Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Edna Machado da Silva

O conceito de função e suas linguagens

Belém

2020

Edna Machado da Silva

O conceito de função e suas linguagens

Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática apresentado a banca de defesa do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Belém

2020

Edna Machado da Silva

O conceito de função e suas linguagens

Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática apresentado a banca de defesa do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Data da defesa de dissertação: 17 / 02 / 2020

Banca Examinadora

____- Orientador
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Universidade do Estado do Pará

____ - Membro Interno
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Universidade do Estado do Pará

____- Membro externo
Prof.ª Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha
Doutora em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará

RESUMO (EM CONSTRUÇÃO!)

SILVA, Edna Machado. **O conceito de função e suas linguagens**. 2019, 179f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa realizada durante o curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática sobre o ensino do conceito de função no Ensino Médio, buscando responder a seguinte questão de pesquisa: As atividades de uma sequência didática estruturadas segundo as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual potencializam o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função? Foi definido como objetivo geral investigar as potencialidades didáticas de uma sequência didática elaborada para o ensino e aprendizagem do conceito de função no ensino médio. Adotei a Teoria das Situações Didáticas, Brousseau (1996) para nortear o desenvolvimento de uma sequência didática estruturada segundo as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual, de Cabral (2017). Para análise de resultados decorrentes da aplicação da sequência didática adotei a Análise Microgenética, de Góes (2000), e Análise do Discurso, de Mortimer e Scott (2002). A partir da realização da revisão da literatura e das percepções de estudantes e de professores a respeito do ensino e aprendizagem do conceito de função verifiquei as dificuldades no ensino e na aprendizagem, que pudessem ser tratadas no produto educacional. O estudo histórico e epistemológico do conceito de função permitiu que a sequência didática fosse enriquecida de rigor matemático, capacitando o professor para aplicação e verificação de possíveis obstáculos que pudessem ocorrer durante o processo didático. A aplicação da sequência didática “Conceito de função e suas linguagens”, da oficina de conhecimentos básicos e do teste de verificação de aprendizagem aconteceu no mês de novembro de 2019 com uma turma de 1° ano do ensino médio, da rede pública estadual, no município de Belém-PA. Os episódios foram gravados em áudio e transcritos para análise de micro eventos que revelaram indícios de aprendizagem nas abordagens e padrões comunicação em diferentes níveis epistemológicos durante o processo de aplicação, dentre outras potencialidades também apresentadas.

Palavras-chave: Matemática. Ensino de Matemática. Função. Sequência didática.

ABSTRACT (EM CONSTRUÇÃO!)

SILVA, Edna Machado. **The concept of function and its languages.** 2019, 179f. Dissertation (Masters in Mathematics Teaching) - University of Pará State, Belém, 2019.

This work presents the results of a research carried out during the Professional Master's Course in Teaching Mathematics on the teaching of the concept of function in High School, seeking to answer the following research question: The activities of a didactic sequence structured according to the Articulated Units of Conceptual Reconstruction enhance the process of teaching and learning the concept of function? The general objective was to investigate the didactic potential of a didactic sequence designed for teaching and learning the concept of function in high school. I adopted the Theory of Didactic Situations, Brousseau (1996) to guide the development of a didactic sequence structured according to Cabral's Conceptual Reconstruction Units (2017). For the analysis of results resulting from the application of the didactic sequence, I adopted the Microgenetic Analysis, by Góes (2000), and Discourse Analysis, by Mortimer and Scott (2002). From the literature review and the perceptions of students and teachers regarding the teaching and learning of the concept of function, I verified the difficulties in teaching and learning, which could be addressed in the educational product. The historical and epistemological study of the concept of function allowed the didactic sequence to be enriched with mathematical rigor, enabling the teacher to apply and verify possible obstacles that could occur during the didactic process. The application of the didactic sequence “Concept of function and its languages”, of the basic knowledge workshop and of the learning verification test took place in November 2019 with a class of 1st year of high school, from the state public system, in Belém-PA. The episodes were recorded in audio and transcribed for analysis of micro events that revealed evidence of learning in the approaches and communication patterns at different epistemological levels during the application process, among other potentialities also presented.

Key-words: Mathematics. Mathematics Teaching. Following teaching. Concept of Function.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No âmbito da Universidade do Estado do Pará e do programa de Pós-graduação em ensino de Matemática, desenvolvi uma pesquisa de mestrado sobre a qual apresento aqui seus resultados. Nesta introdução apresento meu histórico pessoal e profissional, as linhas gerais de minha pesquisa, motivações, justificativas, objetivos, aportes teóricos e metodológicos, objeto de pesquisa, produto educacional construído e resultados sobre sua potencialidade para o ensino do conceito de função no Ensino Médio.

Sou filha de professor de Matemática e bancário, cultivei o gosto por estudar e por ensinar Matemática observando meu pai, quem também gostava de propor aos filhos desafios de raciocínio. Outra pessoa que também me aproximou da Matemática foi meu avô, ribeirinho e agricultor da Ilha do Urubuéua, município de Abaetetuba-PA. Meu avô fazia cálculos mentais com valores que a maioria das pessoas só fazem na calculadora, para resolver situações de seu cotidiano nas relações de medida e comércio de farinha e açaí ou quando pesava a farinha ou produtos da caça e da pesca na balança de pratos com pesinhos. Eu ficava admirada com habilidade Matemática dele, apesar de ter cursado apenas o que hoje chamamos de fundamental menor. E assim cresci com um pé na Matemática formal e o outro na Matemática empírica. Graduei-me em licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Pará em 2008 e desde então exerço a profissão docente paralela a uma função administrativa onde os conhecimentos de Matemática são muito úteis.

Desde minha formatura realizei formação continuada e aperfeiçoamento na área de ensino de Matemática e atuei na formação de professores na Universidade Federal do Pará, nas disciplinas de Cálculo e Álgebra pelo Plano Nacional de Formação de Professores (PARFOR). Nessa experiência, constatei que meus alunos, professores da rede pública de ensino do estado e municípios do Pará, apresentavam dificuldades primárias em conhecimentos matemáticos, tais como em manipulações algébricas e aritméticas e sobre comportamentos funcionais dos mais diversos tipos relacionando diferentes variáveis e contextos, conhecimentos necessários para que eu pudesse ensinar os assuntos propostos pelas disciplinas por mim ministradas. Por esse motivo, buscava sempre pesquisar formas de inicialmente fazer um resgate de conceitos matemáticos básicos, para posteriormente ensinar com melhor eficácia os conceitos que as disciplinas que ministrei se propunham. Neste sentido, busquei enquanto professora formadora proporcionar a meus alunos-professores maneiras de transpor o conhecimento formal, rigoroso e sistemático de nível superior numa linguagem acessível de modo que eles pudessem também oferecer um ensino de Matemática inclusivo em que o saber científico se transformasse em saber escolar, nem tão complexo que não pudesse ser entendido e nem tão simplificado que pudesse privá-los de conhecimentos necessários e úteis.

Atualmente, no mestrado em ensino de Matemática na Universidade do Estado do Pará (UEPA), a coordenação do programa definiu para minha pesquisa o assunto “Ensino do conceito de função” em que eu e meu orientador temos desenvolvido. Considerando a abrangência do tema, uma das primeiras coisas para que ele me chamou atenção ter como ponto de partida foi para um estudo aprofundado sobre três elementos fundamentais do comportamento funcional: conjunto domínio, conjunto contradomínio e como ambos se relacionam.

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problemas de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 1999, p. 255).

Observei que as diretrizes da educação, como a acima citada, dão ênfase ao conteúdo curricular conceito de função devido a sua relevância tanto para outros tópicos de Matemática como para a aprendizagem de outras disciplinas do currículo educacional nacional. Embora haja a ênfase no assunto foi possível verificar na literatura que existem dificuldades de ensino e aprendizagem desse campo conceitual, dentre os quais posso citar a noção de variáveis, que também passou por um processo longo de construção histórica e contribuiu para a evolução do conceito de função.

> O conceito de variável desenvolveu-se ao longo da história à medida que a utilização de uma letra para representar uma variável difundiu-se e generalizou-se. Porém, esta ideia é considerada complexa e de difícil assimilação por estudantes das mais diferentes idades, inclusive por estudantes do Ensino Médio. Estes, frequentemente, costumam não

> diferenciar incógnitas de variáveis, apesar de lidarem com letras, desde o terceiro ano do ciclo do Ensino Fundamental, [...]. Talvez, o principal motivo disso seja pouca importância atribuída a esse conceito durante todo o ciclo escolar. (CEOLIM, REZENDE e WELLINGTON, 2019, p. 32)

Diante da relevância do assunto e da necessidade de se criar propostas metodológicas para o ensino do conceito de função, ao longo das disciplinas do mestrado e nas reuniões do Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ), fui desenvolvendo minha pesquisa e me apropriando da linguagem metodológica a ser adotada segundo CABRAL (2017): a sequência didática estruturada como unidade articulada de reconstrução conceitual (UARC). Tal metodologia está associada a Teoria das Situações didáticas de Brousseau (1996) e pode ser desenvolvida por diversas tendências da educação Matemática e recursos didáticos, tais como, modelagem, ensino por atividades, etnomatemática, uso de tecnologias, história da Matemática, dentre outros.

Assim, estabeleci como questão norteadora de pesquisa: *As atividades de uma sequência didática estruturadas segundo as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual potencializam o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função*?

Para responder ao questionamento acima, defini como objetivo geral *investigar as potencialidades didáticas de uma sequência didática elaborada para o ensino e aprendizagem do conceito de função no ensino médio.* Para melhor balizar o desenvolvimento da pesquisa e atingir o objetivo geral, estabeleci especificamente os seguintes objetivos:

- Desenvolver um estudo preliminar sobre o objeto matemático, o ensino e aprendizagem do conceito de função no ensino médio;
- Elaborar atividades segundo as unidades articuladas de reconstrução conceitual para composição de uma sequência didática para o ensino do conceito de função, tomando por base os dados obtidos na revisão de literatura, percepção de professores e alunos e exposição desse conceito em livros didáticos;
- Investigar as potencialidades didáticas da sequência didática construída a partir do que preconiza a Análise do Discurso e Microgenética, tendo em vista a identificação de indícios de aprendizagem que possam garantir a validação da sequência didática aplicada.

Cada um desses objetivos específicos estará descrito em capítulos desta dissertação de mestrado. No primeiro capítulo apresento meus aportes teóricos e metodológicos: as teorias das situações didáticas de Broussau (2008), Sequência Didática de Cabral (2017), para o planejamento e elaboração de nossa sequência didática, e, para análise de resultados me aporto a Análise Microgenética de Góes (2000) e Análise do Discurso de Mortimer e Scott (2002).

No estudo sobre o ensino do conceito de função, no capítulo 2, busquei identificar habilidades necessárias e dificuldades de aprendizagem do objeto matemático conceito de função no ensino médio. Para isso, realizei um estudo das diretrizes da educação, uma revisão de literatura, pesquisa diagnóstica com estudantes e professores, bem como análise de livros didáticos.

No terceiro capítulo, realizei uma reconstrução histórica do conceito de função tomando por base a pesquisa realizada por Silva (1997) ao considerar o estudo do campo conceitual de Vergnaud e dos obstáculos epistemológicos descritos por Barchelard, para descrever como alguns personagens colaboraram para a construção do campo conceitual de função. Também, desenvolvi um estudo do rigor matemático presente nos elementos constituintes do conceito de função, bem como realizei reflexões sobre as sutis implicações disso para o ensino.

No capítulo 4 apresento o produto educacional que construí, a sequência didática “Conceito de função e suas linguagens”, composta por três atividades planejadas e articuladas conforme o aporte teórico mencionado, com a intenção de promover aprendizagem de forma interativa, autônoma e promovendo a comunicação e argumentação em diferentes linguagens, o que justifica o título deste trabalho. Nesse capítulo também faço a instrução de aplicação do produto educacional, sendo todo o material (do aluno e do professor) disponibilizado no apêndice deste texto.

Por fim, no capítulo 5, apresento os resultados da aplicação do produto educacional que construí e apliquei em uma turma de estudantes de ensino médio, em uma escola pública da rede estadual de Belém-PA, sendo uma estudante PCD (pessoa com deficiência). Os resultados me levaram a validar a sequência didática como potencial ao ensino de matemática, no que preconiza o aporte de Análise adotado.

1. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Este capítulo tem a função de apresentar a fundamentação teórica e metodológica de minha pesquisa, isto é, sob quais teorias e procedimentos metodológicos da educação Matemática e da didática da Matemática me apoio para estruturar a sequência didática para o ensino do conceito de função. Os aportes estão correlacionados aos elementos estruturantes da pesquisa, como descrevo e justifico no quadro abaixo.

Quadro 1: Aportes teóricos e metodológicos

Aporte / Teórico	Elementos	Justificativa
Teoria das Situações Didática **Brousseau (1996)**	Sujeitos (Com quem?) Contextos (Onde e quando?)	Para responder à questão de pesquisa será necessário entender como ocorrem as interações entre professor, aluno e saber, como se dão as dificuldades de ensino e aprendizagem do objeto matemático e como esse objeto vem sendo tratado em diferentes meios (sala de aula, livros didáticos, científico). Tais constatações permitirão definir os objetivos de aprendizagem da sequência didática necessários e suficientes para os sujeitos a que se destina.
Sequência Didática Estruturada como Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual **Cabral (2017)**	Objeto matemático (O que?) Instrumentos (De que forma?) Experimentação (Como fazer?)	Um estudo minucioso e profundo do objeto matemático justificará o cadenciamento e as formalizações Matemáticas nas atividades da sequência didática, de modo a minimizar possíveis erros conceituais, capacitando o professor para realizar intervenções no momento da experimentação de modo a garantir o objetivos de aprendizagem.
Análise Microgenética **Goés (2000)** Análise do Discurso **Mortimer e Scott (2002)**	Tratamento de dados (Como interpretar e analisar?) Análise de dados (Onde ocorreram e quais são os indícios de aprendizagem?) Resultados (Quais indícios de aprendizagem consolidam a potencialidade da sequência didática aplicada ?)	Após a experimentação, os dados coletados em áudio, serão transcritos por turnos (falas dos sujeitos) e analisados segundo a análise do discurso, para verificar os indícios de aprendizagem do objeto matemático percebidos durante a execução da sequência didática, nas interações entre estudantes e o professor, bem como entre os próprios estudantes. Tais indícios revelarão o nível de potencialidade da sequência didática.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

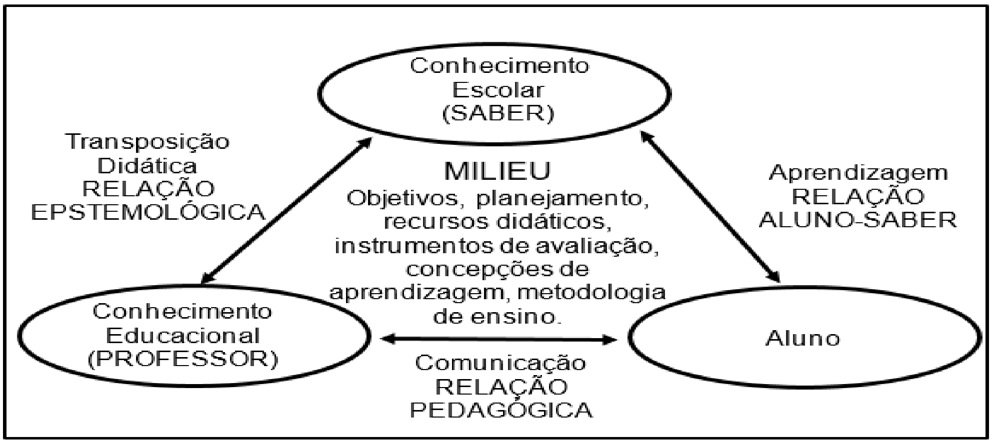
1. 1. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A primeira teoria na qual me aporto nesta pesquisa, desempenha papel de caracterizar os sujeitos e elementos necessários ao processo de ensino e de aprendizagem. Trata-se da Teoria das Situações Didáticas (TSD), desenvolvida em 1986 e proferida no Brasil em 2006 pelo teórico e educador matemático francês Guy Brousseau na VII Reunião Didática da Matemática do Cone Sul, na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Para Brousseau (2008, p. 16), a abordagem da teoria das situações didáticas apresenta-se como um instrumento científico, que tende a unificar e integrar as contribuições de outras disciplinas e proporciona uma melhor compreensão das possibilidades de aperfeiçoamento e regulação do ensino da Matemática, a partir da compreensão das situações didáticas.

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a esses alunos um saber constituído ou em vias de constituição. (BROUSSEAU, 1996, p. 8)

Assim, em uma situação didática existe a composição de elementos que constituem o processo de ensino e aprendizagem cujas interferências internas externas, esperadas ou não, influenciam nas vias de constituição do conhecimento. O esquema abaixo ilustra como funcionam as relações entre os elementos que constituem uma situação didática, segundo a teoria de Brousseau.

Figura 1: Relações na concepção do ensino na TSD



Fonte: Adaptado de Brousseau (2008).

Nessa concepção de ensino, o professor representa o conhecimento educacional e organiza o conhecimento escolar que se pretende ser transmitido através de uma troca de interações (comunicação) entre professor e aluno em um meio didático (*milieu*), planejado pelo professor e onde o aluno atua de forma ativa. Nesse processo, existe uma intencionalidade nas interações do professor, com o objetivo de criar condições favoráveis à aprendizagem, com controle relativo, haja vista que o saber só é considerado adquirido de fato quando o aluno consegue usá-lo em uma situação adidática, isto é, fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. (Brousseau, 2008, p. 35)

As situações didáticas são planejadas e elaboradas pelo professor de Matemática para que o aluno construa e mobilize conhecimentos para obtenção de objetivos educacionais estabelecendo-se um “contrato didático” entre professor e aluno, nem sempre explícitos. As situações didáticas mobilizadas pelos discentes na consecução das respostas às questões propostas pelo professor, são compostas de fases de ação, de formulação, de validação e de institucionalização, cujas características apresento no quadro a seguir conforme Brousseau (1996), Brousseau (2008) e Almouloud (2014).

Quadro 2: Classificação das situações didáticas

Situação de ação	Interação entre os alunos e o *milieu*, a partir das proposições do professor.
Situação de formulação	Comunicação de informações entre os alunos e com o professor, momento de discussão e busca de um consenso com mobilização da linguagem oral e escrita.
Situação de validação	Validade das informações formuladas, momento de apresentar um modelo de resolução para as proposições do professor, justificando-o por meio de verificações ou demonstrações para explicar o raciocínio empregado.
Situação de institucionalização	Os alunos assumem o significado do conhecimento elaborado e é conferida ao professor a tarefa formalizar e generalizar os conceitos pretendidos.

Fonte: Elaborada pela autora.

Desse modo, o aluno passa por situações de ação, formulação e validação, onde estabelece modelos explicativos e esquemas teóricos para responder às intervenções do professor e busca meios de validar ou refutar modelos e esquemas anteriormente constituídos, para que ao final tais validações possam ser formalizadas pelo professor com o devido rigor matemático e assim institucionalizar o saber adquirido.

No momento em que é promovida a transformação do conhecimento científico em saber escolar ocorre a transposição didática. Esse momento acontecerá de forma diferente para cada indivíduo e dependerá das possibilidades cognitivas de cada indivíduo e das interações aluno-professor e aluno-aluno.

No que tange esta pesquisa, para que eu consiga alcançar maior controle possível desses elementos e situações envolvidas na TSD, as seções que investigam as dificuldades de aprendizagem na percepção de estudantes, professores e a revisão de estudos caracterizarão os sujeitos envolvidos na pesquisa. O estudo do objeto matemático me dará o suporte epistemológico para que eu, pesquisadora-professora, possa construir e aplicar um *milieu* potencialmente eficaz a aprendizagem do conceito de função.

1. 2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA ESTRUTURADA POR UARC

Nesta seção, apresento os aportes metodológicos para a construção de meu objeto de estudo: uma sequência didática para o ensino do conceito de função que foi aplicada por mim com estudantes do 1º ano do ensino médio, a fim de desenvolver a aprendizagem do objeto matemático conceito de função. A seguir descrevo em que consiste uma sequência didática estruturada por unidades articuladas de reconstrução conceitual (UARC) orientada por Cabral (2017).

Uma sequência didática (SD), como instrumento pedagógico, organiza um conjunto de aulas planejadas do início ao fim, de forma harmoniosa e coesa funcionando como uma unidade com o objetivo de desenvolver determinados objetivos pedagógicos ou habilidades e competências de aprendizagem para algum objeto de estudo escolar.

> Uma sequência didática é um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero oral ou escrito. [...].

> Quando nos comunicamos, adaptamo-nos à situação de comunicação. [...] Os textos escritos ou orais que produzimos diferenciam-se uns dos outros e isso porque são produzidos em condições diferentes. (ROJO e GLAÍS, 2010 apud CABRAL, 2017, p. 32)

Neste sentido, as atividades são elaboradas de acordo com as diferentes condições, isto é, dependem dos elementos e relações que apresentei na seção anterior sobre a teoria das situações didáticas. Os conhecimentos previamente concebidos pelos estudantes também são relevantes para que uma SD desenvolva neles os objetivos de aprendizagem pretendidos, exigindo do professor poder de reflexão sobre planejamento, aplicação e avaliação das atividades.

> O procedimento de SD tem a virtude de manter o caráter unitário e reunir toda a complexidade da prática, ao mesmo tempo em que permitem incluir as três fases de toda intervenção reflexiva, quais sejam: o planejamento, aplicação e avaliação. (CABRAL, 2017, p. 32)

Embora seja um instrumento que exija planejamento e organização, a SD não tem um padrão rígido de recursos pedagógicos a se adotar, as atividades podem fazer uso das mais diversas tendências de ensino, que se adequem ao público a que se destina e ainda assim manter o caráter sequencial e coeso dos conteúdos. Uma SD para o ensino de Matemática, por exemplo, pode ser elaborada segundo a vertente da modelagem Matemática, da etnoMatemática, jogos, ensino por atividades, uso de tecnologias, interdisciplinaridade, dentre outras formas.

Além da tendência adotada, a forma em que se deseja que o professor interfira no processo pode ser de diferentes maneiras em uma SD. Para esta pesquisa, adotei a Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC), desenvolvida por Cabral (2017), como forma de estruturar as intervenções do professor no processo de planejamento, construção e aplicação da SD.

> Para que o construto analógico das UARC’s seja bem compreendido, passo a descrevê-lo em termos de seis categorias estruturantes que materializam o texto de uma SD de acordo como eu concebi em suas adaptações necessárias para o ensino-aprendizagem de Matemática nosníveis fundamental e médio, são elas: Intervenção Inicial (Ii), Intervenção Reflexiva (Ir), Intervenção Exploratória (Ie), Intervenção Formalizante (If),Intervenção Avaliativa Restrita(IAr) e, finalmente, as Intervenção Avaliativa Aplicativa (IAa). (CABRAL, 2017, p. 40)

As categorias estruturantes do texto de uma SD, como a que irei propor, estão descritas no quadro 3, onde descrevo cada tipo de interveção utilizada nas sequências didáticas estruturadas como unidades articuladas de reconstrução conceitual, conforme Cabral (2017).

Quadro 3: Tipos de intervenções em uma UARC

Intervenção Inicial (Ii)	È o primeiro elemento de um jogo discursivo dirigido pelo professor com a intenção definida de estimular os aprendizes à percepção de alguma verdade do pensamento matemático e que, associada com outras percepções articuladas a essa primeira, pode exercer um papel facilitador na reconstrução conceitual pretendida.
Intervenção Reflexiva(Ir)	Sempre se materializa por meio de um questionamento. Esse questionamento se refere a um ou mais aspectos relacionados ao conceito objeto de reconstrução O aluno é estimulado durante todo o tempo do jogo da aprendizagem em refletir sobre o que está fazendo e as consequências desse fazer sobre outros aspectos da atividade que se desenvolve.
Intervenção Exploratória (Ie)	Tem como objetivo aprofundar o olhar do aluno a respeito das respostas obtidas a partir das Intervenções Reflexivas. Aqui os alunos são convidados para fazerem simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e observações.
Intervenção Formalizante (If)	O professor reelabora as verdades “redescobertas” pelos alunos com as vestes da formalidade Matemática. Aqui as percepções dos alunos são consolidadas com uma linguagem mais abstrata que procurar satisfazer as exigências do saber disciplinar formal, axiomático, próprio da natureza Matemática.
Intervenção Avaliativa Restritiva (IAr)	Tem a finalidade de se estabelecer um primeiro parâmetro de aferição de aprendizagem do conceito objeto dereconstrução. Trata-se de uma espécie de “primeiros passos” para se checar osrudimentos do conceito em tese apreendido. A ênfase nesse momento épara as implicações conceituais do objeto reconstruído e para as propriedades operacionais com a manipulação de algoritmos envolvidos.
Intervenção avaliativa Aplicativa (IAa)	A finalidade é a Resolução de Problemas de Aplicação. Aqui temos o nível mais elevado de avaliação do processo de apreensão conceitual. O aluno precisa ser capaz de mobilizar as noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes (algoritmos) em situações queenvolvam resolução de problemas aplicados aos diversos contextos reaise/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino.

Fonte: Cabral (2017)

Em todas as atividades da sequência didática o professor precisará recorrer a uma “espécie de ping-pong discursivo” (CABRAL, 2017, p. 45). Esse recurso dentro da metodologia de unidades articuladas de reconstrução conceitual chamamos de Intervenções orais de manutenção Objetiva (I-OMO).

> Na verdade essa última categoria de intervenção pode ser entendida como uma espécie de Sequência Didática implícita complementar que é sustentada no discurso do professor durante todo o processo de ensino-aprendizagem e que permite a ele fazer as reformulações emergentes inevitáveis no processo de reconstrução conceitual (CABRAL, 2017, 45)

Essa I-OMO é fundamental para que os conceitos sejam formalizados de maneira gradual, preenchendo lacunas de situações não previstas na elaboração da sequência. Embora muito importante, essa intervenção deve acontecer apenas quando necessário para resolver impasses que os alunos não conseguirem resolver entre si, preservando a autonomia do estudante e possibilitando “futuras reformulações no texto utilizado que media a aprendizagem” (CABRAL, 2017, 46).

O uso colaborativo dessas intervenções estimula o aluno na percepção de regularidades que o possibilitem configurar modelos e generalizações reconstruam os conceitos matemáticos pretendidos.

Para a execução de minha pesquisa, devo considerar que o processo de construção da SD, segundo a estrutura de UARC, passa pelo desenvolvimento epistemológico do professor acerca do objeto matemático a ser ensinado, delimita os critérios do instrumento de pesquisa e maneira como a SD será experimentada. Assim sendo, a construção de meu objeto de pesquisa é fruto de um minucioso estudo que será apresentado nos capítulos subsequentes e que estão articulados propositadamente para responder minha questão de pesquisa.

1. 3. ANÁLISE MICROGENÉTICA E ANÁLISE DO DISCURSO

Após a experimentação da sequência didática, terei que realizar tratamento e análise de dados para verificar se ela apresenta potencialidades discursivas no ensino do conceito de função no ensino médio, nos aspectos epistemológicos perceptivo/intuitivo, empírico e teórico. Devo informar o leitor que quando falo de potencialidade não me refiro ao desempenho do aluno em resolução de problemas e exercícios após aplicação da sequência. Minha pesquisa se detém ao processo, aos indícios de aprendizagem do aluno percebidas em sua escrita e oralidade durante a execução das atividades em níveis epistemológicos revelados em seu discurso. Para tanto, elegi a análise microgenética e análise do discurso como aporte na investigação dos indícios de aprendizagem do aluno diante da SD e das intervenções orais do professor.

A abordagem metodológica da análise microgenética trata-se de uma análise que relaciona campos da educação e da psicologia para investigar processos em contextos educativos. Aporto-me em Goés (2000) para melhor explicar.

> De um modo geral, trata-se de uma forma de construção de dados que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos. (GOÉS, 2000, p. 9 – 10)

O exame de tais relações e condições sociais baseiam-se à matriz histórico-cultural de Vygotsky para identificação das transformações genéticas, isto é, dos indícios de aprendizagem que acontecem nas interações entre professor-alunos e alunos-alunos.

> A visão genética aí implicada vem das proposições de Vygotsky (1981, 1987a) sobre o funcionamento humano, e, dentre as diretrizes metodológicas que ele explorou, estava incluída a análise minuciosa de um processo, de modo a configurar sua gênese social e as transformações do curso de eventos. Essa forma de pensar a investigação foi denominada por seus seguidores como “análise microgenética”.(GOÉS, 2000, p. 11)

Deste modo, a análise minuciosa sobre a qual Goés se refere, trata-se de um estudo por recortes ou trechos de eventos de ensino-aprendizagem em que esses recortes passam a ser objeto de estudo como micro unidades que revelam características e propriedades do todo. Assim, cada recorte seria como uma célula que carrega informações que reconstroem a compreensão sobre todo um organismo.

> Essa análise não é *micro* porque se refere à curta duração dos eventos, mas sim por ser orientada para minúcias indiciais – daí resulta a necessidade de recortes num tempo que tende a ser restrito. É genética no sentido de ser histórica, por focalizar o movimento durante processos e relacionar condições passadas e presentes, tentando explorar aquilo que, no presente, está impregnado de projeção futura. É genética como sociogenética, por buscar relacionar os eventos singulares com outros planos da cultura, das práticas sociais, dos discursos circulantes, das esferas institucionais. (GOÉS, 2000, p. 15)

Nos termos desta pesquisa, significa dizer que cada fala do estudante analisada revelará o nível de compreensão sobre o objeto matemático ensinado e juntos todos esses indícios de aprendizagem permitirão uma avaliação global dos conceitos adquiridos diante da execução da SD e das intervenções do professor.

No caso de minha pesquisa, os movimentos focalizados estão restritos a oralidade e a linguagem, para tanto, necessitei me aportar em Mortimer e Scott (2002) para realizar a análise do discurso em cada recorte a ser estudado.

Mortimer e Scott (2002) definem a análise do discurso como uma ferramenta para estudar a forma como os professores podem guiar as interações em sala de aula para que resultem na construção de significados. Logo, nessa perspectiva é possível agregar maior intencionalidade ás intervenções do professor a fim de conduzir o aluno à apreensão dos objetivos de aprendizagem pretendidos.

Sintetizo no quadro abaixo os aspectos da análise do discurso segundo Mortimer e Scott (2002).

Quadro 4: Aspectos da Análise do Discurso

Focos do ensino	**Intenções do professor**	-Engajar os estudantes, intelectual e emocionalmente; -Explorar as visões e entendimentos dos estudantes sobre ideias e fenômenos específicos; -Disponibilizar as ideias científicas; -Dar oportunidades aos estudantes de falar e pensar com as novas ideias científicas, em pequenos grupos e por meio de atividades com a toda a classe. -Dar suporte aos estudantes para aplicar as ideias científicas ensinadas a uma variedade de contextos e transferir aos estudantes controle e responsabilidade pelo uso dessas ideias; -Prover comentários sobre o desenrolar da 'estória científica', de modo a ajudar os estudantes a seguir seu desenvolvimento e a entender suas relações com o currículo de ciências como um todo.
	Conteúdo	**Descrição:** envolve enunciados que se referem a um sistema, objeto ou fenômeno, em termos de seus constituintes ou dos deslocamentos espaço-temporais desses constituintes. **Explicação:** envolve importar algum modelo teórico ou mecanismo para se referir a um fenômeno ou sistema específico. **Generalização:** envolve elaborar descrições ou explicações que são independentes de um contexto específico.
Abordagem	**Abordagem comunicativa**	**Interativo/dialógico:** professor e estudantes exploram ideias, formularam perguntasautênticas e oferecem, consideram e trabalham diferentes pontos de vista. **Não-interativo/dialógico:** professor reconsidera, na sua fala, vários pontos de vista, destacando similaridades e diferenças. **Interativo/de autoridade:** professor geralmente conduz os estudantes por meio de uma sequência de perguntas e respostas, com o objetivo de chegar a um ponto de vista específico. **Não-interativo/de autoridade:** professor apresenta um ponto de vista específico.
Ações	**Padrões de interação**	Tríade **I-R-A**: Iniciação do professor, Resposta do aluno, Avaliação do professor.

		Cadeias não triádicas: exemplo I-R-P-R-P.… ou I-R-F-R-F.… onde o P significa uma ação discursiva que permite o prosseguimento da fala do aluno e F um feedback para que o aluno elabore um pouco mais sua fala.
	Intervenções do professor	- Introduz um termo novo; parafrasear uma resposta do estudante; mostra a diferença entre dois significados; - Considera a resposta do estudante na sua fala; ignora a resposta de um estudante; - Repete um enunciado; pede ao estudante que repita um enunciado; estabelece uma sequência I-R-A com um estudante para confirmar uma ideia; usa um tom de voz particular para realçar certas partes do enunciado; - Repete a ideia de um estudante para toda a classe; pede a um estudante que repita um enunciado para a classe; compartilha resultados dos diferentes grupos com toda a classe; pede aos estudantes que organizem suas ideias ou dados de experimentos para relatarem para toda a classe. - Pede a um estudante que explique melhor sua ideia; solicita ao estudante que escrevam suas explicações; verifica se há consenso da classe sobre determinados significados. - Sintetiza os resultados de um experimento particular; recapitula as atividades de uma aula anterior; revê o progresso no desenvolvimento da estória científica até então.

Fonte: adaptado de Mortimer e Scott (2002)

Os aspectos da análise do discurso descritos no quadro 4 são importantes tanto para a construção da sequência didática, quanto para a análise dos resultados da experimentação, pois os indícios de aprendizagem passarão por análise microgenética atrelada ao discurso adotado nas intervenções e intenções do professor.

1.4. ARTICULAÇÃO ENTRE OS APORTES

Os aportes teóricos que adotei, foram definidos estrategicamente, exercendo papeis diferentes ao longo da pesquisa e ao mesmo tempo convergindo para um mesmo princípio: a intenção do professor do processo didático. O quadro a seguir sintetiza como os aportes teóricos de minha pesquisa estão articulados em torno da intenção do professor sobre a aprendizagem do aluno acerca do saber matemático pretendido.

Quadro 5: Aticulação entres o aportes

TSD Situações	**SD por UARC Intervenções**	**AM e AD Interação**
Ação	Inicial	Interativo/dialógico
Formulação Validação	Reflexiva	Interativo/dialógico Não-interativo/dialógico
Ação	Exploratória	Não-interativo/dialógico
Institucionalização	Formalizante	Interativo/de autoridade
Ação e validação	Avaliativas	Não-interativo/de autoridade
Formulação e Validação	IOMO	Interativo/de autoridade Não-interativo/dialógico

Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, apesar de tais aportes serem adotados em fases diferentes desta pesquisa, todos giram em torno da intenção do professor e valorizam a qualidade do processo de aprendizagem. Logo a sequência didática que apresento ao final deste texto está estruturada e será analisada conforme os critérios metodológicos apresentados neste capítulo.

2. O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Este capítulo visa tratar do ensino do conceito de função a partir de uma revisão de literatura e pesquisa com estudantes e professores. Para tanto, também me aportarei no que as diretrizes da educação recomendam para o ensino de Matemática no Ensino Médio.

O assunto conceito de função está presente no currículo de Matemática desde o ensino fundamental, mas em geral é dedicado pouco tempo para exposição de tal conteúdo matemático, não se valorizando a riqueza e as sutilezas inerentes a ele e, mais do que isso, a importância para estudos subsequentes de nossos aprendizes. No ensino médio, o currículo de Matemática tem a aprendizagem de elementos inerentes ao conceito de função atrelados a de resolução de problemas, raciocínio lógico, comunicação e argumentação.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), é hierarquicamente superior à todas as outras diretrizes da educação nacional, ao tratar do Ensino Médio, estabelece que em seu currículo observe-se a compreensão do significado da ciência, das letras e das artes; o processo histórico de transformação da sociedade e da cultura e a adoção de metodologias de ensino e de avaliação que estimulem a iniciativa dos estudantes (Brasil, 1996, p. 14)

Também visando essa exigência curricular, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) de Matemática para o ensino médio estabelecem que o ensino e aprendizagem em Matemática precisam conectar três competências: Representação e comunicação, Investigação e compreensão e Contextualização sociocultural. A essas competências estão relacionadas habilidades que podem ser desenvolvidas ao aprender o conceito de função, tais como:

> Transcrever mensagens Matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa. [...] Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc). [...] Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento [...] Discutir idéias e produzir argumentos convincentes [...]Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade. (BRASIL, 1998, p. 46).

A Matriz de Referência de Matemática do Sistema Paraense de Avaliação Escolar (SISPAE) para o Ensino Médio, é uma matriz específica do sistema de avaliação do estado do Pará, que investiga as habilidades e competências para mobilizar conhecimentos adquiridos na escola, desenvolvidas pelos alunos durante a trajetória escolar. O tópico *números, operações, álgebra e funções* também aponta a relevância de meu objeto matemático para o alcance das metas avaliativas do ensino de Matemática no âmbito estadual. (PARÁ, 2016, p. 152).

Deste modo, a revisão de literatura a seguir irá apontar o que as pesquisas apresentam sobre o ensino do conceito de função, em estudos diagnósticos, experimentais e de livros didáticos.

2. 1. REVISÃO DE LITERATURA

Nesta revisão de literatura busco reunir subsídios para a elaboração da sequência didática, bem como me inspirar em abordagens metodológicas e didáticas que possam contribuir para responder minha questão de pesquisa. Esta revisão possui três aspectos: estudos diagnósticos, estudos experimentais e livros didáticos.

Para melhor organizar esta revisão de estudos foi dividida em três fases: a) Levantamento bibliográfico, b) categorização, c) análises por bibliografia e d) análise global.

No levantamento bibliográfico consultei o Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), o site do Google acadêmico, as bibliotecas das universidades públicas do Pará (UEPA e UFPA), o banco de dissertações e teses de programas de pós-graduação, tais como PUC-SP e PROFMAT.

Na categorização dividi as pesquisas em estudos diagnósticos e estudos experimentais. Os estudos diagnósticos apresentam um processo investigativo sobre as principais metodologias e dificuldades de ensino e aprendizagem do conceito de função; os estudos experimentais propõem e aplicam em sala de aula atividades voltadas para o ensino do conceito de função visando facilitação da aprendizagem dos discentes.

Na análise por bibliografia extraí de cada referência seus objetivos, metodologia de pesquisa, análises e resultados.

Na análise global discuti os principais objetivos e resultados, bem como contribuições do estudo para minha pesquisa de cada um dos trabalhos analisados

2. 1. 1. Estudos Diagnósticos

A seguir apresento no Quadro 5 as bibliografias dos estudos diagnósticos, onde foram identificados os seguintes elementos: natureza do trabalho, autoria, título, categorização quanto ao tipo de estudo. As referências a seguir realizam diagnose sobre as dificuldades de aprendizagem do conceito de função a partir de variados instrumentos, tais como análise de livros didáticos, revisão de literatura e pesquisa como estudantes e professores.

Quadro 6: Fontes diagnósticas consultadas

Autor	Título	Natureza	Categorização
Cruz (2015)	Interdisciplinaridade como prática para a construção do conceito de função	Dissertação	Diagnóstico
Pelho (2003)	Introdução ao conceito de função: A importância da compreensão das variáveis.	Dissertação	Diagnóstico
Silvestre (2016)	Conceitos e propriedades de funções sob a Ótica do ensino básico	Dissertação	Diagnóstico
Cunha; Souza; Chaquiam (2010)	Função: um pouco de história.	Artigo	Diagnóstico

Fonte: Elaborado pela autora

Cruz (2015) estudou o conceito de função sob a perspectiva da assimilação e de sua aplicação através da interdisciplinaridade, fazendo uma análise histórica e conceitual dos temas.

O estudo aconteceu por meio de uma pesquisa, organizada sob três aspectos: referencial sobre interdisciplinaridade, estudo do conceito de função e análise de livros didáticos.

Cruz (2015) analisou o conceito de função como dependência entre variáveis, que se sustenta através da interpretação de fenômenos, sendo que para comprovar tais ideias foram analisados quinze livros didáticos de Matemática de nono ano aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático em diferentes edições.

A Figura 2 ilustra os resultados apontados por Cruz (2015) sobre a análise dos 15 livros didáticos do PNLD por ele estudados.

Figura 2: Resultado sobre a abordagem em livros didáticos

Fonte: Cruz (2015)

Sobre a pesquisa com professores teve como resultado de suas pesquisas constatou que os professores tornam claras ideias como a Interdisciplinaridade e criam subsídios para abordagens diversas a temas fortalecidos sob uma certa visão, como no caso do conceito de função.

Cruz (2015) propôs a introdução ao trabalho interdisciplinar como estratégia de ensino vantajosa, por proporcionar o envolvimento de alunos e professores numa atividade de pesquisa, em que eles devem coletar, investigar, interpretar, criticar, e divulgar situações diversas.

Pelho (2003) apontou para a necessidade de articulação entre diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático para sua apreensão e ressaltou a importância da compreensão das variáveis de uma função e o relacionamento entre elas.

O autor se baseou em um histórico do conceito de função e em pressupostos governamentais como elementos importantes para elaboração de uma sequência didática.

Indicou que as dificuldades de aprendizagem do conceito de função advêm não compreensão da natureza das variáveis e de como elas se relacionam e que, portanto, há necessidade de se explorar mais estudo sobre elas no ensino e aprendizagem do conceito de função.

Silvestre (2016), partindo da exposição do conceito de função abordado em diferentes bibliografias, discute várias formas de representação Matemática de função.

Teve o objetivo de elaborar um material didático de apoio que sirva de aporte ao professor no ensino de função. Para isso dividiu e discutiu ao longo do desenvolvimento de seu trabalho a representações, propriedades e transformações de funções na educação básica.

A autora, apresentou uma proposta de material de apoio docente para o trabalho no início do conteúdo de função. Conclui que é possível rever o conceito de função, em diversas definições, bem como uma série de propriedades que caracterizam o seu comportamento.

Cunha; Souza; Chaquiam (2010) demonstram a forma mecânica e abstrata que o ensino das funções é dado no cenário atual do estado, e sugere soluções para as deficiências apresentadas na aprendizagem, a partir do preceito da utilidade das funções no cotidiano que o aluno interage socialmente.

Para tanto, os autores fizeram um apanhado histórico para ilustrar a importância da Matemática no cotidiano e que é das situações cotidianas que que os conceitos matemáticos se constituem.

Assim, os autores mostram a evolução do conceito de função desde os primórdios da sociedade passando por Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático alemão, a quem se atribuiu a moderna definição formal de função. Em 1837, surgiu uma definição muito ampla de função. Segundo Dirichlet, se uma variável y esta relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então se diz que y é função da variável independente de x.

Ao final, os autores concluem que o ensino da Matemática deve garantir que o aluno adquira certas flexibilidades para lidar com o conceito de função em situação diversa e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre função para construir um modelo para a interpretação e investigação em Matemática.

2. 1. 2. Estudos Experimentais

O quadro 7 organiza as bibliografias utilizadas para estudos experimentais:

Quadro 7: Fontes experimentais consultadas

Autor	Título	Natureza	Categorização
Oliveira (1997)	Conceito de função: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem.	Dissertação	Experimental
Silva (2014):	O Pibid e o ensino de função: investigando como professores ensinam função no ensino médio com a finalidade de elaborar intervenções pedagógicas	Artigo	Experimental
Maciel (2014):	A História do Conceito de Função em Vídeo: uma proposta para a aprendizagem	Artigo	Experimental
Brito e Almeida (2005)	O conceito de função em situações de modelagem.	Artigo	Experimental
Souza (2016)	A construção do conceito de função através de atividades baseadas em situações do dia a dia.	Dissertação	Experimental

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Oliveira (1997), apesar de ter publicado há mais de 20 anos, mostra-se um estudo ainda atual em muitos aspectos. A autora fez um apanhado histórico sobre o conceito de função e discutiu sobre os obstáculos epistemológicos de sua aprendizagem.

Baseou-se na *Psicologia Cognitiva* de Piaget e na *teoria dos campos conceituais* de Vergnaud para elaboração de uma sequência didática para o ensino do conceito de função.

Na análise a priori, a autora estudou o currículo, os livros didáticos, concepções dos estudantes e dos professores sobre ensino e aprendizagem do conceito de função.

As validações dos registros dos estudos de caso basearam-se no confronto entre as análises a priori e a posteriori. Inicialmente verificou sobre como se davam as representações de função na perspectiva de estudantes e professores.

Figura 3: Dados referentes representações

Como podemos representar uma função

TIPOS DE REPRESENTAÇÃO	NÚMERO DE RESPOSTAS
Equação Matemática(*)	13
Gráfico	11
Tabela	02
Diagrama de Flechas	02
Outros(**)	05

Fonte: Oliveira (1997)

Seus resultados apontaram que a maior parte dos professores não utilizam, ao ensinar funções, as mudanças de registro de representação de maneira completa e que os estudantes se lembram apenas das fórmulas e gráficos para representar função.

Após a aplicação da sequência didática constatou-se que os estudantes compreenderam que um gráfico e uma tabela podem representar uma função, independentemente da existência e/ou conhecimento de sua representação algébrica mostrando a potencialidade da sequência que proporcionou êxito a mais de 90% dos estudantes.

Deste modo, Oliveira (1997) ressaltou a importância do estudo histórico da Matemática, dos obstáculos de aprendizagem e dos campos conceituais para a construção de uma potencial sequência didática para o ensino do conceito de função.

Silva (2014) elaborou e aplicou questionários a duas professoras de Matemática atuantes no ensino médio em escolas distintas, com a finalidade de saber um pouco sobre a metodologia utilizada, dificuldades e o comportamento dos alunos em sala de aula.

Em relação ao ensino de função fez críticas sobre a necessidade de se elaborar sequências didáticas diferenciadas no ensino médio, bem como de se assumir uma nova postura e nova didática para trabalhar em sala de aula, tendo em vista as frequentes dificuldades de aprendizagem constatadas ao longo de sua pesquisa.

A autora concluiu que é preciso elaborar metodologias que usem recursos e estratégias capazes de tornar as aulas mais interessantes, cabendo ao professor ter uma formação continuada eficiente, que preencha as lacunas de sua formação e da atividade profissional.

A autora também sugere a necessidade de desenvolver propostas que valorizem o significado do que está sendo estudado em sala de aula e que promovam a ampliação das ideias e dos conceitos, porque a atribuição de sentido somente ocorre quando os conceitos forem usados para a resolução de uma tarefa concreta para poder buscar caminhos que aumentem a capacidade de abstração do pensamento do aluno no que tange a aprendizagem de função.

Maciel (2014) fez um estudo teórico e experimental, histórico e iconográfica para o ensino do conceito de função para propor uma atividade de sala de aula que aliasse História da Matemática e tecnologia visando promover uma aprendizagem significativa e humanizada do conceito de função. Os professores fizeram o roteiro e gravaram vídeos sobre a história do conceito de função desde seus primórdios e os exibiu em sala de aula. Os resultados da pesquisa mostraram que os alunos se interessam por esse tipo de mídia, tornando-os mais receptivos aos novos conteúdos e consequentemente interessaram-se pelo conteúdo e pelo fato de ter sido construído com auxílio de outros alunos do Ensino Médio.

