifestam em vários momentos durante a resolução de um problema. As conclusões dos estudantes, que explicam tais procedimentos, vão aparecendo, em muitos casos, de forma inconsciente.

Seguimos a análise nesse exercício mostrando o registro da resposta dada pelo S_6 no pós-teste.

Figura 45 – Resposta do S_6 na questão 08 no pós-teste


EXERCICIO 4: Dadas as expressões a seguir, identifique apenas as inequações quadráticas.

(X)	$x^2 + 2x + 3 < 0$	(X)	$3x + 2 > 0$	( )	$4x + 5 = 0$
( )	$x^2 + 2x = 0$	(X)	$3x^2 - 6x \geq 0$	(X)	$3x^2 - 4 \leq 0$

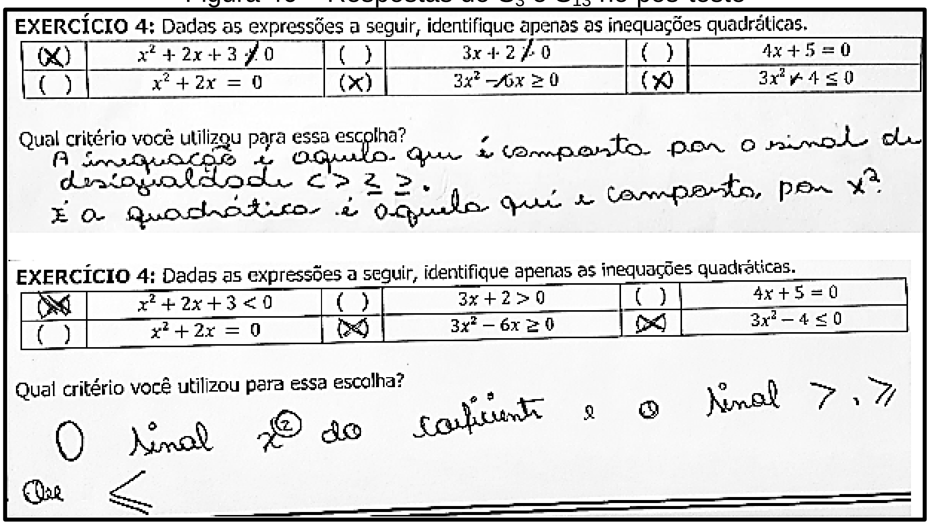
Qual critério você utilizou para essa escolha?

Os simbolos >, <, ≤ e ≥ indicam que são inequações

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Não é difícil de perceber que este sujeito reconhece a simbologia, isto é, os sinais de desigualdades que definem uma inequação. Contudo, ainda há defasagem em sua aprendizagem no trato das inequações quadráticas. Por outro lado, S_3 e S_{13}, reconheceram a expressão analítica de uma inequação quadrática e utilizando a linguagem informal e corrente definiram:

Figura 46 – Respostas do S_3 e S_{13} no pós-teste


EXERCÍCIO 4: Dadas as expressões a seguir, identifique apenas as inequações quadráticas.

(X)	$x^2 + 2x + 3 \not< 0$	( )	$3x + 2 \not> 0$	( )	$4x + 5 = 0$
( )	$x^2 + 2x = 0$	(X)	$3x^2 - 6x \geq 0$	(X)	$3x^2 - 4 \leq 0$

Qual critério você utilizou para essa escolha?

A inequação é aquela que é composta por o sinal de desigualdade < > ≥ ≥.
E a quadrática é aquela que é composta por x²

EXERCÍCIO 4: Dadas as expressões a seguir, identifique apenas as inequações quadráticas.

(X)	$x^2 + 2x + 3 < 0$	( )	$3x + 2 > 0$	( )	$4x + 5 = 0$
( )	$x^2 + 2x = 0$	(X)	$3x^2 - 6x \geq 0$	(X)	$3x^2 - 4 \leq 0$

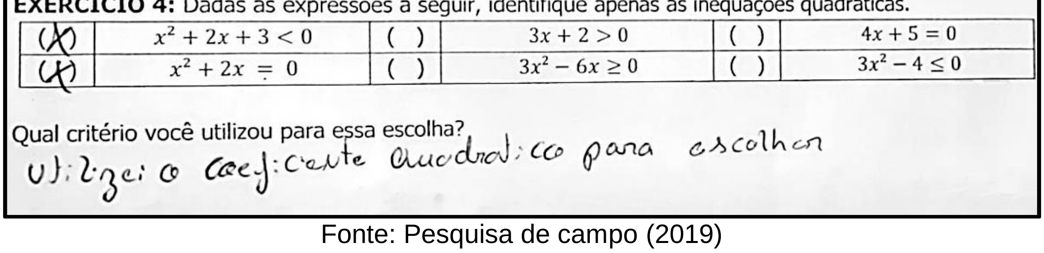
Qual critério você utilizou para essa escolha?

O sinal x² do coeficiente e o sinal > , ≥
ou ≤

Fonte: pesquisa de campo (2019)

Outra resposta passível de comentário é do S_{14} no pós-teste.

Figura 47 – Resposta do S_{14} no pós-teste


EXERCÍCIO 4: Dadas as expressões a seguir, identifique apenas as inequações quadráticas.

(X)	$x^2 + 2x + 3 < 0$	( )	$3x + 2 > 0$	( )	$4x + 5 = 0$
(X)	$x^2 + 2x = 0$	( )	$3x^2 - 6x \geq 0$	( )	$3x^2 - 4 \leq 0$

Qual critério você utilizou para essa escolha?

Utilizei o coeficiente quadratico para escolher

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Mediante essa resposta, nota-se que o sujeito não distingue equações de inequações, o que importou no momento de sua escolha foi o termo x^2 quando o coeficiente é igual a 1. Deduz-se, portanto, que, para ele, inequações quadráticas são definidas por essa característica. Perceba os invariantes operatórios manifestados pelos estudantes. Cada um, no momento de responder ao exercício, utiliza o conhecimento que detêm e, embora, não consolidado, está implícito o conceito do objeto ensinado. Perceba que os conhecimentos mobilizados pelos sujeitos frente as resoluções do exercício correspondem a conceitos em ação, tendo em vista que suas respostas são verdadeiras acerca das inequações quadráticas.

No que diz respeito ao desempenho, foi observado avanço em todos os sujeitos, exceto nos sujeitos S_1, S_5 e S_9, identificados como sem movimentação. Não foi registrado regressão para nenhum sujeito.

- Exercício 5

Esse exercício traz, de forma explícita, uma inequação quadrática e pede-se o seu conjunto solução.

Figura 48 – Questão 9 do pré-teste e pós-teste

EXERCÍCIO 5: Em $\mathbb{R}$, determine o conjunto solução da inequação $x^2 - 6x + 5 < 0$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

O quadro a seguir demonstra as respostas dadas pelos sujeitos.

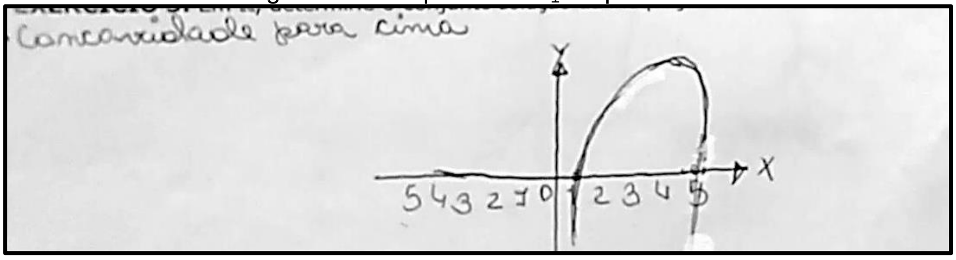
Quadro 19 – Respostas do exercício 5

	Pré-teste	Pós-teste
Sem resposta	S_1, S_2, S_4, S_5, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}	S_7, S_{10}
Resposta sem sentido		
Incorreto	S_3, S_6, S_{14}	
Parcialmente correto		S_1, S_2, S_8, S_{11}
Correto		S_3, S_4, S_5, S_6, S_9, S_{12}, S_{13}, S_{14}

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Durante as correções das respostas, observa-se a repetição de alguns equívocos e defasagens apresentadas anteriormente.

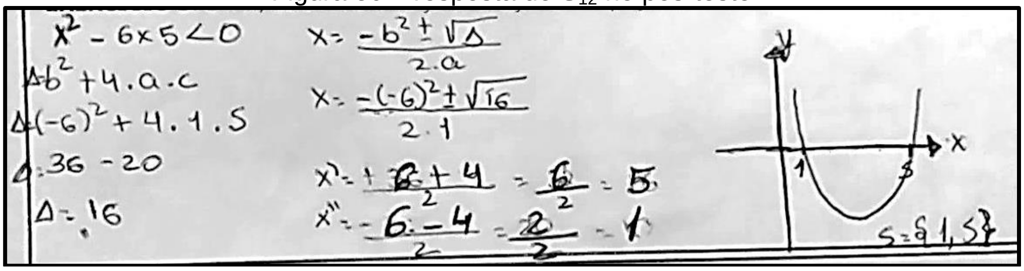
Figura 49 – resposta do S_1 no pós-teste



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Ele afirma que a concavidade está voltada para cima, mas esboça a parábola com concavidade voltada para baixo, o que, portanto, ratifica nossa aferição de que alguns sujeitos confundem os conceitos de côncavo e convexo. Como apresentado ao longo da pesquisa, alguns sujeitos intuitivamente transferem conhecimentos adquiridos no ensino de outros conteúdos no momento de resolver as questões de inequações quadráticas. Como é o caso da resposta dada no pós-teste pelo S_{12}:

Figura 50 – resposta do S_{12} no pós-teste

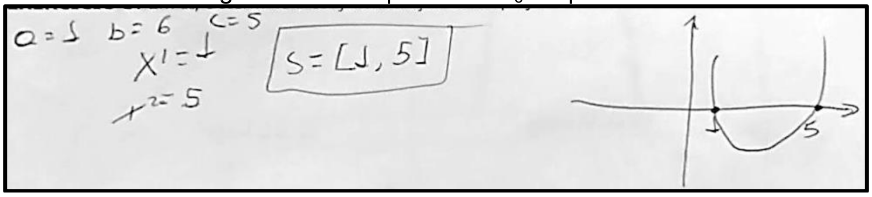


Fonte: Pesquisa de campo (2019)

O que se infere, nesse caso, é a falta de clareza no uso do símbolo na matemática quando ele substitui os colchetes por chaves. Chaves são comumente usadas para representar a solução de equações. Perceba que o sujeito constrói todas as condições para resolver o problema, porém não consegue êxito devido a erros em manipulações algébricas e essas defasagens o acompanham ao longo de sua vida escolar. Novamente, reforça-se a terna SIR, no qual o sujeito manifesta os invariantes operatórios na busca pela solução, porém a incompletude em seu sistema cognitivo não permite que conclua com êxito. A Teoria dos Campos Conceituais indica que a assimilação do conceito depende da apropriação dessa terna de elementos na ação do estudante.

Outra incompletude, observada nas respostas de S_4, S_5 e S_6, foi o uso de intervalos fechados para representar a solução.

Figura 51 – Resposta do S_6 no pós-teste

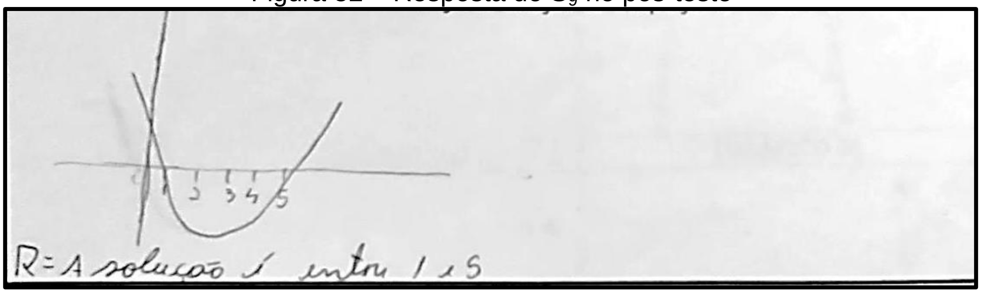


Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Especificamente nessa questão, a solução seria valores que estão entre os zeros da função, excluindo-os, ou seja, a solução para essa questão seria mais bem representada por intervalo aberto, cujos extremos seriam os zeros da função em questão. De maneira intuitiva, o S_6 exibe a solução representada pela letra S maiúscula. Contudo, falta-lhe domínio sob as representações linguísticas e simbólicas para alcançar o pleno êxito.

