Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Paulo Ferreira da Gama
(Orientador: Natanael Freitas Cabral)

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO SENO

Produto Educacional

BELÉM - PA
2020

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Paulo Ferreira da Gama

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO SENO

Produto Educacional

BELÉM - PA
2020

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Gama, Paulo Ferreira da

Uma sequência didática para o ensino da função seno : produto educacional /Gama, Paulo Ferreira da Gama, Natanael Freitas Cabral, 2020.

Produto educacional vinculado à dissertação "Uma sequência didática para o ensino da função seno" do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

1.Funções (Matemática) 2. Funções trigonométricas. . 3. Matemática-Métodos de ensino I. Cabral, Natanael Freitas. II. Título.

CDD. 23º ed.515.33

Bibliotecária: Regina Ribeiro CRB-2 739

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: UMA SEQUENCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO SENO.

Mestrando (a): PAULO FERREIRA DA GAMA

Data da avaliação: ___/___/____

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

(X) Estudantes do Ensino Fundamental (X) Estudantes do Ensino Médio
(X) Professores do Ensino Fundamental (X) Professores do Ensino Médio
(X) Outros: Pesquisadores em Educação Matemática.

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo
( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo
( ) Software ( ) Outro: __________

b) *Possui URL:* ( ) Sim, qual o URL: __________
( ) Não ( ) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*
(X) Sim
( ) Não. Justifique? __________

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*
(X) Sim
( ) Não. Justifique? __________

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*
(X) Sim
( ) Não. Justifique? __________

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
e) *Possui referências:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

( ) Sim, onde: ______________________

( ) Não, justifique: ______________________

( ) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(X) Sim, onde: Cursos de Capacitação de Professores Mat.

( ) Não, justifique: ______________________

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

( ) Sim, onde: ______________________

( ) Não, justifique: ______________________

( ) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

( ) na escola, como atividade regular de sala de aula

( ) na escola, como um curso extra

( ) outro: ______________________

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

( ) Alunos do Ensino Fundamental

(X) Alunos do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental

(X) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como ______________________

( ) outros membros da comunidade, tais como ______________________

O produto educacional foi considerado:

(X) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA

Natanael Freitas Cabral ______________________. Orientador

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas–Educação – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC/RJ
Universidade do Estado do Pará

______________________. Examinador Interno

Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN–RN
Universidade do Estado do Pará

Gustavo Nogueira Dias ______________________. Examinador Externo

Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias
Doutor em Educação – Universidade Nacional de Rosário - Argentina
Escola Tenente Rêgo Barros – Comando da Aeronautica

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

APLICAÇÃO PRODUTO EDUCACIONAL

DECLARAÇÃO

Eu, José Ricardo dos Santos, diretor da Escola E.E.F.M. Regina Coeli Souza e Silva, localizada na Av. Solimões, 119, Quadra 112, Bairro: Paar, CEP: 67.145-061, que obteve IDEB 2,8 no ano de 2017, venho por meio desta declarar que o Sr. Paulo Ferreira da Gama, vinculado ao Programa de Mestrado Profissional de Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, desenvolveu Estagio Supervisionado e aplicou Produto Educacional "Uma sequência didática para o ensino da função seno", nesta Escola sob a supervisão do professor Andrey Freitas Azulay, na turma do 2° ano do Ensino Médio, no turno da Tarde, no período de 20 de agosto de 2019 a 27 de setembro de 2019, para fins de comprovação junto ao referido Programa. O Estágio Supervisionado foi desenvolvido de acordo com o Plano de Atividades apresentado inicialmente, obteve uma avaliação positiva pelo Supervisor responsável levando em consideração tanto o Relatório de Acompanhamento do Estágio Supervisionado quanto a Avaliação do Produto Educacional. O que me leva a concluir que as atividades desenvolvidas no referido Estágio contribuíram efetivamente para a melhoria de ensino e aprendizagem da Escola.

Belém (PA), 20 de dezembro de 2019

José Ricardo Dos Santos
Diretor Escolar
Port. 714/14 - CRH / SEDUC

José Ricardo dos Santos
Diretor da Escola E.E.F.M. Regina Coeli Souza e Silva

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Historicamente, a trigonometria teve sua gênese com os gregos, a partir de necessidades ligadas à Astronomia e às previsões relacionadas às efemérides celestes. Assim, inicialmente, foi na Astronomia que a Matemática demonstrou ser capaz de prever fenômenos naturais. Acreditava-se até então, que os planetas descreviam órbitas circulares em torno da terra, denominado de modelo geocêntrico[1]. Com isso, surgiram interesses em buscar relações entre o comprimento da corda da circunferência e o ângulo central por subtendido (ÁVILA, 2010; CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

Desde esse tempo, a Trigonometria apresentava-se como importante para a humanidade. Apesar disso, pesquisas como as de Feijó (2018) e Santos (2014) apontam que os estudantes apresentam dificuldades no processo de aprendizagem deste assunto.

Objetivando amenizar essas dificuldades e contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem de Matemática, na Seção 1 é apresentada uma Sequência didática elaborada especificamente para o ensino da Função Seno. Nessa elaboração, foi considerada a estrutura encontrada em Cabral (2017), que considera a Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) como unidade básica de uma sequência didática e quem tem como um dos pressupostos teóricos a Psicologia Histórico-Cultural do soviético Lev Vygotsky (1896-1934).

Considerando a necessidade do embasamento específico, na Seção 2 é apresentada a fundamentação matemática que pode ser consultada pelo leitor sempre que necessário. Além disso, na Seção subsequente, são apresentadas orientações aos estudantes e aos professores, que se mostram relevantes a serem consideradas na utilização da sequência didática.

1 Ávila (2010) acentua que o modelo geocêntrico, embora comumente seja atribuído a Ptolomeu (100 d.C.- 160 d.C.) remonta aos pré-socráticos. Segundo este autor, até mesmo Aristóteles já considerava este modelo.

1- SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO SENO

A sequência didática desta seção é constituída de 8 Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual, doravante denominada apenas de unidades. Essas unidades abordam o conteúdo da função seno, tendo como início a Função de Euler e finalizando na construção do gráfico da função $f(x) = senx$.

Vale ressaltar que todas as figuras, gráficos, tabelas e todas demais ilustrações constantes em cada unidade que compõe a sequência didática apresentadas nesta seção, possuem numerações próprias sempre iniciando com o número 1, pois trata-se de um recurso didático que foi utilizado em sala de aula, quando da aplicação da sequência didática.

Assim, na subseção 1.1 apresentamos a sequência didática (Material do Aluno) que pode ser disponibilizada aos discentes e na subseção 1.2, a sequência didática (Material do Professor) que pode ser utilizada como recurso didático-pedagógico pelo professor.

1.1-Material do Aluno

ESCOLA: ____

PROFESSOR: ____

ALUNO: ____

UNIDADE 1: FIO PRESO NA RODA GIGANTE

Considere que em um parque de diversões tenha uma roda gigante com raio medindo 8 metros, sendo A o ponto de embarque para o acesso às "gaiolas" em que ficam assentados os brincantes.

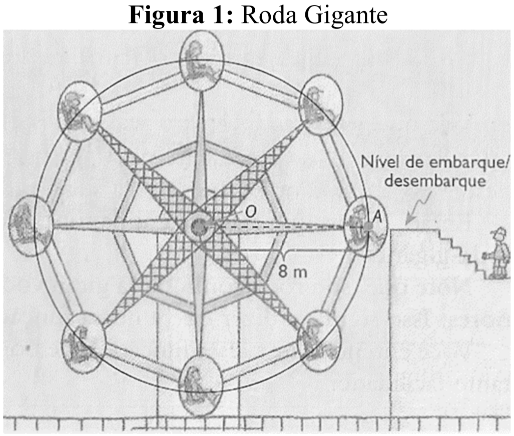
Em um sábado, uma criança planejou uma brincadeira a mais do que simplesmente "andar" de roda gigante: desejava enrolar o maior comprimento possível de um fio inextensível de tamanho infinito na circunferência da roda gigante.

Para isso, ela engatou uma extremidade deste fio no Ponto fixo A (Figura 1) e à medida que a roda gigante se movia, o fio era enrolado na roda gigante. Considere que no início do movimento da roda gigante a criança esteja sentada no Ponto A e que seu movimento ocorra no sentido anti-horário.

Considere ainda, que toda vez que o fio quebrava, a criança reiniciava a brincadeira sempre engatando o fio no ponto A. O Quadro 1 apresenta quantos metros o fio inextensível foi enrolado na circunferência até ele quebrar:

A partir desta situação, faça o que se pede:

Figura 1: Roda Gigante



Fonte: Bianchini e Paccola (1995, p.285)

Quadro 1: Comprimento percorrido pelo fio até quebrar e arco formado

DISTÂNCIA PERCORRIDA ATÉ O FIO QUEBRAR
28 m
45 m
33 m
40,55 m
10 m

1) Considere que a distância percorrida pelo fio até quebrar esteja associada a um número real x, onde x é o valor numérico desta medida. Preencha O Quadro 2 com o valor do número real x e o valor do arco $\widehat{AB}$ percorrido pelo fio até quebrar:

Quadro 2: Associando o comprimento a um número real

DISTÂNCIA PERCORRIDA ATÉ O FIO QUEBRAR	MEDIDA DO ARCO $\widehat{AB}$ (ATÉ O FIO QUEBRAR)	VALOR DE x
28 m		
45 m		
33 m		
40,55 m		
10 m		

2) Considere que no sábado seguinte a criança foi novamente ao parque de diversões para brincar na roda gigante. Porém, ao observar o movimento da roda gigante, a criança percebeu que ela estava girando no sentido horário. A criança queria saber uma forma de descobrir o sentido do movimento da roda gigante a partir do valor do número associado ao comprimento do fio, já que em um sábado ela estava girando no sentido anti-horário e no outro, no sentido horário.

Entretanto. ela tinha um problema: o número x associado ao comprimento do fio inextensível era sempre positivo e a medida do arco associado a ele também, não interessando se o movimento da roda gigante se dava no sentido horário, ou no sentido anti-horário!

Para tentar resolver este problema, a criança contou as duas situações ao seu tio, que era professor de Matemática, o qual criou as seguintes regras:

Regra 1: Se a roda gigante estiver movendo-se no sentido anti-horário, como ele é o sentido positivo, o valor de x será positivo!

Regra 2: Se a roda gigante estiver movendo-se no sentido horário, como ele é o sentido negativo, o valor de x será negativo!

a) Para descobrir se a criança conseguiu entender sua proposta, o tio dela considerou os dados do da questão 1 e atribuiu valores ao comprimento do fio do 2º sábado, conforme apresentado no Quadro 3. Preencha as colunas referentes ao sinal associado a ao valor do número x em cada caso:

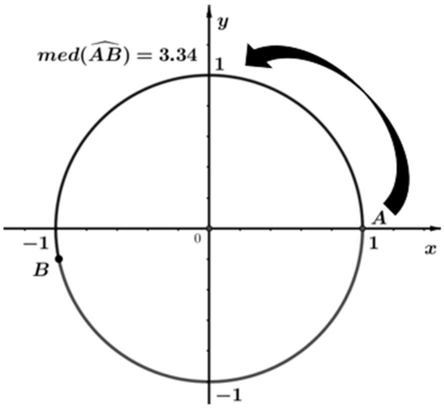
Quadro 3: Proposta do tio da criança

	$med(\widehat{AB})$	SINAL ASSOCIADO	VALOR DO NÚMERO x
SENTIDO HORÁRIO (1º SÁBADO)	28		
	45		
	33		
	40,55		
SENTIDO ANTI-HORÁRIO (2º SÁBADO)	35,78		
	54,5		
	100,33		
	74,75		
	110		

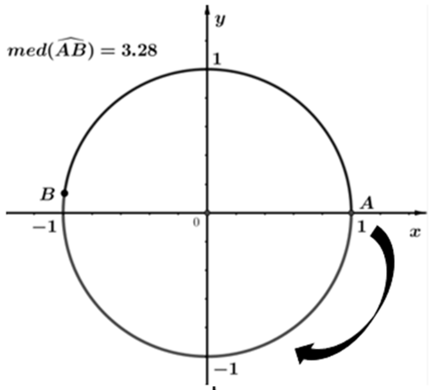
b) Cada número real x está associado a um único arco $\widehat{AB}$? Justifique sua resposta.

3) Enumere a segunda coluna a partir da primeira, associando o número real x ao Arco $\widehat{AB}$ respeitando-se o sentido indicado no ciclo trigonométrico:

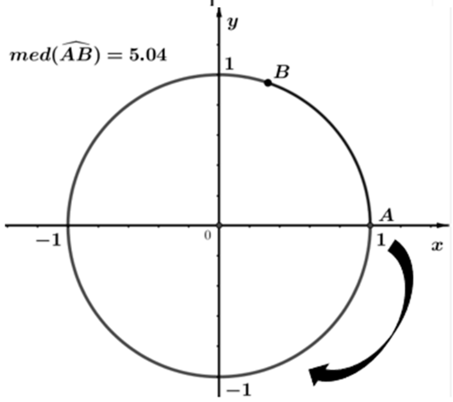
(I) $x = 1{,}25$ ( )



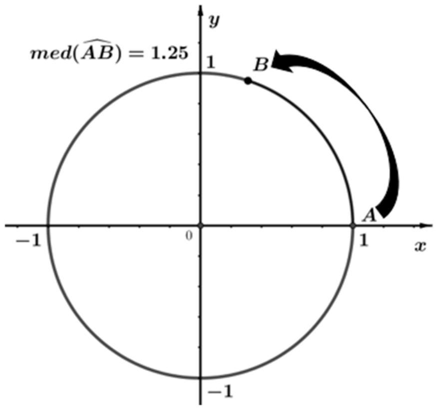
(II) $x = -5{,}04$ ( )



(III) $x = 3{,}34$ ( )



(IV) $x = -3{,}28$ ( )



4) Considerando as respostas dadas na questão anterior, se você tivesse que associar o número x a uma das extremidades do arco $\widehat{AB}$, a qual extremidade você associaria? Ao Ponto A ou o Ponto B? Justifique sua resposta.

5) Cada número real x está associado a **um único** ponto B, extremidade do arco $\widehat{AB}$ no ciclo trigonométrico? Justifique sua resposta.

6) A regra criada pelo tio da criança da roda gigante, que associa o número real x ao ponto $B = E(x)$, extremidade do arco $\widehat{AB}$ pode ser classificada como uma função? Justifique sua resposta.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 1

7) Pela função de Euler E, em qual quadrante encontra-se o número real:

a) $x = -6$ b) $x = -3$ c) $x = 5$ d) $x = 1$ e) $x = \frac{4\pi}{3}$

ESCOLA: ____

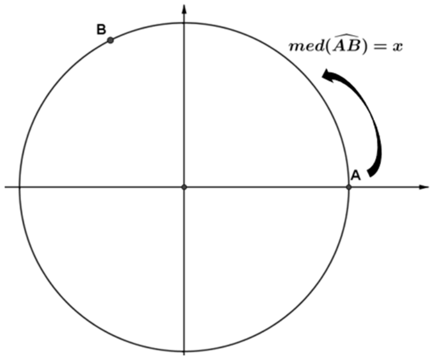
PROFESSOR: ____

ALUNO: ____

UNIDADE 2: NÚMEROS DIFERENTES NA RETA, PONTOS IGUAIS NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Considerando a Função de Euler E e o número real x indicado pelo Ponto B, extremidade do arco $\widehat{AB}$ (Figura 1) no sentido anti-horário, faça o que se pede:

Figura 1: Número x no ciclo trigonométrico



1) A partir do Ponto B indique no Quadro 1 o ponto que representa no ciclo trigonométrico o número real apresentado em cada caso:

Quadro 1: Pontos no ciclo trigonométrico mediante a função E

NÚMERO DE VOLTAS COMPLETAS	SENTIDO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO	NÚMERO REAL RESULTANTE	PONTO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO ($E(x)$)
1	POSITIVO		
1	NEGATIVO		
2	POSITIVO		
2	NEGATIVO		
3	POSITIVO		
3	NEGATIVO		
4	POSITIVO		
4	NEGATIVO		

2) Os números π, $\pi \pm 2\pi$, $\pi \pm 4\pi$, $\pi \pm 6\pi$ e $\pi \pm 8\pi$ têm a mesma imagem $E(x)$ no ciclo trigonométrico? Caso sua resposta seja afirmativa, como você justificaria isso?

