



# GEOMETRIA EM SALA

Caderno Pedagógico



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT**  
**PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO EM CIÊNCIAS,**  
**MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS**

PRODUTO EDUCACIONAL

**Atividades com sólidos geométricos  
para o ensino de geometria plana no  
ensino fundamental**

**ANDRESSA CANEPPELE SCHLICKMANN**

JOINVILLE, SC  
2020

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA  
Produto Educacional  
Ensino de Geometria

Autora  
Andressa Caneppele Schlickmann

Nível  
MESTRA PROFISSIONAL

**Orientador:**  
Profº Drº Rogério de Aguiar

Joinville-SC  
2020

**Instituição de Ensino:** UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC,  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT

**Programa:** ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS

**Nível:** MESTRADO PROFISSIONAL

**Área de Concentração:** Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias

**Linha de pesquisa:** Ensino Aprendizagem e Formação de Professores

**Título do Produto Educacional:** Atividades com sólidos geométricos para o ensino de geometria plana no ensino fundamental

**Autor:** Andressa Caneppele Schlickmann

**Orientador:** Rogério de Aguiar

**Data:** 10/12/2020

**Produto educacional:** Caderno Pedagógico

**Nível de Ensino:** 6º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais

**Área de Conhecimento:** Matemática

**Tema:** Geometria Espacial e Plana

#### **Descrição do Produto Educacional:**

O produto educacional desenvolvido durante a pesquisa da dissertação de mestrado é um caderno pedagógico, direcionado aos professores do Ensino Fundamental – Anos Finais, contendo um questionário para ser aplicado aos alunos, identificando o nível do pensamento geométrico e atividades que auxiliarão na abordagem do reconhecimento geométrico. As atividades foram desenvolvidas para serem trabalhadas em sala de aula com a ajuda de sólidos geométricos presentes no dia a dia dos educandos.

**Biblioteca Universitária:** <http://www.udesc.br/bibliotecauniversitaria>

**URL:** <https://www.udesc.br/cct/ppgecmt>

**Publicação Associada:** O ensino de geometria plana no ensino fundamental por meio dos sólidos geométricos.

Arquivo	*Descrição	Formato
5,11 MB	<b>Texto completo</b>	<b>Adobe PDF</b>

**Licença de uso:** O autor é titular dos direitos autorais dos documentos disponíveis e é vedado, nos termos da lei, a comercialização de qualquer espécie sem sua autorização prévia (Lei nº 12.853, de 2013)

# PRODUTO EDUCACIONAL

Produto Educacional referente à Dissertação de Mestrado intitulada **O ensino de geometria plana no ensino fundamental por meio dos sólidos geométricos** apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias. Este produto é o resultado de práticas e pesquisa desenvolvidas em quatro turmas do sexto ano do Ensino Fundamental – Anos finais, sendo este um caderno pedagógico que servirá de guia prático para o professor de Matemática que ensina geometria.

O caderno apresenta duas unidades, o questionário e as atividades voltadas ao ensino da geometria. O questionário, já testado em sala de aula, servirá como suporte para o professor, verificando em que nível do pensamento geométrico seus alunos se encontram segundo o modelo de van Hiele. O objetivo do questionário é identificar em qual momento da aprendizagem geométrica os educandos se encontram e quais são suas dificuldades, analisando assim os níveis um, dois e três: Reconhecimento, Análise e Abstração. As atividades poderão ser aplicadas, da forma como o professor desejar, visto que dependerá do nível em que a turma se encontra. O principal objetivo desse caderno é auxiliar o educador ao introduzir o conteúdo de geometria, principalmente, para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, podendo ser adaptado para outros anos escolares, visando minimizar as barreiras da aprendizagem e contribuindo para o raciocínio matemático.

# **LISTA DE FIGURAS**

Figura 1 – Blocos de modelos classificáveis A. ....	<b>13</b>
Figura 2 - Blocos de modelos classificáveis B. ....	<b>13</b>

---

# APRESENTAÇÃO

Caro(a) Professor(a),

Este Caderno pedagógico sobre Geometria é o resultado de uma pesquisa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), tendo como orientador o Prof. Drº Rogério de Aguiar.

O objetivo deste Produto Educacional é de ofertar ao professor de Matemática uma metodologia que auxilie o aluno na melhoria do seu pensamento geométrico, em especial este trabalho é voltado para professores do 6º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais.

Este Caderno Pedagógico tem como tema o ensino de geometria nos anos Finais do Ensino Fundamental, tendo por finalidade auxiliá-lo na aplicação de tarefas voltadas ao Ensino de Geometria. As atividades estão voltadas ao modelo de van Hiele, propondo a você, professor, uma forma de verificar em que nível do pensamento geométrico seus alunos se encontram.

Andressa Caneppele Schlickmann

# SUMÁRIO

■	INTRODUÇÃO	
	10	
■	VAN HIELE: NÍVEIS DE APRENDIZAGEM GEOMÉTRICO	
	11	
	■ PROPRIEDADES DA TEORIA	14
■	QUESTIONÁRIO REFERENTE AO MODELO DE VAN HIELE	16
	■ QUESTÕES DO PRIMEIRO NÍVEL	16
	■ QUESTÕES DO SEGUNDO NÍVEL	19
	■ QUESTÕES DO TERCEIRO NÍVEL	23
■	INSTIGANDO A GEOMETRIA	
	<b>ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.</b>	
	■ ATIVIDADE 1	27
	■ ATIVIDADE 2	28
	■ ATIVIDADE 3	30
	■ ATIVIDADE 4	31
	■ ATIVIDADE 5	33
	■ ATIVIDADE 6	35
	■ ATIVIDADE 7	36
	■ ATIVIDADE 8	38

■ CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
■ REFERÊNCIAS	41



# INTRODUÇÃO

Tendo em vista que a Geometria é peça fundamental para o desenrolar da Matemática, levando em consideração que o aluno adquire grandes habilidades através do raciocínio lógico, este produto surge em função do grande número de alunos que estão ingressando no Ensino Superior sem ao menos conhecer noções básicas da Geometria, ou melhor dizendo, da Matemática em geral

Em resposta a este crescente número busca-se um método para diminuir essa falha do ensino da Matemática começando pelo ensino fundamental, mais precisamente na aquisição dos conhecimentos geométricos, não solucionando o problema acima citado, mas colaborando para uma possível melhora. Por conseguinte, para auxiliar no estudo da geometria sugere-se a utilização de sólidos geométricos para serem utilizados no estudo da Geometria Plana no Ensino Fundamental juntamente com este caderno pedagógico, para que assim, o professor do sexto ano do ensino fundamental possa utilizar este material como apoio para uma aula diferenciada, de modo a despertar o interesse e atenção dos alunos.

Este produto educacional são tarefas a serem aplicadas em sala de aula para o ensino de geometria no sexto ano do Ensino Fundamental. As atividades foram desenvolvidas para serem trabalhadas utilizando o modelo de Van Hiele, para que o professor possa identificar as dificuldades enfrentadas pelo educando. Inicialmente procura-se verificar em qual nível do desenvolvimento do pensamento geométrico cada educando se encontrava, analisando por meio das respostas obtidas quais foram as dificuldades encontradas e, assim, através de atividades específicas e da forma como se introduz a geometria, contribuir para o crescimento do pensamento matemático.

