Tetraedro de Sierpinsky

MAURICIO RAMOS LUTZ
JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS

Caderno didático volume 1 de 4 edições

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Este caderno didático originou-se a partir da pesquisa de doutorado de Maurício Ramos Lutz, orientada por José Carlos Pinto Leivas e realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática da Universidade Franciscana (UFN) – Santa Maria/RS.

Agradecemos a todos os envolvidos que disponibilizaram seus esforços e seu conhecimento para auxiliar no desenvolvimento deste trabalho: a Universidade Franciscana, que possibilitou o estudo, o Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar) – Campus Alegrete, no qual foi aplicada a investigação constante da tese.

Para acessar a tese na integra acesse o link abaixo e pesquise pelo nome do autor ou pelo título “Possibilidade de inserção da Geometria Fractal na licenciatura em Matemática do IFFar”.

http://www.tede.ufn.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/903

Tetraedro de Sierpinsky

Objetivos :

- Construir o Tetraedro de Sierpinsky utilizando o *GeoGebra*;
- Explorar relações geométricas envolvidas no Tetraedro de Sierpinsky.

Atividade 1 – Conhecendo o Tetraedro de Sierpinsky

A atividade 1 é expositiva e dialogada com os alunos, sendo apresentada em um primeiro momento o histórico Sierpinsky e, após, busca de suas características.

Tetraedro de Sierpinsky

Um fractal que leva o nome de Sierpinsky é o Tetraedro de Sierpinsky (Figura 1), sendo esse uma ampliação tridimensional do Triângulo de Sierpinsky.

Figura 1 – Tetraedro de Sierpinsky

Fonte: autoria própria.

Iwai (2015) apresenta a construção do Tetraedro de Sierpinsky, iniciando o processo com um tetraedro. Primeiramente, localizamos o ponto médio de cada aresta e unimos esses pontos médios por doze segmentos de reta, formando seis tetraedros menores e congruentes. Retiramos os dois tetraedros centrais (que formam um octaedro). Disso, resultam quatro tetraedros, para novamente aplicarmos o mesmo processo. A cada nova iteração, a quantidade de tetraedros fica multiplicada por 4 e a medida da aresta é a metade da aresta do tetraedro anterior. Portanto, se repetirmos n vezes o processo, teremos formado 4^n tetraedros com arestas medindo $\frac{1}{2^n}$ da aresta do tetraedro inicial.

O Tetraedro de Sierpinsky, no nível 0, pode ser encontrado no endereço <https://www.geogebra.org/m/yav6jwjh>; o nível 1, no endereço <https://www.geogebra.org/m/ppsekprs>; e o nível 2 no endereço <https://www.geogebra.org/m/aaayt9ne>. Esses endereços são do repositório de materiais denominado "GeoGebra Materiais" (<https://www.geogebra.org/materials?lang=pt>). Tal repositório é um espaço em que se pode depositar materiais criados no *GeoGebra*, estando disponível para *download*. Pode ser deixado em modo público (todos terão acesso), modo particular (só o autor terá acesso) ou em modo compartilhado (algumas pessoas previamente determinadas terão acesso).

Atividade 2 – Construção do Tetraedro de Sierpinsky

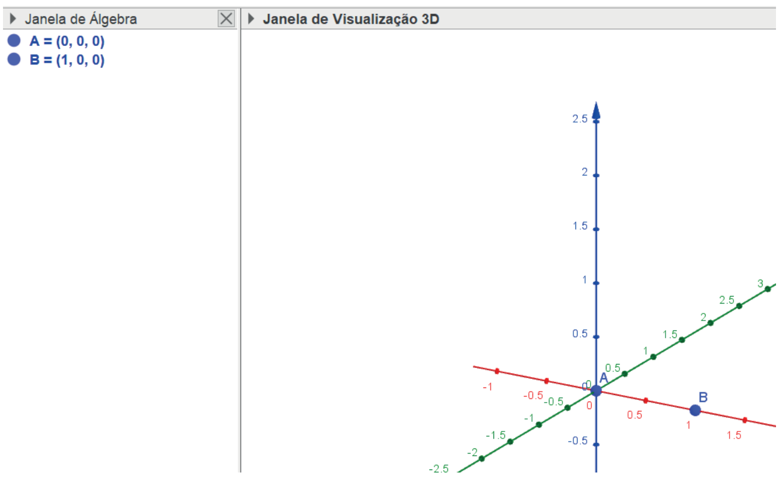
A construção do Tetraedro de Sierpinsky será realizada com o auxílio do *GeoGebra* e, para melhor compreensão, a dividiremos em 3 etapas. Apresentaremos os passos de construção na sequência.