3) Existem números reais distintos que possuem a mesma imagem no ciclo trigonométrico? Se a sua resposta for positiva, quando isso acontece?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 2

4) Um piloto de *Fórmula 1* percorre uma pista perfeitamente circular. Após percorrer 500 metros, ele passa pelo ponto D pela primeira vez. Quantas voltas completas ele terá que percorrer para passar novamente pelo ponto D pela segunda vez?

5) Qual o menor percurso a ser percorrido por este piloto para que ele passe sempre pelo ponto D?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 3

6) Você conhece outros exemplos de funções ou fenômenos que se repetem (fenômenos periódicos)? Cite-os.

ESCOLA: ____

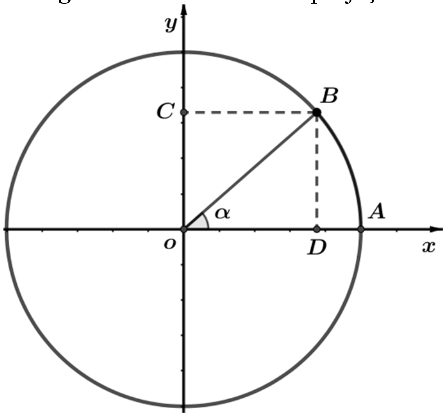
PROFESSOR: ____

ALUNO: ____

UNIDADE 3: A FUNÇÃO DE EULER E A RAZÃO TRIGONOMÉTRICA SENO

Você lembra da brincadeira a roda gigante? Pois bem, considere que ela tenha sido representada no ciclo trigonométrico (Figura 1). Nela, foram representados os pontos de embarque/desembarque (ponto A) e o ponto B. Além destes pontos, o tio da criança marcou nos eixos x e y os pontos D e C, respectivamente, formando os segmentos $\overline{OD}$ e $\overline{OC}$. Esses segmentos $\overline{OD}$ e $\overline{OC}$ são as projeçoes ortogonais do ponto B sobre os eixos x e y, respectivamente:

Figura 1: Ponto B e suas projeções



A partir das informações apresentadas e da figura acima, onde se tem o triângulo ODB, retângulo em D, responda:

1) Os segmentos $\overline{DB}$ e $\overline{OC}$ têm o mesmo comprimento?
2) Qual a medida do segmento $\overline{OB}$?
3) Utilizando a razão trigonométrica seno, investigue a relação existente entre o seno e o segmento $\overline{OC}$.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 4

ESCOLA: ____

PROFESSOR: ____

ALUNO: ____

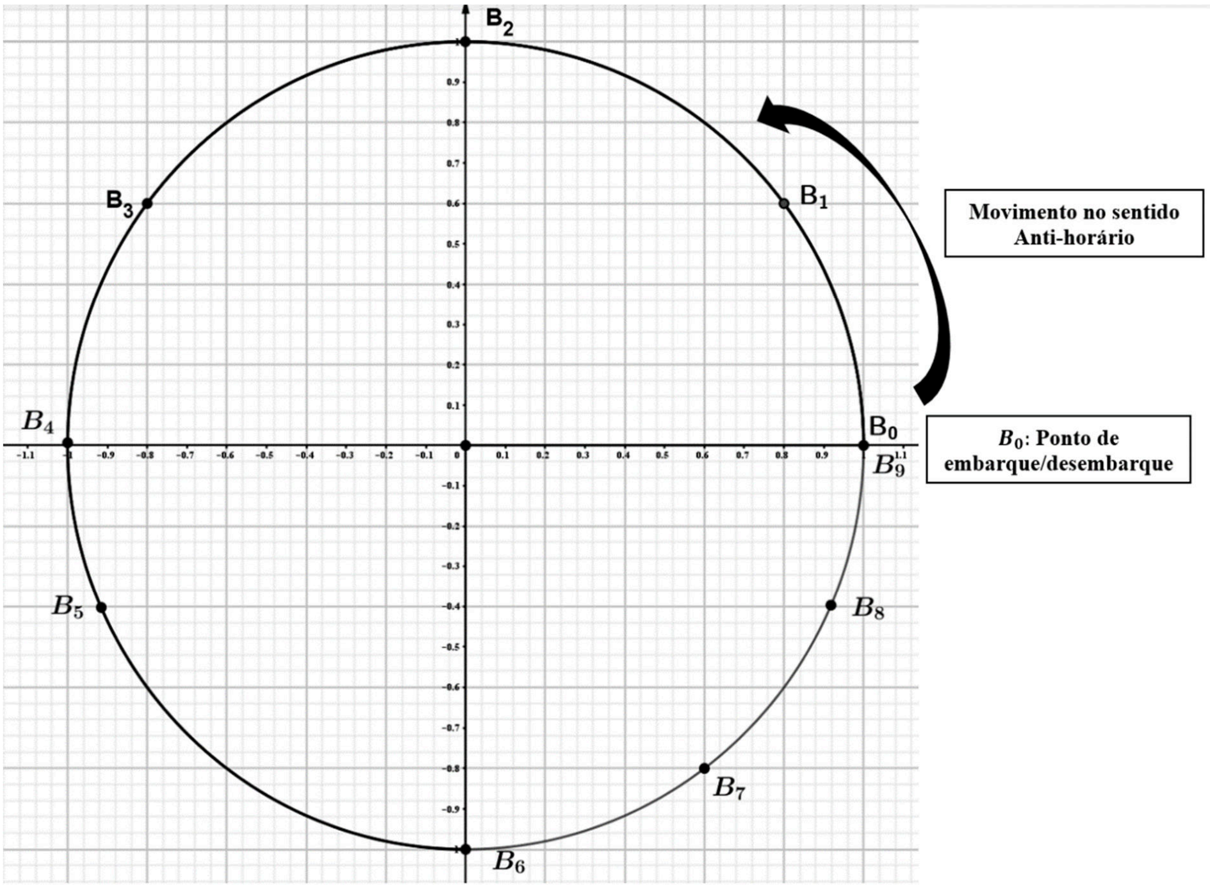
UNIDADE 4: SENO VERSUS ORDENADA

MATERIAIS: Lista de tarefas, lápis, borracha e caderno.

PROCEDIMENTOS: Fazer a leitura do texto e resolver as questões propostas.

Considere que a Figura 1 seja a representação da roda gigante em um ciclo trigonométrico, onde o ponto B_0 é o ponto de embarque às gaiolas dos brincantes:

Figura 1: Representação da roda gigante em papel quadriculado



No ciclo trigonométrico acima os eixos $0x$ e $0y$ estão graduados em 0,1.

Nele, foram marcadas as imagens de dez números reais representados (*pela função de Euler*) pelos pontos $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$ e B_9.

Considere que os pontos pertencentes ao ciclo trigonométrico que estão acima do eixo $0x$ sejam chamados de ALTURA e os pontos que estão abaixo do referido eixo sejam chamados de PROFUNDIDADE.

A partir destas informações faça o que se pede:

1) Preencha o Quadro 1 conforme indicado na linha correspondente ao ponto B_7 (pode ser utilizado valores aproximados), onde é atribuído o sinal positivo à projeção ortogonal relacionada a ALTURA e o sinal negativo, caso esteja relacionado a uma PROFUNDIDADE:

Quadro 1: Pontos e suas coordenadas

Ponto	Projeção ortogonal do raio sobre o eixo $0y$	Altura ou profundidade?	Sinal atribuído (negativo/ positivo)	Projeção ortogonal com o sinal atribuído	Ordenada do ponto B_n no ciclo trignométrico
B_0					
B_1					
B_3					
B_5					
B_6					
B_7	0,8	Profundidade	Negativo	$-0{,}8$	$-0{,}8$
B_8					

2) As projeções ortogonais (acompanhadas do sinal referente a altura ou profundidade) e a ordenada dos pontos representado em cada linha são sempre iguais? Por que você acha que isso ocorre?

3) Cada ponto do ciclo trigonométrico tem uma projeção ortogonal sobre o eixo $0y$? Cada ponto do ciclo trigonométrico tem um seno? Justifique.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 5

4) A Figura 3 apresenta um ciclo trigonométrico no qual estão representados os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K. Estes pontos são imagens dos números reais $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\ e\ x_{11}$, respectivamente. Determine:

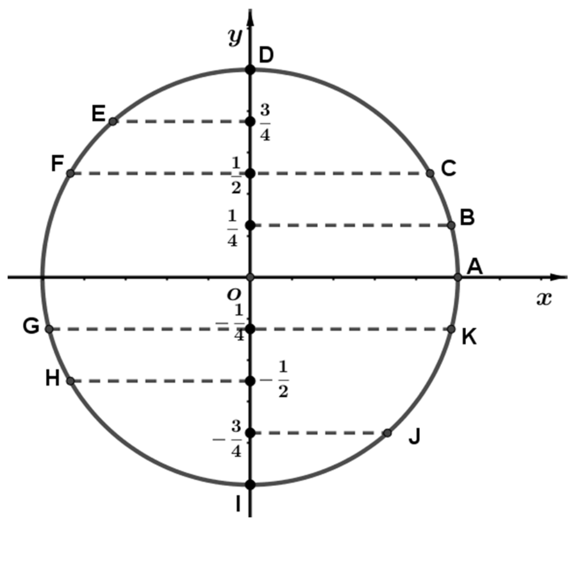
a) $senx_1 + senx_3$

b) $senx_{10} + senx_2$

c) $senx_4 + senx_8$

d) $senx_5 - 2.senx_6$

Figura 3: Seno de um número no ciclo trigonométrico



ESCOLA: ____

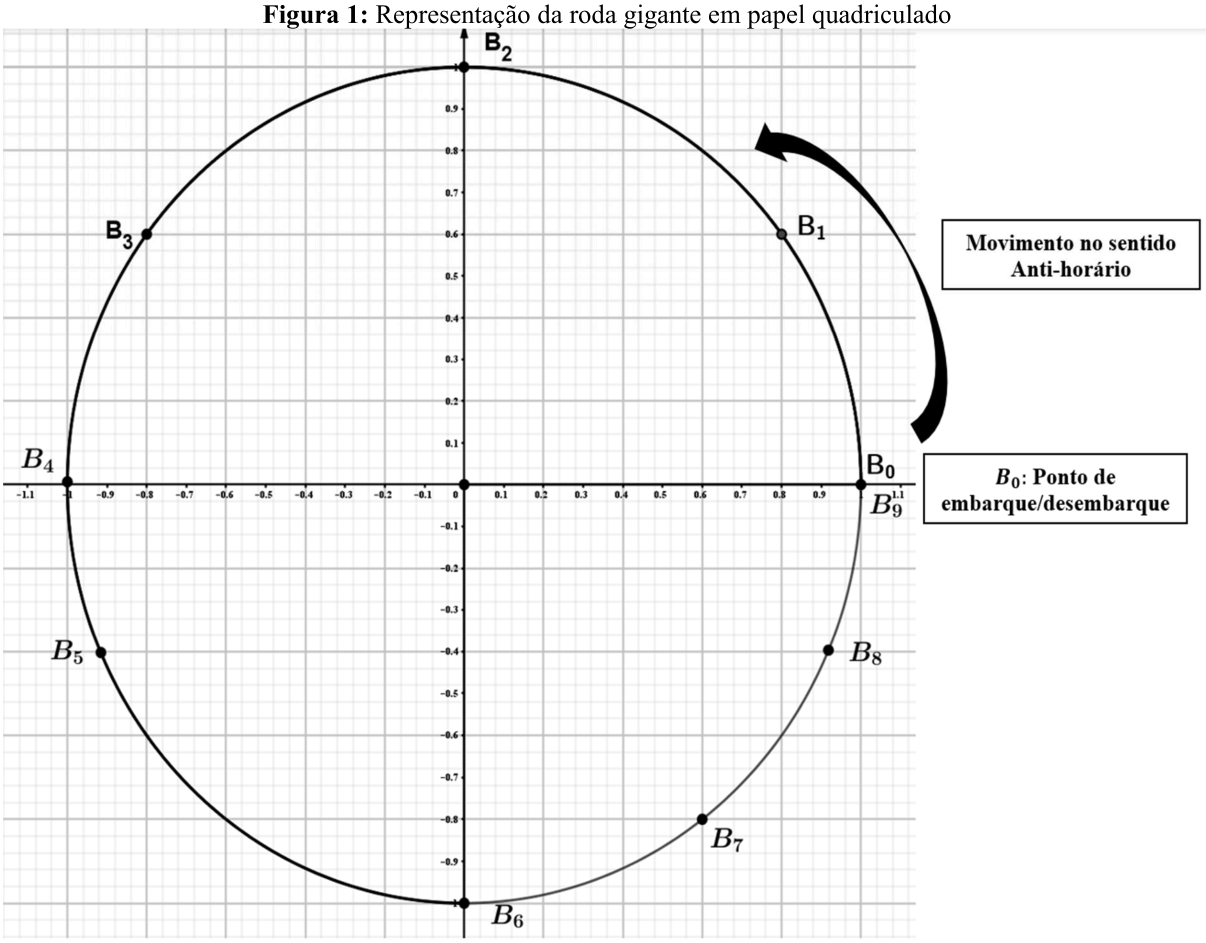
PROFESSOR: ____

ALUNO: ____

UNIDADE 5: PASSANDO PELO MESMO PONTO

1) Observe a Figura 1 que representa nove pontos no ciclo trigonométricos e responda as questões a seguir:

Figura 1: Representação da roda gigante em papel quadriculado



a) Preencha o Quadro 1 com os valores aproximados dos senos dos números representados pelos pontos indicados:

Quadro 1: Seno do número representado

IMAGEM DO NÚMERO REAL	SENO DO NÚMERO REAL
B_1	
$B_1 + 2\pi$	
$B_1 + 4\pi$	
$B_1 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$	

Fonte: O autor (2019)

b) Preencha o Quadro 2 com os valores aproximados dos senos dos números representados pelos pontos indicados:

Quadro 2: Seno do número representado

IMAGEM DO NÚMERO REAL	SENO DO NÚMERO REAL
B_5	
$B_5 + 2\pi$	
$B_5 + 4\pi$	
$B_5 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$	

2) Os pontos B_n e $B_n + 2k\pi \ (k\epsilon\mathbb{Z})$ estão representados na mesma posição no ciclo trigonométrico?