O caderno pedagógico apresenta dois momentos didáticos, sendo o primeiro constituído de um questionário, em que o professor o aplicará como forma de entender os conhecimentos prévios dos estudantes. Já o segundo momento, contempla atividades planejadas, oferecendo alternativas que contribua para o desenvolvimento da visualização, e para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

# VAN HIELE: NÍVEIS DE APRENDIZAGEM GEOMÉTRICO

É comum, docentes de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, relatarem por meio de suas percepções, falhas no desenvolvimento de seus alunos nas aulas de geometria. Várias são os problemas encontrados, bem como a dificuldade dos alunos em adquirir um novo conceito ou até mesmo em pôr na prática os conhecimentos recém aprendidos. Muitos estudantes estão presos as fórmulas que a Matemática lhes propõe, esquecendo de compreender o contexto da situação apresentada. Porém, essa situação é enfrentada por muitos professores, não somente na educação matemática brasileira, mas em todo o mundo e por muitos anos (PAVANELLO, 1993).

Diante dessa problemática enfrentada por muitos professores, um casal de professores holandeses de Matemática sentiu a necessidade de contribuir para que esse cenário fosse mudado, levando-os a estudar profundamente este problema, para então, encontrar uma solução. O casal Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Marie van Hiele são os autores do modelo de Van Hiele, mas tiveram a ajuda e orientação de professor Hans Freudentahl.

A pesquisa dos Van Hiele sobre o ensino de Geometria consistia em uma ênfase na manipulação de figuras, e seu público alvo eram alunos de 12 e 13 anos. Não obstante, Dina não pode contribuir para melhorias da sua pesquisa, pois faleceu logo após ter terminado a tese e concluir o doutorado na Universidade de Utrecht. Continuando com as pesquisas, Pierre foi quem aperfeiçoou e deu o nome a teoria (JAIME; GUTIERREZ, 1990).

A teoria Van Hiele que trata do desenvolvimento do pensamento geométrico contribui e auxilia os professores na sua formação, bem como com uma forma diferente de ver e entender as habilidades de seus alunos.

O modelo de Van Hiele é uma forma de classificação do desenvolvimento do pensamento geométrico, em que o raciocínio de cada estudante passa por vários níveis sequenciais e ordenados. Sendo assim, a Geometria deve ser analisada em sua totalidade, buscando em atividades de caráter exploratório e investigativo para que o aluno obtenha sucesso no seu aprendizado. Não obstante, muitos estudos provam que os alunos não aprendem da mesma forma, ou seja, cada um tem uma maneira diferente de processar o conhecimento, em virtude disso o ensino da Geometria não pode ser mecanizado, precisa nascer da prática

vivenciada pelo educando para então chegar a seus conceitos propriamente ditos (PÉRTILE, 2011).

Foi através de observações feitas pelo casal durante suas aulas que surgiu a ideia de encontrar uma metodologia para analisar os níveis de desenvolvimento mental em relação à geometria. O modelo de Van Hiele foi desenvolvido durante a elaboração da tese de doutorado de Dina Van Hiele-Geldof e de seu marido Pierre Van Hiele, em 1957, na Universidade de Utrecht, Holanda (CONTE, 2011).

O casal Van Hiele, tendo por base as dificuldades apresentadas pelos alunos durante as aulas de matemática do curso secundário, séries em que ministravam suas aulas na Holanda, buscavam entender por quais motivos seus alunos tinham tantas dúvidas no ensino de geometria. Dessa forma o Modelo de Van Hiele “sugere que os alunos progridam segundo uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto eles aprendem geometria” (NASSER; SANT’ANNA, 2010, p. 6). Sendo assim este modelo serve como um guia para que o professor possa analisar o grau de competência desenvolvida pelo aluno referente aos conceitos geométricos. Para que o aluno progrida de um nível para o seguinte se faz necessário à vivência de atividades adequadas, em que estas devem ser organizadas pelo professor, pois é ele quem conhece sua turma e sabe qual nível que cada um se encontra.

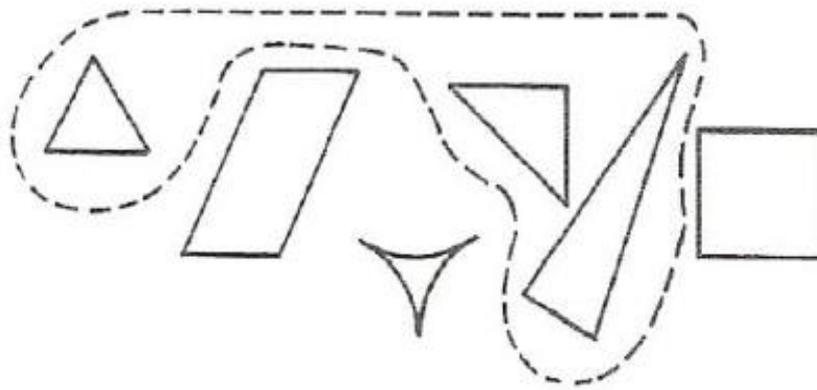
O modelo de Van Hiele apresenta cinco níveis hierárquicos, dessa forma o aluno somente passaria de fase se, e somente se, já atingisse o nível de raciocínio proposto na fase anterior, ou nas fases anteriores. Em vista dessa linha de aprendizagem da Geometria, pode-se então perceber o porquê de tantos educandos apresentarem dificuldades para aprender o conteúdo geométrico, pois o modelo de ensino que se faz presente atualmente é separado por séries, em que a idade define em que categoria cada indivíduo se encontra. Porém, muitas vezes os alunos não estão preparados para compreender o próximo nível, pois ainda não entenderam o nível anterior.

Dessa forma, para que o aluno progrida no seu conhecimento geométrico, os van Hiele apresentaram cinco níveis de raciocínio, que ajudarão na compreensão das dificuldades na formação do pensamento geométrico. Segundo Nasser e Santa’anna (2010, p. 7):

**Primeiro Nível (Básico): Reconhecimento** – Esse período tem por características principais: o reconhecimento, a comparação e as nomenclaturas das figuras geométricas por sua aparência global. Pode-se dizer que a Geometria é visualizada, mas somente por sua aparência física, não por suas propriedades. A classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios é um exemplo da compreensão que

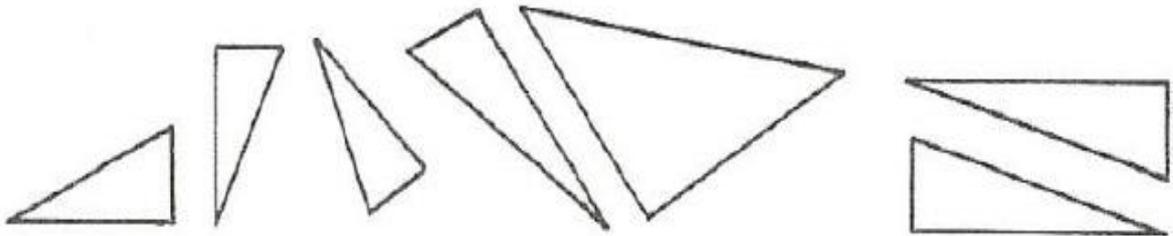
a criança deve ter nesta fase. Outro exemplo seria saber identificar relações entre figuras geométricas, como mostra a imagem a seguir (Figuras 1 e 2).