Etapa 1: nível 0

Protocolo de construção: novamente exploramos a "Janela de Álgebra" e "Entrada de Comandos", porém com a utilização da "Janela de Visualização 3D".

a) Inserir os pontos A (0, 0, 0) e B (1, 0, 0), conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Pontos A e B



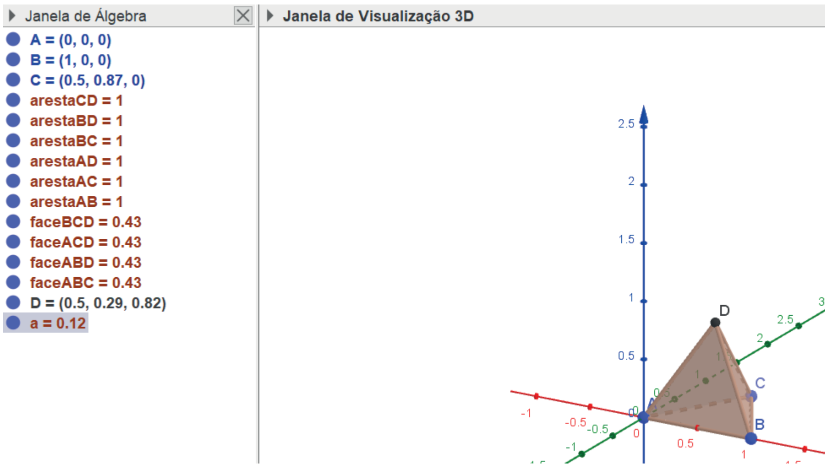
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: A=(x, y, z); B=(x, y, z)

Sintaxe preenchida: A=(0, 0, 0); B=(1, 0, 0)

b) Criar um tetraedro com os pontos A e B. A Figura 3 ilustra a construção.

Figura 3 – Tetraedro ABCD



Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Tetraedro(<Ponto>, <Ponto>)

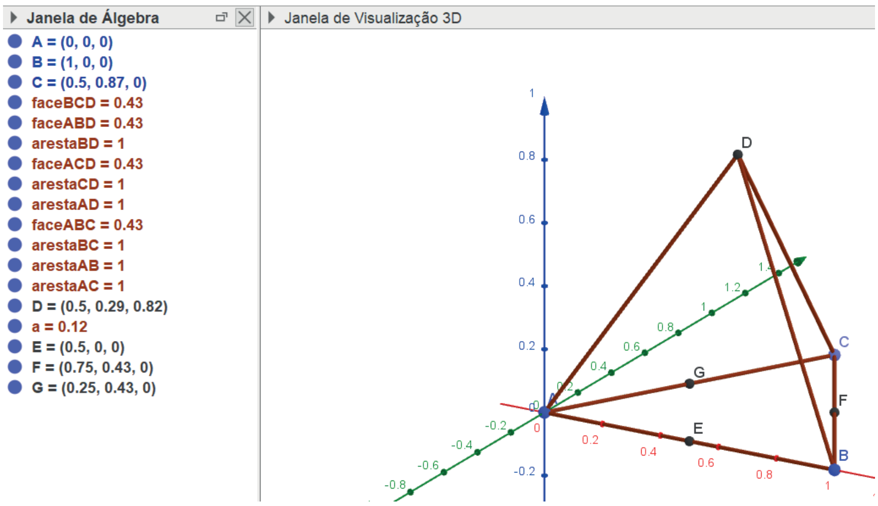
Sintaxe preenchida: Tetraedro(A, B)

Etapa 2: nível 1

Construção de 4 tetraedros no interior do tetraedro inicial, seguindo o protocolo:

c) Marcar os pontos médios E, F e G referentes aos segmentos AB, BC e AC, respectivamente. Observe a Figura 4 e a respectiva construção.