3) Os pontos B_n e $B_n + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$ têm o mesmo valor do seno? Por que você acha que isso ocorre?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 6

4) A partir da resolução da questão anterior, e considerando a Figura 1, julgue os itens como VERDADEIRO (V) ou FALSO (F):

( ) Pela Função de Euler (E), todo número real x tem uma imagem $E(x)$ no ciclo trigonométrico, que corresponde ao ponto B, extremidade do arco $\widehat{AB}$ de medida x.

( ) Somente alguns pontos no ciclo trigonométrico tem um par ordenado associado a ele.

( ) Todo ponto no ciclo trigonométrico tem um par ordenado associado a ele.

( ) O seno de um Ponto B no ciclo trigonométrico equivale a projeção ortogonal de B sobre o eixo $0x$.

( ) Dado um Ponto B no ciclo trigonométrico, o seno deste ponto é igual ao valor da sua abscissa.

( ) Dado um Ponto B no ciclo trigonométrico, o seno deste ponto é igual ao valor da sua ordenada.

( ) Os números reais $x, x + 2\pi, x + 4\pi, ..., x + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ têm o mesmo seno, pois possuem a mesma ordenada no ciclo trigonométrico.

( ) Pela Função de Euler (E), para cada número real x está associado a um único valor para $senx$, que é numericamente igual ao valor da ordenada de $E(x)$.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 7

ESCOLA: ____

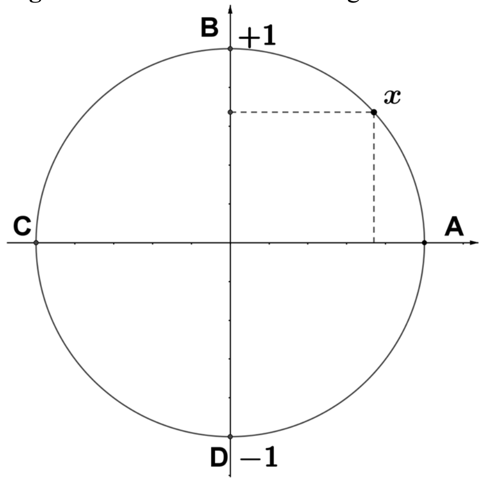
PROFESSOR: ____

ALUNO: ____

UNIDADE 6: PROPRIEDADES DA FUNÇÃO SENO

1) Considere os pontos A, B, C e D (Figura 1) e o número x no ciclo trigonométrico, representados na roda gigante do parque de diversões (em uma escala):
A partir destas informações, responda:

Figura 1: Número x no ciclo trigonométrico

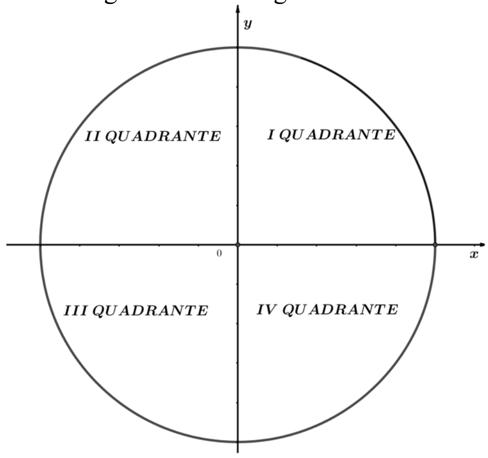


a) Em qual ponto a pessoa estará na MAIOR ALTURA POSSÍVEL na roda gigante? Qual o valor do seno neste ponto?
b) Qual o MAIOR VALOR que o seno pode assumir?
c) Em qual ponto a pessoa estará na MAIOR PROFUNDIDADE POSSÍVEL na roda gigante?
d) Qual o MENOR VALOR que o seno pode assumir?
e) O valor de $sen x$ varia de qual número a qual número?
f) A partir de quantas volta completa o valor de $sen x$ começa a se repetir?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 8

2) Considere, que a figura que representa a roda gigante na questão anterior esteja dividida em quadrantes e que os arcos estão orientados no SENTIDO POSITIVO (Figura 2), faça o que se pede:

Figura 2: Ciclo trigonométrico



a) Em quais quadrantes a criança terá uma ALTURA em relação ao eixo $0x$? E em quais quadrantes a criança terá uma PROFUNDIDADE em relação ao eixo $0x$?
b) Em quais quadrantes o seno é MAIOR que zero? Em quais quadrantes o seno é MENOR do que zero?
c) Preencha o Quadro 1 informando se os valores da função seno CRESCEU ou DIMINUIU em cada intervalo:

Quadro 1: Crescimento/ Decrescimento da função seno

INTERVALO CONSIDERADO	CRESCIMENTO/DECRESCIMENTO
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 9

ESCOLA: ____

PROFESSOR: ____

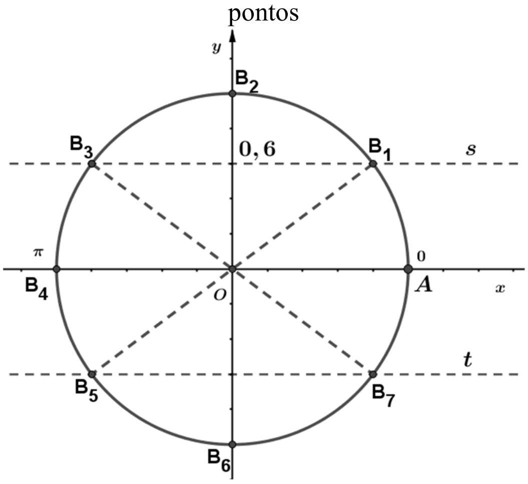
ALUNO: ____

UNIDADE 7: RETORNANDO AO 1º QUADRANTE

Considere que o ciclo trigonométrico representado pela Figura 1 represente a roda gigante do início da nossa história. Nele foram marcados os pontos B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 e B_7.

Do ponto B_1 foi traçada a *reta* s enquanto do ponto B_7 foi traçada a *reta* t. Sabe-se que ambas as retas, s e t, são paralelas ao eixo $0x$ e que os pontos B_1 e B_7 estão à mesma distância (0,6) do eixo das abscissas. A partir destas informações, faça o que se pede:

Figura 1: Ciclo trigonométrico com vários pontos



1) Considere que o número real x esteja associado ao Ponto B_3 no 2º Quadrante, isto é, $med\left(\widehat{AB_3}\right) = x$, e responda o que se pede:

a) Os pontos B_1 e B_3 estão à MESMA ALTURA?

b) Os valores do $sen\left(\widehat{AB_1}\right)$ e do $sen\left(\widehat{AB_3}\right)$ são iguais?

c) Você pode afirmar que $med\left(\widehat{AB_1}\right) = med(\pi - x)$?

d) É possível afirmar que, se x estiver no 2º quadrante, $senx = sen(\pi - x)$?

2) Considere que o número real x agora esteja associado ao Ponto B_5 no 3º Quadrante, isto é, $med\left(\widehat{AB_5}\right) = x$:

a) Você pode afirmar que $med\left(\widehat{AB_1}\right) = med(x - \pi)$?

b) Qual o valor do $sen\left(\widehat{AB_1}\right)$? E o valor do $sen\left(\widehat{AB_5}\right)$?

c) Você pode afirmar que $sen\left(\widehat{AB_1}\right) = -sen\left(\widehat{AB_5}\right)$?

d) É possível afirmar que, se x estiver no 3º quadrante, $senx = -sen(x - \pi)$?

3) Considere agora, que o número real x esteja associado ao Ponto B_7 no 4º Quadrante, isto é, $med\left(\widehat{AB_7}\right) = x$:

a) $[I_r]$ Você pode afirmar que $med\left(\widehat{AB_1}\right) = med(2\pi - x)$?

b) $[I_r]$ Qual o valor do $sen\left(\widehat{AB_1}\right)$? E o valor do $sen\left(\widehat{AB_7}\right)$?

c) $[I_r]$ Você pode afirmar que $sen\left(\widehat{AB_1}\right) = -sen\left(\widehat{AB_7}\right)$?

d) $[I_r]$ Você pode afirmar que $senx = -sen(2\pi - x)$?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 10

OBSERVAÇÃO 1:

Este procedimento de encontrar o valor do seno de um arco a partir de um arco do 1º Quadrante é conhecido como o processo de REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE. Ele é muito útil em cálculos de valores de senos de arcos que podem ser reduzidos a um arco conhecido no primeiro quadrante.

OBSERVAÇÃO 2:

Embora tenhamos feito a redução ao 1º Quadrante com arcos em radianos, pode-se utilizar a mesma ideia para se obter a redução de ângulos em graus, conforme os exemplos abaixo:

Exemplo 1:

Qual o valor de $sen150°$?
Solução:

$$sen150° = sen30° = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2:

Qual o valor de $sen210°$?
Solução:

$$sen210° = -sen30° = -\frac{1}{2}$$

4) O valor do $sen\frac{3\pi}{4}$ é equivalente ao do:

a) $sen\frac{\pi}{6}$ $b) sen\ \frac{\pi}{2}$ c) $sen\frac{\pi}{4}$ d) $sen\frac{\pi}{3}$

5) O valor da expressão

$$p = \frac{sen150°. sen45°. sen120°}{sen210°. sen330°}$$

É igual a:

a) $\frac{1}{2}$ $b) \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

ESCOLA: ____

PROFESSOR: ____

ALUNO: ____

UNIDADE 8: GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO

1) Preencha o Quadro 1 com os valores do seno do número x dado (se necessário, utilize uma calculadora científica arredondando-se o valor encontrado até a segunda casa decimal):

Quadro 1: Arco e seus senos

x	$senx$	x	$senx$
0		$0-2\pi$	
$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}-2\pi$	
π		$\pi-2\pi$	
$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}-2\pi$	
2π			

2) A partir dos valores obtidos nos Quadro 1, faça um esboço do gráfico da função $f: x \to senx$.

3) A partir do gráfico obtido na Questão 2, responda:

a) Qual o VALOR MÁXIMO que $senx$ pode assumir? Qual o VALOR MINÍMO que $senx$ pode assumir?

b) Qual o intervalo correspondente ao conjunto imagem da função seno?

c) Qual a distância entre os números $-2\pi\ e\ 0$? E qual a distância entre os números $2\pi\ e\ 0$?

d) A linha que representa o gráfico da função seno no intervalo $-2\pi < x < 0$ e no intervalo $0 < x < 2\pi$ são idênticas? Se a sua resposta for positiva, como você justificaria isso?

4) Considerando APENAS o intervalo entre $0\ e\ 2\pi$ do Gráfico obtido na Questão 2, responda:

a) Em qual (is) intervalo (s) temos $f(x) \geq 0$? Este(s) intervalo(s) corresponde(m) qual(is) quadrante(s) no ciclo trigonométrico?

b) Em qual (is) intervalo (s) temos $f(x) \leq 0$? Este (s) intervalo(s) compreende(m) qual(is) quadrante(s) no ciclo trigonométrico?

c) Em qual(is) intervalo(s) de x a função $f(x) = senx$ é crescente?

d) Em qual(is) intervalo(s) de x a função $f(x) = senx$ é decrescente?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 11

1.2-Material do Professor

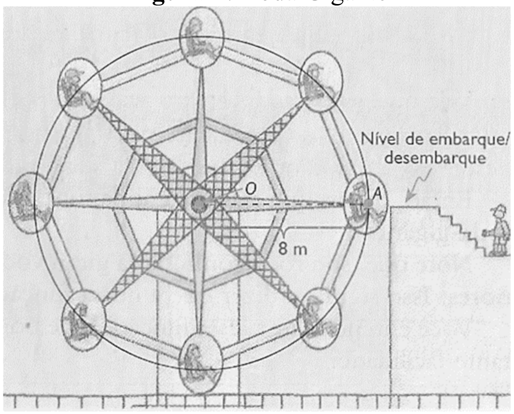
UNIDADE 1: FIO PRESO NA RODA GIGANTE

Considere que em um parque de diversões tenha uma roda gigante com raio medindo 8 metros, sendo A o ponto de embarque para o acesso às "gaiolas" em que ficam assentados os brincantes.

Em um sábado, uma criança planejou uma brincadeira a mais do que simplesmente "andar" de roda gigante: desejava enrolar o maior comprimento possível de um fio inextensível de tamanho infinito na circunferência da roda gigante.

Para isso, ela engatou uma extremidade deste fio no Ponto fixo A (Figura 1) e à medida que a roda gigante se movia, o fio era enrolado na roda gigante. Considere que no início do movimento da roda gigante a criança esteja sentada no Ponto A e que seu movimento ocorra no sentido anti-horário.

Figura 1: Roda Gigante



Fonte: Bianchini e Paccola (1995, p.285)

Considere ainda, que toda vez que o fio quebrava, a criança reiniciava a brincadeira sempre engatando o fio no ponto A. O Quadro 1 apresenta quantos metros o fio inextensível foi enrolado na circunferência até ele quebrar:

A partir desta situação, faça o que se pede:

Quadro 1: Comprimento percorrido pelo fio até quebrar e arco formado

DISTÂNCIA PERCORRIDA ATÉ O FIO QUEBRAR
28 m
45 m
33 m
40,55 m
10 m

8) Considere que a distância percorrida pelo fio até quebrar esteja associada a um número real x, onde x é o valor numérico desta medida. Preencha O Quadro 2 com o valor do número real x e o valor do arco $\widehat{AB}$ percorrido pelo fio até quebrar:

Quadro 2: Associando o comprimento a um número real

DISTÂNCIA PERCORRIDA ATÉ O FIO QUEBRAR	MEDIDA DO ARCO $\widehat{AB}$ (ATÉ O FIO QUEBRAR)	VALOR DE x
28 m		
45 m		
33 m		
40,55 m		
10 m		

9) Considere que no sábado seguinte a criança foi novamente ao parque de diversões para brincar na roda gigante. Porém, ao observar o movimento da roda gigante, a criança percebeu que ela estava girando no sentido horário. A criança queria saber uma forma de descobrir o sentido do movimento da roda gigante a partir do valor do número associado ao comprimento do fio, já que em um sábado ela estava girando no sentido anti-horário e no outro, no sentido horário.

Entretanto. ela tinha um problema: o número x associado ao comprimento do fio inextensível era sempre positivo e a medida do arco associado a ele também, não interessando se o movimento da roda gigante se dava no sentido horário, ou no sentido anti-horário!

Para tentar resolver este problema, a criança contou as duas situações ao seu tio, que era professor de Matemática, o qual criou as seguintes regras:

Regra 1: Se a roda gigante estiver movendo-se no sentido anti-horário, como ele é o sentido positivo, o valor de x será positivo!

Regra 2: Se a roda gigante estiver movendo-se no sentido horário, como ele é o sentido negativo, o valor de x será negativo!

c) Para descobrir se a criança conseguiu entender sua proposta, o tio dela considerou os dados do da questão 1 e atribuiu valores ao comprimento do fio do 2º sábado, conforme apresentado no Quadro 3. Preencha as colunas referentes ao sinal associado a ao valor do número x em cada caso:

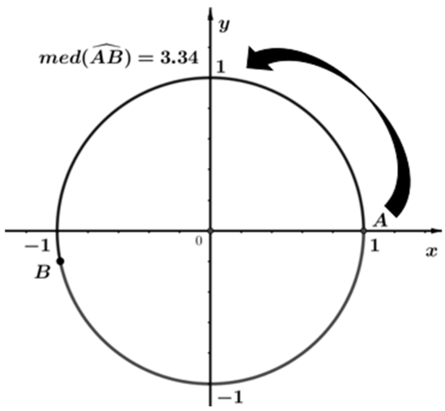
Quadro 3: Proposta do tio da criança

	$med(\widehat{AB})$	SINAL ASSOCIADO	VALOR DO NÚMERO x
SENTIDO HORÁRIO (1º SÁBADO)	28		
	45		
	33		
	40,55		
SENTIDO ANTI-HORÁRIO (2º SÁBADO)	35,78		
	54,5		
	100,33		
	74,75		
	110		

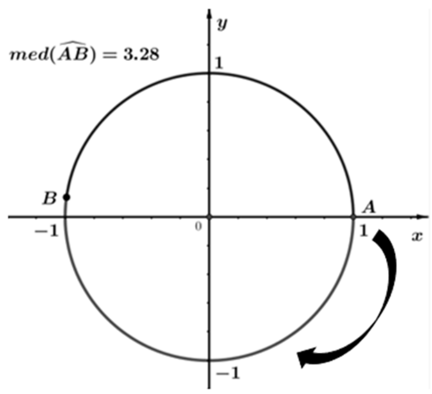
d) Cada número real x está associado a um único arco $\widehat{AB}$? Justifique sua resposta.