Todos os sujeitos constroem as condições necessárias para apresentar a solução do exercício (exceto S_3), porém nem todos apresentam a solução (algébrica, geométrica ou por extenso). O S_3 não apresentou cálculo numérico ou esboço de gráfico, apenas a solução algébrica do problema. O S_9, por sua vez, optou pela linguagem corrente para registrar a solução da inequação.

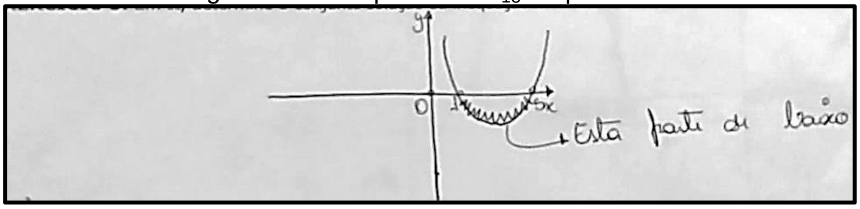
Figura 52 – Resposta do S_9 no pós-teste



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Semelhante acontece com S_{14} que afirma, por meio de linguagem corrente, que a imagem negativa está entre as raízes. Naturalmente, tratamos essas respostas como corretas, por entender que o estudante assimilou o conteúdo, embora algumas lacunas em aprendizagens anteriores o impeça de obter pleno sucesso em sua resposta. Similar, também, ocorre com S_{13}. Portanto, a incompletude da terna SIR, no qual R (conjunto das representações linguísticas e simbólicas) ainda não é dominado pelos sujeitos para que, de fato, o conceito possa a ser considerado dominado.

Figura 53 – Resposta do S_{13} no pós-teste



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Tal erro foi mencionado no item (B) do exercício 3, no qual acredita-se que o sujeito compreendeu, em algum momento de sua vida escolar, de forma equivocada o conceito de domínio e imagem da função. Todavia, notavelmente, assimilou o que lhe fora ensinado através da sequência didática, isto é, apresentou estruturas de resolução e a solução da questão. Por essa razão, consideramos sua resolução correta. Recorda-se a Teoria que está fundamentando essa pesquisa, no qual não estamos a julgar apenas o dueto certo/errado e, sim, verificar o trabalho matemático dos estudantes, aferindo os invariantes operatórios que eles manifestam.

Deve ficar claro que os sujeitos, cuja correção foi considerada parcialmente correta, apresentaram as condições necessárias para resolver integralmente a inequação quadrática, mas não explicitaram a solução. Aqueles sujeitos que, além disso, exibiram a solução (algébrica, geométrica ou por extenso) da inequação, foram incluídos na categoria de questão correta. Portanto, de acordo com o quadro 19, houve mudanças positivas, no trato do exercício 5, quando se compara os resultados do pré-teste com os do pós-teste.

No que diz respeito ao desempenho, foi observado avanço em todos os sujeitos, exceto nos sujeitos S_7 e S_{10}, identificados como sem movimentação. Não foi registrado regressão para nenhum sujeito.

- Exercício 6

O último exercício do teste é uma situação-problema. Este exercício exigia do estudante, além da interpretação, conhecimentos e manipulações algébricas a fim de encontrar a inequação quadrática, que levaria a solução, e resolvê-la. Esse exercício releva, de fato, o que concerne a Teoria dos Campos Conceituais, uma vez que Campo Conceitual é entendido como um conjunto de situações que exigem o domínio de vários conceitos, métodos e representação de natureza distinta, porém relacionados entre si. Tal definição foi abordada na elaboração da atividade de ensino 4 da SD e testada nesse exercício do teste de verificação.

Figura 54 – Exercício 6 do teste de verificação

EXERCÍCIO 6: O lucro mensal L de uma empresa é dada pela função $L(x) = -x^2 + 25x - 10$, onde x é a quantidade mensal vendida, em reais. Entre quais valores deve variar x para que o lucro mensal seja no mínimo 90?

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

O quadro a seguir demonstra as respostas dadas pelos sujeitos.

Quadro 20 – Respostas do exercício 6

	Pré-teste	Pós-teste
Sem resposta	S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}	S_3, S_7, S_{10}
Resposta sem sentido		
Incorreto	S_6, S_{13}, S_{14}	S_4
Parcialmente correto		S_1, S_2, S_8, S_{11}
Correto		S_5, S_6, S_9, S_{12}, S_{13}, S_{14}

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Nesse exercício, adotamos, no pós-teste, um protocolo para corrigi-los de maneira a ser menos desigual possível, considerando que estamos buscando valorizar o trabalho matemático do estudante. Assim, dividimos em etapas: (1) interpretação da situação-problema; (2) cálculo dos zeros da função; (3) esboço do gráfico e (4) exibição da solução do problema. O quadro a seguir mostra quais etapas foram cumpridas pelos sujeitos, não considerando, a princípio, se estão corretas ou não.

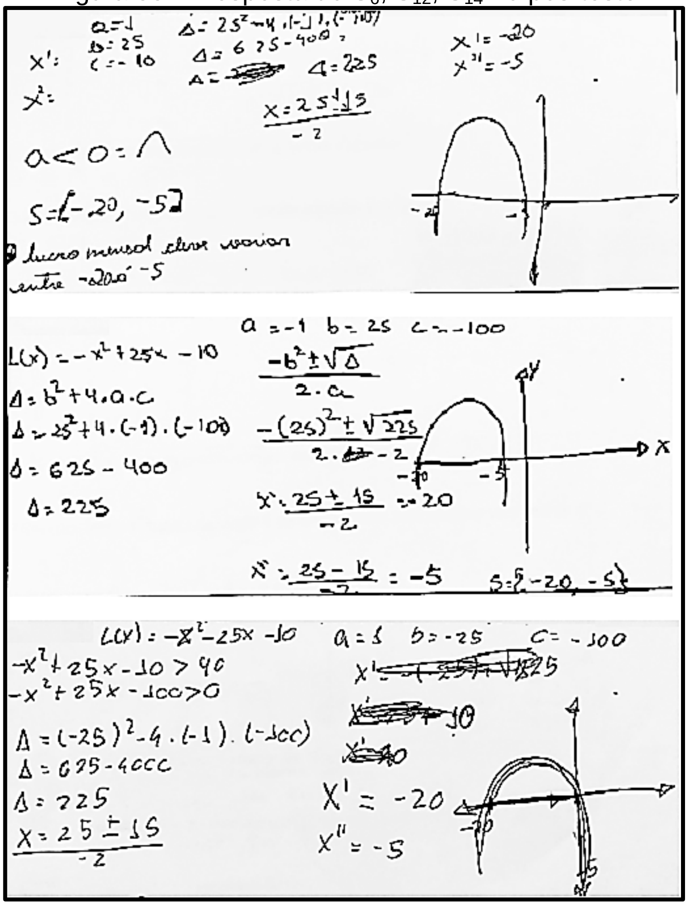
Quadro 21 – Etapas de correção do exercício 6

	Etapas			
	1	2	3	4
S_1	SIM	SIM	SIM	NÃO
S_2	SIM	SIM	SIM	NÃO
S_3	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO
S_4	SIM	SIM	NÃO	NÃO
S_5	SIM	SIM	SIM	SIM
S_6	SIM	SIM	SIM	SIM
S_7	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO
S_8	SIM	SIM	SIM	NÃO
S_9	SIM	SIM	SIM	SIM
S_{10}	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO
S_{11}	SIM	SIM	SIM	NÃO
S_{12}	SIM	SIM	SIM	SIM
S_{13}	SIM	SIM	SIM	SIM
S_{14}	SIM	SIM	SIM	SIM

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Esclareceremos alguns pontos. Em relação a etapa 2, embora, as respostas dos sujeitos 1, 2, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13 e 14 tenham sido consideradas corretas ou parcialmente corretas, não foi identificado nenhum cálculo exato para determinar os zeros da função. A inequação que precisaria ser resolvida, após a interpretação do problema, é $-x^2 + 25x - 100 > 0$. Logo, os sujeitos deveriam encontrar 5 e 20 como zeros da função.

Figura 55 – Resposta do S_6, S_{12}, S_{14} no pós-teste



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

De maneira unânime, os sujeitos encontraram -20 e -5 como zeros. Assim, observando as respostas desses sujeitos, identificamos erro no trato das regras de sinal e no uso da fórmula resolutiva de equação do 2ª grau. O questionamento que deve gerar dúvida é o porquê, então, a solução desses sujeitos foi caracterizada como corretas ou parcialmente corretas. Esclarecemos que nosso objeto de estudo é a inequação quadrática e, concordamos com Vergnaud, que não é apenas a resolução do problema que interessa, mas o modo pelo qual o estudante o resolve. Dessa forma, julgamos a aprendizagem dos sujeitos olhando para tal objeto; defasagens e lapsos de conhecimentos são comuns e não se pode fazer delas um fator determinante para se anular todo o trabalho matemático do sujeito. O que interessa, também, para essa análise é observar as relações matemáticas que são manifestadas pelos estudantes para resolver a situação proposta.

No que diz respeito ao desempenho, foi observado avanço em todos os sujeitos, exceto nos sujeitos S_3, S_7 e S_{10}, identificados como sem movimentação. Não foi registrado regressão para nenhum sujeito.

Os dois quadros a seguir exibem a correção, por exercício, dos testes de cada estudante e sintetizam a análise feita até aqui no trato desses seis exercícios, fornecendo ao leitor um panorama do desempenho dos estudantes.

Quadro 22 – Síntese da correção do teste de verificação

	Intervalos numéricos				Análise de gráficos de funções quadráticas						Função quadrática				Inequações quadráticas					
	EX 1 – (A)		EX 1 – (B)		EX 2 – (A)		EX 2 – (B)		EX 2 – (C)		EX 3 – (A)		EX 3 – (B)		EX 4		EX 5		EX 6	
	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
S01																				
S02																				
S03																				
S04																				
S05																				
S06																				
S07																				
S08																				
S09																				
S10																				
S11																				
S12																				
S13																				
S14																				

Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Quadro 23 – Síntese do desempenho dos estudantes por exercício

	Intervalos numéricos		Análise de gráficos de funções quadráticas			Função quadrática		Inequações quadráticas		
	EX 1 – (A)	EX 1 – (B)	EX 2 – (A)	EX 2 – (B)	EX 2 – (C)	EX 3 – (A)	EX 3 – (B)	EX 4	EX 5	EX 6
S01	AVANÇO	AVANÇO	SEM MOV	SEM MOV	AVANÇO	SEM MOV	AVANÇO	SEM MOV	AVANÇO	AVANÇO
S02	SEM MOV	AVANÇO	SEM MOV	REGRES	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO
S03	SEM MOV	SEM MOV	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	SEM MOV	AVANÇO	AVANÇO	SEM MOV
S04	SEM MOV	AVANÇO	SEM MOV	REGRES	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO
S05	SEM MOV	AVANÇO	SEM MOV	SEM MOV	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	SEM MOV	AVANÇO	AVANÇO
S06	AVANÇO	AVANÇO	SEM MOV	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO
S07	REGRES	SEM MOV	AVANÇO	SEM MOV	AVANÇO	AVANÇO	SEM MOV	AVANÇO	SEM MOV	SEM MOV
S08	AVANÇO	AVANÇO	SEM MOV	SEM MOV	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO
S09	AVANÇO	SEM MOV	SEM MOV	SEM MOV	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	SEM MOV	AVANÇO	AVANÇO
S10	SEM MOV	REGRES	SEM MOV	SEM MOV	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	SEM MOV	SEM MOV
S11	SEM MOV	SEM MOV	AVANÇO	SEM MOV	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO
S12	REGRES	REGRES	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO
S13	SEM MOV	SEM MOV	AVANÇO	SEM MOV	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO
S14	SEM MOV	AVANÇO	SEM MOV	SEM MOV	SEM MOV	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO	AVANÇO

Fonte: elaborar pelo autor (2020)

Com esta análise, observa-se que houve uma mudança positiva na conduta dos estudantes, isto é, eles mostraram mais interesse na tentativa de resolver as questões. Fato, comprovado quando olhamos a queda no número de questões deixadas em branco e o número de avanços observados. Além das análises apresentadas, avaliou-se, de maneira geral, cada um dos sujeitos, de acordo com o desempenho nos testes.