Figura 1 – Blocos de modelos classificáveis A.



Fonte: Conte (2011).

Figura 2 - Blocos de modelos classificáveis B.



Fonte: Conte (2011).

**Segundo Nível: Análise** – Nesta fase acontece a análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecendo suas propriedades geométricas e usando-as para resolver problemas. Não obstante, ainda não é possível explicar a relação que existe entre as propriedades. Tem-se como exemplo a descrição de um quadrado por meio de suas propriedades: possui quatro lados iguais, quatro ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos,

mas o aluno ainda não consegue fazer a relação entre suas propriedades para dizer que todo quadrado também é um retângulo.

**Terceiro Nível: Abstração** - Neste nível os alunos já possuem percepção da necessidade de uma definição precisa, compreendendo que uma propriedade pode decorrer de outra. O aluno começa a argumentar informalmente e consegue fazer ordenação de classes de figuras geométricas. Reconhecer as características principais de um quadrado, como quatro lados iguais, quatro ângulos retos e ainda reconhecer que todo quadrado é um retângulo.

**Quarto Nível: Dedução** – percebe-se nessa fase o domínio do processo dedutivo e das demonstrações, bem como o reconhecimento das condições necessárias e suficientes. O aluno passa a compreender alguns axiomas, postulados e teoremas, partindo assim, para a construção de demonstrações. Um exemplo seria a demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros por meio da congruência de triângulos.

**Quinto Nível: Rigor** - Neste nível o aluno já está apto ao estudo da Geometria, sendo capaz de compreender demonstrações formais e, também, o estabelecimento de teoremas em diversos sistemas, bem como fazer comparação entre eles.

Segundo Nagata (2016, p. 29), “para que haja compreensão do conteúdo o professor precisa conhecer toda a estrutura envolvida de forma coerente, utilizando a linguagem adequada para cada grupo de alunos, a fim de tornar o processo de aprendizagem mais proveitoso”. Dessa forma, cabe ao professor ser um mediador, entendendo em que nível do conhecimento seu aluno se encontra, para assim poder guiá-lo para o caminho correto.

## PROPRIEDADES DA TEORIA

O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico possui cinco propriedades segundo Crowley (1994), identificando generalidades que caracterizam o modelo. “Essas propriedades são particularmente significativas para educadores, pois podem orientar a tomada de decisões quanto ao ensino.” (CROWLEY 1994, p. 4). Dessa forma, as propriedades são divididas em:

**1ª. Sequencial.** Como próprio nome diz, a propriedade sequencial refere-se a seguir uma sequência. Da mesma forma que em grande parte “das teorias desenvolvimentistas, uma pessoa deve necessariamente passar pelos vários níveis, sucessivamente.” (CROWLEY 1994,

p. 5). Para que o aluno obtenha um bom desenvolvimento em determinado nível, este deve conhecer as estratégias dos níveis anteriores.

**2ª. Avanço.** Para que o educando progrida (ou não) de um nível para o outro “depende mais do conteúdo e dos métodos de instrução recebidos do que da idade. Nenhum método de ensino permite pular de um nível”. Segundo o mesmo autor citado, quando o aluno memoriza fórmulas de áreas, por exemplo, ou faz relações como *todo quadrado é um losango*, “o que ocorre é que a essência do assunto é reduzida a um nível inferior e não há compreensão.”.

**3ª. Intrínseco e extrínseco.** Esta propriedade refere-se as características essenciais a um determinado nível, sendo elas importantes no nível seguinte. Por exemplo, reconhecer quadrados e separá-los das demais figuras geométricas é uma característica do Nível Básico – Visualização, pois a figura é percebida. Não obstante, o que determina o agrupamento dos quadrados são suas propriedades, estas vistas no nível seguinte, Nível 2 – Análise. No Nível 2 a figura é analisada, buscando descobrir suas propriedades. (CROWLEY 1994).

**4ª. Linguística.** Ao definir uma propriedade, o aluno pode referir-se formalmente ou informalmente, dependendo em que nível do pensamento geométrico se encontra, pois cada nível apresenta suas próprias simbologias linguísticas. Dessa forma, uma resposta pode ser aceita para um nível e para outro mais avançado não. Por exemplo em relação as nomenclaturas, podendo existir mais de um nome para a mesma figura geométrica, que é o caso do quadrado – um quadrado pode ser chamado retângulo, pois suas propriedades o permitem. Contudo, um aluno que está no Nível 1 não consegue perceber que esse tipo de conciliação possa acontecer, visto que essas compreensões e linguagens são características do Nível 2.

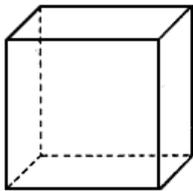
**5ª. Combinação inadequada.** “Se o aluno está num certo nível e o curso num nível diferente, o aprendizado e o progresso desejados podem não se verificar.” (CROWLEY 1994, p. 5). Em síntese, se faz necessário que o professor, o material didático, conteúdo, vocabulário, e todo o contexto estejam voltados ao nível em que o aluno se encontra, pois somente dessa forma o educando será capaz de acompanhar os processos de pensamento inclusos em cada nível.

# QUESTIONÁRIO REFERENTE AO MODELO DE VAN HIELE

## QUESTÕES DO PRIMEIRO NÍVEL

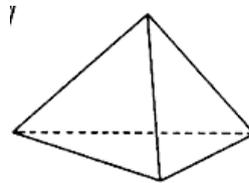
**Questão 1** – Como é o nome da FACE de cada sólido geométrico a seguir:

1)



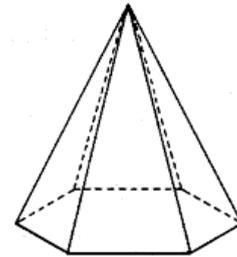
\_\_\_\_\_

2)



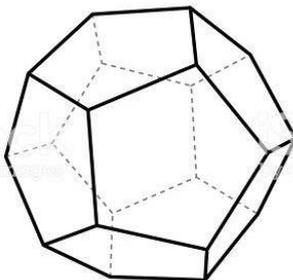
\_\_\_\_\_

3)



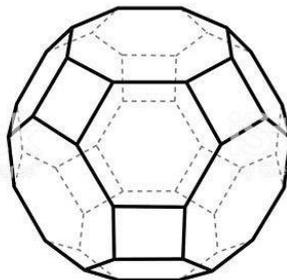
\_\_\_\_\_

4)



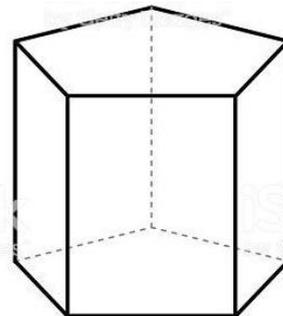
\_\_\_\_\_

5)



\_\_\_\_\_

6)



\_\_\_\_\_

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X : 1) Cubo; 2) Pirâmide; 3) Pirâmide; 4) Sem resposta; 5) Bola; 6) Quadrado.