A aplicação do vídeo demonstrou que os alunos conseguiram compreender o conceito apresentado no vídeo, no entanto, a partir das atividades de verificação de aprendizagem revelaram que faltou explorar os conhecimentos prévios necessários a aprendizagem do conceito de função material elaborado, que visavam promover um aprofundamento do conteúdo, não conseguiram atingir êxito satisfatório. Por esse motivo, o autor conclui que para o sucesso de uma proposta de ensino, não basta que esteja bem sistematizada e fundamentada é necessário verificar se os conhecimentos prévios dos estudantes permitem a aquisição do novo conhecimento.

Brito e Almeida (2005), partindo do pressuposto de que uma das dificuldades comumente enfrentada por professores de Matemática, propõe o uso da modelagem Matemática para tornar compreensíveis conceitos que foram sendo construídos e cuja sistematização atual é distanciada da linguagem empregada pela maioria das pessoas em seu cotidiano.

Os autores discutiram uma possibilidade de lidar com esse problema, analisando a produção de significado para o conceito de função, a partir de situações de modelagem Matemática desenvolvidas em sala de aula.

Os autores procuraram mostrar que além do aspecto da construção de significados para o conceito de função como correlação entre variação de grandezas, a modelagem Matemática é ainda um campo fértil para indagações sobre a própria natureza da Matemática, seu papel instrumental, dinâmico na descrição, explicação e previsão de comportamentos de situações reais.

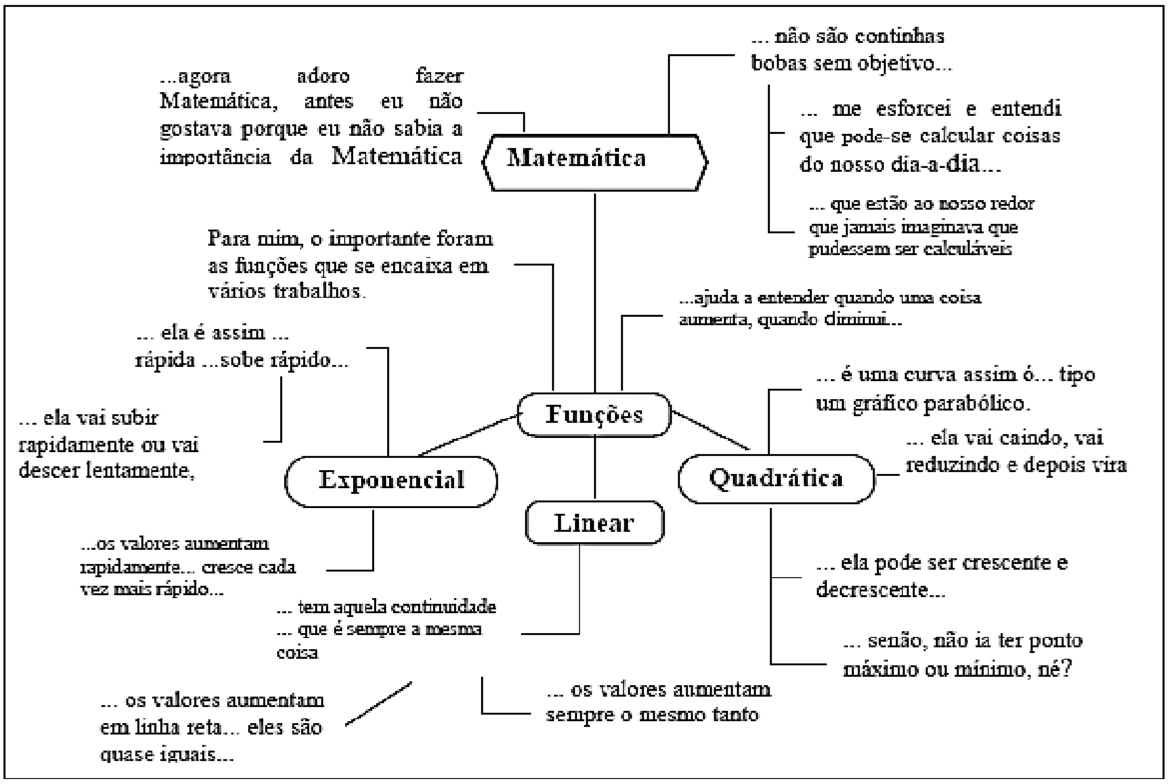
As questões que nortearam o estudo foram: Como os alunos concebem a Matemática e o conceito de função que empregam em situações de modelagem Matemática? Como as situações de modelagem influenciam na significação do conceito de função?

O tema inicialmente proposto foi "O corpo humano", que gerou vários problemas, entre eles: Qual é a relação entre o tamanho do pé e o número do calçado? Como perder peso controlando sua pulsação nas atividades físicas? As situações de modelagem Matemática desenvolvidas possibilitaram introduzir a noção de variável dependente e independente e o conceito de função linear e suas propriedades associadas a cada problema em particular, além de oportunizar a construção de um conjunto de conhecimentos extra matemáticos relativos às situações estudadas.

O segundo problema partiu de uma reportagem da revista *Veja*, relativa aos riscos de saúde decorrentes do diabetes do tipo 2. Os conteúdos matemáticos curriculares introduzidos a partir deste problema foram função exponencial e suas propriedades e função logarítmica, construída aí como inversa da função exponencial, no problema em estudo.

No terceiro momento, os alunos formaram grupos e cada um deles definiu um tema ou um problema para estudar. Diferentes tipos de funções surgiram durante o desenvolvimento desses trabalhos. Os estudantes estabeleceram, então as relações ilustradas a seguir:

Figura 4: Percepção de estudantes sobre conceito de função



Fonte: Brito e Almeida (2005)

Os resultados da experiência mostraram que situações de modelagem podem contribuir para a construção de percepções inovadoras da Matemática. Ao passar de uma visão estática para uma visão dinâmica e relacional para as funções, os alunos constroem uma imagem viva da Matemática, além do aspecto da construção de significados para o conceito de função como correlação entre variação de grandezas, a modelagem Matemática é ainda um campo fértil para indagações sobre a própria natureza da Matemática, seu papel instrumental e dinâmico na descrição, explicação e previsão de comportamentos de situações reais.

Souza (2016) uma pesquisa de caráter qualitativo sobre o ensino do conceito de função que propôs a aplicação de atividades com os objetivos específicos de:

– Os problemas foram criados visando à construção de um novo conceito, o conceito de Função (Etapa 1);

– A resolução dos problemas, por parte dos alunos, deu-se a partir das leituras individuais e em grupo (Etapas 2, 3 e 4);

– No momento em que os alunos analisavam, discutiam e resolviam os problemas a professora/pesquisadora teve o papel de incentivá-los, acompanhá-los e ajudá-los quando necessário, sendo assim mediadora na construção do conhecimento (Etapa 5);

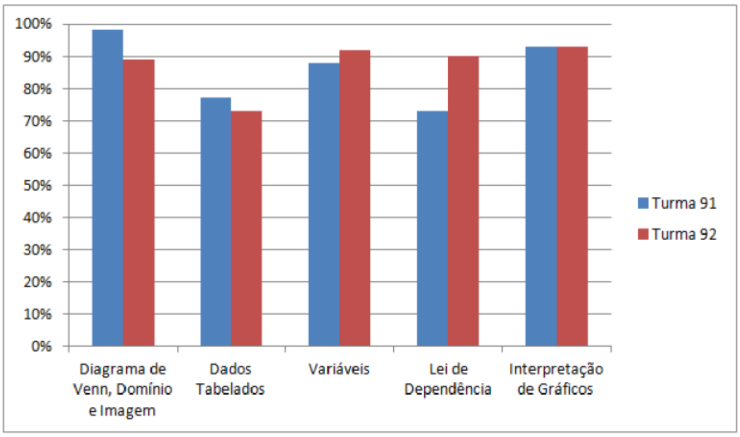
– Após as resoluções houve o momento de análise e discussão das respostas dadas e, após, a professora/pesquisadora apontou os resultados corretos (Etapas 6, 7 e 8);

– Após percorrer essas etapas houve a formalização do conteúdo, onde a professora/pesquisadora registrou na ’lousa’, de maneira formal, todo o conteúdo construído informalmente (Etapa 9).

A aplicação deste trabalho foi realizada na Escola Técnica Estadual Agrícola Antônio Sarlo, de Ensinos Fundamental e Médio, localizada na cidade de Campos dos Goytacazes, RJ. Os participantes foram as turmas 91 e 92 do 9° ano do Ensino Fundamental, e a escolha desta escola e destas turmas deu-se pelo fato da pesquisadora ser professora das mesmas, com a disciplina de Matemática, com uma carga horária de 6h/aula semanais. A aplicação deste trabalho foi realizada na Escola Técnica Estadual Agrícola Antônio Sarlo, de Ensinos Fundamental e Médio, localizada na cidade de Campos dos Goytacazes, RJ. Os participantes foram as turmas 91 e 92 do 9° ano do Ensino Fundamental, e a escolha desta escola e destas turmas deu-se pelo fato da pesquisadora ser professora das mesmas, com a disciplina de Matemática, com uma carga horária de 6h/aula semanais.

Após a aplicação das atividades obtiveram os seguintes resultados:

Figura 5: Aproveitamento Médio do Conteúdo Estudado nas Turmas 91 e 92



Fonte: Souza (2016)

Diante dos resultados apresentados sobre os aproveitamentos dos alunos nas atividades, a professora/pesquisadora afirmou que a prática aplicada neste trabalho contribuiu para uma melhor aprendizagem dos alunos. Observou que a metodologia de resolução de problemas aliada a situações do dia a dia contribuiu para uma melhor compreensão dos problemas e uma melhor apropriação e entendimento do conceito estudado. Os resultados, portanto, permitiram afirmar que houve um retorno satisfatório no processo de ensino-aprendizagem e o objetivo da pesquisa foi alcançado.

A seguir no quadro 7, apresento a síntese dos estudos acima apresentados, tanto diagnósticos como experimentais.

Quadro 8: Síntese da revisão de estudos

Autor/ título	**Natureza/categorização**	**Síntese do estudo**
Cruz (2015): Interdisciplinaridade como prática para a construção do conceito de função	Dissertação / Diagnóstico	Propôs a análise de livros didáticos para compreensão das necessidades e limitações no ensino do conceito de função, bem como a introdução ao trabalho interdisciplinar como estratégia de ensino vantajosa, por proporcionar o envolvimento de alunos e professores numa atividade de pesquisa, em que eles devem coletar, investigar, interpretar, criticar, e divulgar situações diversas.
Pelho (2003): Introdução ao conceito de função: A importância da compreensão das variáveis.	Dissertação / Diagnóstica	Ressaltou a importância da compreensão das variáveis para a aprendizagem do conceito de função e da articulação entre várias formas de representar função.
Silvestre (2016): Conceitos e propriedades de funções sob a Ótica do ensino básico	Dissertação / diagnóstica	Realizou um estudo de grande importância na formação docente sobre a história da Matemática, propriedades, representações e transformações de função na educação básica para fazer uma proposta de sequência didática para o ensino de função.
Cunha; Souza; Chaquiam (2010): Função: um pouco de história.	Artigo / Diagnóstico	Fizeram um apanhado histórico para ilustrar a importância da Matemática no cotidiano. Realizaram um apanhado histórico para ilustrar a importância da Matemática no cotidiano. Indicam um ensino de Matemática que garanta ao aluno adquirir certas flexibilidades para lidar com o conceito de função em situações diversas, sendo incentivado a interpretar e investigar.
Oliveira (1997): Conceito de função: Uma abordagem do	Dissertação / Experimental	Partiu de um estudo histórico da Matemática, dos obstáculos de aprendizagem e dos campos conceituais para a construção de uma potencial sequência didática para o ensino do

processo ensino-aprendizagem		conceito de função, que obteve êxito ao ser aplicada.
Silva (2014): O Pibid e o ensino de função: investigando como professores ensinam função no ensino médio com a finalidade de elaborar intervenções pedagógicas	Artigo / Experimental	Elaborou e aplicou questionários a duas professoras de Matemática atuantes no ensino médio. Propõe uma nova postura e nova didática para trabalhar em sala de aula desenvolver propostas que valorizem o significado do que está sendo estudado em sala de aula e que promovam a ampliação das ideias e dos conceitos bem como sua o pensamento sobre sua abstração.
Maciel (2014): A História do Conceito de Função em Vídeo: uma proposta para a aprendizagem	Artigo / Experimental	Realizou uma pesquisa histórica e iconográfica para o ensino do conceito de função para propor uma atividade de sala de aula que aliasse História da Matemática e tecnologia visando promover uma aprendizagem significativa e humanizada do conceito de função. A aplicação do vídeo demonstrou que os alunos conseguiram compreender o conceito apresentado, no entanto, a partir das atividades de verificação de aprendizagem revelaram que faltou explorar os conhecimentos prévios necessários.
Brito e Almeida (2005) O conceito de função em situações de modelagem.	Artigo / Experimental	Mostraram que além do aspecto da construção de significados para o conceito de função como correlação entre variação de grandezas, a modelagem Matemática proporciona correlação entre variação de grandezas e é um campo fértil para indagações sobre a própria natureza da Matemática, seu papel instrumental e dinâmico na descrição, explicação e previsão de comportamentos de situações reais.
Souza (2016) A construção do conceito de função através de atividades baseadas em situações do dia a dia.	Dissertação / Experimental	Desenvolveu uma pesquisa exploratória de caráter qualitativo sobre o ensino do conceito de função que propôs a aplicação de atividades com os objetivos específicos de aprendizagem e uma metodologia de resolução de problemas aliada à situações do dia a dia contribuindo para uma melhor compreensão do problemas e uma melhor apropriação e entendimento do conceito estudado.

Fonte: Elaborado pela Autora (2019)

Assim, com esta revisão de estudos, pude constatar a importância do ensino e aprendizagem do conceito de função e entender como se dão os processos de sua constituição e formalização. Analisei propostas de ensino bem-sucedidas que partiram de uma análise dos elementos históricos e matemáticos constituintes do objeto matemático, conhecimentos prévios, obstáculos de aprendizagem e sobre as teorias e metodologias de ensino e aprendizagem para melhor fundamentação e embasamento das propostas de ensino.

Ficou claro para mim que a sequência didática a ser posteriormente apresentada precisa contribuir com professores e estudantes do Ensino Médio no sentido propor formas de aprendizagem do conceito de função coerentes com a realidade dos estudantes de modo que compreendam e utilizem fluentemente as diferentes linguagens e representações, para exercício da argumentação e resolução de problemas do cotidiano, identificando variáveis e a lógica de sua correspondência.

Constatei a relevância do conceito de função para a Matemática e para a formação de cidadãos capazes de resolver problemas do cotidiano e estabelecer argumentação.

Porém, meu objetivo depois dessas constatações foi descobrir uma forma de ensinar conceito de função no ensino médio por meio de uma sequência didática de modo a articular as diferentes formas de representação desse objeto matemático, criando situações que revelem o significado desse conceito, deixando claro a natureza e a noção variáveis, bem como a dependência entre elas e a generalização estabelecida nessa correspondência.

2. 1. 3. Livros didáticos

Nesta seção farei a análise de seis livros didáticos do Plano Nacional do Livro didático (PNLD) de 2015 a 2020, haja vista que ao longo de minha pesquisa passei por dois PNLD’s, os de 2015-2017 e os de 2018-2020.

Segundo o portal[1] do Ministério da Educação (MEC), o PNLD é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público.

[1] http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld

As escolas que formalizam a adesão ou estejam vinculadas ao PNLD recebem os livros diretamente das editoras, cujas contratações são feitascom o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE).Os livros didáticos são distribuídos de acordo com projeções do censo escolar referente aos dois anos anteriores e segundo as escolhas das próprias escolas, também passam por uma comissão técnica específica e especializada, que avaliam dentre outros aspectos os seguintes objetivos:

> Art. 2º São objetivos do PNLD
> I - aprimorar o processo de ensino e aprendizagem nas escolas de educação básica com a consequente melhoria da qualidade da educação;
> II - garantir o padrão de qualidade do material de apoio à prática educativa utilizado nas escolas públicas de educação básica;
> III - democratizar o acesso às fontes de informação e cultura;
> IV -fomentar a leitura e o estímulo à atitude investigativa dos estudantes;
> V - apoiar a atualização, a autonomia e o desenvolvimento profissional do professor; e
> VI - apoiar a implementação da Base Nacional Comum Curricular. (BRASIL, 2017, sn)

Com o Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017, passou a existir no PNLD a possibilidade de inclusão de outros materiais de apoio à prática educativa para além das obras didáticas e literárias: obras pedagógicas, softwares e jogos educacionais, materiais de reforço e correção de fluxo, materiais de formação, dentre os quais as sequências didáticas podem se incluir.

Minha análise terá como ponto de partida o trabalho realizado por Cruz (2015), Cruz (2015) realizou críticas ao exagerado formalismo de Dirichlet e de Bourbaki que vieram a influenciar na forma como o conceito de função é trabalhado nos livros didáticos, sem que sejam feitas as devidas associação a fenômenos do cotidiano. No próximo capítulo, onde tratarei dos aspectos históricos e epistemológicos do conceito de função, detalharei um pouco mais essa discussão sobre as diferentes definições de função, mas para que seja inteligível a análise realizada a seguir apresento as duas definições acima citadas.

Para encontrar uma definição mais ampla de função que englobasse a relação mais geral entre as variáveis, Dirichlet, em 1837 afirmou:

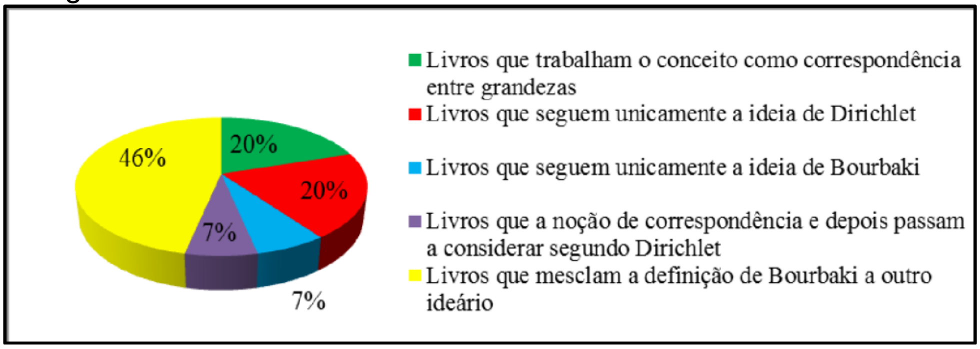
> se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x. (BOYER, 1993, p. 405, apud CRUZ, 2015, p. 85)

A definição de Bourbaki, durante o movimento da Matemática moderna, foi denotada em 1968 da seguinte forma:

> Assim, na teoria dos conjuntos, uma função f é, por definição, um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses sujeitos à condição seguinte: se $(a1, b1) \in f, (a2, b2) \in f \; e \; a1 = a2, então \; b1 = b2$. O conjunto A dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se domínio da função e conjunto B de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz imagem da função. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano A x B. (EVES, 2004, p. 661 apud CRUZ, 2015, p. 87).

A crítica de Cruz (2015) nessa comparação entre Dirichlet e Bourbaki acontece em torno do que se perdeu quanto aos possíveis significados e invariantes sobre o conceito de função, em síntese afirma que a definição bourbakiana se resume a um subconjunto do produto cartesiano, perdendo-se o caráter da variação, da dependência de variáveis e da lógica de correspondência que há mais de um século antes estavam contempladas na definição de Dirichlet, mas que foram se perdendo nos livros didáticos no século XX e ainda se reflete nos livros mais recentes. A figura 6 resume os resultados da pesquisa de Cruz (2015).

Figura 6:Resultado da análise e livros do PNLD de 2005 a 2015



Fonte: CRUZ (2015, p.109)

Na análise desses dados, Cruz (2015) concluiu que 53% dos livros didáticos do PNLD de 2005 a 2015 dedicam-se de forma preocupante às noções bourbakianas de função como conjunto de pares ordenados, ainda que se apoie, em algum momento, a outros conceitos. No entanto, numa análise cronológica, percebeu que as abordagens ao conceito estão evoluindo, verificando que o estudo do conceito de função no primeiro bloco (2005 e 2008) existe a supremacia da definição de Bourbaki, no segundo grupo (2011) o rigor de Dirichlet e no último uma mistura entre o uso das ideias da Matemática Moderna e trabalhar com funções seguindo a correspondência entre grandezas.

Diante desse cenário parte minha pesquisa sobre alguns livros didáticos do PNLD de 2015 a 2020 mais adotados na rede pública de ensino, segundo dados[2] do FNDE. Descrevo a seguir cada um dos livros por mim analisados:

Quadro 9: Livros didáticos analisados

AUTOR(ES)	**TÍTULO**	**EDITORA**	**ANO DE PUBLICAÇÃO**	**ANO DE PNLD**
Gelson Iezzi Oswaldo Dolce David Degenszajn Roberto Périgo Nilze de Almeida	Matemática - Ciência e Aplicações - Volume 1	Saraiva	2013	2015-2017
Gelson Iezzi Oswaldo Dolce David Degenszajn Roberto Périgo Nilze de Almeida	Matemática - Ciência e Aplicações - Volume 1	Saraiva	2016	2018-2020
Luiz Roberto Dante	Matemática - Contexto e Aplicações - Volume 1	Ática	2012	2015-2017
Luiz Roberto Dante	Matemática - Contexto e Aplicações - Volume 1	Ática	2016	2018-2020
Manoel Paiva	Matemática: Paiva	Moderna	2015	2018-2020
Rodrigo Balestri	Matemática: Interação e Tecnologia	Leya	2016	2018-2020

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

A seguir, na descrição de cada livro analisado, devo considerar que a citada Lei 9099 que regulamenta o PNLD, também estabelece como objetivo apoiar a implementação da BNCC, e, portanto, a tendência é que os livros didáticos se adequem a desenvolver as competências e a habilidades nela previstas de raciocinar, representar, comunicar-se e argumentar, cujo "foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade". (BRASIL, 2017, p. 518).

Neste sentido minha análise se dará em dois aspectos: a tendência didática adotada pelo livro, como fez Cruz (2015) e nas prerrogativas estabelecidas pela BNCC e pela lei 9099/2017.

---

2 file:///C:/Users/Facom/Downloads/pnld_2015_colecoes_mais_distribuidas_por_componente_curricular-ensino_medio%20(1).pdf

- **Matemática: Ciência e aplicações - IEZZI et al (2013)**

O capítulo sobre funções de Iezzi (2013) inicia com a noção intuitiva de função partindo de quatro situações de correspondência no cotidiano que relacionam variáveis tais como tempo, distância percorrida, temperatura, preço, quantidade, utilizando tabelas como representação e finalizando por apresentar uma fórmula que descreve a regra de comportamento. Em seguida parte para a noção de função como relação entre conjuntos onde representa as associações de conjuntos dados sem contextualização, representados por diagramas, quadros e equações. Essa forma introdutória induz a uma tendência adotada por Dirichlet em apresentar função como uma relação de interdependência de variáveis, que também foi utilizado nos exercícios desse tópico em caráter exploratório, mas não reflexivo segundo a definição de Cabral (2017), apresentada na seção anterior.

Para formalizar, definiu função da seguinte forma:

Figura 7: Definição de função (IEZZI, 2013)

Definição

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de **função de A em B**.

Fonte: IEZZI et al (2013, p. 40)

E, apresentou a notação:

Figura 8: Notação de função

Notação

De modo geral, se *f* é um conjunto de pares ordenados (x, y) que define uma função de A em B, indicamos:

$$f\colon A \to B$$

Se, nessa função, $y \in B$ é imagem de $x \in A$, indicamos:

$$y = f(x) \text{ (lê-se: “}y\text{ é igual a }f\text{ de }x\text{”)}$$

Retomando o exemplo anterior, temos: $f(a) = 2$; $f(b) = 3$; $f(c) = 5$; $f(d) = 7$; $f(e) = 1$.

Fonte: IEZZI el al (2013, p. 41)

Tal definição e notação remetem a tendência bourbakiana, uma vez que conclui função como conjunto de pares ordenados e em nenhum momento é citado o caráter de variação e dependência.

Em seguida Iezzi et al (2013) mostra como “x” pode ser calculado a partir de “y” por meio de uma fórmula. Em sequência são propostos exercícios descontextualizados com a realidade cujas fórmulas são fornecidas juntamente com os símbolos x e y para representar as variáveis, não dando aos estudantes a oportunidade de raciocinar sobre uma generalização para lei de associação e sem o uso articulado de outras representações como quadro e diagrama inicialmente apresentados.

No estudo breve sobre o domínio, contradomínio e imagem da função é expresso com exemplos por meio de diagramas, sem retomar os critérios da definição, passando para noções básicas do plano cartesiano para construção de gráficos sem associar a definição de função, isto é, sem propor o reconhecimento do comportamento funcional por representação gráfica segundo critérios da definição de não ambiguidade e não exceção.

No geral os exercícios não estimulam a comunicação e argumentação por meio de língua materna ou linguagem Matemática, não promovendo a atitude investigativa dos estudantes.

- ❖ **Matemática: Ciência e aplicações - IEZZI et al (2016)**

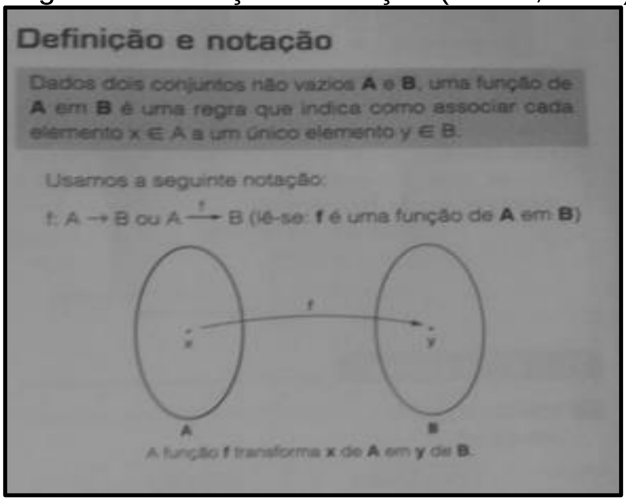
Na edição 2016 de Matemática: Ciência e aplicações manteve-se o mesmo conteúdo e disposição de tópicos, da edição anterior, também, a mesma didática iniciada segundo definição de Dirichlet e depois alternada drasticamente para uma tendência Bourbakiana. Houve a substituição de alguns exercícios, mas não tais mudanças não promoveram a atitude investigativa e estímulo da argumentação.

- ❖ **Matemática: Contexto e aplicações – Dante (2012)**

Dante (2013) inicia o capítulo de função com o tópico “Explorando intuitivamente a noção de função”, onde apresenta diversas situações do cotidiano, com exercícios, em que se estabelece correspondência de “grandezas variáveis”, tais como lado do quadrado e perímetro, tempo e distância, estados e suas capitais, número de peças e custo, também ilustra função a partir de uma máquina (lei, fórmula ou regra) cujas saídas (variável dependente) dependem das entradas (variável independente).

Na sequência, apresenta-se “A noção de função via conjuntos”, onde se ressalta os critérios do comportamento funcional. Em seguida, são apresentadas a definição e a notação:

Figura 9: Definição de função (Dante, 2012)



Fonte: Dante (2012)

Note que função é definida como uma regra de associação e na notação como transformação. São propostos exercícios para verificar diagramas que apresentam ou não função e outros exercício exploratórios para verificar se é ou não função dados conjunto de partida, conjunto de chegada e regra de associação. Após uma breve definição de domínio, contradomínio e imagem com dois exercícios de aplicação.

No tópico “funções definidas por fórmulas Matemáticas” são ilustradas situações do cotidiano, inclusive em exercícios, porém na maioria a regra é dada e os símbolos x e y.

Após um breve estudo do domínio é apresentado o “gráfico de uma função”, ilustrando-se e exercitando-se o reconhecimento do comportamento funcional através da verificação de conjunto de pontos no gráfico por meio de retas perpendiculares ao eixo Ox.

Concluo que Dante (2013) explora predominantemente a tendência de Dirichlet, mas também trata função como correspondência entre grandezas e transformação, porém os exercícios ainda não instigam a investigação e argumentação.

❖ **Matemática: Contexto e aplicações – Dante (2016)**

Na edição 2016 de Matemática: Contexto e aplicações, o autor explora bastante a história das funções, num total de quatro páginas dedicadas a contar as contribuições de alguns personagens na evolução do que hoje se conhece por função.

Em seguida, é mantido o mesmo roteiro da edição anterior substituindo-se alguns exemplos e exercícios.

❖ **Matemática Paiva – Paiva (2015)**

Paiva (2015) intitulou o capítulo de funções como “A linguagem das funções”. Apresenta um exemplo de situação aplicada à indústria sobre vazamento de gasolina e em seguida faz uma contextualização de coordenadas cartesianas no dia a dia com exercícios

Iniciou o tópico sobre conceito de função onde apresenta situações de variação de grandezas, tais como tempo, volume, distância percorrida, temperatura, valor da conta de luz por kwh com exercícios resolvidos e propostos envolvendo diversas aplicações. Propõe a criação e resolução de um problema como os dos exercícios. Define função como:

Figura 10: Definição de função (Paiva, 2015)

> Dizemos que uma variável *y* é dada em **função** de uma variável *x* se, e somente se, a cada valor de *x* corresponde um único valor de *y*.
> A condição que estabelece a correspondência entre os valores de *x* e *y* é chamada de **lei de associação** ou, simplesmente, lei entre *x* e *y*.

Fonte: Paiva (2015, p. 123)

Tal definição de função se aproxima da definição de Dirichlet ao enfatizar a noção de variável, no entanto não fica explicito o caráter de dependência funcional.

O próximo tópico, “Formas de representação de uma função” trata uma a uma as diferentes formas de representar função: diagrama de flechas, tabela, gráfico cartesiano, equação. Nessa oportunidade o autor define domínio, contradomínio e imagem, porém os exercícios não há conversão entre as diferentes linguagens Matemáticas apresentadas.

Por fim é detalhado um pouco mais sobre imagem de uma função, inclusive graficamente para reconhecimento de função através e retas paralelas ao eixo 0y.

Há seções de "criando problemas" propondo elaboração e resolução de exercícios que envolvam situações do cotidiano, que podem instigar o raciocínio e promover comunicação e argumentação em linguagem materna e Matemática se houver intervenção de um professor.

❖ **Matemática: Interação e tecnologia– Balestri (2016)**

No capítulo sobre funções, Balestri (2016) inicia com uma exploração textual e visual sobre o ciclo de produção do etanol e do açúcar provindos da cana-de-açúcar, onde apresenta diversos dados bem como a importância da produção de biocombustíveis no mundo.

Na seção "A ideia de função" o autor em duas páginas, apenas, conseguiu:

a) representar e converter uma mesma situação em tabela, diagrama, gráfico de pontos, equação
b) Falar da contribuição de Gottfried Wihelm Leibniz para a evolução da ideia de função;
c) Definir função da seguinte maneira:

Figura 11: Definição de função. (Balestri, 2016)

> Dados dois conjuntos **A** e **B** não vazios, uma **função** de **A** em **B** é uma regra que indica como associar a cada $x \in A$ um **único** elemento $y \in B$. Indicamos da seguinte maneira:
>
> $$f: A \to B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B$$
>
> (lemos: "função f de **A** em **B**")
>
> O conjunto **A** é o **domínio** $D(f)$ e o conjunto **B** é o **contradomínio** $CD(f)$ da função f. Se $y \in B$ e $f(x) = y$ para algum $x \in A$, dizemos que y é a imagem de x pela função f. O conjunto de todas as imagens é um subconjunto de **B**, denominado **imagem da função** $Im(f)$.
>
> Professor(a): Verifique se para os alunos ficou clara a ideia de que, em uma função, um elemento da imagem pode corresponder a mais de um elemento do domínio, porém cada elemento do domínio deve ter apenas um correspondente na imagem.

Fonte: Balestri (2016, p.35)

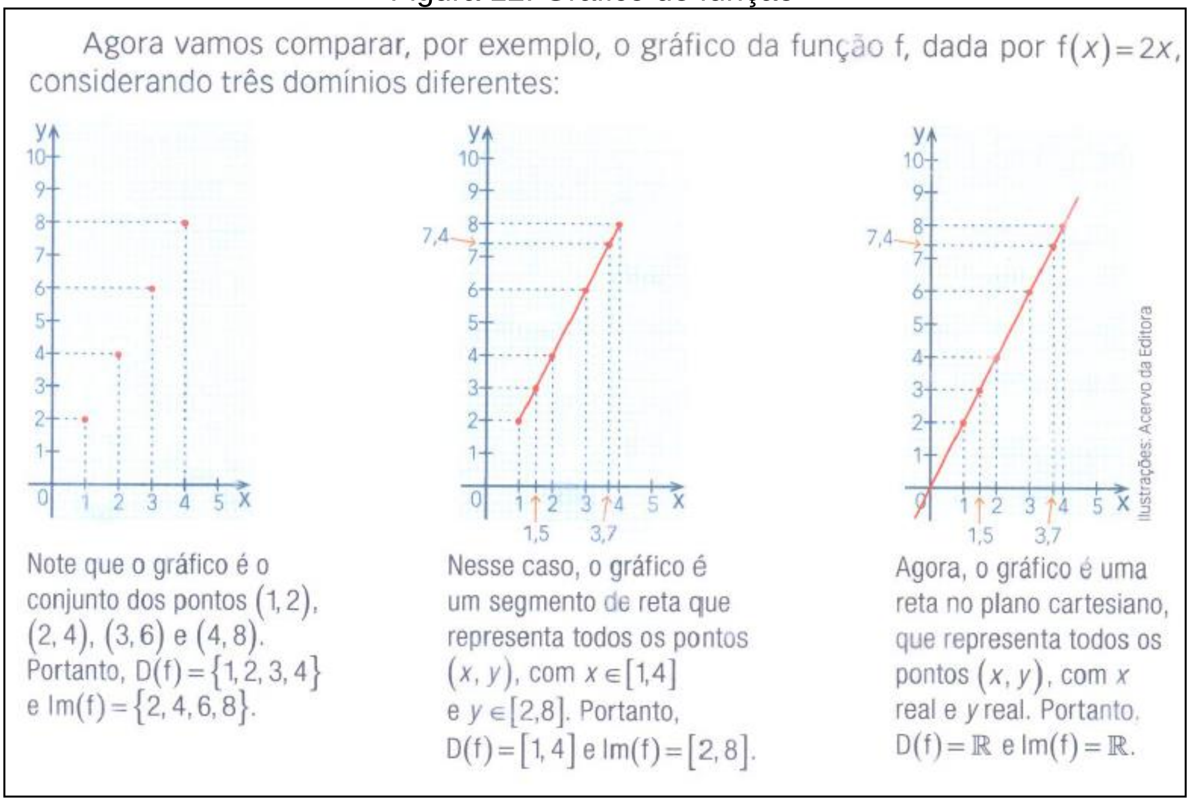
d) Exemplificar como um gráfico pode ou não representar função.

A definição proposta por Balestri (2016) estabelece função como uma regra de associação.

No tópico “Como funciona” são ilustradas as funções custo, receita e lucro e mais uma contextualização histórica para explicar a queda livre segundo Galileu Galilei. Os exercícios resolvidos e propostos exploram o conceito de função por contraexemplos como estratégia de fixação de conceitos. Os exercícios também aplicam função a situações do cotidiano e da própria Matemática utilizando representação e conversão de linguagens com determinação de variável dependente e independente.

No estudo do domínio, contradomínio e imagem ilustrou esses três conceitos através da definição, diagrama, gráfico e reta numérica. O autor também ilustrou a diferença, pouco discutida, de quando por uma regra, dependendo de como o domínio e contradomínio foram definidos, os gráficos podem ser um conjunto discreto de pontos, segmentos de retas ou retas contínuas no plano cartesiano, como a seguir:

Figura 12: Gráfico de função


Agora vamos comparar, por exemplo, o gráfico da função f, dada por $f(x)=2x$, considerando três domínios diferentes:

Note que o gráfico é o conjunto dos pontos $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,6)$ e $(4,8)$. Portanto, $D(f)=\{1,2,3,4\}$ e $Im(f)=\{2,4,6,8\}$.

Nesse caso, o gráfico é um segmento de reta que representa todos os pontos (x,y), com $x \in [1,4]$ e $y \in [2,8]$. Portanto, $D(f)=[1,4]$ e $Im(f)=[2,8]$.

Agora, o gráfico é uma reta no plano cartesiano, que representa todos os pontos (x,y), com x real e y real. Portanto, $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=\mathbb{R}$.

Balestri (2016, p. 43)

Outra ideia que Balestri (2016) apresentou foi função definida por mais de uma sentença, caso que normalmente é estudado no ensino superior e o autor ilustra com uma situação de venda de cópias em que até determinada quantidade de cópias cobra-se um valor e com quantidades maiores cobra-se outro valor, um caso muito comum no cotidiano e de simples compreensão. Nos exercícios também se explorou situações importantes do cotidiano como previdência social, um caráter transdisciplinar para o objeto matemático função. Também são propostas atividades de produção textual e em grupo onde será possível promover a investigação, comunicação e argumentação.

Concluo que o autor atendeu objetivos do PNLD e da BNCC e explorou devidamente as diferentes linguagens de função, e no que tange as invariantes de função o autor adotou diversas formas de dar significado a função, dependência, variáveis, correspondência, regra, transformação, causa e efeito, generalização.

Síntese de resultados.

É possível afirmar diante dos livros analisados e da pesquisa de Cruz (2015), que são várias as possíveis formas de se ensinar função e seu conceito, havendo predominância de algumas como as ideias de Dirichlet e Bourbaki. No entanto as reformulações e legislações no que tange aos objetivos e habilidades de aprendizagem pretendidos pelo currículo brasileiro de Matemática, ao qual o livros didáticos devem atender tem influenciado na forma como vem sendo disposto nos livros didáticos como sintetizo no quadro a seguir.

Quadro 10: Síntese da abordagem dos livros didáticos

AUTOR(ES)	TÍTULO/PNLD	OBSERVAÇÕES GERAIS
Gelson Iezzi Oswaldo Dolce David Degenszajn Roberto Périgo Nilze de Almeida	Matemática - Ciência e Aplicações - Volume 1 2015-2017	Iniciou adotando a noção de função conforme Dirichlet, mas define função segundo Bourbaki. Os exercícios de aplicação sem estímulo a comunicação e argumentação por meio de língua materna ou linguagem Matemática, não promovendo a atitude investigativa dos estudantes.
Gelson Iezzi Oswaldo Dolce David Degenszajn Roberto Périgo Nilze de Almeida	Matemática - Ciência e Aplicações - Volume 1 2018-2020	Manteve a mesma didática da edição anterior, com substituição de alguns exercícios.
Luiz Roberto Dante	Matemática - Contexto e Aplicações - Volume 1 2015-2017	Concluo que Dante (2012) explora predominantemente a tendência de Dirichlet, mas também trata função como correspondência entre grandezas e

		transformação, porém os exercícios ainda não instigam a investigação e argumentação.
Luiz Roberto Dante	Matemática - Contexto e Aplicações - Volume 1 2018-2020	Explora a evolução histórica da noção de função de forma detalhada, mas mantém a mesma didática da edição anterior com substituição de alguns exercícios.
Manoel Paiva	Matemática: Paiva 2018-2020	Definição de função se aproxima da ideia de Dirichlet ao enfatizar a noção de variável, no entanto não fica explicito o caráter de dependência funcional. Propõe a elaboração e resolução de exercícios que envolvam situações do cotidiano, que podem instigar o raciocínio e promover comunicação e argumentação em linguagem materna e Matemática se houver intervenção de um professor.
Rodrigo Balestri	Matemática: Interação e Tecnologia 2018-2020	Atendeu objetivos do PNLD e da BNCC e explorou devidamente as diferentes linguagens de função, e no que tange as invariantes de função o autor adotou diversas formas de dar significado a função, dependência, variáveis, correspondência, regra, transformação, causa e efeito, generalização.

Fonte: elaborado pela autora (2019)

Dos seis livros didáticos analisados, apenas um, Balestri (2016), articula de maneira mais satisfatória as diferentes invariantes da definição de função, representações e situações do campo conceitual de função.

Percebe-se uma tendência de adequação e maior exploração das linguagens de função nas edições de livros didáticos do PNLD 2018-2020. E que aos poucos a latente influência Bourbakiana vem diminuindo tendendo uma abordagem mais exploratória, reflexiva e argumentativa sobre função e seus usos no cotidiano, o que corrobora com os resultados de Cruz (2015).

2. 2. CONCEPÇÃO DOS ALUNOS EGRESSOS

Nesta seção apresento a concepção de estudantes egressos sobre aprendizagem do conceito de função no Ensino Médio, desenvolvida durante o curso de mestrado na disciplina Currículo e Avaliação da Aprendizagem em Matemática.

O Conceito de função é um dos primeiros tópicos de Matemática do ensino médio e sua aprendizagem é fundamental para o desenvolvimento dos conhecimentos subsequentes, uma vez que nele é estabelecida a relação de dependência que há entre variáveis, sejam elas numéricas ou não e remonta vários outros conceitos estudados pelo aluno no ensino fundamental cumulativamente, apesar de que “os alunos estudam as funções no ensino fundamental e, continuam no ensino médio, demonstrando falta de clareza sobre os conceitos algébricos” (SILVA, 2014, p. 136).

As diretrizes da educação brasileira apontam descritores, habilidades e competências que para serem desenvolvidas ou exploradas no aluno, necessitam de que o conceito de função esteja claro para ele, tais como:

> Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento. (BRASIL, 2017, p. 531)

Porém, as pesquisas apontam que tais habilidades representam dificuldades em relação à aprendizagem, especialmente no que diz respeito à leitura e transposição de uma linguagem Matemática para outra (gráfico, tabela, diagrama e outros). De acordo com Silva (2014, p. 136) existem “dificuldades de fazer relações com as grandezas envolvidas, de fazer leitura correta dos gráficos e tabelas, de realizar os cálculos”. Tais dificuldades em fazer relações, leituras e cálculos foram submetidos a testes em estudantes do ensino médio nesta pesquisa.

Conforme Oliveira (1997, p. 41), existem dificuldades relacionadas a transposição dos problemas (linguagem escrita) para a expressão (linguagem algébrica) e os alunos costumam confundir domínio com elemento do domínio e/ou conjunto com elemento do conjunto, ou ainda, confundem a representação do conjunto com elementos do conjunto.

No que diz respeito a seção para minha pesquisa busco diagnosticar as dificuldades identificadas em relação a aprendizagem do conceito de função nos estudos diagnósticos estão em consonância com as dificuldades apontadas por alunos do ensino médio nos testes e questionários aplicados numa escola da rede pública de ensino do estado do Pará..

Para tanto, foi realizada uma pesquisa de campo com 100 alunos de uma escola pública estadual do bairro do Guamá, em Belém do Pará, tendo como instrumentos de pesquisa questionário, quadro de dificuldades e teste de conhecimentos.

O quadro de dificuldades e o teste de conhecimentos foram construídos a partir das exigências curriculares e dos estudos diagnósticos, que resultou em 10 dificuldades de aprendizagem do conceito de função, de modo que para cada dificuldade identificada foi elaborei uma questão correspondente (objetiva e/ou discursiva) de modo a averiguar sua existência junto aos alunos.

Das análises qualitativas e quantitativas dos dados obtidos, constatei que as dificuldades de aprendizagem sobre o conceito de função são as relacionadas a raciocinar, representar, argumentar, comunicar tal conceito, em língua materna ou em linguagem Matemática (diagrama, gráfico, tabela, equação, par ordenado, etc.). Tal constatação norteará a continuidade da pesquisa sobre ensino do conceito de função no Ensino Médio.

O conceito de função é conteúdo fundamental no currículo educacional brasileiro para o Ensino Médio. Por isso elencamos a seguir o referencial utilizado no que tange as diretrizes curriculares e as matrizes de referência do sistema de avaliação para o conteúdo objeto de estudo desta pesquisa, para nortear a diagnose das dificuldades de aprendizagem do conceito de função.

O conceito de função está estabelecido como integrante do currículo de Matemática no Brasil por estar presente em todos pressupostos legais para o Ensino Médio, tais como a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Tal conhecimento matemático também passa por avaliações tanto a nível nacional quanto estadual. Logo, foi de fundamental importância recorrer ao Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE) / Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Matriz de Referência do Sistema Paraense de Avaliação Educacional (SISPAE) e Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Do cruzamento entre o que está posto na legislação curricular e nas matrizes de referência da avaliação do sistema educacional, tanto nacional como paraense e nos estudos diagnósticos, levantei as habilidades necessárias à compreensão do conceito de função que envolvem *definições, variáveis, linguagens e representações, operacionalização de cálculos e interpretação de problemas.*

2. 2. 1. Procedimentos da pesquisa e perfil dos estudantes

A pesquisa de campo foi planejada durante a realização da disciplina Currículo e Avaliação da Aprendizagem em Matemática do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, durante o primeiro semestre de 2018. Nesse planejamento foram elaborados os seguintes instrumentos:

a) Ofício entregue na instituição onde a pesquisa foi realizada;

b) Minuta do trabalho de campo, com apresentação, caracterização e justificativa da pesquisa pretendida;

c) Termos de Consentimento Livre e Esclarecido, com modelos para estudantes maiores e menores de 18 anos de idade;

d) Questionário sobre as formas metodológicas de ensino e de avaliação do assunto pesquisado;

e) Quadro de dificuldades sobre o assunto pesquisado;

f) Teste de conhecimentos sobre o assunto pesquisado.

O quadro de dificuldades foi elaborado a partir das habilidades exigidas nos documentos oficiais da educação sobre o conceito de função e das dificuldades de aprendizagem apontadas no referencial bibliográfico para este conteúdo, como ilustramos no Quadro 10:

Quadro 11: Habilidades e Dificuldades - Conceito de função.

DIFICULDADES IDENTIFICADAS		FONTES	
		DOCUMENTOS OFICIAIS	PESQUISAS REALIZADAS
D1	Identificar variáveis envolvidas em situação-problema.	SISPAE BNCC	Oliveira (1997) Pelho (2003)
D2	Identificar a natureza das variáveis (velocidade, tempo, peso, preço)	SISPAE BNCC	Oliveira (1997) Pelho (2003)
D3	Identificar a relação entre variáveis (independentes x dependentes).	ENEM BNCC	Pelho (2003) Cunha, Souza e Chaquiam (2010)

D4	Transcrever uma situação-problema (real/fictícia) da linguagem escrita (língua materna) para a linguagem Matemática (diagrama, gráficos, pares ordenados, equações, tabelas, quadros, etc.) e vice-versa.	ENEM BNCC SAEB PCN	Oliveira (1997) Cunha, Souza e Chaquiam (2010) Silva (2014) Silvestre (2016) Santos e Barbosa (2017)
D5	Utilizar diferentes símbolos (diferentes de *x* e *y*) para representar variáveis independente e dependente.	BNCC ENEM	Oliveira (1997) Pelho (2003) Cunha, Souza e Chaquiam (2010)
D6	Calcular uma variável a partir de outra variável.	BNCC ENEM	Oliveira (1997) Silva (2014)
D7	Definir função.	PCN	Oliveira (1997) Sá (2003) Costa (2004) Santos e Barbosa (2017)
D8	Identificar/definir/calcular o conjunto de partida (domínio) e o conjunto de chegada (contradomínio).	BNCC	Costa (2004) Oliveira (1997)
D9	Identificar diferentes representações de funções.	ENEM SAEB	Mafra (2009) Silvestre (2016) Santos e Barbosa (2017)
D10	Resolução de situação-problema (real/fictícia) que envolvem o conceito de função.	BNCC ENEM PCN	Sá (2003) Mafra (2009) Cunha, Souza e Chaquiam (2010)

Fonte: SILVA, FELIX, CHAQUIAM (2018)

A partir desse quadro de habilidades e dificuldades foi elaborado um teste de conhecimentos com uma questão diagnóstica para cada dificuldade disposta no Quadro 10. Por se tratar de assunto conceitual, elaborei questões objetivas, mas também questões discursivas com o intuito de avaliar a habilidade dos estudantes em desenvolver apresentação de argumentos, bem como avaliar sutis indícios da apreensão do conhecimento matemático pesquisado.