Figura 4 – Pontos médios E, F e G



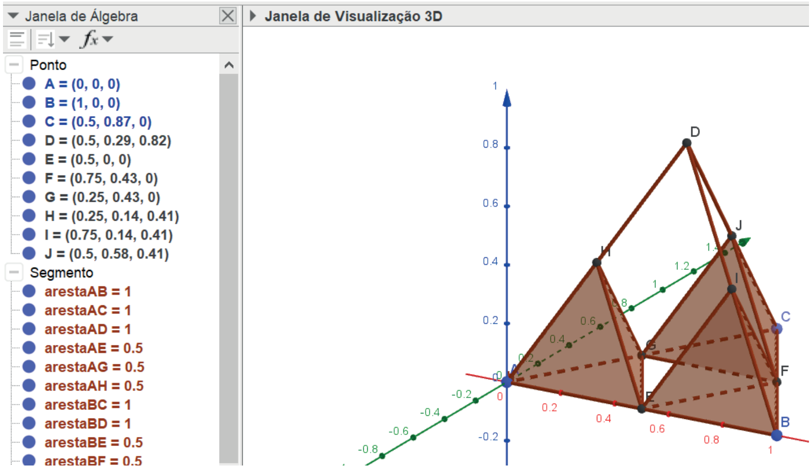
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: PontoMédio(<Ponto>, <Ponto>)

Sintaxe preenchida: PontoMédio(A, B); PontoMédio(B, C); PontoMédio(A, C), separadamente.

d) Criar três tetraedros com os pontos AEG, EBF e GFC. Veja Figura 5, ilustrando a construção.

Figura 5 – Tetraedros AEGH, EBFI e GFCJ



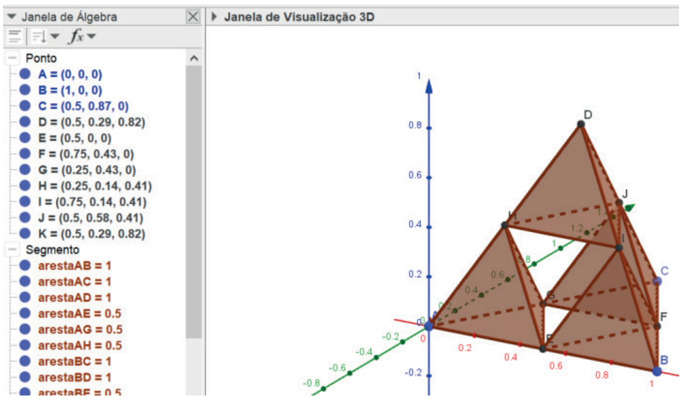
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Tetraedro(<Ponto>, <Ponto>, <Ponto>)

Sintaxe preenchida: Tetraedro(A, E, G); Tetraedro(E, B, F); Tetraedro(G, F, C), separadamente.

e) Criar o quarto e último tetraedro do nível 1 com os pontos H, I e J, conforme ilustra a Figura 6.

Figura 6 – Tetraedro HIJD



Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Tetraedro(<Ponto>, <Ponto>, <Ponto>)