Tabela 2 – Panorama do desempenho de cada sujeito em relação ao total das questões

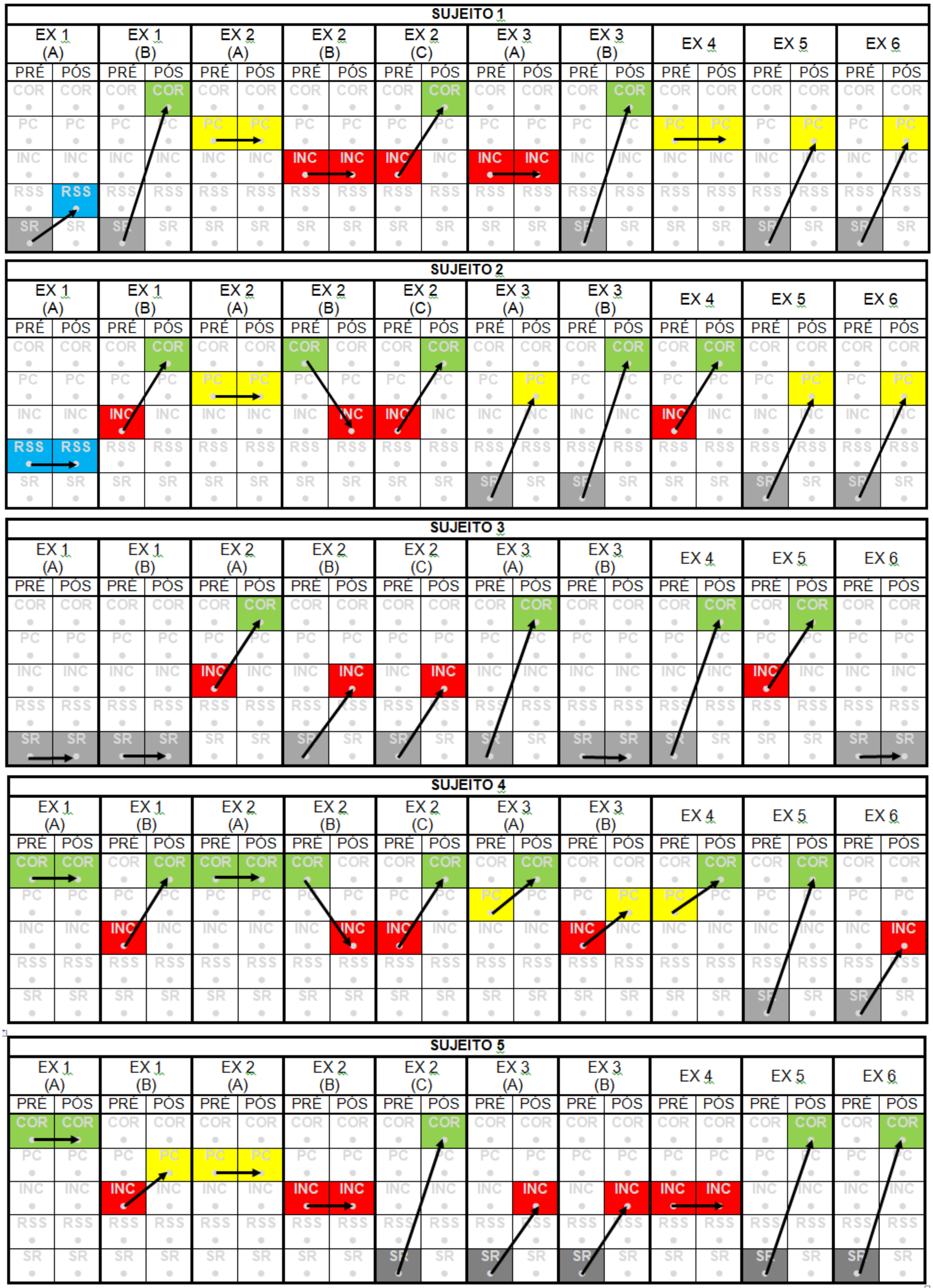
	AVANÇO	SEM MOVIMENTO	REGRESSÃO
S_1	6	4	0
S_2	7	2	1
S_3	6	4	0
S_4	7	2	1
S_5	6	4	0
S_6	9	1	0
S_7	4	5	1
S_8	8	2	0
S_9	6	4	0
S_{10}	4	5	1
S_{11}	7	3	0
S_{12}	8	0	2
S_{13}	7	3	0
S_{14}	6	4	0

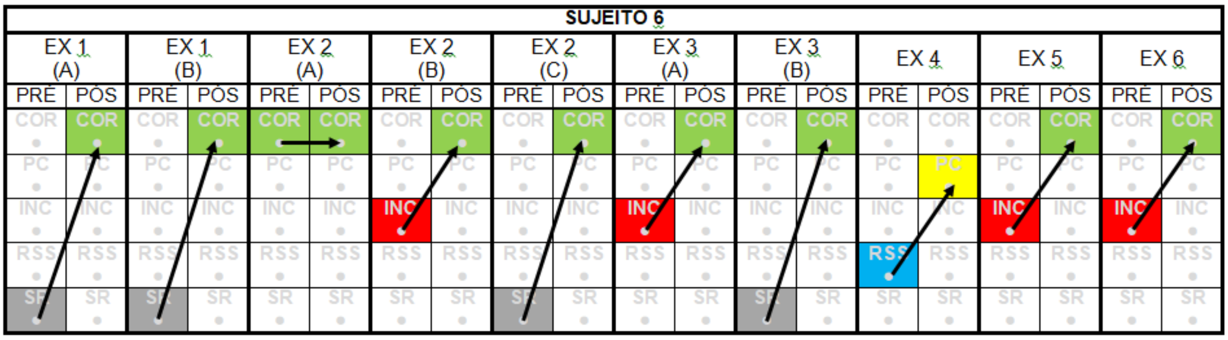
Fonte: elaborado pelo autor (2020)

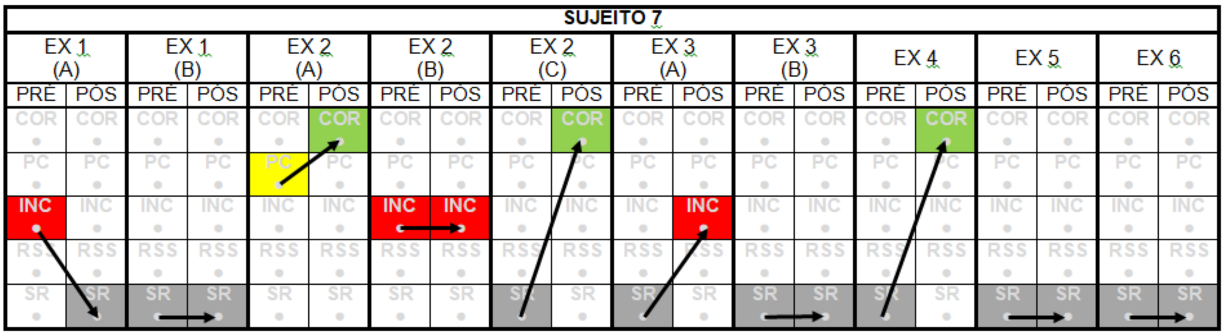
Observando a tabela, nota-se que em relação ao desempenho dos estudantes obtemos resultados favoráveis com a aplicação da SD, pois os dados obtidos indicam evolução positiva no sistema cognitivo dos 14 sujeitos investigados. Além disso, acreditamos que tais benefícios se estendem aos demais estudantes que participaram da aplicação das atividades de ensino.

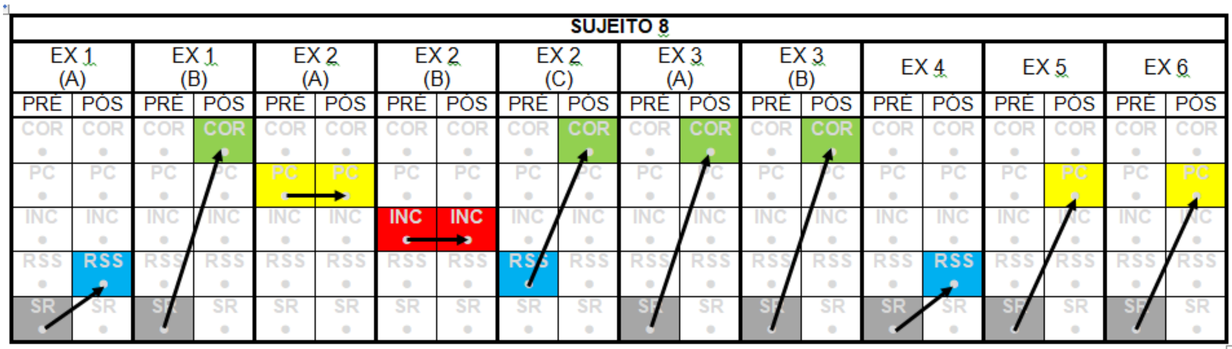
O quadro a seguir, apresenta a evolução do sistema cognitivo dos 14 sujeitos do pré-teste ao pós-teste, por exercício, onde setas crescentes indicam avanço e as decrescentes, regressão. As setas constantes indicam que não foi observada movimentação cognitiva. As cores irão seguir a sequência estabelecida no quadro 10 apresentado na página 81.

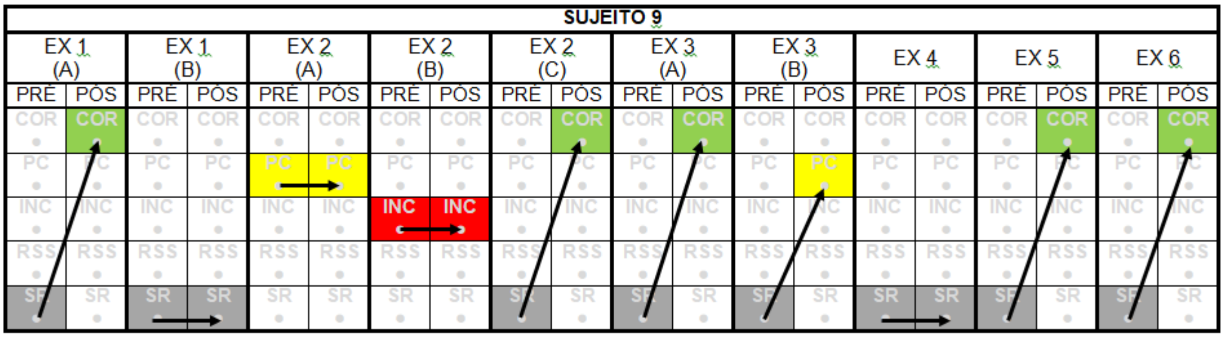
Quadro 24 – Evolução cognitiva dos 14 sujeitos por exercício