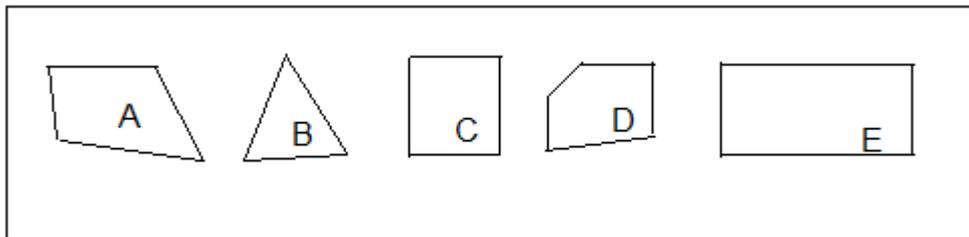
Aluno Y : 1) Quadrado; 2) Triângulo; 3) Triângulo; 4) Não sei; 5) Quadrado;

6) Quadrado.

Aluno Z : 1) Quadrado; 2) Triângulo; 3) Triângulo; 4) Pentágono; 5) Quadrado e Hexágono; 6) Retângulo.

O aluno X não compreendeu o significado da palavra FACE para a Geometria, olhando a imagem como um todo, não sendo capaz de responder a pergunta corretamente, para tal, não se encontra no nível básico. O aluno Y consegue reconhecer pouco mais da metade das faces, porém, não consegue lembrar todas as nomenclaturas das figuras geométricas por sua aparência global. Por sua vez, o aluno Z, além de reconhecer as diferenças existentes entre o quadrado e o retângulo, soube também a nomenclatura de todas faces dos sólidos.

**Questão 2** – Analise a figura abaixo e identifique o(s) quadrilátero(s):



**R:** \_\_\_\_\_

Possíveis respostas e exemplos de análise:

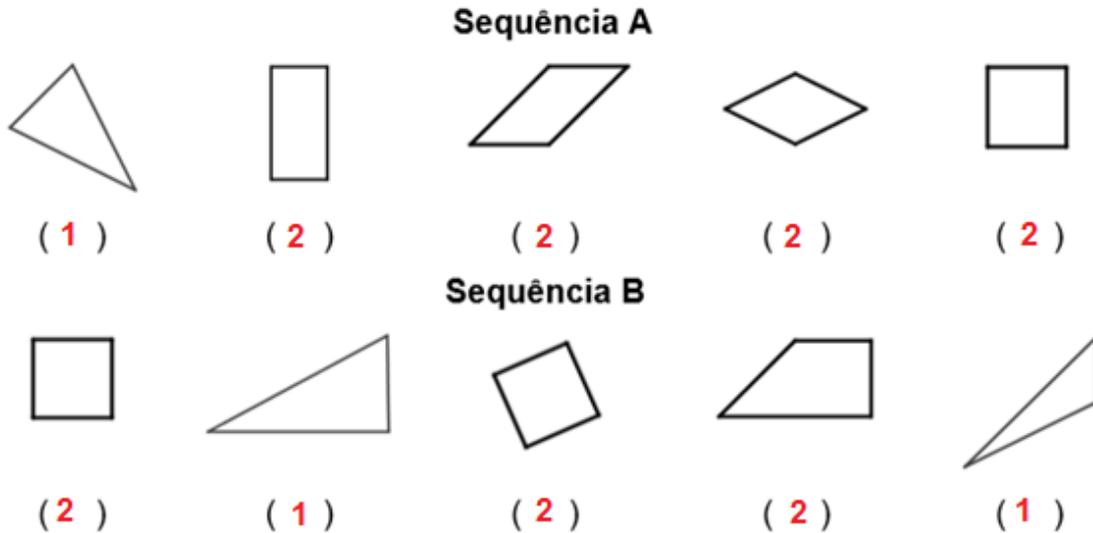
Aluno X: apenas C

Aluno Y: C e E

Aluno Z: A, C e E

O aluno X tem imagem conceitual do quadrilátero apenas como a figura similar a palavra quadrilátero quadrado, e não é capaz ainda de reconhecer que a figura E também é um quadrilátero, e, portanto ainda não atingiu o nível básico. O aluno Y consegue reconhecer as duas figuras que representam um quadrilátero, mas ainda não está claro o significado de quadrilátero (quatro lados paralelos ou não), dessa forma apenas baseou-se na aparência (nível de reconhecimento). Já o aluno Z compreendeu a característica dos quadriláteros, reconhecendo também, a figura A, que seria uma característica de raciocínio no nível de análise.

**Questão 3-** Analise as figuras planas e classifique-as como: (1) triângulo; (2) quadrilátero; (3) pentágono.



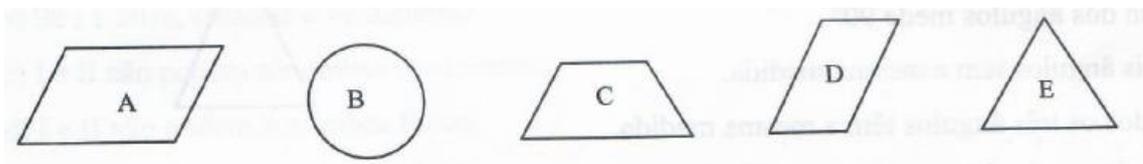
Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: 1 – 2 – 2 – 3 – 3 – 2 – 1 – 2 – 3 – 1

Aluno Y: 1 – 2 – 2 – 2 – 2 – 2 – 1 – 2 – 2 – 1

O aluno X tem a imagem dos quadriláteros apenas em uma posição, dessa forma, quando se depara com uma figura irregular não sabe como classificar, não sendo capaz de reconhecer todas as figuras, e, portanto ainda nem atingiu o nível básico. O aluno Y, por sua vez, reconhece todas as figuras, independente de sua posição, o que é característica do nível do reconhecimento.

**Questão 4** – Assinale o(s) paralelogramo(s):



Fonte: Nasser; Sant'anna (2010, p. 95)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

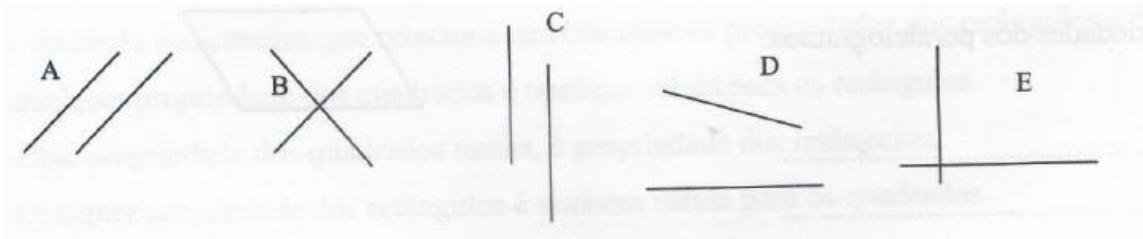
Aluno X: B e/ou E

Aluno Y: C

Aluno Z: A e D

O aluno X ainda não reconhece a imagem conceitual de um paralelogramo, muito menos compreende suas características. O aluno Y, analisou pela aparência global da figura e confundiu o paralelogramo com o trapézio. Já o aluno Z, conseguiu entender visualizar todas as características de um paralelogramo presentes na figura A, bem como compreende que a figura D também é um paralelogramo apesar de não estar representada da forma tradicional.