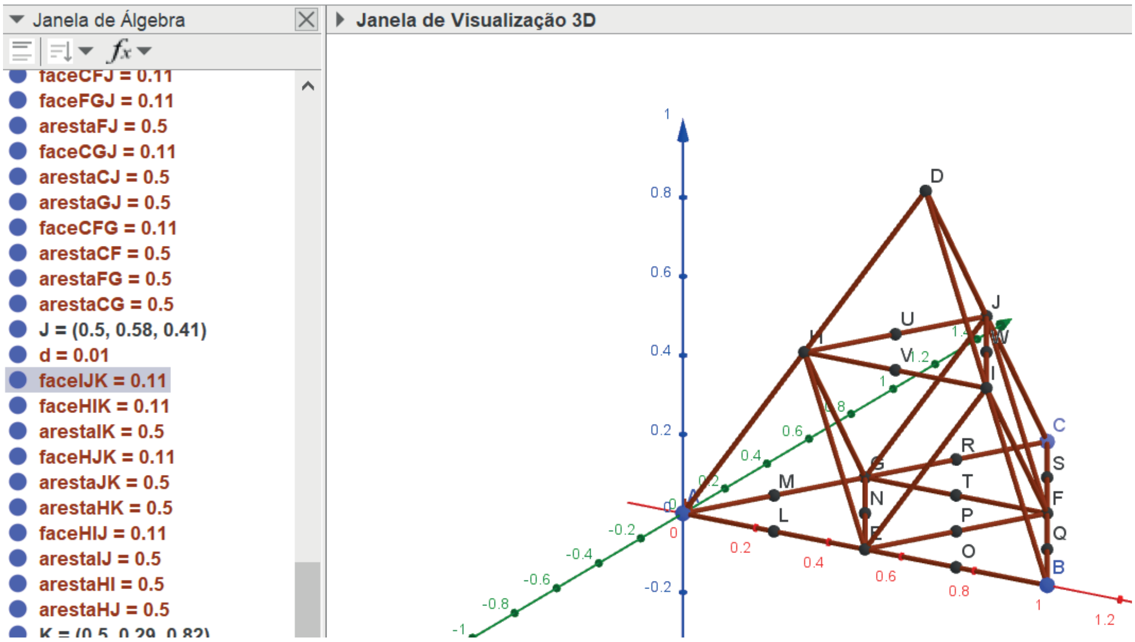
Sintaxe preenchida: Tetraedro(H, I, J)

Etapa 3: nível 2

Construção de 4 tetraedros no interior de cada tetraedro gerado no nível 1, protocolo de construção:

f) Marcar os pontos médios L, M, N, O, P, Q, R , S, T, U, V e W referentes aos segmentos AE, AG, EG, EB, EF, FB, GC, FC, GF, HJ, HI e IJ, respectivamente. A Figura 7 ilustra essa etapa.

Figura 7 – Segmento f de comprimento l



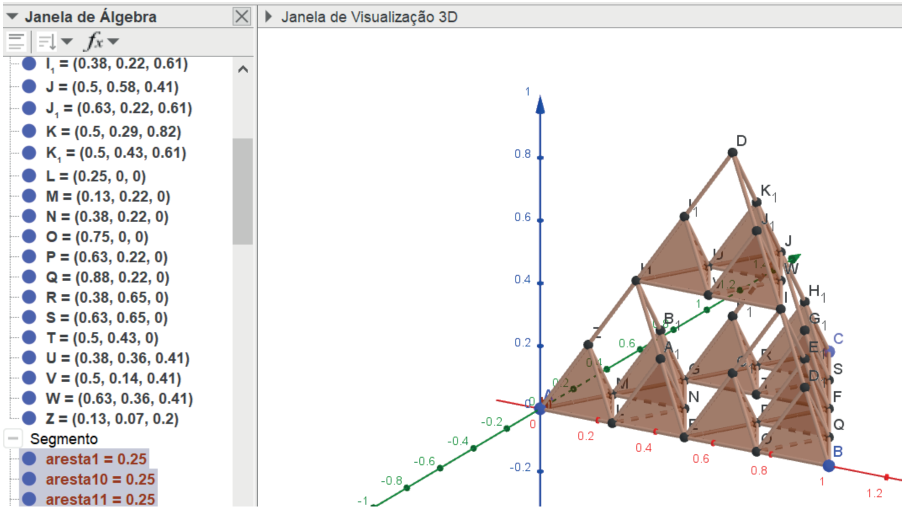
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: PontoMédio(<Ponto>, <Ponto>)

Sintaxe preenchida: PontoMédio(A, E); PontoMédio(A, G); PontoMédio(E, G); PontoMédio(E, B); PontoMédio(E, F); PontoMédio(F, B); PontoMédio(G, C); PontoMédio(F, C); PontoMédio(G, F); PontoMédio(H, J); PontoMédio(H, I); PontoMédio(I, J), separadamente.

g) Criar 12 tetraedros com os pontos ALM, LEN, MNG, EOP, OBQ, PQF, GTR, TFS, RSC, HVU, VIW e UWJ. Veja a Figura 8 ilustrando essa situação.