10) Enumere a segunda coluna a partir da primeira, associando o número real x ao Arco $\widehat{AB}$ respeitando-se o sentido indicado no ciclo trigonométrico:

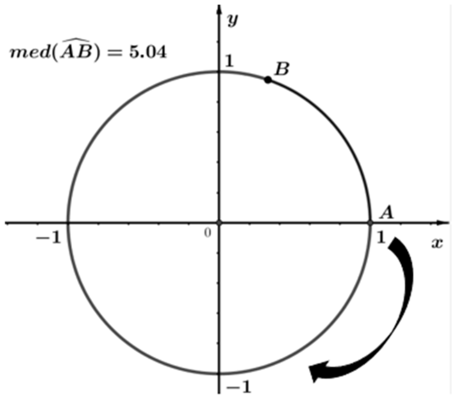
(I) $x = 1,25$ ( )



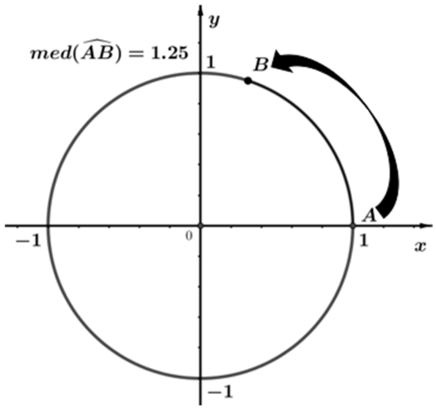
(II) $x = -5,04$ ( )



(III) $x = 3{,}34$ ( )



(IV) $x = -3{,}28$ ( )



11) Considerando as respostas dadas na questão anterior, se você tivesse que associar o número x a uma das extremidades do arco $\widehat{AB}$, a qual extremidade você associaria? Ao Ponto A ou o Ponto B? Justifique sua resposta.

12) Cada número real x está associado a **um único** ponto B, extremidade do arco $\widehat{AB}$ no ciclo trigonométrico? Justifique sua resposta.

13) A regra criada pelo tio da criança da roda gigante, que associa o número real x ao ponto $B = E(x)$, extremidade do arco $\widehat{AB}$ pode ser classificada como uma função? Justifique sua resposta.

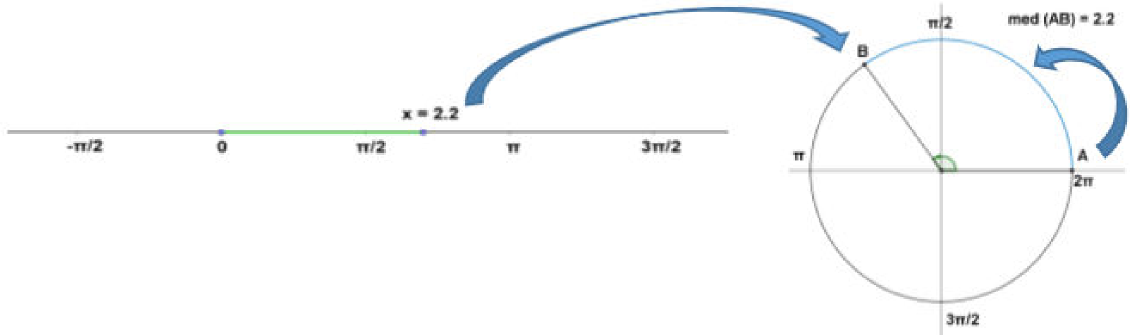
INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 1

A FUNÇÃO DE EULER

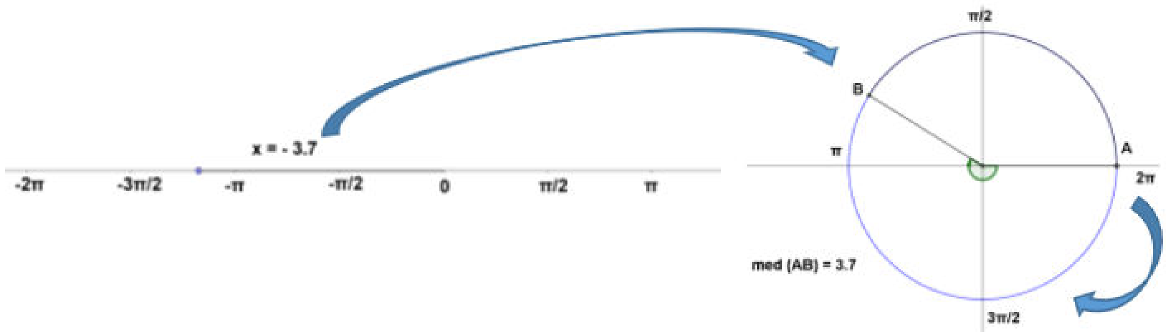
Na Matemática existe uma função denominada de **Função De Euler (E)** que relaciona o número real x ao Ponto $B = E(x)$ no ciclo trigonométrico C. O Ponto $E(x)$ é extremidade do arco $\widehat{AB}$, que tem início na origem dos arcos no ciclo trigonométrico (ponto A) e comprimento igual a x.

A relação entre o número real x e o comprimento do arco de circunferência $\widehat{AB}$ se dá da seguinte forma:

1) **Se x é um número real positivo**, o arco $\widehat{AB}$ deve estar no sentido **POSITIVO** do ciclo trigonométrico:



2) **Se x é um número real negativo**, o arco $\widehat{AB}$ deve estar no sentido **NEGATIVO** do ciclo trigonométrico:



Assim, a função $E: x \to E(x)$. Isto quer dizer que a função E associa um **número real x** a **um ponto $E(x) \in C$**. $E(x)$ é denominado de **imagem de x** no ciclo trigonométrico C mediante a função E. Outra representação para E é: $E: \mathbb{R} \to B$, sendo B o ponto referente à extremidade do arco $\widehat{AB}$ de medida x.

14) Pela função de Euler E, em qual quadrante encontra-se o número real:

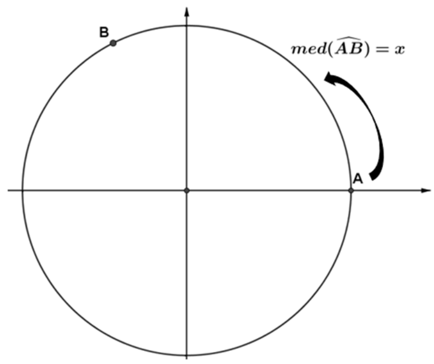
a) $x = -6$ b) $x = -3$ c) $x = 5$ d) $x = 1$ e) $x = \frac{4\pi}{3}$

UNIDADE 2: NÚMEROS DIFERENTES NA RETA, PONTOS IGUAIS NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Considerando a Função de Euler E e o número real x indicado pelo Ponto B, extremidade do arco $\widehat{AB}$ (Figura 1) no sentido anti-horário, faça o que se pede:

7) A partir do Ponto B indique no Quadro 1 o ponto que representa no ciclo trigonométrico o número real apresentado em cada caso:

Figura 1: Número x no ciclo trigonométrico



Quadro 1: Pontos no ciclo trigonométrico mediante a função E

NÚMERO DE VOLTAS COMPLETAS	SENTIDO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO	NÚMERO REAL RESULTANTE	PONTO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO ($E(x)$)
1	POSITIVO		
1	NEGATIVO		
2	POSITIVO		
2	NEGATIVO		
3	POSITIVO		
3	NEGATIVO		
4	POSITIVO		
4	NEGATIVO		

8) Os números $\pi,\ \pi \pm 2\pi,\ \pi \pm 4\pi,\ \pi \pm 6\pi$ e $\pi \pm 8\pi$ têm a mesma imagem $E(x)$ no ciclo trigonométrico? Caso sua resposta seja afirmativa, como você justificaria isso?

9) Existem números reais distintos que possuem a mesma imagem no ciclo trigonométrico? Se a sua resposta for positiva, quando isso acontece?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 2

Observe que a Função de Euler tem imagens que se repetem cada vez que é somado k vezes o valor de 2π ao número x. Isto acontece porque quando esta soma é realizada, no ciclo trigonométrico é dado uma volta completa e a imagem de x acaba sendo a mesma do número $x + 2\pi$, $x + 4\pi$, $x + 6\pi$, $x + 8\pi$, etc. Isto acontece também no sentido anti-horário: A imagem de x pela função E é a mesma para $x, x - 2\pi, x - 4\pi$, $x - 6\pi$,etc. Em linguagem Matemática escrevemos:

$$\boldsymbol{E(x) = E(x + 2k\pi)}\ (\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z})$$

10) Um piloto de *Fórmula 1* percorre uma pista perfeitamente circular. Após percorrer 500 metros, ele passa pelo ponto D pela primeira vez. Quantas voltas completas ele terá que percorrer para passar novamente pelo ponto D pela segunda vez?

11) Qual o menor percurso a ser percorrido por este piloto para que ele passe sempre pelo ponto D?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 3

O que foi exposto na Intervenção Formalizante 2, indica que a Função de Euler $E: x \rightarrow E(x)$ é uma função periódica, pois satisfaz a seguinte definição:

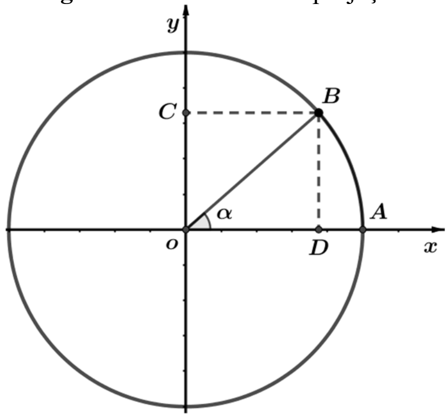
Uma função f é dita periódica se existe um número real $p' \neq 0$ tal que, para todo $x \in D(f)$ e $x + p' \in D(f)$, temos: $\boldsymbol{f(x + p') = f(x)}$ $\quad (\boldsymbol{i})$

O menor valor de p' estritamente positivo em que ocorre $(\boldsymbol{i})$ é denominado de **PERÍODO** de uma função periódica, representamos este período simplesmente por $\boldsymbol{p}$".

12) Você conhece outros exemplos de funções ou fenômenos que se repetem (fenômenos periódicos)? Cite-os.

UNIDADE 3: A FUNÇÃO DE EULER E A RAZÃO TRIGONOMÉTRICA SENO

Figura 1: Ponto B e suas projeções



Você lembra da brincadeira a roda gigante? Pois bem, considere que ela tenha sido representada no ciclo trigonométrico (Figura 1). Nela, foram representados os pontos de embarque/desembarque (ponto A) e o ponto B. Além destes pontos, o tio da criança marcou nos eixos $x\ e\ y$ os pontos D e C, respectivamente, formando os segmentos $\overline{OD}$ e $\overline{OC}$. Esses segmentos $\overline{OD}$ e $\overline{OC}$ são as projeçoes ortogonais do ponto B sobre os eixos $x\ e\ y$, respectivamente:

A partir das informações apresentadas e da figura acima, onde se tem o triângulo ODB, retângulo em D, responda:

4) Os segmentos $\overline{DB}$ e $\overline{OC}$ têm o mesmo comprimento?
5) Qual a medida do segmento $\overline{OB}$?
6) Utilizando a razão trigonométrica seno, investigue a relação existente entre o seno e o segmento $\overline{OC}$.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 4

$$sen\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}}$$

Sabendo que: $\overline{BD} = \overline{OC}$ e que $\overline{OB} = 1$, temos: $sen\alpha = \frac{\overline{OC}}{1}$

Logo: $sen\alpha = \overline{OC}$

O seno de um arco no ciclo trigonométrico é igual ao segmento $\overline{OC}$, correspondente à projeção ortogonal do raio do ciclo trigonométrico (com extremidade no ponto B) sobre o eixo $0y$.

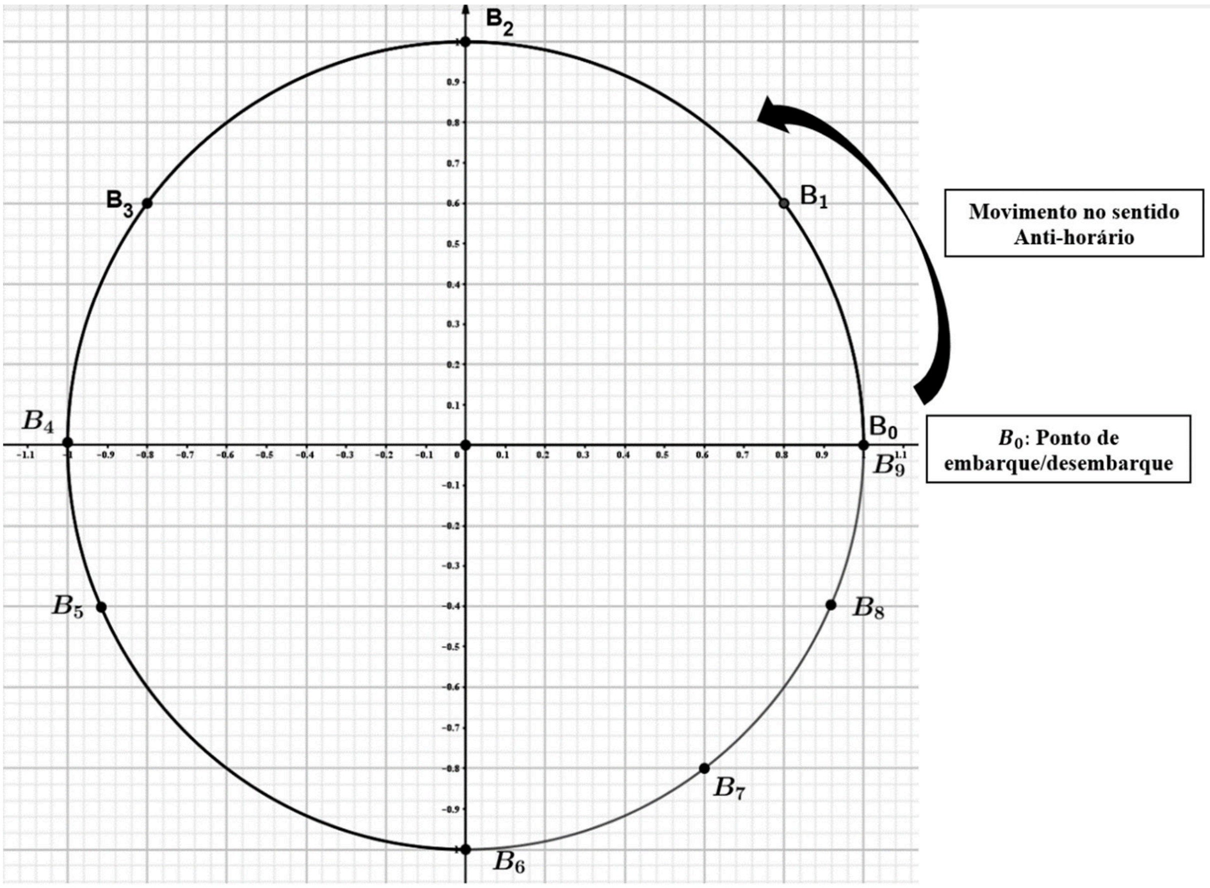
UNIDADE 4: SENO VERSUS ORDENADA

MATERIAIS: Lista de tarefas, lápis, borracha e caderno.

