Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

APRESENTAÇÂO

A sequência didática “Conceito de função e suas linguagens” foi construída no âmbito do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, como produto de uma pesquisa dissertação de mestrado.

Este produto educacional é destinado para professores e estudantes do Ensino Médio para ensino e aprendizagem do conceito de função no âmbito escolar. Trata-se de um recurso didático validado experimentalmente que apresentou potencialidades quantitativas e qualitativas para o objetivo a que se destina: ensinar o conceito de função no ensino médio por meio interativo promovendo espírito investigativo, comunicação e argumentação em língua materna e linguagem matemática de forma articulada.

A construção deste potencial recurso didático no ensino de matemática foi norteada pela Teoria das Situações Didática (TSD) de Brousseau (1996), que também ajudou a compreender como ocorrem as situações didáticas entre professor, aluno e saber em episódios de aprendizagem através de um *milieu* construído de forma planejada, estratégica, fundamentada e intencional pelo professor.

A Sequência Didática Estruturada como Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual proposta por Cabral (2017), se fundamenta em estudo minucioso e profundo do objeto matemático e é constituído por intervenções que conduzem para os propósitos da TSD e permite ao estudante a construção autônoma de seu conhecimento em gradativos níveis de formalização e dando liberdade ao professor para fazer intervenções orais complementares.

De forma articulada aos aportes preliminares, de construção e aplicação do produto educacional foi validado por meio de Análise Microgenética e Análise do Discurso de acordo com Goés (2000) e Mortimer e Scott (2002), respectivamente. Tais aportes nortearam a coleta, tratamento de dados e análise de resultados. Para tanto, a experimentação do produto foi gravada em áudio e após a transcrição realizei análise de micro eventos, que evidenciaram indícios de aprendizagem em aspectos discursivos no tocante a níveis epistemológicos de apreensão de conhecimentos.

Preliminarmente realizei estudo sobre o ensino do conceito de função em uma revisão de literatura e pesquisa diagnóstica com estudantes e professores. Na revisão de literatura fiz estudos diagnósticos e experimentais e análise de livro didático, para investigar o que se ensina no ensino médio sobre o conceito de função, de modo que pude ter um panorama das principais dificuldades a serem minimizadas e possíveis metodologias que eu pudesse adotar. Na pesquisa com estudantes investiguei a perspectiva desses sujeitos sobre a aprendizagem do conceito de função, de modo a obter como resultado que os obstáculos se dão em torno da comunicação e argumentação com uso articulado de diferentes linguagens, sejam elas em língua materna ou linguagem matemática, o que justificou o título deste trabalho, aliando aos estudos preliminares levantei dez habilidades a serem desenvolvidas pela sequência didática:

Habilidades mobilizadas na SD ”Conceito de função e suas linguagens”		FONTES	
		DOCUMENTOS OFICIAIS	PESQUISAS REALIZADAS
D1	Identificar variáveis envolvidas em situação-problema.	SISPAE BNCC	Oliveira (1997) Pelho (2003)
D2	Identificar a natureza das variáveis (velocidade, tempo, peso, preço)	SISPAE BNCC	Oliveira (1997) Pelho (2003)
D3	Identificar a relação entre variáveis (independentes x dependentes).	ENEM BNCC	Pelho (2003) Cunha, Souza e Chaquiam (2010)
D4	Transcrever uma situação-problema (real/fictícia) da linguagem escrita (língua materna) para a linguagem Matemática (diagrama, gráficos, pares ordenados, equações, tabelas, quadros, etc.) e vice-versa.	ENEM BNCC SAEB PCN	Oliveira (1997) Cunha, Souza e Chaquiam (2010) Silva (2014) Silvestre (2016) Santos e Barbosa (2017)
D5	Utilizar diferentes símbolos (diferentes de *x* e *y*) para representar variáveis independente e dependente.	BNCC ENEM	Oliveira (1997) Pelho (2003) Cunha, Souza e Chaquiam (2010)
D6	Calcular uma variável a partir de outra variável.	BNCC ENEM	Oliveira (1997) Silva (2014)
D7	Definir função.	PCN	Oliveira (1997) Sá (2003) Costa (2004) Santos e Barbosa (2017)
D8	Identificar/definir/calcular o conjunto de partida (domínio) e o conjunto de chegada (contradomínio).	BNCC	Costa (2004) Oliveira (1997)
D9	Identificar diferentes representações de funções.	ENEM SAEB	Mafra (2009) Silvestre (2016) Santos e Barbosa (2017)
D10	Resolução de situação-problema (real/fictícia) que envolvem o conceito de função.	BNCC ENEM PCN	Sá (2003) Mafra (2009) Cunha, Souza e Chaquiam (2010)

Para dar suporte teórico ao professor que for fazer uso da SD “Conceito de função e suas linguagens” realizei um estudo sobre o objeto matemático conceito função na perspectiva histórica e epistemológica. Na reconstrução histórica do conceito de função investiguei o campo conceitual do objeto e os obstáculos epistemológicos que causaram limitações ou avanços ao longo dos períodos históricos e no contexto vivenciado pelos personagens destacados.

No estudo epistemológico do objeto realizei reflexões sobre a definição de função, os elementos que constituem o comportamento funcional, as diferentes representações (língua materna, diagrama, quadro, tabela, para ordenado, gráfico, algébrica) e invariantes do conceito (regra, variação, transformação, aplicação, produto cartesiano), sempre apontado características, vantagens e desvantagens de cada uma delas e ressaltando a importância da formalização, que nesta pesquisa, é indicada como sendo tarefa exclusiva do professor.

A sequência didática construída possui três atividades articuladas que de forma concomitante e colaborativa conduzem para o alcance das dez habilidades levantadas e promovem interações intencionais aluno-aluno e aluno professor, a fim de fomentar a qualidade dialógica do processo e a construção do conhecimento individual e coletivo. Antes da aplicação sugere-se realizar um teste e oficina de conhecimentos básicos para preparar cognitivamente os estudantes para os novos conhecimentos desenvolvidos pela SD.

Todo material necessário para utilização deste produto educacional, bem como a fundamentação, instrução de uso e oficina estão disponíveis a seguir.

Boa leitura e boa aula!

Edna Machado da Silva
Miguel Chaquiam

SUMÁRIO

1. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Este capítulo tem a função de apresentar a fundamentação teórica e metodológica de minha pesquisa, isto é, sob quais teorias e procedimentos metodológicos da educação Matemática e da didática da Matemática me apoio para estruturar a sequência didática para o ensino do conceito de função. Os aportes estão correlacionados aos elementos estruturantes da pesquisa, como descrevo e justifico no quadro abaixo.

Quadro 1: Aportes teóricos e metodológicos

Aporte / Teórico	Elementos	Justificativa
Teoria das Situações Didática **Brousseau (1996)**	Sujeitos (Com quem?) Contextos (Onde e quando?)	Para responder à questão de pesquisa será necessário entender como ocorrem as interações entre professor, aluno e saber, como se dão as dificuldades de ensino e aprendizagem do objeto matemático e como esse objeto vem sendo tratado em diferentes meios (sala de aula, livros didáticos, científico). Tais constatações permitirão definir os objetivos de aprendizagem da sequência didática necessários e suficientes para os sujeitos a que se destina.
Sequência Didática Estruturada como Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual **Cabral (2017)**	Objeto matemático (O que?) Instrumentos (De que forma?) Experimentação (Como fazer?)	Um estudo minucioso e profundo do objeto matemático justificará o cadenciamento e as formalizações Matemáticas nas atividades da sequência didática, de modo a minimizar possíveis erros conceituais, capacitando o professor para realizar intervenções no momento da experimentação de modo a garantir o objetivos de aprendizagem.
Análise Microgenética **Goés (2000)** Análise do Discurso **Mortimer e Scott (2002)**	Tratamento de dados (Como interpretar e analisar?) Análise de dados (Onde ocorreram e quais são os indícios de aprendizagem?) Resultados (Quais indícios de aprendizagem consolidam a potencialidade da sequência didática aplicada ?)	Após a experimentação, os dados coletados em áudio, serão transcritos por turnos (falas dos sujeitos) e analisados segundo a análise do discurso, para verificar os indícios de aprendizagem do objeto matemático percebidos durante a execução da sequência didática, nas interações entre estudantes e o professor, bem como entre os próprios estudantes. Tais indícios revelarão o nível de potencialidade da sequência didática.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

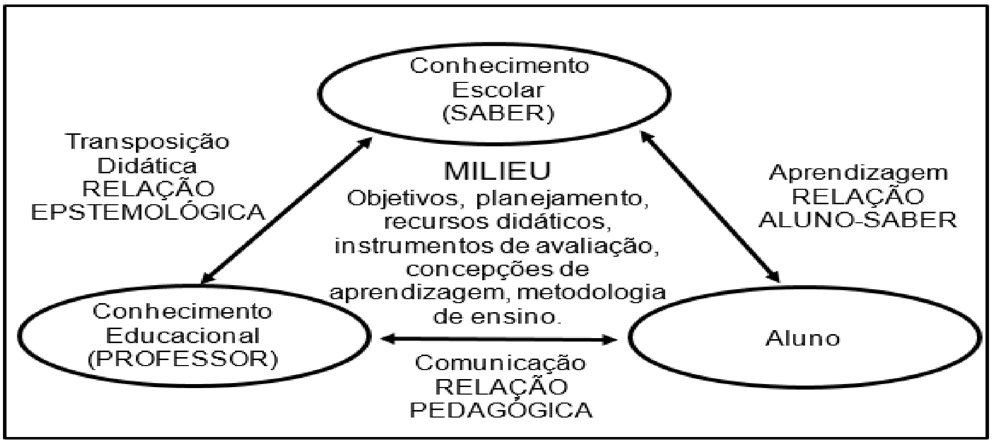
1. 1. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A primeira teoria na qual me aporto nesta pesquisa, desempenha papel de caracterizar os sujeitos e elementos necessários ao processo de ensino e de aprendizagem. Trata-se da Teoria das Situações Didáticas (TSD), desenvolvida em 1986 e proferida no Brasil em 2006 pelo teórico e educador matemático francês Guy Brousseau na VII Reunião Didática da Matemática do Cone Sul, na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Para Brousseau (2008, p. 16), a abordagem da teoria das situações didáticas apresenta-se como um instrumento científico, que tende a unificar e integrar as contribuições de outras disciplinas e proporciona uma melhor compreensão das possibilidades de aperfeiçoamento e regulação do ensino da Matemática, a partir da compreensão das situações didáticas.

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a esses alunos um saber constituído ou em vias de constituição. (BROUSSEAU, 1996, p. 8)

Assim, em uma situação didática existe a composição de elementos que constituem o processo de ensino e aprendizagem cujas interferências internas externas, esperadas ou não, influenciam nas vias de constituição do conhecimento. O esquema abaixo ilustra como funcionam as relações entre os elementos que constituem uma situação didática, segundo a teoria de Brousseau.

Figura 1: Relações na concepção do ensino na TSD



Fonte: Adaptado de Brousseau (2008).

Nessa concepção de ensino, o professor representa o conhecimento educacional e organiza o conhecimento escolar que se pretende ser transmitido através de uma troca de interações (comunicação) entre professor e aluno em um meio didático (*milieu*), planejado pelo professor e onde o aluno atua de forma ativa. Nesse processo, existe uma intencionalidade nas interações do professor, com o objetivo de criar condições favoráveis à aprendizagem, com controle relativo, haja vista que o saber só é considerado adquirido de fato quando o aluno consegue usá-lo em uma situação adidática, isto é, fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. (Brousseau, 2008, p. 35)

As situações didáticas são planejadas e elaboradas pelo professor de Matemática para que o aluno construa e mobilize conhecimentos para obtenção de objetivos educacionais estabelecendo-se um "contrato didático" entre professor e aluno, nem sempre explícitos. As situações didáticas mobilizadas pelos discentes na consecução das respostas às questões propostas pelo professor, são compostas de fases de ação, de formulação, de validação e de institucionalização, cujas características apresento no quadro a seguir conforme Brousseau (1996), Brousseau (2008) e Almouloud (2014).

Quadro 2: Classificação das situações didáticas

Situação de ação	Interação entre os alunos e o *milieu*, a partir das proposições do professor.
Situação de formulação	Comunicação de informações entre os alunos e com o professor, momento de discussão e busca de um consenso com mobilização da linguagem oral e escrita.

Situação de validação	Validade das informações formuladas, momento de apresentar um modelo de resolução para as proposições do professor, justificando-o por meio de verificações ou demonstrações para explicar o raciocínio empregado.
Situação de institucionalização	Os alunos assumem o significado do conhecimento elaborado e é conferida ao professor a tarefa formalizar e generalizar os conceitos pretendidos.

Fonte: Elaborada pela autora.

Desse modo, o aluno passa por situações de ação, formulação e validação, onde estabelece modelos explicativos e esquemas teóricos para responder às intervenções do professor e busca meios de validar ou refutar modelos e esquemas anteriormente constituídos, para que ao final tais validações possam ser formalizadas pelo professor com o devido rigor matemático e assim institucionalizar o saber adquirido.

No momento em que é promovida a transformação do conhecimento científico em saber escolar ocorre a transposição didática. Esse momento acontecerá de forma diferente para cada indivíduo e dependerá das possibilidades cognitivas de cada indivíduo e das interações aluno-professor e aluno-aluno.

No que tange esta pesquisa, para que eu consiga alcançar maior controle possível desses elementos e situações envolvidas na TSD, as seções que investigam as dificuldades de aprendizagem na percepção de estudantes, professores e a revisão de estudos caracterizarão os sujeitos envolvidos na pesquisa. O estudo do objeto matemático me dará o suporte epistemológico para que eu, pesquisadora-professora, possa construir e aplicar um *milieu* potencialmente eficaz a aprendizagem do conceito de função.

1. 2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA ESTRUTURADA POR UARC

Nesta seção, apresento os aportes metodológicos para a construção de meu objeto de estudo: uma sequência didática para o ensino do conceito de função que foi aplicada por mim com estudantes do 1º ano do ensino médio, a fim de desenvolver a aprendizagem do objeto matemático conceito de função. A seguir descrevo em que consiste uma sequência didática estruturada por unidades articuladas de reconstrução conceitual (UARC) orientada por Cabral (2017).

Uma sequência didática (SD), como instrumento pedagógico, organiza um conjunto de aulas planejadas do início ao fim, de forma harmoniosa e coesa funcionando como uma unidade com o objetivo de desenvolver determinados objetivos pedagógicos ou habilidades e competências de aprendizagem para algum objeto de estudo escolar.

> Uma sequência didática é um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero oral ou escrito. [...]. Quando nos comunicamos, adaptamo-nos à situação de comunicação. [...] Os textos escritos ou orais que produzimos diferenciam-se uns dos outros e isso porque são produzidos em condições diferentes. (ROJO e GLAÍS, 2010 apud CABRAL, 2017, p. 32)

Neste sentido, as atividades são elaboradas de acordo com as diferentes condições, isto é, dependem dos elementos e relações que apresentei na seção anterior sobre a teoria das situações didáticas. Os conhecimentos previamente concebidos pelos estudantes também são relevantes para que uma SD desenvolva neles os objetivos de aprendizagem pretendidos, exigindo do professor poder de reflexão sobre planejamento, aplicação e avaliação das atividades.

> O procedimento de SD tem a virtude de manter o caráter unitário e reunir toda a complexidade da prática, ao mesmo tempo em que permitem incluir as três fases de toda intervenção reflexiva, quais sejam: o planejamento, aplicação e avaliação. (CABRAL, 2017, p. 32)

Embora seja um instrumento que exija planejamento e organização, a SD não tem um padrão rígido de recursos pedagógicos a se adotar, as atividades podem fazer uso das mais diversas tendências de ensino, que se adequem ao público a que se destina e ainda assim manter o caráter sequencial e coeso dos conteúdos. Uma SD para o ensino de Matemática, por exemplo, pode ser elaborada segundo a vertente da modelagem Matemática, da etnoMatemática, jogos, ensino por atividades, uso de tecnologias, interdisciplinaridade, dentre outras formas.