**Questão 5** – Assinale os pares de retas paralelas:



Fonte: Nasser; Sant'anna (2010, p. 95)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: B e/ou D e/ou E

Aluno Y: C

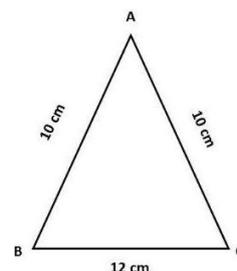
Aluno Z: A e C

O aluno X não compreendeu o conceito de retas paralelas, não atingindo o nível básico do reconhecimento. Já o aluno Y, compreendeu o conceito de uma forma visual “tradicional”, não acertando a questão por inteiro. O aluno Z, além de reconhecer a figura C, ainda percebeu que na figura A também se encontram retas paralelas.

## QUESTÕES DO SEGUNDO NÍVEL

**Questão 6** – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

- Pelo menos um dos ângulos mede  $60^\circ$ .
- Um dos ângulos mede  $90^\circ$ .
- Dois ângulos têm a mesma medida.
- Todos os três ângulos têm a mesma medida.



e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

Fonte: Adaptado de Nasser; Sant'anna (2010, p. 95)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

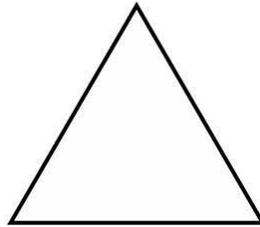
Aluno X: A ou B

Aluno Y: E

Aluno Z: C

O aluno X ainda não conhece as propriedades dos diferentes tipos de triângulos: retângulo, escaleno, equilátero e isósceles. Da mesma forma o aluno Y. Por outro lado, o aluno Z soube interpretar a questão e analisar as características presentes em um triângulo isósceles.

**Questão 7** – Todo triângulo equilátero tem suas medidas dos lados iguais. Abaixo temos um exemplo de um triângulo equilátero.



Assinale a opção correta sobre os triângulos equiláteros:

- a) Todos seus ângulos medem  $30^\circ$ .
- b) Todos os ângulos têm a mesma medida.
- c) Um ângulo mede  $90^\circ$ .
- d) Nenhuma das afirmativas está correta.

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: A ou C

Aluno Y: D

Aluno Z: B

Da mesma forma que na questão anterior o aluno X e Y ainda não conhecem as propriedades básicas dos diferentes tipos de triângulos: escaleno, equilátero e isósceles. Por sua

vez, o aluno Z soube interpretar a questão e analisar as características presentes em um triângulo equilátero.

**Questão 8** – Se em um triângulo possui um ângulo interno de  $90^\circ$ , ele é um:

- a) Triângulo equilátero.
- b) Triângulo acutângulo.
- c) Triângulo retângulo.
- d) Triângulo obtusângulo.

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: A, B ou D

Aluno Y: C

Neste caso, os alunos podem até reconhecerem visualmente um triângulo que possua um ângulo interno medindo  $90^\circ$  (nível do reconhecimento), porém não conhece suas propriedades, aluno X. Contudo, o aluno Y reconheceu as características de um triângulo retângulo e soube responder corretamente.

**Questão 9** – Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

- 1 – .....
- 2 – .....
- 3 – .....



Fonte: Nasser; Sant'anna (2010, p. 96)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

- 1 – Possui lados opostos paralelos;
- 2 – Possui ângulos opostos iguais;
- 3 – Todo retângulo é um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um retângulo;
- 4 – Todo paralelogramo é um quadrilátero;
- 5 – O losango é um paralelogramo;
- 6 – As diagonais de um paralelogramo cruzam-se em seus pontos médios.

Esta é uma questão com um certo grau de dificuldade para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, porém, a priori espera-se que os alunos consigam identificar as características relacionadas à aparência global de um paralelogramo. As respostas anteriormente citadas estão corretas de acordo com o segundo nível do conhecimento geométrico, a análise.

Não obstante, as possíveis respostas apresentadas pelos alunos serão:

Aluno X: 1 – Retângulo torto; 2 – Lados iguais; 3 – Tem  $90^\circ$  graus.

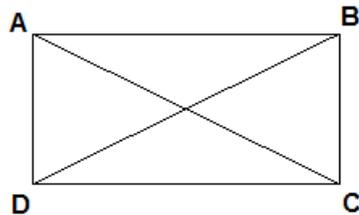
Aluno Y: 1 – Tem forma de um retângulo; 2 – Tem dois lados iguais; 3 – Quatro vértices.

Aluno Z: 1 – Possui lados opostos paralelos e iguais; 2 – Possui duas diagonais; 3 – Ângulos opostos de mesma medida.

O aluno X observou a imagem, porém, não apresentou características presentes no paralelogramo, dessa forma, não se encontra no nível 1, pois não conseguiu fazer o reconhecimento da figura. Já o aluno Y, descreve o paralelogramo em uma linguagem informal, observando apenas a aparência da figura. Contudo, o estudante Z, consegue verificar características presentes no paralelogramo e utilizar uma linguagem formal, dando indícios de estar iniciando o nível da Abstração.

**Questão 10** – No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

- a) Têm quatro ângulos retos.
- b) Têm lados opostos paralelos.
- c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
- d) Têm os lados iguais.
- e) Todas são verdadeiras.



Fonte: Nasser; Sant'anna (2010, p. 96)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: A, B ou C

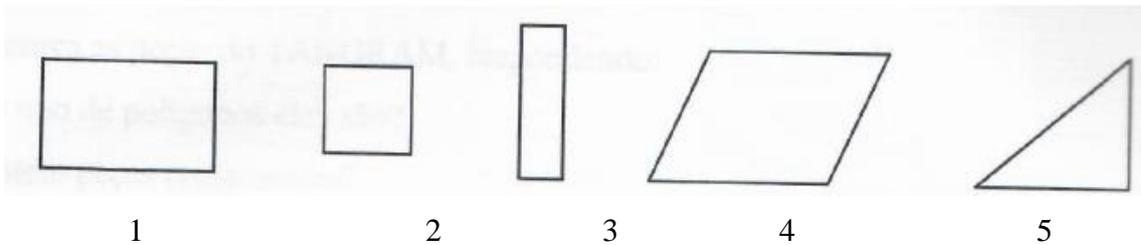
Aluno Y: D ou E

Aluno Z: A, B e C

O aluno X consegue reconhecer apenas uma das características do retângulo, não analisando todas as sentenças adequadamente, ou ainda “chutou” uma resposta. O aluno Y ao assinalar a resposta D confundiu a característica do retângulo com uma característica do quadrado ou ainda não lembrou que para a alternativa estar certa se faz necessário a palavra “opostos” – tem lados opostos iguais, por isso também, a alternativa E não está correta. Já o aluno Z, buscou analisar todos os detalhes, respondendo corretamente, características do segundo nível.