PROCEDIMENTOS: Fazer a leitura do texto e resolver as questões propostas.

Considere que a Figura 1 seja a representação da roda gigante em um ciclo trigonométrico, onde o ponto B_0 é o ponto de embarque às gaiolas dos brincantes:

Figura 1: Representação da roda gigante em papel quadriculado



No ciclo trigonométrico acima os eixos $0x$ e $0y$ estão graduados em 0,1.

Nele, foram marcadas as imagens de dez números reais representados (*pela função de Euler*) pelos pontos $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$ e B_9.

Considere que os pontos pertencentes ao ciclo trigonométrico que estão acima do eixo $0x$ sejam chamados de ALTURA e os pontos que estão abaixo do referido eixo sejam chamados de PROFUNDIDADE.

A partir destas informações faça o que se pede:

5) Preencha o Quadro 1 conforme indicado na linha correspondente ao ponto B_7 (pode ser utilizado valores aproximados), onde é atribuído o sinal positivo à projeção ortogonal relacionada a ALTURA e o sinal negativo, caso esteja relacionado a uma PROFUNDIDADE:

Quadro 1: Pontos e suas coordenadas

Ponto	Projeção ortogonal do raio sobre o eixo $0y$	Altura ou profundidade?	Sinal atribuído (negativo/ positivo)	Projeção ortogonal com o sinal atribuído	Ordenada do ponto B_n no ciclo trignométrico
B_0					
B_1					
B_3					
B_5					
B_6					
B_7	0,8	Profundidade	Negativo	$-0{,}8$	$-0{,}8$
B_8					

6) As projeções ortogonais (acompanhadas do sinal referente a altura ou profundidade) e a ordenada dos pontos representado em cada linha são sempre iguais? Por que você acha que isso ocorre?

7) Cada ponto do ciclo trigonométrico tem uma projeção ortogonal sobre o eixo $0y$? Cada ponto do ciclo trigonométrico tem um seno? Justifique.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 5

A ordenada de um ponto B no ciclo trigonométrico, imagem do número real x, corresponde ao valor do seno deste ponto. Em outras palavras: dado um número real x, o seno dele é igual ao valor da sua ORDENADA.

8) A Figura 3 apresenta um ciclo trigonométrico no qual estão representados os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K. Estes pontos são imagens dos números reais $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\ e\ x_{11}$, respectivamente. Determine:

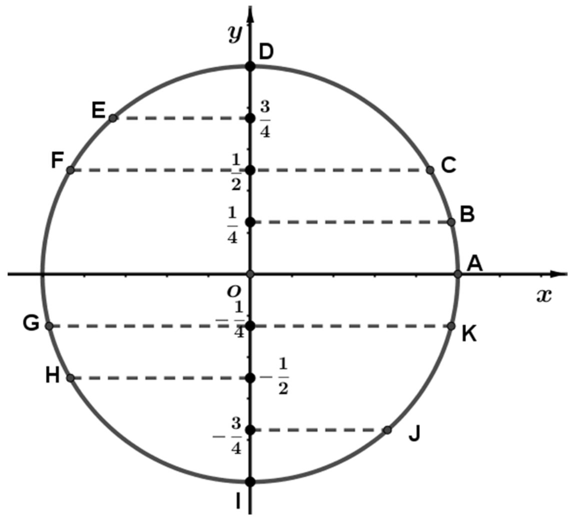
e) $senx_1 + senx_3$

f) $senx_{10} + senx_2$

g) $senx_4 + senx_8$

h) $senx_5 - 2.senx_6$

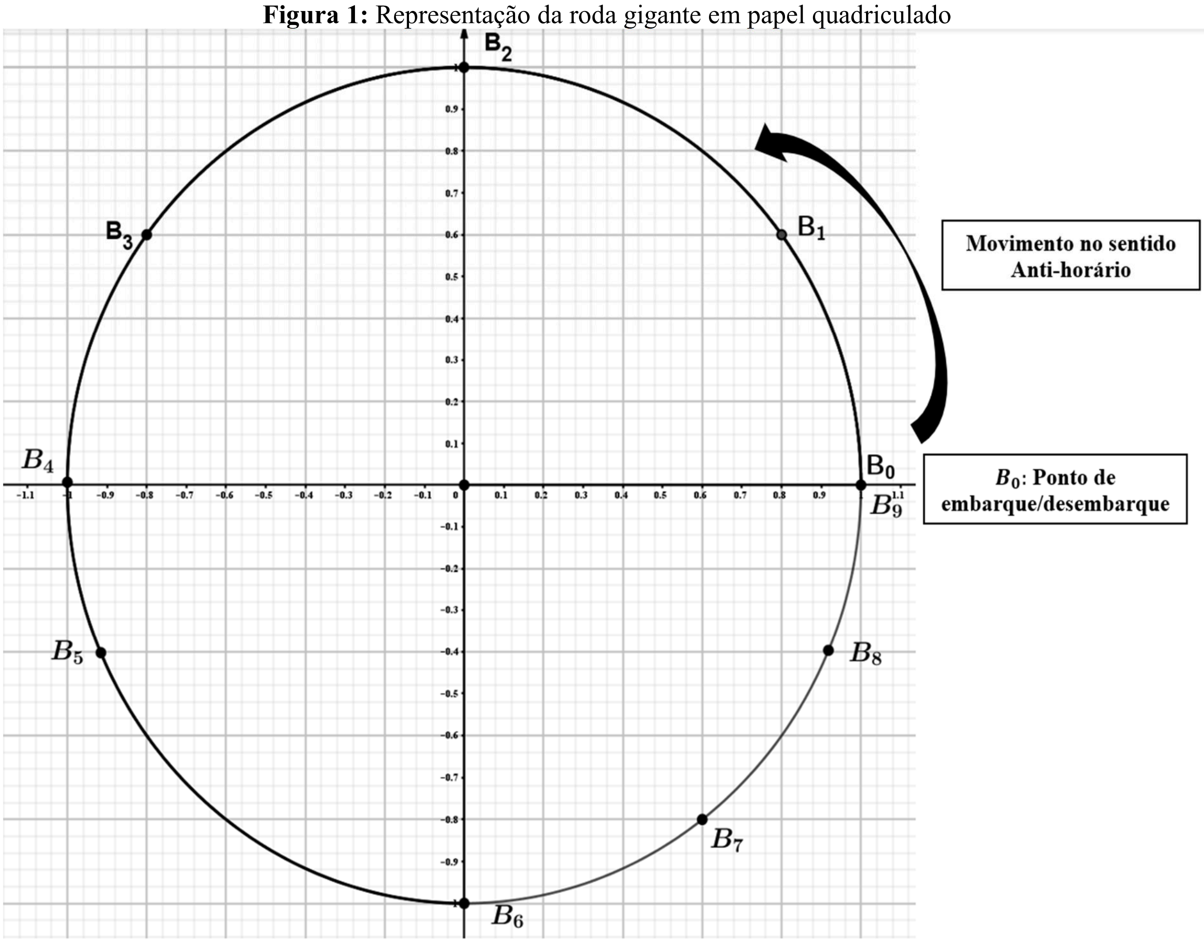
Figura 3: Seno de um número no ciclo trigonométrico



UNIDADE 5: PASSANDO PELO MESMO PONTO

5) Observe a Figura 1 que representa nove pontos no ciclo trigonométricos e responda as questões a seguir:

Figura 1: Representação da roda gigante em papel quadriculado



c) Preencha o Quadro 1 com os valores aproximados dos senos dos números representados pelos pontos indicados:

Quadro 1: Seno do número representado

IMAGEM DO NÚMERO REAL	SENO DO NÚMERO REAL
B_1	
$B_1 + 2\pi$	
$B_1 + 4\pi$	
$B_1 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$	

Fonte: O autor (2019)

d) Preencha o Quadro 2 com os valores aproximados dos senos dos números representados pelos pontos indicados:

Quadro 2: Seno do número representado

IMAGEM DO NÚMERO REAL	SENO DO NÚMERO REAL
B_5	
$B_5 + 2\pi$	
$B_5 + 4\pi$	

$B_5 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$	

6) Os pontos B_n e $B_n + 2k\pi\ (k\epsilon\mathbb{Z})$ estão representados na mesma posição no ciclo trigonométrico?

7) Os pontos B_n e $B_n + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$ têm o mesmo valor do seno? Por que você acha que isso ocorre?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 6

Os números $x, x + 2\pi, x + 4\pi, \ldots, x + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ têm os mesmos valores senos, pois eles têm a mesma imagem no ciclo trigonométrico (pela função de Euler). Obviamente que, sendo $k \in \mathbb{Z}$, k a mesma coisa acontece em relação aos números $x, x - 2\pi, x - 4\pi, \ldots, x - 2k\pi$.

Genericamente, podemos afirmar que:

$$\boldsymbol{senx = sen(x + 2k\pi)(k} \in \mathbb{Z})$$

8) A partir da resolução da questão anterior, e considerando a Figura 1, julgue os itens como VERDADEIRO (V) ou FALSO (F):

( ) Pela Função de Euler (E), todo número real x tem uma imagem $E(x)$ no ciclo trigonométrico, que corresponde ao ponto B, extremidade do arco $\widehat{AB}$ de medida x.

( ) Somente alguns pontos no ciclo trigonométrico tem um par ordenado associado a ele.

( ) Todo ponto no ciclo trigonométrico tem um par ordenado associado a ele.

( ) O seno de um Ponto B no ciclo trigonométrico equivale a projeção ortogonal de B sobre o eixo $0x$.

( ) Dado um Ponto B no ciclo trigonométrico, o seno deste ponto é igual ao valor da sua abscissa.

( ) Dado um Ponto B no ciclo trigonométrico, o seno deste ponto é igual ao valor da sua ordenada.

( ) Os números reais $x, x + 2\pi, x + 4\pi, \ldots, x + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ têm o mesmo seno, pois possuem a mesma ordenada no ciclo trigonométrico.

( ) Pela Função de Euler (E), para cada número real x está associado a um único valor para $senx$, que é numericamente igual ao valor da ordenada de $E(x)$.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 7

Uma das grandes contribuições da Função de Euler (E) para a trigonometria foi a possibilidade de associar um número real x a um ponto do ciclo trigonométrico.

Essa associação permite definir o seguinte:

"Para todo número real $\boldsymbol{x}$ existe um único real $\boldsymbol{f(x)}$ tal que $\boldsymbol{f(x) = senx}$"

Como esta relação é biunívoca (*cada número real x está associado a uma única ordenada no ciclo trigonométrico*), podemos afirmar que esta associação é na verdade uma **função** f, denominada de **FUNÇÃO SENO**.

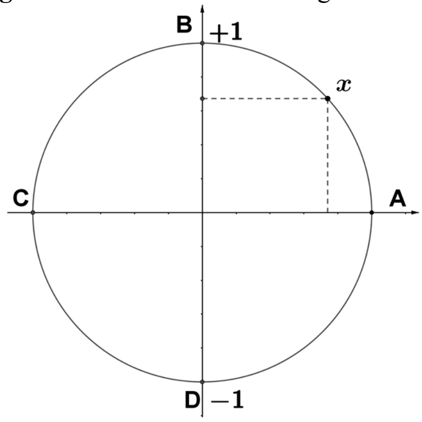
Assim, para todo número real x existe o número real $f(x)$, imagem de x pela função f, tal que:

$$f(x) = senx$$

UNIDADE 6: PROPRIEDADES DA FUNÇÃO SENO

3) Considere os pontos A, B, C e D (Figura 1) e o número x no ciclo trigonométrico, representados na roda gigante do parque de diversões (em uma escala):
A partir destas informações, responda:

Figura 1: Número x no ciclo trigonométrico



g) Em qual ponto a pessoa estará na MAIOR ALTURA POSSÍVEL na roda gigante? Qual o valor do seno neste ponto?
h) Qual o MAIOR VALOR que o seno pode assumir?
i) Em qual ponto a pessoa estará na MAIOR PROFUNDIDADE POSSÍVEL na roda gigante?
j) Qual o MENOR VALOR que o seno pode assumir?
k) O valor de $senx$ varia de qual número a qual número?
l) A partir de quantas volta completa o valor de $senx$ começa a se repetir?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 8

Seja a função f definida por:$f: x \rightarrow senx$ $(FUNÇÃO\ SENO)$

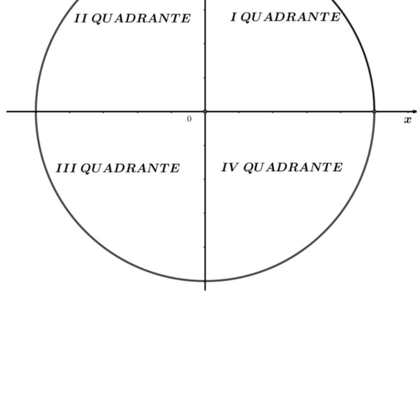
O **Domínio da função $\boldsymbol{f}$ é** $\mathbb{R}$ (x é qualquer número real). A **Imagem de $\boldsymbol{f}$** é o intervalo: $[-1; 1]$, ou seja, $-1 \leq senx \leq 1$. **Portanto, a função $\boldsymbol{f}$ é definida de** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Afinal, ela associa um número real x ao seu seno, que também é um número real). Na função seno, para todo x real, temos:

$$\boldsymbol{senx = sen(x + 2k\pi)}, k \in Z$$

Assim a função seno é periódica e seu $\boldsymbol{p = 2\pi}$ (A partir de uma volta completa – de 0 a 2π – o valor do seno se repete).