Além da tendência adotada, a forma em que se deseja que o professor interfira no processo pode ser de diferentes maneiras em uma SD. Para esta pesquisa, adotei a Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC), desenvolvida por Cabral (2017), como forma de estruturar as intervenções do professor no processo de planejamento, construção e aplicação da SD.

> Para que o construto analógico das UARC's seja bem compreendido, passo a descrevê-lo em termos de seis categorias estruturantes que materializam o texto de uma SD de acordo como eu concebi em suas adaptações necessárias para o ensino-aprendizagem de Matemática nosníveis fundamental e médio, são elas: Intervenção Inicial (Ii), Intervenção Reflexiva (Ir), Intervenção Exploratória (Ie), Intervenção Formalizante (If),Intervenção Avaliativa Restrita(IAr) e, finalmente, as Intervenção Avaliativa Aplicativa (IAa). (CABRAL, 2017, p. 40)

As categorias estruturantes do texto de uma SD, como a que irei propor, estão descritas no quadro 3, onde descrevo cada tipo de interveção utilizada nas sequências didáticas estruturadas como unidades articuladas de reconstrução conceitual, conforme Cabral (2017).

Quadro 3: Tipos de intervenções em uma UARC

Intervenção Inicial (Ii)	È o primeiro elemento de um jogo discursivo dirigido pelo professor com a intenção definida de estimular os aprendizes à percepção de alguma verdade do pensamento matemático e que, associada com outras percepções articuladas a essa primeira, pode exercer um papel facilitador na reconstrução conceitual pretendida.
Intervenção Reflexiva(Ir)	Sempre se materializa por meio de um questionamento. Esse questionamento se refere a um ou mais aspectos relacionados ao conceito objeto de reconstrução O aluno é estimulado durante todo o tempo do jogo da aprendizagem em refletir sobre o que está fazendo e as consequências desse fazer sobre outros aspectos da atividade que se desenvolve.
Intervenção Exploratória (Ie)	Tem como objetivo aprofundar o olhar do aluno a respeito das respostas obtidas a partir das Intervenções Reflexivas. Aqui os alunos são convidados para fazerem simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e observações.
Intervenção Formalizante (If)	O professor reelabora as verdades "redescobertas" pelos alunos com as vestes da formalidade Matemática. Aqui as percepções dos alunos são consolidadas com uma linguagem mais abstrata que procurar satisfazer as exigências do saber disciplinar formal, axiomático, próprio da natureza Matemática.

Intervenção Avaliativa Restritiva (IAr)	Tem a finalidade de se estabelecer um primeiro parâmetro de aferição de aprendizagem do conceito objeto dereconstrução. Trata-se de uma espécie de "primeiros passos" para se checar osrudimentos do conceito em tese apreendido. A ênfase nesse momento épara as implicações conceituais do objeto reconstruído e para as propriedades operacionais com a manipulação de algoritmos envolvidos.
Intervenção avaliativa Aplicativa (IAa)	A finalidade é a Resolução de Problemas de Aplicação. Aqui temos o nível mais elevado de avaliação do processo de apreensão conceitual. O aluno precisa ser capaz de mobilizar as noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes (algoritmos) em situações queenvolvam resolução de problemas aplicados aos diversos contextos reaise/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino.

Fonte: Cabral (2017)

Em todas as atividades da sequência didática o professor precisará recorrer a uma "espécie de ping-pong discursivo" (CABRAL, 2017, p. 45). Esse recurso dentro da metodologia de unidades articuladas de reconstrução conceitual chamamos de Intervenções orais de manutenção Objetiva (I-OMO).

> Na verdade essa última categoria de intervenção pode ser entendida como uma espécie de Sequência Didática implícita complementar que é sustentada no discurso do professor durante todo o processo de ensino-aprendizagem e que permite a ele fazer as reformulações emergentes inevitáveis no processo de reconstrução conceitual (CABRAL, 2017, 45)

Essa I-OMO é fundamental para que os conceitos sejam formalizados de maneira gradual, preenchendo lacunas de situações não previstas na elaboração da sequência. Embora muito importante, essa intervenção deve acontecer apenas quando necessário para resolver impasses que os alunos não conseguirem resolver entre si, preservando a autonomia do estudante e possibilitando "futuras reformulações no texto utilizado que media a aprendizagem" (CABRAL, 2017, 46).

O uso colaborativo dessas intervenções estimula o aluno na percepção de regularidades que o possibilitem configurar modelos e generalizações reconstruam os conceitos matemáticos pretendidos.

Para a execução de minha pesquisa, devo considerar que o processo de construção da SD, segundo a estrutura de UARC, passa pelo desenvolvimento epistemológico do professor acerca do objeto matemático a ser ensinado, delimita os critérios do instrumento de pesquisa e maneira como a SD será experimentada. Assim sendo, a construção de meu objeto de pesquisa é fruto de um minucioso estudo que será apresentado nos capítulos subsequentes e que estão articulados propositadamente para responder minha questão de pesquisa.

1. 3. ANÁLISE MICROGENÉTICA E ANÁLISE DO DISCURSO

Após a experimentação da sequência didática, terei que realizar tratamento e análise de dados para verificar se ela apresenta potencialidades discursivas no ensino do conceito de função no ensino médio, nos aspectos epistemológicos perceptivo/intuitivo, empírico e teórico. Devo informar o leitor que quando falo de potencialidade não me refiro ao desempenho do aluno em resolução de problemas e exercícios após aplicação da sequência. Minha pesquisa se detém ao processo, aos indícios de aprendizagem do aluno percebidas em sua escrita e oralidade durante a execução das atividades em níveis epistemológicos revelados em seu discurso. Para tanto, elegi a análise microgenética e análise do discurso como aporte na investigação dos indícios de aprendizagem do aluno diante da SD e das intervenções orais do professor.

A abordagem metodológica da análise microgenética trata-se de uma análise que relaciona campos da educação e da psicologia para investigar processos em contextos educativos. Aporto-me em Goés (2000) para melhor explicar.

> De um modo geral, trata-se de uma forma de construção de dados que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos. (GOÉS, 2000, p. 9 – 10)

O exame de tais relações e condições sociais baseiam-se à matriz histórico-cultural de Vygotsky para identificação das transformações genéticas, isto é, dos indícios de aprendizagem que acontecem nas interações entre professor-alunos e alunos-alunos.

> A visão genética aí implicada vem das proposições de Vygotsky (1981, 1987a) sobre o funcionamento humano, e, dentre as diretrizes metodológicas que ele explorou, estava incluída a análise minuciosa de um processo, de modo a configurar sua gênese social e as transformações do curso de eventos. Essa forma de pensar a investigação foi denominada por seus seguidores como “análise microgenética”.(GOÉS, 2000, p. 11)

Deste modo, a análise minuciosa sobre a qual Goés se refere, trata-se de um estudo por recortes ou trechos de eventos de ensino-aprendizagem em que esses recortes passam a ser objeto de estudo como micro unidades que revelam características e propriedades do todo. Assim, cada recorte seria como uma célula que carrega informações que reconstroem a compreensão sobre todo um organismo.

> Essa análise não é *micro* porque se refere à curta duração dos eventos, mas sim por ser orientada para minúcias indiciais – daí resulta a necessidade de recortes num tempo que tende a ser restrito. É genética no sentido de ser histórica, por focalizar o movimento durante processos e relacionar condições passadas e presentes, tentando explorar aquilo que, no presente, está impregnado de projeção futura. É genética como sociogenética, por buscar relacionar os eventos singulares com outros planos da cultura, das práticas sociais, dos discursos circulantes, das esferas institucionais. (GOÉS, 2000, p. 15)

Nos termos desta pesquisa, significa dizer que cada fala do estudante analisada revelará o nível de compreensão sobre o objeto matemático ensinado e juntos todos esses indícios de aprendizagem permitirão uma avaliação global dos conceitos adquiridos diante da execução da SD e das intervenções do professor.

No caso de minha pesquisa, os movimentos focalizados estão restritos a oralidade e a linguagem, para tanto, necessitei me aportar em Mortimer e Scott (2002) para realizar a análise do discurso em cada recorte a ser estudado.

Mortimer e Scott (2002) definem a análise do discurso como uma ferramenta para estudar a forma como os professores podem guiar as interações em sala de aula para que resultem na construção de significados. Logo, nessa perspectiva é possível agregar maior intencionalidade ás intervenções do professor a fim de conduzir o aluno à apreensão dos objetivos de aprendizagem pretendidos.

Sintetizo no quadro abaixo os aspectos da análise do discurso segundo Mortimer e Scott (2002).

Quadro 4: Aspectos da Análise do Discurso

Focos do ensino	**Intenções do professor**	-Engajar os estudantes, intelectual e emocionalmente; -Explorar as visões e entendimentos dos estudantes sobre ideias e fenômenos específicos; -Disponibilizar as ideias científicas; -Dar oportunidades aos estudantes de falar e pensar com as novas ideias científicas, em pequenos grupos e por meio de atividades com a toda a classe. -Dar suporte aos estudantes para aplicar as ideias científicas ensinadas a uma variedade de contextos e transferir aos estudantes controle e responsabilidade pelo uso dessas ideias; -Prover comentários sobre o desenrolar da 'estória científica', de modo a ajudar os estudantes a seguir seu desenvolvimento e a entender suas relações com o currículo de ciências como um todo.
	Conteúdo	**Descrição:** envolve enunciados que se referem a um sistema, objeto ou fenômeno, em termos de seus constituintes ou dos deslocamentos espaço-temporais desses constituintes. **Explicação:** envolve importar algum modelo teórico ou mecanismo para se referir a um fenômeno ou sistema específico. **Generalização:** envolve elaborar descrições ou explicações que são independentes de um contexto específico.
Abordagem	**Abordagem comunicativa**	**Interativo/dialógico:** professor e estudantes exploram ideias, formularam perguntasautênticas e oferecem, consideram e trabalham diferentes pontos de vista. **Não-interativo/dialógico:** professor reconsidera, na sua fala, vários pontos de vista, destacando similaridades e diferenças. **Interativo/de autoridade:** professor geralmente conduz os estudantes por meio de uma sequência de perguntas e respostas, com o objetivo de chegar a um ponto de vista específico. **Não-interativo/de autoridade:** professor apresenta um ponto de vista específico.
Ações	**Padrões de interação**	Tríade **I-R-A**: Iniciação do professor, Resposta do aluno, Avaliação do professor. Cadeias não triádicas: exemplo I-R-P-R-P.… ou **I**-R-F-R-F.… onde o P significa uma ação discursiva que permite o prosseguimento da fala do aluno e F um feedback para que o aluno elabore um pouco mais sua fala.
	Intervenções do professor	- Introduz um termo novo; parafrasear uma resposta do estudante; mostra a diferença entre dois significados; - Considera a resposta do estudante na sua fala; ignora a resposta de um estudante; - Repete um enunciado; pede ao estudante que repita um enunciado; estabelece uma sequência I-R-A com um estudante para confirmar uma ideia; usa um tom de voz particular para realçar certas partes do enunciado; - Repete a ideia de um estudante para toda a classe; pede a um estudante que repita um enunciado para a classe; compartilha resultados dos diferentes grupos com toda a classe; pede aos estudantes que organizem suas ideias ou dados de experimentos para relatarem para toda a classe. - Pede a um estudante que explique melhor sua ideia; solicita ao estudante que escrevam suas explicações; verifica se há consenso da classe sobre determinados significados. **-** Sintetiza os resultados de um experimento particular; recapitula as atividades de uma aula anterior; revê o progresso no desenvolvimento da estória científica até então.

Fonte: adaptado de Mortimer e Scott (2002)

Os aspectos da análise do discurso descritos no quadro 4 são importantes tanto para a construção da sequência didática, quanto para a análise dos resultados da experimentação, pois os indícios de aprendizagem passarão por análise microgenética atrelada ao discurso adotado nas intervenções e intenções do professor.

1.4. ARTICULAÇÃO ENTRE OS APORTES

Os aportes teóricos que adotei, foram definidos estrategicamente, exercendo papeis diferentes ao longo da pesquisa e ao mesmo tempo convergindo para um mesmo princípio: a intenção do professor do processo didático. O quadro a seguir sintetiza como os aportes teóricos de minha pesquisa estão articulados em torno da intenção do professor sobre a aprendizagem do aluno acerca do saber matemático pretendido.

Quadro 5: Aticulação entres o aportes

TSD Situações	**SD por UARC Intervenções**	**AM e AD Interação**
Ação	Inicial	Interativo/dialógico
Formulação Validação	Reflexiva	Interativo/dialógico Não-interativo/dialógico
Ação	Exploratória	Não-interativo/dialógico
Institucionalização	Formalizante	Interativo/de autoridade
Ação e validação	Avaliativas	Não-interativo/de autoridade
Formulação e Validação	IOMO	Interativo/de autoridade Não-interativo/dialógico

Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, apesar de tais aportes serem adotados em fases diferentes desta pesquisa, todos giram em torno da intenção do professor e valorizam a qualidade do processo de aprendizagem. Logo a sequência didática que apresento ao final deste texto está estruturada e será analisada conforme os critérios metodológicos apresentados neste capítulo.

2. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo apresento o objeto de estudo desta pesquisa, a sequência didática para o ensino do conceito de função no Ensino Médio, a qual intitulei “Conceito de função e suas linguagens”. Para sua elaboração considerei os diagnósticos e fundamentações descritos nas seções anteriores.

A sequência didática que apresento a seguir traz como objetivos de aprendizagem os dez levantados na seção 2.2, está estruturada por unidade articulada de reconstrução conceitual, apresentada na seção 1.2. de aportes teóricos e metodológicos.

Considerando o universo plural da escola, considero a proposta que apresento a seguir não possui rigidez na maneira de aplicá-la, sendo, portanto, passível de adequações, pois:

> A escola não é um *fast-food* em que todo prato deve estar pré-cozido e ser produzido com rapidez gerando aprendizagens. A escola é uma cozinha gourmet em que os pratos devem ser elaborados a partir dos ingredientes disponíveis e dos desejos dos clientes em seus múltiplos paladares. E as receitas (metodologias didáticas) não devem ser simplesmente reproduzidas, mas (re)criadas, (re)pensadas, compartilhadas, estudadas em profundidade para atender ao contexto em que serão apresentadas como uma obra de arte (BATISTA, FELTRIN, BECKER, 2019, p.76)

Por esse motivo, a SD que apresento é um produto de profundo e sistemático estudo sobre o objeto e o ensino e aprendizagem do objeto e sobre as necessidades dos sujeitos para quem ela se destina. Cabe a esta seção instruir o professor na sua aplicação em sala de aula.

Todas as atividades serão realizadas em grupos de cinco a seis estudantes que receberão individualmente a folha de atividade, mas precisarão realizá-las de maneira coletiva e colaborativa. O professor deverá promover antes de cada formalização a socialização das conclusões dos grupos e promover uma discussão a fim de chegar a um consenso que permita introduzir a formalização dos conceitos pretendidos, essa discussão pode ser imediata ou precisar de intervenções orais do professor haja vista que queremos chegar ao domínio de uma formalização conceitual Matemática e

> Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de

> diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p.41-42)

Ao final são propostas intervenções avaliativas que nada mais são do que uma verificação de aprendizagem imediata com intenção a apreensão do aluno do conhecimento adquirido.