2. 2. 2. Dificuldades na aprendizagem dos sujeitos em Conceito de Função

Para que eu verificasse se as dificuldades de aprendizagem em relação ao conceito de função apontadas nos estudos diagnósticos estão em concordância com as dificuldades apresentadas por estudantes do ensino médio, realizei uma pesquisa de campo com estudantes do 3º ano do ensino médio de uma escola pública estadual do bairro do Guamá em Belém-PA.

No total, apliquei os instrumentos de pesquisa a 118 estudantes, porém apenas 100 foram tabulados, havendo o descarte dos demais por apresentarem informações incompletas ou insuficientes e preservando o anonimato dos estudantes.

Perguntei aos estudantes o grau de dificuldade em desenvolver cada uma das 10 habilidades inerentes ao conceito de função (Quadro 10). Em seguida, apliquei o teste de conhecimentos com questões objetivas e discursivas sobre cada uma dessas dificuldades.

Na elaboração do teste, tive a preocupação em diagnosticar uma única dificuldade por questão, potencializando a eficácia do procedimento, para não criar dúvida sobre qual dificuldade impediu o estudante de resolver a questão proposta.

No Quadro 12, apresento o grau de dificuldade informado pelos sujeitos da pesquisa e seu desempenho no teste de conhecimentos em cada uma das dificuldades. Está em negrito as respostas em moda, para melhor verificação das análises que apresento a seguir. Enfatizo nas duas últimas linhas as quantidades de alunos que acertaram parcialmente ou totalmente as questões.

Quadro 12: Percepção de estudantes – Aprendizagem do conceito de função (%)

RESPOSTAS DOS ALUNOS	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10
Não lembra	15	16	31	11	10	**37**	25	26	24	26
Fácil	10	9	3	6	10	5	5	5	1	2
Muito fácil	20	28	13	18	35	11	20	15	12	16
Regular	**47**	**34**	**42**	**50**	**39**	33	**40**	**39**	**51**	**40**
Difícil	7	12	11	13	5	14	10	15	12	12
Muito difícil	1	1	0	2	1	0	0	0	0	4
DESEMPENHO NO TESTE	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Não fez	1	0	5	**49**	24	**37**	**55**	10	11	**74**
Fez e errou totalmente	**72**	12	15	20	**40**	9	30	11	12	13
Fez e acertou parcialmente	1	1	**72**	13	0	19	13	**75**	**73**	11
Fez e acertou totalmente	26	**87**	8	18	36	35	2	4	4	1

Fonte: SILVA, FELIX, CHAQUIAM (2018)

Sobre o quadro dificuldades, os estudantes graduaram, em sua maioria, os tópicos apresentados em grau *Muito fácil* a *Regular*, em torno de 66%, porém essa constância não se revelou na resolução das questões respectivas a cada item, pois o sucesso na resolução variou bastante de uma questão para outra.

Na dificuldade D1, identificar variáveis envolvidas numa situação-problema, constatei que 72% dos estudantes erraram totalmente a questão referente a ela.

Pelho (2003, p.11) aponta para importância da compreensão de variáveis no estudo de funções e afirma que dela decorre a dificuldade aprendizagem do conceito de função, do que podemos inferir que tal dificuldade é conferida aos sujeitos da pesquisa.

A dificuldade D2 de identificar a natureza das variáveis pode ser diagnosticada como superada, uma vez que 87% dos estudantes acertou totalmente essa questão. Esse tipo de dificuldade pode ser classificado como obstáculo de homogeneidade, isto é, os estudantes desta amostra conseguem identificar variáveis de naturezas diferentes dentro de uma situação problema. (Oliveira, 1997, p. 33).

A identificação da relação entre variáveis (independentes x dependentes) aconteceu por 80% da amostra. Segundo Sá (2003, p. 6) desde o século XVII a palavra função é utilizada para definir quantidades que dependem de uma variável, indicando que o reconhecimento dessa relação é fundamental para compreensão desse conceito. Logo o desempenho na dificuldade D3 indica êxito na compreensão do conceito de função pelos estudantes.

A transcrição de uma situação-problema da língua materna para a linguagem Matemática e vice-versa é uma habilidade exigida nos PCN's, para desenvolvimento da capacidade de representação e comunicação (Brasil, 1998, p. 12). Segundo Pelho (2003, p. 23) "quanto maior for a possibilidade de articulação entre diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto". Porém, os dados da pesquisa revelam limitações nessa apreensão, pois verifiquei que 49% da amostra sequer tentou resolvê-la e apenas 21% desenvolveu a questão pelo menos de forma parcialmente correta, o que nos leva a concluir que esta dificuldade D4 se confirma para os sujeitos da pesquisa.

A utilização de diferentes símbolos (diferentes de *x* e *y*) para representar variáveis independentes x dependentes, foi classificada por Oliveira (1997, p. 34) como um obstáculo didático gerado também porque muitas vezes os próprios livros didáticos usam "*x*" para variável independente e "*y*" para variável dependente de forma recorrente, causando problemas na identificação por parte dos alunos caso esses símbolos sejam permutados ou modificados. Nessa dificuldade D5, os dados da pesquisa mostram como sendo um desafio, uma vez que apenas 36% da amostra conseguiu desenvolver a questão.

No cálculo de uma variável a partir de outra variável, D6, a maioria dos estudantes obteve êxito, sendo que 54% deles acertaram a questão proposta pelo menos parcialmente, haja vista que alguns erros se deram por simples manipulações aritméticas, o que corrobora com a pesquisa realizada por Silva (2014, p.136) ao afirmar que “as dificuldades em cálculos algébricos são dificuldades em conteúdos básicos como regra de sinais, operações elementares”.

A dificuldade D7 de definir função teve um percentual de 85% que não fez a questão ou tentou mas errou totalmente, revelando um obstáculo preocupante sobre a apreensão dessa habilidade, uma vez que os estudantes poderiam utilizar de forma livre a língua materna e/ou linguagem Matemática, pois “comunicar o conceito de função como uma generalização é expressar em linguagem corrente ou usando símbolos algébricos uma afirmação geral que explicita a dependência entre variáveis de uma relação funcional, tomando como base alguns dados dessa relação.”(SANTOS e BARBOSA, 2017, p. 33)

Identificar/definir/calcular o conjunto de partida (domínio) e o conjunto de chegada (contradomínio), dificuldade D8, apresentou bom desempenho de 79% por parte dos estudantes, ainda que parcial, haja vista que havia mais de uma opção correta. Costa (2004, p. 26) explica que domínio é o conjunto das variáveis independentes e contradomínio o conjunto das variáveis dependentes. E o resultado dos dados demonstraram clareza dessa definição por parte dos estudantes, diferente do que Mafra (2009, p. 23) afirma: “para muitos alunos da Educação Básica não há uma compreensão clara sobre os conceitos relacionados ao domínio, contradomínio e imagem”.

A identificação dos diferentes tipos de representações de funções também indicou que a dificuldade D9 é uma habilidade dos estudantes, uma vez que 79% conseguiu identificar em algum tipo de representação do conceito de função. O que atende a orientação estabelecida pela BNCC como habilidade a ser desempenhada pelos estudantes em “reconhecer funções definidas por uma ou mais representações [...] em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra” (BRASIL, 2017, p. 531).

A Resolução de situação-problema (real/fictícia) que envolvem o conceito de função, proposta para diagnosticar a dificuldade D10, exigia capacidade de argumentação do estudante tão requerida nas diretrizes da educação tais como PCN e BNCC. Nessa dificuldade obteve-se o resultado mais preocupante pois 74%

dos estudantes se quer tentou fazer e apenas 1% desenvolveu devidamente. A questão pareceu paralisar os estudantes por apontar um problema trivial de dar nomes a pessoas, por isso Cunha, Souza e Chaquiam (2010, p. 2), ressaltam a importância de apresentar uma visão mais humana da Matemática para o aluno.

Nesse sentido, Silva (2014, p. 128), propõe situações ricas e diversificadas que estimulem a capacidade de leitura e escrita e que valorizem, estimulem e encorajem o estudante a raciocinar e comunicar ideias promovendo seu próprio saber.

Para sintetizar com maior clareza quais dificuldades foram refutadas ou corroboradas, considerei que questões com menos de 50% de acertos tiveram a dificuldade confirmada, questões com número de acertos entre 51% e 70% do total foram considerei como dificuldade confirmada com indício de superação e as questões com mais de 70% de acertos foram consideradas com a dificuldade superada.

Resumidamente, podemos dizer que quatro das dez dificuldades se revelaram como sendo superadas pelos estudantes da amostra (D2, D3, D8 e D9). A dificuldade D6 apontou um quantitativo mediano de estudantes, portanto confirmada com indício de superação. Apenas cinco das dificuldades foram confirmadas para os sujeitos desta pesquisa (D1, D4, D5, D7, D10).

2. 2. 3. Considerações sobre os resultados

Mediante a análise das resoluções no teste de conhecimento, concluí que das dificuldades de aprendizagem analisadas cinco foram confirmadas, das quais quatro advêm de obstáculos que os estudantes apresentam em realizar leitura, argumentação e representação em linguagem Matemática e em língua materna. Apenas a dificuldade de “calcular uma variável a partir de outra variável” apresentou indício de superação, corroborando para o fato de que as dificuldades estão relacionadas à interpretação e não à operacionalização de cálculos.

Dentre as quatro dificuldades que considerei superadas, apenas a dificuldade de “identificar a natureza das variáveis (velocidade, tempo, peso, preço)” obteve um bom índice de acerto total. As demais apresentaram acerto parcial, demonstrando que ainda há uma fragilidade na aprendizagem deste conteúdo.

Diante desses resultados, posso inferir que os sujeitos apresentam bom desempenho de aprendizagem do conceito de função tendo dificuldades especialmente naquelas que exigem a habilidade de argumentar e representar seja em língua materna ou em linguagem Matemática.

A Base Nacional Comum Curricular, submetida à aprovação, alude especificamente a tais necessidades.

> Os estudantes [...] devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2017, p. 519)

Com relação a comunicar o conceito de função são várias as formas de linguagem possíveis, no entanto, “cada uma das formas de comunicar o conceito de função revela aspectos singulares do conceito que são pertinentes e, às vezes, específicos para certas situações funcionais” (SANTOS e BARBOSA, 2017, p. 36).

Ainda que possa parecer uma “torre de babel” onde os usuários de cada linguagem não consigam se entender, todas elas formam uma unidade. “Essa percepção da unidade da Matemática [...] fornece uma linguagem com a qual pessoas de diferentes realidades podem se comunicar, com precisão e concisão, em várias áreas do conhecimento” (BRASIL, 2017, p. 522).

Logo é a articulação entre as várias formas de comunicar conceito de função que vão ao longo da vida escolar contribuindo para formação desse conceito, pois:

> [...] a formação de conceitos é um processo criativo, e não um processo mecânico e passivo; um conceito surge e se configura no curso de uma operação complexa, voltada para a solução de uma situação problema; só a presença de condições externas favoráveis a uma ligação mecânica entre a palavra e o objeto não é suficiente para a criação de um conceito (VYGOTSKY, 2005, p. 67, apud SILVA, 2014, p. 127)

Esse processo criativo reforça a necessidade de articulação entre as diferentes formas de se comunicar o conceito de função e o quanto a capacidade de leitura das diferentes linguagens, sejam elas materna ou Matemática, desempenham papel fundamental na aprendizagem de função no ensino médio.

2. 3. CONCEPÇÃO DE PROFESSORES

Nesta seção apresento análise sobre o ensino e aprendizagem a respeito do Conceito de Função segundo a concepção de professores de Matemática do ensino médio da escola pública que ministraram o referido tema por meio de um questionário envolvendo questões abertas e fechadas.

Tendo em conta que o objetivo que foi estabelecido para pesquisa é verificar as potencialidades de uma sequência didática para o ensino do conceito de função e, para tanto, observou-se a necessidade que ouvir os professores de Matemática que ministraram esse tema visando diagnosticar suas percepções em relação as dificuldades no processo de ensino e de aprendizagem do conceito de função, tendo como instrumento de pesquisa um questionário envolvendo aspectos da experiência e formação desses profissionais, bem como suas metodologias e prática de ensino e suas concepções a respeito das dificuldades de aprendizagem vivenciadas por seus alunos.

2. 3. 1. Procedimentos da pesquisa e perfil dos professores

Foram consultados trinta e sete professores licenciados em Matemática que atuam ou atuaram no Ensino Médio, no mês de abril de 2019, cuja maioria apresentou o seguinte perfil:

- 72% da faixa etária de 31 a 50 anos;
- 83,8% do sexo masculino;
- 81,1% trabalham em escola pública estadual;
- 73% possui mestrado incompleto;
- 48,6% tem experiência em ensino de Matemática de 11 a 20 anos;
- 86,5% trabalham em uma ou duas escolas;
- 62,2% possuem turmas de 36 a 45 alunos;
- 86,5% têm essa profissão como única fonte de renda.

Diante dessas características, podemos inferir que os entrevistados são profissionais experientes e qualificados para exercerem a docência em Matemática no ensino médio, cujas informações podem contribuir para melhor entendimento da temática, bem como, compreender as dificuldades inerentes ao processo de ensino e de aprendizagem desse conceito, uma vez que:

> A iniciação à docência é um período marcado por sentimentos ambíguos. Se, de um lado, ela é caracterizada como uma etapa de tensões, angústias, frustrações e inseguranças, por outro, o iniciante a professor sente-se alegre por ter uma turma, por pertencer a um grupo de profissionais. Como todo início de profissão, esses primeiros anos constituem uma etapa de profundas mudanças e aprendizagem sobre a profissão. (BRITO & SANTOS, 2009, p. 3)

Observado o perfil da maioria dos professores, é possível afirmar que superaram essa fase de transição de estudantes de Matemática para professores de Matemática, fato que nos leva a inferir que suas contribuições agregam uma perspectiva associada ao seu conhecimento profissional.

Ainda sobre o perfil dos professores consultados, considero relevante destacar que sua experiência e dedicação profissional exclusiva à educação pública e com um número significativo de alunos, também possibilita a construção opinião baseadas na diversidade de dificuldades possíveis de se vivenciar nesse contexto tão plural que é o ambiente escolar.

> A relação da docência com a pobreza, com a violência, com as novas tecnologias, com o aprisionamento do ser, com a vulnerabilidade social, entre tantos outros fatores, influência de maneira significativa as possibilidades de autoformação, pois estimula a reflexão sobre a formação inicial na busca de uma melhor forma de interagir com as necessidades que a experiência apresenta. (BATISTA, FELTRIN, BECKER, 2019, p.70)

Diante disso, reafirmo que os sujeitos desta pesquisa podem dar contribuições significativas sobre o ensino do conceito de função, considerando o perfil dos informantes acerca de sua experiência profissional, considerando que o produto educacional resultante desta dissertação destinar-se-á aos alunos do ensino médio.

2. 3. 2. Prática pedagógica dos professores consultados

Outro aspecto destacado pelos professores consultados envolve suas estratégias e metodologias de ensino em relação ao conceito de função, fatos que contribuíram durante o processo de elaboração das atividades.

Das respostas dos professores, 56,8% apresentam o referido conceito, em 1 a 3 horas aulas, por meio de exposição dialogada. Além disso, preferem iniciar o assunto com uma situação problema para depois introduzir conceitos e definições, tal como recomendado nos PCN's em relação ao ensino de Matemática, isto é:

> Cabe, portanto, ao ensino da Matemática garantir que o aluno adquira certas flexibilidades para lidar com o conceito de função em situação diversa e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre função para construir um modelo para a interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 1998, p. 44)

Embora a aula expositiva dialogada adotada venha ser uma estratégia de potencial eficácia para esse propósito interpretativo e investigativo, pois segundo Resende et al (2014, p. 207), nesse método o professor tem um meio de confrontar suas ideias com os pensamentos dos estudantes, relacionando os conhecimentos adquiridos com a realidade, entende-se que existem outras metodologias que também podem favorecer esse processo, dentre elas, as sequências didáticas.

Passada a fase introdutória do assunto, não há unanimidade entre os professores sobre a sequência em que se ensina o conceito de função, havendo uma flexibilidade nas estratégias pedagógicas por eles adotadas como ilustra o quadro a seguir:

Quadro 13: Sequência de ensino do conceito de função

Conjuntos - Produto cartesiano - Relação - Função.	37,8 %
Par ordenado - Sistema de Eixos - Representação gráfica - Função.	13,5 %
Conceito de função - Definição de função - Representações.	29,7 %
Situação problema - Equação - Conceito de função.	16,2 %

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Ainda que não seja uma maioria absoluta, nota-se que boa parte dos professores, 37,8 %, adota o ensino do conceito de função por meio de conjuntos e produto cartesiano, pois:

> Como, em geral, se podem expressar as ideias abstratas da Matemática de maneira mais clara e concisa em ternos da notação e dos conceitos da teoria dos conjuntos e como esta é, reconhecidamente, um dos fundamentos da Matemática, compreende-se por que a Matemática moderna se inicia com uma introdução elementar à teoria dos conjuntos e prossegue com uma utilização persistente de suas notações e ideias. (EVES, 2004, p. 691)

Mais adiante retomaremos essa discussão de forma contundente, considerando também a análise de livros didáticos realizada, assim como, a reconstrução histórica do conceito de função sobre o uso excessivo de um determinado modo de conceituar e representar este objeto matemático em detrimento de outras formas que também agregam significados importantes para a sua aprendizagem.

2. 3. 3. Dificuldades de aprendizagem em conceito de função segundo professores de Matemática

Depois de analisar o perfil profissional dos professores participantes desta pesquisa, apresento os resultados sobre sua percepção a respeito das dificuldades de aprendizagem do conceito de função, fazendo uma análise paralela a que fiz na pesquisa com estudantes, para verificar se há coincidência nas opiniões dos professores e nos resultados do teste diagnóstico.

Inicialmente foram feitas perguntas de resposta livre, tendo em vista não induzir as respostas em função dos objetivos estabelecidos e fatos identificados na revisão da literatura. A primeira pergunta retratava aspectos relacionados as dificuldades que estes presumem ter em relação ao ensino do conceito de função, cujas mais recorrentes estão destacadas a seguir:

- Análises gráficas dos problemas.
- Na forma de introduzir a linguagem.
- A diferença entre função e relação.
- Explicar aos alunos as mudanças de registros: algébrico, gráfico e etc.
- Transpor da linguagem usual para representação algébrica.
- Ideia de dependência.
- Linguagem Matemática.
- Identificar a partir da definição de função o gráfico no plano cartesiano.
- Compreensão de situação/problema e sua representação simbólica.
- Identificar domínio e contradomínio em situação/problema.

Os destaques acima nos revelam limitações epistemológicas e didáticas desses professores em relação ao ensino desse objeto, neste sentido, essas limitações corroboram com o processo de elaboração das atividades que irão fazer parte da sequência didática, uma vez que estas devem ser superadas no decorrer do processo.

Tomando por base Machado (2002, p.142), vale ressaltar que a capacidade de aprimorar o raciocínio lógico e a argumentação e capacidade de expressão está também diretamente associada ao tipo de ação pedagógica proposta pelo professor e ao conhecimento que ele detém sobre o assunto e a turma, uma vez que tais capacidades pessoais devem se desenvolver nas disciplinas escolares e dependem da proposta pedagógica adotada pelo professor.

Outra questão em aberto retrata o que os professores consideram em relação ao conceito de função como sendo de difícil aprendizagem para os estudantes, sendo as respostas mais recorrentes:

- Interpretar e relacionar as grandezas e estabelecer as dependências.
- As diferentes representações de uma função.
- No meu entender, eles buscam a técnica algorítmica. Quando não há, nesse caso há o conceito, eles costumam apresentar rejeição, mais dificuldades que de costume.
- Na transposição do texto para linguagem Matemática
- Buscar a visualização do próprio assunto. Apesar de situações problemas, representações em diversos formatos, que busco apresentar em sala, ainda há muita dificuldade na percepção deste e a partir de então se apropriar do conteúdo e aplicar.
- Linguagem Matemática.
- Associar a definição a uma situação real;
- Falta de leitura, raciocínio lógico!
- De relacionar com exemplos práticos do cotidiano.
- Falta de situações contextualizadas que demonstre de modo mais claro a diferença entre função e relação.
- Resolução de problemas, perceber o conceito de função em situações da vida dele, formular a escrita do conceito de função em linguagem Matemática.

Constato aqui que as dificuldades percebidas pelos professores se aproximam das que levantei a partir dos estudos preliminares e que estão em torno das diferentes linguagens e representações utilizadas para o ensino do conceito de função, “só é possível, então, analisar as concepções sobre este tipo de conceito, através da sua expressão pela linguagem Matemática que o sujeito aprendeu a elaborar, seja na escola, seja pela interferência de algum outro sujeito escolarizado”. (ZUFFI e PACCA, 2012, p. 2). Também considero importante tanto para o professor quanto dos estudantes aprenderem a se comunicar em tanto linguagem materna quanto em linguagem Matemática, como aludem Chaquiam e Cabral:

> Sabemos que a Matemática tem linguagem própria e que para compreender o significado matemático é imprescindível aprender a falar, a ler e nos comunicar nessa língua. Comparar a Matemática com o falar e escrever na língua materna é fundamental. (CHAQUIAM & CABRAL, 2019, p.12)

Em seguida, apresentei para os professores a mesmas questões do teste aplicado com estudantes para que eles informassem o grau de dificuldade que os estudantes normalmente teriam ao resolverem questões sobre conceito de função. O Quadro 14 mostra os resultados para as questões dos dez tipos de dificuldades/habilidades apresentadas na seção 3.1.

Quadro 14: Percepção de professores – Aprendizagem do conceito de função (%)

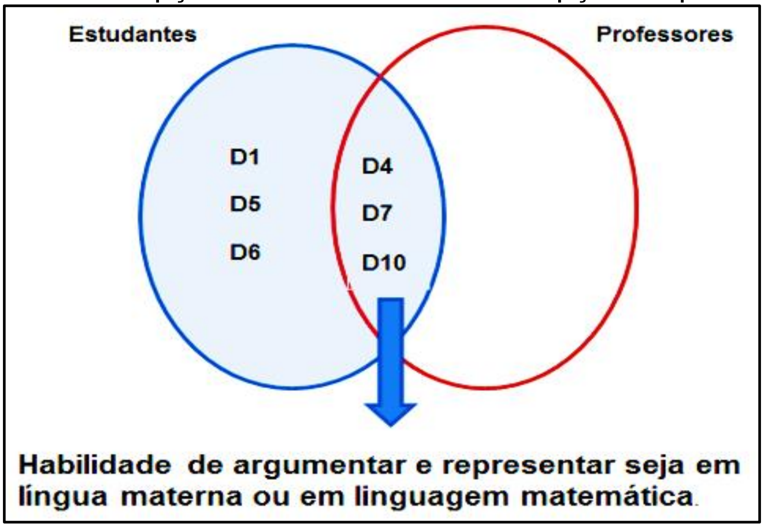
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10
Muito Fácil	2,7	8,1	2,7	2,7	0,0	8,1	0,0	0,0	0,0	0,0
Fácil	45,5	35,1	24,3	8,1	32,4	24,3	10,8	10,8	18,9	8,1
Regular	**48,6**	**40,5**	**37,8**	35,1	**40,5**	**54**	**37,8**	**51,5**	**45,9**	29,7
Difícil	8,1	16,2	29,7	**51,3**	24,3	13,5	**37,8**	29,7	29,7	**51,3**
Muito Difícil	0,0	0,0	5,4	2,7	2,7	0,0	13,5	8,1	5,4	10,8

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Note que poucos professores consideram qualquer das questões muito fácil, sendo que a maioria das questões são classificadas por eles em grau de dificuldade regular e apenas as dificuldades D4 (Transcrever uma situação-problema da linguagem escrita para a linguagem Matemática e vice-versa), D7 (Definir função), e D10 (Resolução de situação-problema que envolvem o conceito de função) foram indicadas pela maioria como difíceis.

Verifiquei que esse resultado se aproxima do que encontramos na pesquisa com estudantes egressos em que se constatou que das 10 dificuldades levantadas 6 foram confirmadas (D1, D4, D5, D6, D7, D10), de modo que podemos confrontar esses resultados na figura abaixo da seguinte maneira:

Figura 13: Percepção de estudantes X Percepção de professores



Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Diante do exposto, concluo mais uma vez que as dificuldades de aprendizagem sobre o conceito de função no Ensino Médio se dão pela falta de habilidade e estímulo da capacidade de argumentar através das diferentes linguagens sejam elas materna ou Matemática.

Tal constatação demonstra a importância do papel do professor enquanto mediador da aprendizagem no estímulo da oralidade e do registro das manifestações dos estudantes. Nesse aspecto o fato desses sujeitos adotarem aula expositiva dialogada como estratégia didática em sala de aula revela que compreendem a necessidade de alternativas de ensino em que os estudantes possam discutir, socializar ideias, formular conjecturas e fazer conclusões fundamentadas matematicamente, pois

> Dessa maneira a aula se transforma em uma troca de experiência, onde fenômenos presentes no cotidiano dos estudantes são levados a estudo, buscando a relação entre os conhecimentos prévios destes estudantes com saberes científicos apresentados pelo professor, em contraponto ao senso comum. (RESENDE, 2014, p. 206)

Neste sentido, considero que as contribuições dos professores consultados nesta pesquisa trouxeram um olhar no aspecto da experiência profissional e corroborou com as conclusões dos levantamentos preliminares, indicando que esta pesquisa pode seguir o curso definido pelas dez dificuldades/habilidades de aprendizagem do conceito de função até aqui definidas como objetivos de aprendizagem da pretensa sequência didática a construir.

3. O CONCEITO DE FUNÇÃO

> *"A função cria novas grandezas. Não o que já foi criado e que estancou, mas só o que se cria e transforma possui vida, e existe realmente! E assim a função adquire quase que um caráter de ser vivo. [...] Consideremos as funções como seres vivos, e procuremos familiarizar-nos com seus costumes."*
>
> (Paul Karlson)

Nesta seção apresento o objeto matemático função e os conteúdos correlacionados numa perspectiva científica, com o devido rigor e aprofundamento, considerando a evolução histórica e epistemológica do objeto, tendo em vista as dificuldades de aprendizagem diagnosticadas nas seções anteriores e para obter subsídio para elaboração e aplicação da sequência didática a ser construída.

Considerando que o objeto matemático função abrange todos os níveis de ensino de Matemática, foi necessário delimitar o assunto ao Ensino Médio e às necessidades de aprendizagem que investigamos em nossa revisão de estudos e pesquisa com estudantes e professores. Nesta seção apresento reflexões a respeito do conceito de função sob a ótica da história da Matemática e do rigor matemático, visando contribuir para o processo de ensino do mesmo..

A seguir convido o leitor a compreender os desafios de sua prática docente inserindo-se aos contextos históricos e aprofundando-se às peculiaridades e minúcias inerentes ao conceito de função.

3. 1. UMA RECONSTRUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE FUNÇÃO

O que foi produzido em termos de conhecimento por nossos antepassados constituem o que hoje nos parece pronto e acabado, mas a investigação de como e para que as coisas foram pensadas e criadas revelam a genialidade humana e sua capacidade de evoluir através do surgimento de cada novo desafio, nos fazendo compreender e refletir sobre a realidade.

No ensino de Matemática, o estudo das origens dos conceitos hoje já formalizados tem sua fundamentação elucidada através das pesquisas em História da Matemática. Tais pesquisas constituem elementos facilitadores nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática.

Segundo Brasil (1998), a utilização da História da Matemática pode desenvolver nos estudantes atitudes e valores favoráveis diante do conhecimento matemático, levando-os a relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade, transcendendo a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos e, como afirma CHAQUIAM (2017, p. 13), “numa ordem bem diferente daquela apresentada após o processo de formalização”.

Nesta subseção, apresento os resultados de uma pesquisa qualitativa de análise bibliográfica com o objetivo de analisar uma evolução histórica do conceito de função desde a antiguidade até a atualidade, visando contribuir à formação de professores, a partir das contribuições de cada personagem que agregou novos elementos ao campo conceitual de função.

Neste sentido procurou-se elaborar um texto apresentando elementos que contribuam quanto ao uso da história da Matemática no ensino de Matemática, perpassando pelos obstáculos epistemológicos que envolveram o conceito de função.

Defini aportes teóricos e metodológicos para construir uma evolução histórica mais detalhada da ideia de função, de modo a evidenciar os avanços e retrocessos, bem como os obstáculos superados por cada personagem que marcou significativamente cada passo.

Faz-se necessário esclarecer que um conceito não se resume a sua definição, mas a um conjunto de invariantes, situações e representações que tornam esse conceito significativo ao indivíduo. Essa é a ideia de campo conceitual definida por VERGNAUD. Oliveira (1997) sintetiza essa ideia afirmando que um conceito.

> é constituído a partir de três elementos: a) conjunto de situações que tornam o conceito significativo; b)conjunto de invariantes, que podem ser reconhecidas e usadas pelo indivíduo para entender as situações; c) conjunto de representações simbólicas, que servem para representar as situações e ajudar a resolver problemas (OLIVEIRA, 1997, p. 8).

Apresento reflexões sobre os personagens elencados na linha tempo acerca dos obstáculos e avanços do conceito de função, na perspectiva do campo conceitual de função, isto é, invariantes, situações e representações que cada sujeito utilizou para constituir e formular sua ideia de função.

Para que cada elemento novo de um campo conceitual seja agregado foi necessário superar obstáculos epistemológicos explicados por Bachelard, que em sua teoria buscou esclarecer durante o processo de aprendizagem os professores devem estar atentos para que os obstáculos epistemológicos não estejam presentes na sua forma de ensinar, e ter um olhar especial também nos recursos didáticos utilizados em sala de aula que impeçam a formação do espírito científico ou até mesmo o seu retrocesso (Trindade, Nagashima e Andrade, 2017, p. 5).

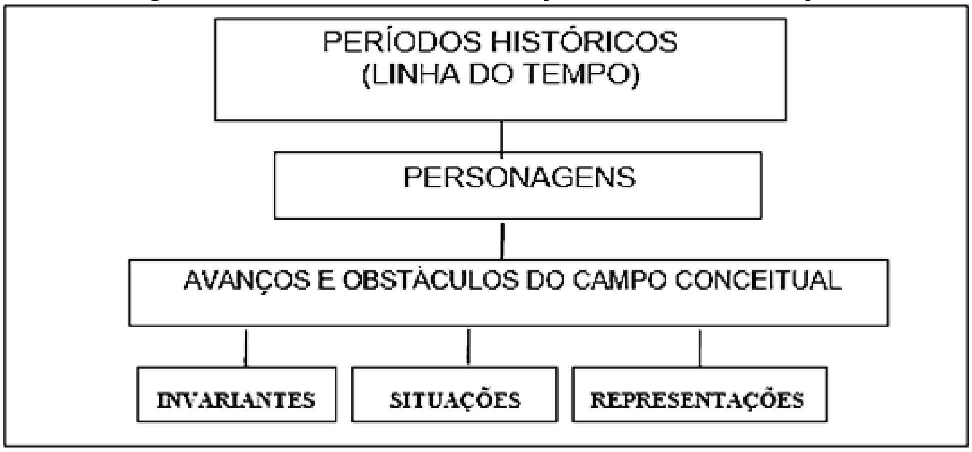
A história da Matemática é um recurso didático que pode contribuir à superação de obstáculos epistemológicos, afinar a agudeza crítica e mostrar que:

> O movimento de abstração e generalização crescentes porque passam muitos conceitos e teorias em Matemática não se deve, exclusivamente, a razões de ordem lógica, mas à interferência de outros discursos na constituição e no desenvolvimento do discurso matemático. (MIGUEL e BRITO, 1996, apud CHAQUIAM, 2017, p. 17)

Nesse sentido, busco esclarecer aos professores como superar seus próprios obstáculos de aprendizagem, a partir dos desafios de cada personagem ao longo da história da construção do conceito de função.

Para fazer a discussão a respeito da construção do conceito de função, as análises serão entorno dos obstáculos e avanços que ocorreram durante o processo de evolução do conceito de função a partir de alguns personagens, observado o campo conceitual de função se constituiu como ilustro na Figura 1.

Figura 14: Fluxo da reconstrução histórica –Função

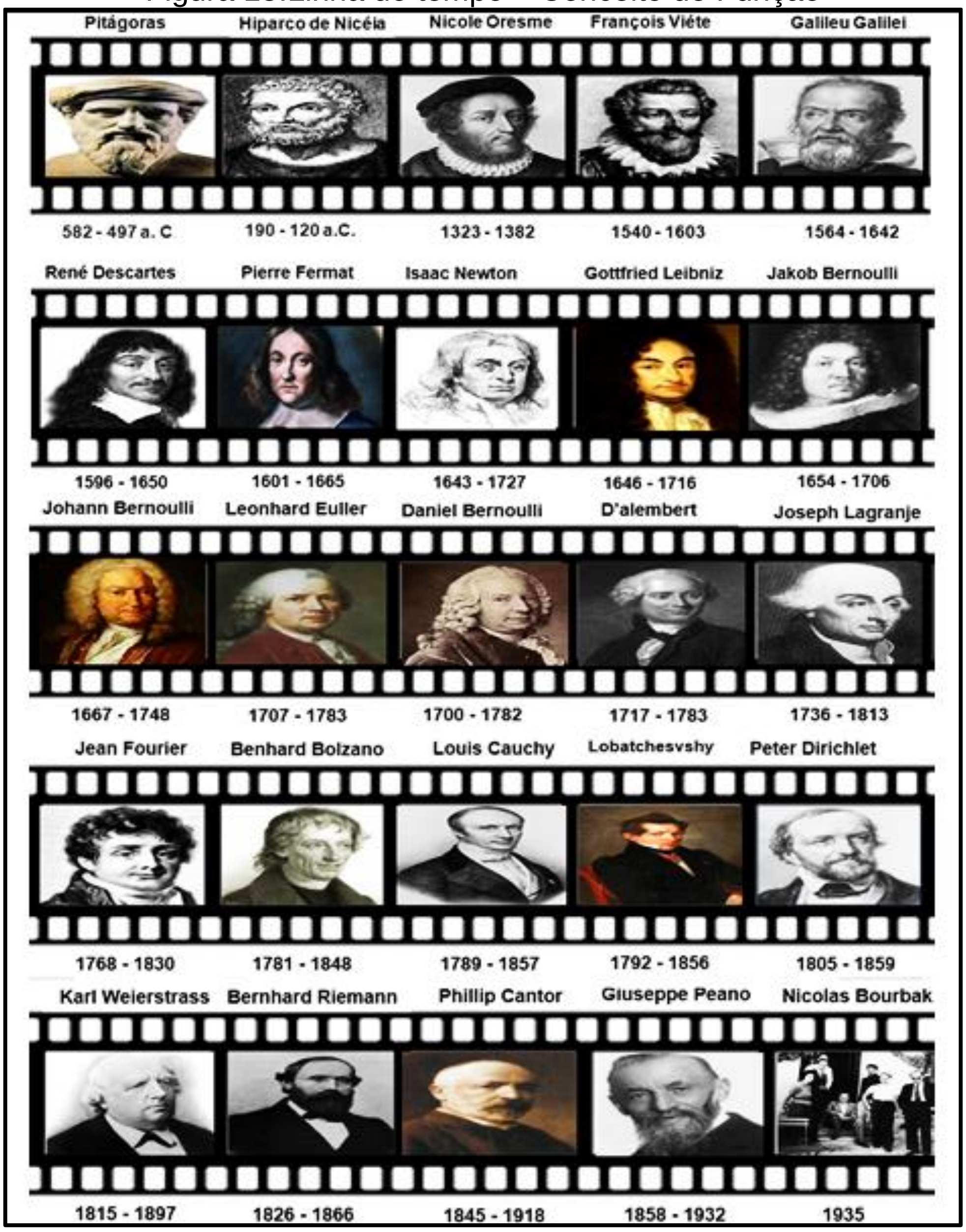


Fonte: Silva, Miranda, Cabral (2019).

As evidências da aplicação do comportamento funcional datam desde muito antes de Cristo. Cerca de 2000 a. C. mesopotâmios e babilônios usavam tábuas para registrar cálculos em tabelas para resolução de problemas do cotidiano.

Situei tais sujeitos na linha do tempo da reconstrução histórica do conceito de função, ilustrada na Figura 2, e nos seguintes períodos históricos: a) Antiguidade: Datada entre o desenvolvimento da escrita em 4000 a. C. e a queda o império romano em 476 d. C; b) Idade Média: Data de 476 até a tomada de Constantinopla pelos turcos otomanos em 1453; c) Período Moderno: Inicia em 1453 e vai até 1789 com a revolução francesa e d) Período Contemporâneo: Começa em 1789 e segue até o presente momento histórico.

Figura 15:Linha do tempo – Conceito de Função



Fonte: Silva, Miranda, Cabral (2018)

Extraí personagens de cada um desses períodos históricos personagens ao longo da linha do tempo na Figura 2 que tiveram sua participação na construção do objeto matemático função e de alguma maneira superaram dificuldades de seus antepassados e trouxeram avanços para seus usos e estudos. Dos vinte e cinco personagens que ilustrei na figura 2, que colaboraram com o conhecimento que hoje se tem sobre o conceito de função, destaco oito personagens que deram contribuições que foram marcos para a construção do conceito de função: Pitágoras, Oresme, Galilei, Viète, Leibniz, Euler, Dirichlet e Bourbaki.

Existe um provérbio português que diz: "*muitas mãos tornam uma obra leve*". Verdade ou não, o fato é que o conceito de função teve uma construção milenar e altamente colaborativa. Ainda que a cooperação não tenha sido intencional, muitos personagens labutaram nessa construção, sendo, portanto, uma obra de muitas mãos.

As descrições completas das contribuições dos personagens estudados estão disponíveis nos anais do XIII Seminário Nacional de História da Matemática, em um artigo escrito por mim e mais dois professores pesquisadores, Silva, Miranda, Cabral (2018).

Na perspectiva desta pesquisa, os personagens foram destacados a medida que foram acrescentando um novo elemento à construção do campo conceitual de função. Para tanto ao longo da descrição dos fatos represento os elementos desse campo conceitual por (I) invariantes, (S) situações e (R) representações e assim também estarei fazendo refletir sobre a ação do professor no que tange os objetivos de aprendizagem da sequência didática, objeto de estudo deste trabalho.

A seguir (Quadro 15) apresento uma síntese destacando os personagens, suas contribuições, os obstáculos e os elementos segundo o campo conceitual.

Quadro 15: Evolução do Conceito de Função

PERSONAGEM ano de publicação	**ELEMENTOS AGREGADOS AO CAMPO CONCEITUAL**	**AVANÇOS**	**OBSTÁCULOS**
Pitágoras de Samos (Final Séc. VI a.C.)	**I:** Variável, proporcionalidade, interdependência. **S:** Relações entre comprimento da corda e som emitido por ela. **R:** Experimental e verbal	Relacionou variáveis de naturezas diferentes, o que antes era um obstáculo.	Limitações quanto aos registros. Antes disso, Babilônios representavam tabelas em argila.
Nicole Oresme (1350?)	**I**: Variável dependente **S**: Representar geometricamente quantidades físicas. **R**: Gráfica (sem quantitativo)	Noção de dependência e representação gráfica, não realizada por pitagóricos e babilônios.	Dificuldade em expressar a intensidade de grandezas qualitativas de modo numérico. Demonstração teórica, sem experimentação.
Galileu Galilei (1589?)	**I**: Causa e efeito **S**: Estudo do movimento de corpos em queda livre. **R**: Gráfica (com quantitativo) e algébrica (sem generalização)	Gráficos quantitativos resultantes de experimentação e modelagem algébrica entre variáveis físicas.	Suas representações algébricas limitavam-se em encontrar valores desconhecidos em uma equação não generalizada.
François Viète (1591)	**I**: Generalização **S**: Problemas geométricos **R**: Algébrica e geométrica.	Retomou os problemas geométricos gregos por demonstrações algébricas padronizadas de forma literal e generalizada.	Suas descobertas tinham objetivos dissociados a uma formalização de função.
Gottfried Leibniz (1674)	**I**:Continuidade, variável dependente, variável independente. **S**: Cálculo infinitesimal **R**: Curvas geométricas.	Reforça a ideia de continuidade e de variáveis dependentes e independes e foi o primeiro a usar a palavra “função”.	Não definiu explicitamente função.
Leonard Euler (1755)	**I**:Constantes e descontinuidades. **S**: Formalização do conceito de função. **R**: Notação e definição.	Desvinculou o conceito de função do caráter geométrico, formalizou o conceito e a notação de função.	Excesso de generalização, limitação a representação analítica.
Johann Dirichlet (1837)	**I**: Correspondência entre variáveis de conjuntos distintos. **S**: Busca de uma definição mais ampla. **R**: Definição segundo uma regra de dependência entre variáveis.	Estabeleceu uma definição mais geral função que relacionasse também variáveis não numéricas possibilitando aplicação em outras áreas do conhecimento.	Falta de uma definição de “conjunto” e de “número real”.
Nikolas Bourbaki (1968)	**I**: Conjuntos de pares ordenados. **S**: Movimento da Matemática moderna e da Educação Matemática. **R**: Diagrama de Venn.	Partiu de uma preocupação com o ensino de Matemática através do movimento da educação Matemática.	Reduziu o conceito de função a conjunto de pares ordenados representados em diagrama de Venn sem fazer associações com outras formas de representação.

Fonte: SILVA, MIRANDA, CABRAL (2018)

O Quadro 15 deixa claro que na trajetória do conceito de função foi se constituindo um rico campo conceitual aparentemente inacabado. Em vários momentos da história da construção desse conceito percebe-se:

a) O uso excessivo de um tipo de representação e/ou invariante: Pitagóricos que não faziam registros, limitando-se a experimentações e observações, Galilei que explicava fenômenos apenas algebricamente, Bourbaki restringiu função a conjuntos de pares ordenados.
b) O resgate de representações e/ou invariantes: Galilei voltou a fazer experimentações como os antigos Gregos, Viète resgatou os problemas geométricos dos antigos gregos numa perspectiva algébrica.

Nota-se a articulação de mais de uma forma de representação por Viète e Bourbaki, apenas. Tal constatação nos leva a concluir a dificuldade histórica em articular diferentes representações, impedindo que a ideia de função utilizada pelos personagens acumulasse todos os elementos que foram agregados ao campo conceitual de função. Também inferi que elementos essenciais a esse conceito, tais como variação, dependência e correspondência, foram deixados de lado no período contemporâneo.

Foi olhando para a história que as atuais diretrizes da educação brasileira apelaram para um ensino de função mais completo. A transcrição de uma situação-problema da língua materna para a linguagem Matemática (gráfico, tabela, equação, diagrama, par ordenado) e vice-versa é uma habilidade exigida nos PCN's, para desenvolvimento da capacidade de representação e comunicação (Brasil, 1998, p. 12) de funções.

Segundo Pelho (2003, p. 23) quanto maior for a possibilidade de articulação entre diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto.

Ademais a constituição desse recorte conceitual vem corroborar com a formação inicial e continuada de professores de Matemática, bem como estes terão subsídios para rever suas práticas sob a ótica dos obstáculos epistemológicos de nossos personagens.

Os resultados apontam que a história do conceito de função evidencia a necessidade da articulação das invariantes e representação do conceito de função para que a aprendizagem deste objeto matemático se dê de forma completa, consistente e aplicável a realidade.

3.2. EPISTEMOLOGIA DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Nesta seção trago reflexões sobre os diferentes usos, definições e representações do conceito de função norteadas pelos objetivos de aprendizagem explicitados na seção 2.2.2. Após compreender o valor histórico do conceito de função, bem como a importância para o desenvolvimento das ciências nas diversas áreas do conhecimento, tenho a dimensão da responsabilidade que é ensinar esse objeto matemático.

Para tanto, não poderia deixar de explorar as diferentes formas de comunicar e definir função com o rigor matemático devido e a nível superior ao que se pretende ensinar, uma vez que o professor precisa também comunicar e argumentar com propriedade, se eximir ao máximo da possibilidade de transmitir erros conceituais e ter um olhar sistêmico de todo o campo conceitual e em todos os níveis de ensino.

Além dos aspectos relacionados aos objetivos de minha pesquisa, trago nesta seção reflexões para o ensino, possíveis de serem abordadas na sequência didática que irei propor e para inspirar professores leitores desta pesquisa na construção de outras atividades para o ensino do conceito de função

Partindo da seguinte definição:

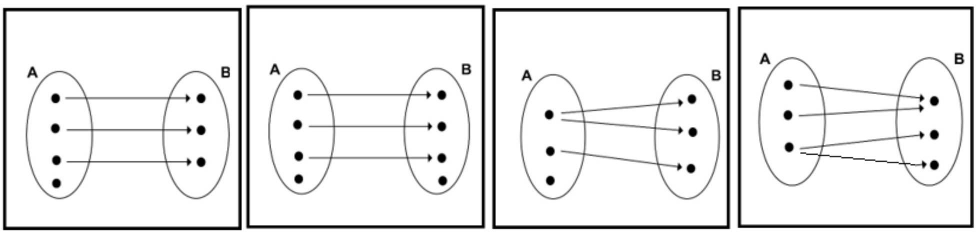
> Sejam A eB conjuntos não vazios. Diz-se que f é uma função de A (Domínio) em B (Contradomínio) quando para todo elemento $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$. Denota-se por
>
> $$f: A \rightarrow B.$$
> $$x \mapsto y = f(x)$$
>
> onde $f(x)$ representa a imagem do elemento x via função f.

O que precisamos ter clareza é de que seja qual for a nomenclatura utilizada para associar elementos de dois conjuntos não vazios (Regra, Aplicação, correspondência, transformação, relação, etc), a essência da definição de função está sujeita a apenas duas condições a saber, como esclarece LIMA et al (1997):

> a) Não deve haver exceções: afim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$, seja qual for $x \in X$ dado.
> b) Não pode haver ambiguidades: a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x)$ em Y. (LIMA et al 1997, p. 41)

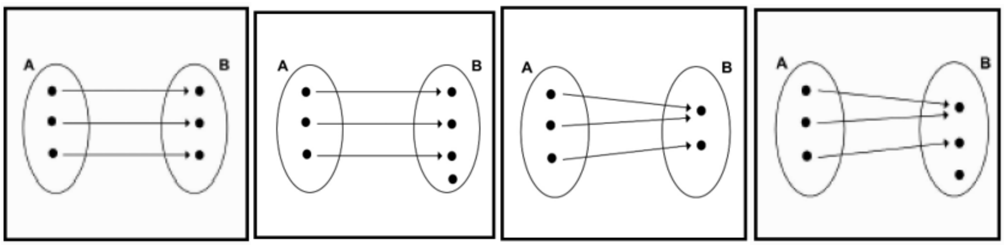
Note que as condições de não ambiguidade e não exceção, necessárias para definir função, são critérios apenas para o conjunto de partida da correspondência, isto é, para os elementos y do conjunto de chegada é naturalmente possível haver ambiguidades e exceções.