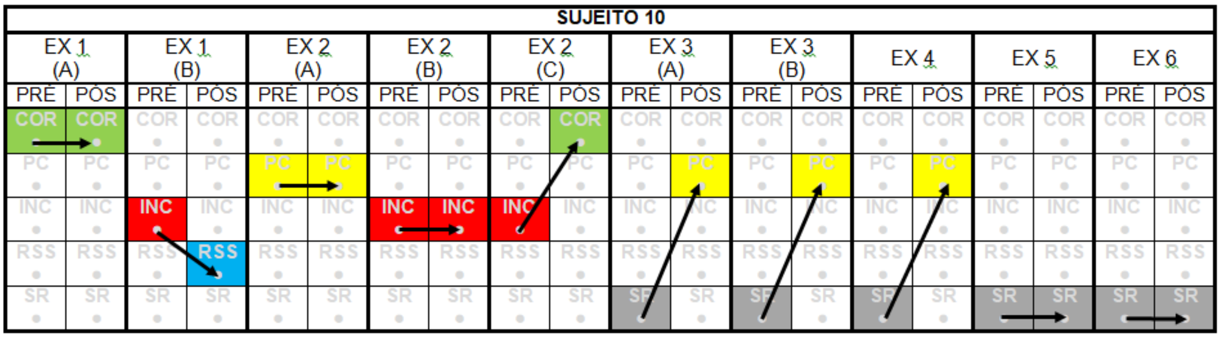


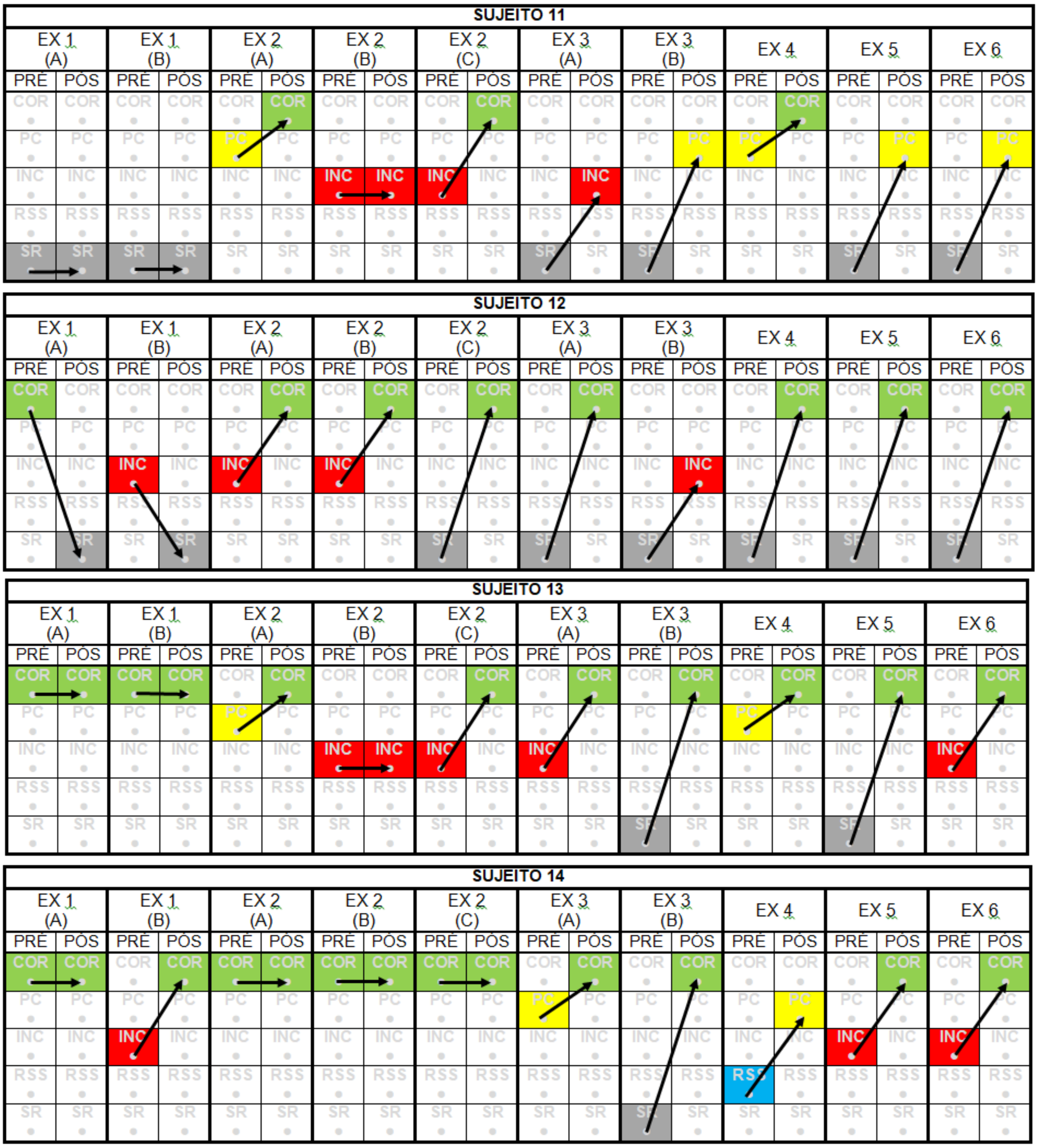

SUJEITO 6
EX 1 (A)
EX 1 (B)
EX 2 (A)
EX 2 (B)
EX 2 (C)
EX 3 (A)
EX 3 (B)
EX 4
EX 5
EX 6
PRÉ
PÓS
COR
PC
INC
RSS
SR


SUJEITO 7
EX 1 (A)
EX 1 (B)
EX 2 (A)
EX 2 (B)
EX 2 (C)
EX 3 (A)
EX 3 (B)
EX 4
EX 5
EX 6
PRÉ
PÓS
COR
PC
INC
RSS
SR


SUJEITO 8
EX 1 (A)
EX 1 (B)
EX 2 (A)
EX 2 (B)
EX 2 (C)
EX 3 (A)
EX 3 (B)
EX 4
EX 5
EX 6
PRÉ
PÓS
COR
PC
INC
RSS
SR


SUJEITO 9
EX 1 (A)
EX 1 (B)
EX 2 (A)
EX 2 (B)
EX 2 (C)
EX 3 (A)
EX 3 (B)
EX 4
EX 5
EX 6
PRÉ
PÓS
COR
PC
INC
RSS
SR


SUJEITO 10
EX 1 (A)
EX 1 (B)
EX 2 (A)
EX 2 (B)
EX 2 (C)
EX 3 (A)
EX 3 (B)
EX 4
EX 5
EX 6
PRÉ
PÓS
COR
PC
INC
RSS
SR



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Alguns pontos merecem ponderação sobre cada sujeito, a respeito das inferências feitas sobre a evolução do sistema cognitivo de cada um. Como sinalizamos, nossa maneira de avaliar é sensível ao trabalho matemático do estudante, isto é, abandonamos a forma de avaliar apenas pela observância da dupla certo/errado. Nossa análise teve o interesse de observar a evolução do sistema cognitivo dos estudantes, a forma que eles assimilam determinados conceitos e os invariantes operatórios que lançam mão na busca pela solução.

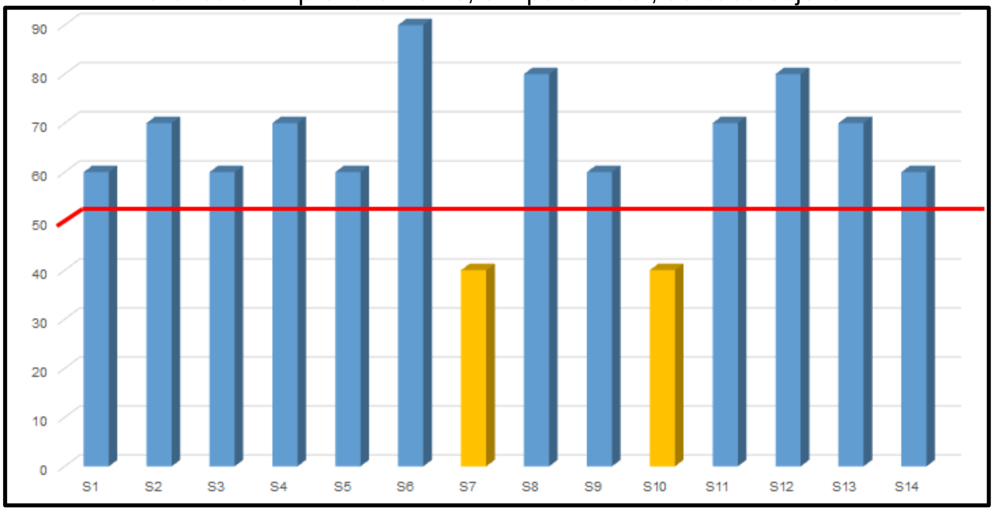
Portanto, não se pode debruçar sobre isso, sem que mudemos nossa perspectiva de avaliação.

O S_1 obteve avanço cognitivo no item (A) do exercício 1. Observa-se que nessa tarefa, ele moveu de sem resposta (SR) no pré-teste para resposta sem sentido (RSS) no pós-teste. Todavia, consideramos avanço porque, como já foi frisado, nosso olhar é mais sensível ao trabalho matemático dos estudantes. Dessa forma, ponderamos que este sujeito, no pós-teste, tentou apresentar uma solução, embora não fosse correta. De forma análoga, acontece com S_3 no item (B) e (C) do exercício 2; S_4 no exercício 6; S_5 nos itens do exercício 3; S_7 no item (A) do exercício 3; S_8 no item (A) do exercício 1 e exercício 4; S_{11} item (A) do exercício 3 e S_{12} no item (B) do exercício 3.

O S_1 não apresentou movimento cognitivo no item (A) do exercício 2 e no exercício 4. Contudo, não há prejuízos em seu sistema cognitivo, considerando que sua resolução, em cada questão, foi considerada, no pré e no pós, como parcialmente correta. O mesmo ocorre com S_2, S_5, S_6, S_8, S_9 e S_{10} no item (A) do exercício 2; S_{13} nos itens do exercício 1 e S_{14} no item (A) do exercício 1 e 2, item (B) e (C) do exercício 2. Os sujeitos S_6, S_{13} e S_{14} tiveram suas soluções consideradas corretas, em ambos os testes.

O aproveitamento que cada sujeito obteve também é passível de análise. Calculamos esse aproveitamento por meio da razão do número de avanços pelo número total de questões do pós-teste e consideramos como bom, um aproveitamento maior ou igual a 50%.

Gráfico 3 – Aproveitamento, em percentual, de cada sujeito.



Fonte: Elaborado pelo Autor (2020)

Portanto, conclui-se, que nessas condições, apenas os sujeitos S_7 e S_{10}, que obtiveram aproveitamento igual a 40%, ficaram abaixo do estabelecido.

Após a aplicação da SD, conseguimos um grande quantitativo de avanços. Por outro lado, também de forma positiva, é pequeno o número de regressões observadas. Baseados em todas essas análises, podemos afirmar que obtivemos mais respostas favoráveis do que desfavoráveis; o que nos fornece um indicativo de que, possivelmente, houve aprendizagem. Inferimos, portanto, que a aplicação da sequência de atividades propostas, além de ter contribuído na aquisição de conhecimentos e assimilação de conceitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem das inequações quadráticas, incentivou o interesse dos estudantes na busca pelas soluções das questões propostas. É importante salientar que Vergnaud afirma que alguns sujeitos não aprendem de forma instantânea; alguns levam dias, meses... para assimilar conceitos e, não obstante, com uma diferença de três dias da aplicação da última atividade para o pós-teste, conseguimos observar resultados favoráveis, embora não consolidados. Um fator importante, que merece ser destacado, é que conseguimos mostrar um movimento significativo na direção da consolidação do conceito de inequações quadráticas, ainda que pouco desenvolvido no que diz respeito à representação do conceito de forma linguisticamente correto do ponto de vista da linguagem matemática, como afirma Vergnaud na sua definição de um conceito.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O último capítulo consiste nas considerações finais acerca da pesquisa desenvolvida. Essa investigação teve o objetivo de desenvolver uma sequência didática que sensibilizasse o sistema cognitivo de estudantes para a compreensão do conceito de inequação quadrática, sobretudo avaliar os efeitos dessa aplicação, procurando investigar quais conhecimentos e estratégias os estudantes mobilizam na busca por soluções em situações matemáticas que envolvem inequações quadráticas. Por meio dela, obtiveram-se resultados e reflexões sobre o processo de ensino e de aprendizagem, inclusive o processo avaliativo desse conhecimento matemático. Nesse sentido, buscou-se responder a questão de pesquisa: a sequência didática desenvolvida sensibilizará o sistema cognitivo dos estudantes de modo a favorecer a assimilação do conceito de inequações quadráticas?