2. 1. TESTE E OFICINA DE CONHECIMENTOS BÁSICOS

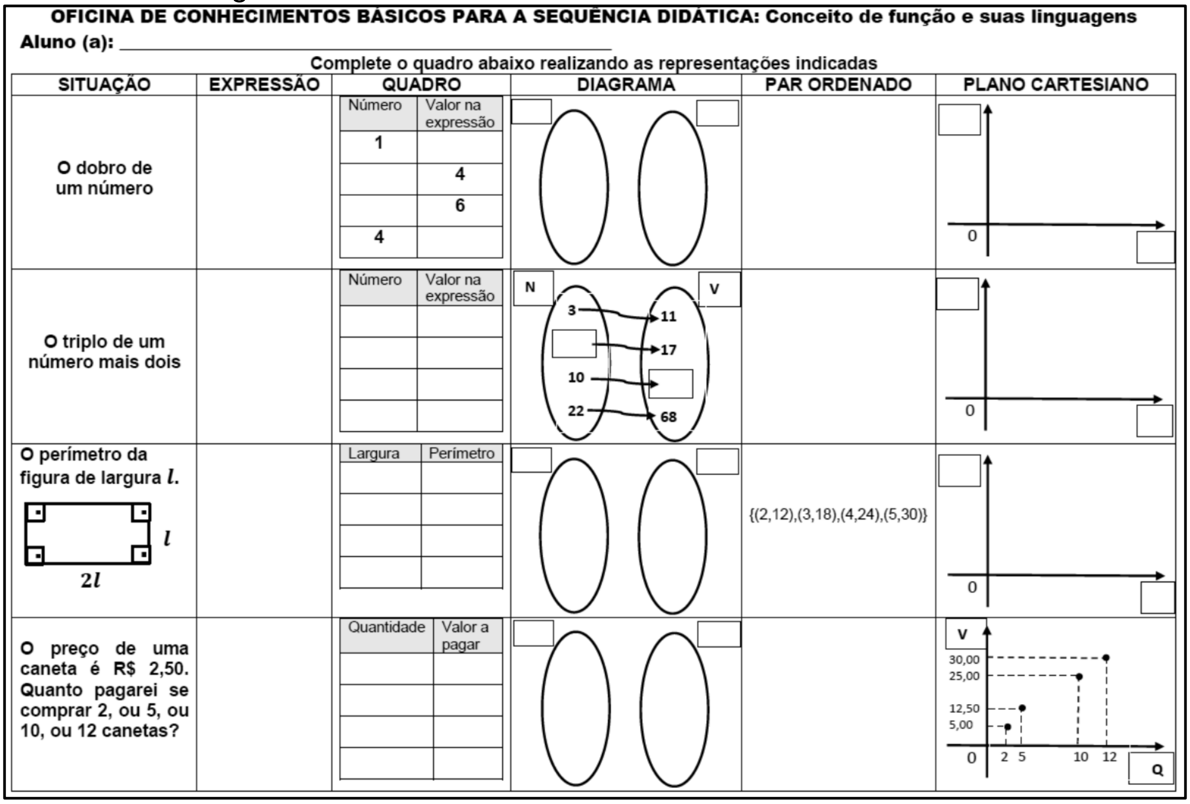
Antes da aplicação da sequência didática deve ser proposto um teste de conhecimentos básicos para verificar como está a base cognitiva dos sujeitos para quem será aplicada a sequência didática “Conceito de função e suas linguagens”.

Tal teste é mais indicado para o caso de a SD ser aplicada com sujeitos que não são alunos do professor aplicador, haja vista que para um professor que vá aplicá-la com sua turma, e que já conhece a habilidades deles, talvez não seja necessário, sendo o teste e oficina apenas uma atividade acessória e opcional.

Assim, antes de aplicar a sequência didática o professor deverá garantir que os estudantes possuem os seguintes conhecimentos: interprestar uma situação que envolva soma e multiplicação, representar e converter essa situação para a linguagem algébrica, quadro, diagrama, par ordenado e ponto no plano cartesiano, bem como fazer as manipulações aritméticas para obter valor arbitrário a partir de outro e segundo uma regra observada. Tais conhecimentos são habilidades previstas de serem adquiridas no ensino fundamental, e são base cognitiva para a aprendizagem do estudo de funções no primeiro ano do ensino médio, série a que se destina a sequência didática.

A figura 16 ilustra o teste e oficina de conhecimentos a ser aplicada antes da sequência didática de modo a garantir, também um nivelamento com a turma de controle que adotei nesta pesquisa como parâmetro comparativo.

Figura 2: Teste e oficina de conhecimentos básicos



OFICINA DE CONHECIMENTOS BÁSICOS PARA A SEQUÊNCIA DIDÁTICA: Conceito de função e suas linguagens

Aluno (a): ______________________________

Complete o quadro abaixo realizando as representações indicadas

SITUAÇÃO	EXPRESSÃO	QUADRO	DIAGRAMA	PAR ORDENADO	PLANO CARTESIANO
O dobro de um número		Número / Valor na expressão 1 / / 4 / 6 4 /			0
O triplo de um número mais dois		Número / Valor na expressão	N, V 3 → 11 → 17 10 → 22 → 68		0
O perímetro da figura de largura l. l $2l$		Largura / Perímetro		{(2,12),(3,18),(4,24),(5,30)}	0
O preço de uma caneta é R$ 2,50. Quanto pagarei se comprar 2, ou 5, ou 10, ou 12 canetas?		Quantidade / Valor a pagar			V 30,00 25,00 12,50 5,00 0 2 5 10 12 Q

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

O procedimento que recomendo é de que essa atividade seja aplicada como teste inicialmente de forma individual e sem ajuda do professor, recolha-se ao final e entregue-se novamente a mesma atividade cuja a resolução colaborativa se torne a própria oficina de conhecimentos básicos. No apêndice deste texto está esse teste e oficina em tamanho A4 para reprodução.

2. 2. ATIVIDADE 1: O que é função?

Esta atividade terá como objetivo definir função, domínio, contradomínio e imagem. Trata-se de um esquema de realização de doze correspondências, dadas as regras, os conjuntos de partida e os conjuntos de chegada. Após a realização das correspondências os alunos farão a sobreposição de doze cartas uma a uma conforme a semelhança da configuração das correspondências realizadas por eles. O material didático utilizado está caracterizado como material manipulável estático, assim definido:

> Material concreto que não permite a transformação por continuidade, ou seja, alteração da sua estrutura física a partir da sua manipulação, durante a atividade experimental, o sujeito apenas manuseia e observa o objeto na tentativa de abstrair dele alguma propriedade. (RODRIGUES & GAZINE, 2012, p. 190)

Durante a execução da intervenção inicial, o professor deverá acompanhar se os estudantes conseguem realizar as correspondências e fazê-los explicar o raciocínio adotado.

Após a primeira intervenção exploratória, o professor deve verificar se os estudantes conseguiram fazer corretamente as sobreposições das cartas às correspondências por eles realizadas e a lógica que utilizaram para fazer o pareamento entre as cartas e as situações de correspondência.

Figura 3: Intervenções da atividade 1

Intervenção inicial: Estabeleça uma possível correspondência ou regra de associação (conforme o caso) entre os elementos do conjunto A (partida) e os elementos do conjunto B (chegada) em cada situação proposta ao lado.
Intervenção Exploratória: Utilize as cartas que recebeu para sobrepor uma a uma às respectivas situações de correspondência.
Intervenção Exploratória: Retire as cartas das situações nas quais existem elementos do conjunto de partida sem correspondência.
Intervenção Exploratória: Retire das situações que sobraram as cartas nas quais no conjunto de partida existe elemento com mais de uma correspondência.
Intervenção Exploratória: Analise as situações que sobraram após as retiradas das cartas e registre no quadro, **SIM** ou **NÃO**, conforme as condições a seguir para o conjunto de PARTIDA.
Condição 1- **Todo** elemento do conjunto de PARTIDA se corresponde;
Condição 2- Cada elemento do conjunto de PARTIDA se corresponde uma **única** vez.

QUADRO 1

	Condição 1	**Condição 2**
Situação_____		
Situação_____		
Situação_____		
Situação_____		

Intervenção Reflexiva: O que podemos afirmar sobre o conjunto de PARTIDA em relação às correspondências estabelecidas nas situações analisadas no quadro?
Intervenção Reflexiva: O que podemos afirmar sobre o conjunto de CHEGADA em relação às correspondências estabelecidas nas situações que restaram?
Intervenção Exploratória: Nas situações analisadas no quadro 1, observe o conjunto de CHEGADA e determine um novo conjunto formado pelos elementos que possuem correspondência.
Intervenção Exploratória: Determine uma maneira para expressar o padrão de comportamento de todas as situações analisadas no quadro 1.

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

As intervenções reflexivas e exploratórias desempenharão o papel da construção dos conceitos pretendidos promovendo a observação de padrões e conclusão de uma generalização do conceito que caracterize o comportamento funcional.

Após a terceira intervenção exploratória o professor deve verificar se em todos os grupos sobraram apenas as cartas das situações 1, 2, 4 e 5, isto é, as situações que apresentam comportamento funcional segundo a definição de função.

Após a socialização das conclusões dos grupos e mediação do professor para que se chegue a um consenso, ele deve apresentar a formalização do conceito de função.

Figura 4: Formalização do professor para a definição de função.

FORMALIZAÇÃO

Definição de função: Dados os conjuntos não vazios A e B. Diz-se que f é uma *função* de A em B quando todo elemento $x \in A$ está associada a único elemento $y \in B$ e denota-se por:

$$f: A \to B.$$
$$x \mapsto y$$

O conjunto de partida A é denominado de *Domínio da função* f e representado por $D(f)$ e o conjunto de chegada B é denominado de *Contradomínio da função* f e representado por $CD(f)$, denotado por:

$$f: D(f) \to CD(f).$$
$$x \mapsto y$$

Ao conjunto formado ***apenas*** pelos elementos y do contradomínio que *foram alcançados* pela função f, denominamos de conjunto *Imagem da Função* f e o representamos por $Im(f)$, em outras palavras:

$$Im(f) = \{y \in B \ / \ x \mapsto y, \ x \in A\} \text{ e } Im(f) \subset CD(f).$$

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Ao apresentar essa formalização o professor deve relacioná-la aos conceitos pré-formais que os próprios estudantes concluíram nas intervenções e promover a conversão da linguagem intuitiva por eles adotadas pela linguagem do rigor matemático e simbólico para que o conceito seja consolidado de modo a garantir a consecução das próximas atividades, pois

> A aplicação correta da Matemática nas ciências factuais deve aliar de maneira equilibrada a abstração e a formalização, não perdendo de vista a fonte que originou tal processo. [...] O reconhecimento de uma teoria científica passou a ter como condição necessária o fato de poder ser expressa em uma linguagem Matemática. (BASSANEZI, 2011, p.18-19)

Por fim, para garantir que os conceitos foram devidamente compreendidos, e que os alunos tenham se apropriado da linguagem Matemática são propostas duas atividades de verificação de aprendizagem, uma restritiva e outra aplicativa.

A atividade completa encontra-se no apêndice deste texto.

2. 3. ATIVIDADE 2: Função como relação de dependência entre variáveis

Nesta atividade tem o objetivo de identificar as variáveis de uma função a relação de dependência entre elas. Parte de uma fotografia extraída de uma reportagem publicada em um jornal de circulação estadual sobre a venda de farinha de mandioca na feira do Ver-O-Peso em Belém do Pará.

As intervenções ocorrem com o intuito de fazer com que o aluno perceba as variáveis preço, tipo de farinha, quantidade de litros e reconheça a relação existente entre elas.

Figura 5: Algumas intervenções da atividade 2

Quadro 1: VALOR A PAGAR (R$) POR TIPO DE FARINHA E QUANTIDADE (ℓ).

QUANTIDADE (ℓ)	D'ÁGUA PURA	BRANCA BISCOITO	D'ÁGUA PURA DE BRAGANÇA
1			
2			
3			
4			
5			

Intervenção Reflexiva: Que tipo de variação é possível identificar em cada uma das colunas?

Intervenção Reflexiva: É possível estabelecer algum critério de variação em cada uma dessas colunas?

Intervenção Reflexiva: Qual a expressão que estabelece a correspondência entre o valor a pagar e a quantidade de farinha a ser adquirida em cada um dos casos?

Intervenção Reflexiva: Justifique se a relação estabelecida entre o valor a pagar e a quantidade de farinha a ser adquirida, em cada um dos casos, pode representar uma função.

Intervenção Exploratória: Considerando cada uma das expressões estabelecidas anteriormente, quanto uma pessoa deve pagar se comprar 10 litros de farinha?

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Será possível estabelecer generalizações algébricas entre as variáveis e o cálculo de uma a partir da outra identificando qual a variável dependente e qual a independente. Nessa atividade ´deve ser enfatizada a importância das variáveis no comportamento funcional, como discutida no 3. A formalização da atividade 2 necessita de articulação com a primeira atividade, uma vez que retoma conceito de domínio e contradomínio de função.

Figura 6: Formalização da Atividade 2

FORMALIZAÇÃO

Seja $f: D(f) \to CD(f)$ uma função definida por $y = f(x)$, sendo $x \in D(f)$ e $y \in CD(f)$. Diz-se que o **domínio** $D(f)$ e **contradomínio** da função $CD(f)$ da função f representam, respectivamente, o conjunto de ***Variáveis Independentes*** (x) e o conjunto de ***Variáveis Dependentes*** (y) da função f.

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

O professor deve enfatizar aqui a diferença entre as incógnitas de uma equação e as variáveis de uma função como está explicado na seção 3.2.1.

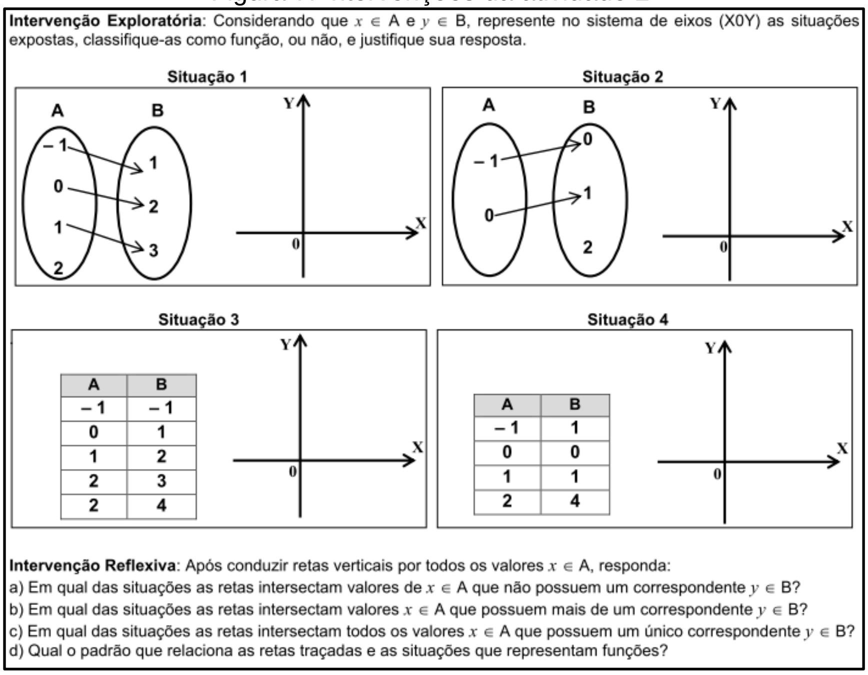
Após a formalização há duas intervenções avaliativas para verificação de aprendizagem. A atividade completa está no apêndice deste texto.

2. 4. ATIVIDADE 3: Função e suas representações.

A terceira e última atividade desta sequência didática tem o objetivo de fazer reconhecer e representar função em diferentes linguagens Matemáticas dando ênfase a representação gráfica segundo a definição de função.

A atividade parte da conversão de diagramas e tabelas para gráfico de pontos com o intuito de ilustrar como a não-ambiguidade e não-exceção podem ser observadas e representadas em um gráfico.

Figura 7: Intervenções da atividade 2.



