

Exercícios das Estruturas Algébricas de Anel e Corpo

1. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, um polinômio e observe:

$p(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$, soma dos coeficientes do polinômios $p(x)$. Qual a soma dos coeficientes do polinômio $(4x^3 - 2x^2 - 2x - 1)^{36} \in \mathbb{R}[X]$?

Resolução:

$$\begin{aligned} p(x) &= (4x^3 - 2x^2 - 2x - 1)^{36} \\ p(1) &= (4(1)^3 - 2(1)^2 - 2(1) - 1)^{36} \\ p(1) &= (4(1) - 2(1) - 2 - 1)^{36} \\ p(1) &= (4 - 2 - 2 - 1)^{36} \\ p(1) &= (-1)^{36} \\ &\text{aplicar a propriedade do expoente } (-a)^n = a^n, \text{ se } n \text{ é par.} \\ p(1) &= 1 \end{aligned}$$

2. Dados os polinômios sobre $\mathbb{Z}$:

$$f(x) = 7 - 2x + 4x^2, \quad g(x) = 5 + x + x^2 + 5x^3, \quad h(x) = 2 - 3x + x^4$$

calcule $(f + g)(x)$, $(g - h)(x)$ e $(h - f)(x)$. **Resolução:**

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= (7 - 2x + 4x^2) + (5 + x + x^2 + 5x^3); \\ &\text{aplicando a soma de polinômios.} \\ &= (7 + 5) + (-2 + 1)x + (4 + 1)x^2 + (0 + 5)x^3 \\ &= 12 - x + 5x^2 + 5x^3 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{g} - \mathbf{h})(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned} (g - h)(x) &= (5 + x + x^2 + 5x^3) - (2 - 3x + x^4); \\ &\text{aplicando a soma de polinômios.} \\ &= (5 - 2) + (1 + 3)x + (1 + 0)x^2 + (5 - 0)x^3 + (0 - 1)x^4 \\ &= (3) + (4)x + (1)x^2 + (5)x^3 + (-1)x^4 \\ &= 3 + 4x + x^2 + 5x^3 - x^4 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{h} - \mathbf{f})(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned} (h - f)(x) &= (2 - 3x + x^4) - (7 - 2x + 4x^2); \\ &\text{aplicando a soma de polinômios.} \\ &= (2 - 7) + (-3 + 2)x + (0 - 4)x^2 + (0 + 0)x^3 + (1 - 0)x^4 \\ &= (2 - 7) + (-3 + 2)x + (0 - 4)x^2 + (0 + 0)x^3 + (1)x^4 \\ &= -5 - x - 4x^2 + x^4 \end{aligned}$$

3. Dados os polinômios sobre $\mathbb{Z}$:

$$f(x) = 2 + 3x - 4x^2, \quad g(x) = 7 + x^2, \quad h(x) = 2x - 3x^2 + x^3$$

calcule $(fg)(x)$, $(gh)(x)$ e $(hf)(x)$.

Resolução:

(fg)(x)

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= (2 + 3x - 4x^2)(7 + x^2); \\ &\quad \text{aplicando a lei distributiva} \\ &= (2 + 3x - 4x^2).7 + (2 + 3x - 4x^2).x^2 \\ &= (14 + 21x - 28x^2) + (2x^2 + 3x^3 - 4x^4) \\ &\quad \text{aplicando a soma de polinômios.} \\ &= (14 + 0) + (21 + 0)x + (-28 + 2)x^2 + (0 + 3)x^3 + (0 - 4)x^4 \\ &= 14 + 21x - 26x^2 + 3x^3 - 4x^4\end{aligned}$$

(gh)(x)

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= (7 + x^2)(2x - 3x^2 + x^3); \\ &\quad \text{aplicando a lei distributiva} \\ &= (2x - 3x^2 + x^3).7 + (2x - 3x^2 + x^3).x^2 \\ &= (14x - 21x^2 + 7x^3) + (2x^3 - 3x^4 + x^5) \\ &\quad \text{aplicando a soma de polinômios.} \\ &= (0 + 0) + (14 + 0)x + (-21 + 0)x^2 + (7 + 2)x^3 + (-3 + 0)x^4 + (0 + 1)x^5 \\ &= 14x - 21x^2 + 9x^3 - 3x^4 + x^5\end{aligned}$$

(hf)(x)

$$\begin{aligned}(hf)(x) &= (2x - 3x^2 + x^3)(2 + 3x - 4x^2); \\ &\quad \text{aplicando a lei distributiva} \\ &= (2x - 3x^2 + x^3).2 + (2x - 3x^2 + x^3).3x + (2x - 3x^2 + x^3).-4x^2 \\ &= (4x - 6x^2 + 2x^3) + (6x^2 - 9x^3 + 3x^4) + (-8x^3 + 12x^4 - 4x^5) \\ &\quad \text{aplicando a soma de polinômios.} \\ &= (4 + 0 + 0)x + (-6 + 6 + 0)x^2 + (2 - 9 - 8)x^3 + (0 + 3 + 12)x^4 + (0 + 0 - 4)x^5 \\ &= 4x - 15x^3 + 15x^4 - 4x^5\end{aligned}$$

4. Discuta em função de a o grau do polinômio $f(x) = (2a^2 + a - 3)x^3 + (a^2 - 1)x^2 + (a + 1)x - 3$.

Resolução:

Sabemos que os polinômios de terceiro grau no geral tem o seguinte formato:

$$P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Associando cada um dos termos dos polinômios a A, B, C e D, temos:

$$\begin{aligned}A &= (2a^2 + a - 3); \\ B &= (a^2 - 1); \\ C &= (a + 1).\end{aligned}$$

O grau de um polinômio, depende exclusivamente do grau do maior termo, ou seja, se B, C e D forem 0, este ainda é um polinômio de grau 3. Quando A = 0, então este passa a ser um polinômio de grau 1. Então vamos ver quando este é um polinômio de grau 1:

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ (2a^2 + a - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau

$$x_1 = 1 \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Assim, este polinômio é de grau 2 quando a for 1.

Mas pode ser que um desses valores de a também zere o termo B, fazendo com que o polinômio seja de grau 1, para isso vamos analisar quando B é 0:

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ (a^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau

$$x_1 = 1 \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = -1 \in \mathbb{Z}$$

Assim, este polinômio é de grau 1 quando a for 1 ou -1 .

Mas pode ser que um desses valores de a também zere o termo C, fazendo com que o polinômio seja de grau 0, ou nulo, para isso vamos analisar quando C é 0:

$$\begin{aligned} C &= 0 \\ (a + 1) &= 0 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Quando a for -1 ela irá anular também o C, fazendo com que o polinômio seja de grau 0.

Concluimos que o polinômio será de grau 3, para $a \neq 1$;

Concluimos que o polinômio será de grau 2, para $a \neq 1$ e -1 ;

Concluimos que o polinômio será de grau 1, para $a \neq -1$;

Concluimos que o polinômio será de nulo, para $a = -1$;



Creative Commons - Atribuição - NãoComercial 4.0 Internacional.