A inequação quadrática é um relevante conhecimento matemático. Sua aplicabilidade é vasta, inclusive em áreas como economia, engenharia e, naturalmente, na própria matemática. Este conteúdo foi delegado por indicação do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática ofertado pela Universidade do Estado do Pará, no qual a principal motivação que concebeu essa pesquisa foi à contribuição à academia devido as escassas pesquisas experimentais nessa área, constatadas pela revisão de literatura. A resolução de uma inequação quadrática auxilia em diversas situações reais, como foram apontadas nessa pesquisa. Portanto, pensou-se num capítulo cuja finalidade foi oferecer uma perspectiva matemática sobre as inequações e os conhecimentos necessários para esse estudo. Tal abordagem gerou contribuição, reflexão e suporte aos educadores. Contribuição, pois tais informações podem contribuir com a formação inicial e continuada; reflexiva, pois permite uma releitura do processo de ensino e avaliativo das inequações quadráticas e, por fim, de suporte para auxiliar na aplicação da SD.

A Teoria dos Campos Conceituais embasou essa pesquisa. Ela postula que a apropriação e compreensão de um conceito dependem da terna **SIR**, sendo **S** o conjunto de situações que dão sentido ao conceito, **I** o conjunto dos invariantes operatórios mobilizados pelo sujeito e **R** o conjunto das representações linguísticas e simbólicas. Além disso, para Vergnaud, não é apenas a resolução de um problema que interessa, mas o modo pelo qual os estudantes o resolvem. Nesse sentido, buscou-se valorizar o trabalho matemático dos estudantes, apreciando seus erros, acertos e estratégias, considerando que, de acordo com Vergnaud, cada indivíduo tem seu tempo de aprender. Assim, desenvolvemos um conjunto de tarefas com a finalidade de observar e analisar baseando-se na Teoria dos Campos Conceituais.

Paralelo à questão norteadora e ao objetivo geral, encontram-se os objetivos específicos e os procedimentos metodológicos. Os objetivos específicos consistem na investigação dos invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes na busca pela solução em situações matemáticas; verificação da potencialidade da SD e se houve favorecimento da aprendizagem por meio da interação social em grupos cooperativos. Além disso, sugere-se um sistema avaliativo compatível com a SD e que revela a Teoria dos Campos Conceituais.

Como procedimento metodológico se adotou o que avaliamos mais adequado segundo a Teoria dos Campos Conceituais. Os estudos de Vygotsky sobre interação social embasou a estratégia de formação das equipes, onde, por meio do resultado do pré-teste, identificou-se oito sujeitos com maiores potencialidades e estes formaram as oito equipes, selecionando os demais colegas. Esta estratégia garantiu que a interação ocorresse, em cada equipe, com este sujeito com maior potencial de aprendizagem. Outra socialização ocorreu entre as equipe ao final de cada atividade de ensino, onde cada equipe expos suas observações e conclusões. Esse procedimento acarretou resultados favoráveis, pois houve colaboração mútua entre os estudantes das equipes e entre as equipes, além de possibilitar a formalização do conceito ensinado. O ensino por atividade de redescoberta, conforme Sá, embasou duas, das quatro, atividades de ensino. Optou-se por esse método por ele se basear no princípio da ação preceder os conceitos.

Um levantamento de pesquisas, no qual constitui a revisão de literatura abordando o processo de ensino e aprendizagem das inequações quadráticas em diversos níveis, permitiu ter conhecimento de metodologias e dificuldades encontradas no processo de ensino. As tarefas que compõem a SD emergiram a partir dessa análise inicial. Tal sequência foi desenvolvida de modo a favorecer a aprendizagem de estudantes do 1ª ano do ensino médio do trato das inequações quadrática, cuja aplicação ocorreu no último bimestre do ano de 2019 com 24 estudantes em uma escola da rede Pública de Ensino. A SD é composta por um teste de verificação de aprendizagem e quatro atividades de ensino. O teste de verificação é formado por 6 exercícios no qual os principais objetivos foram identificar os estudantes com maiores potencialidades de aprendizagem, levando em consideração sua bagagem cognitiva e prover informações e dados para análise quantitativa e qualitativa dessa pesquisa. Esse teste foi aplicado em dois momentos: antes das atividades de ensino (pré-teste) e depois (pós-teste). A análise quantitativa deu-se por comparação dos resultados obtidos com a aplicação do teste nos dois momentos. Por outro lado, a qualitativa, por investigação das respostas dadas pelos estudantes em ambos os testes. Esse procedimento permitiu a verificação da potencialidade e efeito das quatro atividades de ensino. Dessa forma, não se avaliou o processo, mas o antes e depois dele, e isso, por sua vez, relevou o potencial do produto.

As quatro atividades de ensino foram elaboradas com o intuito de provocar a manifestação dos invariantes operatórios dos estudantes e, dessa maneira, pudesse ser analisado o trabalho matemático deles, em detrimento do dueto certo/errado. A primeira atividade de ensino, cujo objetivo foi conduzir o estudante ao reconhecimento da expressão analítica de uma inequação quadrática, comprovou que não é necessária a imposição do conteúdo para haver aprendizagem, isto é, os estudantes reconheceram, primeiramente de maneira intuitiva, a expressão analítica da inequação quadrática e posteriormente formalizou-se matematicamente o conceito, a partir da socialização das equipes. Na segunda e terceira atividade de ensino, baseadas no ensino por redescoberta, as equipes conseguiram perceber a regularidade e atingir os objetivos da atividade, revelando que é possível que a ação preceda a conceitualização. A quarta atividade de ensino, cujo objetivo foi determinar o intervalo solução a partir de uma situação-problema, relevou que os estudantes assimilaram com êxito os conceitos ensinados nas atividades anteriores, embora não consolidados, segundo a terna SIR. Verificou-se, também, o uso de vários registros para representar a solução do problema; o estudante não percebe que uma solução é representada utilizando linguagem algébrica, geométrica ou por extenso, levando-os a utilizarem mais de um registro para a mesma representação da solução, tratando esses registros como complementos da resolução.

Alguns resultados relevados nessa pesquisa corroboram com os expostos na revisão de literatura, tais como o desprezo pelo uso da linguagem matemática e defasagens de conhecimentos de anos anteriores que impossibilitam o aprendizado de novos conceitos. Com a análise dos dados obtidos com essa pesquisa, constatou-se que alguns estudantes não estabelecem distinção entre objetos matemáticos. O que faz acreditar que o ensino de inequações esteja sendo proposto como complemento ao ensino de equações, conduzindo os estudantes a um processo de resolução indutivo. Além disso, notou-se uma preocupação e cuidado, por parte dos estudantes, pela resposta final dos exercícios. Este fato é suficiente para refletirmos sobre o processo de ensino das inequações e da própria Matemática, no qual é sabido que um ensino com ausência de significado e sem levar em consideração o trabalho matemático dos estudantes acarreta em problemas sérios como processos avaliativos ineficazes e injustos, defasagens em conhecimentos importantes e desprezo pela matemática, cujo ensino é importante para formação do cidadão.

Ainda sobre os resultados, percebeu-se que os estudantes constroem as condições para resolver o problema, porém não o resolvem em sua totalidade, pois há incompletude em sua bagagem cognitiva oriundo principalmente de defasagens de conhecimentos. Segundo a Teoria dos Campos Conceituais, a assimilação, apropriação e compreensão ocorrem com o domínio da terna SIR e para alguns sujeitos isso necessita de tempo. Todavia, os resultados apresentados leva a crê que houve ampliação do campo conceitual dos estudantes, pois os invariantes operatórios manifestados revelaram que eles tratam bem as informações que possuem. Se estiverem corretas ou não, cabe a nós educadores tal investigação. E isso ocorre quando somos sensíveis ao trabalho matemático deles, sobretudo no processo avaliativo.

Diante dos resultados, considera-se alcançado os objetivos da pesquisa e respondido a questão de pesquisa, isto é, a sequência didática desenvolvida sensibilizou o sistema cognitivo dos estudantes e favoreceu a compreensão do conceito de inequações quadráticas. Além disso, observou-se mais interesse pela aula com o uso da metodologia escolhida, no qual os estudantes participaram mais ativamente do processo, deixando a timidez de lado e expondo suas conclusões no momento da socialização. Tais fatos são comprovados quando se observa a queda no índice de questões deixadas em branco e no aumento de avanços cognitivos obtidos. Esses aspectos permitiram ratificar a potencialidade da SD. Portanto, essa SD é potencialmente favorável para o ensino.

Como desdobramentos a futuras pesquisas, sugere-se que seja reaplicada a SD e analisado os movimentos horizontais, segundo o quadro de evolução do sistema cognitivo dos estudantes, isto é, aqueles desempenhos classificados como ‘sem movimentação cognitiva’. Ou ainda, a reaplicação das atividades tendo em vista a verificação dos resultados apresentados nessa pesquisa e o aprofundamento da Teoria dos Campos Conceituais para o enriquecimento do processo de ensino e avaliativo, bem como desenvolvimento de novas pesquisas embasadas por ela. Que essa pesquisa estimule os professores a atentarem ao trabalho matemático de seus alunos, verificando seus erros e acertos, seus avanços e regressões, abandonando suas correções, análises e avaliações apenas ao dueto certo/errado, pois concorre para que o estudante desenvolva atitudes negativas para com a matemática, e estas podem ser determinantes na vida escolar, pessoal e profissional dele. Portanto, esperamos que a SD e a metodologia adotada nessa pesquisa que revela ser uma alternativa para o ensino possa inspirar e auxiliar docentes e pesquisadores em seu labor, contribuindo e enriquecendo-o, sobretudo que motive dando-lhe novas ideias a fim de proporcionar resultados favoráveis.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da Matemática.** Curitiba: UFPR, 2007.

BELTRÃO, Rinaldo César. Dificuldades dos alunos para resolver problemas com inequações. **REVEMAT,** Florianópolis, v. 05, n. 1, 2010, p. 84-95.

BINI, Márcia B. **Atividades interativas como geradoras de situações no campo conceitual da Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação em ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008.

BITTAR, Marilena. MUNIZ, Cristiano A. **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** 1 ed. Curitiba: Editora CRV, 2009.

CABRAL, N. F. **Sequências didáticas:** estrutura e elaboração. Pará: SBEM, 2017.

CARVALHO JR, Gabriel Dias de. Os campos conceituais de Vergnaud como ferramenta para o planejamento didático. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física** - UFSC. v.25, n.2, p.207-227, agosto, 2008.

COELHO, Luana. PISONI, Silene. Vygotsky: sua teoria e a influência na educação. **Revista e-Ped**, Osório, v. 2, n. 1, agosto, 2012. p. 144-152.

D’AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática.** Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. 452p

DIAS, Regina A. Xavier Gomes. **Análise do conhecimento de professores sobre o ensino de inequações.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2014.

FONTALVA, Gerson Martins. **Um estudo sobre inequações:** entre alunos do ensino médio. Dissertação (Mestrado em educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

JENSKE, Grazielle. **A teoria de Gérard Vergnaud como aporte para a superação da defasagem de aprendizagem de conteúdo básicos da matemática:** um estudo de caso. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2011.

LEONARDO, Fabio M. de. (Ed). **Conexões com a matemática**. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LURIA, A.R. Vigostskii. In: VIGOTSKII, L.S. LURIA, A.R, LEONTIEV, A.N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** Tradução de Maria da Pena Villalobos. São Paulo: ícone, 2010. p. 21-38.

MAGALHÃES, Adil Ferreira. **Estudo das inequações:** contribuições para a formação do professor de matemática na licenciatura. 2013. 127f. Dissertação (Mestrado em educação matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2013.