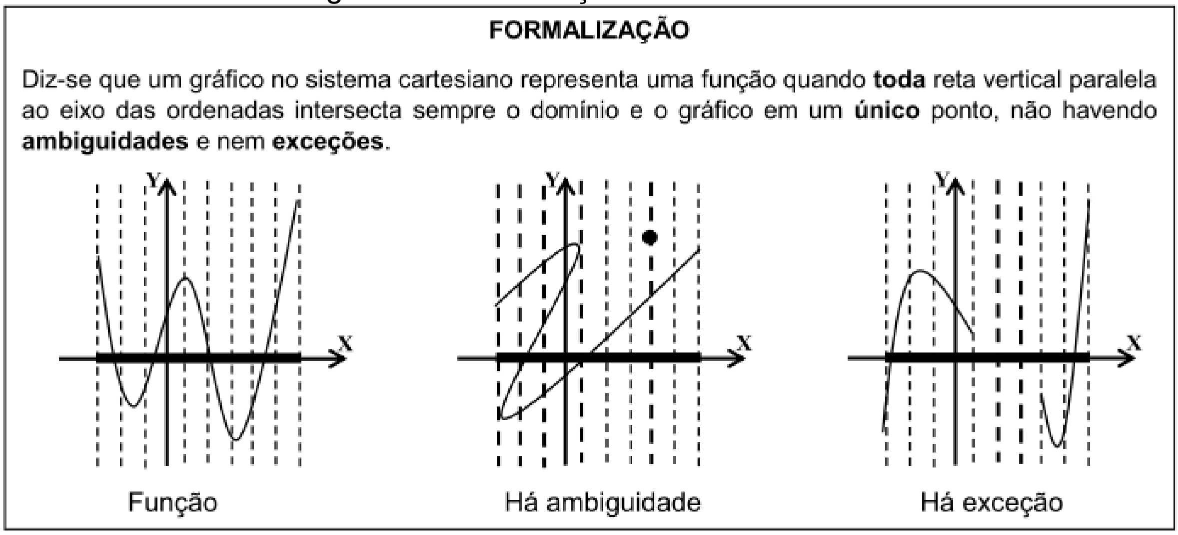
Fonte: Elaborado pela autora (2019)

As intervenções estão em bloco e valem para todas as situações e permite diferenciar quando uma correspondência representada em diagrama, tabela ou gráfico é ou não função.

Considero que esta atividade estimula um exercício matemático saudável de recorrer a definição como estratégia de construção de uma linha de raciocínio. Isto é, as argumentações mobilizadas pelos alunos terão fundamentações coerentes e com linguagem Matemática apropriada.

Embora as situações propostas na atividade sejam apenas em gráfico de pontos discretos, a formalização apresenta uma proposição de como um gráfico representa uma função segundo a definição, e, a ilustração mostra como ocorre em gráficos de funções contínuas, isto é, uma generalização do que foi construído pelos estudantes por meio das intervenções reflexivas e exploratórias.

Figura 8: Formalização da atividade 3



Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Note que as ilustrações marcam no eixo das abscissas o domínio ao qual o gráfico pertence. A intenção aqui é enfatizar a importância de se olhar como o domínio está definido.

Por fim há uma intervenção avaliativa restritiva e outra aplicativa. A atividade completa está no apêndice deste texto.

2. 5. OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DAS ATIVIDADES

Enfatizo que em todas as atividades o professor aplicador da sequência didática para o ensino do conceito de função deve estimular o diálogo entre ele e os alunos e entre os próprios alunos. Comparo essa metodologia proposta por Cabral (2017) como se colocasse o professor no papel de um detetive que investiga um crime que possui suspeitos, mas não pode fazer acusações sem provas, então faz interr ogatórios e reconstituições a fim de o próprio suspeito se delatar seja por expressão corporal ou por inconsistência de informações. Então, o professor aplicador realiza intervenções reflexivas e exploratórias (interrogatórios e reconstituições) com a intenção de fazer o estudante externalizar seu percurso de raciocínio e nível de apreensão dos objetivos de aprendizagem pretendidos.

Sintetizo no quadro abaixo como os objetivos de aprendizagem definidos inicialmente estão distribuídos nas três atividades.

Quadro 6: Distribuição dos objetivos de aprendizagem nas atividades

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM (OA)		ATIVIDADE
OA1	Identificar variáveis envolvidas em situação-problema.	1, 2
OA2	Identificar a natureza das variáveis (velocidade, tempo, peso, preço)	1, 2
OA3	Identificar a relação entre variáveis (independentes x dependentes).	2
OA4	Transcrever uma situação-problema (real/fictícia) da linguagem escrita (língua materna) para a linguagem Matemática (diagrama, gráficos, pares ordenados, equações, tabelas, quadros, etc.) e vice-versa.	1, 2
OA5	Utilizar diferentes símbolos (diferentes de *x* e *y*) para representar variáveis independente e dependente.	2
OA6	Calcular uma variável a partir de outra variável.	2
OA7	Definir função.	1
OA8	Identificar/definir/calcular o conjunto de partida (domínio) e o conjunto de chegada (contradomínio).	1, 2
OA9	Identificar diferentes representações de funções.	1, 2, 3
OA10	Resolução de situação-problema (real/fictícia) que envolvem o conceito de função.	1, 2, 3

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Note que os objetivos de aprendizagem estão distribuídos nas atividades de modo que alguns são abordados em todas, revelando o caráter articulado proposto pela linha metodológica adotada. E, a linha metodológica adotada está alinhada com as diretrizes da educação, como ilustro a seguir em um esquema de cores.

Figura 9: Habilidades indiretamente desenvolvidas

Os estudantes [...] devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2017, p. 519)

As articulações estruturais dessas SD pretendem favorecer a criação de um ambiente no qual "(...) os alunos partilhem ideias, raciocínios, processos, estabeleçam conexões, comparações e analogias, construam conjecturas e negociem significados e desenvolvam capacidades de comunicar e argumentar". (CABRAL, 2017, p.10)

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

A imagem ilustra as habilidades indiretamente exploradas na execução da sequência didática apresentada, tais habilidades foram diagnosticas no início da pesquisa como fundamentais para a aprendizagem do objeto matemático, especialmente por se tratar de um objeto conceitual que apela para a abstração, mas que possui várias linguagens pelas quais pode ser representado. O professor que aplicar esta sequência precisará estar atento a essas sutilezas.

3. O CONCEITO DE FUNÇÃO

> *"A função cria novas grandezas. Não o que já foi criado e que estancou, mas só o que se cria e transforma possui vida, e existe realmente! E assim a função adquire quase que um caráter de ser vivo. [...] Consideremos as funções como seres vivos, e procuremos familiarizar-nos com seus costumes."*
>
> (Paul Karlson)

Nesta seção apresento o objeto matemático função e os conteúdos correlacionados numa perspectiva científica, com o devido rigor e aprofundamento, considerando a evolução histórica e epistemológica do objeto, tendo em vista as dificuldades de aprendizagem diagnosticadas nas seções anteriores e para obter subsídio para elaboração e aplicação da sequência didática a ser construída.

Considerando que o objeto matemático função abrange todos os níveis de ensino de Matemática, foi necessário delimitar o assunto ao Ensino Médio e às necessidades de aprendizagem que investigamos em nossa revisão de estudos e pesquisa com estudantes e professores. Nesta seção apresento reflexões a respeito do conceito de função sob a ótica da história da Matemática e do rigor matemático, visando contribuir para o processo de ensino do mesmo..

A seguir convido o leitor a compreender os desafios de sua prática docente inserindo-se aos contextos históricos e aprofundando-se às peculiaridades e minúcias inerentes ao conceito de função.

3. 1. UMA RECONSTRUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE FUNÇÃO

O que foi produzido em termos de conhecimento por nossos antepassados constituem o que hoje nos parece pronto e acabado, mas a investigação de como e para que as coisas foram pensadas e criadas revelam a genialidade humana e sua capacidade de evoluir através do surgimento de cada novo desafio, nos fazendo compreender e refletir sobre a realidade.

No ensino de Matemática, o estudo das origens dos conceitos hoje já formalizados tem sua fundamentação elucidada através das pesquisas em História da Matemática. Tais pesquisas constituem elementos facilitadores nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática.

Segundo Brasil (1998), a utilização da História da Matemática pode desenvolver nos estudantes atitudes e valores favoráveis diante do conhecimento matemático, levando-os a relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade, transcendendo a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos e, como afirma CHAQUIAM (2017, p. 13), "numa ordem bem diferente daquela apresentada após o processo de formalização".

Nesta subseção, apresento os resultados de uma pesquisa qualitativa de análise bibliográfica com o objetivo de analisar uma evolução histórica do conceito de função desde a antiguidade até a atualidade, visando contribuir à formação de professores, a partir das contribuições de cada personagem que agregou novos elementos ao campo conceitual de função.

Neste sentido procurou-se elaborar um texto apresentando elementos que contribuam quanto ao uso da história da Matemática no ensino de Matemática, perpassando pelos obstáculos epistemológicos que envolveram o conceito de função.

Defini aportes teóricos e metodológicos para construir uma evolução histórica mais detalhada da ideia de função, de modo a evidenciar os avanços e retrocessos, bem como os obstáculos superados por cada personagem que marcou significativamente cada passo.

Faz-se necessário esclarecer que um conceito não se resume a sua definição, mas a um conjunto de invariantes, situações e representações que tornam esse conceito significativo ao indivíduo. Essa é a ideia de campo conceitual definida por VERGNAUD. Oliveira (1997) sintetiza essa ideia afirmando que um conceito.

> é constituído a partir de três elementos: a) conjunto de situações que tornam o conceito significativo; b)conjunto de invariantes, que podem ser reconhecidas e usadas pelo indivíduo para entender as situações; c) conjunto de representações simbólicas, que servem para

> representar as situações e ajudar a resolver problemas (OLIVEIRA, 1997, p. 8).

Apresento reflexões sobre os personagens elencados na linha tempo acerca dos obstáculos e avanços do conceito de função, na perspectiva do campo conceitual de função, isto é, invariantes, situações e representações que cada sujeito utilizou para constituir e formular sua ideia de função.

Para que cada elemento novo de um campo conceitual seja agregado foi necessário superar obstáculos epistemológicos explicados por Bachelard, que em sua teoria buscou esclarecer durante o processo de aprendizagem os professores devem estar atentos para que os obstáculos epistemológicos não estejam presentes na sua forma de ensinar, e ter um olhar especial também nos recursos didáticos utilizados em sala de aula que impeçam a formação do espírito científico ou até mesmo o seu retrocesso (Trindade, Nagashima e Andrade, 2017, p. 5).

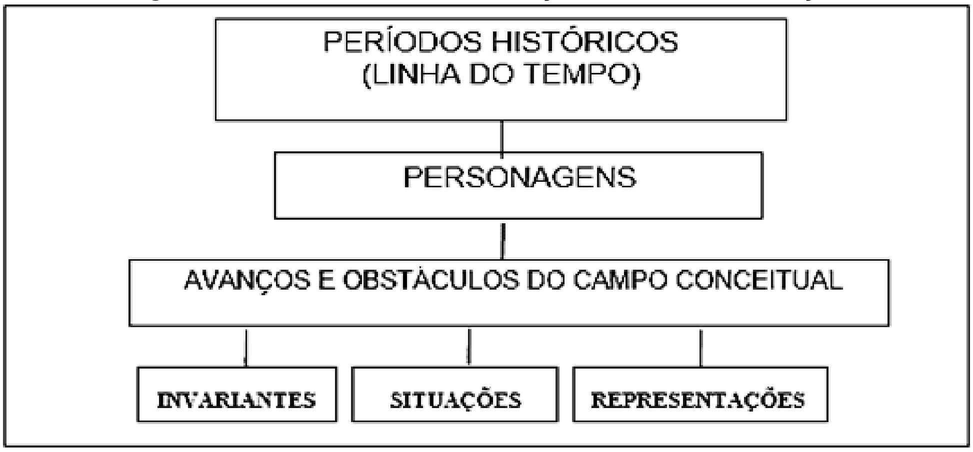
A história da Matemática é um recurso didático que pode contribuir à superação de obstáculos epistemológicos, afinar a agudeza crítica e mostrar que:

> O movimento de abstração e generalização crescentes porque passam muitos conceitos e teorias em Matemática não se deve, exclusivamente, a razões de ordem lógica, mas à interferência de outros discursos na constituição e no desenvolvimento do discurso matemático. (MIGUEL e BRITO, 1996, apud CHAQUIAM, 2017, p. 17)

Nesse sentido, busco esclarecer aos professores como superar seus próprios obstáculos de aprendizagem, a partir dos desafios de cada personagem ao longo da história da construção do conceito de função.

Para fazer a discussão a respeito da construção do conceito de função, as análises serão entorno dos obstáculos e avanços que ocorreram durante o processo de evolução do conceito de função a partir de alguns personagens, observado o campo conceitual de função se constituiu como ilustro na Figura 1.

Figura 10: Fluxo da reconstrução histórica –Função

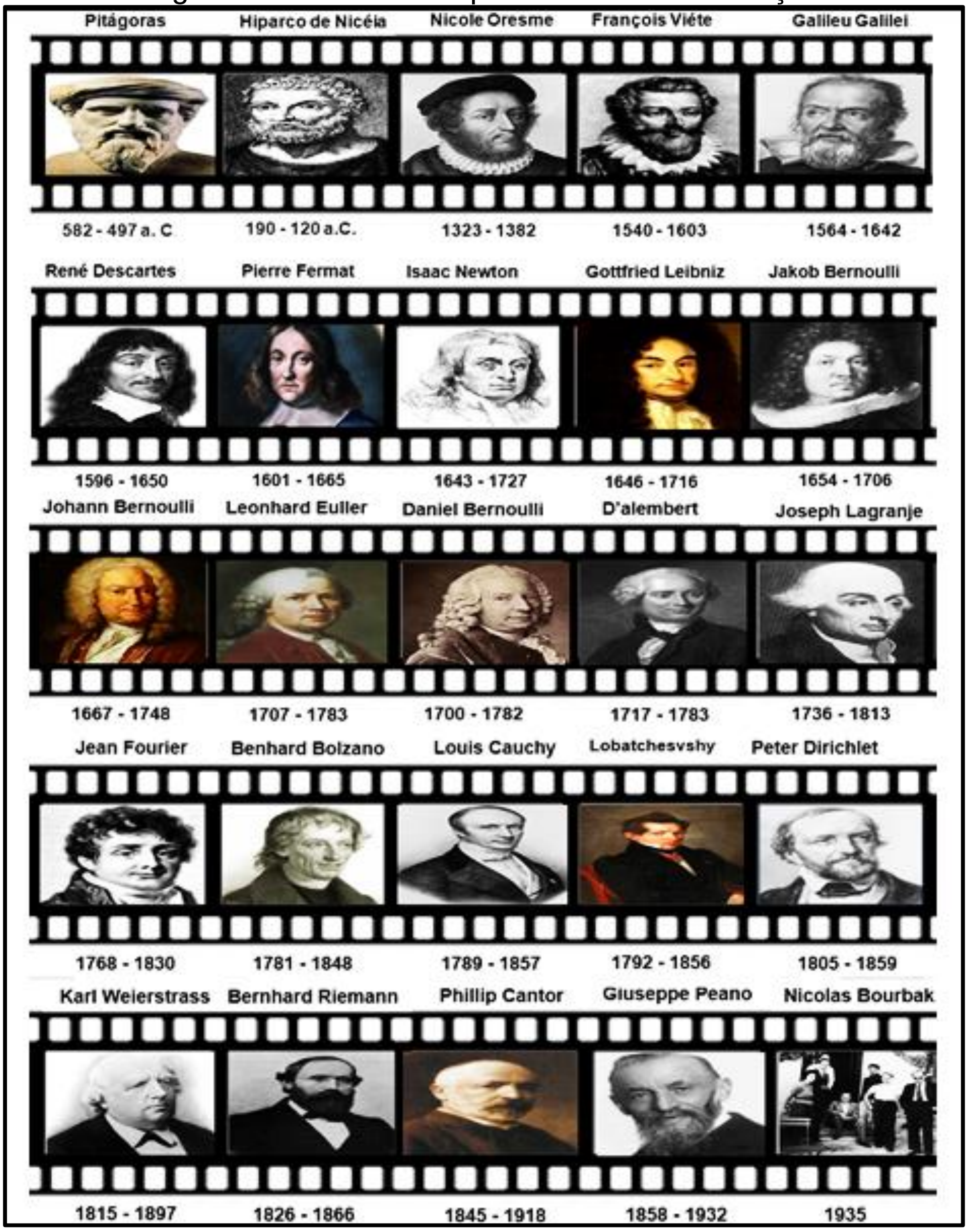


Fonte: Silva, Miranda, Cabral (2019).