## QUESTÕES DO TERCEIRO NÍVEL

**Questão 11** – Circule a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulos:



Fonte: Adaptado de Nasser; Sant’anna (2010, p. 97)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: 5

Aluno Y: 1, 3 e 4

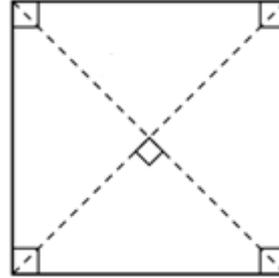
Aluno Z: 1 e 3

Aluno W: 1, 2 e 3

O aluno X não compreende as características básicas de um retângulo não atingindo o nível do reconhecimento. O aluno Y analisou somente pela semelhança esquecendo que um retângulo possui ângulos retos. Já o aluno Z consegue reconhecer as duas figuras que representam um retângulo, baseando apenas na aparência global (reconhecimento), ou buscou averiguar os lados e ângulos, características do nível da análise. Por sua vez, o aluno W além de reconhecer as figuras 1 e 3 percebeu que o quadrado 2 satisfaz as características de um retângulo ou lembrou da seguinte propriedade: “todo quadrado é também um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado”, características essas do nível de abstração.

**Questão 12** – Na figura a seguir é possível visualizar um quadrado e suas diagonais formando triângulos. Analisando os triângulos, quanto aos lados e ângulos, respectivamente, podemos concluir que são triângulos:

- a) Isósceles e retângulo.
- b) Escaleno e obtusângulo.
- c) Equilátero e retângulo.
- d) Escaleno e acutângulo.
- e) Isósceles e obtusângulo.



Possíveis respostas e exemplos de análise:

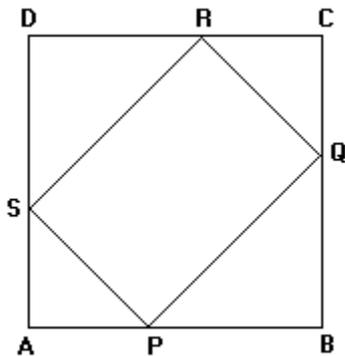
Aluno X: B ou D

Aluno Y: C ou E

Aluno Z: A

O aluno X ao responder B ou D realmente não conhece os nomes dos triângulos relacionados aos lados nem aos ângulos. Para o aluno Y tem-se duas opções: ele não sabia nenhuma das definições e marcou qualquer resposta ou somente sabia um dos conceitos, caracterizando-o no nível da análise. Por conseguinte, o aluno Z soube responder corretamente, porém não dá a certeza de que ele saiba cada conceito, podendo assim ele acertado por sorte ou saber as definições o que caracteriza o nível da abstração.

**Questão 13** – Como você expressaria em palavras a figura abaixo?



Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: Um quadrado e um retângulo;

Aluno Y: Um retângulo dentro de um quadrado. As pontas do retângulo encostam-se ao quadrado formando quatro triângulos. O quadrado possui quatro lados iguais, quatro ângulos reto.

Aluno Z: Um retângulo de vértices PQRS está inscrito em um quando de vértice ABCD, em que os vértices do retângulo se encostam às laterais (arestas) do quadrado, formando assim, quatro triângulos de vértices APS, BPQ, CQR e DRS.

Esta é uma questão aberta, o que leva a muitas respostas, porém a forma como elas forem respondidas dirá em que nível o aluno se caracteriza. O aluno X, por exemplo, é muito simplista e relata somente o básico do visual (reconhecimento), o aluno Y já consegue perceber algumas propriedades (análise) e por fim o aluno Z é mais detalhista e possui uma argumentação lógica informal.

**Questão 14** – Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo?.....

Por que? .....

Fonte: Nasser; Sant'anna (2010, p. 97)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: Não, porque não tem ângulos retos;

Aluno Y: Sim, porque tem quatro lados;

Aluno Z: Sim, porque o retângulo é um tipo especial de paralelogramo. O retângulo possui ângulos opostos iguais, lados opostos paralelos e de mesma medida, possui quatro ângulos e suas diagonais cruzam-se em seus pontos médios.

No momento em que o aluno diz SIM é possível perceber que ele possui algum conhecimento referente a retângulo e paralelogramo, analisando as figuras em termos de seus componentes (análise). O aluno X, não compreendeu que todo retângulo é também um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um retângulo. O aluno Y não está errado, pois essa é uma das características de ambos, porém não justifica a resposta (análise), já o aluno Z

apresenta em sua justificativa, propriedades que definem um retângulo como um paralelogramo.

**Questão 15** – Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados:

- a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.
- b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
- c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.
- d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
- e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Fonte: Nasser; Sant'anna (2010, p. 97)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: A, B ou D

Aluno Y: E

Aluno Z: C

No momento em que o aluno assinala A, B, D ou E que é o caso do aluno X e Y, percebe-se que algumas características presentes no quadrado e retângulo ainda não estão bem claras. Por conseguinte, o aluno Z analisa as propriedades do retângulo e as propriedades do quadrado e verifica que qualquer propriedade do retângulo satisfaz para um quadrado.

# INSTIGANDO A GEOMETRIA

## ATIVIDADE 1

Esta atividade visa que os estudantes estabeleçam relações entre as formas encontradas no cotidiano e a Geometria, visto que, estão em contato direto com as formas tridimensionais e, muitas vezes não fazem ligação com o assunto estudado. Na ATIVIDADE 1, o(a) professor(a) pode identificar quais são os conhecimentos prévios apresentados pelo educando.

### ATIVIDADE 1

**Aplicação:** Estudantes distribuídos em grupos de até quatro indivíduos.

**Duração:** 30 minutos.

**Questões:**

O que você entende por Geometria?

Resp.: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Onde podemos encontrar a Geometria em nosso dia a dia?

Resp.: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Olhando para a sala de aula, quais formas geométricas você encontra?  
(Escreva o nome do objeto e a forma que está representada).

Resp.: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Você encontra relação geométrica com alguma outra área do conhecimento?

Resp.: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Optou-se por questões discursivas para que sejam mais bem explorados os diversos pontos de vista. Após a discussão das questões em grupos, deve-se fazer uma discussão com toda a turma.

---

**Dica ao professor(a)**



*As discussões entre os educandos nos grupos, bem como com toda a turma, são muito importantes, permitindo uma grande troca de ideias, preparando-os para a fase seguinte da aprendizagem*

---

## ATIVIDADE 2

A ATIVIDADE 2 consiste em manusear objetos geométricos encontrados no cotidiano, tipos diferentes de prismas (caixa de sapato, caixa de pasta de dente ou de sabonete, caixa de algum alimento, entre outros). Dessa forma, poderá ser trabalhado o conceito de prismas, com todos os seus elementos, e na sequência, introduzir as formas poligonais apresentadas nas faces de cada prisma. Dessa forma, essa atividade irá auxiliar na próxima atividade.

No momento em que o aluno consegue manipular os objetos matemáticos, a abstração será mais bem compreendida, ainda mais se este conteúdo está presente no dia a dia, sendo mais fácil de fazer as associações matemáticas necessárias.

Para que esta tarefa possa ser realizada, o educando deverá trazer de casa alguns materiais (sólidos geométricos encontrados no cotidiano), por isso, deve-se pedir com antecedência, pois o educando irá utilizar este objeto para realizar a Atividade 2.