Os contraexemplos a seguir ilustram as situações que não são função.



Partida com exceção | Exceção na partida e na chegada | Partida com Ambiguidade e exceção | Ambiguidade na partida e na chegada

Os exemplos a seguir ilustram função:



Perceba pelos exemplos e contraexemplos acima que o comportamento funcional é definido pela partida da correspondência, ou seja, é o domínio que deve estar bem definido para que ele ocorra.

Vejamos como isso ocorre em situações do cotidiano:

a) Imagine que se queira verificar em um grupo de pessoas os casais de namorados formados. Para que essa correspondência seja uma função, considerando o conjunto de rapazes o domínio e o de moças o contradomínio, as perguntas seguintes devem ter resposta positiva: Todo rapaz possui namorada? (Não exceção) e essa namorada é única? (Não ambiguidade).
b) Agora considere uma pesquisa feita com uma turma estudantes, sobre os seus meses de nascimento, essa correspondência é função, pois todos obrigatoriamente nasceram em algum mês (Não exceção) e ninguém pode ter nascido em mais de um mês (não ambiguidade), ainda que sobrem meses sem correspondência no contradomínio, é função.
c) Uma residência que possui mais de um endereço, não é uma função que atribui um endereço a cada casa, pois ocorre uma ambiguidade.
d) A regra: $f: R \longrightarrow N$

$$x \mapsto y = 3x$$

Não é função, pois observe que haverá exceções no domínio, uma vez que infinitos números reais não terão seus triplos no conjunto dos números naturais.

3.2.1. Como nasce uma função?

Na epígrafe desta seção ao comparar função a um ser vivo, remete-me ao movimento e a variação inerente ao comportamento funcional, como visto nas seções anteriores. Então convido o leitor a refletir: Como nasce uma função?

Na analogia que faço entre função e ser vivo, digo que seria uma espécie de ser vivo que para existir precisaria ocorrer a correspondência entre os elementos de dois conjuntos e essa correspondência não pode ter exceções, nem ambiguidades no conjunto de onde parte a correspondência, ou seja, precisaria que todo espermatozoide fecundasse um único óvulo (a exemplo de seres humanos). Mas para que esse encontro aconteça dessa maneira, ainda é necessário entender por que meios ocorre. Assim, apresento os três elementos essenciais ou ingredientes do comportamento funcional como pontua Lima et al:

> Deve-se ainda observar que uma função conta de três ingredientes: domínio, contra-domínio e a lei de correspondência $x \to f(x)$. Mesmo quando dizemos simplesmente ‘a função f” ficam subentendidos seu domínio X e seu contra- domínio Y. Sem que eles sejam especificados, não existe a função. (LIMA et al, 1997, p. 39)

Logo, quando se quer estabelecer uma função, antes mesmo de pensar em exceções e ambiguidades é necessário verificar e perguntar: De onde parte a correspondência? Aonde chega a correspondência? Como acontece a correspondência.

Neste caso, deve-se ter em mente que nem toda situação, nem todo conjunto de pares ordenados, nem todo gráfico, nem todo quadro, nem toda equação, nem toda regra e nem toda correspondência é uma função se o domínio, o contradomínio e a lógica de associação não estiverem bem definidos. Detalharei um pouco mais sobre cada um desses ingredientes de que Lima et al (1997) fala.

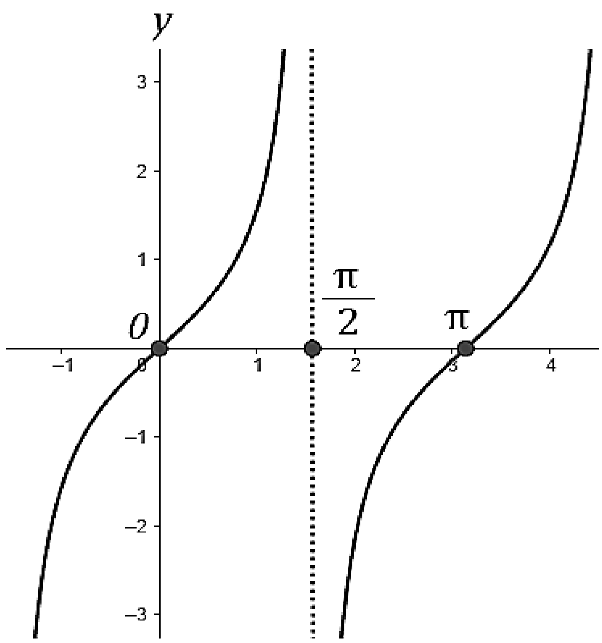
3.2.1.1. Domínio

De onde partem as correspondências?

Do conjunto de partida, conjunto este denominado de **domínio** da função.

Foi esclarecido anteriormente que os critérios de não ambiguidade e de não exceçãosãoapenas para o domínio da função. Porém, para garantir ao menos a não exceção, é necessário que o domínio esteja muito bem delimitado, para que elementos desse conjunto não fiquem sem correspondente. Vejamos o exemplo da função tangente:

$$y = tg(x)$$



O gráfico da função tangente ilustra que ela não existe em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, sendo k um número natural (0,1,2,3,...). Para que ela seja reconhecida como função, não havendo exceções, faz-se necessário condicionar seu domínio como $D(f) = \{x \in R: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$, isto é, esse é o maior subconjunto de R para que seja definida como função.

> Assim sendo, uma pergunta do tipo “Qual é o domínio da função $f(x) \equiv$? ", estritamente falando, não faz sentido. A pergunta correta seria: “Qual é o maior subconjunto $X \subset R$ tal que a fórmula $f(x) = \frac{1}{x}$ define uma função $f: X \rightarrow R$?” (LIMA et al, 1997, p. 39)

Assim sendo, numa correspondência funcional pode-se definir o “maior” conjunto que contenha todos os outros possíveis conjuntos que também são domínio da função, a esse conjunto atribui-se o nome de *domínio máximo* ou *domínio maximal* (Oliveira & Pinheiro, 2010, p.55*)*. Isto é, mesmo que se defina um intervalo aparentemente “pequeno” como x = [0 , 1] se $x \in N$ ou $x \in Z$, existirão dois elementos a se corresponder. Imagine se $x \in R$, logo haverá uma infinidade de números, inclusive decimais e irracionais a se corresponder. O exemplo a seguir nos leva a refletir sobre a situação exposta, assim como atentar para possíveis erros que podem ser cometidos em sala de aula.

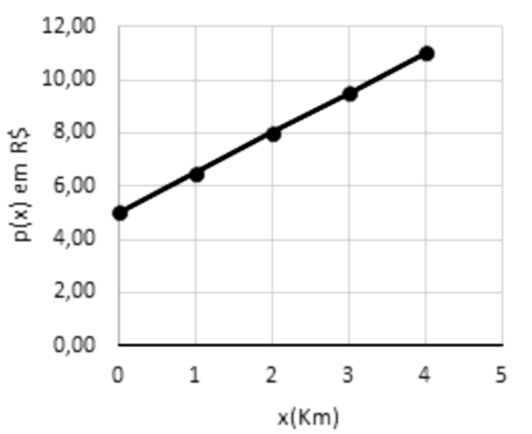
Considere a seguinte situação problema em que o professor queira explorar as possíveis representações de função, típica nas aulas de Matemática e alguns erros didático sobre o domínio, que eu mesma cometi diversas vezes sem saber, diga-se de passagem:

O taxímetro do táxi de João cobra R$ 5,00 de bandeirada (valor fixo inicial da corrida) mais R$ 1,50 por quilômetro rodado.Qual a função que descreve o comportamento tarifário p(x) desse equipamento em uma corrida de x quilômetros de extensão? Faça um quadro e um gráfico para representar essa situação.

Possivelmente o professor ao resolver esta questão, fará uma tabela, uma expressão e um gráfico como estes:

x	P(x)
0	5,00
1	6,50
2	8,00
3	9,50
4	11,00

$$\boldsymbol{p(x) = 1,50x + 5,00}$$



Tudo certo, não é? Aparentemente sim. Observe bem sob a ótica do que discutimos sobre o domínio da função, pois existem vários erros.

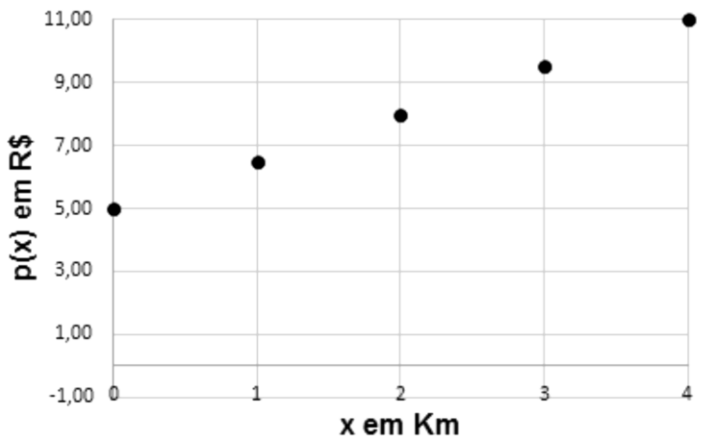
Primeiro erro está no comando, ainda que se subentenda que a corrida parta do quilômetro zero, quando o cliente entra no taxi, não sabemos onde para essa corrida. Na resolução, arbitrariamente calculou-se até 4 Km, mas onde está dito isto, que a corrida iria de 0 km a 4 km? Caso assim estivesse definido o domínio, a expressão poderia ser da seguinte forma:

$$f: [0\,,4] \longrightarrow R$$
$$x \longmapsto p(x) = 1{,}50x \,+\, 5{,}00$$

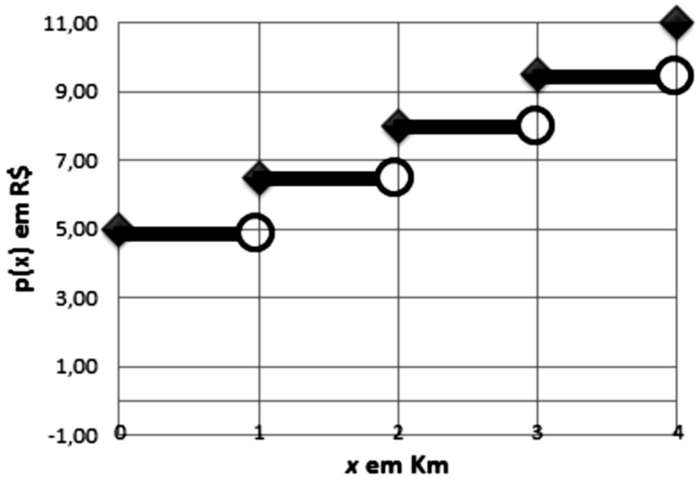
Agora sobre o gráfico, o leitor certamente diria que definitivamente nele não há o que questionar, mas há.

Observe que o taxímetro registra o valor a ser pago contabilizando por quilômetros inteiros, isto é, $\{0, 1, 2, 3, 4\} \in Z$, o gráfico contínuo sugere que $[0\,,\ 4] \in R$, e assim, por exemplo, o taxímetro também atribuiria valores correspondentes a 2,5 Km ou 3,99 Km. Imagine a dificuldade ao passar o troco!

Além do gráfico contínuo, outra versão de representação seria do gráfico de pontos discretos:



Essa representação também não contempla a essência do problema pois apesar da cobrança ocorrer considerando valores inteiros, o percurso é completo é percorrido. Neste sentido, o gráfico que melhor representaria a situação proposta caso o domínio seja $[0\,,4] \in Z$ seria o seguinte:



Então? Muito intrigante? Esse comportamento constante por intervalos ou função escada é o mais adequado para a situação do taxímetro. A primeira vez que discutimos isso na disciplina do curso de mestrado com o professor Miguel Chaquiam, não me conformava, depois me senti mal por ter ensinado equivocadamente tantos conceitos. Por outro lado, me senti grata por essa revelação. De fato, a formação continuada amplia nossa forma de entender e de exercer nossa prática docente.

Mais um adendo sobre o enunciado do problema proposto, o ideal seria que não se denotasse x ou y para as variáveis, isso causa um obstáculo didático nos estudantes de modo que se for utilizado símbolos diferentes de x para variável independente e y para variável dependente ou se usem outras letras que não estas, muitos estudantes não sabem identificar a qual variável devem atribuir valores para fazer uma tabela e o gráfico correspondente à função. (Oliveira, 1997, p. 34)

3.2.1.2. Contradomínio

Aonde chega a correspondência?

Chega ao conjunto denominado de **contradomínio** da função.

Segundo Oliveira & Pinheiro (2010), o contradomínio é necessário a definição de função, para que haja uma espécie de previsão das imagens. Assim se garante a não exceção dos correspondentes do domínio, caso não exista algum elemento com correspondente no contradomínio, e, a não ambiguidade de modo que não exista mais de uma imagem para um mesmo elemento do domínio. Deste modo é reforçada a existência de funções em que mais de um elemento do domínio possa ter mesma imagem ou que elementos do contradomínio não tenham correspondente, ou ainda que as imagens coincidam com o contradomínio, tais funções recebem nomes especiais a saber:

Para esclarecer esses casos especiais, considere a função $f: X \to Y$.

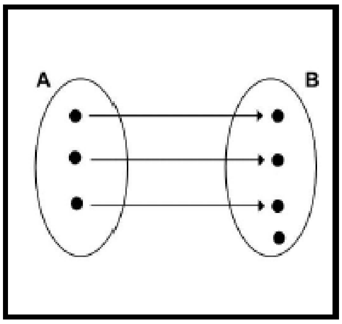
Diz-se que a função é **injetora**, ou injetiva ou, ainda, uma injeção, se, para todo, $y \in Y,$ existem no máximo um $x \in X,$ tal que $f(x) = y$;

Ou seja, f é injetiva quando: $x \neq x' em\, X \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

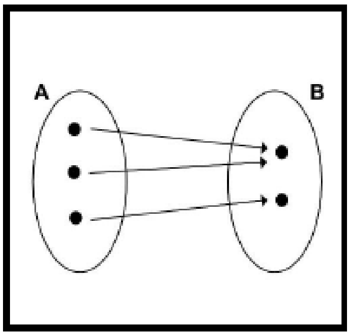
Está condição pode também ser expressa em sua forma contra positiva.

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

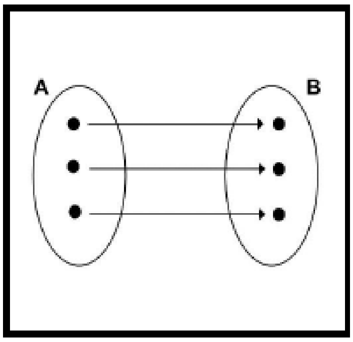
Não apresentando ambiguidades no domínio.



Por outro lado, diz-se que a função é **sobrejetora**, ou sobrejetivas, ou ainda uma sobrejeção se sua imagem for todo o conjunto Y, isto é, se, para todo $y \in Y$, existir pelo menos um $x \in X$, tal que $y = f(x)$; ou seja, devemos ser capazes de garantir, para cada $y \in Y$, que não haja exceções e, logo, $D(f) = Im(f)$.



Por fim, diz-se que a função é **bijetora**, ou bijetiva ou, ainda uma bijeção, se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora, isto é, não possui exceções, nem ambiguidades também no contradomínio, podendo assim ser chamada de uma correspondência biunívoca.



Vimos até aqui sobre o contradomínio, o seu padrão ou padrões de comportamento. Mas preciso chamar sua atenção para um componente do contradomínio, a Imagem. Denota-se a imagem de $x \in X$ pela função f por $y = f(x)$ e define-se da seguinte forma:

> Dada a função $f: X \to Y$ o conjunto imagem , ou simplesmente imagem da função f é o conjunto $Im\ (f)$, cujos elementos são as imagens $f(x) \in y$ dos elementos $x \in X$:
>
> $$Im\ (f) = \{\ f(x) \in Y; x \in X\}$$
>
> Em particular, temos sempre $Im(f)\ \subset\ Y,$ e a discussão acima mostra que pode ocorrer $Im(f) \neq Y$.(MUNIZ NETO, 2013, P. 5)

Dessa definição infere-se que a Imagem de uma função está contida ou é igual ao contradomínio. Para Lima et al (1997, p. 38) é importante ressaltar que $f(x)$ é a imagem do elemento $x \in X$ pela função f, ou o valor da função f no ponto $x \in X$ Logo, a imagem $f(x)$ são todos os valores de y alcançados pela regra de f associando-os a valores de x. Então, f e $f(x)$ são coisas distintas, sendo utilizadas erroneamente para denotar função. Para esclarecer possíveis dúvidas de notação apresento algumas formas de denotar distintamente função e imagem inspirado em Chaquiam & Cabral (2019) e Iezzi & Murakami (2002).

Quadro 16: Notações de função

f	Função f
$f: X \longrightarrow Y$	Função f definida de X em Y.
$F(x)$	Imagem do elemento x por meio da função f.
$F(x)\ =\ y$	Imagem de x associada ao elemento y do contradomínio.
$Im(f)$	Conjunto imagem da função f definido por $$Im(f) = \{\ y\ \in Y\ /\ \nexists\ x\ \in X; f(x) =\ y\}$$
$D(f)\ =\ X$	Domínio da função f

<table>
<tr><td>$CD(f) = Y$</td><td>Contradomínio da função f.</td></tr>
<tr><td>$f: A \to B$
$x \mapsto f(x)$</td><td rowspan="3">Função f, com domínio $D(f)$ definido em A, contradomínio $CD(f)$ definido em B e conjunto imagem $Im(x) \subset CD(f)$. As imagens de $x \in A$ em B são $f(x) = y$, com $y \in B$ e $f(x) \in Im(f)$.</td></tr>
<tr><td>$Af \to B$
$x \mapsto f(x)$</td></tr>
<tr><td>$f: A \to B \ tal \ que$
$y = f(x)$</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Chaquiam & Cabral (2019) e Iezzi & Murakami (2002)

Mais importante que saber utilizar a notação adequadamente, é entender o significado dela, é se apropriar dessa linguagem para que seja uma ferramenta útil para desenvolver argumentações e resoluções a que se pretender.

3.2.1.3. Caracterização de Função

É possível caracterizar uma função de diversas formas?

A resposta é sim, para tanto é necessário retoma-la a partir da reconstrução histórica do conceito de função, onde a definição de função sofreu várias mudanças ao longo do tempo e não necessariamente uma substituiu a outra, também não é possível dizer que não possam surgir outras maneiras de defini-la. O mais intrigante para mim nessa investigação é chegar à conclusão de que meu objeto matemático de estudo é eclético, no sentido poder ser (re) definido conforme a situação em se queira contextualizá-lo para comunicar algo que varia, se transforma ou se movimenta.

Sobre o terceiro ingrediente do comportamento funcional, vou apresentar as diferentes formas de definir função, conforme a invariante adotada e a situação a que se pretende dar significado, ressalvadas as condições de não exceção e não ambiguidade. Esse ingrediente, falando de forma mais ampla, se refere a lógica de correspondência adotada.

- **Regra**

A definição como regra, lei ou conjunto de instruções para definir função é bastante utilizada e em geral significa dizer que se relacionam os elementos de dois conjuntos dados, a partir de uma lógica que pode ser uma expressão ou condições expressamente ditas. Formalmente essa definição é dada da seguinte maneira:

> Dados os conjuntos X, Y, uma função $f: X \to Y$ (Lê- se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama- se o domínio e Y é o contra- domínio da função f. Para cada $x \in X$ o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f no ponto $x \in X$. Escreva-se $x \to f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$. (LIMA et al, 1997, p.38)

Neste caso, se temos, por exemplo, um conjunto A={1,2,3,4} e um conjunto B={2,4,6,8,10} e queremos associar os elementos de $x \in A$ com os elementos $y \in B$, de modo que os elementos de B sejam o dobro do valor dos elementos de A, ou algebricamente que queremos $y = 2x$, então a função f definida como regra nessa situação é: $f: A \to B$

$$x \mapsto y = f(x) = 2x$$

em que $f(x)$ é imagem dessa função, isto é um subconjunto de Y que contém apenas os elementos de Y alcançados pela regra de f, neste caso $Im(f) = \{2,4,6,8\}$.

Embora muito utilizada, essa definição pode deixar de fora outras situações funcionais que não necessariamente possam ter uma regra explicita em língua materna ou algebricamente, como por exemplo um quadro com dados que corresponde cargos a salários de uma determinada empresa. São conjuntos de naturezas distintas, isto é, qualitativa e quantitativa, que se relacionam por uma lógica subjetiva para os quais não é possível estabelecer uma regra em linguagem Matemática, embora estabeleçam função, pois para cada cargo há um único valor de salário.

Esta definição como regra também remete a noção dependência de variáveis,

Isto é, as imagens (variáveis dependentes) dependem dos valores do domínio (variáveis independentes) obtidos segundo a regra.

- **Aplicação**

O termo “aplicação” é muito utilizado em livros álgebra para definir função, e em sua essência significa dizer que vai acontecer uma operação ou um conjunto de operações aritméticas entre os elementos de conjuntos numéricos distintos ou iguais ou entre espaços vetoriais. Quando o termo aplicação é utilizado para definir função é apresentado da seguinte forma:

> Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagem em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existem um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. f é aplicação de A em $B \Leftrightarrow (\forall\, x \in A, \exists\, y \in B/(x, y) \in f)$.(IEZZI e MURAKAMI, 2002, p. 81)

Essa definição de função como Aplicação carrega em si um valor fortemente algébrico, e que pode causar certo erro conceitual quando por exemplo não se distingue o isomorfismo que há entre objetos com representações e definições diferentes, mas que na prática podem ter significados semelhantes observe:

Quadro 17: Conceitos algebricamente isomórficos

Equação	Polinômio	Função
$y = 2x + 3$	$P(x) = 2x + 3$	$f: A \to B$ $x \mapsto f(x) = 2x + 3$
Incógnitas	Coeficientes e parte literal	Variáveis

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Observe que aqui nas três situações do quadro ocorrerem operações aritméticas ou *aplicações* que poderiam ser interpretadas em algum contexto do cotidiano. Embora pareçam ser a mesma coisa, suas definições são diferentes. Na primeira temos uma equação, que Segundo Dante (2012, p. 51) consiste em uma igualdade entre dois membros por operações com números conhecidos ou desconhecidos (*incógnitas*) arbitrários, cujo valor que satisfaz a igualdade é chamado de raiz. A segunda é um polinômio, definido por Dante (2012, p. 125) como a soma algébrica de monômios não semelhantes em que os números conhecidos são chamados de *coeficientes* e os desconhecidos de *parte literal*. A terceira é nosso objeto, função, que relaciona elementos de conjuntos definidos como Domínio e Contradomínio, que se associam de modo que para todo elemento do Domínio exista um único elemento do contradomínio, e esses elementos são chamados de *variáveis*.

> Para Newton, [...], uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) (EVES, 2004, p. 439)

É esse o caráter dos elementos dos conjuntos envolvidos numa função, a variação que um faz fluir no outro. Por isso, recomendo que professores de Matemática ao ensinarem função façam a devida distinção desses três conceitos isomórficos: equação, polinômio e função. O caráter estático de meramente encontrar um valor numérico não contempla o significado da variação funcional.

- **Transformação**

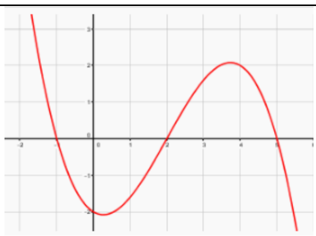
Esta invariante de função como transformação é normalmente definida da seguinte forma:

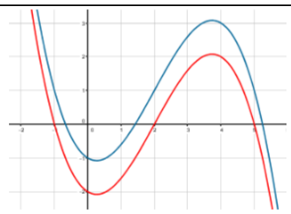
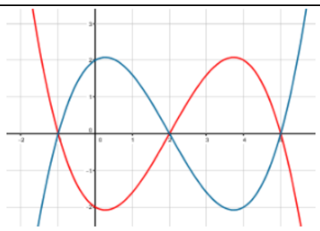
> Defini-se uma função de M em N chamando tal função de f, utiliza-se a notação $f(x) = y$ para indicar que o elemento x, do domínio de f (o conjunto M), foi transformado no elemento y, contradomínio de f (o conjunto N). Uma outra maneira de indicar esta transformação é utilizando a simbologia: $x \mapsto y = f(x)$. Diz-se que y é a imagem (ou seja, o resultado da transformação) de x pela função f. (OLIVEIRA & PINHEIRO, Marcio Rodrigues da Rocha, 2010, p. 53)

A função como transformação pode ter o mesmo significado algébrico da aplicação anteriormente apresentada relacionando conjuntos numéricos ou espaços vetoriais por operações aritméticas.

Além do significado algébrico, quando tratamos função como transformação também podemos denotar caráter geométrico de isometria, tais como reflexão, translação que também é pertinente ao comportamento funcional, pois "uma transformação geométrica é uma função". (LIMA, 2007, p. 141)

Quadro 18: Exemplos de função como transformação geométrica.

Função	Imagem	Tipo de transformação
$Y = f(x)$		Função original

$Y = f(x) + a$		Translação de $f(x)$ em relação ao eixo y com incremento a.
$Y = f(x - a)$		Translação de $f(x)$ em relação ao eixo x com incremento a
$Y = -f(x)$		Reflexão em relação ao eixo x
$Y = f(-x)$		Reflexão em relação ao eixo y

Fonte: Adaptado de https://www.matematica.pt/util/resumos/transformar-funcoes.php

Embora essas duas formas de tratar função como transformação sejam importantes e talvez pouco discutidas no âmbito da educação básica, a função como transformação de que se trata no Ensino Médio é a transformação como máquina de transformação ou como “substituição”.

Como máquina de transformação se tem três coisas envolvidas: o que a máquina aceita como entrada, o que a máquina produz na saída e qual a transformação efetivamente produzida pela máquina. Como uma máquina de bater açaí em que a entrada são os caroços (domínio) de açaí a saída é o vinho (imagens) e a transformação é a moedura realizada dentro da máquina (Oliveira & Pinheiro, 2010, p. 55). Numericamente a transformação seria dada por uma expressão ou equação em que ao se substituir valores de entrada é possível calcular os valores de saída, como uma calculadora.

Como substituição seria, por exemplo, quando todos os estudantes de uma universidade possuem um número de matrícula pelo qual são identificados, isto é, pessoas são transformadas em números, ou mais ainda o nome da pessoa é substituído por um número. Além disso, todos precisam ter esse número (não exceção) para ser reconhecido pela instituição como estudantes regularmente matriculados, e esse número precisa ser único para cada estudante (não ambiguidade).

Embora haja essas possibilidades de interpretação para função como transformação, não alcança as situações em que há exceções no contradomínio, isto é, não generaliza para as situações não sobrejetivas. Porém, por substituição, é uma forma muito útil de relacionar variáveis quantitativas e qualitativas.

- **Relação do produto cartesiano**

Esta definição é a que considero mais restritiva, uma vez que define função como sendo um conjunto de pares ordenados ou um subconjunto do produto cartesiano entre os elementos de dois determinados conjuntos como denota-se a seguir:

> Definição: Dados dois conjuntos não vazios X e Y, uma relação de X em Y (ou entre X e Y, nessa ordem), é um subconjunto R do produto cartesiano X e Y, i.e., R é um conjunto de pares ordenados do tipo (x, y), com $x \in X$ e $y \in Y$. Se R é uma relação de x em X, diremos simplesmente que R é uma relação em X.
> Definição: Dados conjuntos não vazios, X e Y, uma relação f de X em Y é uma função se a seguinte condição for satisfeita:$\forall\, x \in X$,$\exists$ um único $y \in Y$; $x\, f\, y$. (MUNIZ NETO, 2012, p.5)

Essa definição é duramente criticada em pesquisas recentes pelo fato de afastar aspectos de variação, dependência e correspondência inerentes ao conceito de função (Silva, 1997) e por não ser aplicável a todos os tipos de funções como explica Lima (2007).

> Um exemplo flagrante da falta de objetividade (que persiste até hoje em quase todos os livros didáticos brasileiros) é a definição de função como um conjunto de pares ordenados. Função é um dos conceitos fundamentais da Matemática (o outro é conjunto). Os usuários da Matemática e os próprios matemáticos costumam pensar numa função de modo dinâmico, em contraste com essa concepção estática. Uma transformação geométrica é uma função. Mas não é provável que exista alguém que imagine uma rotação, por exemplo, como um conjunto de pares ordenados. Os próprios autores e professores que apresentam essa definição não a adotam depois, quando tratam de funções específicas como as logarítmicas, trigonométricas, etc. Quem pensa num polinômio como num subconjunto de R2? (LIMA, 2007, p. 141).

Essa citação do renomado professor Elon Lages Lima, me remete a responsabilidade de trazer neste trabalho o caráter dinâmico do conceito de função, a variação, o movimento, o que está em mutação e assim entender como e por quê isso ocorre não só quando se relaciona números, pois este conceito permeia as ações e evoluções da sociedade e nos ensinou a compreender a natureza também.

Quando trago essas reflexões sobre as limitações de algumas definições, não é minha intenção inferir qual seja a melhor, mas é necessário ter clareza para que situações pretende-se contextualizar a definição de função. Por exemplo, se houver a pretensão de realizar uma interdisciplinaridade com geografia, fazendo estudo da localização de um ponto no mapa segundo coordenadas cartesianas a definição como relação do produto cartesiano é suficiente.

3.2.2 Representações: a linguagem das funções

Quando realizei a revisão de estudos, pesquisa com estudantes e professores e a reconstrução histórica foi constante a evidência da necessidade de se explorar ao máximo o campo conceitual de função bem como suas representações.

> O campo conceitual das funções envolve muitos outros conceitos, como o de uma *relação entre conjuntos*, *variação*, *dependência e correspondênciaentre variáveis*, *variável dependente e independente*, entre outros. Para representar uma função, podemos utilizar uma tabela, um gráfico, um diagrama de flechas ou uma expressão algébrica. (OLIVEIRA, 1997, p. 8)

É nesse aspecto que agora vou discorrer nossa reflexão Matemática, a respeito das linguagens Matemáticas ou representações de função, o que foi apresentado antes numa perspectiva histórica e na forma de comunicar pela definição. Nesta seção, para tratar das diferentes formas de comunicar função, vou me basear nos trabalhos de Chaquiam & Cabral (2019) e Santos & Barbosa (2017):

- **Função por meio de tabela ou quadro**

A tabela ou quadro é uma forma muito utilizada na comunicação do conceito de função, por intermédio dela os dados de uma relação funcional são organizados em linhas ou colunas, de forma que os dados de entrada (domínio) e os seus correspondentes dados de saída (imagens) estejam na mesma coluna ou linha, sendo possível verificar as condições de exceção e ambiguidade. (Santos & Barbosa, 2017)

- **Função por meio de diagrama ou esquema de flechas**

Na comunicação do conceito de função como diagrama são visíveis as condições da definição de função e permite classificar de forma mais direta como injetora, sobrejetora ou bijetora. Para reconhecer se num diagrama a função está bem definida é necessário verificar:

> Condições para satisfazer uma relação f de A em B para ser aplicações (ou função)
> 1° É necessário que todo elemento $x \in A$ participe pelo menos um par $(x, y) \in f$, isto é, todo elemento de A deve servir como <u>ponto de partida.</u>
> 2° É necessário que cada elemento $x \in A$ participe de apenas um único par $(x, y) \in f$, isto é, cada elemento de A deve servir como <u>ponto de partida de uma única flecha.</u> (IEZZI e MURAKAMI, 2002, p. 81)

Nessa linguagem, também é simples identificar que uma correspondência não é função: Se existir elemento do conjunto de partidado qual não parta flecha alguma ou se existir elemento do conjunto de partida do qual partam duas ou mais flechas.

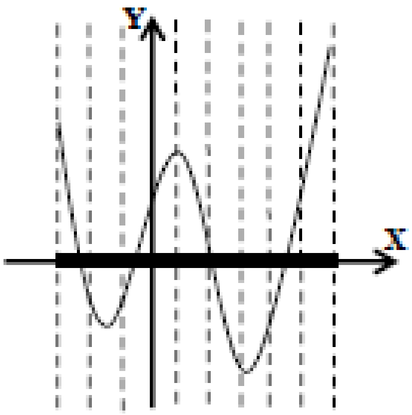
- **Função por meio de Par ordenado**

Segundo Rodrigues & Freitas (2013, p.3), indicamos por $(x,\ y)$ o par ordenado formado pelos elementos x e y, onde x é o 1º elemento e y é o 2º elemento, e, a imagem de um par ordenado pode ser representado através de um ponto no plano, no qual esse par ordenado passa a se chamar coordenada cartesiana.

Quando um par ordenado representa uma função, não ocorre exceções, e é possível verificar se no 1º elemento do par (domínio) apresenta ambiguidade em relação a outros pares de um mesmo conjunto de pares ordenados, para que assim as condições de função sejam satisfeitas.

- **Função por meio de Gráfico**

De acordo com IEZZI e MURAKAMI (2002, p. 82), “podemos verificar pela representação cartesiana as relação f de A em B se f é ou não função. Basta verificarmos se a seta paralela ao eixo y conduzida pelo ponto$(x,\ 0)$ em que $x \in A$, encontra sempre o gráfico de f em um só ponto". Assim nem todo gráfico representa uma função. Vejamos:



Deste modo, a comunicação do conceito de uma função f como um *gráfico* consiste em apresentar no plano cartesiano o subconjunto de pontos (x, y), em que $x$pertence ao domínio da função fe yé a imagem de $x$por f, ou seja, $y = f(x)$, sendo geralmente visualizado como uma linha ou ponto no plano.

- **Função por meio de expressão algébrica ou Equação.**

Refleti no tópico 3. 2. 1 quando falei da definição de função como aplicação e seu caráter algébrico e quando falamos sobre os ingredientes do comportamento funcional. Reforço apenas que uma representação algébrica por si só não define um comportamento funcional se não estiver acompanhada da delimitação de seu domínio e contradomínio, como ilustrado no Quadro 16. Essa forma de representação é muito importante para generalizar um padrão de comportamento que foi observado e descrever uma regra de correspondência, que só será funcional se os critérios de não exceção e não ambiguidade no domínio forem verificáveis.

- **Função por meio da língua materna**

Essa é a forma corrente de comunicar do professor e do educando e por onde me comunico com o leitor. Ora, assim como eu preciso me fazer entender neste texto é necessário que os enunciados de problemas e exercícios, bem como a oralidade do professor estejam adequadas e inteligíveis para que também se possa expressar um comportamento funcional, sendo possível extrair desse texto ou dessa fala quem são as variáveis dependentes e independentes, a delimitação e domínio e contradomínio e fazer uma generalização do comportamento da situação, possível de aplicar a conversão da língua materna para qualquer que seja a linguagem Matemática que se pretenda utilizar.

Esta linguagem tem um importante papel não somente de contextualizar a Matemática com a realidade, mas de dar ao estudante o exercício da linguagem Matemática em seu cotidiano. Para Chaquiam & Cabral, dar significado matemático às coisas e aprender a falar e ler em linguagem Matemática é tão imprescindível como falar e escrever na língua materna.

Para exemplificar como é possível, a partir de um enunciado, realizar as mais diversas formas de representar uma mesma situação, vou reformular o problema proposto na seção 3.2.1.

- ✓ Por meio de Língua materna

O taxímetro do táxi de João indica cobrança R$ 5,00 de bandeirada (valor fixo inicial da corrida) mais R$ 1,50 por quilômetro inteiro rodado. Qual a função que descreve o comportamento considerando que ele tenha no tanque gasolina suficiente para percorrer no máximo 5 km? (ou considerando que o passageiro queira ser transportado a 5 km do local de embarque?).

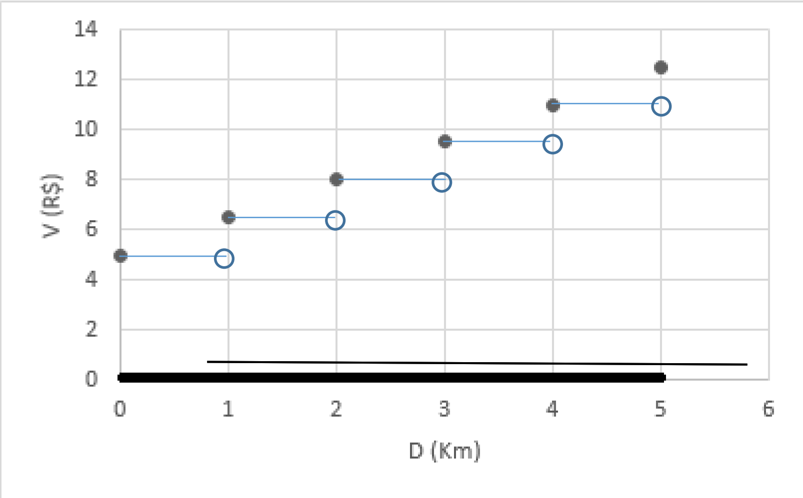
- ✓ Por meio de um quadro

Distância percorrida (Km)	Valor a pagar (R$)
0	5,00
1	6,50
2	8,00
3	9,50
4	11,00
5	12,50

- ✓ Por meio de pares ordenados

{(0,5), (1,6.50), (2,8.00), (3, 9.50), (4, 11.00), (5, 12.50)}

✓ Por meio de gráfico



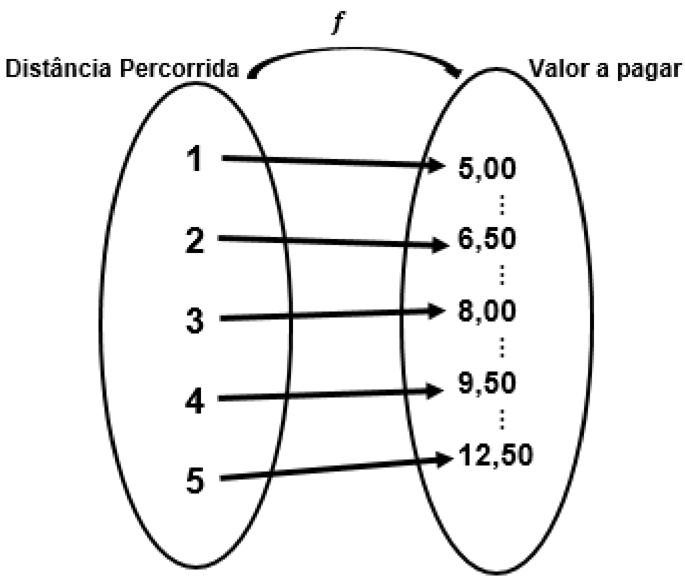
✓ Por meio de Equação

$$f: [0,5] \subset Z \to R$$

$$d \mapsto f(d) = V = 1{,}50d + 5{,}00,$$

onde d é a distância percorrida em Km e V o valor a pagar em R$.

✓ Por meio de Diagrama



3.2.3. Outras reflexões sobre o conceito matemático de função no ensino

Quando estudamos um comportamento funcional estamos fazendo, como o que está dito na epígrafe deste capítulo, nos “familiarizando com seus costumes”. E onde está a serventia disso? Não está apenas no que se pode controlar, prever ou generalizar, engana-se quem acha que a exatidão é pretensão da Matemática. Quando esse costume se altera, quando a estimativa não ocorre, quando a regra é quebrada é que se percebe que as coisas não estão “funcionando” como deveriam. Apresento a seguir alguns exemplos de como isso ocorre:

- ✓ Fenômenos climáticos: Comportamentos cíclicos da natureza como marés, chuvas, estiagem, estações do ano que não acontecem como ou quando eram previstos, nesse momento ocorrem intensas ações de proteção ao meio ambiente.
- ✓ Fenômenos biológicos: Desenvolvimento do feto no útero da mãe. Existem variáveis para o desenvolvimento saudável, que quando não ocorrem indicam má formação, doenças, etc. Ter o controle dessas variáveis pode salvar uma vida!
- ✓ Fenômenos Sociais: Quando quebra a economia de uma empresa ou de um país nota-se que pessoas tomaram decisões erradas (corrupção, maus investimentos, má gestão, etc), então substitui-se os gestores, os cidadãos se manifestam contra o governo, altera-se as estratégias de investimentos.

É necessário também trazer esse olhar para a sala de aula de quando comportamento funcional não ocorre, perceber quando as coisas não funcionam e assim poder agir, intervir e reverter. Quando se fala que o estudante precisa ter condições de exercer sua cidadania e agir de forma autônoma e participativa na sociedade, é nesse aspecto que a Matemática, em especial, o conceito de função, pode ajudá-lo a pensar, argumentar e ser um cidadão ativo, que não se permite enganar e explorar nas relações de consumo e trabalho e nem se alienar por discursos infundados e sem lógica.

Sobre os usos das diferentes linguagens Matemáticas para ensino e aprendizagem de função, devem ser apresentadas aos estudantes gradativamente ao longo da vida escolar, no entanto umas são de mais simples apreensão, como o de diagrama por onde normalmente se introduz o assunto, porém é necessário que gradativamente ao nível de complexidade seja proporcionado as demais representações.

> A existência de diferentes representações semióticas para um mesmo objeto matemático possibilita a escolha da melhor e mais adequada ao que se pretende trabalhar. Certas vezes, um objeto se apresenta em uma forma de representação que possui um custo cognitivo muito alto para realização de raciocínios e procedimentos de cálculo necessários, logo, a possibilidade de usar outra representação que proporcione tratamentos menos trabalhosos é de extrema importância (DIONÍZIO e BRANDT, 2011, p. 3)

Ainda no aspecto das linguagens e representações, Chaquiam & Cabral (2019) afirmam que cada uma apresenta sua dificuldade específica e recomendam observar se as imbricações e não entendimento de uma delas venha prejudicar a compreensão das demais, causando uma impregnação de equívocos por parte de professores e alunos na fase de consolidação do conhecimento.

Neste sentido, reconheço esta seção como de grande importância para esta pesquisa por incentivar o uso correto das definições e representações com o devido rigor, pois a fidelidade a esse rigor e formalismo nos aproxima da consolidação do conhecimento e do saber matemático.

4. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo apresento o objeto de estudo desta pesquisa, a sequência didática para o ensino do conceito de função no Ensino Médio, a qual intitulei “Conceito de função e suas linguagens”. Para sua elaboração considerei os diagnósticos e fundamentações descritos nas seções anteriores.

A sequência didática que apresento a seguir traz como objetivos de aprendizagem os dez levantados na seção 2.2, está estruturada por unidade articulada de reconstrução conceitual, apresentada na seção 1.2. de aportes teóricos e metodológicos.

Considerando o universo plural da escola, considero a proposta que apresento a seguir não possui rigidez na maneira de aplicá-la, sendo, portanto, passível de adequações, pois:

> A escola não é um *fast-food* em que todo prato deve estar pré-cozido e ser produzido com rapidez gerando aprendizagens. A escola é uma cozinha gourmet em que os pratos devem ser elaborados a partir dos ingredientes disponíveis e dos desejos dos clientes em seus múltiplos paladares. E as receitas (metodologias didáticas) não devem ser simplesmente reproduzidas, mas (re)criadas, (re)pensadas, compartilhadas, estudadas em profundidade para atender ao contexto em que serão apresentadas como uma obra de arte (BATISTA, FELTRIN, BECKER, 2019, p.76)

Por esse motivo, a SD que apresento é um produto de profundo e sistemático estudo sobre o objeto e o ensino e aprendizagem do objeto e sobre as necessidades dos sujeitos para quem ela se destina. Cabe a esta seção instruir o professor na sua aplicação em sala de aula.

Todas as atividades serão realizadas em grupos de cinco a seis estudantes que receberão individualmente a folha de atividade, mas precisarão realizá-las de maneira coletiva e colaborativa. O professor deverá promover antes de cada formalização a socialização das conclusões dos grupos e promover uma discussão a fim de chegar a um consenso que permita introduzir a formalização dos conceitos pretendidos, essa discussão pode ser imediata ou precisar de intervenções orais do professor haja vista que queremos chegar ao domínio de uma formalização conceitual Matemática e

> Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de

> regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p.41-42)

Ao final são propostas intervenções avaliativas que nada mais são do que uma verificação de aprendizagem imediata com intenção a apreensão do aluno do conhecimento adquirido.

4. 1. TESTE E OFICINA DE CONHECIMENTOS BÁSICOS

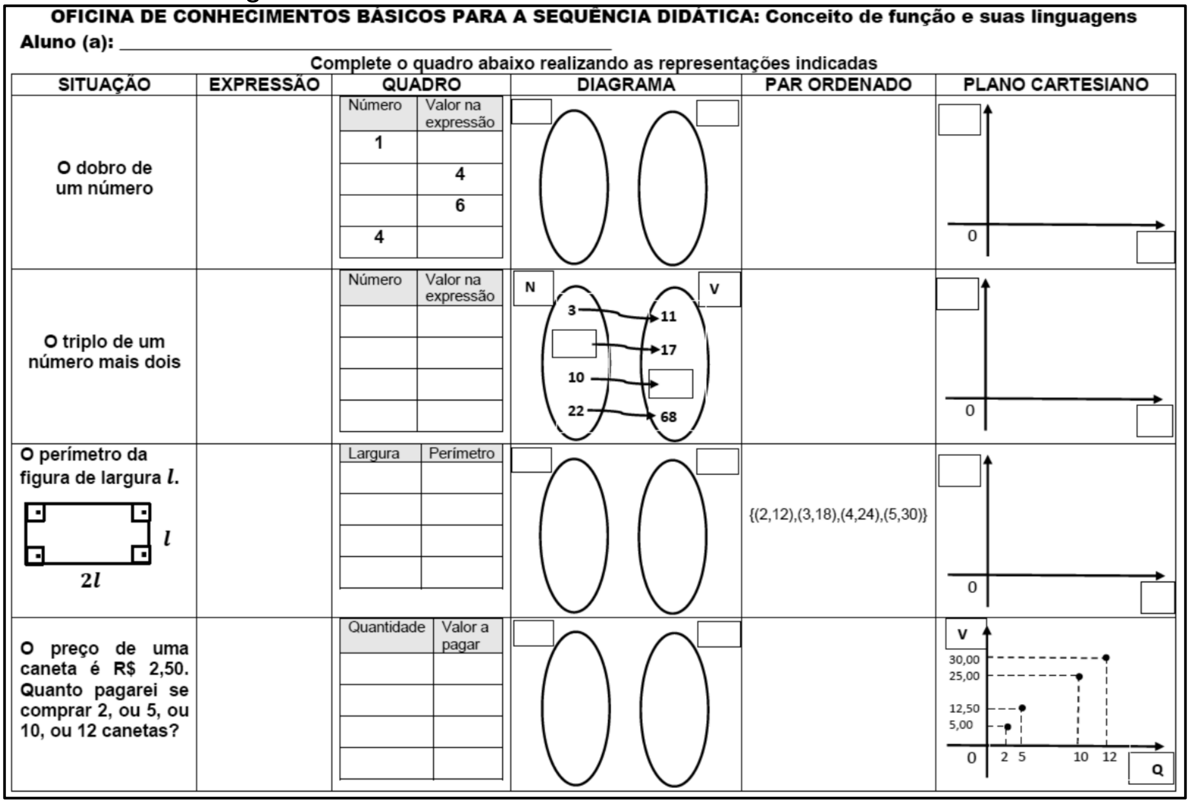
Antes da aplicação da sequência didática deve ser proposto um teste de conhecimentos básicos para verificar como está a base cognitiva dos sujeitos para quem será aplicada a sequência didática “Conceito de função e suas linguagens”.