Figura 8 – Tetraedros ALMZ, $LENA_1$, $MNGB_1$, $EOPC_1$, $OBQD_1$, $PQFE_1$, $GTRF_1$, $TFSG_1$, $RSCH_1$, $HVUI_1$, $VIWJ_1$ e $UWJK_1$



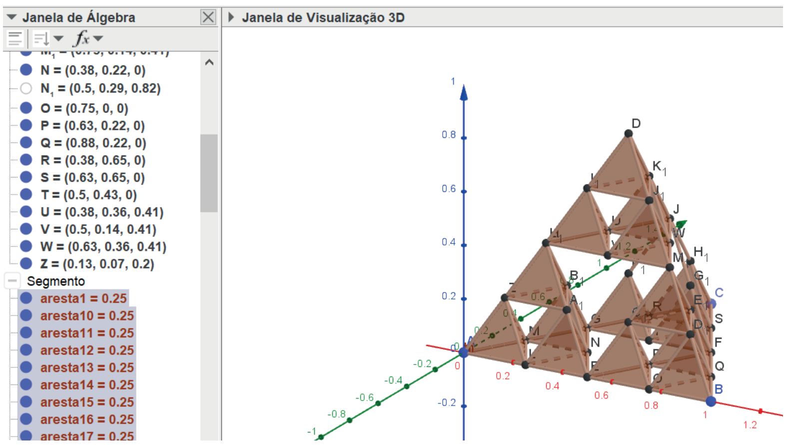
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Tetraedro(<Ponto>, <Ponto>, <Ponto>)

Sintaxe preenchida: Tetraedro(A, L, M); Tetraedro(L, E, N); Tetraedro(M, N, G); Tetraedro(E, O, P); Tetraedro(O,B,Q); Tetraedro(P,Q,F); Tetraedro(G,T,R); Tetraedro(T, F, S); Tetraedro(R, S, C); Tetraedro(H, V, U); Tetraedro(V, I, W); Tetraedro(U, W,J), separadamente.

h) Criar os últimos 4 tetraedros do nível 2 com os pontos ZA_1B_1, $C_1D_1E_1$, $F_1G_1H_1$ e $I_1J_1K_1$, conforme ilustra a Figura 9.

Figura 9 – Tetraedros ZA_1B_1H, $C_1D_1E_1I$, $F_1G_1H_1J$ e $I_1J_1K_1D$



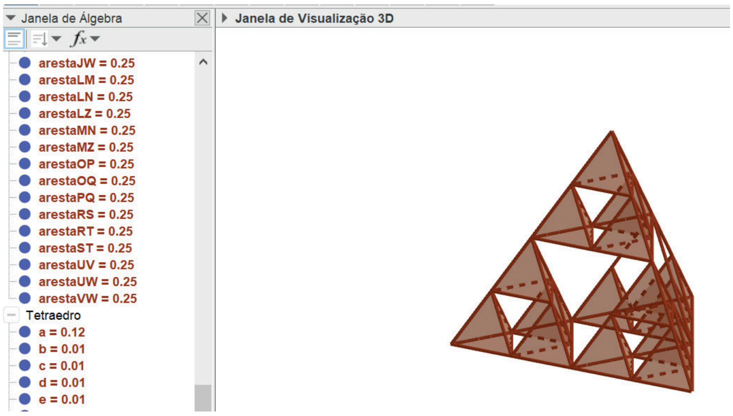
Fonte: autoria própria.

Sintaxe: Tetraedro(<Ponto>, <Ponto>, <Ponto>)

Sintaxe preenchida: Tetraedro(Z, A_1, B_1); Tetraedro(C_1, D_1, E_1); Tetraedro(F_1, G_1, H_1); Tetraedro(I_1, J_1, K_1)

i) Para finalizar, deixar visível somente os tetraedros construídos no nível 2, ocultando outros objetos que não são necessários, como pode ser observado na Figura 10.

