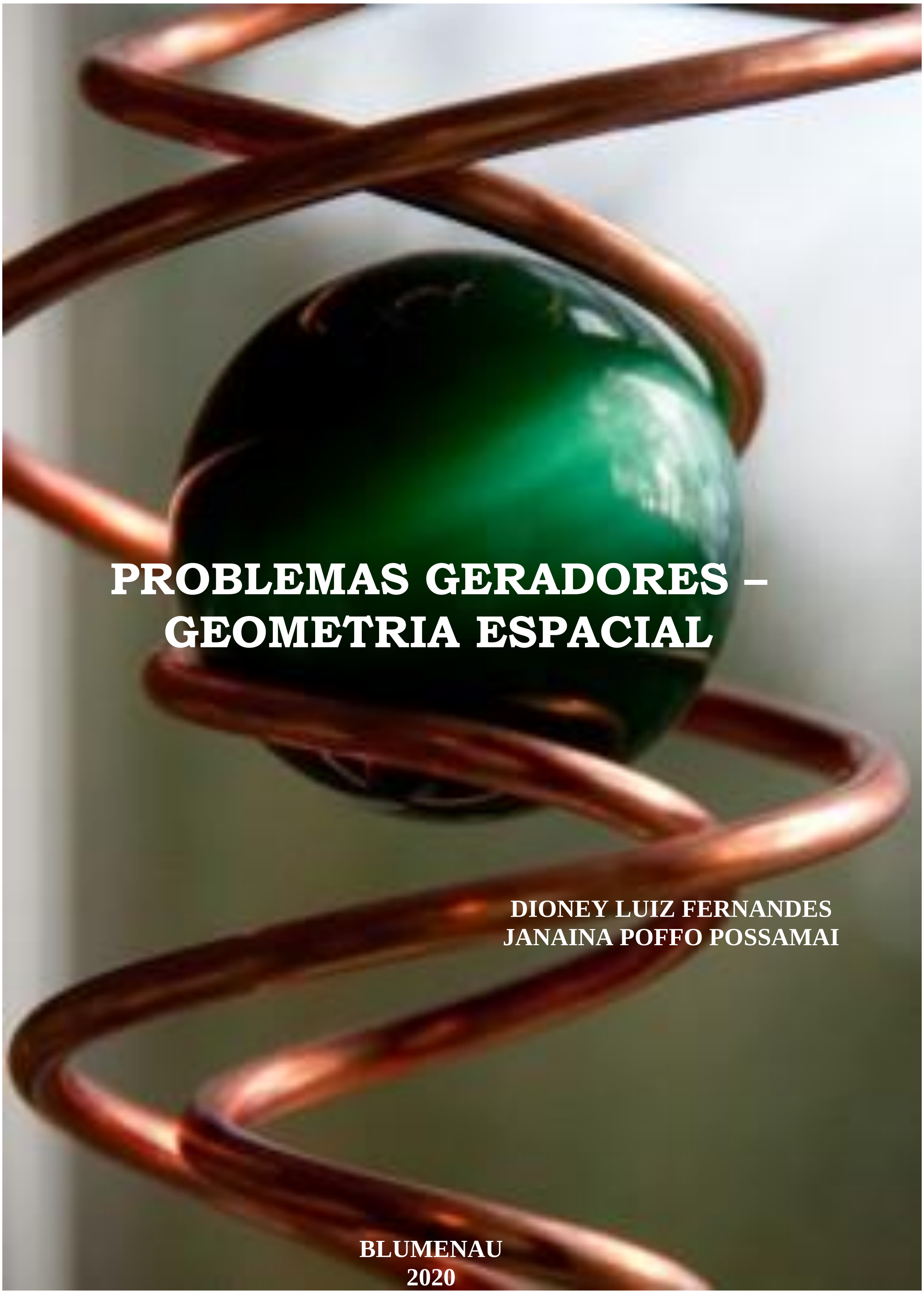
‘

Universidade Regional de Blumenau
Centro de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Ensino
de Ciências Naturais e Matemática



PROBLEMAS GERADORES – GEOMETRIA ESPACIAL

DIONEY LUIZ FERNANDES
JANAINA POFFO POSSAMAI

BLUMENAU
2020

Ficha catalográfica elaborada por Everaldo Nunes – CRB 14/1199
Biblioteca Universitária da FURB

F363p

Fernandes, Dioney Luiz, 1980-
Problemas geradores: geometria espacial / Dioney Luiz Fernandes. - Blumenau, 2020.
58 f. : il.

Orientador: Janaína Poffo Possamai.
Produto Educacional (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau.
Bibliografia: f. 57.