MELO, Marcelo de. **O ensino de desigualdades e inequações em um curso de licenciatura em Matemática.** Dissertação (Mestrado em educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2017.

MENDES, I. A; SÁ, P. F**. Matemática por atividades:** sugestões para sala de aula. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

MOREIRA, Marco. Antonio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, v.7, n.1, 2002.

MOYSÉS, Lúcia M. M. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática.** 5 ed. Campinas: Papirus editora, 2003.

NOGUEIRA, Clélia M. I. REZENDE, V. **A teoria dos campos conceituais no ensino de números irracionais:** implicações da teoria Piagetiana no ensino de Matemática. V.6, n.1, p.41-63, jan-jul, 2014.

PEREIRA, Joana Mata. PONTE, João Pedro da. **Desenvolvendo o raciocínio matemático: generalização e justificação no estudo das inequações.** BOLETIM GEPEM. n.62, jan/jul, 2013, p.17-31.

RAMOS, Maria Luísa Perdigão Diz. CURI, Edda. Erros na resolução de inequações: consequências de dificuldades relativas a conteúdos dos ensinos fundamental e médio. **Revista acta scientiae**, Canoas, v.16, n.3, set/dez, 2014, p. 457-471.

REIS, Ângela M. Martins Gonçalves Coelho. **Funções quadráticas e inequações do 2ª grau.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Trás-os-Montes e alto Douro. Vila Real, 2013.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de Matemática no nível fundamental**. Belém: EDUEPA, 2009.

SCHOENFELD, A. **Learning to think mathematically: problem solong, metacognition, and sense-making in mathematics. Handbook for research on mathematics teaching and learning.** Cap. 15. P. 334-370. New York: Mac Millian, 1992.

SILVA, Francisco Hermes Santos da. **Educação matemática:** caminhos necessários. Belém: Palheta, 2016.

SOUZA, Vera Helena Giusti de. **O uso de vários registros na resolução de inequações:** uma abordagem funcional gráfica. 2007. 307f. Tese (Doutorado em educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.

TRAVASSOS, Wilian Barbosa. PROENÇA, Marcelo Carlos de. Registros de representação semiótica e o conceito de inequação: análise do desempenho de licenciandos em matemática à luz da congruência semântica. **REVEMAT**, Florianópolis, v.13, n.2, 2018, p.162-183.

UENO, Renata. MORAES, Mara S.S. Temas político-sociais no ensino de matemática. **Ciência e Educação**, Bauru. V.13, n.2, p.223-233, 2007.

VERGNAUD, G. **La teoria de los campos conceptuales.** Recherches em Didáctique des Mathématiques, v.10, n.2, 3, p.133-170, 1990.

______, Todos perdem quando a pesquisa não é colocada em prática: depoimento. [01 de setembro, 2008]. **Revista Nova Escola.** Entrevista concedida a Gabriel Pillar Grossi. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/960/gerard-vergnaud-todos-perdem-quando-a-pesquisa-nao-e-colocada-em-pratica> Acesso: 10 nov 2018.

______, **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução: Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Editora UFPR, 2009a.

______, O que é aprender? In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org). **A aprendizagem Matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais.** Editora CRV, Curitiba, 2009b.

VIGOTSKII, L.S. Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. In: VIGOTSKII, L.S. LURIA, A.R, LEONTIEV, A.N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** Tradução de Maria da Pena Villalobos. São Paulo: ícone, 2010. p.103-117.

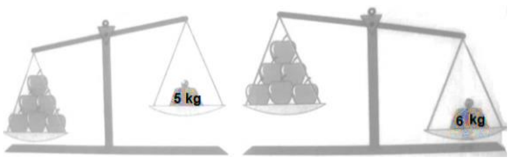
VYGOTSKI, L.S. **A formação social da mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991. 92p. (Texto digitado).

APÊNDICES

APÊNDICE A – Pré-teste e pós-teste

NOME DO DISCENTE: ____

EXERCÍCIO 1: Observe a figura a seguir:

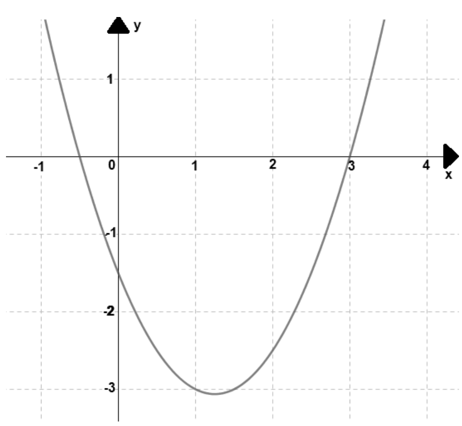
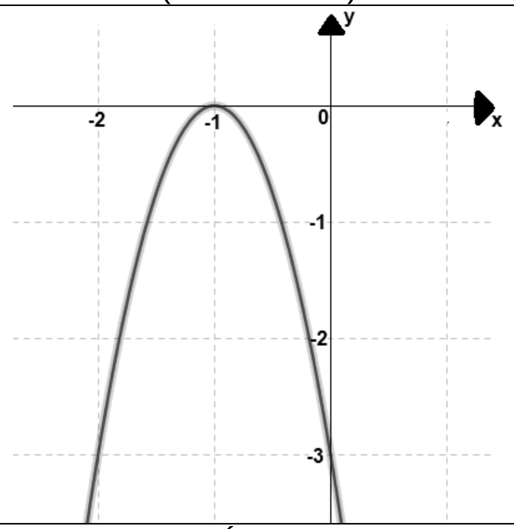
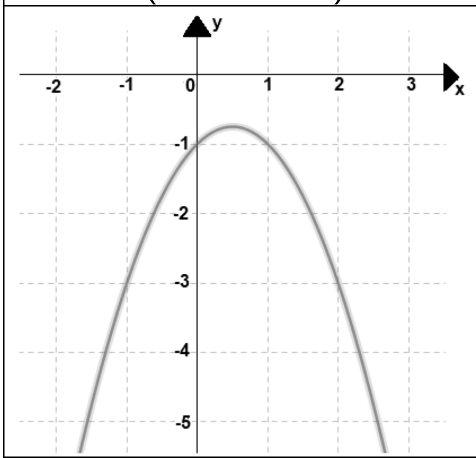
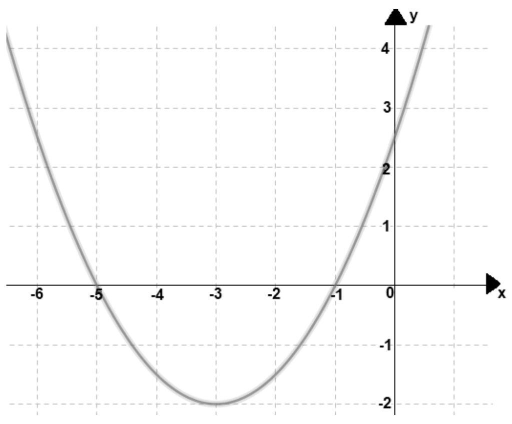


Apenas baseado nessa imagem, não há como dizer a massa exata das maçãs. Considere M a massa das maçãs, dada em quilogramas (kg).

(A) O que observa-se em relação a massa M das maçãs?

(B) Escreva o intervalo numérico que melhor representa essa situação e o represente graficamente.

EXERCÍCIO 2: Considere os gráficos a seguir:

(GRÁFICO A)	(GRÁFICO B)
	
(GRÁFICO C)	(GRÁFICO D)
	

(A) Em quais deles, o coeficiente quadrático da função é positivo?

(B) Em qual deles, a imagem da função é sempre negativa para qualquer valor real de x?

(C) Escolha um dos gráficos e identifique os zeros da função.

EXERCÍCIO 3: Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 4x$
(A) O gráfico dessa função é uma parábola com concavidade voltada para cima ou para baixo? Por quê?
(B) Em qual intervalo do domínio essa função possui imagem negativa?

EXERCÍCIO 4: Dadas as expressões a seguir, identifique apenas as inequações quadráticas.

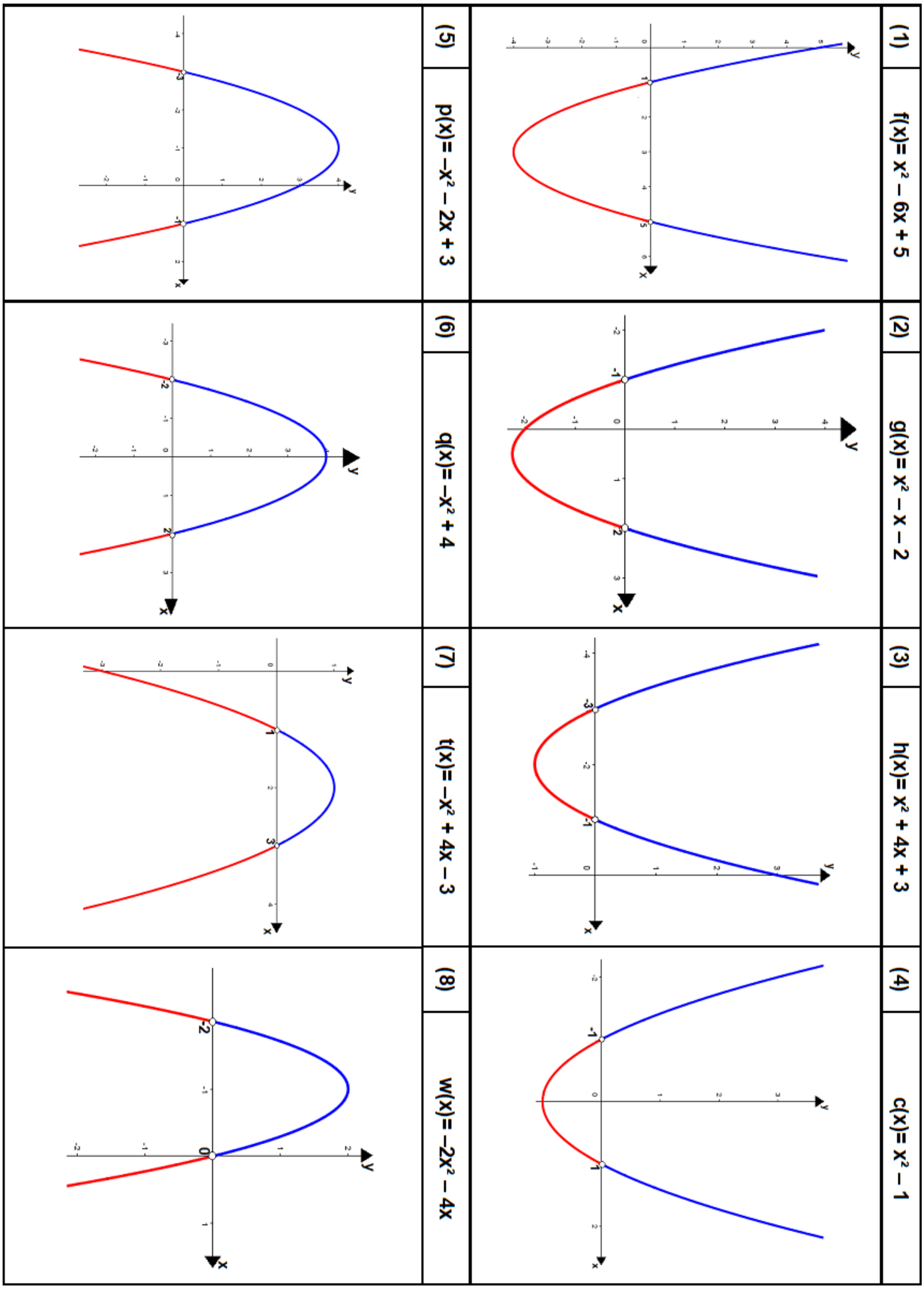
( )	$x^2 + 2x + 3 < 0$	( )	$3x + 2 > 0$	( )	$4x + 5 = 0$
( )	$x^2 + 2x \ = \ 0$	( )	$3x^2 - 6x \geq 0$	( )	$3x^2 - 4 \leq 0$

Qual critério você utilizou para essa escolha?