As evidências da aplicação do comportamento funcional datam desde muito antes de Cristo. Cerca de 2000 a. C. mesopotâmios e babilônios usavam tábuas para registrar cálculos em tabelas para resolução de problemas do cotidiano.

Situei tais sujeitos na linha do tempo da reconstrução histórica do conceito de função, ilustrada na Figura 2, e nos seguintes períodos históricos: a) Antiguidade: Datada entre o desenvolvimento da escrita em 4000 a. C. e a queda o império romano em 476 d. C; b) Idade Média: Data de 476 até a tomada de Constantinopla pelos turcos otomanos em 1453; c) Período Moderno: Inicia em 1453 e vai até 1789 com a revolução francesa e d) Período Contemporâneo: Começa em 1789 e segue até o presente momento histórico.

Figura 11:Linha do tempo – Conceito de Função



Fonte: Silva, Miranda, Cabral (2018)

Extraí personagens de cada um desses períodos históricos personagens ao longo da linha do tempo na Figura 2 que tiveram sua participação na construção do objeto matemático função e de alguma maneira superaram dificuldades de seus antepassados e trouxeram avanços para seus usos e estudos.

Dos vinte e cinco personagens que ilustrei na figura 2, que colaboraram com o conhecimento que hoje se tem sobre o conceito de função, destaco oito personagens que deram contribuições que foram marcos para a construção do conceito de função: Pitágoras, Oresme, Galilei, Viète, Leibniz, Euler, Dirichlet e Bourbaki.

Existe um provérbio português que diz: “*muitas mãos tornam uma obra leve*”. Verdade ou não, o fato é que o conceito de função teve uma construção milenar e altamente colaborativa. Ainda que a cooperação não tenha sido intencional, muitos personagens labutaram nessa construção, sendo, portanto, uma obra de muitas mãos.

As descrições completas das contribuições dos personagens estudados estão disponíveis nos anais do XIII Seminário Nacional de História da Matemática, em um artigo escrito por mim e mais dois professores pesquisadores, Silva, Miranda, Cabral (2018).

Na perspectiva desta pesquisa, os personagens foram destacados a medida que foram acrescentando um novo elemento à construção do campo conceitual de função. Para tanto ao longo da descrição dos fatos represento os elementos desse campo conceitual por (I) invariantes, (S) situações e (R) representações e assim também estarei fazendo refletir sobre a ação do professor no que tange os objetivos de aprendizagem da sequência didática, objeto de estudo deste trabalho.

A seguir (Quadro 15) apresento uma síntese destacando os personagens, suas contribuições, os obstáculos e os elementos segundo o campo conceitual.

Quadro 7: Evolução do Conceito de Função

PERSONAGEM ano de publicação	**ELEMENTOS AGREGADOS AO CAMPO CONCEITUAL**	**AVANÇOS**	**OBSTÁCULOS**
Pitágoras de Samos (Final Séc. VI a.C.)	**I:** Variável, proporcionalidade, interdependência. **S:** Relações entre comprimento da corda e som emitido por ela. **R:** Experimental e verbal	Relacionou variáveis de naturezas diferentes, o que antes era um obstáculo.	Limitações quanto aos registros. Antes disso, Babilônios representavam tabelas em argila.
Nicole Oresme (1350?)	**I**: Variável dependente	Noção de dependência e representação gráfica,	Dificuldade em expressar a intensidade de

	S: Representar geometricamente quantidades físicas. **R**: Gráfica (sem quantitativo)	não realizada por pitagóricos e babilônios.	grandezas qualitativas de modo numérico. Demonstração teórica, sem experimentação.
Galileu Galilei (1589?)	**I**: Causa e efeito **S**: Estudo do movimento de corpos em queda livre. **R**: Gráfica (com quantitativo) e algébrica (sem generalização)	Gráficos quantitativos resultantes de experimentação e modelagem algébrica entre variáveis físicas.	Suas representações algébricas limitavam-se em encontrar valores desconhecidos em uma equação não generalizada.
François Viète (1591)	**I**: Generalização **S**: Problemas geométricos **R**: Algébrica e geométrica.	Retomou os problemas geométricos gregos por demonstrações algébricas padronizadas de forma literal e generalizada.	Suas descobertas tinham objetivos dissociados a uma formalização de função.
Gottfried Leibniz (1674)	**I**:Continuidade, variável dependente, variável independente. **S**: Cálculo infinitesimal **R**: Curvas geométricas.	Reforça a ideia de continuidade e de variáveis dependentes e independes e foi o primeiro a usar a palavra “função”.	Não definiu explicitamente função.
Leonard Euler (1755)	**I**:Constantes e descontinuidades. **S**: Formalização do conceito de função. **R**: Notação e definição.	Desvinculou o conceito de função do caráter geométrico, formalizou o conceito e a notação de função.	Excesso de generalização, limitação a representação analítica.
Johann Dirichlet (1837)	**I**: Correspondência entre variáveis de conjuntos distintos. **S**: Busca de uma definição mais ampla. **R**: Definição segundo uma regra de dependência entre variáveis.	Estabeleceu uma definição mais geral função que relacionasse também variáveis não numéricas possibilitando aplicação em outras áreas do conhecimento.	Falta de uma definição de “conjunto” e de “número real”.
Nikolas Bourbaki (1968)	**I**: Conjuntos de pares ordenados. **S**: Movimento da Matemática moderna e da Educação Matemática. **R**: Diagrama de Venn.	Partiu de uma preocupação com o ensino de Matemática através do movimento da educação Matemática.	Reduziu o conceito de função a conjunto de pares ordenados representados em diagrama de Venn sem fazer associações com outras formas de representação.

Fonte: SILVA, MIRANDA, CABRAL (2018)

O Quadro 15 deixa claro que na trajetória do conceito de função foi se constituindo um rico campo conceitual aparentemente inacabado. Em vários momentos da história da construção desse conceito percebe-se:

a) O uso excessivo de um tipo de representação e/ou invariante: Pitagóricos que não faziam registros, limitando-se a experimentações e observações, Galilei que explicava fenômenos apenas algebricamente, Bourbaki restringiu função a conjuntos de pares ordenados.

b) O resgate de representações e/ou invariantes: Galilei voltou a fazer experimentações como os antigos Gregos, Viète resgatou os problemas geométricos dos antigos gregos numa perspectiva algébrica.

Nota-se a articulação de mais de uma forma de representação por Viète e Bourbaki, apenas. Tal constatação nos leva a concluir a dificuldade histórica em articular diferentes representações, impedindo que a ideia de função utilizada pelos personagens acumulasse todos os elementos que foram agregados ao campo conceitual de função. Também inferi que elementos essenciais a esse conceito, tais como variação, dependência e correspondência, foram deixados de lado no período contemporâneo.

Foi olhando para a história que as atuais diretrizes da educação brasileira apelaram para um ensino de função mais completo. A transcrição de uma situação-problema da língua materna para a linguagem Matemática (gráfico, tabela, equação, diagrama, par ordenado) e vice-versa é uma habilidade exigida nos PCN’s, para desenvolvimento da capacidade de representação e comunicação (Brasil, 1998, p. 12) de funções.

Segundo Pelho (2003, p. 23) quanto maior for a possibilidade de articulação entre diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto.

Ademais a constituição desse recorte conceitual vem corroborar com a formação inicial e continuada de professores de Matemática, bem como estes terão subsídios para rever suas práticas sob a ótica dos obstáculos epistemológicos de nossos personagens.

Os resultados apontam que a história do conceito de função evidencia a necessidade da articulação das invariantes e representação do conceito de função para que a aprendizagem deste objeto matemático se dê de forma completa, consistente e aplicável a realidade.

3.2. EPISTEMOLOGIA DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Nesta seção trago reflexões sobre os diferentes usos, definições e representações do conceito de função norteadas pelos objetivos de aprendizagem explicitados na seção 2.2.2. Após compreender o valor histórico do conceito de função, bem como a importância para o desenvolvimento das ciências nas diversas áreas do conhecimento, tenho a dimensão da responsabilidade que é ensinar esse objeto matemático.

Para tanto, não poderia deixar de explorar as diferentes formas de comunicar e definir função com o rigor matemático devido e a nível superior ao que se pretende ensinar, uma vez que o professor precisa também comunicar e argumentar com propriedade, se eximir ao máximo da possibilidade de transmitir erros conceituais e ter um olhar sistêmico de todo o campo conceitual e em todos os níveis de ensino.

Além dos aspectos relacionados aos objetivos de minha pesquisa, trago nesta seção reflexões para o ensino, possíveis de serem abordadas na sequência didática que irei propor e para inspirar professores leitores desta pesquisa na construção de outras atividades para o ensino do conceito de função Partindo da seguinte definição:

Sejam A eB conjuntos não vazios. Diz-se que f é uma função de A (Domínio) em B (Contradomínio) quando para todo elemento $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$. Denota-se por

$$f: A \to B.$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

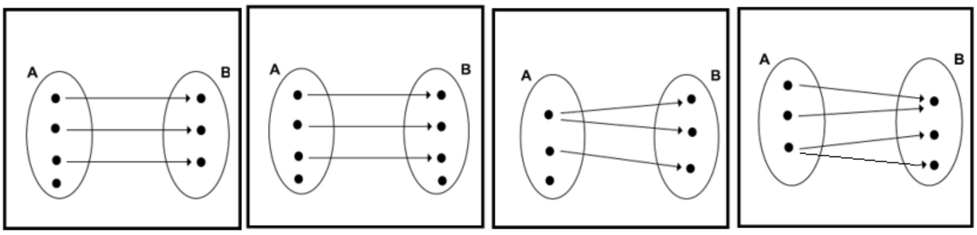
onde $f(x)$ representa a imagem do elemento x via função f.

O que precisamos ter clareza é de que seja qual for a nomenclatura utilizada para associar elementos de dois conjuntos não vazios (Regra, Aplicação, correspondência, transformação, relação, etc), a essência da definição de função está sujeita a apenas duas condições a saber, como esclarece LIMA et al (1997):

> a) Não deve haver exceções: afim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$, seja qual for $x \in X$ dado.
> b) Não pode haver ambiguidades: a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x)$ em Y. (LIMA et al 1997, p. 41)

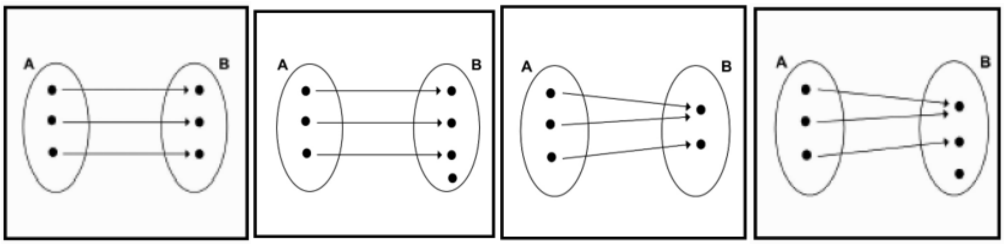
Note que as condições de não ambiguidade e não exceção, necessárias para definir função, são critérios apenas para o conjunto de partida da correspondência, isto é, para os elementos y do conjunto de chegada é naturalmente possível haver ambiguidades e exceções.

Os contraexemplos a seguir ilustram as situações que não são função.



Partida com exceção | Exceção na partida e na chegada | Partida com Ambiguidade e exceção | Ambiguidade na partida e na chegada

Os exemplos a seguir ilustram função:



Perceba pelos exemplos e contraexemplos acima que o comportamento funcional é definido pela partida da correspondência, ou seja, é o domínio que deve estar bem definido para que ele ocorra.

Vejamos como isso ocorre em situações do cotidiano:

a) Imagine que se queira verificar em um grupo de pessoas os casais de namorados formados. Para que essa correspondência seja uma função, considerando o conjunto de rapazes o domínio e o de moças o contradomínio, as perguntas seguintes devem ter resposta positiva: Todo rapaz possui namorada? (Não exceção) e essa namorada é única? (Não ambiguidade).

b) Agora considere uma pesquisa feita com uma turma estudantes, sobre os seus meses de nascimento, essa correspondência é função, pois todos obrigatoriamente nasceram em algum mês (Não exceção) e ninguém pode ter nascido em mais de um mês (não ambiguidade), ainda que sobrem meses sem correspondência no contradomínio, é função.

c) Uma residência que possui mais de um endereço, não é uma função que atribui um endereço a cada casa, pois ocorre uma ambiguidade.

d) A regra: $f: R \longrightarrow N$

$$x \mapsto y = 3x$$

Não é função, pois observe que haverá exceções no domínio, uma vez que infinitos números reais não terão seus triplos no conjunto dos números naturais.

3.2.1. Como nasce uma função?

Na epígrafe desta seção ao comparar função a um ser vivo, remete-me ao movimento e a variação inerente ao comportamento funcional, como visto nas seções anteriores. Então convido o leitor a refletir: Como nasce uma função?

Na analogia que faço entre função e ser vivo, digo que seria uma espécie de ser vivo que para existir precisaria ocorrer a correspondência entre os elementos de dois conjuntos e essa correspondência não pode ter exceções, nem ambiguidades no conjunto de onde parte a correspondência, ou seja, precisaria que todo espermatozoide fecundasse um único óvulo (a exemplo de seres humanos). Mas para que esse encontro aconteça dessa maneira, ainda é necessário entender por que meios ocorre. Assim, apresento os três elementos essenciais ou ingredientes do comportamento funcional como pontua Lima et al:

> Deve-se ainda observar que uma função conta de três ingredientes: domínio, contra-domínio e a lei de correspondência $x \to f(x)$. Mesmo quando dizemos simplesmente ‘a função f” ficam subentendidos seu domínio X e seu contra- domínio Y. Sem que eles sejam especificados, não existe a função. (LIMA et al, 1997, p. 39)

Logo, quando se quer estabelecer uma função, antes mesmo de pensar em exceções e ambiguidades é necessário verificar e perguntar: De onde parte a correspondência? Aonde chega a correspondência? Como acontece a correspondência.

Neste caso, deve-se ter em mente que nem toda situação, nem todo conjunto de pares ordenados, nem todo gráfico, nem todo quadro, nem toda equação, nem toda regra e nem toda correspondência é uma função se o domínio, o contradomínio e a lógica de associação não estiverem bem definidos. Detalharei um pouco mais sobre cada um desses ingredientes de que Lima et al (1997) fala.

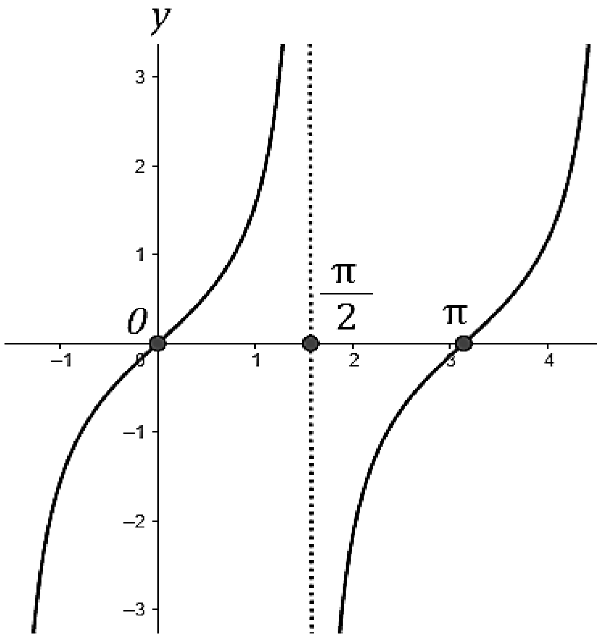
3.2.1.1. Domínio

De onde partem as correspondências?