Tal teste é mais indicado para o caso de a SD ser aplicada com sujeitos que não são alunos do professor aplicador, haja vista que para um professor que vá aplicá-la com sua turma, e que já conhece a habilidades deles, talvez não seja necessário, sendo o teste e oficina apenas uma atividade acessória e opcional.

Assim, antes de aplicar a sequência didática o professor deverá garantir que os estudantes possuem os seguintes conhecimentos: interprestar uma situação que envolva soma e multiplicação, representar e converter essa situação para a linguagem algébrica, quadro, diagrama, par ordenado e ponto no plano cartesiano, bem como fazer as manipulações aritméticas para obter valor arbitrário a partir de outro e segundo uma regra observada. Tais conhecimentos são habilidades previstas de serem adquiridas no ensino fundamental, e são base cognitiva para a aprendizagem do estudo de funções no primeiro ano do ensino médio, série a que se destina a sequência didática.

A figura 16 ilustra o teste e oficina de conhecimentos a ser aplicada antes da sequência didática de modo a garantir, também um nivelamento com a turma de controle que adotei nesta pesquisa como parâmetro comparativo.

Figura 16: Teste e oficina de conhecimentos básicos



OFICINA DE CONHECIMENTOS BÁSICOS PARA A SEQUÊNCIA DIDÁTICA: Conceito de função e suas linguagens

Aluno (a): ____________________

Complete o quadro abaixo realizando as representações indicadas

SITUAÇÃO	EXPRESSÃO	QUADRO	DIAGRAMA	PAR ORDENADO	PLANO CARTESIANO
O dobro de um número		Número | Valor na expressão 1 | | 4 | 6 4 |			0
O triplo de um número mais dois		Número | Valor na expressão	N, V 3 → 11 → 17 10 → 22 → 68		0
O perímetro da figura de largura l. l $2l$		Largura | Perímetro		{(2,12),(3,18),(4,24),(5,30)}	0
O preço de uma caneta é R$ 2,50. Quanto pagarei se comprar 2, ou 5, ou 10, ou 12 canetas?		Quantidade | Valor a pagar			V 30,00 25,00 12,50 5,00 0 2 5 10 12 Q

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

O procedimento que recomendo é de que essa atividade seja aplicada como teste inicialmente de forma individual e sem ajuda do professor, recolha-se ao final e entregue-se novamente a mesma atividade cuja a resolução colaborativa se torne a própria oficina de conhecimentos básicos. No apêndice deste texto está esse teste e oficina em tamanho A4 para reprodução.

4. 2. ATIVIDADE 1: O que é função?

Esta atividade terá como objetivo definir função, domínio, contradomínio e imagem. Trata-se de um esquema de realização de doze correspondências, dadas as regras, os conjuntos de partida e os conjuntos de chegada. Após a realização das correspondências os alunos farão a sobreposição de doze cartas uma a uma conforme a semelhança da configuração das correspondências realizadas por eles. O material didático utilizado está caracterizado como material manipulável estático, assim definido:

> Material concreto que não permite a transformação por continuidade, ou seja, alteração da sua estrutura física a partir da sua manipulação, durante a atividade experimental, o sujeito apenas manuseia e observa o objeto na tentativa de abstrair dele alguma propriedade. (RODRIGUES & GAZINE, 2012, p. 190)

Durante a execução da intervenção inicial, o professor deverá acompanhar se os estudantes conseguem realizar as correspondências e fazê-los explicar o raciocínio adotado.

Após a primeira intervenção exploratória, o professor deve verificar se os estudantes conseguiram fazer corretamente as sobreposições das cartas às correspondências por eles realizadas e a lógica que utilizaram para fazer o pareamento entre as cartas e as situações de correspondência.

Figura 17: Intervenções da atividade 1

Intervenção inicial: Estabeleça uma possível correspondência ou regra de associação (conforme o caso) entre os elementos do conjunto A (partida) e os elementos do conjunto B (chegada) em cada situação proposta ao lado.
Intervenção Exploratória: Utilize as cartas que recebeu para sobrepor uma a uma às respectivas situações de correspondência.
Intervenção Exploratória: Retire as cartas das situações nas quais existem elementos do conjunto de partida sem correspondência.
Intervenção Exploratória: Retire das situações que sobraram as cartas nas quais no conjunto de partida existe elemento com mais de uma correspondência.
Intervenção Exploratória: Analise as situações que sobraram após as retiradas das cartas e registre no quadro, **SIM** ou **NÃO**, conforme as condições a seguir para o conjunto de PARTIDA.
Condição 1- **Todo** elemento do conjunto de PARTIDA se corresponde;
Condição 2- Cada elemento do conjunto de PARTIDA se corresponde uma **única** vez.

QUADRO 1

	Condição 1	**Condição 2**
Situação_____		
Situação_____		
Situação_____		
Situação_____		

Intervenção Reflexiva: O que podemos afirmar sobre o conjunto de PARTIDA em relação às correspondências estabelecidas nas situações analisadas no quadro?
Intervenção Reflexiva: O que podemos afirmar sobre o conjunto de CHEGADA em relação às correspondências estabelecidas nas situações que restaram?
Intervenção Exploratória: Nas situações analisadas no quadro 1, observe o conjunto de CHEGADA e determine um novo conjunto formado pelos elementos que possuem correspondência.
Intervenção Exploratória: Determine uma maneira para expressar o padrão de comportamento de todas as situações analisadas no quadro 1.

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

As intervenções reflexivas e exploratórias desempenharão o papel da construção dos conceitos pretendidos promovendo a observação de padrões e conclusão de uma generalização do conceito que caracterize o comportamento funcional.

Após a terceira intervenção exploratória o professor deve verificar se em todos os grupos sobraram apenas as cartas das situações 1, 2, 4 e 5, isto é, as situações que apresentam comportamento funcional segundo a definição de função.

Após a socialização das conclusões dos grupos e mediação do professor para que se chegue a um consenso, ele deve apresentar a formalização do conceito de função.

Figura 18: Formalização do professor para a definição de função.

FORMALIZAÇÃO

Definição de função: Dados os conjuntos não vazios A e B. Diz-se que f é uma *função* de A em B quando todo elemento $x \epsilon A$ está associada a único elemento $y \epsilon B$ e denota-se por:

$$f: A \to B.$$
$$x \mapsto y$$

O conjunto de partida A é denominado de *Domínio da função* f e representado por $D(f)$ e o conjunto de chegada B é denominado de *Contradomínio da função* f e representado por $CD(f)$, denotado por:

$$f: D(f) \to CD(f).$$
$$x \mapsto y$$

Ao conjunto formado ***apenas*** pelos elementos y do contradomínio que *foram alcançados* pela função f, denominamos de conjunto *Imagem da Função* f e o representamos por $Im(f)$, em outras palavras:

$$Im(f) = \{y \in B \ / \ x \mapsto y, \ x \in A\} \text{ e } Im(f) \subset CD(f).$$

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Ao apresentar essa formalização o professor deve relacioná-la aos conceitos pré-formais que os próprios estudantes concluíram nas intervenções e promover a conversão da linguagem intuitiva por eles adotadas pela linguagem do rigor matemático e simbólico para que o conceito seja consolidado de modo a garantir a consecução das próximas atividades, pois

> A aplicação correta da Matemática nas ciências factuais deve aliar de maneira equilibrada a abstração e a formalização, não perdendo de vista a fonte que originou tal processo. [...] O reconhecimento de uma teoria científica passou a ter como condição necessária o fato de poder ser expressa em uma linguagem Matemática. (BASSANEZI, 2011, p.18-19)

Por fim, para garantir que os conceitos foram devidamente compreendidos, e que os alunos tenham se apropriado da linguagem Matemática são propostas duas atividades de verificação de aprendizagem, uma restritiva e outra aplicativa.

A atividade completa encontra-se no apêndice deste texto.

4. 3. ATIVIDADE 2: Função como relação de dependência entre variáveis

Nesta atividade tem o objetivo de identificar as variáveis de uma função a relação de dependência entre elas. Parte de uma fotografia extraída de uma reportagem publicada em um jornal de circulação estadual sobre a venda de farinha de mandioca na feira do Ver-O-Peso em Belém do Pará.

As intervenções ocorrem com o intuito de fazer com que o aluno perceba as variáveis preço, tipo de farinha, quantidade de litros e reconheça a relação existente entre elas.

Figura 19: Algumas intervenções da atividade 2

Quadro 1: VALOR A PAGAR (R$) POR TIPO DE FARINHA E QUANTIDADE (ℓ).

QUANTIDADE (ℓ)	D'ÁGUA PURA	BRANCA BISCOITO	D'ÁGUA PURA DE BRAGANÇA
1			
2			
3			
4			
5			

Intervenção Reflexiva: Que tipo de variação é possível identificar em cada uma das colunas?

Intervenção Reflexiva: É possível estabelecer algum critério de variação em cada uma dessas colunas?

Intervenção Reflexiva: Qual a expressão que estabelece a correspondência entre o valor a pagar e a quantidade de farinha a ser adquirida em cada um dos casos?

Intervenção Reflexiva: Justifique se a relação estabelecida entre o valor a pagar e a quantidade de farinha a ser adquirida, em cada um dos casos, pode representar uma função.

Intervenção Exploratória: Considerando cada uma das expressões estabelecidas anteriormente, quanto uma pessoa deve pagar se comprar 10 litros de farinha?

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Será possível estabelecer generalizações algébricas entre as variáveis e o cálculo de uma a partir da outra identificando qual a variável dependente e qual a independente. Nessa atividade ´deve ser enfatizada a importância das variáveis no comportamento funcional, como discutida no 3. A formalização da atividade 2 necessita de articulação com a primeira atividade, uma vez que retoma conceito de domínio e contradomínio de função.

Figura 20: Formalização da Atividade 2

FORMALIZAÇÃO

Seja $f: D(f) \rightarrow CD(f)$ uma função definida por $y = f(x)$, sendo $x \in D(f)$ e $y \in CD(f)$. Diz-se que o **domínio** $D(f)$ e **contradomínio** da função $CD(f)$ da função f representam, respectivamente, o conjunto de ***Variáveis Independentes*** (x) e o conjunto de ***Variáveis Dependentes*** (y) da função f.

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

O professor deve enfatizar aqui a diferença entre as incógnitas de uma equação e as variáveis de uma função como está explicado na seção 3.2.1.

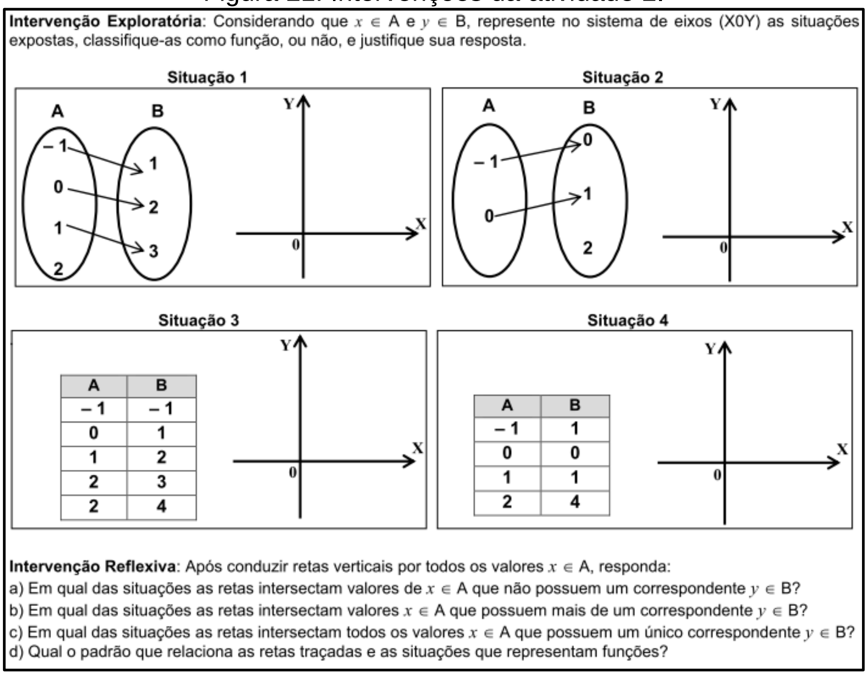
Após a formalização há duas intervenções avaliativas para verificação de aprendizagem. A atividade completa está no apêndice deste texto.

4. 4. ATIVIDADE 3: Função e suas representações.

A terceira e última atividade desta sequência didática tem o objetivo de fazer reconhecer e representar função em diferentes linguagens Matemáticas dando ênfase a representação gráfica segundo a definição de função.

A atividade parte da conversão de diagramas e tabelas para gráfico de pontos com o intuito de ilustrar como a não-ambiguidade e não-exceção podem ser observadas e representadas em um gráfico.

Figura 21: Intervenções da atividade 2.



Fonte: Elaborado pela autora (2019)

As intervenções estão em bloco e valem para todas as situações e permite diferenciar quando uma correspondência representada em diagrama, tabela ou gráfico é ou não função.

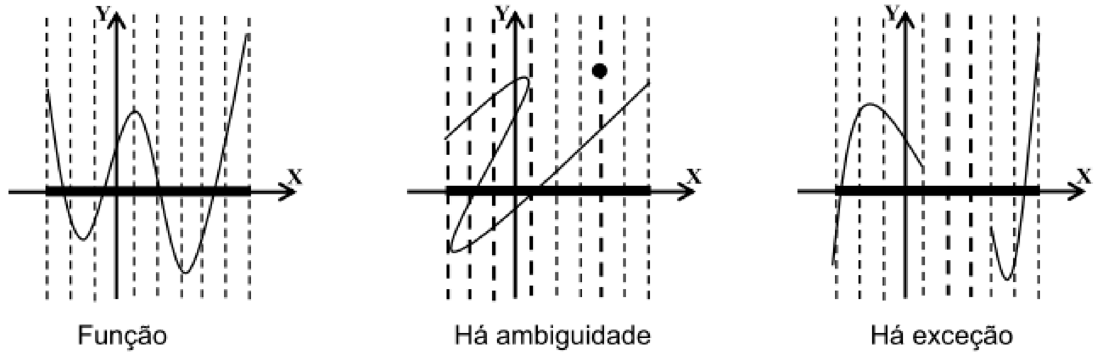
Considero que esta atividade estimula um exercício matemático saudável de recorrer a definição como estratégia de construção de uma linha de raciocínio. Isto é, as argumentações mobilizadas pelos alunos terão fundamentações coerentes e com linguagem Matemática apropriada.

Embora as situações propostas na atividade sejam apenas em gráfico de pontos discretos, a formalização apresenta uma proposição de como um gráfico representa uma função segundo a definição, e, a ilustração mostra como ocorre em gráficos de funções contínuas, isto é, uma generalização do que foi construído pelos estudantes por meio das intervenções reflexivas e exploratórias.

Figura 22: Formalização da atividade 3

FORMALIZAÇÃO

Diz-se que um gráfico no sistema cartesiano representa uma função quando **toda** reta vertical paralela ao eixo das ordenadas intersecta sempre o domínio e o gráfico em um **único** ponto, não havendo **ambiguidades** e nem **exceções**.



Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Note que as ilustrações marcam no eixo das abscissas o domínio ao qual o gráfico pertence. A intenção aqui é enfatizar a importância de se olhar como o domínio está definido.

Por fim há uma intervenção avaliativa restritiva e outra aplicativa. A atividade completa está no apêndice deste texto.

4. 5. OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DAS ATIVIDADES

Enfatizo que em todas as atividades o professor aplicador da sequência didática para o ensino do conceito de função deve estimular o diálogo entre ele e os alunos e entre os próprios alunos. Comparo essa metodologia proposta por Cabral (2017) como se colocasse o professor no papel de um detetive que investiga um crime que possui suspeitos, mas não pode fazer acusações sem provas, então faz interr ogatórios e reconstituições a fim de o próprio suspeito se delatar seja por expressão corporal ou por inconsistência de informações. Então, o professor aplicador realiza intervenções reflexivas e exploratórias (interrogatórios e reconstituições) com a intenção de fazer o estudante externalizar seu percurso de raciocínio e nível de apreensão dos objetivos de aprendizagem pretendidos.

Sintetizo no quadro abaixo como os objetivos de aprendizagem definidos inicialmente estão distribuídos nas três atividades.

Quadro 19: Distribuição dos objetivos de aprendizagem nas atividades

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM (OA)		ATIVIDADE
OA1	Identificar variáveis envolvidas em situação-problema.	1, 2
OA2	Identificar a natureza das variáveis (velocidade, tempo, peso, preço)	1, 2
OA3	Identificar a relação entre variáveis (independentes x dependentes).	2
OA4	Transcrever uma situação-problema (real/fictícia) da linguagem escrita (língua materna) para a linguagem Matemática (diagrama, gráficos, pares ordenados, equações, tabelas, quadros, etc.) e vice-versa.	1, 2
OA5	Utilizar diferentes símbolos (diferentes de *x* e *y*) para representar variáveis independente e dependente.	2
OA6	Calcular uma variável a partir de outra variável.	2
OA7	Definir função.	1
OA8	Identificar/definir/calcular o conjunto de partida (domínio) e o conjunto de chegada (contradomínio).	1, 2
OA9	Identificar diferentes representações de funções.	1, 2, 3
OA10	Resolução de situação-problema (real/fictícia) que envolvem o conceito de função.	1, 2, 3

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Note que os objetivos de aprendizagem estão distribuídos nas atividades de modo que alguns são abordados em todas, revelando o caráter articulado proposto pela linha metodológica adotada. E, a linha metodológica adotada está alinhada com as diretrizes da educação, como ilustro a seguir em um esquema de cores.

Figura 23: Habilidades indiretamente desenvolvidas

Os estudantes [...] devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2017, p. 519)

As articulações estruturais dessas SD pretendem favorecer a criação de um ambiente no qual "(...) os alunos partilhem ideias, raciocínios, processos, estabeleçam conexões, comparações e analogias, construam conjecturas e negociem significados e desenvolvam capacidades de comunicar e argumentar". (CABRAL, 2017, p.10)

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

A imagem ilustra as habilidades indiretamente exploradas na execução da sequência didática apresentada, tais habilidades foram diagnosticas no início da pesquisa como fundamentais para a aprendizagem do objeto matemático, especialmente por se tratar de um objeto conceitual que apela para a abstração, mas que possui várias linguagens pelas quais pode ser representado. O professor que aplicar esta sequência precisará estar atento a essas sutilezas.

5. PROCECEDIMENTOS E RESULTADOS DA APLICAÇÃO

Neste capítulo, descrevo a aplicação da sequência didática apresentada no capítulo anterior e, para tanto, descrevo sujeitos, lócus, procedimentos da aplicação, bem como, apresento os resultados de todos os episódios didáticos e como os objetivos foram alcançados.

5. 1. COMO TUDO ACONTECEU

A aplicação da sequência didática aconteceu em uma turma de 37 estudantes do 1º ano do ensino médio de uma escola estadual do município de Belém-PA. Todos os estudantes apresentaram a autorização de seus responsáveis para participar da pesquisa, mediante assinatura de um termo de consentimento livre e esclarecido. A escola recebeu um ofício expedido pelo programa de pós-graduação para que eu pudesse realizar a experimentação pretendida. Tive assessoramento da coordenadora pedagógica da escola para programar as datas dos episódios e contei com a supervisão da professora de Matemática das turmas. Ao final a escola forneceu uma Declaração atestando a realização da pesquisa.

Toda a aplicação, contando o teste e oficina de conhecimentos básicos, episódios de aprendizagem e teste de verificação de aprendizagem ocorreram nos dias 04,11, 18 e 27 de novembro de 2019. Trabalhei com duas turmas, uma que chamo de Turma de Controle (TC) e outra que chamo de Turma de Aplicação (TA). Nas duas turmas foi aplicado um teste para verificação de conhecimentos básicos e oficina, envolvendo esses conhecimentos em decorrência de não terem apresentado bom rendimento no teste de verificação, com carga horária total de 2 h/a.

O episódio didático da turma de controle foi realizado por um professor colaborador experiente, estudante de mestrado, que adotou a aula clássica, com definição, exemplos e exercícios, com apoio do livro didático Balestri (2016), o que realizou em 2 h/a. Na turma de aplicação, eu mesma, professora-pesquisadora, ministrei a experimentação da sequência didática em três episódios didáticos totalizando 6 h/a apenas para aplicação. Ao final, nas duas turmas, de controle e de aplicação, realizei um teste de verificação de aprendizagem. O Quadro 19 resume as dinâmicas dos episódios didáticos das duas turmas.

Quadro 20: Metodologia de aplicação das turmas de controle e de aplicação

	Turma de Controle	**Turma de Aplicação**
Professor dos episódios de aprendizagem	Professor colaborador	Professora Pesquisadora
Quantidade de h/a	2 h/a	6 h/a
Número de episódios	1	3
Recurso didático	Livro didático	Fichas de atividade da sequência didática
Metodologia de ensino	Definição, exemplos, exercícios.	Método interativo por meio de intervenções intencionais para construção autônoma de conhecimento.

Fonte: Elaborado pela autora (2020)

O professor colaborador não participou e nem teve contato com o material da sequência didática, sendo fornecido a ele apenas os objetivos de aprendizagem pretendidos, eu também não participei da aula que ele ministrou.

Na Turma de Aplicação havia uma estudante PCD (pessoa com deficiência) e, ao conversar com a psicóloga da escola, fui informada de que a aluna apresenta dificuldades cognitivas que afetam sua aprendizagem, em decorrência de histórico de paralisia infantil. Além disso, a profissional acrescentou que a citada aluna demonstrava baixa autoestima devido às dificuldades que tem, no entanto observou que desenvolver suas atividades ao lado e apoiada por duas colegas de turma a deixa mais confortável e confiante, de modo que mantive as alunas no mesmo grupo em todos os episódios didáticos.

O conteúdo “conceito de função” havia sido ministrado pela professora das turmas no primeiro semestre letivo, porém numa perspectiva diferente da adotada por mim. Logo, alguns alunos poderiam se lembrar do assunto e ajudar na condução da construção da aprendizagem.

Na aplicação do teste de conhecimentos básicos, para ambas as turmas, foram permitidas interações entre os estudantes. Pude observar o comportamento dos alunos e destacar alguns por desenvoltura verbal e atitudes quanto a iniciativa de pedir ajuda ou ajudar os colegas na resolução das questões. Em sequência, recolhi o teste de verificação de conhecimentos básicos e entreguei uma nova folha do mesmo teste, cuja resolução coletiva no quadro se tornou a própria oficina de conhecimentos básicos. Na turma de aplicação, ao realizar a correção desse teste (realizado antes da oficina) destaquei pelo desempenho os estudantes que alcançaram melhores resultados e os elegi como líderes de cada grupo. Note no quadro 20 que a contabilização de pontos foi feita por tipo de representação: equação, quadro, diagrama, par ordenado e plano cartesiano e que a maior dificuldade se deu na representação em equação, única com menos de 60%, precisamente, 35,34%, o que corrobora com a revisão de estudos diagnósticos.

Quadro 21: Resultado do teste de conhecimentos básicos - Turma de aplicação

SUJEITO	EQUAÇÃO	QUADRO	DIAGRAMA	PAR ORDENADO	PLANO CARTESIANO	TOTAL	%
*[3]	1	1	1	1	1	5	25
*	1	3	3	4	3	14	70
*	1	3	3	3	3	13	65
A1	3	3	3	3	3	15	75
A2	3	3	3	3	3	15	75
A3	2	2	2	2	2	10	50
A5	2	2	2	2	2	10	50
B1	1	4	4	4	4	17	85
B2	1	3	3	3	3	13	65
B3	1	2	2	2	1	8	40
B5	2	3	3	3	3	14	70
B6	2	3	3	3	3	14	70
C1	1	4	4	4	4	17	85
C2	2	2	2	2	2	10	50
C4	0	4	4	4	4	16	80
C5	1	4	4	4	4	17	85
C6	0	4	4	4	0	12	60
D1	2	4	4	4	4	18	90
D2	3	2	2	2	2	11	55
D3	3	3	3	3	3	15	75
D4**[4]	2	4	4	4	4	18	90
D5	1	3	3	3	1	11	55
E1	2	4	4	4	4	18	90
E4	1	4	4	1	1	11	55
E5	0	4	4	4	0	12	60
F1	2	2	2	2	2	10	50
F3	0	2	2	0	0	4	20
F4	1	2	2	2	0	7	35
F6	0	2	2	0	0	4	20
TOTAL	41	86	86	80	66	359	1795
% por tipo de representação	**35,34**	**74,13**	**74,13**	**68,96**	**56,89**	**61,9**	

Fonte: Elaborado pela autora (2020)

[3] *Participaram da oficina, mas não participaram da aplicação da sequência didática
[4] ** Aluna PCD (Pessoa com deficiência)

Nos episódios de aplicação da sequência didática formei de 6 grupos, de 5 a 6 estudantes que utilizavam crachás com códigos, por exemplo: no grupo A, haviam os estudantes A1, A2, A3, A4, A5 em que o aluno cuja letra fosse seguida do número 1, era o aluno que obteve bom desempenho no teste de conhecimentos básicos, aqui chamado de líder do grupo. Em cada grupo foi posicionado um gravador de áudio para captar as interações aluno-aluno e aluno-professor.

Tendo em vista dinamizar o processo de aplicação da sequência didática, contei com a colaboração de 10 professores que, alternadamente, prestaram assessoramento junto aos grupos. Todos eles passaram por um treinamento prévio para entenderem todo o procedimento da aplicação e observar quando os estudantes estivessem divergindo dos objetivos pretendidos ou falando algo passível de análise de indício de aprendizagem, de modo a pedir que os estudantes repetissem próximo ao gravador tais falas.

Em todos os episódios elegia um professor observador para registrar horários e fatos que julgassem relevantes. A participação dos professores colaboradores possibilitou que os estudantes ficassem mais focados e que fossem provocados a interagir de modo que a captação pudesse ficar o mais audível e inteligível possível, bem como para que a coleta de dados fosse a melhor possível.

É importante destacar que é possível a aplicação do produto educacional proposto por apenas um professor, desde que esteja devidamente orientado sobre os procedimentos, de modo que a adoção de professores colaboradores nesta pesquisa se deu essencialmente para facilitar a coleta de dados.

Nem todos os estudantes participaram da oficina, nem todos os estudantes que realizaram o teste final de verificação de aprendizagem participaram de todos os episódios.

Foi possível observar que métodos interativos de aprendizagem não eram uma prática nas aulas de Matemática desses estudantes, de modo que a quantidade e a qualidade de seus diálogos sobre as atividades em si foram se aprimorando ao longo das aplicações. As três atividades aconteceram entre lapsos temporais de uma semana, de modo que as duas últimas atividades foram iniciadas com retomada das aulas anteriores.

5. 2. TRATAMENTO DE DADOS E ANÁLISE DE RESULTADOS

A seguir apresento as análises dos discursos de todos os episódios gerados durante a aplicação da sequência didática. Para tanto, depois de realizada a transcrição completa de todas as falas (apêndice) que ficaram audíveis, analiso alguns micro eventos aqui denominados de segmentos, aqueles nos quais identifiquei indícios de aprendizagem sob os critérios da análise do discurso. Apesar de todos os grupos terem recebido gravadores, tive problemas técnicos em alguns que não gravaram por falta de bateria ou memória ou por estar com cartão danificado, nada que pudesse prejudicar o tratamento e análise de dados coletados, uma vez que a análise microgenética se detém a analisar recortes dos episódios que possam reconstruir todo o panorama de conhecimentos adquiridos pelos estudantes, mediante a interação intencional do professor.

A dinâmica da organização dos dados a seguir apresentados, não aconteceram em um mesmo padrão, sendo apresentado conforme a dinâmica da aula, quando ocorre as socializações ou quando se dão as discussões nos grupos. Para tanto estabeleci alguns códigos: grupos são identificados por letras (A, B, C...), estudantes identificados por letra do grupo seguida de número (A2, B5, D4....), PA (professora aplicadora), PC (professor colaborador). Cada fala da transcrição é chamada de turno sendo identificadas e numeradas por T1, T2, T3 .... Totalizando 669 turnos.

Para a transcrição eu escutei todos os episódios e fui repetindo as falas para que um aplicativo on-line gratuito fosse fazendo a áudio transcrição, disponível em: https://speechnotes.co/pt/. Muito eficiente, mas é necessário falar de forma bastante articulada e observar se a transcrição acontece corretamente. Embora tenha sido uma tarefa maçante, fazer a transcrição me permitiu vivenciar novamente os episódios didáticos por diferentes perspectivas, observar situações que não percebi durante o processo e ter o prazer de testemunhar a aprendizagem acontecendo de forma única e particular para cada indivíduo.

Como apresentei no capítulo inicial desta dissertação, as análises da experimentação da sequência didática “Conceito de função e suas linguagens” são com o objetivo de verificar sua potencialidade para o ensino e aprendizagem no ensino médio. No entanto, é importante ressaltar que tal potencialidade diz respeito a qualidade do processo de ensino e aprendizagem, isto é, ao processo didático de sua aplicação, tendo por objeto de investigação os indícios de aprendizagem verificados nos discursos dos alunos, provocados pelas intervenções intencionais escritas e orais do professor.

Mais precisamente, construí uma sequência didática constituída de intervenções com a intenção de ensinar conceito de função no ensino médio. Mas será que essas intervenções provocaram nos estudantes estímulos necessárias para que os conhecimentos fossem gradualmente formalizados cognitivamente? Será que a *milieu* construído proporcionou um ambiente que promovesse a comunicação, a investigação, a argumentação e o raciocínio lógico? Será que o produto educacional proposto possui potencialidades didáticas nos aspectos discursivos: perceptivo/intuitivo, empírico e teórico? São esses os questionamentos que respondo a seguir, segundo a análise microgenética (AM) e a análise do discurso (AD).

Para melhor entendimento das análises, retomo como as intervenções das UARC's estão inter-relacionadas as análises dos níveis epistemológicos alcançados durante o processo dos episódios. Repare bem, a palavra chave aqui é *intenção,* logo a intenção da intervenção (UARC) ou da interação (AD) é que conduzirá o aluno a alcançar os níveis epistemológicos perceptivo/intuitivo, empírico e teórico (AD) ou níveis de formalização pré-formal, formal e pós-formal (UARC). Nesse caso, os segmentos analisados são a respeito das interações ocorridas após um determinado tipo de intervenção escrita no material impresso do aluno que aparece, para ele, como uma enumeração de questões (ver no apêndice: material do aluno).

Quadro 22: Inter-relação entre UARC e AD

Intervenção (UARC)		**Interação (AD)**		**INTENÇÂO**
Inicial	Pré-Formal	Interativa/ dialógica	Perceptivo/intuitivo	Engajar os estudantes, intelectual e emocionalmente;
Exploratória	Pré-Formal	Interativa/ dialógica	Perceptivo/intuitivo	Criar o problema e Explorar as ideias dos alunos.
Reflexiva	Pré-Formal	Interativa/ dialógica Interativa/ de autoridade	Empírico	Dar oportunidades aos estudantes de falar e pensar com as novas ideias científicas, em pequenos grupos e por meio de atividades com a toda a classe.
Formalizante	Formal	Não-interativa /de autoridade	Teórico	Desenvolver a visão científica; Dar suporte aos estudantes para aplicar as ideias científicas ensinadas a uma variedade de contextos e transferir aos estudantes controle e

				responsabilidade pelo uso dessas ideias.
Avaliativa	Pós-Formal	Interativa/ dialógica Interativa/ de autoridade	Perceptivo/intuitivo, empírico e teórico	Combinação ou alternância das intenções acima, para investigar como a construção conceitual está acontecendo
I-OMO	Pré-Formal Pós-Formal	Interativa/ dialógica Interativa/ de autoridade	Perceptivo/intuitivo, empírico	Combinação ou alternância das intenções acima.

Fonte: Elaborado pela autora (2020)

Note que, apesar de se utilizarem de nomenclaturas diferentes para definir os discursos escritos ou orais, foi possível inter-relacioná-los por meio da intenção do professor.

5. 2.1. Episódio 1: O que é função?

O Episódio 1, aconteceu no dia 11/11/2019, trata-se da atividade 1 da sequência didática cujo objetivo é definir função, logo, tendo em vista o que foi apresentado na seção 3.2, tive a tarefa de fazer os sujeitos compreenderem os critérios da não exceção e não ambiguidade, bem como caracterizar os três “ingredientes” do comportamento funcional: domínio, contradomínio e como eles se relacionam. Desse episódio transcrevi 284 turnos, do turno T1 ao turno T284.

Embora houvesse todo um planejamento e uma fundamentação para a sequência didática, foram vários os desafios a serem superados mediante intervenções orais, tais como conversão de uma representação para outra, relembrar outros conceitos matemáticos (perímetro, área), linguagem algébrica, realizar “pontes” entre as intervenções de exploratórias e as reflexões almejadas.

Nesse primeiro episódio foi possível observar que os sujeitos não praticavam o exercício de aprendizagem por meio de discussão. Alguns deles se mostravam paralisados diante das situações e os alunos selecionados como líderes e outros que demonstram mais experiência cognitiva conseguiam conduzir o processo necessitando vez ou outra de intervenções orais do professor

Questões 1, 2, 3, 4 e 5

Essas questões são intervenções iniciais e exploratórias que dentro da análise dos discursos se enquadram como abordagem comunicativa interativa/dialógicas, porém ao longo do episódio o professor necessitou fazer IOMO’s (Intervenções Orais de Manutenção Objetiva) as quais se enquadram a abordagem comunicativa não interativa/dialógica e interativa/de autoridade alcançando os níveis epistemológicos perceptivo/intuitivo e empírico. Predominantemente, o padrão de interação foi I-R-F (Iniciação, Resposta, Feedback).

T12-B1: Aqui a regra é o quê? Tem que usar uma letra?
T13-B3: O que é sucessor?
T14-B6: Sucessor, mano, é o próximo!
T15-B1: A regra é associar dobro entendeu? O dobro de -1 é -2, o dobro de zero é zero e o dobro de um é dois.É só multiplicar por dois.
T116-F2: Será que continente a Europa e região norte é estado?
T117-F1: Calma não sou bom em Geografia.

Nestes turnos verifica-se uma interação aluno-aluno em que são mobilizados e compartilhados conhecimentos que os sujeitos possuem ou adquiriram durante a oficina de conhecimentos básicos, inclusive de forma interdisciplinar. Percebe-se que os estudantes estão engajados.

T26-C3: Me explica a 2.
T27-C1: O B é isso aqui ó, dois e um.
T28-C3: Mas, por que? No gráfico a gente não conta de baixo para cima não é 1 e 2?
T76:E3: Tá complicada a segunda, a primeira tá fácil mas a segunda tá difícil

A situação 2, da atividade 1, aparentemente simples, causou um problema cognitivo na conversão da representação gráfica para a de diagrama. Ocorre que a ordem tão importante no plano cartesiano é irrelevante na representação em diagrama, mas tornou-se um obstáculo para alguns estudantes. O que remete-me ao discutido na seção 3. 2. 3 onde recomenda-se ao professor atentar quanto as dificuldades cognitivas de uma representação que possam dificultar o entendimento de outra.

T40-D1: Nessa terceira aqui o 1 se liga com 1 e 2.
T41-D3: Mas está errado por que é um filho não pode ter dois pais, mas um pai pode ter dois filhos. Fica tipo uma função incompleta.

Nota-se nessa interação que os estudantes lembraram do conteúdo conceito de função ministrado pela professora da turma no início do ano. Ainda que de modo pré-formal recordaram as implicações da ambiguidade acontecer no domínio ou no contradomínio da função.

> **T139-PA**: Então nós vimos na oficina que quando eu multiplicar um número por 2, eu estou calculando o seu dobro. Então 2 vezes um símbolo qualquer, uma letra que pode ser x, ou outra é o dobro de um número. Então aqui no meu diagrama eu tenho no conjunto A de partido e B de chegada. Segundo a regra os valores de x e de y pertencem a quais conjuntos?
> **T140-Grupo D**: x é de partida e y é de chegada.
> **T141-PA**: Agora como é que fica a correspondência no diagrama segundo essa regra e y = 2x? Então os valores do conjunto B precisam ser o dobro dos valores do conjunto A certo? Como vocês fizeram?
> **T142-Grupo D**: -1 com -2, 0 com 0, 1 com 2.

Verifica-se nos turnos de T139 a T142 uma pré-formalização de domínio e contradomínio. Os alunos percebem como a regra relaciona ambos os conjuntos, isto é, como os elementos do domínio se correspondem com o contradomínio.

> **T154-PA**: Quais foram os grupos que já terminaram?
> **T155-PA**: Só Vocês? Então eu peço que cada um desse grupo vá ajudar um grupo que ainda não terminou. Vamos lá!
> **T156-E1**:Vem cá que D5!
> **T157-D5**: Bom, aqui você tem que perceber que os números já estão ligados e vocês têm que os números 1, 2, e 3 já estão ligados. Aí você vê porque o 1 tá ligado no 3. Aí você vai perceber que todos estão multiplicando três vezes. Aí 1 x 3 é 3, 2 x 3 é 6 e 3 x 3 é 9.
> **T158-E1**: Ah! então é o triplo?
> **T159-D5**: Isso! fica multiplicando por três, aí é só isso, então regra é 3X.
> **T160-E2**: E aí a situação 8?
> **T161-D5**: Esse aqui você vai ter que conferir os lados você vai ver aqui no Conjunto a 3 com mais 25 aí como repete faz vezes dois fica 10 cm aí você liga para o 10 centímetro não faz a mesma coisa nos outros.
> **T162-E2**: Então aqui a gente faz quatro mais um que é 5 x 2 vai dar 10cm aí liga também no 10

É relevante dizer que nessa atividade não se pode deixar que os sujeitos façam tudo de uma vez, deixando aqueles que porventura estejam com dificuldades para trás. O grupo D havia terminado todas as correspondências, mas os demais grupos haviam feito apenas as seis primeiras de doze. Foi então que me ocorreu de maneira improvisada pedir que os estudantes desse grupo, cognitivamente mais amadurecidos, se redistribuíssem nos demais grupos para ajudá-los a concluir a tarefa. Essa foi uma decisão muito feliz, pois os estudantes do grupo D desempenharam o papel de mediar a aprendizagem dos colegas, utilizando uma linguagem que os aproximou e os fez entender o propósito da atividade, a ponto de conseguirem a partir disso uma autonomia para chegarem até o fim dela.

Questões 6, 7 e 8

As questões 6, 7 e 8 são intervenções reflexivas que apresentam abordagem comunicativa interativa/dialógica, associada a IOMO's de abordagem comunicativa interativa/de autoridade alcançando os níveis epistemológico perceptivo/intuitivo e empírico. Predominantemente, o padrão de interação foi I-R-F (Iniciação, Resposta, Feedback) e I-R-A (Iniciação, Resposta, Avaliação). Nessa intervenção a intenção era que os estudantes fossem retirando as cartas de comportamento contrário ao funcional, de modo a fazê-los focar no comportamento no domínio das correspondências (funções) das cartas que sobraram.

> **T222-PA**: Vocês entenderam o que é pra fazer?
> **T223-Turma**: Não
> **T223-PA**: Tudo bem. Vamos recapitular o que nós fizemos desde o começo. Que vocês fizeram primeiro?
> **T224-Turma**: A correspondência das situações.
> **T225-PA**: E depois?
> **T226-Turma**: Colocamos e tiramos as cartas.
> **T227-PA**: O que foi que vocês fizeram primeiro na retirada das cartas?
> **T228-Turma**: Tiramos primeiro as 6 de baixo.
> **T229-PA**: Por que vocês fizeram isso?
> **T230-Turma**: Porque estava sobrando no conjunto A em um conjunto de partida.
> **T231-PA**: E as outras cartas vocês tiraram por quê?
> **T232-Turma**: Porque tinha um elemento de partida e corresponda com mais de 1 na chegada.
> **T233-PA**: Então como vocês tiraram essas cartas com essas características, as outras que sobraram tinham um significado contrário. Então, vejam bem: se aqui embaixo sobrou elementos no conjunto de partida, é porque não foram todos os elementos que se corresponderam. E nessas de cima quais elementos se corresponderam?
> **T234-Turma**: Todos.
> **T235-PA**: E depois o que vocês fizeram?
> **T236-Turma**: Tiramos as cartas que tinham mais de uma correspondência na partida.
> **T237-PA**: Então se vocês tiraram o que tinha mais de uma, as que sobraram tinham o que?
> **T238-Turma**: Só uma.
> **T239-PA**: Muito bem. Então primeiro vocês tiraram o que sobrava no conjunto de partida pra deixar aqueles em que todos se correspondiam. Depois vocês tiraram aqueles que faziam mais de uma correspondência na partida pra deixar aqueles cuja correspondência é única na partida. Agora, reformulem e escrevam essas conclusões.

Do turno T222 ao T239 foi o segmento mais tenso do episódio, quando a turma unanimemente disse não entender o que era pra ser feito. Para mim pareceu por alguns instantes que tudo estava perdido. Foi então que utilizei de forma necessária várias I-OMOS de padrão I-R-A no sentido de recapitular o que e porque os estudantes fizeram cada passo até aquele momento. Para isso a abordagem interativa/ de autoridade se mostrou enfática e eficaz no alcance do objetivo pretendido: fazerem os estudantes perceberem os critérios no domínio de uma função.

> **T244-D1**: Acho que cada ponto de partida tem uma chegada.
> **T245-D3**: Não! Todos os elementos de partida tem única chegada.
> **T251-Grupo D (D3)**: Todos os elementos de partida se conectam. E cada elemento do conjunto de partida faz apenas uma conexão.
> **T252-PA**: Gostei da palavra conexão! Vocês concordam com o colega?

Os turnos acima destacam os discursos dos alunos após as reflexões sobre a exploração que realizaram com as situações e cartas. O jeito próprio de cada um dizer como via o comportamento daquelas quatro cartas remanescentes, revelou que cada indivíduo construiu seus modelos mentais de forma muito particular e autônoma. Isto é, não foi uma reprodução do que eu disse a eles, mas uma externalização do que refletiram e concluíram.

> **T256-PA**: E vocês do grupo E entenderam?
> **T257-E1**: Entendemos agora com que a senhora falou
> **T258-PA**: É? E o que foi que eu falei?
> **T259-E6**:Todos os elementos de partida possuem uma única chegada.
> **T260-PA**: Pronto Muito bem! Olha a colega de vocês não tinha feito, ninguém do grupo dela tinha feito, mas com ajuda de vocês a colega conseguiu entender e ainda resumiu tudo o que vocês falaram de forma bem simples e bem objetiva. Olha você tem o poder de síntese muito bom. Parabéns! Por que cada um aqui falou de um jeito diferente e ela disse a mesma coisa que vocês disseram de forma bem sintética.

De todos os episódios, o recorte do T256 ao T260 foi o mais satisfatório para esta professora-pesquisadora. Ocorre que o grupo F, realizou poucas interações, demonstrou grande dificuldade e mesmo depois das socializações encontrava-se longe de uma pré-formalização. Então decidi pedir que cada grupo dissesse o que concluiu. Inesperadamente, as falas dos colegas e minhas mediações fizeram que uma aluna do grupo F não só compreendesse, mas que levasse toda a turma a um consenso do que seria um comportamento funcional, neste momento a turma demonstrou capacidade de ajustar seus esquemas mentais face ao do outro.

Questão 9 e formalização

A formalização é papel do professor, nesta intervenção adotei como abordagem comunicativa a não interativa/de autoridade, mas conciliei algumas I-OMO interativa/de autoridade, com padrão de interação I-R-A, alcançando aqui o nível epistemológico teórico.

> **T270-PA**: Agora eu quero que vocês prestem bem atenção nessas duas palavras novas que nós vamos aprender veja bem, quando nós dizemos que a correspondência deve ser única nos elementos no domínio, estamos querendo dizer que não pode ocorrer ambiguidade no domínio da função. Então vamos pensar um pouco na língua portuguesa. O que é que nós chamamos de ambiguidade? Tudo aquilo que tem duplo sentido ou mais de um sentido dependendo do contexto, aqui no estudo de função significa que eu tenho mais de uma correspondência para um mesmo elemento do domínio e se isso ocorrer não é função então primeiro critério não ambiguidade no domínio quando eu digo que todo elemento tem que ser corresponder significa que nós não queremos exceções então o outro critério é não exceção. O que seria uma exceção para vocês?
> **T271-E6**: É tipo quando abre uma vaga, abre o espaço, uma sobra.
> **T272-PA**: Isso mesmo! Logo, se nós temos uma exceção no domínio também não é função. E o segundo critério para que seja função é a não exceção no domínio da função. Então para que uma correspondência seja função eu não posso ter exceções e nem ambiguidades onde turma?
> **T273-Turma**: No domínio.

O diferencial desta atividade, em relação a outros métodos e recursos didáticos, foi que trouxe a linguagem Matemática comumente adotada no ensino superior para o nível escolar. Ora! É isso que a TSD defende, a transposição didática, a transformação do saber científico em saber escolar, tornando concreto o que era abstração. Duas palavras, ambiguidade e exceção, enriqueceram o saber matemático dos sujeitos e trouxe rigor e formalização a sua linguagem.

Questão 10.

Esta foi uma intervenção avaliativa restritiva, desenvolve o papel de verificar se o que se ensinou foi devidamente compreendido, de forma mais direta, é momento de corrigir mal entendidos e verificar a aprendizagem. Essa intervenção é uma combinação de abordagem cognitiva não interativa/dialógica que concilia os níveis epistemológicos perceptivo/ intuitivo, empírico e teórico.

T274-PA: Então vamos lá, vocês disseram que isso aqui não é uma função, que essa correspondência não é uma função. O que foi que aconteceu?
T275-Turma: Tem elemento sobrando no domínio.
T275-PA: Se está sobrando. Então o que foi que aconteceu, qual é o nome que a gente dá para isso.
T276-Turma: exceção.
T277-PA: E o que mais aconteceu para que você chegasse à conclusão de que não é uma função?
T278-Turma: Está repetindo elementos.
T279-PA: Qual é o nome que a gente dá para isso?
T280-Turma: Ambiguidade.
T281-PA: E o que vocês fizeram para que não tivesse nem exceções e nem ambiguidades no domínio?
T282-Turma: Tiramos a seta ali.
T283-PA: Vocês concordam tá certo né e o que mais vocês fizeram?

Percebe-se que os estudantes se apropriaram dos novos termos, e do conhecimento almejado, utilizando palavras como domínio, contradomínio, exceção e ambiguidade de forma muito bem colocada no discurso. Além disso, na resolução da questão os estudantes conseguiram aplicar as ideias científicas ensinadas a um novo contexto. Foi transferido aos estudantes controle e responsabilidade pelas escolhas de suas estratégias, podendo comparar com diferentes alternativas de pensar sobre o problema.

Questão 11

Esta foi uma intervenção avaliativa aplicativa, permite verificar se o estudante foi capaz aplicar o conhecimento em contextos diversificados exigindo análise e linguagem mais elaborada, é também momento de corrigir mal entendidos e verificar a aprendizagem. Essa intervenção é uma combinação da três níveis epistemológicos, perceptivo/ intuitivo, empírico e teórico.

T299-PA: Observe a diferença entre você ter o domínio (T) e você ter os elementos do domínio(t). Você ter o contradomínio (N) e você ter os elementos do contradomínio (n). Agora, vamos ver quem seria a imagem dessa função?
T300-Turma: Todos os elementos onde a seta chegou.
T301-PA: Exatamente, e onde a seta chegou?
T302-Turma: 0, 80,160, 240, 320 e 400.
T303-PA: Excelente! Agora vamos retomar a definição de função. Essa correspondência de fato é uma função?
T304-Turma: Sim!
T305-PA: Por quê?
T306-D3: Porque não sobrou nem repetiu elementos no domínio.
T307-C2: Por que todos os elementos da partida tem uma única chegada.