EXERCÍCIO 5: Em $\mathbb{R}$, determine o conjunto solução da inequação $x^2 - 6x + 5 < 0$.

EXERCÍCIO 6: O lucro mensal L de uma empresa é dada pela função $L(x) = -x^2 + 25x - 10$, onde x é a quantidade mensal vendida, em reais. Entre quais valores deve variar x para que o lucro mensal seja no mínimo 90?

APÊNDICE B – Quadro de funções quadráticas



APÊNDICE C – Roteiro de atividades da sequência didática

ATIVIDADE DE ENSINO I - Reconhecendo as inequações quadráticas

OBJETIVO: Identificar as expressões algébricas das inequações quadráticas.

MATERIAL: roteiro da atividade, papel e caneta preta.

EQUIPE: _____

PROCEDIMENTOS:

- Observe o quadro a seguir composto por 15 (quinze) inequações que estão nomeadas de A a O.
- Divida essas inequações em 5 (cinco) grupos, onde cada grupo deve ser formado por apenas 3 (três) inequações;
- Não pode haver uma mesma inequação em grupos diferentes;
- Escolha um critério para essa divisão, lembrando que o critério é único em cada grupo;

(A)	$3x - 4 < 0$	**(F)**	$-x^2 - 6x + 1 \leq 0$	**(K)**	$x^3 + x^2 + 2x \geq 1$
(B)	$-3x^4 + x^2 + 4 \geq 0$	**(G)**	$\sqrt{x+1} > 0$	**(L)**	$-1 + x > 2x$
(C)	$x^4 + 2x^2 < 0$	**(H)**	$x^3 - 5x + 4 < 0$	**(M)**	$x^2 + 8 > 0$
(D)	$\sqrt{-x+8} \geq 0$	**(I)**	$x^2 + 4x > 0$	**(N)**	$-x + 10 \geq 0$
(E)	$2x^3 + 1 < 0$	**(J)**	$x^4 - 1 \leq 80$	**(O)**	$\sqrt{2x} - 1 \leq 0$

GRUPO 1	**CRITÉRIO:**

GRUPO 2	**CRITÉRIO:**

GRUPO 3	**CRITÉRIO:**

GRUPO 4	**CRITÉRIO:**

GRUPO 5	**CRITÉRIO:**

SOCIALIZAÇÃO:

ATIVIDADE DE ENSINO II - Concavidade da Parábola

OBJETIVO: Descobrir uma relação entre o coeficiente quadrático e a concavidade do gráfico da função quadrática.

MATERIAL: roteiro da atividade, quadro com gráficos, papel e caneta preta.

EQUIPE: _____

PROCEDIMENTOS: Você receberá um quadro com 8 (oito) funções quadráticas e seus gráficos.

- Em cada função, identifique o sinal do coeficiente quadrático;
- Em cada gráfico, identifique a direção da concavidade do gráfico;
- Com as informações obtidas, preencha o quadro a seguir.

FUNÇÃO		QUAL O SINAL DO COEFICIENTE QUADRÁTICO?		A PARÁBOLA TEM CONCAVIDADE VOLTADA PARA:	
		POSITIVO	NEGATIVO	CIMA	BAIXO
(1)					
(2)					
(3)					
(4)					
(5)					
(6)					
(7)					
(8)					

CONCLUSÃO DA EQUIPE:

SOCIALIZAÇÃO:

ATIVIDADE DE ENSINO III - Variação do Sinal da imagem da função quadrática **–** parte 1

OBJETIVO: Descobrir uma maneira de identificar a variação do sinal da imagem da função quadrática, a partir da expressão analítica e de seu gráfico.

MATERIAL: roteiro da atividade, quadro com gráficos, papel e caneta preta.

EQUIPE: ____

PROCEDIMENTOS: Você receberá um quadro com 8 (oito) funções quadráticas e seus gráficos. Em cada gráfico:

- Identifique os zeros da função;
- Identifique o sinal da imagem da função no intervalo determinado pelos zeros;
- Identifique o sinal do coeficiente quadrático da função;
- Com as informações obtidas, preencha o quadro a seguir.

FUNÇÃO		QUAL OS ZEROS DA FUNÇÃO?	QUAL O SINAL DA FUNÇÃO (IMAGEM) ENTRE OS ZEROS?		QUAL O SINAL DO COEFICIENTE QUADRÁTICO?	
			POSITIVO	NEGATIVO	POSITIVO	NEGATIVO
(1)						
(2)						
(3)						
(4)						
(5)						
(6)						
(7)						
(8)						

CONCLUSÃO DA EQUIPE:

SOCIALIZAÇÃO:

ATIVIDADE DE ENSINO III - Variação do Sinal da imagem da função quadrática – parte 2

OBJETIVO: Descobrir uma maneira de identificar a variação do sinal da imagem da função quadrática, a partir da expressão analítica e de seu gráfico.

MATERIAL: roteiro da atividade, quadro com gráficos, papel e caneta preta.

EQUIPE: ____

PROCEDIMENTOS: Você receberá um quadro com 8 (oito) funções quadráticas e seus gráficos. Em cada gráfico:

- Identifique os zeros da função;
- Identifique o sinal do coeficiente quadrático da função;
- Identifique o sinal da imagem da função nos intervalos diferente do intervalo determinado pelos zeros;
- Com as informações obtidas, preencha o quadro a seguir.

FUNÇÃO		QUAIS OS ZEROS DA FUNÇÃO?	QUAL O SINAL DO COEFICIENTE QUADRÁTICO?		QUAL O SINAL DA FUNÇÃO (IMAGEM) NOS INTERVALOS DIFERENTE DO INTERVALO ENTRE OS ZEROS?	
			POSITIVO	NEGATIVO	POSITIVO	NEGATIVO
(1)						
(2)						
(3)						
(4)						
(5)						
(6)						
(7)						
(8)						

CONCLUSÃO DA EQUIPE:

SOCIALIZAÇÃO:

ATIVIDADE DE ENSINO IV - Resolvendo situações-problemas

OBJETIVO: Determinar intervalos que satisfazem uma condição a partir de uma situação-problema

MATERIAL: Roteiro da atividade, papel e caneta preta.

EQUIPE: _______

QUESTÃO 01 – Desemprego sobe para 12% em janeiro e atinge 12,7 milhões. Segundo dados divulgados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a taxa de desemprego no Brasil aumentou para 12% em janeiro, atingindo 12,7 milhões de pessoas. Esse número é o maior registrado pelo Instituto desde agosto de 2018. O Instituto Brasileiro afirma ainda que chegam a 23,9 milhões o número de trabalhadores autônomos.

Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2019/02/27/desemprego-sobe-para-12-em-janeiro-diz-ibge.ghtml.
Acesso: 16 mar. 2019.(Adaptado)

Nesse cenário atual, muitas pessoas buscam formas alternativas para conseguir uma renda. Porém, nem sempre é tão simples articular ideias para se obter sempre lucro no negócio. Dona Cida resolveu vender *salgados com sucos*, popularmente conhecido por *completo*. Com a relação entre a quantidade vendida e o valor arrecadado, pode-se construir a função lucro que é dada por:

$$L(x) = -x^2 + 12x - 20$$

em que x é a quantidade de completos vendidos. Se o valor **L** calculado, a partir do número **x** de vendas de completos, for positivo, então houve lucro; se for negativo, prejuízo.

(A) Você conhece pessoas que estão desempregadas?

(B) Em sua opinião, quais os motivos que levaram o Brasil a esse cenário?

(C) De acordo com a função lucro **L**, qual a quantidade de completos que Dona Cida deve vender para que ela tenha lucro?

QUESTÃO 02 – Hoje tornou-se habitual o uso de números negativos. Chamamos de negativos, aos números que são menores que zero e utilizamos em diversas situações como no registro de temperaturas, na representação de altitudes e profundidades em relação ao nível do mar, em saldos de gols ou bancários, etc. Estes números apareceram na história pela primeira vez na China antiga 202 a.C., mas acredita-se na existência de material mais antigo e um fato interessante de mencionar ocorreu na Índia: o matemático Brahmagupta (598 d.C.) afirmava que os números podiam ser entendidos como pertences ou dívidas. E, nesse sentindo, através de observações da prática adotada por comerciantes da época, os matemáticos criaram os sinais + (positivo) e – (negativo).

Saldo bancário é uma expressão conhecida e usual que significa uma quantia que você tem disponível em sua conta no banco para efetuar qualquer tipo de transação bancária, como pagamentos de contas ou compras e, através de extratos, você consegue visualizar o seu saldo. Podemos relacionar a ideia de números positivos e negativos com a de saldo bancário: suponha que há R$100,00 numa conta, representamos, então, por +100 (positivo). Por outro lado, se há apenas R$100,00 e forem debitados (subtraídos) R$200,00 dessa conta, rapidamente, ela fica com saldo negativo de R$100,00, representado por –100 (negativo).

(A) Você já tinha conhecimento sobre essas aplicações utilizando números positivos e negativos?

(B) Você conhece alguma outra aplicação dos números positivos e negativos?

(C) O que você entende por crédito e débito?

(D) Suponha que o saldo da conta bancária de Seu Antônio seja dado por:

$$\mathbf{S(t) = t^2 - 11t + 24}$$

onde S(t) é o saldo em reais da conta que está relacionado com o tempo t (t>0), em dias. Nessas condições, determine entre quais dias o saldo da conta de Seu Antônio foi negativo.

QUESTÃO 03 – Um dos assuntos mais discutidos sobre as mudanças climáticas é o aquecimento global. Esse aquecimento refere-se ao aumento anormal da temperatura média do planeta. Cientistas vêm registrando esse aumento de temperatura que muitos acreditam ser causado por consequências de práticas humanas como poluição do ar e das águas, queimadas e desmatamento. E isso vem causando a intensificação do efeito estufa. O efeito estufa é um fenômeno natural responsável em manter as temperaturas médias globais, evitando que haja grande amplitude térmica e possibilitando o desenvolvimento dos seres vivos. Os efeitos desse evidente aquecimento global são diversos como a elevação do nível dos oceanos, desequilíbrio climático, incidência de tufões e furacões e extinção de espécies de animais.

Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/geografia/aquecimento-global.htm. Acesso em: 1 abril 2019. (Adaptado)

(A) Combater o aquecimento global é um grande desafio e cabe a cada um de nós ter consciência disso. Que tipos de atitudes você tem ou poderia adotar para minimizar esse impacto ambiental?

(B) Como o evidente aquecimento do nosso planeta, a utilização de estufas agrícolas é cada vez mais comum. As estufas são estruturas que retêm o calor do sol, protegem as plantas contra possíveis ameaças externas. Suponha uma estufa cuja temperatura **T**, em graus Celsius, é determinada em função da hora **h** do dia pela expressão:

$$\mathbf{T(h) = -2h^2 + 22h}$$

Em que período do dia a temperatura dessa estufa é positiva?

APÊNDICE D – Material de apoio

MATERIAL DE APOIO 1

As desigualdades matemáticas, na variável real x, que podem ser reduzidas à uma das formas:

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

são chamadas de inequações quadráticas, onde a, b e c são números reais chamados de coeficientes, com a≠0. Ao número **a**, chamaremos de coeficiente quadrático. Exemplos:

$(1)\ x^2 + 3x - 1 > 0$, onde $a = 1$, $b = 3$ e $c = -1$

$(2) - 3x^2 + 4x < 0$, onde $a = -3$, $b = 4$ e $c = 0$

$(3)\ 5x^2 + 2 \geq 0$, onde $a = 5, b = 0$ e $c = 2$

Observe nos exemplos acima que a, b e c são números reais quaisquer. Contudo, o ***coeficiente quadrático*** deve ser sempre diferente de zero.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. Leia o enunciado: “o quadrado do número x é maior do que ou igual ao triplo dele”

a) Converta esse enunciado para a linguagem matemática.

b) Você escreveu uma inequação quadrática? Justifique.