4) Considere, que a figura que representa a roda gigante na questão anterior esteja dividida em quadrantes e que os arcos estão orientados no SENTIDO POSITIVO (Figura 2), faça o que se pede:

Figura 2: Ciclo trigonométrico



d) Em quais quadrantes a criança terá uma ALTURA em relação ao eixo $0x$? E em quais quadrantes a criança terá uma PROFUNDIDADE em relação ao eixo $0x$?
e) Em quais quadrantes o seno é MAIOR que zero? Em quais quadrantes o seno é MENOR do que zero?
f) Preencha o Quadro 1 informando se os valores da função seno CRESCEU ou DIMINUIU em cada intervalo:

Quadro 1: Crescimento/ Decrescimento da função seno

INTERVALO CONSIDERADO	CRESCIMENTO/DECRESCIMENTO
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 9
SINAL E CRESCIMENTO/DECRESCIMENTO DA FUNÇÃO SENO

A partir da resolução das questões propostas, podemos fazer um quadro resumo com o crescimento e decrescimento da função seno, considerando o sentido anti-horário dos arcos:

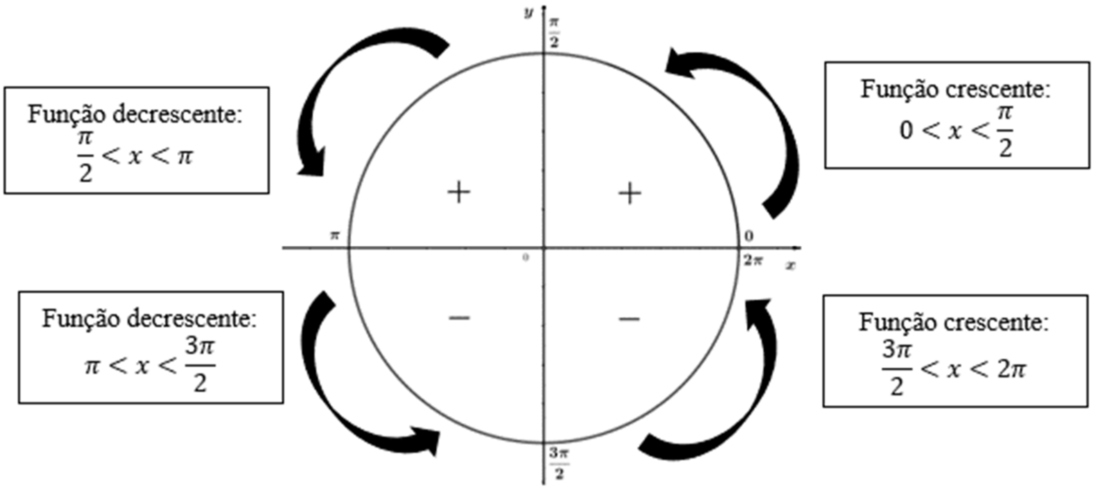
Quadro 3: Quadro-resumo dos sinais e do crescimento/decrescimento da função seno

	1º QUADRANTE	2º QUADRANTE	3º QUADRANTE	4º QUADRANTE
SINAL	Positivo	Positivo	Negativo	Negativo
CRESCIMENTO / DECRESCIMENTO	Crescimento	Decrescimento	Decrescimento	Crescimento

Fonte: O autor (2019)

Essas informações podem ser interpretadas no ciclo trigonométrico, conforme mostra a Figura 2:

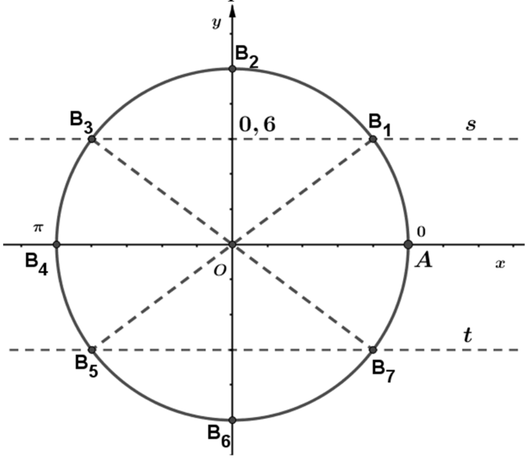
Figura 2: Sinais e do cresciment/decrescimento no ciclo trigonométrico



UNIDADE 7: RETORNANDO AO 1º QUADRANTE

Considere que o ciclo trigonométrico representado pela Figura 1 represente a roda gigante do início da nossa história. Nele foram marcados os pontos B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 e B_7.
Do ponto B_1 foi traçada a *reta* s enquanto do ponto B_7 foi traçada a *reta* t. Sabe-se que ambas as retas, s e t, são paralelas ao eixo $0x$ e que os pontos B_1 e B_7 estão à mesma distância (0,6) do eixo das abscissas. A partir destas informações, faça o que se pede:

Figura 1: Ciclo trigonométrico com vários pontos



6) Considere que o número real x esteja associado ao Ponto B_3 no 2º Quadrante, isto é, $med(\widehat{AB_3}) = x$, e responda o que se pede:
e) Os pontos B_1 e B_3 estão à MESMA ALTURA?
f) Os valores do $sen(\widehat{AB_1})$ e do $sen(\widehat{AB_3})$ são iguais?
g) Você pode afirmar que $med(\widehat{AB_1}) = med(\pi - x)$?
h) É possível afirmar que, se x estiver no 2º quadrante, $senx = sen(\pi - x)$?

7) Considere que o número real x agora esteja associado ao Ponto B_5 no 3º Quadrante, isto é, $med(\widehat{AB_5}) = x$:
e) Você pode afirmar que $med(\widehat{AB_1}) = med(x - \pi)$?
f) Qual o valor do $sen(\widehat{AB_1})$? E o valor do $sen(\widehat{AB_5})$?
g) Você pode afirmar que $sen(\widehat{AB_1}) = -sen(\widehat{AB_5})$?
h) É possível afirmar que, se x estiver no 3º quadrante, $senx = -sen(x - \pi)$?

8) Considere agora, que o número real x esteja associado ao Ponto B_7 no 4º Quadrante, isto é, $med(\widehat{AB_7}) = x$:
e) $[I_r]$ Você pode afirmar que $med(\widehat{AB_1}) = med(2\pi - x)$?
f) $[I_r]$ Qual o valor do $sen(\widehat{AB_1})$? E o valor do $sen(\widehat{AB_7})$?
g) $[I_r]$ Você pode afirmar que $sen(\widehat{AB_1}) = -sen(\widehat{AB_7})$?
h) $[I_r]$ Você pode afirmar que $senx = -sen(2\pi - x)$?

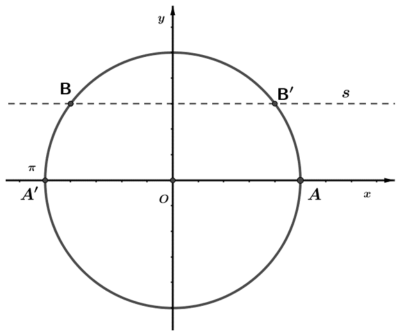
INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 10

A SIMETRIA NO CICLO TRIGONOMÉTRICO E A INFLUÊNCIA NO VALOR DO SENO

No ciclo trigonométrico podemos perceber simetrias entre alguns pontos contidos nele. Estas simetrias podem facilitar o cálculo dos valores dos senos destes pontos. Considere os três casos a seguir:

1° CASO: x está no SEGUNDO quadrante ($\frac{\pi}{2} < x < \pi$)

Figura 1: $med(\widehat{AB}) = x$

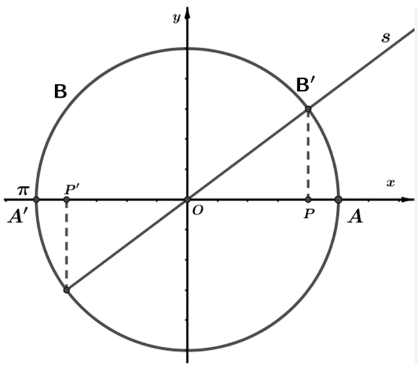


Tracemos pelo ponto B a reta s paralela ao eixo $0x$. Esta reta intersecta o ciclo trigonométrico no ponto B'(**Figura 1**). Percebemos que: $med(\widehat{AB'}) = med(\widehat{BA'}) = \pi - x$.

Logo: $(\boldsymbol{i})$ $\boldsymbol{senx = sen(\pi - x)}$

2º CASO: x está no TERCEIRO quadrante ($\pi < x < \frac{3\pi}{2}$)

Figura 2: $med(\widehat{AB}) = x$

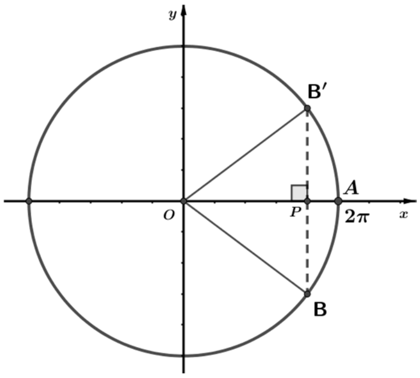


Tracemos por B uma reta s que intersecta o ponto O. Esta reta passará pelo ponto B' pertencente ao ciclo trigonométrico (**Figura 2**): Os ângulos $A\hat{O}B$ e o ângulo $A'\hat{O}B$ são opostos pelo vértice. Logo: $med(\widehat{A'B}) = med(\widehat{AB'}) = x - \pi$. Com isso, podemos afirmar que os segmentos $\overline{PB'}$ e o segmento $\overline{P'B}$ **tem a mesma medida**, porém, **senos simétricos** (no 3º quadrante o **seno é negativo**).

Portanto: $(\boldsymbol{ii})$ $\boldsymbol{senx = sen(x - \pi)}$

3º CASO: x está no QUARTO quadrante ($\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$)

Figura 3: $med(\widehat{AB}) = x$



Tracemos pelo ponto $\boldsymbol{B}$ um segmento perpendicular ao eixo $0\boldsymbol{x}$ que intersecte o eixo $\boldsymbol{ox}$ em $\boldsymbol{P}$ e tenha extremidade no ponto $\boldsymbol{B'}$ pertencente ao ciclo trigonométrico (Figura 3). O triângulo $\boldsymbol{BOB'}$ é isósceles, pois $\overline{\boldsymbol{OB'}} \equiv \overline{\boldsymbol{OB}}$ =Raio do ciclo trigonométrico (o símbolo ≡ significa congruência) . Logo, o P é o ponto médio do segmento $\overline{\boldsymbol{BB'}}$. Deste modo, os segmentos $\overline{\boldsymbol{BP'}}$ e $\overline{\boldsymbol{B'P}}$ tem a mesma medida.

Se triângulo $\boldsymbol{BOB'}$ é isóscele, temos que: $\boldsymbol{med(\widehat{AB'}) = med(\widehat{BA}) = 2\pi - x}$

Assim, apesar de os segmentos $\overline{\boldsymbol{BP'}}$ e $\overline{\boldsymbol{B'P}}$ terem a mesma medida, seus senos são simétricos (no 4º quadrante o seno é negativo).

Portanto: $(\boldsymbol{iii})$ $\boldsymbol{senx = -sen(2\pi - x)}$

OBSERVAÇÃO 1:

Este procedimento de encontrar o valor do seno de um arco a partir de um arco do 1º Quadrante é conhecido como o processo de REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE. Ele é muito útil em cálculos de valores de senos de arcos que podem ser reduzidos a um arco conhecido no primeiro quadrante.

OBSERVAÇÃO 2:

Embora tenhamos feito a redução ao 1º Quadrante com arcos em radianos, pode-se utilizar a mesma ideia para se obter a redução de ângulos em graus, conforme os exemplos abaixo:

Exemplo 1:

Qual o valor de $sen150°$?

Solução:

$$sen150° = sen30° = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2:

Qual o valor de $sen210°$?

Solução:

$$sen210° = -sen30° = -\frac{1}{2}$$

9) O valor do $sen\frac{3\pi}{4}$ é equivalente ao do:

b) $sen\frac{\pi}{6}$ $b) sen\ \frac{\pi}{2}$ c) $sen\frac{\pi}{4}$ d) $sen\frac{\pi}{3}$

10) O valor da expressão

$$p = \frac{sen150°.sen45°.sen120°}{sen210°.sen330°}$$

É igual a:

b) $\frac{1}{2}$ $b)\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

UNIDADE 8: GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO

5) Preencha o Quadro 1 com os valores do seno do número x dado (se necessário, utilize uma calculadora científica arredondando-se o valor encontrado até a segunda casa decimal):

Quadro 1: Arco e seus senos

x	$senx$	x	$senx$
0		$0 - 2\pi$	
$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2} - 2\pi$	
π		$\pi - 2\pi$	
$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2} - 2\pi$	
2π			

6) A partir dos valores obtidos nos Quadro 1, faça um esboço do gráfico da função $f: x \to senx$.

7) A partir do gráfico obtido na Questão 2, responda:

e) Qual o VALOR MÁXIMO que $senx$ pode assumir? Qual o VALOR MINÍMO que $senx$ pode assumir?

f) Qual o intervalo correspondente ao conjunto imagem da função seno?

g) Qual a distância entre os números -2π e 0? E qual a distância entre os números 2π e 0?

h) A linha que representa o gráfico da função seno no intervalo $-2\pi < x < 0$ e no intervalo $0 < x < 2\pi$ são idênticas? Se a sua resposta for positiva, como você justificaria isso?

8) Considerando APENAS o intervalo entre 0 e 2π do Gráfico obtido na Questão 2, responda:

e) Em qual (is) intervalo (s) temos $f(x) \geq 0$? Este(s) intervalo(s) corresponde(m) qual(is) quadrante(s) no ciclo trigonométrico?

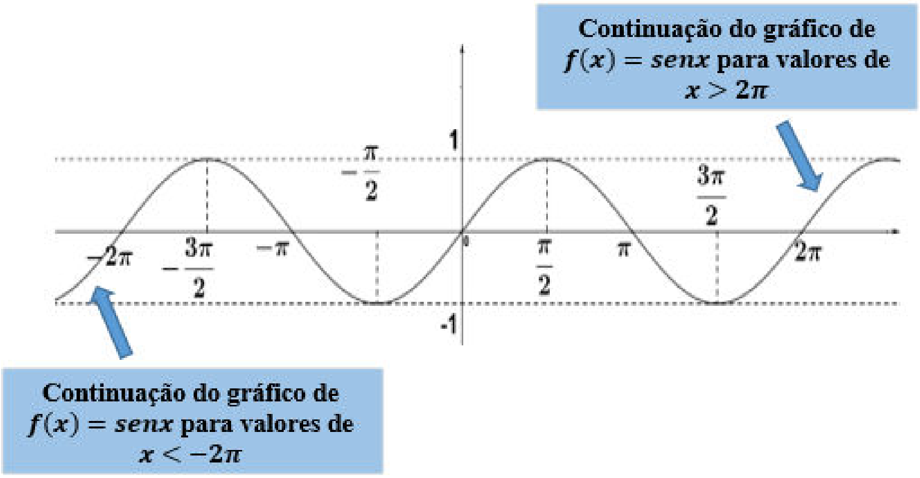
f) Em qual (is) intervalo (s) temos $f(x) \leq 0$? Este (s) intervalo(s) compreende(m) qual(is) quadrante(s) no ciclo trigonométrico?

g) Em qual(is) intervalo(s) de x a função $f(x) = senx$ é crescente?

h) Em qual(is) intervalo(s) de x a função $f(x) = senx$ é decrescente?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 11

O gráfico obtido na resolução da Questão 2 é apenas uma parte do gráfico da função seno, pois como já vimos anteriormente, para todo número real, pela função seno, existe o valor de um seno correspondente. O gráfico abaixo indica essa continuidade para $x > 2\pi$ e $x < -2\pi$:



A partir da resolução das questões anteriores e da representação gráfica da função $f(x) = senx$ acima, podemos extrair as seguintes propriedades:

- ✓ A função f é uma **FUNÇÃO PERIÓDICA**, pois seu gráfico sempre se repete com intervalos de 2π, isto é, o **PERÍODO** de f $p = 2\pi\ rad$;
- ✓ O **CONJUNTO IMAGEM** DE f é o intervalo: $-1 \leq senx \leq 1$;
- ✓ O **CONJUNTO DOMÍNIO** da função f é o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$);
- ✓ A função é **POSITIVA** no 1º e no 2° quadrante e **NEGATIVA** nos 3° e 4° quadrantes.
- ✓ A função é **CRESCENTE** no 1º e no 4° quadrante e **DECRESCENTE** no 2° e 3° quadrante.