Do conjunto de partida, conjunto este denominado de **domínio** da função.

Foi esclarecido anteriormente que os critérios de não ambiguidade e de não exceçãosãoapenas para o domínio da função. Porém, para garantir ao menos a não exceção, é necessário que o domínio esteja muito bem delimitado, para que elementos desse conjunto não fiquem sem correspondente. Vejamos o exemplo da função tangente:

$$y = tg(x)$$



O gráfico da função tangente ilustra que ela não existe em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, sendo k um número natural (0,1,2,3,...). Para que ela seja reconhecida como função, não havendo exceções, faz-se necessário condicionar seu domínio como $D(f) = \{x \in R: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$, isto é, esse é o maior subconjunto de R para que seja definida como função.

> Assim sendo, uma pergunta do tipo “Qual é o domínio da função $f(x) \equiv ?$", estritamente falando, não faz sentido. A pergunta correta seria: “Qual é o maior subconjunto $X \subset R$ tal que a fórmula $f(x) = \frac{1}{x}$ define uma função $f: X \to R$?” (LIMA et al, 1997, p. 39)

Assim sendo, numa correspondência funcional pode-se definir o “maior” conjunto que contenha todos os outros possíveis conjuntos que também são domínio da função, a esse conjunto atribui-se o nome de *domínio máximo* ou *domínio maximal* (Oliveira & Pinheiro, 2010, p.55*)*. Isto é, mesmo que se defina um intervalo aparentemente “pequeno” como x = [0 , 1] se $x \in N$ ou $x \in Z$, existirão dois elementos a se corresponder. Imagine se $x \in R$, logo haverá uma infinidade de números, inclusive decimais e irracionais a se corresponder. O exemplo a seguir nos leva a refletir sobre a situação exposta, assim como atentar para possíveis erros que podem ser cometidos em sala de aula.

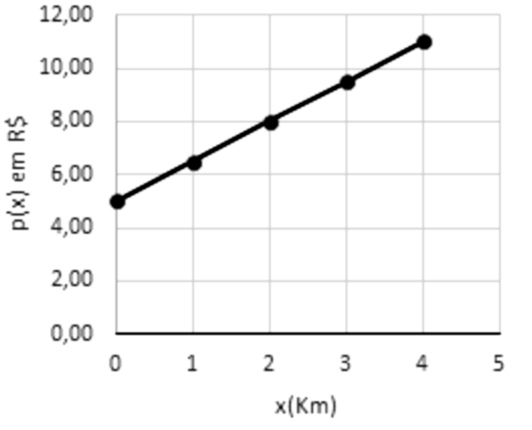
Considere a seguinte situação problema em que o professor queira explorar as possíveis representações de função, típica nas aulas de Matemática e alguns erros didático sobre o domínio, que eu mesma cometi diversas vezes sem saber, diga-se de passagem:

O taxímetro do táxi de João cobra R$ 5,00 de bandeirada (valor fixo inicial da corrida) mais R$ 1,50 por quilômetro rodado.Qual a função que descreve o comportamento tarifário p(x) desse equipamento em uma corrida de x quilômetros de extensão? Faça um quadro e um gráfico para representar essa situação.

Possivelmente o professor ao resolver esta questão, fará uma tabela, uma expressão e um gráfico como estes:

x	P(x)
0	5,00
1	6,50
2	8,00
3	9,50
4	11,00

$$\boldsymbol{p(x) = 1,50x + 5,00}$$



Tudo certo, não é? Aparentemente sim. Observe bem sob a ótica do que discutimos sobre o domínio da função, pois existem vários erros.

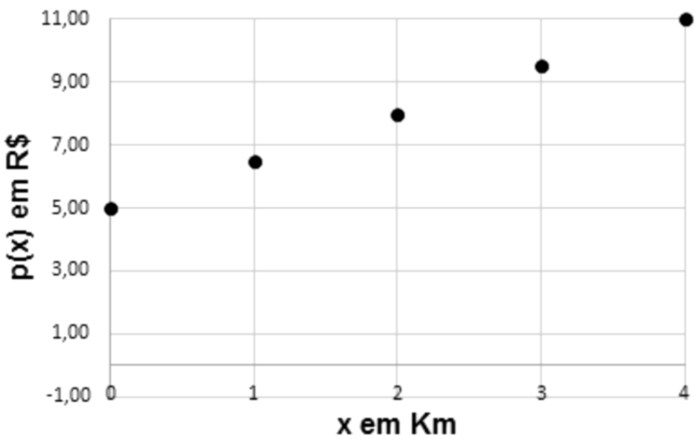
Primeiro erro está no comando, ainda que se subentenda que a corrida parta do quilômetro zero, quando o cliente entra no taxi, não sabemos onde para essa corrida. Na resolução, arbitrariamente calculou-se até 4 Km, mas onde está dito isto, que a corrida iria de 0 km a 4 km? Caso assim estivesse definido o domínio, a expressão poderia ser da seguinte forma:

$$f: [0\,,4] \longrightarrow R$$
$$x \longmapsto p(x) = 1{,}50x\ +\ 5{,}00$$

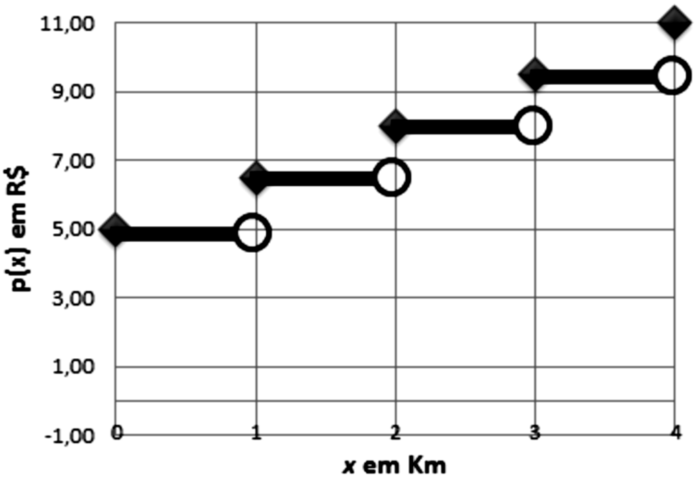
Agora sobre o gráfico, o leitor certamente diria que definitivamente nele não há o que questionar, mas há.

Observe que o taxímetro registra o valor a ser pago contabilizando por quilômetros inteiros, isto é, $\{0, 1, 2, 3, 4\} \in Z$, o gráfico contínuo sugere que $[0\ ,\ 4] \in\ R$, e assim, por exemplo, o taxímetro também atribuiria valores correspondentes a 2,5 Km ou 3,99 Km. Imagine a dificuldade ao passar o troco!

Além do gráfico contínuo, outra versão de representação seria do gráfico de pontos discretos:



Essa representação também não contempla a essência do problema pois apesar da cobrança ocorrer considerando valores inteiros, o percurso é completo é percorrido. Neste sentido, o gráfico que melhor representaria a situação proposta caso o domínio seja $[0\,,4] \in Z$ seria o seguinte:



Então? Muito intrigante? Esse comportamento constante por intervalos ou função escada é o mais adequado para a situação do taxímetro. A primeira vez que discutimos isso na disciplina do curso de mestrado com o professor Miguel Chaquiam, não me conformava, depois me senti mal por ter ensinado equivocadamente tantos conceitos. Por outro lado, me senti grata por essa revelação. De fato, a formação continuada amplia nossa forma de entender e de exercer nossa prática docente.

Mais um adendo sobre o enunciado do problema proposto, o ideal seria que não se denotasse x ou y para as variáveis, isso causa um obstáculo didático nos estudantes de modo que se for utilizado símbolos diferentes de x para variável independente e y para variável dependente ou se usem outras letras que não estas, muitos estudantes não sabem identificar a qual variável devem atribuir valores para fazer uma tabela e o gráfico correspondente à função. (Oliveira, 1997, p. 34)

3.2.1.2. Contradomínio

Aonde chega a correspondência?

Chega ao conjunto denominado de **contradomínio** da função.

Segundo Oliveira & Pinheiro (2010), o contradomínio é necessário a definição de função, para que haja uma espécie de previsão das imagens. Assim se garante a não exceção dos correspondentes do domínio, caso não exista algum elemento com correspondente no contradomínio, e, a não ambiguidade de modo que não exista mais de uma imagem para um mesmo elemento do domínio. Deste modo é reforçada a existência de funções em que mais de um elemento do domínio possa ter mesma imagem ou que elementos do contradomínio não tenham correspondente, ou ainda que as imagens coincidam com o contradomínio, tais funções recebem nomes especiais a saber:

Para esclarecer esses casos especiais, considere a função $f: X \to Y$.

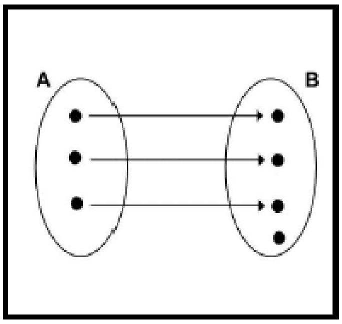
Diz-se que a função é **injetora**, ou injetiva ou, ainda, uma injeção, se, para todo, $y \in Y,$ existem no máximo um $x \in X,$ tal que $f(x) = y;$

Ou seja, f é injetiva quando: $x \neq x' em\, X \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

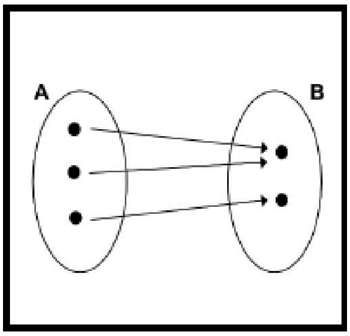
Está condição pode também ser expressa em sua forma contra positiva.

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

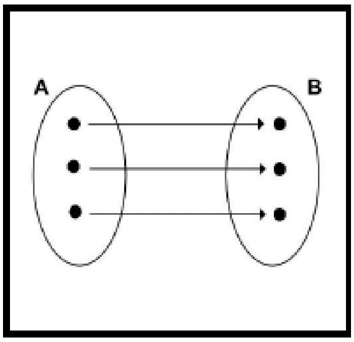
Não apresentando ambiguidades no domínio.



Por outro lado, diz-se que a função é **sobrejetora**, ou sobrejetivas, ou ainda uma sobrejeção se sua imagem for todo o conjunto Y, isto é, se, para todo $y \in Y$, existir pelo menos um $x \in X$, tal que $y = f(x)$; ou seja, devemos ser capazes de garantir, para cada $y \in Y$, que não haja exceções e, logo, $D(f) = Im(f)$.



Por fim, diz-se que a função é **bijetora**, ou bijetiva ou, ainda uma bijeção, se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora, isto é, não possui exceções, nem ambiguidades também no contradomínio, podendo assim ser chamada de uma correspondência biunívoca.



Vimos até aqui sobre o contradomínio, o seu padrão ou padrões de comportamento. Mas preciso chamar sua atenção para um componente do contradomínio, a Imagem. Denota-se a imagem de $x \in X$ pela função f por $y = f(x)$ e define-se da seguinte forma:

> Dada a função $f: X \rightarrow Y$ o conjunto imagem , ou simplesmente imagem da função f é o conjunto $Im\,(f)$, cujos elementos são as imagens $f(x) \in y$ dos elementos $x \in X$:
> $$Im\,(f) = \{\, f(x) \in Y; x \in X\}$$
> Em particular, temos sempre $Im(f)\ \subset\ Y,$ e a discussão acima mostra que pode ocorrer $Im(f) \neq Y$.(MUNIZ NETO, 2013, P. 5)

Dessa definição infere-se que a Imagem de uma função está contida ou é igual ao contradomínio. Para Lima et al (1997, p. 38) é importante ressaltar que $f(x)$ é a imagem do elemento $x \in X$ pela função f, ou o valor da função f no ponto $x \in X$ Logo, a imagem $f(x)$ são todos os valores de y alcançados pela regra de f associando-os a valores de x. Então, f e $f(x)$ são coisas distintas, sendo utilizadas erroneamente para denotar função. Para esclarecer possíveis dúvidas de notação apresento algumas formas de denotar distintamente função e imagem inspirado em Chaquiam & Cabral (2019) e Iezzi & Murakami (2002).

Quadro 8: Notações de função

f	Função f
$f: X \longrightarrow Y$	Função f definida de X em Y.
$F(x)$	Imagem do elemento x por meio da função f.
$F(x)\ =\ y$	Imagem de x associada ao elemento y do contradomínio.

<table>
<tr><td>$Im(f)$</td><td>Conjunto imagem da função f definido por
$$Im(f) = \{ y \in Y \,/\, \nexists\, x \in X; f(x) = y\}$$</td></tr>
<tr><td>$D(f) = X$</td><td>Domínio da função f</td></tr>
<tr><td>$CD(f) = Y$</td><td>Contradomínio da função f.</td></tr>
<tr><td>$f: A \to B$
$x \mapsto f(x)$</td><td rowspan="3">Função f, com domínio $D(f)$ definido em A, contradomínio $CD(f)$ definido em B e conjunto imagem $Im(x) \subset CD(f)$. As imagens de $x \in A$ em B são $f(x) = y$, com $y \in B$ e $f(x) \in Im(f)$.</td></tr>
<tr><td>$Af \to B$
$x \mapsto f(x)$</td></tr>
<tr><td>$f: A \to B \; tal \; que$
$y = f(x)$</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Chaquiam & Cabral (2019) e Iezzi & Murakami (2002)

Mais importante que saber utilizar a notação adequadamente, é entender o significado dela, é se apropriar dessa linguagem para que seja uma ferramenta útil para desenvolver argumentações e resoluções a que se pretender.

3.2.1.3. Caracterização de Função

É possível caracterizar uma função de diversas formas?

A resposta é sim, para tanto é necessário retoma-la a partir da reconstrução histórica do conceito de função, onde a definição de função sofreu várias mudanças ao longo do tempo e não necessariamente uma substituiu a outra, também não é possível dizer que não possam surgir outras maneiras de defini-la. O mais intrigante para mim nessa investigação é chegar à conclusão de que meu objeto matemático de estudo é eclético, no sentido poder ser (re) definido conforme a situação em se queira contextualizá-lo para comunicar algo que varia, se transforma ou se movimenta.

Sobre o terceiro ingrediente do comportamento funcional, vou apresentar as diferentes formas de definir função, conforme a invariante adotada e a situação a que se pretende dar significado, ressalvadas as condições de não exceção e não ambiguidade. Esse ingrediente, falando de forma mais ampla, se refere a lógica de correspondência adotada.

- **Regra**

A definição como regra, lei ou conjunto de instruções para definir função é bastante utilizada e em geral significa dizer que se relacionam os elementos de dois conjuntos dados, a partir de uma lógica que pode ser uma expressão ou condições expressamente ditas. Formalmente essa definição é dada da seguinte maneira:

> Dados os conjuntos $X, Y,$ uma função $f: X \to Y$ (Lê- se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama- se o domínio e Y é o contra- domínio da função f. Para cada $x \in X$ o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f no ponto $x \in X$. Escreva-se $x \to f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$. (LIMA et al, 1997, p.38)

Neste caso, se temos, por exemplo, um conjunto A={1,2,3,4} e um conjunto B={2,4,6,8,10} e queremos associar os elementos de $x \in A$ com os elementos $y \in B$, de modo que os elementos de B sejam o dobro do valor dos elementos de A, ou algebricamente que queremos $y = 2x$, então a função f definida como regra nessa situação é: $f: A \to B$

$$x \mapsto y = f(x) = 2x$$

em que $f(x)$ é imagem dessa função, isto é um subconjunto de Y que contém apenas os elementos de Y alcançados pela regra de f, neste caso $Im(f) = \{2,4,6,8\}$.