02. Dada a inequação:

$$(x + 2).(x - 1) > 0$$

Verifique se a inequação resultante é quadrática.

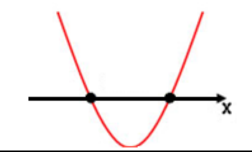
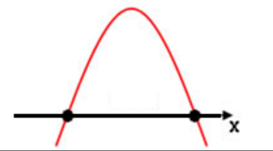
03. Observe a relação abaixo:

$3x + 2 < 0$	$3 \leq x^2$
$x^2 + 3x > 2$	$4x^2 - 3x = 0$
$3^2 + 1 \geq 0$	$x^2 + 1 \leq 3x$

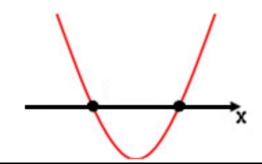
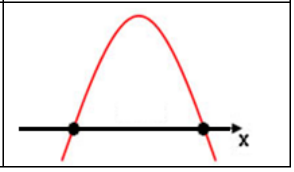
Quais dessas expressões são inequações quadráticas?

CONCAVIDADE DA PARÁBOLA

Toda função quadrática pode ser representada graficamente no plano cartesiano. O gráfico da função quadrática é uma parábola cuja concavidade pode está voltada para cima ou para baixo.

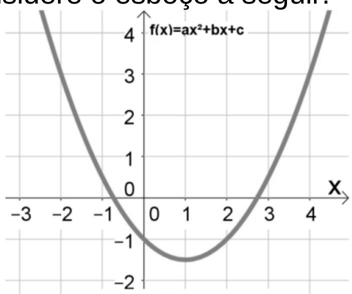
voltada para cima	**voltada para baixo**
	

Os coeficientes da função tem relação direta com o gráfico da função. Dessa forma, considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são os coeficientes reais, com $a \neq 0$. O **coeficiente quadrático** determina se a parábola terá concavidade voltada para cima ou para baixo. (1) Se o coeficiente quadrático for positivo $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima. (2) Se o coeficiente quadrático for negativo $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

$\boldsymbol{a > 0}$	$\boldsymbol{a < 0}$
	

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. Considere o esboço a seguir:



Essa parábola tem concavidade voltada para cima ou para baixo?

02. Dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a = -1$, $b = 2$ e $c = 1$. Dessa forma, o gráfico dessa função será uma parábola com concavidade voltada para cima ou para baixo? Por quê?

03. Dada a função $f(x) = -2x^2 + 3x - 2$. Sem esboçar o gráfico, para onde está voltada a concavidade dessa parábola?

MATERIAL DE APOIO 2

Estudar o sinal de uma função é determinar os intervalos do domínio (valores de x) para os quais a função tem imagem positiva (f(x)>0) e os intervalos que ela tem imagem negativa (f(x)<0). A melhor maneira de analisar o sinal é através do gráfico da função.

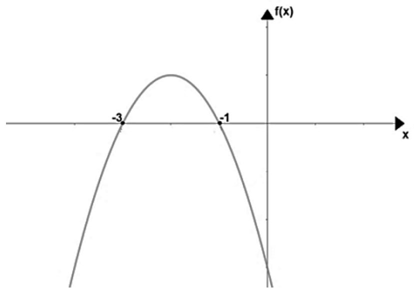
Nosso interesse é estudar o sinal de funções quadráticas e para esboçar o gráfico precisamos determinar os zeros da função, isto é, os valores do domínio cuja imagem é nula, f(x)=0. Geometricamente, os zeros da função formam os pontos que o gráfico intercepta o eixo x. Por exemplo, dada a função $f(x) = -x^2 - 4x - 3$.

(1) Para determinar os zeros da função devemos fazer $f(x) = 0$. Assim, tem-se $-x^2 - 4x - 3 = 0$. Utilizando a fórmula de Bháskara, obtêm-se as raízes reais:

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2.(-1)} = -3$$

$$x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2.(-1)} = -1$$

(2) Como $a < 0$, conclui-se que a concavidade da parábola está voltada para baixo. Logo, o esboço do gráfico da função $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ é:

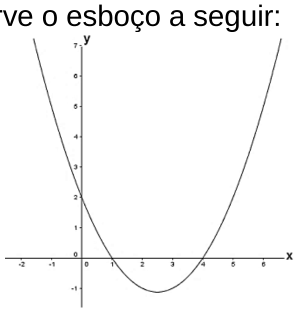


(3) Portanto, conclui-se que

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para } x < -3 \text{ ou } x > -1 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = -3 \text{ ou } x = -1 \\ f(x) > 0 & \text{para } \quad -3 < x < -1 \end{cases}$$

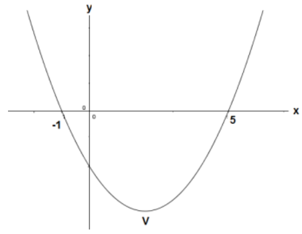
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. Observe o esboço a seguir:



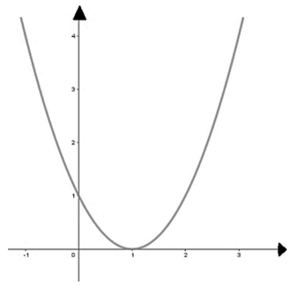
Qual intervalo do domínio a função possui imagem negativa?

02. Dado o esboço a seguir:



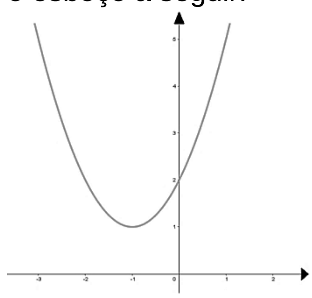
Quais intervalos do domínio a função possui imagem positiva?

03. Dado o esboço a seguir:



a) Para quais valores do domínio tem-se $f(x) = 0$? E $f(x) > 0$? E $f(x) < 0$?

04. Dado o esboço a seguir:



Para quais valores do domínio tem-se $f(x) = 0$? E $f(x) > 0$? E $f(x) < 0$?

05. Para resolver uma inequação quadrática, devemos estudar o sinal da função cuja expressão analítica é idêntica da inequação. Assim, por exemplo, resolver a inequação quadrática $x^2 + 5x + 6 > 0$, significa determinar os valores reais de x os quais a função $f(x) = x^2 + 5x + 6$ seja positiva. Sendo assim, resolva as inequações quadráticas a seguir:

a) $x^2 + 5x + 6 > 0$
b) $x^2 + x - 2 \leq 0$
c) $4x^2 - 12x + 9 > 0$
d) $-x^2 + 6x - 9 \leq 0$
e) $3x^3 - 2x + 5 < 0$

MATERIAL DE APOIO 3

Você tem dificuldade em interpretar e compreender o enunciado de um problema e retirar as informações necessárias para solucionar o que é pedido?

Listamos algumas instruções que você poderá seguir com o objetivo de ajudar a resolver situações-problemas de matemática, em particular aqueles que envolvem inequações quadráticas.

(1) Leia com atenção o problema;
(2) Destaque as informações que julgar necessárias para a resolução;
(3) Observe o que é pedido no problema e resolva-o.

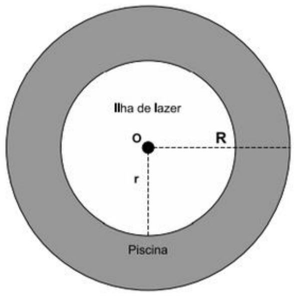
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. O Índice de Massa Corporal (IMC) serve para avaliar a massa do indivíduo em relação à sua altura e detectar casos de obesidade ou desnutrição. Esse índice indica se o indivíduo está dentro do peso ideal, acima ou abaixo dele.
O IMC é o quociente entre a massa do indivíduo (em Kg) e o quadrado da altura (em metros) dele. O IMC pode trazer alguns resultados, observe a tabela a seguir.

Classificação	IMC	O que pode acontecer
Muito abaixo do peso	16 a 16,9 kg/m2	Queda de cabelo, infertilidade, ausência menstrual
Abaixo do peso	17 a 18,4 kg/m2	Fadiga, stress, ansiedade
Peso normal	**18,5 a 24,9 kg/m2**	Menor risco de doenças cardíacas e vasculares
Acima do peso	25 a 29,9 kg/m2	Fadiga, má circulação, varizes
Obesidade Grau I	30 a 34,9 kg/m2	Diabetes, angina, infarto, aterosclerose
Obesidade Grau II	35 a 40 kg/m2	Apneia do sono, falta de ar
Obesidade Grau III	maior que 40 kg/m2	Refluxo, dificuldade para se mover, escaras, diabetes, infarto, AVC

Qual deve ser a altura de um indivíduo cuja massa é de 85kg para que ele seja classificado, segundo o IMC, com obesidade grau III?

02. (ENEM-2013) Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1m de profundidade e volume igual a 12m³, cuja base tem raio **R** e centro **O**. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será **r**. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m³. Considere 3 como valor aproximado para π.



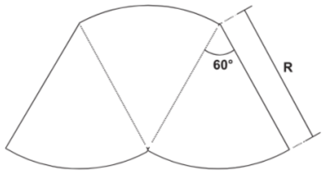
Para satisfazer as condições dadas, o raio r máximo da ilha de lazer, em metros, estará mais próximo de:
(A) 1,6 (B) 1,7 (C) 2,0 (D) 3,0 (E) 3,8

03. (ENEM-2015) Uma padaria vende, em média, **100** pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação:

$$\mathbf{q = 400 - 100p}$$

na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais. A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto. O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo:
(A) R$ 0,50 ≤ p < R$ 1,50
(B) R$ 1,50 ≤ p < R$ 2,50
(C) R$ 2,50 ≤ p < R$ 3,50
(D) R$ 3,50 ≤ p < R$ 4,50
(E) R$ 4,50 ≤ p < R$ 5,50

04. (ENEM-2015) O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a **60°**.O raio **R** deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões **50** m x **24** m. O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente. Considere **3,0** como aproximação para π. O maior valor possível para **R**, em metros, deverá ser
(A) 16 (B) 28 (C) 29 (D) 31 (E) 49

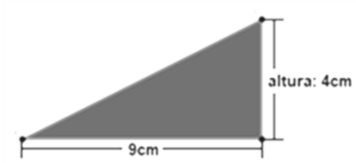
05. (FGV-SP) – O lucro mensal de uma empresa é dado por

$$L(x) = -x^2 + 30x - 5$$

em que *x* é a quantidade mensal vendida. Entre que valores deve variar *x* para que o lucro mensal seja no mínimo igual a 195?

06. (ALBERT EINSTEIN-2018) Para arrecadar recursos para a festa de formatura, os formandos de uma escola decidiram vender convites para um espetáculo. Cada formando recebeu para vender um número de convites que é igual ao número total de formandos mais 3. Se todos os formandos conseguirem vender todos os convites a 5 reais, o dinheiro arrecadado será menor do que R$ 26.270,00. Nessas condições, o maior número de formandos que essa escola pode ter é múltiplo de
(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15.

07. As imagens representam um triângulo e um retângulo. As medidas estão indicadas no qual **x > 0**.



Qual deve ser o menor valor inteiro de x para que a área do retângulo seja maior que a área do triângulo?

08. Deseja-se construir uma casa térrea de formato retangular. O terreno onde a casa será construída tem 90 metros de perímetro. Calcule as dimensões desse terreno sabendo que a área da casa deve ser menor que 350m².

09. Certa empresa calcula a sua receita (em reais) por meio da seguinte função:

$$R(p) = 20000p - 2000p^2$$

em que p é o preço de venda de cada unidade. Quais devem ser os valores de *p* para que a receita dessa empresa seja inferior a R$ 37 500,00?

10. (UFV-MG/adaptada) – A temperatura de uma estufa, em graus Celsius, é regulada em função do tempo t de acordo com a lei f dada por:

$$f(t) = -\frac{t^2}{2} + 4t + 10.$$

Identifique entre que intervalo de tempo a temperatura está acima de 0ºC.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66113-010 Belém-PA
www.uepa.br