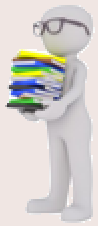
1. Matemática. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Geometria espacial. 4. Ensino médio. 5. Prática de ensino. 6. Solução de problemas. I. Possamai, Janaína Poffo, 1985-. II. Universidade Regional de Blumenau. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. III. Título.

CDD 510.7

‘

SUMÁRIO

CARTA AO LEITOR



Este Produto Educacional é resultado da dissertação de Dioney Luiz Fernandes, intitulada "Geometria Espacial no Ensino Médio: Uma Abordagem de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas", orientada pela professora Dra. Janaína Poffo Possamai, pertencente ao grupo de pesquisa Estudos e Pesquisa em Educação e Educação Matemática, da linha de pesquisa Formação e Práticas Docentes em Contextos de Ensino de Ciências Naturais e Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Regional de Blumenau.

O produto foi avaliado e aprovado em banca de defesa, pelos professores: Dra. Janaína Poffo Possamai (FURB), Dra Viviane Clotilde da Silva (FURB) e Silvanio de Andrade (UEPB). O acesso a esse material pode ser realizado pela Biblioteca de Teses e Dissertações da FURB e também pelo portal de objetos educacional eduCAPES.

Esse Produto é classificado como um Material Didático e Instrucional, contendo uma proposta de *ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas*, com atividades práticas para o ensino da geometria espacial, podendo ser ressignificado para outras práticas, em diversos conteúdos, disciplinas, espaços não formais de ensino e cursos de formação continuada.

Aqui são apresentadas oito atividades desenvolvidas como problemas geradores para o ensino-aprendizagem-avaliação da geometria espacial, no Ensino Médio, através da metodologia da Resolução de Problemas. Todas essas atividades foram aplicadas em uma escola do município de Gaspar/SC com 60 estudantes do Ensino Médio, sendo que cinco delas foram analisadas na dissertação.

Espera-se com essa leitura que o professor obtenha um entendimento claro da proposta de ensino e adquira um direcionamento na implementação da *Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas* em sala de aula, em seu dia a dia.

SEÇÃO 01 - A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO

1.1 O que é, de fato, um problema para você?

> [...] para que uma atividade se constitua, de fato, como um problema, o professor não pode prescrever aos estudantes os métodos e/ou regras específicas para que obtenham a solução. Desse modo, um problema se configura na relação com o resolvedor, de tal modo que, se ele já conhece ou tem memorizados tais métodos de resolução ou não está interessado na atividade, não será para ele um problema. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 44).

Antes de tratarmos da metodologia de *Ensino-Aprendizagem-Avaliação Através da Resolução de Problemas*, para que a resolução de problemas possa ser entendida como para além de um procedimento ou ação, inicialmente faz-se necessário definir o que é um problema.

Antes pare e reflita: O que você entende por problema? E por um problema nas aulas de Matemática?

Lester Jr. (1977, p. 6) define problema como "[...] uma situação em que um indivíduo ou grupo é chamado a executar uma tarefa para a qual não há acesso fácil a um algoritmo que determina completamente o método de solução".

Onuchic (1999, p. 2015) indica que "problema é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver".

É importante enfatizar que os problemas apresentados no final dos capítulos, em livros didáticos e comumente abordados nas aulas de Matemática, denominamos simplesmente de "exercícios". Esses exercícios funcionam na intenção de "fixar" ou levar os estudantes a "treinar" os conteúdos já vistos e compreendidos. E, como eles já estudaram os conceitos, já possuem as ferramentas e caminho a seguir para sua resolução, esses exercícios não se tornam "problemas" para eles.

Quando o professor se utiliza dos "exercícios" e, diga-se de passagem, normalmente como único material de apoio para trabalhar a resolução de problemas, ele está considerando que todos os estudantes já adquiriram as ideias e significados após sua explicação, acreditando que todos concordam que seu método de resolução é o mais correto, fácil e melhor. Essa ilusão de que “mostrar e dizer” ou “ensinar – então – praticar”, como denota Van de Walle (2009, p. 58), pode trazer bons resultados não é referência para a promoção da equidade em Matemática.

Nessa concepção, por vezes, o estudante entende o método do professor, consegue resolver e acertar as questões, mas acaba resolvendo o problema mecanicamente. Outra situação complicada ocorre quando ele se depara com um problema de grau de desafio um pouco maior. Nesse caso, ou ele erra a questão, ou ele observa que seu método não funciona para essa situação e acaba se frustrando, tornando-se inseguro, e a sua saída é desistir, esperar a resposta do professor ou de um colega.