OBSERVAÇÃO: Comumente, o conjunto imagem da função seno é denominado de **“amplitude**” e é calculada fazendo a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da função. Sendo A a **amplitude** da função $f(x) = senx$, temos que $A = 1 - (-1) = 2$. Logo, a amplitude da função referida é 2.

2- CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

Esta seção trata dos conteúdos matemáticos inerentes ao estudo da Função Seno que podem ser consultados pelos docentes, caso seja necessário. Nela, foram consideradas as obras de: Alencar Filho (1985); Carmo, Morgado e Wagner (2005); Lima et al (2006); Lima (2013); Neto et al (2009) e Niles (1996).

2.1-Funções

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática atual. Existem vários tipos de funções, as quais podem ser classificadas e estudadas sob diversos critérios matemáticos. Entretanto, na presente subseção falaremos apenas de definições, qualidades e outras propriedades de funções elementares no $\mathbb{R}^2$ relevantes para o estudo da função seno.

2.1.1- Definição

Sejam A e B dois conjuntos não-vazios e f uma relação que associa todo elemento x de A a um único elemento y do conjunto B de tal forma que o par ordenado $(x; y) \in f$. Nesta situação, dizemos que f é uma função de A em B, cuja notação é dada por: $f: A \to B$ (Leia-se: Função f definida em A com valores em B).

O elemento $y \in B$, alcançado a partir de $x \in A$ mediante a função f geralmente é representado por $y = f(x)$. Dizemos que $f(x)$ é imagem de x mediante a função f. Geralmente é também utilizada a notação: $x \xrightarrow{f} f(x)$ para indicar que a função f transforma o elemento x em $f(x)$. O elemento x, neste caso, é chamado de variável independente (ou argumento) e o elemento $y = f(x)$, variável dependente.

Em uma função $f: A \to B$, o conjunto A é denominado de conjunto domínio de f (representado por $D(f)$) e o conjunto B é denominado de conjunto contradomínio (representado por $Cd(f)$). O conjunto formado por todos elementos $y \in B$, tal que $y = f(x)$ é denominado de conjunto imagem de f (representado por $Im(f)$).

O conceito de função não impede que os conjuntos A e B sejam iguais, assim como não impede que $Im(f) = Cd(f)$. Uma função importante na matemática ocorre quando os conjuntos A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais). Neste caso, dizemos que a função f é uma função real de variável real ou que f é uma função numérica. É relevante pontuar que uma função f é bem definida a partir de três elementos: conjunto domínio de f, o conjunto contradomínio de f e a lei de correspondência que associa todo elemento $x \in A$ a um elemento $y \in B$.

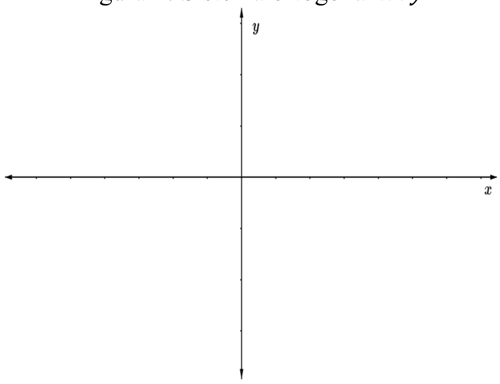
Faz-se necessário dizer ainda, que embora as funções mais conhecidas e estudadas na educação básica apresentem uma fórmula para associar o elemento x à sua imagem $f(x)$ por meio da função $f: A \to B$, não quer dizer que, obrigatoriamente, a forma de associar $x \to f(x)$ deva ser uma fórmula: pode ser feita esta associação de maneira discricionária, desde a lei de associação entre os elementos dos conjuntos A e B não seja ambígua, e que ela consiga associar todo elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Os livros da educação básica (e até alguns de nível mais avançado) costumam utilizar uma linguagem "imprecisa" dizendo "função $f(x)$" para se referir à transformação feita por f ao elemento x, embora o mais adequado seria dizer "função f" ou "$y = f(x)$" para dizer que y é uma função em x, embora saibamos que neste último caso, o que seria adequado era dizer que "y é o resultado da transformação de x pela função f". Em alguns momentos desta pesquisa podemos utilizar-nos desta linguagem "imprecisa" acreditando que o leitor saiba fazer a distinção entre estes conceitos.

2.1.2- Gráfico

Considere o sistema de eixos ortogonais $x0y$:

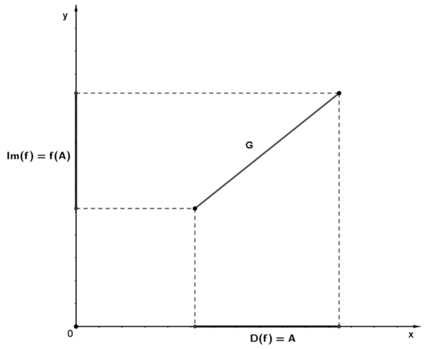
Figura 1: Sistema ortogonal $x0y$



Fonte: O autor (2019)

O gráfico G de uma função real $f: A \to B$ é o conjunto de todos os pares ordenados $(x; f(x))$ do plano, com $x \in D(f) = A$, conforme representa o Gráfico 1:

Gráfico 1: Gráfico G



Fonte: O autor (2019)

De acordo com a definição de função apresentada na subseção 1.2.1, a partir do gráfico G da função real f pode-se fazer as seguintes observações:

(1) Toda reta paralela ao eixo $0y$ conduzida a partir de um ponto $x \in D(f)$ intercepta o gráfico G em um único ponto.

(2) O conjunto domínio de f pode ser obtido projetando-se G sobre o eixo $0x$ na direção $0y$.

(3) O conjunto imagem de f pode ser obtido projetando-se G sobre o eixo $0y$ na direção $0x$.

2.1.3- Tipos de funções

A partir da definição de função, pode-se fazer vários estudos sobre os elementos que o compõe. Embora o presente trabalho não tenha como escopo fazer isso, consideramos relevantes fazer uma abordagem de alguns tipos de funções e de algumas propriedades a ela inerente, objetivando uma melhor compreensão do conceito de função seno; a qual, aliás, nada mais é do que um tipo de função.

a) Função par e ímpar

Dizemos que uma função f é par se e somente se, para todo $x \in D(f)$, se tem $-x \in D(f)$ e $f(-x) = f(x)$. A função ímpar por seu turno, obedece a seguinte definição: uma função f é dita ímpar se e somente se, para todo $x \in D(f)$, se tem $-x \in D(f)$ e $f(-x) = -f(x)$. Vale destacar que existem funções que não são pares nem ímpares, como a função $f(x) = |x + 2|$, por exemplo.

b) Função periódica

Uma função f é dita periódica se existe um número real $p' \neq 0$ tal que, para todo $x \in D(f)$: $x + p' \in D(f)$ e $f(x + p') = f(x)$. O número real p' é denominado de período da função periódica f. Observe que, se p' é o período da função periódica f, então todos os números reais kp' $(k \in \mathbb{Z}^*)$ também o são. Geralmente costuma-se usar os termos período principal ou simplesmente período de uma função periódica f o menor dos seus períodos estritamente positivos, representando-o por p.

c) Função monótona

Seja f uma função real e I um intervalo do conjunto dos números reais contido no $D(f)$. A função f é dita:

c.1) Crescente em I se e somente se:

$$\forall\, x', x'' \in I, \qquad x' \leq x'' \Rightarrow f(x') \leq f(x'').$$

c.2) Decrescente em I se e somente se:

$$\forall\, x', x'' \in I, \qquad x' \leq x'' \Rightarrow f(x') \geq f(x'').$$

c.3) Estritamente crescente em I se e somente se:

$$\forall\, x', x'' \in I, \qquad x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'').$$

c.4) Estritamente decrescente em I se e somente se:

$$\forall\, x', x'' \in I, \qquad x' < x'' \Rightarrow f(x') > f(x'').$$

c.5) Constante em I se e somente se:

$$\forall\, x', x'' \in I, \qquad f(x') = f(x'').$$

Se a função f é crescente, decrescente ou constante em I, dizemos que f é monótona em I. Dizemos ainda, que se a função f é estritamente crescente em I ou estritamente decrescente em I dizemos que f é estritamente monótona em I. Observação:

− A função real f é dita positiva, em I, e escrevemos $f \geq 0$, se e somente se:

$$\forall\, x \in I, f(x) \geq 0$$

− A função real f é dita negativa, em I, e escrevemos $f \leq 0$, se e somente se:

$$\forall\, x \in I, f(x) \leq 0$$

d) Função limitada

Uma função real $f: A \to B$ é dita limitada se existe um número real positivo M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é:

$$-M \leq f(x) \leq M$$

e) Função algébrica e transcendental

Denomina-se função algébrica toda função f definida por uma "expressão algébrica $y = f(x)$" que é raiz de uma equação na incógnita y na forma:

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0$$

Onde $n \in \mathbb{Z}_+$ e os $P_1(x)(1 = 0,1,2, \ldots, n)$ são polinômios inteiros em x.

A função transcendente é toda função que não é algébrica. Em outros termos, a função transcendente não pode ser definida por uma "expressão algébrica $y = f(x)$" que é raiz de uma equação na incógnita y na forma:

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0$$

2.2-Função seno

O estudo da função seno geralmente é apresentado nos livros didáticos como um avanço primeiramente em relação às razões trigonométricas e em seguida em relação à trigonometria no ciclo trigonométrico de arcos variando entre $0\ e\ 2\pi$. Neste último caso, geralmente é feito um estudo das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente associando-as aos arcos (ou ângulos) do ciclo trigonométrico e não a um número real qualquer; havendo, deste modo, uma limitação quanto aos estudos destas funções.

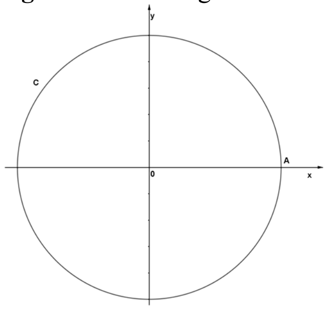
A História da Matemática aponta que a superação desta limitação se deu a partir de uma função denominada de Função de Euler, a qual permitiu associar um número real x a um ponto P no ciclo trigonométrico, extremidade do arco de medida x. Com isso, considero relevante introduzir o estudo da função seno a partir da Função de Euler, conforme exposto nas subseções seguintes.

Para uma melhor compreensão, é necessário que o leitor possua conhecimentos elementares de funções; de trigonometria em triângulos quaisquer e no ciclo trigonométrico; de geometria analítica, dentre outros. Caso necessário, o leitor pode consultar livros da educação básica para avançar em seu entendimento.

2.2.1- Função de Euler

Considere o ciclo trigonométrico C representado na Figura 7, onde o ponto $A = (1; 0)$ é o ponto de origem dos arcos.

Figura 2: Ciclo trigonométrico



Fonte: O autor (2019)

Considere a Função E (denominada de Função de Euler) que associa um número real x a um ponto B, extremidade do arco $\widehat{AB}$ de medida x no ciclo trigonométrico (Figura 2).

Neste contexto, temos três situações:

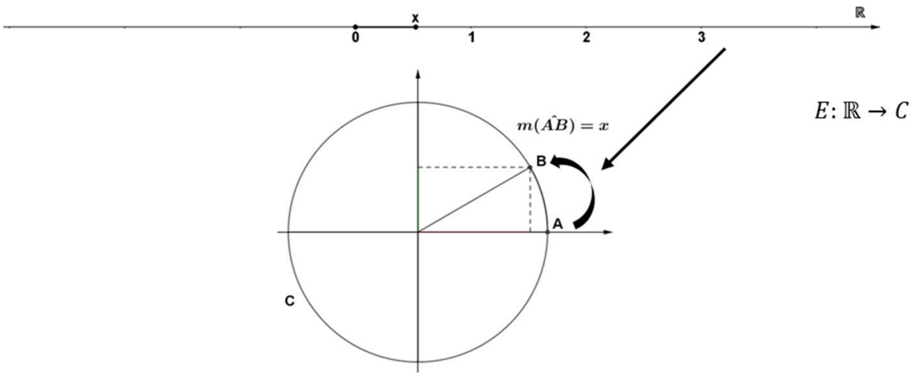
i) $x = 0$: Neste caso, o comprimento do arco $x = 0$. Logo, o $A \equiv B$.

ii) $x > 0$: Sendo $x > 0$, o arco $\widehat{AB}$ é tomado no sentido positivo do ciclo trigonométrico.

iii) $x < 0$: Sendo $x < 0$, o arco $\widehat{AB}$ é tomado no sentido negativo do ciclo trigonométrico.

O ponto $E(x) = B$ é denominado de imagem de x no ciclo trigonométrico C mediante a função E e, por definição, é extremidade do arco $\widehat{AB}$ de medida x. A Figura 3 ilustra essa situação quando $x > 0$ e pode ser estendida para situação em que $x < 0$.

Figura 3: Função de Euler



Fonte: O autor (2019)

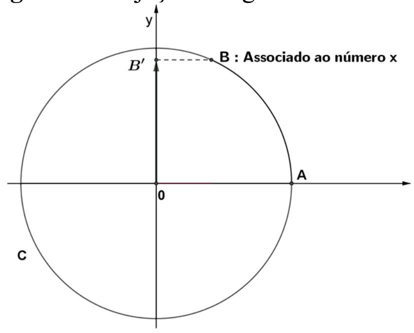
Em outras palavras, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe um único par de coordenadas para o ponto $E(x) \in C$. Logo, há uma relação biunívoca entre o número real x e as coordenadas de $B = E(x)$. Portanto, as coordenadas de B são funções do número real x.

Podemos observar que se x for positivo e maior que 2π, será necessário dar mais de uma volta no sentido positivo do ciclo trigonométrico C para que se possa atingir a imagem $E(x)$. Semelhantemente acontece quando $x < 0$. Em todo caso, o ponto $E(x)$ é um ponto bem definido em C. Além disso, sendo $B \in C$, percebe-se que B, pela função E, é imagem de infinitos números reais na forma: $x + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) e $0 \leq x < 2\pi$, onde os números expressos por $x + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) são chamados de côngruos de x.

2.2.2- Definição de função seno

No ciclo trigonométrico C representado na Figura 4, seja B o ponto associado ao número real x mediante a função $E: \mathbb{R} \rightarrow C$. Nele, B' é a projeção ortogonal de B sobre o eixo $0y$.

Figura 4: Projeção ortogonal de B em $0y$



Fonte: O autor (2019)

Sabemos que a ordenada $\overline{0B'}$ do ponto B corresponde ao seno do arco de medida algébrica x, cuja extremidade é B. Deste modo, dado $x \in \mathbb{R}$, pela função E, existe um único $B = E(x)$ em C ao qual está associado um único número real $\overline{0B'}$, que é o seno de $\widehat{AB}$; assim, fica definida a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ para a qual: $f(x) = senx$.

A função f é denominada de FUNÇÃO SENO. Podemos escrever que: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $x \rightarrow senx$ e: $D(f): \mathbb{R}$; $Cd(f): \mathbb{R}$ e $Im(f): [-1; 1]$

2.2.3- Gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$

Pela função E, percebemos que o número real x possui uma imagem em C dada por $E(x)$, o qual corresponde ao ponto B, extremidade do arco $\widehat{AB}$. Percebe-se também que B, pela função E, é imagem de infinitos números reais na forma: $x + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})(0 \leq x < 2\pi)$

Pela definição de função seno, todo número real x associa-se a um único par ordenado de B, sendo a ordenada deste o valor de $senx$. Com isso, concluímos que o $senx$ é ordenada de B e de todos os números $x + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) e $0 \leq x < 2\pi$.