Depois de efetuada a atividade, faz-se necessário uma conversa com o grande grupo, pois é nesse momento que o educando, com seus conhecimentos prévios, troca informações com seus colegas e, em muitos momentos, muda-se a percepção em relação ao objeto estudado, adquirindo novos conceitos.

O professor tem um papel muito importante nesta etapa, auxiliando na transição da linguagem informal para a uma linguagem mais formal, mostrando matematicamente as formas presentes no cotidiano.

**ATIVIDADE 2**

**Aplicação:** Estudantes distribuídos individualmente.

**Duração:** 15 minutos.

**Questões:**

Como, popularmente, é conhecido (nome) este objeto?

---

Qual é o nome desse sólido geométrico?

---

Quantas vértices (pontas) tem esse sólido?

---

Quantas faces (lados) tem esse sólido?

---

Quantas arestas tem esse sólido?

---

**Dica ao professor(a)**



*Resolver as cinco questões com todos os objetos trazidos pelos alunos. Por todos os objetos serem prismas, conversar sobre as respostas obtidas com o grande grupo, fazendo assim, uma troca de ideias*

## ATIVIDADE 3

A ATIVIDADE 3 irá completar a atividade anterior, fundamentando-se na desconstrução do objeto, ou seja, o aluno passará da dimensão 3 para a dimensão 2 (3D  $\square$  2D) manipulando o sólido que ele mesmo trouxe de casa.

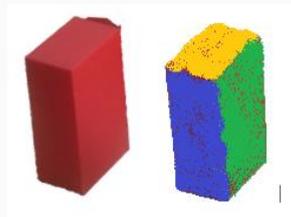
### ATIVIDADE 3

**Aplicação:** Estudantes distribuídos individualmente.

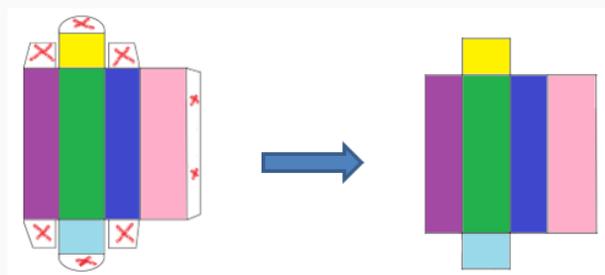
**Duração:** 25 minutos.

**Instruções:**

1º) Pinte todas as faces desse sólido. Como mostra a figura a seguir:



2º) Abra o sólido nas bordas coladas e recorte os excessos:



3º) Responda as perguntas:

-  Quantas figuras geométricas você consegue observar?
-  Como se chamam (nomenclatura)?

Recorte cada figura geométrica que você encontrou, cole no seu caderno e anote a quantidade de lados de cada figura. Quantos lados cada uma tem?

Para uma melhor compreensão da geometria, muitos educandos precisam mais do que somente visualizar as imagens abordadas no livro didático. No entanto, a ATIVIDADE 3 proporciona aos estudantes manusear objetos presentes no cotidiano com um olhar matemático.

Segundo Beline e Costa (2010), o mundo em que vivemos é tridimensional, dessa forma, os conceitos geométricos podem ser melhor entendidos quando, primeiramente, são apresentando em sua forma habitual, ou seja, introduzir a geometria com as formas espaciais.

## ATIVIDADE 4

Para a ATIVIDADE 4, já é utilizado elementos figurais, porém, este ainda exposto em três dimensões. Ao desenvolver esta tarefa, o educando conseguirá assimilar com maior facilidade os principais sólidos geométricos.

### ATIVIDADE 4

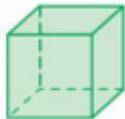
**Aplicação:** Estudantes distribuídos em grupos

**Duração:** 25 minutos.

**Instruções:**



*Quais imagens são parecidas com:*

<i>Pirâmide</i>	<i>Cubo</i>	<i>Cilindro</i>	<i>Paralelepípedo</i>	<i>Cone</i>	<i>Esfera</i>
					

*Continuação da atividade 4.*

Observando cada grupo de sólidos geométricos responda:

a) Quais os sólidos que rolam em alguma posição?

---

---

•

b) Quais sólidos não rolam? Independentemente da posição.

---

---

c) Os sólidos têm “pontas”? Se sim, quantas?

---

---

## ATIVIDADE 5

A TAREFA 5 exige dos estudantes conhecimentos relacionados aos elementos matemáticos, no caso em questão dos sólidos geométricos, visando uma observação mais detalhada do sólido apresentado, na tentativa de adquirir novos conceitos inerentes ao conteúdo.

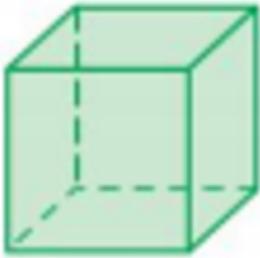
### ATIVIDADE 5

**Aplicação:** Estudantes individualmente.

**Duração:** 15 minutos.

**Questões:**

Observe os sólidos a seguir e complete.



O Cubo tem \_\_\_\_\_ faces (lados).

As faces são \_\_\_\_\_.

O quadrado tem arestas de mesma \_\_\_\_\_.

O Cubo tem \_\_\_\_\_ arestas (linhas).

As arestas são chamadas de \_\_\_\_\_.



O Prisma de base quadrada (paralelepípedo) tem \_\_\_\_\_ faces (lados).

As faces são \_\_\_\_\_.

O Paralelepípedo tem \_\_\_\_\_ arestas (linhas).

As arestas são chamadas de \_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_ vértices tem o paralelepípedo.



Esta pirâmide tem base de formato \_\_\_\_\_.

As faces laterais são \_\_\_\_\_.

Esta pirâmide tem \_\_\_\_\_ triângulos e \_\_\_\_\_ quadrado.

\_\_\_\_\_ vértices tem a pirâmide de base quadrada.

**Dica ao professor(a)**



*Incentive o aluno investigar a imagem, fazendo ligação com o que já conhece ou, até mesmo, trocando informações com os colegas, a interação é muito importante para o desenvolvimento cognitivo. Finalize com uma discussão e correção*

Diante dos conhecimentos abordados na ATIVIDADE 5, o professor poderá introduzir a Geometria Plana, estabelecendo relações entre os sólidos geométricos e suas respectivas faces. E, como complemento, pode-se introduzir a ATIVIDADE 6.

## ATIVIDADE 6

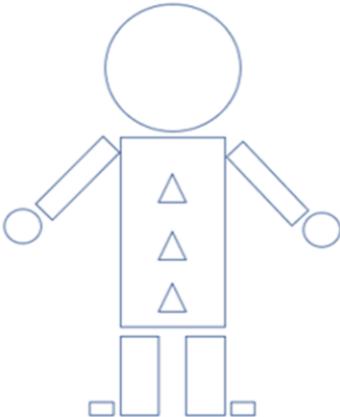
### ATIVIDADE 6

**Aplicação:** Estudantes distribuídos em duplas

**Duração:** 15 minutos.

**Questão:**

Identifique cada figura do desenho abaixo (com um número ou letra) e classifique registrando na tabela ao lado.



Triângulos	Quadriláteros	Círculos

A tarefa a seguir, tem por objetivo reconhecer as diferentes figuras planas através das semelhanças encontradas.