Figura 10 – Tetraedro de Sierpinsky nível 2



Fonte: autoria própria.

Atividade 3 – Exploração do Tetraedro de Sierpinsky

a) A partir da construção do Tetraedro de Sierpinsky, analisar e preencher o Quadro 1. Determinar a quantidade de tetraedros e arestas geradas, bem como a medida delas, em cada nível, até chegar ao nível n. Salientamos que n é um número natural qualquer.

Quadro 1 - Medida do lado, número de hexágonos e área (em relação a A_0) para o Tetraedro de Sierpinsky de nível n

	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	...	Nivel n
Lado	L	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{8}$	...	$\frac{l}{2^n}$
Número de arestas	6	24	96	384	...	6.4^n
Número de tetraedros	1	4	16	64	...	4^n

Fonte: autoria própria.

b) Se você pensar em um valor para n muito elevado, ou seja, n tendendo a infinito, o que ocorre com o soma das medidas dos comprimentos das arestas, isto é, S_n?

A soma das medidas dos comprimentos das arestas de um tetraedro é dada por $S = 6l$, a qual é denotada de S. Porém, a cada nível do Tetraedro de Sierpinsky, modifica-se a quantidade de tetraedros e a medida da aresta. Sendo assim, essa soma é dada pela multiplicação do número de tetraedros gerados em cada nível por 6 (número de arestas em cada tetraedro) e pela medida do lado l do tetraedro (que em cada nível terá um novo valor). Para melhor organização, preencha o Quadro 2.

Resposta esperada:

Quadro 2 – Soma das arestas do Tetraedro de Sierpinsky

Nível	Soma das arestas
0	$S_0 = 6l = S$
1	$S_1 = 4.6.\frac{l}{2} = \frac{4}{2}.6l = 2S$
2	$S_2 = 16.6.\frac{l}{4} = \frac{16}{4}.6l = 4S$
3	$S_3 = 64.6.\frac{l}{8} = \frac{64}{8}.6l = 8S$
. . .	. . .
N	$S_n = 4^n.6.\frac{l}{2^n} = \frac{2^{2n}}{2^n}.6l = 2^nS$

Fonte: autoria própria.

$S_n = 2^nS$. Temos duas formas para encontrar essa relação: uma é atribuindo valores a n e verificar seu comportamento; a outra é por meio do limite, quando n tende a infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty}(2^nS) = S.\lim_{n\to\infty}(2^n) = \infty$$

Para atribuir valores, iremos utilizar a Planilha do *GeoGebra*, conforme apresentado na Figura 11.

Figura 11 – Soma das arestas do Tetraedro de Sierpinsky nível n

Planilha

	A	B	C
1	n	2^n	
2	1	2	
3	10	1024	
4	20	1048576	
5	30	1073741824	
6	40	1099511627776	
7	50	1125899906842624	
8	100	1267650600228229400000000000000	

Fonte: autoria própria.

Como podemos observar na Figura 11, conforme aumentamos o valor de n, também teremos valores cada vez mais elevados para a soma. Portanto, podemos concluir que essa soma tende a um valor muito grande, ou seja, a infinito.

c) Conjecturando um valor para n muito elevado (n tendendo a infinito), o que você observa acontecer com a área total A_{t_n}?

A área total de um tetraedro é dada por: $A_t = l^2\sqrt{3}$, (denotada por A). Para cada nível do Tetraedro de Sierpinsky, ocorre variação do número de tetraedros gerados e da medida da aresta. Logo, a área total (para um nível n) será o resultado da multiplicação de $\sqrt{3}$ pelo número de tetraedros de cada nível pela medida de sua aresta elevado ao quadrado Para melhor organização, preencha o Quadro 3.