Embora muito utilizada, essa definição pode deixar de fora outras situações funcionais que não necessariamente possam ter uma regra explicita em língua materna ou algebricamente, como por exemplo um quadro com dados que corresponde cargos a salários de uma determinada empresa. São conjuntos de naturezas distintas, isto é, qualitativa e quantitativa, que se relacionam por uma lógica subjetiva para os quais não é possível estabelecer uma regra em linguagem Matemática, embora estabeleçam função, pois para cada cargo há um único valor de salário.

Esta definição como regra também remete a noção dependência de variáveis,
Isto é, as imagens (variáveis dependentes) dependem dos valores do domínio (variáveis independentes) obtidos segundo a regra.

- **Aplicação**

O termo "aplicação" é muito utilizado em livros álgebra para definir função, e em sua essência significa dizer que vai acontecer uma operação ou um conjunto de operações aritméticas entre os elementos de conjuntos numéricos distintos ou iguais ou entre espaços vetoriais. Quando o termo aplicação é utilizado para definir função é apresentado da seguinte forma:

> Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagem em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existem um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. f é aplicação de A em $B \Leftrightarrow (\forall\, x \in A, \exists\, y \in B/(x, y) \in f)$.(IEZZI e MURAKAMI, 2002, p. 81)

Essa definição de função como Aplicação carrega em si um valor fortemente algébrico, e que pode causar certo erro conceitual quando por exemplo não se distingue o isomorfismo que há entre objetos com representações e definições diferentes, mas que na prática podem ter significados semelhantes observe:

Quadro 9: Conceitos algebricamente isomórficos

Equação	Polinômio	Função
$y = 2x + 3$	$P(x) = 2x + 3$	$f: A \to B$ $x \mapsto f(x) = 2x + 3$
Incógnitas	Coeficientes e parte literal	Variáveis

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Observe que aqui nas três situações do quadro ocorrerem operações aritméticas ou *aplicações* que poderiam ser interpretadas em algum contexto do cotidiano. Embora pareçam ser a mesma coisa, suas definições são diferentes. Na primeira temos uma equação, que Segundo Dante (2012, p. 51) consiste em uma igualdade entre dois membros por operações com números conhecidos ou desconhecidos (*incógnitas*) arbitrários, cujo valor que satisfaz a igualdade é chamado de raiz. A segunda é um polinômio, definido por Dante (2012, p. 125) como a soma algébrica de monômios não semelhantes em que os números conhecidos são chamados de *coeficientes* e os desconhecidos de *parte literal*. A terceira é nosso objeto, função, que relaciona elementos de conjuntos definidos como Domínio e Contradomínio, que se associam de modo que para todo elemento do Domínio exista um único elemento do contradomínio, e esses elementos são chamados de *variáveis*.

> Para Newton, [...], uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) (EVES, 2004, p. 439)

É esse o caráter dos elementos dos conjuntos envolvidos numa função, a variação que um faz fluir no outro. Por isso, recomendo que professores de Matemática ao ensinarem função façam a devida distinção desses três conceitos isomórficos: equação, polinômio e função. O caráter estático de meramente encontrar um valor numérico não contempla o significado da variação funcional.

- **Transformação**

Esta invariante de função como transformação é normalmente definida da seguinte forma:

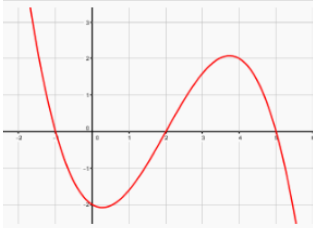
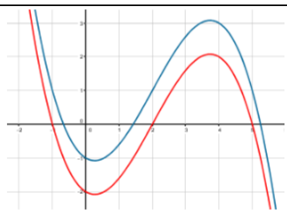
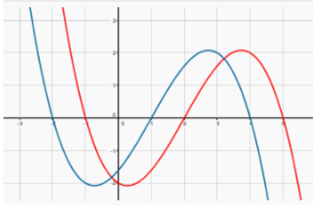
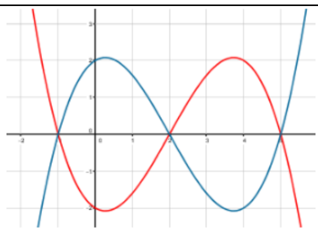
> Defini-se uma função de M em N chamando tal função de f, utiliza-se a notação $f(x) = y$ para indicar que o elemento x, do domínio de f (o conjunto M), foi transformado no elemento y, contradomínio de f (o conjunto N). Uma outra maneira de indicar esta transformação é utilizando a simbologia: $x \mapsto y = f(x)$. Diz-se que y é a imagem (ou seja, o resultado da transformação) de x pela função f. (OLIVEIRA & PINHEIRO, Marcio Rodrigues da Rocha, 2010, p. 53)

A função como transformação pode ter o mesmo significado algébrico da aplicação anteriormente apresentada relacionando conjuntos numéricos ou espaços vetoriais por operações aritméticas.

Além do significado algébrico, quando tratamos função como transformação também podemos denotar caráter geométrico de isometria, tais como reflexão, translação que também é pertinente ao comportamento funcional, pois “uma transformação geométrica é uma função”. (LIMA, 2007, p. 141)

Quadro 10: Exemplos de função como transformação geométrica.

Função	**Imagem**	**Tipo de transformação**

$Y = f(x)$		Função original
$Y = f(x) + a$		Translação de $f(x)$ em relação ao eixo y com incremento a.
$Y = f(x - a)$		Translação de $f(x)$ em relação ao eixo x com incremento a
$Y = -f(x)$		Reflexão em relação ao eixo x
$Y = f(-x)$		Reflexão em relação ao eixo y

Fonte: Adaptado de https://www.matematica.pt/util/resumos/transformar-funcoes.php

Embora essas duas formas de tratar função como transformação sejam importantes e talvez pouco discutidas no âmbito da educação básica, a função como transformação de que se trata no Ensino Médio é a transformação como máquina de transformação ou como “substituição”.

Como máquina de transformação se tem três coisas envolvidas: o que a máquina aceita como entrada, o que a máquina produz na saída e qual a transformação efetivamente produzida pela máquina. Como uma máquina de bater açaí em que a entrada são os caroços (domínio) de açaí a saída é o vinho (imagens) e a transformação é a moedura realizada dentro da máquina (Oliveira & Pinheiro, 2010, p. 55). Numericamente a transformação seria dada por uma expressão ou equação em que ao se substituir valores de entrada é possível calcular os valores de saída, como uma calculadora.

Como substituição seria, por exemplo, quando todos os estudantes de uma universidade possuem um número de matrícula pelo qual são identificados, isto é, pessoas são transformadas em números, ou mais ainda o nome da pessoa é substituído por um número. Além disso, todos precisam ter esse número (não exceção) para ser reconhecido pela instituição como estudantes regularmente matriculados, e esse número precisa ser único para cada estudante (não ambiguidade).

Embora haja essas possibilidades de interpretação para função como transformação, não alcança as situações em que há exceções no contradomínio, isto é, não generaliza para as situações não sobrejetivas. Porém, por substituição, é uma forma muito útil de relacionar variáveis quantitativas e qualitativas.

- **Relação do produto cartesiano**

Esta definição é a que considero mais restritiva, uma vez que define função como sendo um conjunto de pares ordenados ou um subconjunto do produto cartesiano entre os elementos de dois determinados conjuntos como denota-se a seguir:

> Definição: Dados dois conjuntos não vazios X e Y, uma relação de X em Y (ou entre X e Y, nessa ordem), é um subconjunto R do produto cartesiano X e Y, i.e., R é um conjunto de pares ordenados do tipo (x, y), com $x \in X$ e $y \in Y$. Se R é uma relação de x em X, diremos simplesmente que R é uma relação em X.
> Definição: Dados conjuntos não vazios, X e Y, uma relação f de X em Y é uma função se a seguinte condição for satisfeita:$\forall\, x \in X$,$\exists$ um único $y \in Y$; $x\, f\, y$. (MUNIZ NETO, 2012, p.5)

Essa definição é duramente criticada em pesquisas recentes pelo fato de afastar aspectos de variação, dependência e correspondência inerentes ao conceito de função (Silva, 1997) e por não ser aplicável a todos os tipos de funções como explica Lima (2007).

> Um exemplo flagrante da falta de objetividade (que persiste até hoje em quase todos os livros didáticos brasileiros) é a definição de função como um conjunto de pares ordenados. Função é um dos conceitos fundamentais da Matemática (o outro é conjunto). Os usuários da Matemática e os próprios matemáticos costumam pensar numa função de modo dinâmico, em contraste com essa concepção estática. Uma transformação geométrica é uma função. Mas não é provável que exista alguém que imagine uma rotação, por exemplo, como um conjunto de pares ordenados. Os próprios autores e professores que apresentam essa definição não a adotam depois, quando tratam de funções específicas como as logarítmicas, trigonométricas, etc. Quem

pensa num polinômio como num subconjunto de R2? (LIMA, 2007, p. 141).

Essa citação do renomado professor Elon Lages Lima, me remete a responsabilidade de trazer neste trabalho o caráter dinâmico do conceito de função, a variação, o movimento, o que está em mutação e assim entender como e por quê isso ocorre não só quando se relaciona números, pois este conceito permeia as ações e evoluções da sociedade e nos ensinou a compreender a natureza também.

Quando trago essas reflexões sobre as limitações de algumas definições, não é minha intenção inferir qual seja a melhor, mas é necessário ter clareza para que situações pretende-se contextualizar a definição de função. Por exemplo, se houver a pretensão de realizar uma interdisciplinaridade com geografia, fazendo estudo da localização de um ponto no mapa segundo coordenadas cartesianas a definição como relação do produto cartesiano é suficiente.

3.2.2 Representações: a linguagem das funções

Quando realizei a revisão de estudos, pesquisa com estudantes e professores e a reconstrução histórica foi constante a evidência da necessidade de se explorar ao máximo o campo conceitual de função bem como suas representações.

> O campo conceitual das funções envolve muitos outros conceitos, como o de uma *relação entre conjuntos*, *variação*, *dependência e correspondênciaentre variáveis*, *variável dependente e independente*, entre outros. Para representar uma função, podemos utilizar uma tabela, um gráfico, um diagrama de flechas ou uma expressão algébrica. (OLIVEIRA, 1997, p. 8)

É nesse aspecto que agora vou discorrer nossa reflexão Matemática, a respeito das linguagens Matemáticas ou representações de função, o que foi apresentado antes numa perspectiva histórica e na forma de comunicar pela definição. Nesta seção, para tratar das diferentes formas de comunicar função, vou me basear nos trabalhos de Chaquiam & Cabral (2019) e Santos & Barbosa (2017):

- **Função por meio de tabela ou quadro**

A tabela ou quadro é uma forma muito utilizada na comunicação do conceito de função, por intermédio dela os dados de uma relação funcional são organizados em linhas ou colunas, de forma que os dados de entrada (domínio) e os seus correspondentes dados de saída (imagens) estejam na mesma coluna ou linha, sendo possível verificar as condições de exceção e ambiguidade. (Santos & Barbosa, 2017)

- **Função por meio de diagrama ou esquema de flechas**

Na comunicação do conceito de função como diagrama são visíveis as condições da definição de função e permite classificar de forma mais direta como injetora, sobrejetora ou bijetora. Para reconhecer se num diagrama a função está bem definida é necessário verificar:

> Condições para satisfazer uma relação f de A em B para ser aplicações (ou função)
> 1° É necessário que todo elemento $x \in A$ participe pelo menos um par $(x, y) \in f$, isto é, todo elemento de A deve servir como ponto de partida.
> 2° É necessário que cada elemento $x \in A$ participe de apenas um único par $(x, y) \in f$, isto é, cada elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única flecha. (IEZZI e MURAKAMI, 2002, p. 81)

Nessa linguagem, também é simples identificar que uma correspondência não é função: Se existir elemento do conjunto de partidado qual não parta flecha alguma ou se existir elemento do conjunto de partida do qual partam duas ou mais flechas.

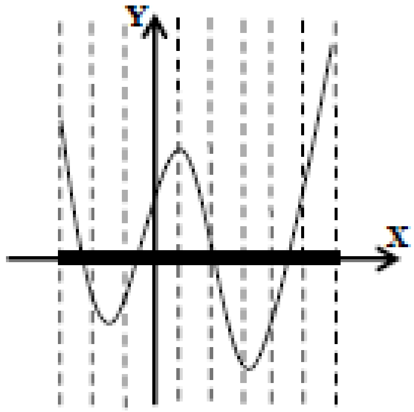
- **Função por meio de Par ordenado**

Segundo Rodrigues & Freitas (2013, p.3), indicamos por $(x,\ y)$ o par ordenado formado pelos elementos x e y, onde x é o 1º elemento e y é o 2º elemento, e, a imagem de um par ordenado pode ser representado através de um ponto no plano, no qual esse par ordenado passa a se chamar coordenada cartesiana.

Quando um par ordenado representa uma função, não ocorre exceções, e é possível verificar se no 1º elemento do par (domínio) apresenta ambiguidade em relação a outros pares de um mesmo conjunto de pares ordenados, para que assim as condições de função sejam satisfeitas.

- **Função por meio de Gráfico**

De acordo com IEZZI e MURAKAMI (2002, p. 82), “podemos verificar pela representação cartesiana as relação f de A em B se f é ou não função. Basta verificarmos se a seta paralela ao eixo y conduzida pelo ponto$(x,\ 0)$ em que $x \in A$, encontra sempre o gráfico de f em um só ponto”. Assim nem todo gráfico representa uma função. Vejamos:



Deste modo, a comunicação do conceito de uma função f como um *gráfico* consiste em apresentar no plano cartesiano o subconjunto de pontos (x, y), em que $x$pertence ao domínio da função fe yé a imagem de $x$por f, ou seja, $y = f\ (x)$, sendo geralmente visualizado como uma linha ou ponto no plano.

- **Função por meio de expressão algébrica ou Equação.**

Refleti no tópico 3. 2. 1 quando falei da definição de função como aplicação e seu caráter algébrico e quando falamos sobre os ingredientes do comportamento funcional. Reforço apenas que uma representação algébrica por si só não define um comportamento funcional se não estiver acompanhada da delimitação de seu domínio e contradomínio, como ilustrado no Quadro 16. Essa forma de representação é muito importante para generalizar um padrão de comportamento que foi observado e descrever uma regra de correspondência, que só será funcional se os critérios de não exceção e não ambiguidade no domínio forem verificáveis.

- **Função por meio da língua materna**

Essa é a forma corrente de comunicar do professor e do educando e por onde me comunico com o leitor. Ora, assim como eu preciso me fazer entender neste texto é necessário que os enunciados de problemas e exercícios, bem como a oralidade do professor estejam adequadas e inteligíveis para que também se possa expressar um comportamento funcional, sendo possível extrair desse texto ou dessa fala quem são as variáveis dependentes e independentes, a delimitação e domínio e contradomínio e fazer uma generalização do comportamento da situação, possível de aplicar a conversão da língua materna para qualquer que seja a linguagem Matemática que se pretenda utilizar.

Esta linguagem tem um importante papel não somente de contextualizar a Matemática com a realidade, mas de dar ao estudante o exercício da linguagem Matemática em seu cotidiano. Para Chaquiam & Cabral, dar significado matemático às coisas e aprender a falar e ler em linguagem Matemática é tão imprescindível como falar e escrever na língua materna.

Para exemplificar como é possível, a partir de um enunciado, realizar as mais diversas formas de representar uma mesma situação, vou reformular o problema proposto na seção 3.2.1.

✓ Por meio de Língua materna

O taxímetro do táxi de João indica cobrança R$ 5,00 de bandeirada (valor fixo inicial da corrida) mais R$ 1,50 por quilômetro inteiro rodado. Qual a função que descreve o comportamento considerando que ele tenha no tanque gasolina suficiente para percorrer no máximo 5 km? (ou considerando que o passageiro queira ser transportado a 5 km do local de embarque?).