Logo: $senx = sen(x + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \quad (i)$

Pelo conceito de função periódica, percebemos que se $f(x) = senx$ é uma função periódica, então, existe um real p', tal que: $sen(x) = sen(x + p')$ $\quad (ii)$

Comparando (i) com (ii) percebermos que $p' = 2k\pi$. Portanto, a função seno é periódica. Sendo o período p da função $f(x) = senx$ o menor valor positivo de p', podemos obtê-lo fazendo $k = 1$. Assim, o período da função seno é $p = 2\pi$.

Considerando valores de x no intervalo de 0 a 2π, pois previamente já sabemos que f é uma função periódica e que o gráfico de f neste intervalo "se repete" tanto à esquerda de 0 quanto à direita de 2π. O Quadro 2 apresenta os valores de $0 \leq x < 2\pi$ e suas respectivas imagens:

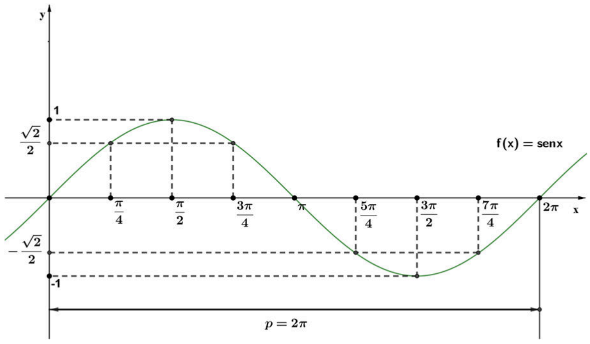
Quadro 2: Valores de alguns números reais e seu respectivo seno

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\frac{5\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{7\pi}{4}}$	$\boldsymbol{2\pi}$
$\boldsymbol{y}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Fonte: O autor (2019)

A partir dos valores constantes no quadro acima, é possível construir o gráfico de f no intervalo de $0 \leq x < 2\pi$:

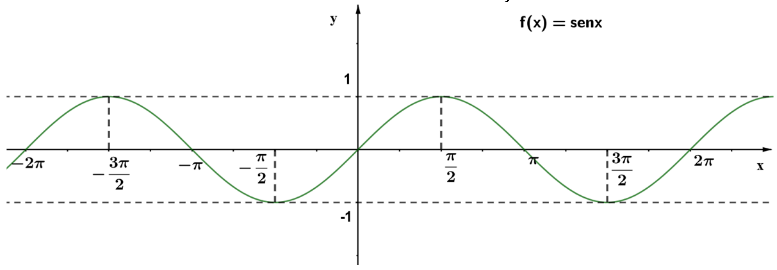
Gráfico 2: Gráfico de f no intervalo de $0 \leq x < 2\pi$



Fonte: O autor (2019)

Assim, conhecendo o gráfico da função $f: x \rightarrow senx$ no intervalo de $0\, a\, 2\pi$, e considerando o fato de que f é uma função periódica (em que o gráfico fica "repetindo" a cada período p), é possível a construção do gráfico desta função para intervalos maiores, conforme o Gráfico 3.

Gráfico 3: Gráfico de f



Fonte: O autor (2019)

A análise das principais propriedades e conceitos relacionados à função $f(x) = senx$ encontra-se na subseção a seguir.

2.2.4- Propriedades da função seno

A partir da análise do gráfico da função $f(x) = senx$ e das definições apresentadas ao norte, pode-se dizer que:

i) A função $f(x) = senx$ é *positiva* no intervalo de 0 a π (1º e 2º quadrantes do ciclo trigonométrico) e *negativa* no intervalo de π a 2π (3º e 4º quadrantes do ciclo trigonométrico);

ii) f é crescente no intervalo de 0 a $\pi/2$; decrescente no intervalo de $\pi/2$ a $3\pi 2$, voltando a crescer no intervalo de crescente no intervalo de $3\pi/2$ a 2π. Portanto, a função seno é *monótona*;

iii) As imagens de x no gráfico ficam limitadas ao intervalo $I = [-1; 1]$ no eixo $0y$. Assim, $-1 \leq f(x) \leq 1$. Portanto a função seno é uma *função limitada*;

iv) A função seno é uma *função ímpar*, dado que $\forall x \in \mathbb{R}$ em que x e $-x \in D(f)$, temos que: $sen(-x) = -senx$;

v) Pelo fato de a função seno não poder ser definida por uma "expressão algébrica $y = f(x)$" em que y é raiz de uma equação na incógnita y na forma: $P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0$, onde $n \in \mathbb{Z}_+$ e os $P_1(x)(1 = 0,1,2, \ldots, n)$ são polinômios inteiros em x. Dizemos, portanto, que a função $f(x) = senx$ é uma *função transcendental*.

2.2.5- Teorema sobre o período da função $\boldsymbol{f(x)= a + b.sen(cx + d)}$

Para construirmos o gráfico da função $f(x) = a + b.sen(cx + d)$ basta conhecermos os movimentos de rotação e translação do gráfico de funções reais e o Teorema 1:

Teorema 1

Se f é uma função periódica de período p, onde $y = f(x)$, a função $g(x) = a + bf(cx + d)$ também é periódica e seu período P é dado por:

$$P = \frac{p}{|c|}$$

Demonstração:

Se g é uma função periódica, devemos provar que existe um T real tal que: $g(x) = g(x + T)$, isto é: $a + bf(cx + d) = a + bf[(cx + T) + d]$

Vejamos se isto ocorre:

Se $y = f(x)$ é periódica de período p, logo: $f(x) = f(x + kp), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (i)$

Multiplicando a igualdade (i) por b e em seguida, somando com a, temos:

$$a + b.f(x) = a + b.f(x + kp) \quad (ii)$$

Substituindo x em (ii) por $(cx + d)$ com $c \neq 0$, temos:

$$a + b.f(cx + d) = a + b.f[(cx + d) + kp]$$

$$a + b.f(cx + d) = a + b.f\left[(cx + d) + c.\frac{kp}{c}\right]$$

$$a + b.f(cx + d) = a + b.f\left[c\left(x + \frac{kp}{c}\right) + d\right]$$

Considerando $\frac{kp}{c} = T$, temos: $a + b.f(cx + d) = a + b.f[c(x + T) + d]$. Com isso, $g(x) = g(x + T)$ (iv). Assim, existe o real T tal que a igualdade (iv) ocorre. Portanto g é periódica.

Como, por definição, o período é o menor $T > 0$, podemos obtê-lo para a função g, fazendo $k = 1$.

Portanto: $P = \frac{p}{|c|}$

■

A partir do Teorema 1 percebermos que o período P da função trigonométrica $f(x) = a + b.sen(cx + d)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $(b \ e \ c \neq 0)$ é dado por $P = \frac{2\pi}{|c|}$ (considerando o fato de que o período p da função $f: x \to senx$ é igual a 2π).

2. ORIENTAÇÕES AOS ALUNOS

As unidades (UARC's) que compõem a sequência didática estão apresentadas em ordem crescente de dificuldades e cada uma delas tem objetivo específicos de aprendizagem, conforme o Quadro 3.

Quadro 3: Objetivo de aprendizagem de cada unidade

UARC	TÍTULO	OBJETIVOS DOS ALUNOS
1	FIO PRESO NA RODA GIGANTE	Descobrir uma forma d e associar um número real a um ponto no ciclo trigonométrico.
2	NÚMEROS DIFERENTES NA RETA, PONTOS IGUAIS NO CICLO TRIGONOMÉTRICO	Descobrir o que acontece com a imagem $E(x)$ no ciclo trigonométrico quando os números reais diferem entre si por números inteiros de voltas; descobrir o período da Função de Euler; descobrir o conceito de fenômenos periódicos.
3	A FUNÇÃO DE EULER E A RAZÃO TRIGONOMÉTRICA SENO	Descobrir a relação existente entre os números reais no ciclo trigonométrico e a razão trigonométrica seno no primeiro quadrante.
4	SENO VERSUS ORDENADA	Descobrir que o valor do seno de um número real é igual a ordenada do ponto que o representa no ciclo trigonométrico.
5	PASSANDO PELO MESMO PONTO	Descobrir que os números reais x e $x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ possuem o mesmo valor do seno; perceber que a relação entre um número real e o seu respectivo seno é uma função.
6	PROPRIEDADES DA FUNÇÃO SENO	Descobrir o intervalo de variação da função seno; descobrir a partir de quando a função seno começa a repetir os valores; analisar o sinal da função seno a partir do ciclo trigonométrico; analisar o crescimento/decrescimento da função seno a partir do ciclo trigonométrico.
7	RETORNANDO AO 1º QUADRANTE	Descobrir que o seno de um número real qualquer pode ser calculado a partir do seno de um número no primeiro quadrante.
8	GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO	Representar no sistema cartesiano os pontos referentes aos pares ordenados $(x; senx)$; descobrir intervalos importantes a partir dos pontos desenhados no sistema ortogonal $x0y$.

Assim, ao utilizá-la em sala de aula é aconselhável que o estudante siga a ordem apresentada. Com isso, ele poderá compreender melhor a estória apresentada nas questões e aprender com mais facilidade.

Vale destacar que o aprendizado das unidades apresentadas pode ter maior eficiência quando utilizadas em grupos de 2 ou 3 alunos, pois a partir das interações sociais os discentes podem ajudar uns aos outros e reduzir possíveis dificuldades de interpretação das questões propostas.

Logicamente, sempre que necessário, o estudante pode solicitar o auxílio do professor para esclarecer as dúvidas emergentes e relembrar os conteúdos matemáticos que mostrarem-se necessários ao avanço dos conteúdos constantes nas Unidades.

Aconselha-se que o estudante utilize como recurso didático apenas a folha com as unidades, lápis, caderno, borracha e calculadora. As respostas das questões propostas, após as discussões com os alunos e com o professor, devem ser anotadas no caderno. Orienta-se que os estudantes não risquem o quadro “INTERVENÇÃO FORMALZANTE”, o qual deverá ser preenchido apenas com as orientações do professor.

3. ORIENTAÇÕES AOS PROFESSORES

Para aplicação da sequência didática constante na Seção 1 é indicado que o professor tenha trabalhado em classe conhecimentos prévios, dentre os quais destaca-se: geometria plana (cálculo de área de polígonos e do círculo; cálculo de comprimento de circunferência e de arcos; relações entre arcos e ângulos, projeções ortogonais, etc.); trigonometria básica (razões trigonométricas no triângulo retângulo; arcos no ciclo trigonométrico; relações entre diversas unidades de medidas de ângulo; incluindo o radiano; etc.); funções (definição, propriedades, gráficos, etc.); geometria analítica (pares ordenados, representações gráficas de funções, distância entre pontos no plano cartesiano, etc.), etc.

Caso necessário, o docente poderá considerar os conteúdos matemáticos constantes na Seção 2, bem como consultar as obras ali referenciadas.

Orienta-se que ao utilizar a sequência didática o docente considere os objetivos didáticos constantes no Quadro 4:

Quadro 4: Objetivo de ensino de cada unidade

UARC	TÍTULO	OBJETIVOS DO PROFESSOR
1	FIO PRESO NA RODA GIGANTE	Definir a Função de Euler.
2	NÚMEROS DIFERENTES NA RETA, PONTOS IGUAIS NO CICLO TRIGONOMÉTRICO	Definir a periodicidade da Função de Euler; Definir fenômenos periódicos.
3	A FUNÇÃO DE EULER E A RAZÃO TRIGONOMÉTRICA SENO	Demonstrar que o seno de um ponto no ciclo trigonométrico é numericamente igual ao valor da projeção ortogonal deste ponto no eixo das ordenadas.
4	SENO VERSUS ORDENADA	Demonstrar que o seno de um número real é igual ao valor da ordenada deste ponto no ciclo trigonométrico.
5	PASSANDO PELO MESMO PONTO	Demonstrar que os números reais x e $x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ possuem o mesmo valor do seno; Definir a Função Seno.
6	PROPRIEDADES DA FUNÇÃO SENO	Definir o domínio, a imagem e o período da função seno; Fazer o estudo do crescimento/decrescimento da função seno; Fazer o estudo do sinal da função seno.
7	RETORNANDO AO 1º QUADRANTE	Ensinar sobre a redução ao primeiro quadrante.
8	GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO	Construir o gráfico da função seno; Analisar o gráfico da função seno, extraindo dele o período, a imagem, o domínio da função seno; Analisar o crescimento/decrescimento da função seno a partir da análise gráfica

Além disso, orienta-se que o professor considere a ordem indicada pela numeração das Unidades, pois os conteúdos matemáticos nela contidos estão dispostos em ordem crescente de dificuldades. Assim, os estudantes poderão ter uma melhor compreensão da estória contida em cada Unidade, o que pode favorecer a aprendizagem deles.

Orienta-se que o docente forme grupos de 2 ou 3 alunos e que cada um deles possuam apenas a folha contendo a unidade que vai ser estudada, lápis, caderno e calculadora. Com isso, o professor pode buscar criar e manter zonas de desenvolvimento proximais, favorecendo a aprendizagem escolar.

O professor deve estar sempre atento para auxiliar os estudantes na resolução das questões propostas, porém, deve evitar dar a resposta rapidamente. Antes, ele deve buscar estabelecer discussões e conexões entre o conteúdo constante na Unidade trabalhada com conteúdo já ministrados.

Aconselha-se que os quadros contendo as "INTERVENÇÕES FORMALIZANTES" sejam apresentados no quadro magnético pelo professor ou em uma folha à parte apenas após as discussões e conexões emergentes no ato da aplicação da sequência didática.

Com isso, espera-se que os escolares tenham maior liberdade para levantar hipóteses, conjecturar, criar ideias matemáticas novas, apresentar resoluções diversas, desenvolver sua autonomia, interagir com seus colegas, entre outras coisas. Afinal, o conhecimento matemático mais profícuo surge, em geral, em contextos que levem em consideração estes fatores.

Devido a heterogeneidade de cada turma, não há possibilidade de ser estimado o tempo necessário para aplicação de cada UARC, mas aconselha-se que o avanço nelas se deem somente após as interferências que se fizerem necessárias.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Funções numéricas.** São Paulo: Nobel, 1985.

ÁVILA, Geraldo. **Várias faces da matemática:** tópicos para licenciatura e leitura em geral. 2 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas:** estrutura e elaboração. 1 ed. Belém: SBEM/SBEM-PARÁ. 2017.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria número complexo.** Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).

FEIJÓ, Rachel Saffir Araújo Alves. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria:** um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. 2018. 107 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília. Brasília- DF. 2018.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise v.1.** 14 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. 2013.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio (v.1).** 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006 (Coleção do Professor de Matemática).

NILES, Nathan O. **Trigonometría plana.** 2 ed. Cidade do México: Limusa Noriega Editores. 1996.

NETO, Aref Antar et al. **Noções de Matemática (v.3).** Fortaleza: Editora Vestseller. 2009.

SANTOS, Ricardo Ferreira dos. **O uso da modelagem para o ensino da função seno no Ensino médio.** 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica. São Paulo- SP. 2014.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66113-010 Belém-PA
www.uepa.br