## ATIVIDADE 7

Na ATIVIDADE 7 o educando deverá diferenciar as figuras geométricas entre suas propriedades, bem como identificar figuras planas e sólidos geométricos, observando assim, as semelhanças e diferenças encontradas entre as imagens propostas.

Esta é uma das atividades propostas pelo Projeto Fundão coordenado por Nasser e Sant’anna (2010, p. 16-17), em que a presente atividade visa trabalhar com “as representações das figuras e dos sólidos”.

Instruções para aplicar a atividade:

1. Separe os alunos em grupos de três a quatro pessoas;
2. Distribua uma cópia da atividade para cada integrante do grupo, para que todos os alunos anotem suas observações ao lado de cada par de figuras, apresentando assim, uma ou mais características comuns ou diferentes entre as formas geométricas.

**Dica ao professor(a)**



*Após todos os grupos finalizarem a atividade, apresente a atividade no quadro e peça ajuda para todos os estudantes da turma para completar com as características encontradas por eles e acrescente com elementos ainda não mencionados.*

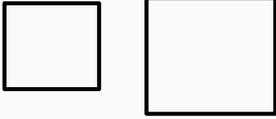
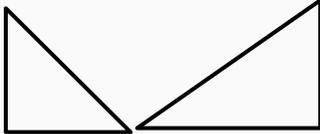
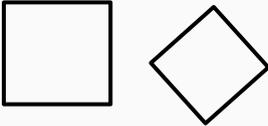
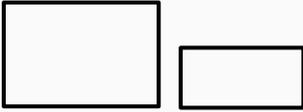
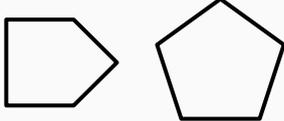
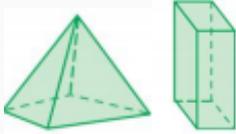
### ATIVIDADE 7

**Aplicação:** Estudantes distribuídos em grupos

**Duração:** 45 minutos.

**Atividade:**

#### ELEMENTOS COMUNS E DIFERENÇAS ENTRE FIGURAS GEOMÉTRICAS

	Figuras Geométricas	Elementos em Comum	Diferenças
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

Fonte: Adaptado NASSER; SANT'ANNA, 2010, p.20

## ATIVIDADE 8

A ATIVIDADE 8 consiste em investigar as características das formas geométricas por sua aparência, separando as figuras por grupos, quadrados, retângulos, paralelepípedos, entre outros. Primeiramente os educandos deverão discutir as propriedades em grupo e depois compartilhar com os demais colegas.

### ATIVIDADE 8

**Aplicação:** Estudantes distribuídos em grupos

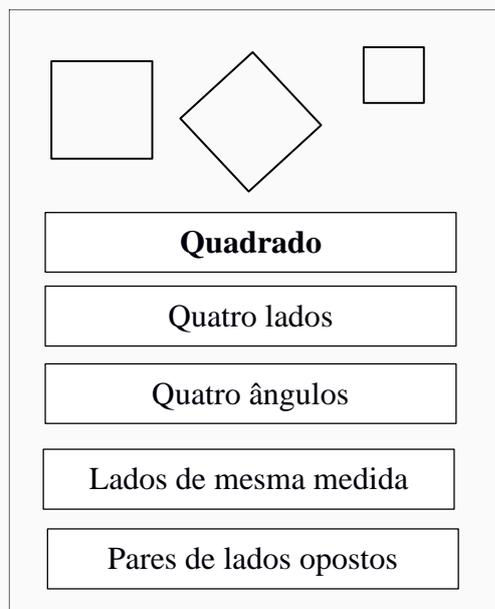
**Duração:** 45 minutos.

#### *Classificando os quadriláteros*

Instruções:

- 1º) Observe as figuras geométricas apresentadas;
- 2º) Recorte cada figura;
- 3º) Analise as características semelhantes e separe por grupos;
- 4º) Para cada grupo escreva, em seu caderno, o nome correspondente (quadrado, retângulo, trapézio, losango e paralelogramo)
- 5º) Escreva as propriedades encontradas em cada grupo, por exemplo, quadrado: quatro lados, 4 ângulos, lados opostos iguais, ...

Ex.:



Fonte: Adaptado NASSER; SANT'ANNA, 2010, p.20

---



**Dica ao professor(a)**



*Incentive o aluno investigar a imagem, fazendo ligação com o que já conhece ou, até mesmo, trocando informações com os colegas, a interação é muito importante para o desenvolvimento cognitivo. Finalize com uma discussão e correção*

---



Durante todo o desenvolvimento das atividades propostas, sugere-se a troca de informações entre os educandos, bem como a interpretação dos resultados e Validação presente na discussão de toda a turma juntamente com o educador. Dessa forma, o professor estará na condição de mediador, orientando-os na obtenção do conhecimento.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este Produto Educacional resulta de uma pesquisa de mestrado, que visa a aprendizagem de Geometria Espacial e Plana aos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental Anos Finais.

A metodologia utilizada na dissertação são os Registros de Representação Semióticos propostos por Raymund Duval e a avaliação da aprendizagem foi por meio da aplicação de um questionário, de acordo com o modelo de Van Hiele.

As atividades foram desenvolvidas com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, sendo realizadas em sala de aula como forma de os conhecimentos relativos a Geometria, apresentando resultados satisfatórios ao processo de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos.

O Questionário servirá como suporte da percepção geométrica adquirida pelos alunos em anos anteriores, ajudando o educador na condução das atividades. Já as atividades, aqui propostas, baseiam-se nas características primárias envolvendo a geometria, visto o ano escolar em que os estudantes se encontram, podendo o professor adaptá-las caso o nível da turma seja mais elevado. Se espera que este caderno pedagógico possa contribuir significativamente com os(as) professores(as) no desenvolvimento do ensino da Geometria, propiciando uma aprendizagem significativa por parte dos estudantes.

## REFERÊNCIAS

CONTE, Katilene Grilo. **Um olhar sobre o ensino e aprendizagem da Geometria.** Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: 69 p., 2011/2.

CROWLEY, M.L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.** In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A.P.(Orgs). *Aprendendo e ensinando geometria.* Tradução de Hygine H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

JAIME, A.; GUTIERREZ, A. **Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometria:** El modelo de van Hiele. [S.l.]: S. Llinares and M. V. Sánchez, 1990. Citado 4 vezes nas páginas 33, 38, 39 e 40.

NAGATA, Rosenilda de Souza. **Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: o aprendizado do conteúdo de polígonos numa perspectiva do modelo de Van Hiele.** 2016. 103 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

NASSER, Lílian. **Níveis de van Hiele:** uma explicação definitiva para as dificuldades em Geometria. *Boletim do GEPEM*, n. 29, p. 33-38, 1992.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele.** 2. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências.** *Revista Zetetiké*, ano 1, vol. 1, Campinas: Editora UNICAMP, 1993, p. 7 - 17.

PÉRTILE, Karine. **O modelo de van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico:** uma análise de obras do programa nacional do livro didático para o ensino médio. 85f. Dissertação (Mestrado) – PUCRS – Faculdade de Física, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. Porto Alegre, 2011.