> **T308-PA**: Tá ok o que vocês disseram, no entanto agora nós vamos utilizar uma linguagem mais formal. O nosso conjunto de partida na função chama-se domínio da função, o conjunto de chegada chama-se contradomínio da função. Para que ocorra comportamento funcional não pode haver no domínio ambiguidades e nem exceções, não é mais repetições e sobra. Ok?
> **T309-D3**: Então é função quando, no Domínio, não tem ambiguidades e nem exceções.

O segmento acima destacado aconteceu no dia do 2° episódio de aplicação e foi utilizado por mim como mecanismo de retomada da aula anterior, uma vez que de um episódio a outro havia um lapso temporal de uma semana. Trata-se da última questão da primeira atividade, pedi que os sujeitos fizessem em casa. No segmento é possível constatar que os estudantes compreenderam o conceito de imagem da função e foram capazes de aplicar a situação-problema proposta, sendo que eu fui bastante enfática em fazê-los diferenciar a representação de conjunto da representação do elemento do conjunto, propositivamente para prepará-los para a próxima atividade que trata de variáveis.

As análises até aqui apresentadas, me levam a concluir que objetivo da atividade 1 foi alcançado com sucesso. Pois os sujeitos apresentaram indícios de que aprenderam a definição de função, bem como seu domínio, contradomínio e imagem, em níveis epistemológicos perceptivo/intuitivo, empírico e teórico. De modo que a intenção das intervenções foram satisfeitas, embora proponha-se fazer um ajuste ou acréscimo de intervenção escrita entre as questões 5 e 6, onde os estudantes tiveram dificuldades de entender e exigiu de mim uma expertise de improviso de IOMO's que talvez dificulte a aplicação da atividade por outro professor.

5. 2. 2. Episódio 2: Função como relação de dependência entre variáveis

O Episódio 2 aborda a atividade 2 da sequência didática cujo objetivo é reconhecer variáveis dependentes e independentes em uma situação problema. Esse episódio aconteceu no dia 18/11/2019, em condições pouco favoráveis, pois era véspera de um evento na escola em que estudantes e professores estavam envolvidos, fato que gerou um fluxo de entrada e saída da sala para os ensaios do evento. Houve assim, muitas quebras de raciocínio e, portanto, repetidas retomadas para a resolução das questões da atividade. Consegui extrair do episódio 223 turnos, do turno T285 ao turno T508.

A atividade 2 chama atenção para os tipos de variáveis, se quantitativas ou qualitativas, também requer dos estudantes interpretação de uma fotografia que retrata a venda de farinha no mercado do Ver-O-Peso, como ilustra o recorte abaixo:

> **T325-PA**: Agora me digam de que maneira essa farinha é vendida?
> **T326-Turma**: Por quilo! Por litro!
> **T327-PA**: Analisem a fotografia e me digam.
> **T328-Turma**: É por Litro!
> **T329-PA**: O que na fotografia indica que é por litro?
> **T330-Turma**: Aquela vasilha de medir 1 litro!
> **T331-PA**: Isso mesmo! Vocês estão fazendo a leitura da imagem. Vamos ler Juntos o comando da segunda questão! Entenderam?

Esses turnos são referentes a intervenção inicial e apresenta padrão de interação I-R-A (iniciação, resposta, avaliação). Inicialmente os sujeitos ficaram em dúvida sobre a unidade de medida da farinha, mas um exercício de investigação e argumentação na própria imagem revelou um elemento que esclareceu tal dúvida.

> **T337-PC**: Quanto é que é a variável é quantitativa?
> **T338-A1**: Quando a quantidade vai aumentando.
> **T339-A2**: Qualitativa quer dizer da qualidade da farinha.
> **T340-PC**: É na linha ou na coluna que é qualitativa?
> **T341-A1**: É na linha.
> **T342-PC**: E quando é quantitativa?
> **T343-A1**: Na coluna

No recorte acima é possível verificar um padrão de comunicação do tipo I-R-F (iniciação, resposta, feedback). Só o comando da questão 3 não deixou muito claro para os estudantes a análise a ser feita ao longo das linhas e colunas da tabela completada, necessitando de I-OMOS do professor colaborador para que os estudantes compreendessem o raciocínio a ser empregado.

> **T369-PC**: Observei aqui que alguns de vocês estão preenchendo pelas linhas, outros estão preenchendo pelas colunas. Vocês vão ver que fazendo pelas colunas vai ficar mais simples. Me explica como foi que você chegou nesses resultados.
> **T370-E1**: Eu fui somando um litro é quatro aí para dois litros eu fiz quatro mais quatro, aí para três eu acrescentei mais quatro até que eu cheguei no 20.
> **T371-PC**: Escreva aí então foi que você fez para 3 litros: 4+4+4
> **T372-E1**: Eu somei o 4 três vezes.
> **T373-PC**: Existe uma forma mais simples de você calcular essas somas sucessivas de mesmo valor, observe nessa aqui que se você fizer cinco mais cinco mais cinco que deu quinze, se você fizer 5 x 3 também da 15. Então nesse caso você pode fazer a multiplicação.
> **T374-Grupo E**: Ah! Entendi.
> **T375-PC**: Então me explique por quê que dois litros dá de r$ 4 deu 8.
> **T376-E1**: Por que é 4 x 2.

O recorte do episódio T369 ao episódio T376 mostra grupo E com um raciocínio bem básico quanto a conversão de somas sucessivas para multiplicação, o que mostra que dificuldades quanto a conhecimentos circunscritos tornou o processo de aprendizagem lento, tendo que se estabelecer um discurso dialógico e autoridade, uma vez que o professor colaborador precisou indicar a melhor operação a ser utilizada.

> **T425-D3**: Professora, aqui seria o preço vezes a quantidade.
> **T426-PC**: Isso! Faça assim com todos os outros. Explique para suas colegas.
> **T427-D3**: Então vai ficar T, que significa total a pagar, igual ao P, que é o preço, vezes Q que é a quantidade.
> **T428-D1**: Sim mas vai ficar tudo igual?
> **T429-D3**: Não para cada um vai ser um preço diferente. Nesse aqui fica T = 5Q.
> **T430-D2**: E essa de 6 reais fica 6Q.

No recorte acima, que se deu na discussão do grupo D sobre o segmento referente a questão 5, os estudantes precisavam representar algebricamente o padrão de comportamento para se calcular o valor a pagar em reais em função da quantidade de farinha em litros. Na revisão de literatura, que apresentei no capítulo 2 desta dissertação, verifiquei que a representação algébrica é uma tarefa de grande dificuldade de aprendizagem para estudantes, no teste de conhecimentos básicos essa dificuldade foi corroborada.

O grupo D conseguiu não só estabelecer uma expressão para o padrão de comportamento, como também generalizou para todos os casos, demonstrando consciência de suas estratégias de pensamento. Na seção 3.2 é possível verificar que o obstáculo da generalização pairou sobre a construção histórica do conceito de função por muitos séculos, no entanto, para esses sujeitos, na situação proposta, verifica-se o desenvolvimento da habilidade de generalizar um comportamento funcional por meio de uma expressão algébrica com os símbolos muito bem postos.

> **T442-PA**: Vocês concordam que essa relação entre a coluna da quantidade de farinha e a coluna do valor a pagar represente uma correspondência funcional?
> **T443-Turma:** Sim, não sobra e nem repete elementos.
> **T444-PA**: Então vamos ver aqui como vocês fizeram? utilizaram Q para quantidade de farinha e V para valor a pagar certo? Se esse é um comportamento funcional quem representa o domínio e quem representa o contradomínio?
> **T445-Turma**: Q é o domínio e V é o contradomínio.
> **T446-PA**: Certo! Então temos uma função de Q em V. E a expressão?
> **T447-Turma**: V=4Q.

> **T448-PA**: Então vocês estabeleceram uma expressão que diz que o valor que eu vou pagar é 4 vezes a quantidade de farinha, em outras palavras o valor que a pagar depende da quantidade de farinha. E mais ainda: Agora você pode calcular o valor a pagar diretamente nessa expressão sem precisar fazer adições sucessivas como vocês estavam fazendo. Eu quero comprar 2 L de farinha quanto eu vou pagar?
> **T450-Turma**: 8 reais.
> **T451-PA**: e 10 L?
> **T452-Turma**: 40 reais.

No recorte que vai do turno T442 ao turno T452 é possível perceber uma consolidação da aprendizagem da atividade 1 e sua aplicação em uma diferente situação. Nota-se na socialização que os grupos desenvolveram a questão 6 com tamanha autonomia de modo a fazerem diferentes escolhas quanto aos símbolos representativos das variáveis, essa atitude mostra que o conhecimento que está a caminho da formalização é fruto do pensamento do grupo e não uma reprodução do pensamento do professor.

> **T461-PC**: Pessoa comprar 10 litros de farinha vai pagar quanto?
> **T462-A2**: Vai ser a mesma coisa daqui ó. É só substituir o 10.
> **T463-A1**: É só colocar aqui no lugar do X o 10 né?
> **T464-A5**: Tem que fazer de todos?
> **T465-A2**: Dos três né.
> **T466-PC**: Vocês substituem nas expressões que vocês criaram.
> **T467-A1**: Então fica, 4 vezes 10, 5 vezes 10 e 6 vezes 10.
> **T468-PC**: Como ficou a questão 8? Quanto se pode comprar com r$ 60?
> **T469-A5**: Fui dividindo por cada preço. 60 dividido por 4 deu 15, 60 dividido por 5 deu 12, e 60 dividido por 6 deu 10.

O Recorte acima é referente ao segmento da questão 8, haja vista que a questão 7 foi desenvolvida sem muitos problemas. Destaquei esses turnos por mostrarem que houveram estudantes capazes de realizar a operação inversa por meio da expressão por eles construída. Na seção 2.2 verifiquei que no que tange a calcular uma variável a partir da outra (dificuldade 6), a maior dificuldade se dá em calcular a variável independente a partir da dependente, no entanto estes estudantes superaram esse obstáculo e socializaram com os demais grupos.

> **T496-PA**: Bom, eu vou só esclarecer algumas coisas para vocês. Percebam a diferença entre variável e unidade de medida vocês estão relacionando as variáveis valor a pagar e quantidade de farinha. Essas são as variáveis, mas qual é a unidade de medida dessas variáveis? Valor a pagar a unidade de medida é reais e a quantidade de farinha está em Litros. Vocês souberem fazer essa diferença o professor de física de vocês não agradecer muito. Eu vi que algumas pessoas utilizaram o L para representar a quantidade de farinha. Não tem nenhum problema fazer isso desde que você tenha consciência de que L está representando a quantidade de farinha e é medida em litros. Que a variável é a quantidade de farinha e "litros" é a sua é a unidade de medida. Outra coisa, se eu

> representar apenas uma expressão isso aqui é suficiente para dizer que é uma função?
> **T497-Turma**: Sim!
> **T498-PA**: Vocês tem certeza? Do que é composta uma função?
> **T499-Turma**: Domínio! Contradomínio!
> **T500-PA**: E aonde aqui tá mostrando o domínio contra domínio? Isso aqui é apenas uma equação, mostra como os elementos de dois conjuntos se relacionam, mas não mostra quem são esses conjuntos. Então para que essa expressão possa representar um comportamento funcional é necessário que eu defina quem é o conjunto domínio e quem é o conjunto contradomínio, aí sim a minha representação deste o comportamento funcional está completa. Mas aí você pergunta: professora, como eu identifico ou defino isso? Bom, existem várias maneiras uma seria o contexto de como você fala da situação, a expressão acompanhada de um texto e que especifique ao menos o domínio, ou quando você usa esta notação aqui que usa a seta mostrado de onde sai e para onde vai, seguida dessa expressão.

No recorte do turno T494 ao turno T500 a abordagem comunicativa foi predominantemente não interativa/de autoridade. Fiz questão de esclarecer alguns pontos, que seriam necessariamente objeto de estudo mas que julgo importante: diferenciar variável de sua unidade de medida e enfatizar que apenas a expressão algébrica não define uma função se estiver definido seu domínio e contradomínio.

> **T501-PA**: O aluno B2 falou agora há pouco que o valor a pagar depende da quantidade de farinha. Isso era exatamente o ponto onde nós queremos chegar. Então bem anota isso aí no espaço de formalização do material de vocês. Essas variáveis que dependem de outras variáveis nós chamamos de variáveis dependentes, e essas variáveis que dominam a variação são chamadas de variáveis independentes. Notem que as variáveis Independentes pertencem ao conjunto domínio da função e as variáveis dependentes pertencem ao conjunto contradomínio da função. Por favor copiei a formalização.
> **T502-A5**: Então a quantidade de farinha a uma variável independente e o valor a pagar é uma variável dependente.
> **T503-PA**: Muito bem!

Nesse recorte mostro como me apropriei do conceito pré-formal do estudante para chegar uma formalização de variáveis dependentes e independente. Senti o objetivo da atividade contemplada na fala da aluna A5, que conseguiu classificar devidamente as variáveis da situação inicial da fotografia.

> **T507-A5**: O tempo é a variável independente e espaço a variável dependente. Porque espaço depende do tempo.
> **T508-PA**: Muito bem.

No seguimento da Intervenção avaliativa restritiva verifiquei que os sujeitos conseguira desenvolver com sucesso de modo a classificarem os tipos de variáveis em diferentes situações e contextos de forma satisfatória.

> **T519-PA**: Na segunda atividade nós partimos de uma reportagem da venda da farinha no ver-0-peso, vimos o que era uma variável quantitativa e variável quantitativa. Também vimos o que é uma variável dependente e independente. Agora chamo a atenção para a identificação do domínio nas diferentes representações de função. Vejam que no diagrama e no quadro por exemplo, você tem a delimitação do domínio no conjunto de partida ou na primeira coluna do quadro, porém a representação em equação precisa de informações a mais sobre esse domínio, por exemplo, na venda da farinha, poderíamos ter uma quantidade de farinha negativa?
> **T520-Turma**: Não!
> **T521-PA**: Então para ser função, além da equação y=4x, por exemplo, temos que dizer que x pertence a um conjunto de números inteiros positivos ou números naturais, pode ter zero?
> **T522-Turma**: Pode!
> **T523-PA:** Agora, gostaria que vocês se lembrassem de nossa oficina, lembram que nós substituíamos qualquer valor na equação para calcular? Sabem como chamamos esse valores quaisquer? São valores arbitrários que utilizamos numa correspondência qualquer. Mas numa função não é assim. Numa função os valores a serem substituídos, eles variam, eles percorrem por um domínio pré-estabelecido. Então, perceberam a importância de estar bem definido o domínio? Alguma dúvida?
> **T524-Turma**: Não

Os turnos acima é referente ao segmento de retomada da atividade 2, feita no início do episódio 3. Devido ao curto tempo para realizar a atividade apenas enfatizei a diferença que há entre uma equação e uma função. Gostaria de ter realizado mais exemplos e reforçado essa diferença importante, apresentada na seção 3.2.1 sobre a variação que ocorre no comportamento funcional.

Diante do que foi apresentado sobre o episódio de aplicação da sequência didática para o ensino do conceito de função, posso afirmar que a atividade 2 possui potencialidade para o ensino e aprendizagem, articulada a atividade 1, por promover nos alunos a capacidade de expressar em seu discurso níveis epistemológicos perceptivo/intuitivo, empírico e teórico de modo a serem capazes de reconhecer e diferenciar a natureza de variáveis dependentes e independentes de um comportamento funcional.

5. 2. 3. Episódio 3: Função e suas representações.

O episódio 3, trata-se da atividade 3 da sequência didática, cujo objetivo é tratar, converter e reconhecer diferentes representações de função, dando ênfase aos critérios de não exceção e não ambiguidade presentes na representação gráfica. Esse episódio aconteceu no dia 27/11/2019 em 2h/a, 160 turnos, do turno T509 ao T669.

Esse episódio também aconteceu em condições pouco favoráveis, haja vista que na escola ao lado aconteciam jogos escolares, cujos ruídos interferiram no bom andamento da atividade, bem como dificultou a audição para a transcrição. Mesmo assim, consegui extrair trechos suficientes e necessários para análises a seguir apresentadas.

T538-B1: Por que tu colocou o 0 pro 2? Ele fica sozinho.
T539-B2: Amiga, não é. Todos têm que ligar?
T540-B1: Não, nem todos.
T541-B3: olha: -1 com 1, 0 com 2, 1 com 3, e o 2 fica sem ponto.
T542-B1: essa primeira não é função, por que tem exceção.

Nos turnos acima extraídos da discussão no grupo B sobre a questão 2, item a, verifica-se que a aluna B2 intuiu que por não ter correspondente para um elemento do domínio, o correspondente natural seria zero, erro que foi corrigido na fala da aluna B1 que concluiu e convenceu o restante do grupo sobre o porquê daquela situação não ser função, o que mostra que a intenção dessa intervenção foi cumprida.

T569-C3: Essa terceira não é porque tem aquilo mesmo como é o nome?
T570-C6: Ambiguidade
T593-PA: E a situação 3 é função?
T594-Turma: Não!
T595-PA: Por que?
T596-Turma: Tem ambiguidade no 2.
T597-PA: Isso ambiguidade no domínio. Como foi que essa ambiguidade se apresentou no gráfico de pontos? O 2 correspondendo com 3 e com 4?
T598-D3: Tem dois pontos na mesma direção

Neste seguimento, observei que sobre a situação 3, os estudantes perceberam a ambiguidade no gráfico, com a ajuda do aluno D3, que interviu no grupo C, de modo a complementar o raciocínio pré-formal construído pelo grupo, fechando assim a questão 2 com sua intenção satisfeita.

T577-D3: Acho que sim. A questão três é só de responder né.
T578-PC: Na 3 façam as retas verticais passando por cada valor de x e veja se passa pelo ponto.
T579-D3: Ah entendi. Então no caso da situação 1, quando x igual a 2 essa reta não passa no ponto por que tem exceção.
T580-PC: isso! Façam isso em todas as situações verificando onde há exceção e onde há ambiguidade.

O estudante D3, foi o que mais interagiu de forma colaborativa para o grupo dele e para a turma, demonstrando possuir uma base cognitiva mais experiente e possuir valores sociais de autonomia, autoconfiança e cooperação, influenciando outros colegas agirem da mesma forma, o que me ajudou bastante na construção do conhecimento coletivo da turma.

> **T606-PA**: Então quer dizer que para que um gráfico seja função, para todos os valores de x, esse reta tem que cruzar o domínio e algum ponto do gráfico. E a b) Em qual das situações as retas intersectam valores $x \in$ A que possuem mais de um correspondente $y \in$ B?
> **T607-Turma**: A situação 3.
> **T608-PA**: Por quê?
> **T609-Turma**: Porque cortou 2 pontos.
> **T610-PC**: Então aprimorando, a reta traçada só pode intersectar o domínio e um único ponto. Vejamos o item c).......Quais têm esse comportamento?
> **T611-D3**: As que são função!

Os turnos acima são referentes aos seguimentos de socialização sobre o item d, da terceira questão, cujo objetivo era fazer com que os estudantes estabelecessem um padrão de reconhecimento do comportamento funcional na representação gráfica. Mais uma vez o estudante D3 influenciou na compreensão dos colegas.

> **T617-C2**: Quando não tem ambiguidade e exceção no domínio.
> **T618-PA**: Mas como vocês reconhecem isso no gráfico.
> **T619-C2**: fazendo as ligações.
> **T620-PA**: O que nós fizemos ali? Traçamos retas, algumas retas não cruzaram pontos do gráfico. O que é isso?
> **T621-C6**: Exceção.
> **T622:PA**: E quando essa reta corta mais de um ponto do gráfico, o que acontece?
> **T623:C2**: Ambiguidade.
> **T624:PC**: E quando isso não acontece, o que vocês concluíram?
> **T625-C2**: Todas a retas cortam um único ponto.
> **T626-PC:** Certo! Então todas essas retas que passaram o domínio devem intersectar um único ponto do gráfico, para que ele represente uma função.

Alguns estudantes necessitaram de mais intervenções do professor colaborador para chegarem ao entendimento que se pretendia, como foi o caso do grupo C, de onde se extraiu os turnos acima. Foi adotado o padrão de interação I-R-A (iniciação, resposta, avaliação) e abordagem comunicativa interativa/ de autoridade, de modo que as I-OMOS realizadas foram gradualmente levando-os a compreensão pretendida, sobre como as retas verticais levam a reconhecer uma função em um gráfico.

> **T637-PA**: Vamos lá. Temos um empasse aqui. O grupo F diz que o item C é função e o grupo A diz que não é função. Por que você diz que é função?
> **T638-F4**: Por que a reta só corta um ponto.
> **T639-Grupo A**: Mas assim corta 2 pontos.
> **T640-PA**: Tem problema assim pessoal? Na horizontal cortar o gráfico dias vezes?

T641-Turma: Não.
T642-PA: Essa condição é para retas verticais. Vamos colocar num diagrama essa situação. Perceberam? Esta tem ambiguidade no domínio e esta ambiguidade no contradomínio. A reta vertical vai intersectar apenas o domínio.
T643-A1: Ah tá, entendi.

Após a formalização, pedi que os grupos fizessem a questão 4,intervenção avaliativa restritiva, os turnos acima mostram um impasse conceitual sobre o item c, o que gerou uma discussão bem produtiva e níveis epistemológicos, haja vista que se o grupo A tivesse se detido a definição, não teria gerado a dúvida. O que só foi sanada quando na lousa, ilustrei dois diagramas representando a ambiguidade no domínio e no contradomínio e fazendo a conversão de ambas para a representação gráfica, levando-os a perceberem que a reta auxiliar para a verificação deve ser vertical apenas (intersectando o domínio).

Os turnos a seguir são sobre a questão 5 (intervenção avaliativa aplicativa), os turnos abaixo, me deixaram satisfeita quanto ao reconhecimento do domínio da função, pois os estudantes foram capazes de extrair essa informação, apresentada de forma implícita no enunciado da questão.

T655-PA: Nesse caso de quanto a quanto vai ser o domínio?
T656-Turma: de 1 a 60! De 0 a 60.
T657-PA: Pode ser de 0 a 60. Se eu nada comprar, nada pagarei. Agora vamos ver por partes como fica o menor valor e maior valor em cada intervalo. De zero a 10?

Por se tratar de uma função formada por três intervalos de domínio, pedi aos estudantes que calculassem a menor e o maior imagem de cada intervalo, para promover as comparações pretendidas.

T664-PA: Bom, vamos imaginar que você vá comprar 10L de farinha e vê essa promoção. Olhando para o gráfico que construímos, o que seria mais vantajoso? Comprar 10 ou 11 L.
T665-Turma: 11L.
T666-C1: Economiza R$ 5,50.
T667-F3: E ainda sobra para o açaí.
T668-Turma: Risos
T669-PA: Agora o que seria economicamente mais vantajoso, comprar 30L ou 31L?
T670-Turma: 31.
T671-PA: Então você compraria mais pagando menos.
T672-F3: com a sobra daria para comprar 1L de açaí

Nos turnos acima, percebe-se que os estudantes, em especial, a aluna F3, conseguiram analisar e decidir pela situação economicamente mais vantajosa e ilustrar como uma economia, gerada pelo uso estratégico da matemática, pode gerar poder de compra para outros interesses. Para mim, essa atividade foi a “cereja do bolo” de todo o processo, foi sabiamente sugerida pela banca externa dessa dissertação no momento do examede qualificação e agregou o caráter transdisciplinar a atividade e o indício de que os estudantes serão capazes de aplicar os conhecimentos adquiridos em situações adidáticas, isto é, fora do contexto escolar.

> **T663-PA**: Agora eu gostaria que vocês me dissessem se isso estudamos aqui, sobre conceito de função, análise de gráfico, é importante para a vida prática de vocês.
> **T664-Turma**: Sim!
> **T665-PA:** De que forma**.**
> **T666-Turma**: Para comparar preços! Variações de valores! Ver como comprar mais pagando menos.
> **T667-PA**: Nesse sentido, vocês acham que a matemática ajuda vocês se tornarem capazes de analisar se uma situação é ou não vantajosa economicamente e evitar que você seja lesado?
> **T668-Turma**: Sim!

Reforçando o caráter adidático que a sequência didática “Conceito de função e suas linguagens” promoveu nos estudantes, os turnos acima revelam que eles mudaram suas atitudes quanto a matemática, se propondo a utilizar o conhecimento adquirido para comunicar, argumentar e se tomar decisões mais estratégicas e conscientes em seu cotidiano.

Assim, possoafirmar que a atividade 3 da sequência didática experimenta foi validada, obtendo êxito nos aspectos epistemológicos: perceptivo/intuitivo, empírico e teórico, para o que verifiquei potencialidade para o ensino das representações do conceito de função, desde que articulada com as atividades 1 e 2.

5. 2. 4. Outras análises

Devo admitir que cometi falhas procedimentais, por não ter passado lista de frequência em todos os episódios, de modo que não tenho como dizer precisamente quem participou de todos os episódio ou quem faltou alguns, apenas sei quem participou ou não da oficina e quem participou de algum episódio de aplicação da SD. Conforme um novo aluno se apresentava, eu o incluía a algum grupo, em geral o crachá com letra seguida do número 5 ou 6.

Também não recolhi as atividades escritas por dois motivos: a) o tempo foi muito curto, de modo que os estudantes pouco escreviam, mais falavam suas estratégias e conclusões, o que de fato mais me interessava; b) eles pediram encarecidamente para ficar com o material, não poderia negar isso a eles.

Outro ponto que pode ter dificultado um resultado quantitativo mais elevado em termos de desempenho foi o fato de nem eu, nem o professor colaborador da turma de controle termos realizado exercícios de fixação antes do teste, e neste ponto, o fator limitador foi o tempo, haja vista que estávamos ao final do ano letivo ás vésperas das avaliações finais.

Por outro lado, foi uma decisão sábia o uso de crachás e a orientação constante, chamamento pelo código de cada estudante, para uma transcrição mais precisa e identificação correta dos sujeitos.

Assim, ficam essas observações para uma futura reaplicação, de modo a se fazer outras análises, avaliando inclusive a capacidade de escrita dos estudantes na aplicação e com a oportunidade de praticar o conhecimento adquirido por meio de lista de exercícios, pesquisas, atividades em grupo.

5. 2. 4. 1. Análise quantitativa sobre o teste de verificação de aprendizagem.

A seguir, apresento alguns resultados quantitativos dos estudantes no teste de verificação de aprendizagem, tanto na turma de controle, quanto na turma de aplicação, tais resultados não são fonte direta de minha análise, apenas um parâmetro comparativo, haja vista que meu interesse não é apontar a sequência didática estruturada por UARC como sendo a melhor alternativa didático-pedagógica no ensino de Matemática em detrimento de outras metodologias, haja vista que quanto mais diversificada for a aula de Matemática, maior será o envolvimento do estudante.

O teste aplicado após a finalização da aplicação da SD é composto de 7 questões e está no apêndice deste texto. Foi atribuído às questões 1, 6 e 7 o valor de 2 pontos e as demais valiam 1 ponto, totalizando 10 pontos. A atribuição diferenciada de pontos se deu pelo nível epistemológico exigido e por necessitar desenvolver argumentação escrita, seja em linguagem Matemática ou materna. De modo que as questões de maior valor (1, 6, 7) combinam pelo menos dois níveis epistemológicos (perceptivo/intuitivo, empírico, teórico) exigindo um nível maior de análise e raciocínio.

Quadro 23:Distribuição de pontos no teste de aprendizagem

Questão	Q-1[5]	Q-2	Q-3	Q-4	Q-5	Q-5	Q-6	Q-7	Total
Pontuação	2	1	1	1	1	1	2	1	10

Fonte: Elaborado pela autora (2020)

No Quadro 24 constam os resultados do teste de verificação de aprendizagem aplicados ao final nas duas turmas, aplicação e controle:

Quadro 24: Resultado quantitativo da turma de controle.

SUJEITOS	Q 1-A	Q 1-B	Q 1-C	Q 1-D	Q 2	Q 3	Q 4	Q 5	Q 6	Q 7	NOTA
EC-1	0	0	0	0,5	1	0	1	0,25	0	0	2,75
EC-2	0	0	0	0	0	0	0,4	0,25	0	0	0,65
EC-3	0	0	0	0,5	0	1	0,2	0,25	2	0	3,95
EC-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EC-5	0	0,25	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	1,25
EC-6	0	0	0	0	0	0,3	0,6	0	1	0	1,9
EC-7	0,5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1,5
EC-8	0,5	0	0	0	0	1	1	0	0	0	2,5
EC-9	0,5	0	0	0	0	1	1	0	1	0	3,5
EC-10	0,5	0	0,5	0,5	1	1	1	0	0	0	4,5
EC-11	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0	0,5
EC-12	0,5	0	0	0	0	1	0,8	0,25	0	0,5	3,05
EC-13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EC-14	0,5	0	0	0,5	0	0	1	0	1	0	3
EC-15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EC-16	0,5	0	0	0	0	1	1	0	1	0	3,5
EC-17	0,5	0	0,5	0,5	1	0,3	1	0	1	1	**5,8**
EC-18	0,5	0	0	0	0	1	1	0,25	1	0	3,75
EC-19	0,5	0	0,5	0,5	1	1	0,8	0,25	1	1	**6,55**
EC-20	0,5	0,25	0,5	0,5	0	0	0,6	0	0	0	2,35
EC-21	0,5	0	0	0	1	1	0,4	0,25	0	0	3,15
EC-22	0	0	0,5	0,5	0	1	0	0	0	0	2
EC-23	0,5	0	0	0,5	0	0,3	0,4	0	1	0	2,7
EC-24	0,5	0,25	0,5	0,5	0	0	1	0	0	0	2,75
EC-25	0	0	0,5	0,5	0	0	0,2	1	0	0	2,2
EC-26	0,5	0	0	0,5	0	0	1	0,25	1	0	3,25
EC-27	0,5	0	0,5	0,5	1	1	0,8	1	0	0	**5,3**
EC-28	0,5	0	0,5	0,5	0	0	0	0,25	0	0	1,75
EC-29	0	0	0,5	0,5	1	0,3	0	0,25	0	0	2,55
EC-30	0,5	0	0,5	0,5	0	0,3	0,8	0,25	2	0	4,85
% Acertos	**60**	**5**	**40**	**56,66**	**23**	**41**	**56**	**17,5**	**21,66**	**4,16**	**32,5**

Fonte: Elaborado pela autora (2020)

[5] A questão 1 possuem itens a, b, c e d, atribuídos 0,5 pontos a cada.

Sobre a turma de controle, com 30 alunos, retomo que o professor usou como estratégia de ensino a aula clássica com definição seguida de exemplos e exercícios, expositiva dialogada tendo como suporte o livro didático Balestri (2016), um dos livros analisados na revisão de literatura e avaliado como o que mais se aproxima dos objetivos de aprendizagem aqui adotados.

Após o episódio de aprendizagem, o teste foi aplicado para a turma de controle. Que, conforme o quadro 26 obteve um resultado geral quantitativo de 32,5% de acertos, de modo que apenas três sujeitos (10% do total) obtiveram nota maior que 5, três obtiveram nota 0 (zero) e apenas nas questões Q1-A, Q1-D, e Q-4 a turma obteve um percentual de acertos maior de 50%.

Quadro 25: Resultado quantitativo da turma de controle.

SUJEITOS	**Q 1-A**	**Q 1-B**	**Q 1-C**	**Q 1-D**	**Q 2**	**Q 3**	**Q 4**	**Q 5**	**Q 6**	**Q 7**	**NOTA**
A1	0,5	0,25	0,5	0,5	1	1	0,6	0,5	2	1,5	**6,85**
A2	0,5	0,25	0,5	0,5	1	0,3	0,8	1	2	1,5	**6,85**
A3	0,5	0,25	0,5	0,5	1	1	0,6	1	2	1	**8,35**
A4	0,5	0,25	0,5	0,5	0	1	0,8	1	2	0	**6,55**
B1	0	0	0	0	0	0,3	0,8	1	2	0	4,1
B2	0	0	0	0,5	1	0,3	0,4	1	2	0	**5,2**
B3	0,5	0	0	0	0	1	0,4	0,5	1,5	0	2,4
B5	0,5	0,25	0,5	0,5	1	1	0,8	0,5	1,5	0	**5,05**
C3	0,5	0	0,5	0,5	1	0	0,8	1	1	0	**5,3**
C2	0	0	0	0,5	1	1	0	1	2	2	**7,5**
C4	0,5	0	0,5	0,5	0	0,3	0	0	0,5	0	2,3
C5	0,5	0	0	0	0	0,3	0,8	0,5	0	0	2,1
C6	0,5	0,25	0,5	0,5	1	1	0,4	0,5	2	0	**6,65**
D1	0	0	0	0	0	0,3	0,8	1	1	0	3,1
D2	0,5	0,25	0,5	0,5	0	1	0,6	1	1,5	0	4,35
D3	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	0,8	1	2	0	**7,8**
D4	0,5	0	1	0	0	1	0,6	1	1	0	**5,1**
D5	0,5	0	0	0,5	0	1	0,6	1	1,5	0	3,6
E1	0	0	0	0	0	1	0,6	0,5	0,5	0	2,6
E2	0	0,5	0,5	0,25	0	0	0,8	0	0	0	2,05
E3	0,5	0,25	0	0,5	1	0,3	0,2	0,5	1	0	4,25
E4	0	0	0	0	0	0,3	0,8	1	1	0	3,1
F2	0	0,25	0,5	0,5	0	1	0,8	1	0	0	4,05
F3	0	0	0,5	0,5	0	1	0,6	1	1,5	0	3,6
F4	0	0	0	0	0	1	0,2	1	1,5	0	2,2
F5	0,5	0,25	0,5	0,5	0	1	0,8	1	1,5	0	4,55
% Acertos	**61,53**	**26,8**	**61,53**	**67,30**	**38,46**	**70,76**	**59,23**	**78,84**	**46,1**	**5,76**	**51,63**

Fonte: Elaborada pela autora (2020)

Na turma de aplicação, detalhei no início deste capítulo como se deu o procedimento, em que desenvolvi uma metodologia interativa de ensino com criação de uma espaço onde se promoveu a investigação, argumentação e vários padrões de comunicação com a intenção de promover a construção autônoma de conhecimento prezando pela qualidade do processo de ensino e aprendizagem.

A turma do dia da realização da oficina de conhecimentos básicos ao dia do teste de verificação de aprendizagem, ao todo 37 sujeitos participaram na turma de aplicação. Apenas 26 estudantes realizaram o teste final de aprendizagem.

Olhando para o caráter quantitativo no quadro 24 verifiquei que a turma de controle obteve um resultado geral de 51,63 % de acertos, 11 (42,3 % do total) estudantes alcançaram a nota superior a 5 e a turma obteve percentual de acertos superior a 50% nas questões Q1-A, Q1-C, Q1-D, Q3, Q4 e Q5, e nenhum aluno obteve nota zero.

Nessa turma, inclusive a aluna PCD, D4, apresentou desempenho regular, conforme a média da turma, mesmo tendo ela realizado o teste de verificação de aprendizagem individualmente sem a ajuda das companheiras de equipe, que sempre a auxiliam durante as atividades.

Fazendo uma análise comparativa entre as turmas de controle (TC) e de aplicação (TA) por objetivos de aprendizagem levantados na seção 4.5, apresento, no quadro 26, mais uma potencialidade da sequência didática “Conceito de função e suas linguagens”.

Quadro 26: Comparação por objetivos de aprendizagem.

OBJETIVO		QUESTÕES	TC (%)	TA (%)
OB-01	Identificar variáveis envolvidas em situação-problema.	Q1-A	60	61,53
0B-02	Identificar a natureza das variáveis (velocidade, tempo, peso, preço)	Q1-A	60	61,53
OB-03	Identificar a relação entre variáveis (independentes x dependentes).	Q1A; Q4	58	60,38
OB-04	Transcrever uma situação-problema (real/fictícia) da linguagem escrita (língua materna) para a linguagem Matemática (diagrama, gráficos, pares ordenados, equações, tabelas, quadros, etc.) e vice-versa.	Q1-B; Q2; Q6	16,55	37,72

OB-05	Utilizar diferentes símbolos (diferentes de *x* e *y*) para representar variáveis independente e dependente.	Q4	56	59,23
OB-06	Calcular uma variável a partir de outra variável.	Q1-C; Q1-D	48,33	64,41
OB-07	função.	Q7, Q6	12,91	25,93
0B-08	Identificar/definir/calcular o conjunto de partida (domínio) e o conjunto de chegada (contradomínio).	Q6; Q1-B; Q4	27,55	44,04
OB-09	Identificar diferentes representações de funções.	Q3; Q5	29,25	74,82
OB-10	Resolução de situação-problema (real/fictícia) que envolvem o conceito de função.	Q1, Q6	40,83	52,65
		% Geral por turma	**40,94**	**54,22**

Fonte: Elaborado pela autora (2020)

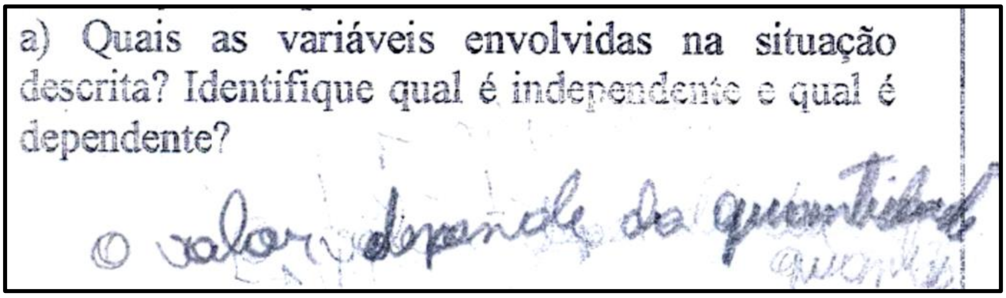
Ao analisar quantitativamente por objetivos de aprendizagem, o resultado no teste de aprendizagem na turma de aplicação (TA) se mostrou maior que na turma de controle (TC). O que me faz inferir que a qualidade no processo de aprendizagem interferiu positivamente no desempenho dos estudantes, ainda que não seja este o foco de minha pesquisa. Mas acabou sendo uma inferência acessória que pode ser mais minuciosamente verificada numa reaplicação futura.

Não vejo as metodologias adotadas, por mim e por meu colaborador, como conflitantes, minha recomendação para potencializar também o desempenho, seria aliar a SD validada com o livro didático para prática de exercícios fixação, que promovam níveis epistemológicos aqui estudados, podendo ser também recorrido no momento da formalização.

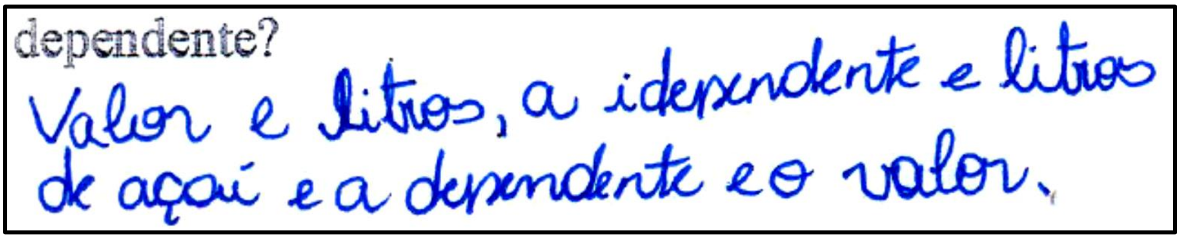
5. 2. 4. 1. Análise de uso de argumentação escrita no teste de aprendizagem.

A seguir apresento alguns trechos do teste de verificação de aprendizagem para ilustrar a potencialidade da sequência didática ”Conceito de função e suas linguagens” quanto a argumentação escrita em língua materna e linguagem Matemática, habilidade apontada como sendo de difícil aprendizagem na pesquisa com estudantes egressos do 1° ano do ensino médio na seção 2.2 e explorada nas questões Q1, Q2, Q6 e Q7. Selecionei alguns recortes das resoluções dos teste da turma de aplicação para ilustrar a análises feitas a seguir.

Na questão 1 verifiquei que os estudantes foram capazes de identificar as variáveis da situação, bem como classifica-las com dependente ou independente.

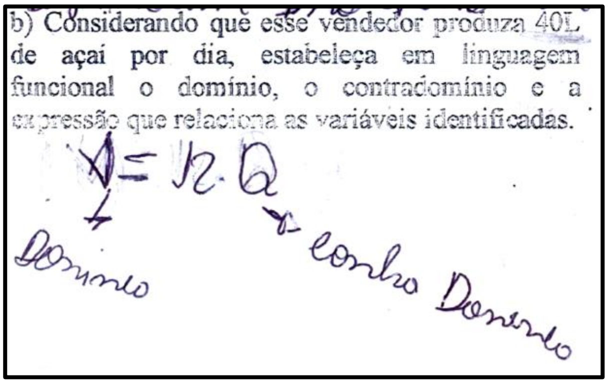

a) Quais as variáveis envolvidas na situação descrita? Identifique qual é independente e qual é dependente?

O valor depende da quantidade


dependente?

Valor e litros, a idependente e litros de açaí e a dependente e o valor.

No item b da primeira questão também identifiquei a capacidade de estabelecer o domínio e contradomínio da função bem como a expressão que define a regra de associação das variáveis, de forma bem representada.


b) Considerando que esse vendedor produza 40L de açaí por dia, estabeleça em linguagem funcional o domínio, o contradomínio e a expressão que relaciona as variáveis identificadas.

$V = 12 \cdot Q$

Dominio

contra Dominio

b) Considerando que esse vendedor produza 40L de açaí por dia, estabeleça em linguagem funcional o domínio, o contradomínio e a expressão que relaciona as variáveis identificadas.

$f = 12 . l$

$f = 12 . 40$

$f(l) = 480.$

No itens c e d os estudantes conseguiram calcular uma variável a partir da outra, aplicando corretamente a expressão por eles elaborada, embora adotando estratégias diferentes de substituição.

c) Utilizando a expressão algébrica estabelecida acima, calcule o valor arrecadado em um dia em que foi vendido 27L de açaí, isto é $f(27)$.

$f(27) = 12 . 27$

$F(27) = 324$ reais

c) Utilizando a expressão algébrica estabelecida acima, calcule o valor arrecadado em um dia em que foi vendido 27L de açaí, isto é $f(27)$.

$f(l) = 12 . l$

$f(l) = 12 . 27$

$f(l) = 324.$

d) Determine quantos litros de açaí precisam ser vendidos para que seja arrecadado R$ 360,00.

$V = 12 \cdot Q$ $\quad Q = 30$ litros

$360 = 12Q$

$\frac{360}{12} = Q$

d) Determine quantos litros de açaí precisam ser vendidos para que seja arrecadado R$ 360,00.

$f(\ell)=12\cdot\ell$ $\quad \ell = 30$ litros.

$f(\ell)=12\cdot 30$

$f(\ell)=360,00$

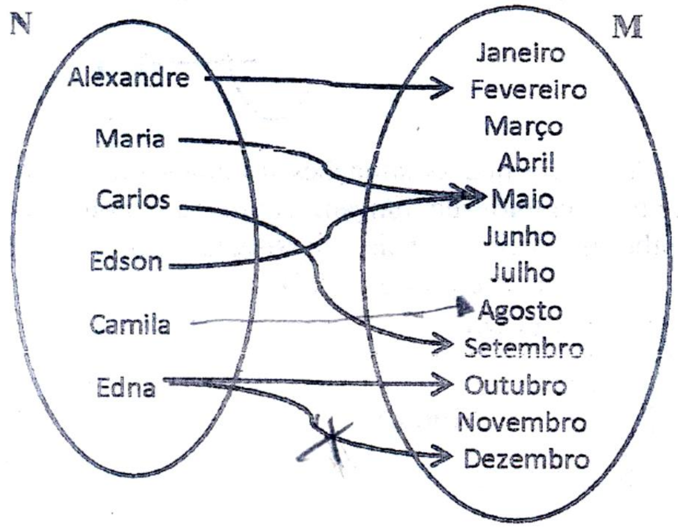
Sobre a questão 2 verifiquei que a representação recorrida foi de a tabela ou quadro. Utilizada de forma correta com as variáveis, em geral, bem colocadas.

litros	Valor (R$)
1	12,00
2	24,00
3	36,00
.	.

X	Quant.	Valor	Y
	1	12,00	
	2	24,00	

Na questão 6 foi onde verifiquei maior argumentação e utilização dos conceitos aprendidos, bem como pude verificar como a definição de função foi tratada na tomada de decisão para as manipulações necessárias no contra-exemplo de função. Alguns estudantes utilizaram, a lingua materna, outros a linguagem matemática e outros conciliaram as duas.

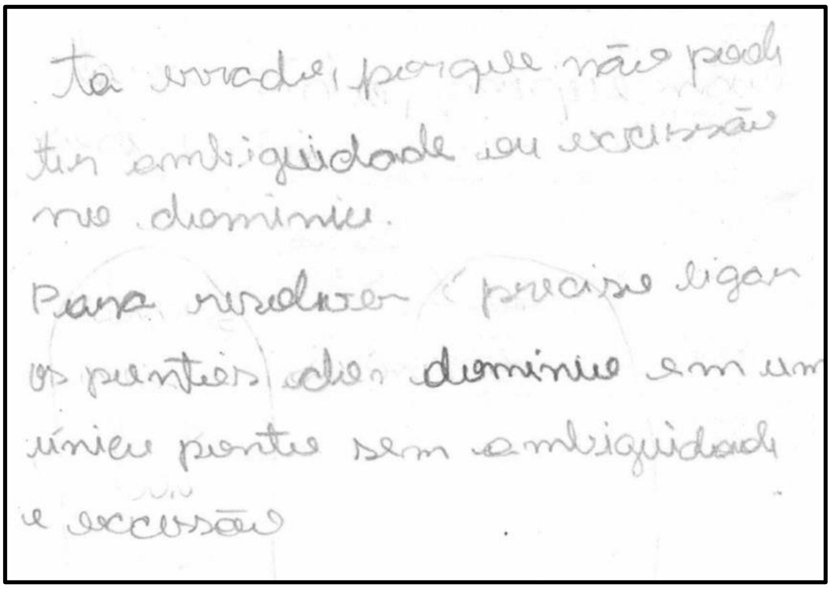
6) O diagrama abaixo ilustra os meses de nascimento de algumas pessoas. Explique, segundo a definição de função, por que algumas correspondências estão equivocadas e proponha uma maneira de corrigir o equívoco.