Assim, especificamente nas aulas de matemática, um problema se diferencia de um exercício pelas experiências anteriores do estudante com aquela situação, ou seja, uma questão pode ser um problema para um estudante que não conhece de antemão alguma técnica para resolvê-lo, enquanto que para outro que já a conhece pode se constituir de um exercício - “Problema não é um exercício que o qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória” (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Os bons problemas têm um papel importante nas aulas de matemática, uma vez que “os problemas dão aos alunos a chance de solidificar e ampliar o que sabem e, quando bem escolhidos, podem estimular o aprendizado de matemática” (NCTM, 2000, p. 52, tradução nossa). Porém, é importante também esclarecer que “[...] não estamos dizendo que todas as tarefas com que os alunos se deparam devam ser problemáticas. Se o objetivo de uma aula é desenvolver e dominar certas habilidades, alguns exercícios são necessários” (CAI; LESTER, 2012, p. 152).

Van de Walle destaca o valor da Resolução de Problemas no ensino e traz algumas razões pelas quais o professor deve prosseguir neste esforço, onde os resultados são promissores:

●*A resolução de problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido a elas.* Ao resolverem problemas, os alunos necessariamente estão refletindo sobre as ideias inerentes aos problemas. Essas ideias emergentes serão provavelmente mais integradas com as já existentes e, portanto, haverá uma melhor compreensão. [...]
●*A resolução de problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido.* Toda vez que você apresenta uma tarefa baseada em resolução de problemas e aguarda uma solução, você está dizendo aos estudantes ‘Eu acredito que vocês podem fazer isso’. [...]
● *A resolução de problemas fornece dados contínuos para a avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais, ajudar os alunos a ter bom desempenho e manter os pais informados.* [...]

● *A resolução de problemas possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos.* As boas tarefas, baseadas em resolução de problemas, possuem múltiplos caminhos para chegar a solução. [...] Cada estudante consegue dar significado à tarefa usando suas próprias ideias. Além disso, eles expandem essas ideias e desenvolvem sua compreensão enquanto ouvem e refletem sobre as estratégias de solução dos outros. [...]
● *Uma abordagem de resolução de problemas envolve os estudantes de modo que ocorrem menos problemas de disciplina.* [...]A maioria dos estudantes que permitimos resolver problemas de modos que lhes faça sentido considera o processo intrinsecamente recompensador ou gratificante. Há menos motivo para reagir contra ou causar dificuldades. [...]
● *A resolução de problemas desenvolve o 'potencial matemático'.* Os estudantes que resolvem problemas em sala de aula serão envolvidos em todos os cinco dos Padrões de Processos descritos pelo documento *Princípios e Padrões* do NCTM: resolver problemas, raciocinar (argumentar), comunicar, conectar e representar. Esses são os processos do fazer matemática.
● *É muito divertida!* Os professores que ensinam deste modo nunca retornam a um método de ensinar por exposição de regras [e receitas]. O estímulo dos alunos para desenvolver sua compreensão através de seu próprio raciocínio merece todo o esforço. E, é claro que, é divertido para eles. (VAN DE WALLE, 2009, p. 59)

1.2 A Resolução de Problemas como metodologia de ensino

Essa vertente, da construção do conhecimento da matemática enquanto se resolve um problema, é defendida também por Allevato e Onuchic (2014, p. 40) ao afirmarem que:

> [...] a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Desta forma, caberia a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático.

Para isso, as autoras propõem a *Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas* no sentido de que:

> [...] os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p. 142).

A palavra composta "ensino-aprendizagem-avaliação" denota a concepção de que esses três processos devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento do estudante e que o professor, como mediador, deve atuar como um guia no decorrer dessa metodologia. Nesse sentido, o estudante é avaliado no processo de resolver problemas, nas suas potencialidades e crescimento, fundindo-se com o ensino e o redirecionamento das práticas, quando necessárias.

Essa metodologia traça um caminho contrário do que normalmente acontece quando se fala em resolução de problemas nas aulas de matemática e, conforme enfatizam Cai e Lester (2012, p. 152), se a intenção é "[...] ajudar os estudantes a se tornarem solucionadores de problemas bem-sucedidos, primeiramente precisaremos mudar nossa visão de resolução de problemas como um tema que é adicionado à instrução após os conceitos e habilidades terem sido ensinados".

Para tanto, Allevato e Onuchic (2014) sugerem o desenvolvimento dessa metodologia, com vistas a organização das atividades em uma sequência de 10 passos:

01º Passo: Proposição do problema;
02º Passo: Leitura individual;
03º Passo: Leitura em conjunto;
04º Passo: Resolução do problema;
05º Passo: Observar e incentivar;
06º Passo: Registro das resoluções na lousa;
07º Passo: Plenária;
08º Passo: Busca do consenso;
09º Passo: Formalização do conteúdo;
10º Passo: Proposição e resolução de novos problemas.