✓ Por meio de um quadro

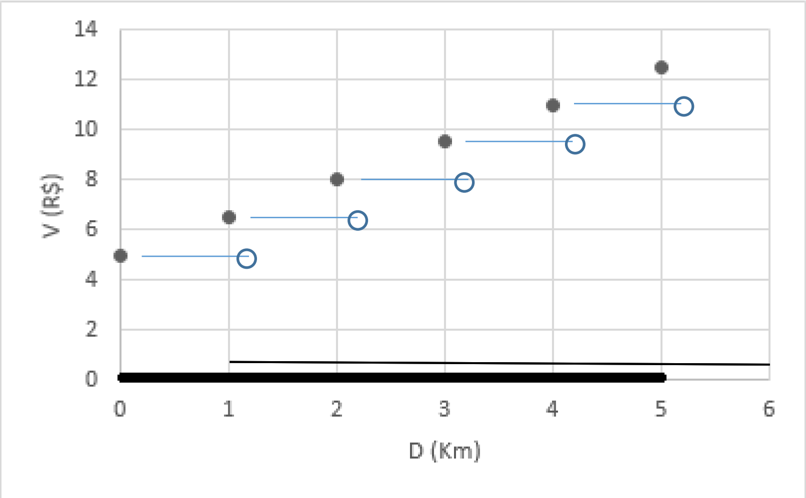
Distância percorrida (Km)	Valor a pagar (R$)
0	5,00
1	6,50
2	8,00
3	9,50

4	11,00
5	12,50

✓ Por meio de pares ordenados

{(0,5), (1,6.50), (2,8.00), (3, 9.50), (4, 11.00), (5, 12.50)}

✓ Por meio de gráfico



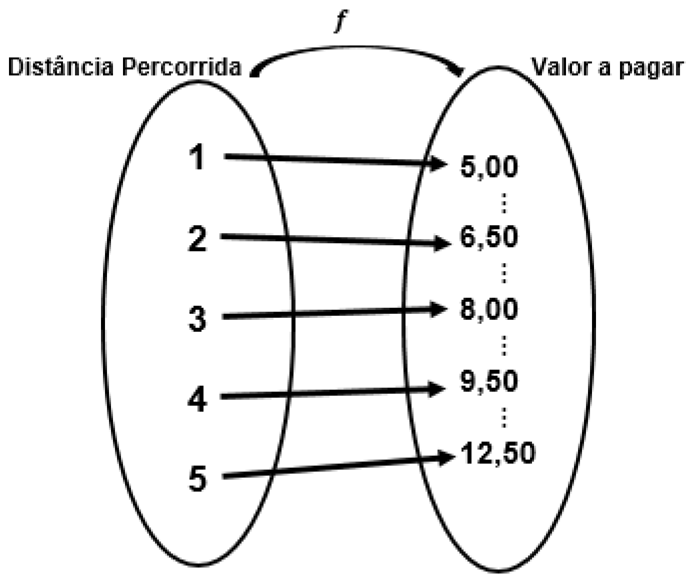
✓ Por meio de Equação

$$f: [0,5] \subset Z \to R$$

$$d \mapsto f(d) = V = 1{,}50d + 5{,}00,$$

onde d é a distância percorrida em Km e V o valor a pagar em R$.

✓ Por meio de Diagrama



3.2.3. Outras reflexões sobre o conceito matemático de função no ensino

Quando estudamos um comportamento funcional estamos fazendo, como o que está dito na epígrafe deste capítulo, nos “familiarizando com seus costumes”. E onde está a serventia disso? Não está apenas no que se pode controlar, prever ou generalizar, engana-se quem acha que a exatidão é pretensão da Matemática. Quando esse costume se altera, quando a estimativa não ocorre, quando a regra é quebrada é que se percebe que as coisas não estão “funcionando” como deveriam. Apresento a seguir alguns exemplos de como isso ocorre:

- ✓ Fenômenos climáticos: Comportamentos cíclicos da natureza como marés, chuvas, estiagem, estações do ano que não acontecem como ou quando eram previstos, nesse momento ocorrem intensas ações de proteção ao meio ambiente.
- ✓ Fenômenos biológicos: Desenvolvimento do feto no útero da mãe. Existem variáveis para o desenvolvimento saudável, que quando não ocorrem indicam má formação, doenças, etc. Ter o controle dessas variáveis pode salvar uma vida!
- ✓ Fenômenos Sociais: Quando quebra a economia de uma empresa ou de um país nota-se que pessoas tomaram decisões erradas

(corrupção, maus investimentos, má gestão, etc), então substitui-se os gestores, os cidadãos se manifestam contra o governo, altera-se as estratégias de investimentos.

É necessário também trazer esse olhar para a sala de aula de quando comportamento funcional não ocorre, perceber quando as coisas não funcionam e assim poder agir, intervir e reverter. Quando se fala que o estudante precisa ter condições de exercer sua cidadania e agir de forma autônoma e participativa na sociedade, é nesse aspecto que a Matemática, em especial, o conceito de função, pode ajudá-lo a pensar, argumentar e ser um cidadão ativo, que não se permite enganar e explorar nas relações de consumo e trabalho e nem se alienar por discursos infundados e sem lógica.

Sobre os usos das diferentes linguagens Matemáticas para ensino e aprendizagem de função, devem ser apresentadas aos estudantes gradativamente ao longo da vida escolar, no entanto umas são de mais simples apreensão, como o de diagrama por onde normalmente se introduz o assunto, porém é necessário que gradativamente ao nível de complexidade seja proporcionado as demais representações.

> A existência de diferentes representações semióticas para um mesmo objeto matemático possibilita a escolha da melhor e mais adequada ao que se pretende trabalhar. Certas vezes, um objeto se apresenta em uma forma de representação que possui um custo cognitivo muito alto para realização de raciocínios e procedimentos de cálculo necessários, logo, a possibilidade de usar outra representação que proporcione tratamentos menos trabalhosos é de extrema importância (DIONÍZIO e BRANDT, 2011, p. 3)

Ainda no aspecto das linguagens e representações, Chaquiam & Cabral (2019) afirmam que cada uma apresenta sua dificuldade específica e recomendam observar se as imbricações e não entendimento de uma delas venha prejudicar a compreensão das demais, causando uma impregnação de equívocos por parte de professores e alunos na fase de consolidação do conhecimento.

Neste sentido, reconheço esta seção como de grande importância para esta pesquisa por incentivar o uso correto das definições e representações com o devido rigor, pois a fidelidade a esse rigor e formalismo nos aproxima da consolidação do conhecimento e do saber matemático.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da didática Matemática**. Curitiba: UFPR, 2014.

ALVARENGA, Karly; BARBOSA, Celso Viana; FERREIRA, Gislaine Maria Ferreira. **O conceito de função**: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a. C até o século XX. REVEMAT. Florianópolis (SC), v.9, n. 1, p. 159-178, 2014.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: Interação e Tecnologia**. Vol 1. 2. Ed. Leya. São Paulo. 2016

ARDENGHI, Marcos José. **Ensino aprendizagem do conceito de função**: Pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 182 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2011.

BATISTA, Natália Lampert; FELTRIN, Tascieli; BECKER, Elsbeth Léia Spode. **Autoformação docente e reflexões sobre vivências escolares**. Inquietações e Proposituras na Formação Docente. Capítulo 7. Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. 10ª reimpressão. São Paulo: Edgard Blücher, 1993.

BRASIL. Presidência da República. **Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017**. Brasília, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular.** Brasília, DF, 2017. Disponível em:<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministérios da Educação. **Lei de diretrizes e Bases da Educação Brasileira**. Brasília: MEC/SEM, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:**Matemática**-** ensino médio**-**Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEM, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.
Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

BRITO, Antonia Edna; SANTOS, Cleidivan Alves dos. Prática pedagógica dos professores de Matemática no início da experiência docente: ciclo de vida e saberes docentes. In: V Encontro De Pesquisa Em Educação Da UFPI. **Anais**... Teresina/PI. 2009.

BRITO, Dirceu dos Santos; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle**. O conceito de função em situações de modelagem**. ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v.13 – n. 23 – jan./jun. 2005.

BROUSSEAU, Guy. **Fundamentos e métodos da didáctica da Matemática**. In: BRUM, J. (Org.). Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 35-114.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos. Ática. São Paulo, 2008.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas**: estrutura e elaboração. 104 p.Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CEOLIM, Amauri Jerci; REZENDE Veridiana, HERMANN, Wellington. **Diálogos entre a educação básica e a universidade**: reflexões acerca do conceito de função nas salas de aula. CVR. Curitiba. 2019.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos**: História e Matemática em sala de aula. Belém/SBEM-PA, 2017.

CHAQUIAM, Miguel; CABRAL, Natanael Freitas. **Funções**: Uso, desuso e reflexos no ensino. SINEPEM. IFPA. Belém-PA, 2019.

COSTA, Acylena Coelho. **Conhecimentos de estudantes universitários sobre oconceito de função**. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SãoPaulo, 2004.

CRUZ, Paulo Jakson Dias. **Interdisciplinaridade como prática para a construçãodo conceito de função**. 118 f. Dissertação (Mestrado Matemática em Rede Nacional) -Universidade Federal Rural do Semi-árido, Mossoró, 2015.

CUNHA, Carlos Virgílio Lobato; SOUSA, Thiago Delly Vidal**;** CHAQUIAM, Miguel. **Função**: um pouco de história. VII Encontro Paraense de Educação Matemática. ISSN 2178 – 3632**. Anais ...** Belém, 2010.

DANTE, Luiz Roberto**. Matemática**: Contexto e Aplicações. Vol 1. 1. Ed. Ática. São Paulo, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto e Aplicações. Vol 1. 2. Ed. Ática. São Paulo, 2016.

DARRONQUI, Luciene Cristina; TRIVIZOLI, Lucieli Maria. **Elementos da história da Matemática como estratégia pedagógica no ensino da função polinomial do primeiro grau**. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE. Vol. 1. Curitiba, 2014.

DIONIZIO, Fátima Queiroz; BRANDT, Célia Finck. Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria. X Congresso Nacional de Educação. **EDUCERE**. PUC/PR. Curitiba, 2011.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004.

KARLSON, Paul. **A Magia dos números**. Tradução de Henrique Carlos Pfeifer, Eugênio Brito e Frederico Porta. Editora Globo. Rio de Janeiro - Porto Alegre - São Paulo. 1961.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do ensino Médio**. Vol. 1. Coleção do professor de Matemática. SBM. Rio de janeiro, 1997.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural:** uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. v. 20, Campinas: Cadernos Cedes, 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v20n50/a02v2050.pdf >. Acesso em: 02 de Nov. 2017.

GUIMARÃES, Rita Santos. **Atividades para aprendizagem do Conceito matemático de função**. 202 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2010.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática**: Ciência e Aplicações. Vol 1. 7. ed. Saraiva. São Paulo, 2012.

IEZZI, Gelson et al**. Matemática**: Ciência e Aplicações. Vol 1. 7. ed. Saraiva. São Paulo, 2016.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Conjuntos, Funções. Vol1. 7. Ed. Atual. São Paulo, 2002.

MACHADO, Nilson José. **Sobre a ideia de competência**. In: PERRENOUD, Philippe (Org.). As competências para ensinar no século XXI: a formação de professores e o desafio da avaliação. Trad. de Claúdia Schilling e Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002. p. 135-157.

MACIEL, Paulo Roberto Castor. BOLEMA, Tereza Fachada Levy Cardoso. **A História do Conceito de Função em Vídeo:** uma proposta para a aprendizagem. Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1348-1367, dez. 2014.

MACIEL, Paulo Roberto Castor; BOLEMA, Tereza Fachada Levy Cardoso. **A História do Conceito de Função em Vídeo: uma proposta para a aprendizagem**. Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1348-1367, dez. 2014.

MAFRA, José Ricardo e Souza. **Um desenvolvimento histórico do conceito de função**. Coleção História da Matemática para professores. v. 15. Belém: SBHMt, 2009.

MENDES, Helena Monteiro. **O conceito de função:** Aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau. (Dissertação de Mestrado). Departamento de Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1994.

MORTIMER, Eduardo F. & SCOTT, Phill. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino.** Investigações no ensino de ciências, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2002.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar**: Introdução a Análise funcional- 2 ed. SBM. Rio de Janeiro, 2012.

NETO, Aref Antar et al. **Noções de Matemática**(v.1). Fortaleza: Editora Vestseller. 2009.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino de; PINHEIRO, Marcio Rodrigues da Rocha. **Coleção Elementos da Matemática:** Conjuntos funções, aritmética. – 2 ed. Editora VestSeiller. Fortaleza, 2010.

OLIVEIRA, Nanci de. **Conceito de função:** Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 174 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. Vol 1. 3. Ed. Moderna. São Paulo. 2015.

PARÁ. Secretaria de Educação do Estado do Pará.**Revista do sistema paraense de avaliação educacional: referências e resultados**. Belém, 2016. Disponível em:<https: //sispae.vunesp.com.br/Arquivos/Revistas2016 /SumarioExecutivo_2016.pdf >**Acesso em: 10 nov. 2018.**

PARÁ. Universidade do estado do Pará. **Regimento do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.** Belém, s, d. Disponível em <http://ccse.uepa.br/pmpem/?page_id=2>. Acesso em: 10 nov. 2018.

PELHO, Edelweiss Benez Brandão. **Introdução ao conceito de função:** A importância da compreensão das variáveis. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

RESENDE, Denise de Mello, et al. **Uso de diferentes métodos de ensino-aprendizagem de química para estudantes do ensino médio da rede pública**. Reflexões pedagógicas: cenários de iniciação a docência. Subprojetos Física – Matemática – Química. Estudo e Ensino I. – Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2014

RODRIGUES, Fredy Coelho; ZINE, Elaine Scheid. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de Matemática: da ação experimental à reflexão. **Revista Revemat**. Florianópolis: v. 07, n. 2, p. 187-196, 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SÁ, Pedro Franco de. A construção do conceito de Função:alguns dados históricos. **Revista Traços**. Belém: UNAMA, v.6, n.11,2003.

SANTOS, Graça Luzia Dominguez; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Como ensinar o conceito de função? **Educação Matemática em Revista**. v. 22, n. 53, p.27-37. Brasília, jan/mar, 2017.

SILVA, Edna Machado; FELIX, Ana Paula Nunes; CHAQUIAM, Miguel. **Aprendizagem do conceito de função no ensino médio**. Congresso Pan-Amazônico de Matemática. Belém, 2018.

SILVA, Edna Machado; MIRANDA, Denis do Socorro Pinheiro; CABRAL, Natanael Freitas. FUNÇÃO: Uma reconstrução histórica do conceito. **Anais**. XIII Seminário Nacional de História da Matemática.. – Fortaleza: SBHMat, 2019.

SILVA, Charlene Fiorinida. O Pibid e o ensino de função**:** investigando como professores ensinam função no ensino médio com a finalidade de elaborar intervenções pedagógicas. **Reflexões pedagógicas**: cenários de iniciação a docência. Subprojetos Física – Matemática – Química. Estudo e Ensino I. – Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2014.

SILVESTRE, Adriane Lemes. **Conceitos e propriedades de funções sob a Ótica do ensino básico**. 86 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2016.

SOUZA, Rebeca Pereira de. **A construção do conceito de função através de atividades baseadas em situações do dia a dia**. 98 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadualdo Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2016.

TRINDADE, Daniela Jéssica; NAGASHIMA, Lucila Akiko; ANDRADE, Cíntia Cristine. **Obstáculos epistemológicos sob a perspectiva de Barchelard**.

Formação de professores: Contextos sentido e Práticas.VI Seminário Internacional sobre Profissionalização Docente. PUC/PR. Curitiba, 2017.

ZUFFI, Edna Maura, PACCA, Jesuína Lopes de Almeida. **O conceito de função e sua linguagem para os professores de Matemática e de ciências**. Ciência & Educação, v.8, nº1, p.1 – 12, 2002.