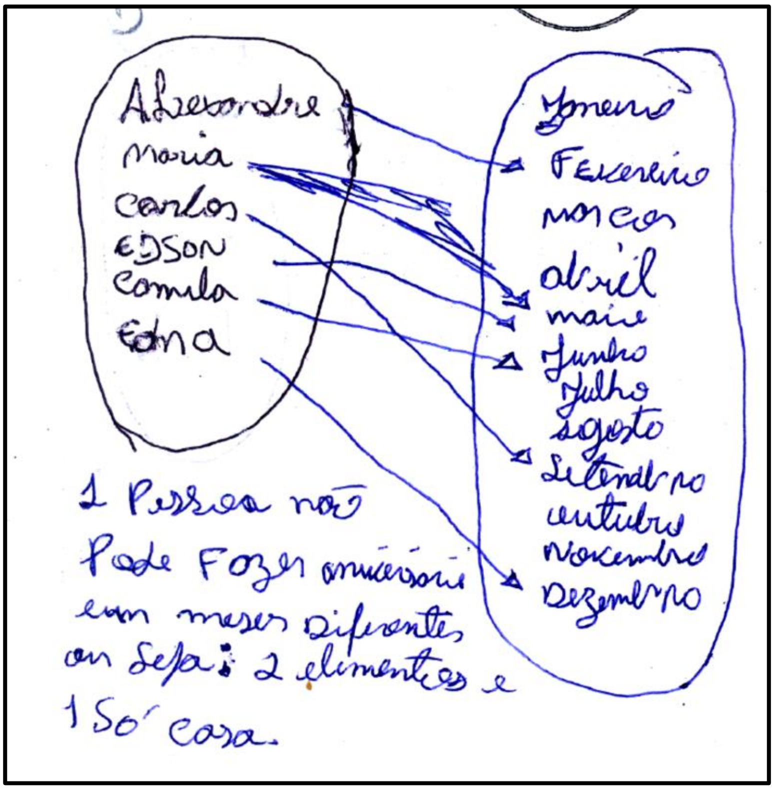


Uma pessoa não pode nascer em dois meses, e uma não pode ficar sem nascer em algum mês.

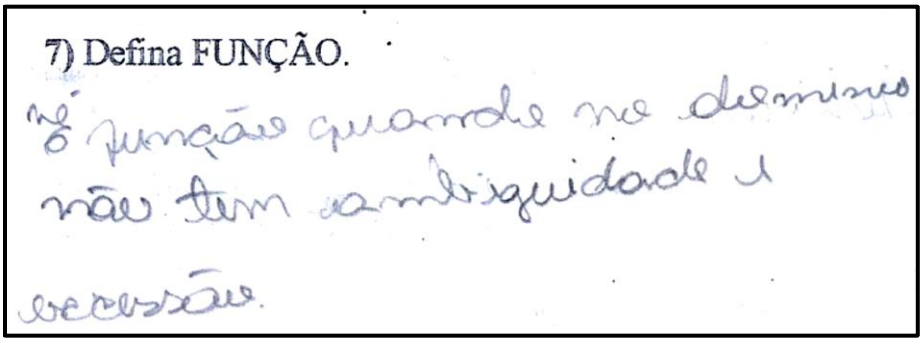
Bom quer ambiguidade e
Exceção, Porque os Componentes
do domínio ou Estão sem correspon
dência ou um unico elemento
se ligou mais de uma vez. Parare
resolver temos que conectar em
um unico ponto os elemento
sem querer exceção ou ambiguida
de

A Camila deveria estar ligada
a algum mês, deveríamos ligar
ela ao seu mês.
A Edna não nasceu em outubro
e dezembro, deveria eliminar
uma das seta.


tá errado, porque não pode
tem ambiguidade ou excessão
no domínio.
Para resolver é preciso ligar
os pontos do domínio em um
único ponto sem ambiguidade
e excessão.

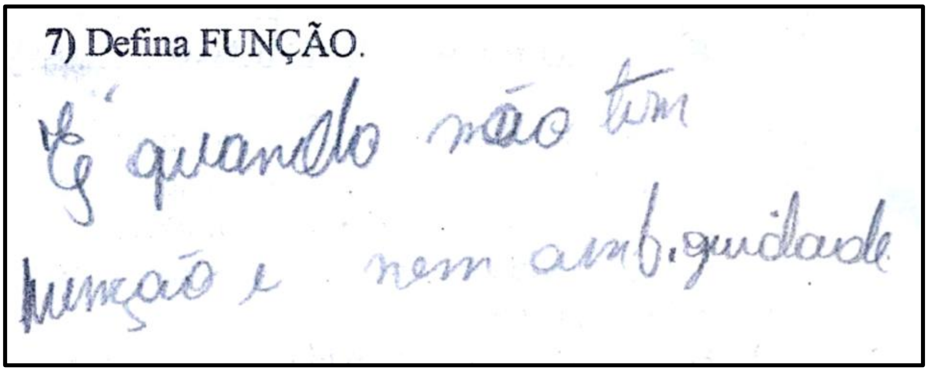


Sobre a questão Q7 houveram poucas respostas algumas mais elaboradas, outras nem tanto, mas todas tendendo para a linguagem teórica da não ambiguidade e não exceção no domínio.



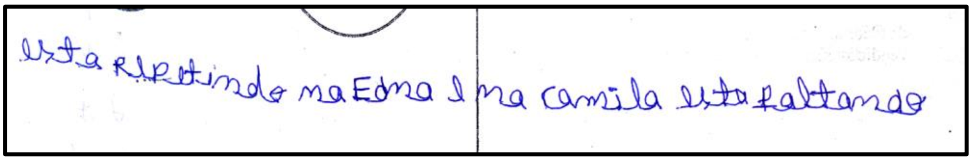
7) Defina FUNÇÃO.

É função quando no domínio não tem ambiguidade e excessão.



7) Defina FUNÇÃO.

É quando não tem função e nem ambiguidade



esta repetindo na Edna e na camila esta faltando

Aluna PCD, D3.

Diante do exposto infiro que a sequência didática “Conceito de função e suas linguagens” também apresentou potencialidades no desenvolvimento de habilidade de comunicação e argumentação com uso de linguagem escrita materna e linguagem matemática, conciliadas ou não.

5. 2. 5. Síntese de resultados

Retomando os resultados da análise microgenética e análise do discurso, articulando as três atividades aplicadas, é possível verificar as potencialidades didáticas do produto nos aspectos discursivos em níveis epistemológicos perceptivo/intuitivo, empírico e teórico, tendo sido satisfeitas as intenções das intervenções para o alcance dos 10 objetivos de aprendizagem pretendidos, bem como no uso de linguagem matemática e língua materna para investigar, comunicar e argumentar.

Sobre os aspectos qualitativos sintetizo no quadro abaixo as contribuições do produto validado nos que tange os três elementos relacionados no episódio didático segundo a teoria das situações didáticas: aluno, professor e saber.

Quadro 27: Contribuições para o aluno, professor e saber

Aluno	**Professor**	**Saber**
-Deu ao aluno oportunidade de protagonizar a construção do próprio conhecimento; -Criou um *milieu* propício ao diálogo, negociação de pontos de vistas, tomada de decisão, investigação. - Promoveu valores sociais de autonomia, autoconfiança, cooperação, senso crítico. - Promoveu o diálogo, discussões e validações conjuntas; - Alcance dos três níveis epistemológicos de aprendizagem: perceptivo/intuitivo, empírico e teórico, revelados em seu discurso; - Desenvolvimento da habilidade de comunicar e argumentar em língua materna e linguagem matemática, elaborando, interpretando e convertendo diferentes representações; -Alcance das habilidades curriculares necessárias para a aprendizagem do conceito de função; -Oportunidade de aprender com os erros.	- Possibilidade de ter uma visão sistêmica do processo e avaliar diferentes formas de pensar e concluir, adversas da sua maneira própria, agregando-as a sua prática e tornando-o mais experiente frente as dificuldades de ensino; -Permite um feedback imediato de como a aprendizagem está ocorrendo, podendo intervir para que o conhecimento não se sedimente de forma inequívoca; - Aproxima o professor ao aluno, reforça os laços de confiança; - Permite ao professor avaliar promover outros aspectos do contexto didático: emocionais/afetivo; atitudinais, procedimentais. -Realização de uma atividade planejada sem padrões muito rígidos que impeçam o professor de fazer adequações e improvisos; -Possibilidade de ter um recurso didático-pedagógico fundamentado, validado e potencial ao ensino do conceito de função.	-Aproximou o saber científico ao epistemológico. -Possibilidade de aplicar o conhecimento em situações alheias ao contexto didático e de forma interdisciplinar e transdisciplinar. - Possibilidade reelaborar diferentes e mais sofisticados esquemas mentais sobre o mesmo conceito. - O conhecimento individual se tornou um saber coletivo, revelado na linguagem escrita e oral, sendo útil a vida prática do indivíduo. - Deu significado e diferentes abordagens e aplicações para um mesmo conhecimento. - Ampliou o campo conceitual do conceito de função normalmente adotado no ensino clássico e não dialogado de modo a ter diferentes invariantes e representações do mesmo objeto: Conceito de função.

Fonte: Elaborado pela autora.

Sobre os aspectos quantitativos, concluo que a sequência didática se mostrou potencial ao ensino do conceito de função, necessitando ser aliada a outras atividades de fixação.

Sobre a estudante PCD, concluo que o processo interativo de ensino valorizando as relações afetivas e de confiança que teve com seus colegas permitiram que a estudante apresentasse resultados tão satisfatórios quanto aos seus colegas, demonstrando capacidade de aplicar tais conhecimentos também de forma autônoma e individual.

No mais, posso validar que os métodos de uso de uma sequência didática estruturada segundo as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual potencializam o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função no ensino médio, a partir do que preconiza a Análise do Discurso e Microgenética nos níveis epistemológicos perceptivo/intuitivo, empírico e teórico.

Pessoalmente falando, a metodologia de análise de resultados me deu a oportunidade de testemunhar sob várias perspectivas como se dão os processos cognitivos de construção do conhecimento. Esse reconhecimento não seria possível sem o estudo preliminar mobilizado para fundamentação da SD. Posso afirmar que o meu olhar sobre ensino e aprendizagem de matemática não é mais o mesmo, e que meu envolvimento com pesquisa me mostrou o pouco que sei, mas apontou caminhos para um melhor exercício de minha profissão. Devo isso também as preciosas discussões no grupo de pesquisa GHEMAZ, como prova de que a interação, a troca de conhecimento, na construção coletiva do saber é importante nos diferentes níveis de aprendizagem.

A minha atuação ao longo da aplicação da sequência didática e as interações com os alunos permite inferir outros níveis de comunicação entre professor-aluno, fato que o professor ao ler este texto entenderá o que acontece quanto ao nível de reciprocidade na relação aluno-professor, isto é, quando se percebe no olhar, na expressão corporal e na oralidade a curiosidade, o conhecimento sendo construído, o entendimento sendo revelado em cada “Ah tá, entendi!”, que o processo está sendo satisfatório em termos de qualidade, que os estudantes se sentem livres e encorajados para errar, acertar, defender suas opiniões, se convencer da opinião do outro. Essas coisas, não têm preço, fazem valer o esforço monumental que foi realizar esta pesquisa e me faz ter orgulho da profissão que escolhi ainda criança, admirando meu avô trabalhador rural e meu pai professor de Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentei os resultados de uma pesquisa desenvolvida ao longo do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática sobre o ensino do Conceito de Função no Ensino Médio em que visei responder questão norteadora de pesquisa: *As atividades de uma sequência didática estruturadas segundo as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual potencializam o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função*?

Assim, a investigação da pesquisa se deu em torno das potencialidades didáticas de uma sequência didática elaborada para o ensino e aprendizagem do conceito de função no ensino médio. As potencialidades investigadas foram especialmente de caráter qualitativo sobre o processo de aplicação da sequência didática intitulada “Conceito de função e suas linguagens”, nos aspectos discursivos em níveis epistemológicos: perceptivo/intuitivo, empírico e teórico.

Para estruturar e nortear a pesquisa adotei Teoria das Situações Didática (TSD) de Brousseau (1996), que também ajudou a compreender como ocorrem as situações didáticas entre professor, aluno e saber em episódios de aprendizagem através de um *milieu* construído de forma planejada, estratégica, fundamentada e intencional pelo professor.

A Sequência Didática Estruturada como Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual proposta por Cabral (2017), se fundamenta em estudo minucioso e profundo do objeto matemático e é constituído por intervenções que conduzem para os propósitos da TSD e permite ao estudante a construção autônoma de seu conhecimento em gradativos níveis de formalização e dando a oportunidade de se fazer intervenções orais complementares.

De forma articulada aos aportes preliminares, de construção e aplicação do produto educacional validado adotei a Análise Microgenética e Análise do Discurso de acordo com Goés (2000) e Mortimer e Scott (2002), respectivamente. Tais aportes nortearam a coleta, tratamento de dados e análise de resultados. Para tanto, a experimentação do produto foi gravada em áudio e após a transcrição realizei análise de micro eventos, que evidenciaram indícios de aprendizagem em aspectos discursivos no tocante a níveis epistemológicos de apreensão de conhecimentos.

Preliminarmente realizei estudo sobre o ensino do conceito de função em uma revisão de literatura e pesquisa diagnóstica com estudantes e professores. Na revisão de literatura fiz estudos diagnósticos e experimentais e análise de livro didático, para investigar o que se ensina no ensino médio sobre o conceito de função, de modo que pude ter um panorama das principais dificuldades a serem minimizadas e possíveis metodologias que eu pudesse adotar. Na pesquisa com estudantes investiguei a perspectiva desses sujeitos sobre a aprendizagem do conceito de função, de modo a obter como resultado que os obstáculos se dão em torno da comunicação e argumentação com uso articulado de diferentes linguagens, sejam elas em língua materna ou linguagem matemática, o que justificou o título deste trabalho.

Aliando os estudos preliminares levantei dez habilidades a serem desenvolvidas pela sequência didática adotando, inicialmente um recurso de material manipulável estático e as demais atividades conduzindo o estudante a estado de consciência que o permita aplicar o conhecimento adquirido em situação do dia a dia, isto é, situações adidáticas.

Para dar suporte teórico ao professor que for fazer uso da SD “Conceito de função e suas linguagens” realizei um estudo sobre o objeto matemático conceito função na perspectiva histórica e epistemológica. Na reconstrução histórica do conceito de função investiguei o campo conceitual do objeto e os obstáculos epistemológicos que causaram limitações ou avanços ao longo dos períodos históricos e no contexto vivenciado pelos personagens destacados.

No estudo epistemológico do objeto realizei reflexões sobre a definição de função, os elementos que constituem o comportamento funcional, as diferentes representações (língua materna, diagrama, quadro, tabela, para ordenado, gráfico, algébrica) e invariantes do conceito (regra, variação, transformação, aplicação, produto cartesiano), sempre apontado características, vantagens e desvantagens de cada uma delas e ressaltando a importância da formalização, que nesta pesquisa, é indicada como sendo tarefa exclusiva do professor.

A sequência didática construída possui três atividades articuladas que de forma concomitante e colaborativa conduzem para o alcance das dez habilidades levantadas e promovem interações intencionais aluno-aluno e aluno professor, a fim de fomentar a qualidade dialógica do processo e a construção do conhecimento individual e coletivo. Sua experimentação e validação de potencialidades se deu durante a aplicação que ocorreu em novembro de 2019 em uma escola da rede estadual de ensino, no município de Belém-PA, com 37 estudantes cursando o 1° ano do ensino médio. Antes da aplicação realizei um teste e oficina de conhecimentos básicos para prepará-los cognitivamente para os novos conhecimentos desenvolvidos pela SD.

Os três episódios de aplicação foram gravados em áudio, tendo um gravador em cada grupo e cada estudante identificado por códigos a fim de preservar o anonimato. Os áudios de cada episódio (aula) foram transcritos e deles foram retirados segmentos (trechos referentes a alguma questão), para análise de turnos (falas) que revelassem indícios de aprendizagem sob aspectos discursivos e epistemológicos. As análises desses discursos me levaram a validar a sequência didática estruturada segundo as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual aplicada com potencialidades para o ensino do conceito de função no ensino médio, respondendo, assim, a questão de norteadora e alcançando os objetivos gerais e específicos da pesquisa.

Embora esta pesquisa tivesse sido planejada para verificar a qualidade do processo interativo e discursivo de ensino, obtive resultados quantitativos positivos também mediante análise do teste de verificação de aprendizagem realizado após a aplicação da SD. Porém, recomendo numa próxima aplicação realizar exercícios de fixação antes do teste final, para que os estudantes possam sedimentar os conhecimentos e poder fazer uma melhor avaliação de desempenho.

No que tange as dificuldades em investigar, comunicar e argumentar em diferentes linguagens a sequência didática validada também se mostrou potencial, revelando nas respostas escritas dos estudantes diferentes níveis epistemológicos de apreensão do conhecimento. De modo que pude inferir que o produto educacional aqui apresentado traz contribuições para o aluno, professor e saber quanto aos aspectos conceituais, procedimentais e atitudinais.

Acrescento que a receptividade da escola de pesquisa diagnóstica e de aplicação foi de fundamental importância para a realização desta pesquisa, cujo maior interesse é contribuir com ensino de matemática escolar. Além disso, embora demanda de tempo consumida na aplicação da SD tenha sido relativamente grande, a recorrência de eventos interativos de aprendizagem pode acelerar o tempo cognitivo de aprendizagem, isto é, o que se propôs aqui foi uma nova conduta na relação professor-aluno e aluno-aluno. Como tudo que é novo necessita de tempo de adaptação, acredito poder contar com colegas de profissão para incentivar que conduta seja um habito e que o espírito investigativo e a prática dialógica nas relações didáticas se tornem habituais no ambiente escolar.

Pessoalmente e profissionalmente, a pesquisa realizada me trouxe contribuições para minha prática docente e para minha conduta acadêmica e de pesquisadora, permitindo que eu pudesse olhar o objeto matemático, conceito de função, tão estudado e pesquisado e tão rico conceitualmente, sob várias perspectiva que se fundiram sob um novo olhar e uma nova abordagem sobre o mesmo objeto, isto é, os termos ambiguidade e exceção utilizados dos livros de análise do ensino superior, ganharam espaço no ensino médio e o abstrato se tornou concreto no falar e no fazer dos estudantes sujeitos da pesquisa. Essa foi a maior satisfação pessoal que tive nesta pesquisa, e, não poderia deixar de dizer que foi resultado de inúmeras discussões no grupo de pesquisa GHEMAZ e de orientação, muita leitura, participação nas disciplinas do curso de mestrado, troca de experiência com outros colegas e madrugas a fim de muita dedicação.

Recomendo a realização de novas aplicações da SD “Conceito de função e suas linguagens”, com outros sujeitos e modalidades de ensino, bem como a implementação para outros objetos matemáticos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da didática Matemática**. Curitiba: UFPR, 2014.

ALVARENGA, Karly; BARBOSA, Celso Viana; FERREIRA, Gislaine Maria Ferreira. **O conceito de função**: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a. C até o século XX. REVEMAT. Florianópolis (SC), v.9, n. 1, p. 159-178, 2014.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: Interação e Tecnologia**. Vol 1. 2. Ed. Leya. São Paulo. 2016

ARDENGHI, Marcos José. **Ensino aprendizagem do conceito de função**: Pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 182 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem Matemática***.* São Paulo: Contexto, 2011.

BATISTA, Natália Lampert; FELTRIN, Tascieli; BECKER, Elsbeth Léia Spode. **Autoformação docente e reflexões sobre vivências escolares**. Inquietações e Propondituras na Formação Docente. Capítulo 7. Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. 10ª reimpressão. São Paulo: Edgard Blücher, 1993.

BRASIL. Presidência da República. **Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017**. Brasília, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular.** Brasília, DF, 2017. Disponível em:<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministérios da Educação. **Lei de diretrizes e Bases da Educação Brasileira**. Brasília: MEC/SEM, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:**Matemática**-** ensino médio**-**Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEM, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

BRITO, Antonia Edna; SANTOS, Cleidivan Alves dos. Prática pedagógica dos professores de Matemática no início da experiência docente: ciclo de vida e saberes docentes. In: V Encontro De Pesquisa Em Educação Da UFPI. **Anais**... Teresina/PI. 2009.

BRITO, Dirceu dos Santos; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle**. O conceito de função em situações de modelagem**. ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v.13 – n. 23 – jan./jun. 2005.

BROUSSEAU, Guy. **Fundamentos e métodos da didáctica da Matemática**. In: BRUM, J. (Org.). Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 35-114.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos. Ática. São Paulo, 2008.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas**: estrutura e elaboração. 104 p.Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CEOLIM, Amauri Jerci; REZENDE Veridiana, HERMANN, Wellington. **Diálogos entre a educação básica e a universidade**: reflexões acerca do conceito de função nas salas de aula. CVR. Curitiba. 2019.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos**: História e Matemática em sala de aula. Belém/SBEM-PA, 2017.

CHAQUIAM, Miguel; CABRAL, Natanael Freitas. **Funções**: Uso, desuso e reflexos no ensino. SINEPEM. IFPA. Belém-PA, 2019.

COSTA, Acylena Coelho. **Conhecimentos de estudantes universitários sobre oconceito de função**. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SãoPaulo, 2004.

CRUZ, Paulo Jakson Dias. **Interdisciplinaridade como prática para a construçãodo conceito de função**. 118 f. Dissertação (Mestrado Matemática em Rede Nacional) -Universidade Federal Rural do Semi-árido, Mossoró, 2015.

CUNHA, Carlos Virgílio Lobato; SOUSA, Thiago Delly Vidal**;** CHAQUIAM, Miguel. **Função**: um pouco de história. VII Encontro Paraense de Educação Matemática. ISSN 2178 – 3632**. Anais ...** Belém, 2010.

DANTE, Luiz Roberto**. Matemática**: Contexto e Aplicações. Vol 1. 1. Ed. Ática. São Paulo, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto e Aplicações. Vol 1. 2. Ed. Ática. São Paulo, 2016.

DARRONQUI, Luciene Cristina; TRIVIZOLI, Lucieli Maria. **Elementos da história da Matemática como estratégia pedagógica no ensino da função polinomial do primeiro grau**. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE. Vol. 1. Curitiba, 2014.

DIONIZIO, Fátima Queiroz; BRANDT, Célia Finck. Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria. X Congresso Nacional de Educação. **EDUCERE**. PUC/PR. Curitiba, 2011.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004.

KARLSON, Paul. **A Magia dos números**. Tradução de Henrique Carlos Pfeifer, Eugênio Brito e Frederico Porta. Editora Globo. Rio de Janeiro - Porto Alegre - São Paulo. 1961.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do ensino Médio**. Vol. 1. Coleção do professor de Matemática. SBM. Rio de janeiro, 1997.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural:** uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. v. 20, Campinas: Cadernos Cedes, 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v20n50/a02v2050.pdf >. Acesso em: 02 de Nov. 2017.

GUIMARÃES, Rita Santos. **Atividades para aprendizagem do Conceito matemático de função**. 202 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2010.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática**: Ciência e Aplicações. Vol 1. 7. ed. Saraiva. São Paulo, 2012.

IEZZI, Gelson et al**. Matemática**: Ciência e Aplicações. Vol 1. 7. ed. Saraiva. São Paulo, 2016.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Conjuntos, Funções. Vol1. 7. Ed. Atual. São Paulo, 2002.

MACHADO, Nilson José. **Sobre a ideia de competência**. In: PERRENOUD, Philippe (Org.). As competências para ensinar no século XXI: a formação de professores e o desafio da avaliação. Trad. de Claúdia Schilling e Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002. p. 135-157.

MACIEL, Paulo Roberto Castor. BOLEMA, Tereza Fachada Levy Cardoso. **A História do Conceito de Função em Vídeo:** uma proposta para a aprendizagem. Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1348-1367, dez. 2014.

MACIEL, Paulo Roberto Castor; BOLEMA, Tereza Fachada Levy Cardoso. **A História do Conceito de Função em Vídeo: uma proposta para a aprendizagem**. Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1348-1367, dez. 2014.

MAFRA, José Ricardo e Souza. **Um desenvolvimento histórico do conceito de função**. Coleção História da Matemática para professores. v. 15. Belém: SBHMt, 2009.

MENDES, Helena Monteiro. **O conceito de função:** Aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau. (Dissertação de Mestrado). Departamento de Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1994.

MORTIMER, Eduardo F. & SCOTT, Phill. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino.** Investigações no ensino de ciências, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2002.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar**: Introdução a Análise funcional- 2 ed. SBM. Rio de Janeiro, 2012.

NETO, Aref Antar et al. **Noções de Matemática**(v.1). Fortaleza: Editora Vestseller. 2009.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino de; PINHEIRO, Marcio Rodrigues da Rocha. **Coleção Elementos da Matemática:** Conjuntos funções, aritmética. – 2 ed. Editora VestSeiller. Fortaleza, 2010.

OLIVEIRA, Nanci de. **Conceito de função:** Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 174 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. Vol 1. 3. Ed. Moderna. São Paulo. 2015.

PARÁ. Secretaria de Educação do Estado do Pará.**Revista do sistema paraense de avaliação educacional: referências e resultados**. Belém, 2016. Disponível em:<https: //sispae.vunesp.com.br/Arquivos/Revistas2016 /SumarioExecutivo_2016.pdf >**Acesso em: 10 nov. 2018.**

PARÁ. Universidade do estado do Pará. **Regimento do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.** Belém, s, d. Disponível em <http://ccse.uepa.br/pmpem/?page_id=2>. Acesso em: 10 nov. 2018.

PELHO, Edelweiss Benez Brandão. **Introdução ao conceito de função:** A importância da compreensão das variáveis. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

RESENDE, Denise de Mello, et al. **Uso de diferentes métodos de ensino-aprendizagem de química para estudantes do ensino médio da rede pública**. Reflexões pedagógicas: cenários de iniciação a docência. Subprojetos Física –

Matemática – Química. Estudo e Ensino I. – Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2014

RODRIGUES, Fredy Coelho; ZINE, Elaine Scheid. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de Matemática: da ação experimental à reflexão. **Revista Revemat**. Florianópolis: v. 07, n. 2, p. 187-196, 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SÁ, Pedro Franco de. A construção do conceito de Função:alguns dados históricos. **Revista Traços**. Belém: UNAMA, v.6, n.11,2003.

SANTOS, Graça Luzia Dominguez; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Como ensinar o conceito de função? **Educação Matemática em Revista**. v. 22, n. 53, p.27-37. Brasília, jan/mar, 2017.

SILVA, Edna Machado; FELIX, Ana Paula Nunes; CHAQUIAM, Miguel. **Aprendizagem do conceito de função no ensino médio**. Congresso Pan-Amazônico de Matemática. Belém, 2018.

SILVA, Edna Machado; MIRANDA, Denis do Socorro Pinheiro; CABRAL, Natanael Freitas. FUNÇÃO: Uma reconstrução histórica do conceito. **Anais**. XIII Seminário Nacional de História da Matemática.. – Fortaleza: SBHMat, 2019.

SILVA, Charlene Fiorinida. O Pibid e o ensino de função**:** investigando como professores ensinam função no ensino médio com a finalidade de elaborar intervenções pedagógicas. **Reflexões pedagógicas**: cenários de iniciação a docência. Subprojetos Física – Matemática – Química. Estudo e Ensino I. – Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2014.

SILVESTRE, Adriane Lemes. **Conceitos e propriedades de funções sob a Ótica do ensino básico**. 86 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2016.

SOUZA, Rebeca Pereira de. **A construção do conceito de função através de atividades baseadas em situações do dia a dia**. 98 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadualdo Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2016.

TRINDADE, Daniela Jéssica; NAGASHIMA, Lucila Akiko; ANDRADE, Cíntia Cristine. **Obstáculos epistemológicos sob a perspectiva de Barchelard**. Formação de professores: Contextos sentido e Práticas.VI Seminário Internacional sobre Profissionalização Docente. PUC/PR. Curitiba, 2017.

ZUFFI, Edna Maura, PACCA, Jesuína Lopes de Almeida. **O conceito de função e sua linguagem para os professores de Matemática e de ciências**. Ciência & Educação, v.8, nº1, p.1 – 12, 2002.

APÊNDICE

INSTRUMRNTOS DA PESQUISA COM ESTUDANTES E PORFESSORES

TESTE E OFICINA DE CONHECIMENTOS BÁSICOS

SEQUENCIA DIDÁTICA: VERSÃO ALUNO VERSÃO PROFESSOR


EDNA MACHADO DA SILVA
MIGUEL CHAQUIAM
Conceito de Função e suas linguagens
7,90 KG
A + BX + C = 25

TRANSCRIÇÃO DA APLICAÇÃO

TRANSCRIÇÃO DO EPISÓDIO 1

<table>
<tr><th colspan="6">Instrução inicial</th></tr>
<tr><td colspan="6">T1-PA: Bom dia! Eu sou a Professora Edna Machado, eu estive aqui com vocês semana passada aplicando uma oficina de conhecimentos básicos. Agora, eu vou precisar que vocês se concentrem na atividade que nós vamos fazer. Vocês receberam um kit com 12 de cartas, uma ficha que tem 12 situações e uma outra que tem as instruções para realização da atividade. O objetivo dessa atividade é definir o que é uma função e nós vamos analisar essas 12 situações para chegar a essa conclusão. Agora, lembrando da oficina de segunda-feira acho que vocês enxergam que aí tem quadro, diagrama, gráfico, ...
Leiam o comando da primeira questão: Observem que pede que faça uma correspondência entre o conjunto de partida A e o conjunto de chegada B, segundo uma regra para cada uma das 12 situações. Vocês podem discutir entres si ou perguntar a mim ou qualquer dos professores colaboradores. Podem começar!</td></tr>
<tr><th colspan="6">Discussão nos grupos (questão 1 e 2)</th></tr>
<tr><th>Grupo A</th><th>Grupo B</th><th>Grupo C</th><th>Grupo D</th><th>Grupo E</th><th>Grupo F</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td>T2-PA: Você entendeu?
T3-B1: Ainda não! o que faz com essas cartas?
Professor: Primeiro você vai se preocupar só em corresponder cada uma das situações.
T4-B1: É pelos lados?
T5-PC: Todos concordam?
T6-B2: Acho que é os lados sim que liga.
T7-B3: Olha só esse aqui do A são esses aqui um, dois e três e do B é um e dois só.
T8-B1: Olha eu já vi essa função é igual aquela que a gente estudou ontem.
T9-B1: Rio de Janeiro é cidade ou estado?</td>
<td>T18-C2: Não entendi.
T19-C1: Também não entendi.
T20-C1: Acho que a regra que é 3 lados, 4 lados, 5 lados.
T21-C1: Professor, creio eu que aqui é parecido com esse, mas tem que ter os números, né?
T22-PC: Isso! Nessa situação 2, quem seria o conjunto A?
T23-C1: 1,2 e 3 e o B é 1 e 2.
T24-C2: Como é que eu uso essas cartas aqui?
T25-PC: Guarde-as primeiro. Faça somente as correspondências por enquanto.
T26-C3: Me explica a 2.
T27-C1: O B é isso aqui ó, dois em um.
T28-C3: Mas, por que? No gráfico a gente não conta de</td>
<td>T39-D3: Eu acho que esse aqui se liga com dois. O 1 vai com 1 e com 2 ao mesmo tempo.
T40-D1: Nessa terceira aqui o 1 se liga com 1 e 2.
T41-D3: Mas está errado por que é um filho não pode ter dois pais, mas um pai pode ter dois filhos.
Fica tipo uma função incompleta.
T42-D1: Ei olha essa aqui!
T43-D3: Nessa tu vais olhar aqui vai substituir aí fica 2 vezes -1, - 2; 2 vezes 0,0 e 1 vezes 2, 2. Vai sobrar o quatro.
T44-D1: Mas não tem problema se sobrar
T45-D3: Nesse aqui tem que associar o número ao seu quadrado então -1 ao quadrado dá 1, 1 ao quadrado da 1</td>
<td>T66-E1: até a primeira
T67-E2: E o que é que tem que fazer
T68-E3: Eu não entendi nada
T69-E4: Já é para fazer
T70-E5: Aqui tá resposta tem que colocar a carta em cima
T71-E2: Entendi.
T72-E3: Entendi também
T73-E1: Eu acho que é assim vai ligando e vai colocando as cartas. Ah não! o Professor falou primeiro terminar as correspondências depois as cartas
T74-E1: Mas quantos são professora?
T75-PC:É a mesma quantidade situações e cartas 12</td>
<td>T88-F1: Professor ela não entendeu aqui
T89-PC: Você vai estabelecer ligações do conjunto A para o conjunto B, certo? Por exemplo aqui quem é o conjunto A? Triângulo, quadrado e pentágono. Quem é o conjunto B? 3, 4 e 5. Qual é a regra? Associar o polígono ao número de lados. Por exemplo: que polígono tem três lados?
T90-F2: Triângulo!
T91-PC: Então você liga o triângulo ao número três.
T92-F2: Ah! entendi!
T93-F2: E aqui na segunda?
T94-PC: O comando diz assim: converta os pontos do gráfico em correspondências no diagrama.</td>
</tr>
</table>

	T10-B6: Estado né. **T11-B3**: Tirar a área? **T12-B1**: Aqui a regra é o quê? Tem que usar uma letra? **T13-B3**: O que é sucessor? **T14-B6**: Sucessor, mano, é o próximo! **T15-B1**: A regra é associar dobro entendeu? O dobro de -1 - e -2, o dobro de zero é zero e o dobro de um é dois.É só multiplicar por dois. **T16-B3**: Ah! Esse aqui da área só multiplicar 4 vezes 3, 12; 6 vezes 2, 12 e 3 vezes 2, 6. Vai sobrar esse 4 aqui. **T17-B1**: Olha lá, o pessoal tá falando: Rio de Janeiro é cidade e estado.	baixo para cima não é 1 e 2? **T29-C4**: E esse aqui x contém A e y contém B. Acho que é isso. **T30-C1**: Acho que esse significa que esse aqui é o grupo ah e esse aqui é o grupo B. **T31-C5**: Não entendi! **T32-PC**: Olha isso aqui significa que esses são os elementos do conjunto A e esses são os elementos do conjunto B. Os elementos do conjunto A está chamando de x e os elementos do conjunto B está chamando de y. Daí aqui, ele tem uma regra que diz o que que é y = 2x, então vocês vão fazer a correspondência conforme a essa regra. Façam aí! **T33-C3**: Mas aí vai sobrar aqui. **T34-C1**: Mas pode sobrar, aqui também sobrou! **T35-C1**: Ah entendi! A gente vai pegar cada um daqui multiplicar por 2. Multiplica o -1 por 2 dá - 2 , o 0 vezes 2 dá 0 e o 1 vezes 2 dá 2, aí vai sobrar o quatro. **T36-C3**: Olha aqui a situação 5 o conjunto A é	e 0 ao quadrado dá 0. Eu acho que é esse o raciocínio. **T46-D2**: Nesse aqui tipo o que fica com quarta e quinta né. **T47-PC**: Algum problema aqui? **T48-D3**: Não!Mas você pode ver aqui se está certo? **T49-PC**: Sim está certo, pra associar ao quadrado, basta multiplicar o número por ele mesmo. **T50-D1**: Entendeu esse outro aqui? Quer saber qual a regra. **T51-D3**: Ah! esse eu não sei. Ah não! tá, é só multiplicar por 2. **T52-D1**: Professor, qual é a regra aqui? **T53-D3**: Eu acho que todos estão multiplicando por três. Então é 3 x. **T54-D3**: Professor como é esse aqui? **T55-PC**: Bom, aqui você tem os retângulos e no conjunto B você tem as medidas. A regra diz pra associar retângulo ao seu perímetro. O que é o perímetro? **T56-D3**: A soma dos lados.	**T76:E3**: Tá complicada a segunda, a primeira tá fácil mas a segunda tá difícil **T77-PA**: Ainda não está na hora de usar as cartas primeiro. **T78-E2**: Ah entendi! Você conta os lados você conta os lados e liga. **T79-E1**: 3 com 2 e um com dois **T80-E1**: Então eu ligo o 1 e o 2 com 1 e o 3 com 2 **T81-E2**: Obrigada **T82-E1**: é para associar as letras do alfabeto certo? **T83-E1**: olha que como é isso aí, tu vem aqui, foi ligado um com um e com 2 e 2 foi ligado com três aqui ó. Entendeu? **T84-E2**: Sim.Entendi esse aqui nessa parte, "Q" vai em quarta e quinta e s com sesta **T85-E3**: Olha aqui essas regras aqui professora e o domingo fica sozinho? **T86-E4**: olha aqui: converta as	Então, vejamos, que elementos estão no eixo horizontal, do conjunto A? **T95-F2**: 1, 2, 3 **T96-PC**: E no eixo vertical, do conjunto B? **T97-F2**: 1 e 2. **T98-PC**: Agora que você já escreveram os elementos de cada diagrama vocês fazem as ligações conforme os pontos. **T99-F2**: Ah! tá entendi! **T100-F2**: E esse aqui? **T101-PC**: Vamos lá! X pertence a A e y pertence a B. E o y é duas vezes x. Quanto é 2 vezes - 1? **T102-F2**: -2! **T103-PC**: Então você liga o -1 com - 2. E faz da mesma forma para os demais valores de x. **T104-F2**: Entendi, agora tá fácil! **T105-F1**: Então nesse vai sobrar o quatro e nesse outro aqui: a = b? Professor, não entendi aqui. **T106-PC**: Você vai associar qual é o quadrado de - 1? **T107-F2**: -1 **T108-PC**: Vamos lá me dê seu lápis aqui, quanto é -1 vezes -1. 1 vezes 1 dá um,

		igual ao conjunto B eles têm os mesmos elementos. **T37-C1**: E esse aqui a letra no dia da semana mas como é que eu vou saber para onde eu vou ligar o Q? Tem quarta e quinta aqui. **T38-C2**: É as duas!	Professor Então qual é o perímetro desse retângulo aqui? **T57-D3**: É só fazer 3 + 2 + 3 + 2 que dá 10. **T58-PC**: Isso agora é só ligar. Prestem bem atenção na regra que vocês vão entender o que tem que fazer. **T59-D2**: E esse aqui da área? **T60-D3**: Ah tá é só multiplicar! olha 4x3=12, 6x2=12 e 3x2=6. **T61-D4**: Por que esse ficou assim. **T62-D3**: É o sucessor, é só ver quem vem depois. **T63-D3**: Professor, Rio de Janeiro é cidade e estado né. E a região Norte? **T64-D1**: Acho que é continente. **T65-D3**: Só não consegui fazer a última, a 12.	associações, eu acho que tem que se converter. **T87-E5**: O dois tá ligado o três assim ó.	e o sinal, como fica? **T109-F2**: menos com menos dá mais. Então liga -1 e 1. **T110-PC**: Então você vai verificar o quadrado de cada um dos elementos do conjunto A e vai ligar o conjunto B, se tiver correspondente. **T111-F2**: Esse aqui é mais fácil mano, porque esse aqui é de dia da semana. **T112-PC**: Vamos ver aqui a situação 7. Vamos ver qual é a regra: 1 tá com 3 o 2 tá com 6 o 3 tá com nove. O que está acontecendo com esses elementos do conjunto A para chegar aqui? **T113-F1**: Estão sendo multiplicados por 3. **T114-F2**: Vocês entenderam o que ele disse? Olha, 1x3=3, 2x3=6, 3x3=9. Então qual é a regra? **T115-F1**: Multiplicar X por 3. **T116-F2**: Será que continente a Europa e região norte é estado? **T117-F1**: Calma não sou bom em Geografia.

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>**T118-PC**: Dica: alguns nomes podem ser de cidade de estado.
T119-F2: Ah! tá. Professor é esse aqui tá certo? Sobrou o “r’
T120-PC: Sim! Situação 12: Associar as letras que formam as sílabas da palavra medida. O "d" associa com "e" e "a" e o "m" com "e", aí o "r" vai ficar sem associação. Tá certo!</td></tr>
<tr><td colspan="6">**Socialização**</td></tr>
<tr><td colspan="6">**T121-PA**: Atenção pessoal! Conseguiram fazer as seis primeiras? Quem conseguiu já vamos lá. Bom eu percebi que alguns colegas vocês estão percebendo que estão sobrando elementos Mas eles estão duvidando O que vocês acham sobre isso.
T122-TURMA: Às vezes sobra, ás vezes falta e às vezes repete.
T123-PA: Mas você vai se ater a regra que está aí, certo? Depois nós vamos analisar porque que sobra porque que falta eu vou fazer os seis primeiros e porque que repete ok.
T124-PA: Eu vou fazer os seis primeiros depois eu dou mais 10 minutos para você fazer gestantes. Eu gostaria que alguém do grupo A me dissesse como fez a primeira correspondência.
T125-A1: A gente contou o número de lados e ligou um triângulo que tem três foi no três o quadrado foi no quatro e o outro foi no cinco.
T126-PA: Grupo B como foi que vocês fizeram a segunda situação. Que tipo de representação vocês viram aí?
T127-B1: Diagrama e gráfico.
T128-PA: Olhando pro gráfico quem é o conjunto de partida
T129-Grupo B: Um, dois e três
T130-PA: E o conjunto de chegada
T131-Grupo B: Um e dois
T132-PA: E como ficou a correspondência no diagrama
T133-Grupo B: O 1 foi no 1, o 2 foi no 1, e o 3 foi no 2.
T134-PA: Agora a situação três grupos e qual o tipo de representação vocês tem aí?
T135-Grupo C: Uma tabela ou quadro e diagrama
Tanto diagrama quanto 4 está informando quem é o conjunto de partida quem é o conjunto de chegada certo aqui você tem no quadro 12 aqui no diagrama um aparece só uma vez por que como se trata de um conjunto você não precisa repetir já alguma chance de chegada você tem 1 2 e 3. Como fica a correspondência?
T136-GRUPO C: O 1 vai no 1 e no vai o 2 e o 2 vai no 3.
T137-PA: Agora vamos ver o grupo D como se saiu na situação 4. Vamos ler e lembrar da oficina. Você tem x pertencente A e y pertencente a B e o que representa esse y = 2x, como nós vimos na oficina o que representa o 2x.
T138-D3: O dobro.
T139-PA: Então nós vimos na oficina que quando eu multiplicar um número por ,2 eu estou calculando o seu dobro. Então 2 vezes um símbolo qualquer, uma letra que pode ser x, ou</td></tr>
</table>

outra é o dobro de um número. Então aqui no meu diagrama eu tenho no conjunto A de partido e B de chegada. Segundo a regra os valores de x e de Y pertencem a quais conjuntos?
T140-Grupo D: x é de partida e y é de chegada.
T141-PA: Agora como é que fica a correspondência no diagrama segundo essa regra e y = 2x? Então os valores do conjunto B precisam ser o dobro dos valores do conjunto A certo? Como vocês fizeram?
T142-Grupo D: -1 com -2, 0 com 0, 1 com 2.
T143-PA: Vamos lá grupo E, situação 5. Aqui diz que eu a = b com os elementos - 1,0 e 1. Isso significa que os mesmos elementos que tem no conjunto A tem no conjunto B e a regra diz para associar um número ao seu quadrado. O que seria o quadrado de um número?
T144-GRUPO E:Multiplicar um número por ele mesmo
T145-PA: Qual o quadrado de - 1.
T146-Grupo E: 1.Do 1 é 1 e do 0 é 0.
T147-PA: Como vocês fizeram essa conta?
T148-Grupo E: Fizemos menos -1 x -1. Aí o menos com menos ficou positivo e um vezes um dá um.
T149-PA: Agora o Grupo F, como vocês fizeram a situação 6? Vocês observaram que a situação 6 não tem número certo? O que vocês tem aí?
T150-Grupo F: Letras e dias da semana.
T151-PA: E então como ficou?
T152-Grupo F: O Q foi na quarta e na quinta, o S foi na sexta e o domingo sobrou.
T153-PA: Agora vou dar mais 10 minutos para vocês concluírem as outras situações, quem já terminou ou aguarde um pouquinho para passar para outra atividade ou vão ajudar os colegas que ainda não terminaram.
T154-PA: Quais foram os grupos que já terminaram?
T155-PA: Só Vocês? Então eu peço que cada um desse grupo vá ajudar um grupo que ainda não terminou. Vamos lá!
T156-E1:Vem cá que D5!
T157-D5: Bom, aqui você tem que perceber que os números já estão ligados e vocês têm que os números 1, 2, e 3 já estão ligados. Aí você vê porque o 1 tá ligado no 3. Aí você vai perceber que todos estão multiplicando três vezes. Aí 1 x 3 é 3, 2 x 3 é 6 e 3 x 3 é 9.
T158-E1: Ah! então é o triplo?
T159-D5: Isso! fica multiplicando por três, aí é só isso, então regra é 3X.
T160-E2: E aí a situação 8?
T161-D5: Esse aqui você vai ter que conferir os lados você vai ver aqui no Conjunto a 3 com mais 25 aí como repete faz vezes dois fica 10 cm aí você liga para o 10 centímetro não faz a mesma coisa nos outros.
T162-E2: Então aqui a gente faz quatro mais um que é 5 x 2 vai dar 10cm aí liga também no 10
T163-E3: Eu ainda não entendi.
T164-PA: Ok pessoal vamos ver a situação 7 agora, vou começar pelo grupo F. Como vocês fizeram a situação 7? Qual é a regra?
T165-Grupo F: Multiplicar por 3 o conjunto A pra obter o conjunto B.
T166-PA: A situação 8 nós temos no conjunto A as medidas em centímetros dos retangulos e no conjunto B os perímetro. Quem lembra o que é perímetro?
T167-Turma: Soma de todos lados?
T168-PA: Então qual é o perímetro do primeiro retângulo?
T169-Turma: 10 cm.
T170-PA: Como vocês fizeram isso se só mostra as medidas de dois lados e a figura tem quatro lados?
T171-Turma: INAUDÍVEL
T172-PC: Ah então vocês deduziram que se de um lado é dois, o lado oposto também é dois e se do outro lado é 3 o oposto também é 3 e aí vocês somaram chegarem 10. Muito bem, é isso mesmo!
T173-PC: E o de lados 4 e 1?
T174-Turma: vai dar 10.
T175-PA: E o que é 4 e 2
T176-Turma: vai dar 12
T177-PA: E o último, tem correspondente?
T178-Turma: Não.

T179-PC: E a situação nove é para associar a área do retângulo ao retângulo. Como que se calcula a área de um retângulo?
T180-Turma: Multiplica! Base vezes altura.
T181-PA: Tem alguma figura que vai ter 12 cm quadrados de área?
T181-Turma: A primeira e a segunda.
T182-PC: E para essa de 6 cm quadrados vai ter?
T183-Turma: A última.
T184-PA: E para quatro centímetros quadrados?
T185-Turma: Nada!
T186-PA: Na situação 10 é para fazer a correspondência com o sucessor do número. O que é um sucessor?
T187-D3: É o número que vem depois
T188-PA: Então o que vem depois do 1
T189-Turma: dois
T190-PA: E depois do 2?
T191-Turma: 3
T192-PA: E depois do 3?
T193-Turma: 4
T194-PA: E o 4 tem correspondente?
T195-Turma: Não.
T196-PA: Vamos para a situação 11 temos que associar o nome do lugar ao tipo de divisão territorial. Tem cidade?
T197-Turma: Sim! Rio de Janeiro.
T198-PA: Tem estado?
T199-Turma: Sim! Rio de Janeiro, também.
T200-PA: Tem continente?
T201-Turma: Tem! Europa:
T202-PA: Tem país?
T203-Turma: Não.
T204-PA: Agora na última, situação 12, O que temos no conjunto de partida?
T205-Turma: Consoantes
T206-PA: E no conjunto de chegada?
T207-Turma: Vogais.
T208-PA: Então, queremos associar as letras consoantes as letras vogais para formar a palavra "medida". A letra d se corresponde com quem?
T209-Turma: "a" e "i" e "m" com "e".
T210-PA: Agora que todos fizeram todas as correspondências vamos ver a segunda questão: Utilize as cartas que você recebeu para sobrepor uma a uma às respectivas situações de correspondência. Agora vocês vão pegar as cartas e vão sobrepor as situações conforme a configuração da correspondência**.**
T211-E3: Professora, sobrou essas duas cartas aqui não tem correspondente.
T212-PA: É porque essa aqui você fez errado a correspondência. Se a correspondência estiver certinha, as cartas vão encaixar certinho.
T213-PA: Vamos fazer agora a terceira questão: Retire as cartas das situações nas quais existem elementos do conjunto de partida sem correspondente.
T214-PA: Quais foram as cartas que saíram?
T215-Turma: As 6 de baixo.
T216-PA: Agora vamos fazer a questão 4: Retire das situações que sobraram as cartas nas quais no conjunto de partida existe elemento com mais de uma correspondência.
T217-PA: O que foi que sobrou?
T218-Turma: 1, 2, 4 e 5.
T219-PA: Agora vocês vão lá para no quadro da questão 5, para escrever sim ou não para essas condições: condição 1: todo elemento do conjunto de partida possui correspondente; condição 2: cada elemento do conjunto de partida se corresponde uma única vez. Então vejam nessas quatro situações que sobraram se elas atendem a essas duas condições. Como ficou o quadro?
T220-Turma: Ficou tudo sim.
T221-PA: Bom, agora a partir do que vocês analisaram dessas duas condições para as cartas que sobraram quero que vocês responda à questão 6: O que podemos afirmar sobre o conjunto de partida em relação as correspondências estabelecidas nas situações analisadas

no quadro. Em seguida, eu quero que o representante de cada grupo exponha a conclusão do grupo.