Resposta esperada:

Quadro 3 – Área total do Tetraedro de Sierpinsky

Nível	Soma das áreas
0	$A_{t_0} = l^2\sqrt{3} = A$
1	$A_{t_1} = 4.\left(\frac{l}{2}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{4}{4}(l^2\sqrt{3}) = A$
2	$A_{t_2} = 16.\left(\frac{l}{4}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{16}{16}(l^2\sqrt{3}) = A$
3	$A_{t_3} = 64.\left(\frac{l}{8}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{64}{64}(l^2\sqrt{3}) = A$
. . .	. . .
N	$A_{t_n} = 4^n.\left(\frac{l}{2^n}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{2^{2n}}{2^{2n}}(l^2\sqrt{3}) = A$

Fonte: autoria própria.

Portanto, a área total para um nível n, de iterações, é igual à área do tetraedro no nível 0. Em outras palavras, a área da superfície desse fractal se mantém a mesma, pois a perda e o acréscimo de determinadas faces se anulam. Por exemplo, no nível 1, são removidos 4 triângulos de cada face do tetraedro, cada um com face igual a ¼ da área A da face do tetraedro inicial, como são acrescidos 4 triângulos de mesma área das retiradas do interior do tetraedro. O mesmo ocorrerá nas demais etapas da construção do Tetraedro de Sierpinsky.

d) Como seria o volume do Tetraedro de Sierpinsky (V_n) para valor para n muito elevado (n tendendo a infinito)?

O volume de um tetraedro é dado por: $V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$. Salientamos que, para cada nível do Tetraedro de Sierpinsky, o que irá variar será a medida de sua aresta. Para melhor organização, preencha o Quadro 4.

Resposta esperada:

Quadro 4 – Volume do Tetraedro de Sierpinsky para *n* iterações

Nível	Soma dos volumes
0	$V_0 = \frac{l^3\sqrt{2}}{12} = V$
1	$V_1 = 4\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{4}{8}\left(\frac{l^3\sqrt{2}}{12}\right) = \frac{1}{2}V$
2	$V_2 = 16\frac{\left(\frac{l}{4}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{16}{64}\left(\frac{l^3\sqrt{2}}{12}\right) = \frac{1}{4}V$
3	$V_3 = 64\frac{\left(\frac{l}{8}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{64}{512}\left(\frac{l^3\sqrt{2}}{12}\right) = \frac{1}{8}V$
. . .	. . .
N	$V_n = 4^n\frac{\left(\frac{l}{2^n}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{2^{2n}}{2^{3n}}\left(\frac{l^3\sqrt{2}}{12}\right) = \frac{1}{2^n}V$

Fonte: autoria própria.

Logo, $V_n = \frac{1}{2^n}V$, temos duas formas para resolver, uma atribuindo valores a n e verificar seu comportamento e a outra é por meio do limite, quando n tende a infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}V\right) = V.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$$

Para atribuir valores, iremos utilizar a Planilha do *GeoGebra*, conforme apresentado na Figura 12.

Figura 12 – Volume do Tetraedro de Sierpinsky nível n

Planilha

	A	B
1	n	1/2^n
2	1	0.5
3	2	0.25
4	3	0.125
5	4	0.0625
6	5	0.03125
7	6	0.015625
8	7	0.0078125
9	8	0.00390625
10	9	0.001953125
11	10	0.0009765625

Fonte: autoria própria.

Como podemos observar na Figura 12, conforme aumentamos o valor de *n*, os valores dos volumes se aproximam cada vez mais de zero. Concluímos que o volume tende a zero.

Referência

IWAI, Marceli Megumi Hamazi. **Geometria Fractal**. 2015. 86 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=85308>. Acesso em: 23 set. 2017.

Sobre os autores

Mauricio Ramos Lutz

É doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana (UFN), mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), especialista Matemática, Mídias Digitais e Didática pela UFRGS e licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM).

Atualmente é professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico no Instituto Federal Farroupilha (IFFar). Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5099730179818142>.

José Carlos Pinto Leivas

É doutor em Educação (Matemática) pela Universidade Federal do Paraná (UFPR), mestre em Matemática Pura e Aplicada pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas (UCPEL).

Atualmente é professor e pesquisador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UFN. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0314545667166824>.