A equipe não conseguiu desenvolver a questão, num lapso de 10 min.

T222-PA: Vocês entenderam o que é pra fazer?
Turma: Não
T223-PA: Tudo bem. Vamos recapitular o que nós fizemos desde o começo. Que vocês fizeram primeiro?
T224-Turma: A correspondência das situações.
T225-PA: E depois?
T226-Turma: Colocamos e tiramos as cartas.
T227-PA: O que foi que vocês fizeram primeiro na retirada das cartas?
T228-Turma: Tiramos primeiro as 6 de baixo.
T229-PA: Por que vocês fizeram isso?
T230-Turma: Porque estava sobrando no conjunto A em um conjunto de partida.
T231-PA: E as outras cartas vocês tiraram por quê?
T232-Turma: Porque tinha um elemento de partida e corresponda com mais de 1 na chegada.
T233-PA: Então como vocês tiraram essas cartas com essas características, as outras que sobraram tinham um significado contrário. Então, vejam bem: se aqui embaixo sobrou elementos no conjunto de partida, é porque não foram todos os elementos que se corresponderam. E nessas de cima quais elementos se corresponderam?
T234-Turma: Todos.
T235-PA: E depois o que vocês fizeram?
T236-Turma: Tiramos as cartas que tinham mais de uma correspondência na partida.
T237-PA: Então se vocês tiraram o que tinha mais de uma, as que sobraram tinham o que?
T238-Turma: Só uma.
T239-PA: Muito bem. Então primeiro vocês tiraram o que sobrava no conjunto de partida pra deixar aqueles em que todos se correspondiam. Depois vocês tiraram aqueles que faziam mais de uma correspondência na partida pra deixar aqueles cuja correspondência é única na partida. Agora, reformulem e escrevam essas conclusões.

Discussão nos grupos (Questão 6)					
Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E	Grupo F
	T240-PC: Dizer o que você escreveu **T241-B1**: Ah não professora tô com vergonha. Fala aí B2! **T242-B2**: Podemos analisar que todos os elementos do conjunto de partida possui representante no conjunto de chegada, mas alguns possuem mesmo representante.	**T243-C1**: Então, recapitulando ela queria que todos fossem só de uma correspondência.	**T244-D1**: Acho que cada ponto de partida tem uma chegada. **T245-D3**: Não! Todos os elementos de partida tem única chegada.		**T243-F3**:Cada partida tem uma chegada.

Socialização
T244-PA: O que vocês concluíram aqui? **T245-E1**: Não concluímos nada. **T246-PA**: Os grupos E e F não conseguiram chegar a uma conclusão ainda. Então eu gostaria que os demais grupos apresentassem suas conclusões para a turma. Começando pelo o grupo A. **T247-Grupo A**: Todos os elementos do conjunto de partida são correspondidos em uma única vez. **T248-PA:** E vocês do grupo B **T249-Grupo B**: Oral todos os elementos têm uma partida e uma chegada PA. **T250-PA:** Vocês concordam com ela grupo? **T251-Grupo D (D3)**: Todos os elementos de partida se conectam. E cada elemento do conjunto de partida faz apenas uma conexão. **T252-PA**: Gostei da palavra conexão! Vocês concordam com o colega? **T253-Grupo C**: Todos são partida e alguns tem uma única chegada **T254-PA**: Alguns têm única chegada? Olha aqui! Esse tem única chegada, esse tem única chegada, esse tem única chegada. São só alguns? **T255-Turma**: Não! São todos! **T256-PA**: E vocês do grupo E entenderam? **T257-E1**: Entendemos agora com que a senhora falou **T258-PA**: É? E o que foi que eu falei? **T259-E6**:Todos os elementos de partida possuem uma única chegada. **T260-PA**: Pronto Muito bem! Olha a colega de vocês não tinha feito, ninguém do grupo dela tinha feito, mas com ajuda de vocês a colega conseguiu entender e ainda resumiu tudo o que vocês falaram de forma bem simples e bem objetiva. Olha você tem o poder de síntese muito bom. Parabéns! Por que cada um aqui falou de um jeito diferente e ela disse a mesma coisa que vocês disseram de forma bem sintética. **T261-PA**: Agora na questão 7 podemos O que podemos afirmar sobre o conjunto de chegada vocês acham que precisa desses mesmos critérios. **T262-Turma**: Não, na chegada pode sobrar e faltar. **T263-PA**: Então vocês perceberam que no conjunto de partida todos tem que se corresponde e essa correspondência deve ser única. Já no conjunto de chegada não há essa exigência de ser todos e única. **T264-PA**: Agora eu vou escrever uma definição aqui no quadro que eu quero que vocês coloquem nesse espaço que está aí na folha de vocês
Formalização
T265-PA: Bom, vocês chegaram a uma conclusão e agora eu estou formalizando essa conclusão de vocês então todas as vezes que Vocês encontraram uma correspondência em uma situação em que ocorre aquilo que a colega de vocês falou que todos os elementos do conjunto de partida se correspondem a um único elemento de chegada formalmente isso significa dizer o quê dados dois conjuntos A e B não vazio disse que é é uma função de a em B em que todo o elemento x pertencente a está relacionado a único elemento Y pertencente a b e denota-se e esse conjunto A Que Nós chamávamos de partida formalmente o nome dele é domínio da função podendo ser adotado por DF e esse conjunto que nós chamamos de chegada conjunto ver ele é o contradomínio da função o que pode ser denotado por CD DF ou seja quando eu tenho uma correspondência para que ela seja função eu preciso definir de onde ela sai e para onde ela chega quem é o domínio e quem é o contradomínio pois ela sempre sai do domínio para chegar no contradomínio pode acontecer que ao invés de vocês encontrarem é um conjunto os elementos todos distintos vocês tenham conjunto numérico conjunto dos números naturais conjunto dos números inteiros conjunto dos números reais mas vocês precisam compreender e Qualquer que seja o conjunto nesse domingo não pode sobrar elementos e nem repetir ou seja todos os elementos têm que se corresponder e essa correspondência tem que ser única. Vamos lá nesse esse aqui é função **T266-D3**: Não **T267-PA**: Porque não é função **T268-D3**: Por que sobra elementos no conjunto de partida **T269-PA**: Isso! No domínio sobra um elemento **T270-PA**: Agora eu quero que vocês prestem bem atenção nessas duas palavras novas que nós vamos aprender veja bem quando nós dizemos que a correspondência deve ser única

nos elementos no domínio estamos querendo dizer que não pode ocorrer ambiguidade no domínio da função. Então vamos pensar um pouco na língua portuguesa O que é que nós chamamos de ambiguidade tudo aquilo que tem duplo sentido ou mais de um sentido dependendo do contexto aqui no estudo de função significa que eu tenho mais de uma correspondência para um mesmo elemento do domínio e se isso ocorrer não é função então primeiro critério não ambiguidade no domínio quando eu digo que todo elemento tem que ser corresponder significa que nós não queremos exceções então o outro critério é não exceção. O que seria uma exceção para vocês? **T271-E6**: É tipo quando abre uma vaga, abre o espaço, uma sobra. **T272-PA**: Isso mesmo! Logo, se nós temos uma exceção no domínio também não é função. E o segundo critério para que seja função é a não exceção no domínio da função. Então para que uma correspondência seja função eu não posso ter exceções e nem ambiguidades onde turma? **T273-Turma**: No domínio. **T274-PA**: Agora eu gostaria que vocês observassem as 4 correspondências que atendem as características e critérios de uma função. Vamos olhar para o contradomínio. Observem que nem todos os elementos são correspondidos no contradomínio, mas esses elementos que foram correspondidos formam um conjunto especial chamado conjunto imagem da função e de denotado por Im(f). Esse conjunto está contido no conjunto contradomínio e é formado por aqueles elementos que fizeram correspondência com o domínio. Aqui nessa correspondência quem são os elementos do contradomínio? **T275-Turma**: 1, 0 e -1 **T276-PA**: Isso mesmo todos os elementos do conjunto e o conjunto imagem formado por quais elementos? **T277-Turma**: 1 e 0 **T288-PA**: Exatamente apenas os elementos do contradomínio que foram correspondidos. Muito bem! Por que em algumas situações o conjunto-imagem vai ser igual ao conjunto contradomínio mas nem sempre isso vai acontecer.
Intervenção Avaliativa
T289-PA: Vamos ver essa questão aí que apresenta diagramas e correspondências, o que vocês acham essa correspondência é função? **T270-Turma**: Não **T271-PA**: Porque não é função? **T272-C3**: Por que está sobrando e repetindo elementos na partida. **T273-PA**: Então eu peço que vocês manipulem este diagrama seja colocando setas ou tirando setas de modo a tornar essa correspondência é uma função. (Lapso temporal) **T274-PA**: Então vamos lá, vocês disseram que isso aqui não é uma função, que essa correspondência não é uma função. O que foi que aconteceu? **T275-Turma**: Tem elemento sobrando no domínio. **T275-PA**: Se está sobrando. Então o que foi que aconteceu, qual é o nome que a gente dá para isso. **T276-Turma**: exceção. **T277-PA**: E o que mais aconteceu para que você chegasse à conclusão de que não é uma função? **T278-Turma**: Está repetindo elementos. **T279-PA**: Qual é o nome que a gente dá para isso? **T280-Turma**: Ambiguidade. **T281-PA**: E o que vocês fizeram para que não tivesse nem exceções e nem ambiguidades no domínio? **T282-Turma**: Tiramos a seta ali. **T283-PA**: Vocês concordam tá certo né e o que mais vocês fizeram? Inaudível, vários falando.

T284-PA: Bom, vocês se saíram muito bem, gostei de ver as diferentes propostas de vocês. Vejam que há uma última questão, que eu peço que façam em casa e tragam resolvida na segunda-feira para discutirmos. Muito obrigada pela participação de vocês.

TRANSCRIÇÃO DO EPISÓDIO 2

Retomada da aula anterior
T285-PA: Bom Dia Turma! Nós temos pouco tempo para fazer uma atividade e vou precisar muito da colaboração de vocês. Peço que fiquem atentos a partir de agora. Não conversem enquanto eu estiver falando, para nós não perdemos tempo repetindo as instruções. Hoje, nós estamos aqui com cinco professores: PA Andréa, Professor Wallace, PA Liliane, professor Maurício e Professor Denis, se precisarem, podem pedir ajuda a eles, caso não entendam o comando da questão. Nós vamos retomar a última questão da aula passada. Vocês fizeram a última questão? A última questão diz assim: “A produção em horas de uma fábrica pode ser expresso pela função ....”. Qual é o símbolo que está representando o domínio da função aqui? Eu tenho o tempo em horas e aqui eu tenho o número de peças produzidas, quem está representando o domínio da função? **T286-Turma**: “T” **T287-PA**: T grande. E o N grande é o quê? Turma: O contradomínio. **T288-PA**: Percebam que t-zinho representa então os elementos pertencentes a T Grande, domínio da função p. E o n-zinho? **T289-Turma**: Elementos do contradomínio, N-grande. **T290-PA**: Essa função tem uma regra, está sendo expressa por essa equação n=80t, o que isso significa? Que o número de peças é igual a 80 vezes tempo de produção. Quanto se produz em 2 h? **T291-D3**: 160 **T292-PA**: Como você fez? **T293-D3**: Eu multipliquei 80 por 2. **T294-PA**: Vamos calcular para 0, para uma, para duas, para três, para quatro, para 5 horas. Vejam aí. **T295-PA**: Agora vocês que vocês fizeram diagramas para corresponder, me digam quais são os elementos do domínio T? **T296-Turma**: 0, 1, 2, 3, 4, 5. **T297-PA**: E do contradomínio, N? **T298-Turma**: 0, 40, 80, 120,160, 200,240, 320 e 400. **T299-PA**: Observe a diferença entre você ter o domínio (T) e você ter os elementos do domínio(t). Você ter o contradomínio (N) e você ter os elementos do contradomínio (n). Agora, vamos ver quem seria a imagem dessa função? **T300-Turma**: Todos os elementos onde a seta chegou. **T301-PA**: Exatamente, e onde a seta chegou? **T302-Turma**: 0, 80,160, 240, 320 e 400. **T303-PA**: Excelente! Agora vamos retomar a definição de função. Essa correspondência de fato é uma função? **T304-Turma**: Sim! **T305-PA**: Por quê? **T306-D3**: Porque não sobrou nem repetiu elementos no domínio. **T307-C2**: Por que todos os elementos da partida tem uma única chegada. **T308-PA**: Tá ok o que vocês disseram, no entanto agora nós vamos utilizar uma linguagem mais formal. O nosso conjunto de partida na função chama-se domínio da função, o conjunto de chegada chama-se contradomínio da função. Para que ocorra comportamento funcional não pode haver no domínio ambiguidades e nem exceções, não é mais repetições e sobra. Ok? **T309-D3**: Então é função quando, no Domínio, não tem ambiguidades e nem exceções. **T310-PA**: Exatamente! No contradomínio pode ter exceção? **T311-Turma**: Pode!

<table>
<tr><td colspan="6">T312-PA: No contradomínio pode ter ambiguidades?
T313-Turma: Pode!
T314-PA: Gostei, parabéns a todos, agora estamos prontos para iniciar a atividade 2.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Instrução inicial</td></tr>
<tr><td colspan="6">T315-PA: Atividade 2, função como relação de dependência entre variáveis. Objetivo: identificar as variáveis de uma função e a relação de dependência. Olhem para as situações da primeira atividade, observem que nem sempre nós relacionamos quantidades, algumas vezes relacionamos qualidades. Olha para a fotografia e diga o que ela representa.
T316-Turma: Farinha! Farinha biscoito! Preço! Farinha D'água!
T317-PA: Ok então vocês perceberam vários tipos de farinha, agora me digam o que diferencia uma farinha da outra?
T318-Turma: As informações que tem nas placas! Os preços! O tipo de farinha e seu preço!
T319-PA: Mas esses preços estão relacionados a quê?
T320-E2: Eu acho que é a qualidade da Farinha.
T321-PA: Ok então quanto melhor a qualidade da Farinha...
T322-Turma: Maior o preço.
T323-PA: Então eu posso dizer que o preço da farinha varia com a sua qualidade. Logo "tipo de farinha" vem a ser uma variável quantitativa ou qualitativa?
T324-Turma: Qualitativa!
T325-PA: Agora me digam de que maneira essa farinha é vendida?
T326-Turma: Por quilo! Por litro!
T327-PA: Analisem a fotografia e me digam.
T328-Turma: É por Litro!
T329-PA: O que na fotografia indica que é por litro?
T330-Turma: Aquela vasilha de medir 1 litro!
T331-PA: Isso mesmo! Vocês estão fazendo a leitura da imagem. Vamos ler Juntos o comando da segunda questão! Entenderam?
T333-E2: Não entendi.
T334-PA: Releiam e discutam entre vocês.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Discussão entre os grupos</td></tr>
<tr><td>Grupo A</td><td>Grupo B</td><td>Grupo C</td><td>Grupo D</td><td>Grupo E</td><td>Grupo F</td></tr>
<tr><td>T335-A1: Acho que aqui é só multiplicar com o preço.
T336-A2: É assim a farinha d’água pura fica 4, 8, 12, 16, 20.
A3: 5, 10, 15, 20, 25. Agora é tu A4 o mais difícil.
A4: 6, 12, 18, 24, 30.
T337-PC: Quanto é que é a variável é quantitativa?
T338-A1: Quando a quantidade vai aumentando.</td><td></td><td>T345-C6: Professora, como é que faz aqui?
T346-PC: Identifique primeiro o preço de cada farinha.
T347-C6: Ah tá, então essa que custa 4 reais, 1 quantidade é 4, duas é 8, três é 12 e assim vai.
T348-C1: Ah tá!
T349-C3: Não entendi.
T350-C6: Tu pode ir somando 4+4, 8; +4, 12. Ou vai multiplicando 1x4, 2x4, 3x4.</td><td>T353-D1: Como é isso aqui?
T354-D3: é só multiplicar a quantidade pelo valor da farinha.
T355-D1: Ah tá!
T356-D3: Não sei quando é qualitativo e quantitativo.
T357-PC: quando você tem quantidades?
T358-D3: No valor a pagar. Então o tipo de farinha é qualitativa.
T359-D2: Dependendo da quantidade aumenta valor.
T360-D3: Quantitativo é</td><td>T361-E1: Eu estou muito feliz porque estou entendendo esse negócio de Matemática!
T362-E2: Todas aqui são 5 reais?
T363-E1: Essa d'agua pura é r$ 4 compra um dá r$ 4 compra dois dá r$ 8, se compra 3 da r$ 12, 4 dá r$ 16, 5 dá r$ 20.
T364-E2: Ha! entendi. Obrigada! Então eu pego o valor da farinha e vou somando a quantidade.
T365-E1: Isso! Agora vou explicar pra ti, aqui.
T366-E3: Essa Branca biscoito vai dar 5, 10, 15, 20 e 25
T367-E4: Aqui dá 12, 15 e 18.</td><td></td></tr>
</table>

T339-A2: Qualitativa quer dizer da qualidade da farinha. **T340-PC**: É na linha ou na coluna que é qualitativa? **T341-A1**: É na linha. **T342-PC**: E quando é quantitativa? **T343-A1**: Na coluna **T344-PC**: Que fique registrado que eu peguei a melhor equipe e que elas gostam de (inaudível)		**T351-C3**: Entendi. **T352-C6**: Aqui o preço está dependendo da qualidade	o valor e qualitativo é o tipo de farinha.	**T368-E1**: Não é assim! **T369-PC**: Observei aqui que alguns de vocês estão preenchendo pelas linhas, outros estão preenchendo pelas colunas. Vocês vão ver que fazendo pelas colunas vai ficar mais simples. Me explica como foi que você chegou nesses resultados. **T370-E1**: Eu fui somando um litro é quatro aí para dois litros eu fiz quatro mais quatro, aí para três eu acrescentei mais quatro até que eu cheguei no 20. **T371-PC**: Escreva aí então foi que você fez para 3 litros: 4+4+4 **T372-E1**: Eu somei o 4 três vezes. **T373-PC**: Existe uma forma mais simples de você calcular essas somas sucessivas de mesmo valor, observe nessa aqui que se você fizer cinco mais cinco mais cinco que deu quinze, se você fizer 5 x 3 também da 15. Então nesse caso você pode fazer a multiplicação. **T374-Grupo E**: Ah! Entendi. **T375-PC**: Então me explique por quê que dois litros dá de r$ 4 deu 8. **T376-E1**: Por que é 4 x 2. **T377-PC**: E por que porque 4 litros	

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>dá de r$ 5 deu r$ 20?
T378-E2: O que é 5 x 4=20
T379-PC: Assim vai ficar bem mais simples, imagine se fosse uma quantidade elevada e você precisasse somar sucessivamente? Seria cansativo. A multiplicação facilita.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">**Socialização**</td></tr>
<tr><td colspan="6">**T380-PA**: Vamos ver como ficou a farinha d'água oura para 1, 2, 3, 4 e 5 litros:
T381-Turma: 4, 8, 12, 16, 20.
T382-PA: E da farinha branca biscoito, quanto custa o litro?
T383-Turma: 5 reais.
T384-PA: Como ficou os valores quando varia a quantidade de litros?
T385-Turma: 5,10, 15, 20, 25.
T386-PC: E a farinha da água pura de Bragança?
T387-Turma: 6, 12, 18, 24, 30.
T388-PA: Muito bem! Agora vamos ver a terceira questão: "observando a variação em linha e em coluna do quadro, em qual a variação é quantitativa e em qual é qualitativa". Vamos observar na linha primeiro. O que varia?
T389-Turma: O preço com o tipo de farinha!
T390-PA: Que tipo de variação é essa?
T391-Turma: Qualitativa!
T392-PA: E nas colunas, que tipo de variação vocês observam?
T393-Turma: Quantitativa.
T394-PA: Por quê? O que está variando?
T395-Tuma: Porque dependendo da quantidade tem um valor.
T396-D2: A coluna é quantitativa porque está dependendo da quantidade de farinha comprada.
T397-PA: Vamos ver a quarta Questão: É possível estabelecer algum critério de variação em cada uma dessas colunas? Qual? Vamos ver na primeira coluna como variou?
T398-Turma: De quatro em quatro.
T399-PA: E na segunda coluna?
T400-Turma: De cinco em cinco.
T401-PA: E na terceira coluna como aconteceu?
T402-Turma: De 6 em 6.
T403-PA: Sendo assim, qual a expressão que estabelece a correspondência entre o valor a pagar e a quantidade de farinha a ser adquirida em cada um dos casos. Então vejam uma expressão que represente como o valor a pagar está relacionado a quantidade de farinha comprada. Como vocês fariam? Relembrem da questão que fizemos em que a produção era 80 peças por hora.

Lapso temporal

T405-PA: Esses o que são esses valores que aparecem na primeira coluna:
T406-Turma: Quantidade de litros de farinha.
T407-PA: E nas demais colunas?
T408-Turma: Litro! Preço! tipo de farinha!
T409-PA: Vamos lá. Você vai comprar farinha, do que você precisa?
T410-Turma: De dinheiro!
T411-PA: Então o que representam essas colunas?
T412-A1: O total em dinheiro a pagar pela quantidade de farinha comprada.
T413-PA: Que expressão eu posso fazer para cada tipo de farinha para expressar quanto pagar dependendo da quantidade de farinha.</td></tr>
</table>

Discussão nos grupos					
Grupo A	**Grupo B**	**Grupo C**	**Grupo D**	**Grupo E**	**Grupo F**
T414-PC: Vocês podem discutir. **T415-A1**: Vamos representar com letras, A é quantidade e x é preço/ Professor: Reflitam melhor sobre isso. **T420-A1**: Aqui é 4 vezes 1, 4 vezes 2, 4 vezes 3. **T421-A2**: Fica como se fosse uma lei né. **T422-PC**: Isso! Mas você precisa saber o que cada letra representa.		.	**T423-D1**: Vai ficar 4 vezes alguma coisa. **T424-D4**: Eu não entendi nada. **T425-D3**: Professora, aqui seria o preço vezes a quantidade. **T426-PC**: Isso! Faça assim com todos os outros. Explique para suas colegas. **T427-D3**: Então vai ficar T, que significa total a pagar, igual ao P, que é o preço, vezes Q que é a quantidade. **T428-D1**: Sim mas vai ficar tudo igual? **T429-D3**: Não para cada um vai ser um preço diferente. Nesse aqui fica T = 5Q. **T430-D2**: E essa de 6 reais fica 6Q. **T431-D4**: Ah tá.	**T332-PC**: Como você fez aqui para obter o 20? **T433-E2**: Fiz 4x5. Professor: O que é o 4 e o 5? **T434-E2**: 4 é o preço e 5 é a quantidade. **T435-PC**: Então você sempre multiplica a quantidade pelo preço, certo? Represente por letra o valor a pagar e a quantidade. **T436-E3**: E o 4? **T437-PC**: Esse quanto não muda, então não precisa de uma letra pra ele. Você só põe a letra para as quantidades que variam: **T438-E2**: Então vou chamar de x para quantidade e y para o valor a pagar.	
Socialização questão 5 e 6					
T439-PA: Vamos lá fazer a questão 5 e 6 como foi que vocês fizeram? Nós temos aqui as variáveis quantidade de Farinha em litros e o valor a pagar em reais. Que letras vocês utilizaram para representar cada uma dessas variáveis? **T440-E2**: Usei X e Y. **T441-A2**: Q e V. **T442-PA**: Vocês concordam que essa relação entre a coluna da quantidade de farinha e a coluna do valor a pagar represente uma correspondência funcional? **T443-Turma:** Sim, não sobra e nem repete elementos. **T444-PA**: Então vamos ver aqui como vocês fizeram? utilizaram Q para quantidade de farinha e V para valor a pagar certo? Se esse é um comportamento funcional quem representa o domínio e quem representa o contradomínio? **T445-Turma**: Q é o domínio e V é o contradomínio. **T446-PA**: Certo! Então temos uma função de Q em V. E a expressão? **T447-Turma**: V=4Q. **T448-PA**: Então vocês estabeleceram uma expressão que diz que o valor que eu vou pagar é 4 vezes a quantidade de farinha, em outras palavras o valor que a pagar depende da quantidade de farinha. E mais ainda: Agora você pode calcular o valor a pagar diretamente nessa expressão sem					

<table>
<tr><td colspan="6">precisar fazer adições sucessivas como vocês estavam fazendo. Eu quero comprar 2 L de farinha quanto eu vou pagar?
T450-Turma: 8 reais.
T451-PA: e 10 L?
T452-Turma: 40 reais.
T453-PA: E a farinha branca biscoito como ficaria?
T454-A2:TP=5Q.
T455-PA: O que é TP?
T456-A2: Total a pagar.
T457-PA: Ok entendi! E agora, como ficou a última farinha?
T458-E2: Y=6x
T459-PA: o que é X e Y.
T460-E2: Y e valor a pagar e X é a quantidade de farinha.</td></tr>
<tr><th colspan="6">Discussão nos grupos – questão 7 e 8</th></tr>
<tr><th>Grupo A</th><th>Grupo B</th><th>Grupo C</th><th>Grupo D</th><th>Grupo E</th><th>Grupo F</th></tr>
<tr><td>T461-PC: Pessoa comprar 10 litros de farinha vai pagar quanto?
T462-A2: Vai ser a mesma coisa daqui ó. É só substituir o 10.
T463-A1: É só colocar aqui no lugar do X o 10 né?
T464-A5: Tem que fazer de todos?
T465-A2: Dos três né.
T466-PC: Vocês substituem nas expressões que vocês criaram.
T467-A1: Então fica, 4 vezes 10, 5 vezes 10 e 6 vezes 10.
T468-PC: Como ficou a questão 8? Quanto se pode comprar com r$ 60?
T469-A5: Fui dividindo por cada preço. 60 dividido por 4 deu 15,</td><td></td><td></td><td>T470-D1: Ei D3 volta aqui. A gente não tá entendendo esse aqui.
T471-D3: É só você substituir o 10 na expressão e multiplicar.
T472-D1: Olha aqui de dois é assim no lugar do que tu vai colocar o 10, aí vai ficar quatro vezes 10, 5 vezes 10, 6 vezes 10.
T473-PC: Conseguiram fazer tudinho?
T474-D3: Olha eu fiz assim: Aqui eu já tenho o total o que é o valor, r$ 60 aí no caso eu vou dividir esse total pelo preço da farinha que vai me dar a quantidade comprada.
T475-PC: Isso! Tá certinho!</td><td>T476-PC: Olha só, você já tem uma expressão, agora basta você fazer substituições você sabe que o x representa a quantidade então vamos ver para essa expressão aqui Y = 4X se eu tenho que comprar dois litros de farinha, substituo 2 no x, quanto que eu vou pagar?
T477-E2: Ah! sim. 8 reais.
T478-PC: Agora você calcula para 10 e calcula também para as outras expressões das outras Farinhas.
T479-E1: Entendi. Então aqui faz 6 vezes 10 dá 60.</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>60 dividido por 5 deu 12, e 60 dividido por 6 deu 10.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Socialização</td></tr>
<tr><td colspan="6">T480-PA: Quanto custa 10 quilos desta farinha?
T481-Turma:40 reais!
T482-PA: E desta?
T483-Turma: 50 reais!
T484-PA: E desta?
T485-Turma: 60 reais!
T486-PA: Como vocês calcularam isso?
T487-C2: Fazendo dobro do valor!
T488-PA: Então pela tabela você sabia o valor para 5 kg aí você calculou o dobro e obteve para 10 kg. Boa estratégia! Agora vamos ver quantos quilos da farinha d'água pura você pode comprar com r$ 60.
T489-Turma: Deu 15 litros.
T490-PA: Como vocês fizeram?
T491-D3: Peguei esse valor e dividi pelo preço da farinha.
T492-PA: Ok então você pegou os r$ 60 e divide pelo preço que é r$ 4 e obteve r$ 15. Certo! E a farinha branca biscoito?
T493-B2: Dividi R$ 60 por 5 que é o preço e deu 12 l.
T494-PA: E a farinha da água pura de Bragança como vocês calcularam?
T495-C2: Deu 10 litros.
T496-PA: Bom, eu vou só esclarecer algumas coisas para vocês. Percebam a diferença entre variável e unidade de medida vocês estão relacionando as variáveis valor a pagar e quantidade de farinha. Essas são as variáveis, mas qual é a unidade de medida dessas variáveis? Valor a pagar a unidade de medida é reais e a quantidade de farinha está em Litros. Vocês souberem fazer essa diferença o professor de física de vocês não agradecer muito. Eu vi que algumas pessoas utilizaram o L para representar a quantidade de farinha. Não tem nenhum problema fazer isso desde que você tenha consciência de que L está representando a quantidade de farinha e é medida em milímetros. Que a sua variável é a quantidade de farinha e "litros" é a sua é a unidade de medida. Outra coisa se eu representar apenas uma expressão isso aqui é suficiente para dizer que é uma função?
T497-Turma: Sim!
T498-PA: Vocês tem certeza? Do que é composta uma função?
T499-Turma: Domínio! Contradomínio!
T500-PA: E aonde aqui tá mostrando o domínio contra domínio? Isso aqui é apenas uma equação, mostra como os elementos de dois conjuntos se relacionam, mas não mostra quem são esses conjuntos. Então para que essa expressão possa representar um comportamento funcional é necessário que eu defina quem é o conjunto domínio e quem é o conjunto contradomínio, aí sim a minha representação deste o comportamento funcional está completa. Mas aí você pergunta: professora, como eu identifico ou defino isso? Bom, existem várias maneiras uma seria o contexto de como você fala da situação, a expressão acompanhada de um texto e que especifique ao menos o domínio, ou quando você usa esta notação aqui que usa a seta mostrado de onde sai e para onde vai, seguida dessa expressão.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Formalização</td></tr>
<tr><td colspan="6">T501-PA: O aluno B2 falou agora há pouco que o valor a pagar depende da quantidade de farinha. Isso era exatamente o ponto onde nós queremos chegar. Então bem anota isso aí no espaço de formalização do material de vocês. Essas variáveis que dependem de outras variáveis nós chamamos de variáveis dependentes, e essas variáveis que dominam a variação são chamadas de variáveis independentes. Notem que as variáveis Independentes pertencem ao conjunto domínio da função e as variáveis dependentes pertencem ao conjunto contradomínio da função. Por favor copiei a formalização.
T502-A5: Então a quantidade de farinha a uma variável independente e o valor a pagar é uma variável dependente.
T503-PA: Muito bem!</td></tr>
<tr><td colspan="6">Socialização da Intervenção avaliativa</td></tr>
<tr><td colspan="6">T504-PA: vamos lá como ficou o item a.
T505-D3: A massa é variável independente o volume a variável dependente</td></tr>
</table>

T506-PA: Entendi **T507-A5**: O tempo é a variável independente e espaço a variável dependente. Porque espaço depende do tempo. **T508-PA**: Muito bem.

TRANSCRIÇÃO DO EPISÓDIO 3

<table>
<tr><th colspan="6">Retomada da aula anterior</th></tr>
<tr><td colspan="6">T509-PA: Bom dia a todos! Em primeiro lugar gostaria de agradecer a paciência de vocês e a colaboração que têm nos dado em participar desta pesquisa. Como já havia dito nós somos do Programa de pós graduação em ensino de Matemática e nós criamos produtos para o ensino de Matemática. Vocês são nosso clientes e estão experimentando nosso produto, assim vamos ajudar a melhorar o ensino de Matemática. Agora nós vamos retomar o que estudamos nas duas últimas aulas. Me digam, toda correspondência é função?
T510-C2: Todo elemento no conjunto de chegada precisa ter um único elemento no conjunto de partida.
T511-PA: Como chamamos esse conjunto de partida numa função?
T512-Turma: Domínio.
T513-PA: Qual a característica do domínio.
T514-D3: Não pode haver exceção e nem ambiguidades.
T515-PA: Muito bem! E no contradomínio pode ter exceções ou ambiguidades?
T516-Turma: Pode
T517-PA: E os elementos que fizeram correspondência no contradomínio como chamamos?
T518-Turma: Imagem.
T519-PA: Na segunda atividade nós partimos de uma reportagem da venda da farinha no ver-0-peso, vimos o que era uma variável quantitativa e variável quantitativa. Também vimos o que é uma variável dependente e independente. Agora chamo a atenção para a identificação do domínio nas diferentes representações de função. Vejam que no diagrama e no quadro por exemplo, você tem a delimitação do domínio no conjunto de partida ou na primeira coluna do quadro, porém a representação em equação precisa de informações a mais sobre esse domínio, por exemplo, na venda da farinha, poderíamos ter uma quantidade de farinha negativa?
T520-Turma: Não!
T521-PA: Então para ser função, além da equação y=4x, por exemplo, temos que dizer que x pertence a um conjunto de números inteiros positivos ou números naturais, pode ter zero?
T522-Turma: Pode!
T523-PA: Agora, gostaria que vocês se lembrassem de nossa oficina, lembram que nós substituíamos qualquer valor na equação para calcular? Sabem como chamamos esse valores quaisquer? São valores arbitrários que utilizamos numa correspondência qualquer. Mas numa função não é assim. Numa função os valores a serem substituídos, eles variam, eles percorrem por um domínio pré-estabelecido. Então, perceberam a importância de estar bem definido o domínio? Alguma dúvida?
T524-Turma: Não!</td></tr>
<tr><th colspan="6">Instrução inicial</th></tr>
<tr><td colspan="6">T525-PA: Vamos passar para a terceira atividade. A primeira questão está superada porque já discutimos sobre. Então vamos partir para a segunda: Considerando que $x \in$ A e $y \in$ B, represente no sistema de eixos (X0Y) as situações expostas, classifique-as como função, ou não, e justifique sua resposta. Os elementos do conjunto A estão na vertical
ou horizontal no eixo cartesiano?
T526-Turma: Horizontal.
T527-PA: E o conjunto B.
T528-Turma: Vertical.</td></tr>
<tr><th colspan="6">Discussão nos grupos</th></tr>
<tr><td>Grupo A</td><td>Grupo B</td><td>Grupo C</td><td>Grupo D</td><td>Grupo E</td><td>Grupo F</td></tr>
</table>

T529-A2: Tem que ligar é isso que eu não estou entendendo. **T530-A1**: Vou te explicar. Deixa eu ver aqui. **T531-A3**: Porque o 0 pro 2. **T532-A1**: Normal ele fica sozinho. **T533-A3**: Desse lado ele fica sozinho? **T534-A2**: Para mim ainda não é. **T535-A1**: No x não tem três. Tem que colocar e ligar do jeito que tá aqui. **T536-A2**: No A tem o x e no B tem o y aí tem que ligar um X com Y. **T537-A1**: É ó:-1 vai 1, 0 vai no 2, 1 vai no 3, e o 2 sobra aqui no x	**T538-B1**: Por que tu colocou o 0 pro 2? Ele fica sozinho. **T539-B2**: Amiga, não é. Todos tem que ligar? **T540-B1**: Não, nem todos. **T541-B3**: olha: -1 com 1, 0 com 2, 1 com 3, e o 2 fica sem ponto. **T542-B1**: essa primeira não é função **T543-B2**: Pode colocar 2 indo pra 2. Porque não pode repetir pra ser função, por que tem exceção **T544-B3**: Como eu coloco duas vezes o zero aqui. **T545-PC**: o ponto (0,0) é a origem da função. **T546-B1**: É esse ponto aqui no meio né.	**T547-PC**: Alguma dúvida aqui? O que é exceção? **T548-C2**: Quando não tem ponto de chegada. **T549-C1**: E ambiguidade é esse aqui o 2 que vai no 3 no 4. **T550-C4**: A 3 e a quatro é o mesmo comando né, só muda a situação. **T551-C1**: a segunda situação não tem ligação. **T552-PC**: Notem que o zero fica no meio localizem-no plano os valores de x e marque o ponto. **T553-C2**: Na segunda situação tem um que fica sem ligação. **T554-C1**:e esse 2 aqui. **T555-C2**: 2 sobra. **T556-PC**: observem que como representar no plano o conjunto A e o conjunto B. Onde eu represento o A. **T557-C1**:Na horizontal. **T558-PC**: E o conjunto B? **T559-C2**: na Vertical. **T560-PC**: então vocês	**T571-PC**: Pode falar. Fique a vontade. **T572-D3**: Agente vai representar, observar e classificar se é ou não função. **T573-D2**: Ah tá. **T574-D3**: Nesse aqui se repete no domínio e aqui se repete no contradomínio. **T575-PC**: Façam essa correspondência aqui no plano. **T576-PC**: Terminaram a questão 2? **T577-D3**: Acho que sim. A questão três é só de responder né. **T578-PC**: Na 3 façam as retas verticais passando por cada valor de x e veja se passa pelo ponto. **T579-D3**: Ah entendi. Então no caso da situação 1, quando x igual a 2 essa reta não passa no ponto por que tem exceção. **T580-PC**: isso! Façam isso em todas as situações verificando onde há exceção e onde há ambiguidade		

		não precisam colocar vários valores, basta colocar esses que estão nos conjuntos. Quais os valores da horizontal? **T561-C3**: -1 e 0 **T562-PC**: E da vertical? **T563-C2**:0, 1 e 2 **T564-PC**: Essas correspondên-cias do quadro você transforma em pontos no plano. **T565-C1**: e o 2? **T566-PC**: O 2 não se corresponde com ninguém. **T567-C2**:Ah entendi agora. **T568-PC**: Agora avaliem se é ou não função. **T569-C3**: Essa terceira não é porque tem aquilo mesmo como é o nome? **T570-C6**: Ambiguidade			

Socialização
T581-PA: só olhando essa aqui é função? **T582-Turma**: Não **T583-PA**: Porque? **T584:D3**: Tem exceção. **T585:PA**: Sobrou o 2 né? E esse aqui, é ou não função? **T586:Turma**: É. **T587:PA**: Eu posso ligar esse pontos? **T588-Turma**: Não! Pode! **T589:PA**: Tenho alguma correspondência entre 0 e 1? **T590:Turma**: Não. **T591-PA**: Isso, pois se ligarmos os pontos, estaremos dizendo que para todos os valore de x entre 0 e 1 há correspondente em y, e isso não é verdade, então esse gráfico é de pontos apenas. **T592-C1**: não entendi. **T593-PA**: E a situação 3 é função? **T594-Turma**: Não!

T595-PA: Por que?
T596-Turma: Tem ambiguidade no 2.
T597-PA: Isso ambiguidade no domínio. Como foi que essa ambiguidade se apresentou no gráfico de pontos? O 2 correspondendo com 3 e com 4?
T598-D3: Tem dois pontos na mesma direção.
T599-PA: Agora que vocês já concluíram as situações que são função, 2 e 4, vamos fazer a questão 3. Após conduzir retas verticais por todos os valores $x \in$ A, responda: Então se eu passar as retas intersectando os valores de x, eu estou passando por qual conjunto?
T600-Turma: Domínio.
T601-PA: Logo nem todo gráfico representa uma função. Caso haja exceções e ambiguidades no domínio não é função.
T602-PA: Então na situação 1 vamos passar a reta por quais valores de x.
T603-C1: -1, 0, 1 e 2.
T604-PA: a) Em qual das situações as retas intersectam valores de $x \in$ A que não possuem um correspondente $y \in$ B?
T605-D3: Na situação 1, porque o corta o 2 mas não corta o ponto.
T606-PA: Então quer dizer que para que um gráfico seja função, para todos os valores de x, essa reta tem que cruzar o domínio e algum ponto do gráfico. E a b) Em qual das situações as retas intersectam valores $x \in$ A que possuem mais de um correspondente $y \in$ B?
T607-Turma: A situação 3.
T608-PA: Por quê?
T609-Turma: Porque cortou 2 pontos.
T610-PC: Então aprimorando, a reta traçada só pode intersectar o domínio e um único ponto. Vejamos o item c).......Quais têm esse comportamento?
T611-D3: As que são função!
T612-PA: Agora eu gostaria que vocês me dissessem com suas palavras coo vocês reconhecem uma função olhado para o gráfico. Discutam aí!

Discussão nos grupos					
Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E	Grupo F
T613-A2: Quando a gente faz as retas assim só corta um ponto.		**T614-C1**: As situações do item d são a 2 e 1. **T615-PC**: Qual a conclusão de vocês. **T616-C6**:Quando cada ponto de partida tem uma única chegada. **T617-C2**: Quando não tem ambiguidade e exceção no domínio. **T618-PA**: Mas como vocês reconhecem isso no gráfico. **T619-C2**: fazendo as ligações.	**T627-PC**: qual a conclusão de vocês? **T628-D3**: É função quando cada elemento o domínio se liga com único da chegada, sem, ambiguidades, nem exceções. **T629-PC**: Mas olhando para o gráfico, o que você conclui? **T630-D3**: É quando a reta vertical passa por um único ponto.	**T631-PA**: Qual a conclusão de vocês? **T632-E1**: È quando o domínio tem correspondentes. **T633-PA**: Correspondente, só 1. Mas no gráfico como isso fica? **T634:E2**: A reta só corta um ponto. **T635:PA**: Mas todas as retas verticais ao longo do domínio devem intersectar o gráfico uma única vez. Então não só uma reta.	

		T620-PA: O que nós fizemos ali? Traçamos retas, algumas retas não cruzaram pontos do gráfico. O que é isso? **T621-C6**:Exceção. **T622:PA**: E quando essa reta corta mais de um ponto do gráfico, o que acontece? **T623:C2**: Ambiguidade. **T624:PC**: E quando isso não acontece, o que vocês concluíram? **T625-C2**: todas a retas cortam um único ponto. **T626-PC:** Certo! Então todas essas retas que passaram o domínio devem intersectar um único ponto do gráfico, para que ele represente uma função.			
Formalização Questão 4 e 5					
T636-PA: Passei em todos os grupos e todos chegaram a uma boa conclusão de como reconhecer uma função na representação gráfica. Assim, chegamos ao momento de formalizar tudo isso. Peço que todos se concentrem no que vou dizer e depois copiem: Diz-se que um gráfico no sistema cartesiano representa uma função quando **toda** reta vertical paralela ao eixo das ordenadas intersecta sempre o domínio e o gráfico em um **único** ponto, não havendo **ambiguidades** e nem **exceções**. Observem que a mesma ideia que vocês concluíram para o gráfico de pontos vale para o gráfico contínuo. Chamo a atenção de vocês para os exemplos da formalização, não confundam o plano cartesiano com o gráfico, o gráfico é apenas esse conjunto de pontos formados pelas correspondências. Então temos retas paralelas a y ao longo de todo domínio tocando apenas um ponto do gráfico. Vamos fazer a questão 4.					
Socialização					
T637-PA: Vamos lá. Temos um empasse aqui. O grupo F diz que o item C é função e o grupo A diz que não é função. Por que você diz que é função? **T638-F4**: Por que a reta só corta um ponto. **T639-Grupo A**: Mas assim corta 2 pontos. **T640-PA**: Tem problema assim pessoal? Na horizontal cortar o gráfico dias vezes?					

T641-Turma: Não.
T642-PA: Essa condição é para retas verticais. Vamos colocar num diagrama essa situação. Perceberam? Esta tem ambiguidade no domínio e esta ambiguidade no contradomínio. A reta vertical vai intersectar apenas o domínio.
T643-A1: Ah tá, entendi.
T644-PA:Grupo B o item d é ou não função?
T645:Grupo B: Sim.
T646:PC: Exatamente, é uma função constante toda reta vertical que intersectar o domínio vai tocar só uma vez no gráfico.
T647-PA: Vamos analisar a I e a J. Se eu traçar retas neste trecho aqui da I, eu vou intersectar o gráfico?
T648-Turma: Não
T649-PA: O que está acontecendo?
T650:Turma:Exceção.
T651-PA: E a J é função?
T652:Turma: Sim
T653-PA: Vamos fazer juntos a última questão. Vocês já viram esse tipo de promoção? Será que toda promoção é realmente vantajosa? Lembram das "black fraude" da vida? Bom na promoção do comerciante, a farinha que custava R$ 6,00, quem compara até 10 L pagará R$ 5,50 por cada litro. De 11 a 30 litros R$ 4,50, a partir de 31 L pagará R$ 4,00 por litro a perder vista. Aliás, até quanto turma?
T654-Turma: Até 60L.
T655-PA: Nesse caso de quanto a quanto vai ser o domínio?
T656-Turma: de 1 a 60! De 0 a 60.
T657:PA: Pode ser de 0 a 60. Se eu nada comprar, nada pagarei. Agora vamos ver por partes como fica o menor valor e maior valor em cada intervalo. De zero a 10?
T658-Turma:0 e55
T659-PA: Então vamos colocar aqui no plano esses pontos (0,0); (10,55). E agora no intervalo de 11 a 30, qual o maior e menor valor?
T660-Turma: 49,50 e 135
T661-PA: E no intervalo de 31 a 60?
T662-Turma:124 e 240
T663-PA: Vamos colocar aqui no plano.
T664-PA: Bom, vamos imaginar que você vá comprar 10L de farinha e vê essa promoção. Olhando pra o gráfico que construímos, o que seria mais vantajoso? Comprar 10 ou 11 L.
T665-Turma: 11L.
T666-C1: Economiza R$ 5,50.
T667-F3: E ainda sobra para o açaí.
T668-Turma: Risos
T669-PA: Agora o que seria economicamente mais vantajoso, comprar 30L ou 31L?
T670-Turma: 31.
T671-PA: Então você compraria mais pagando menos.
T672-F3: com a sobra daria para comprar 1L de açaí
T663-PA: Agora eu gostaria que vocês me dissessem se isso estudamos aqui, sobre conceito de função, análise de gráfico, é importante para a vida prática de vocês.
T664-Turma: Sim!
T665-PA: De que forma**.**
T666-Turma: Para comparar preços! variações de valores! Ver como comprar mais pagando menos.
T667-PA: Nesse sentido, vocês acham que a matemática ajuda vocês se tornarem capazes de analisar se uma situação é ou não vantajosa economicamente e evitar que você seja lesado?
T668-Turma: Sim!
T670-PA: Assim eu dou por encerrada esta atividade e agradeço pela colaboração e participação de vocês nesta pesquisa. Sucesso a todos!

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo 66113 – 200
Belém-Pa