Ao planejar uma aula baseada na Metodologia de Resolução de Problemas, parte-se da escolha de um problema gerador, que pode ser selecionado, adaptado, elaborado pelo próprio professor ou ainda aceito como proposta dos próprios estudantes. Esse problema gerador deve ser direcionado a construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento matemático de interesse, o qual não se tenha trabalhado anteriormente em sala (ALLEVATO, ONUCHIC, 2014).

O papel do professor na escolha de problemas e tarefas matemáticas importantes é crucial. Ao analisar e adaptar um problema, antecipando as ideias matemáticas que podem ser trazidas ao trabalhar no problema e, antecipando as perguntas dos alunos, os professores podem decidir se problemas particulares ajudarão a promover seus objetivos matemáticos para a classe. Existem muitos, muitos problemas interessantes e divertidos, mas que pode não levar ao desenvolvimento das ideias matemáticas que são importantes para uma aula em um determinado momento. Escolher os problemas com sabedoria, e usar e adaptar problemas de materiais instrucionais é uma parte difícil do ensino de matemática. (NTCM, 2000, p. 53, tradução nossa)

Na escolha dos problemas (primeiro passo) é importante ter em mente o que é um problema nas aulas de matemática, diferenciando-os de exercícios, e que nessa metodologia ele se constitui como o ponto de partida para a construção de novos conceitos/conteúdos matemáticos. Esses problemas podem ter como contexto situações do cotidiano, outras áreas do conhecimento, ou mesmo o contexto pode ser a própria matemática. Não é necessário e nem mesmo suficiente~~,~~ que tenha um enunciado na questão para que esta seja caracterizada como um problema.

> Problemas com enunciados ou palavras frequentemente vêm à mente em uma discussão sobre resolução de problemas. No entanto, essa concepção de resolução de problemas é limitada. Alguns 'problemas com enunciados' não são suficientemente problemáticos para os estudantes e, portanto, deveriam ser considerados apenas como exercícios para os alunos realizarem. (CAI; LESTER, 2012, p. 148)

O *segundo passo* volta-se ao estudante, onde ele terá seu envolvimento com o problema em sua leitura individual. Nesse momento ele terá a oportunidade de buscar a compreensão do problema proposto, refletindo sobre conceitos e linguagens matemáticas. Em seguida os estudantes são organizados em pequenos grupos para uma nova leitura, promovendo uma discussão e troca de ideias (terceiro passo). O professor, nesse momento, é um mediador, auxilia-os caso necessário, para uma melhor compreensão do problema, para aprimoramento de linguagens, sem deixar evidente a resposta ou caminho a seguir, pois o que é essencial nessa etapa é a ação realizada pelo estudante, o exercício de levantar ideias e expressar-se com clareza.

No *quarto passo* entra-se na resolução propriamente dita. Os estudantes, ainda em grupos, buscam resolver o problema, utilizando-se de estratégias voltadas para a expressão escrita, da linguagem matemática ou ainda de tabelas, esquemas, gráficos etc. Esse processo os conduzirá para a construção do conhecimento do conteúdo de matemática, planejado pelo professor anteriormente. O professor continua a observar a ação dos estudantes e a incentivá-los a buscar por seus conhecimentos prévios e contribuir com a troca de ideias, sempre confiando nas condições dos estudantes, deixando-os caminhar com as próprias pernas (quinto passo).

É importante que as perguntas realizadas pelo professor tenham como objetivo fazer os estudantes refletirem e analisarem suas soluções, sem direcionar para o caminho de solução. Nesse sentido Cai e Lester (2012, p. 154) alertam que uma "[...] barreira importante para as experiências significativas de resolução de problemas é que os professores geralmente retiram os desafios de uma tarefa matemática, assumindo o pensamento e o raciocínio, e dizendo aos alunos como resolver o problema".

Nos passos seguintes, propõe-se que um representante de cada grupo vá até a lousa (use cartazes, recursos computacionais, ou outras formas) para registrar a forma de resolução abordada pelo grupo (sexto passo). Após a conclusão e diante do "painel de soluções" certas, erradas e resolvidas por diferentes caminhos, prossegue-se com a discussão, onde cada um defende seu ponto de vista, faz comparações, justifica suas ideias e, consequentemente, avalia sua ação, de modo a corrigir ou aprimorar sua forma de apresentação e/ou escrita da resolução (sétimo passo). Este é o momento em que o professor e estudantes, de forma conjunta e permissiva, chegam a um consenso sobre o resultado correto (oitavo passo). Van de Walle (2009, p. 66, grifos do autor) destaque que:

> Com o passar do tempo, você fará sua turma se transformar em uma *comunidade de aprendizes de matemática*, onde os alunos se sentem confortáveis em se arriscar e compartilhar ideias; onde alunos e professor respeitam as ideias uns dos outros mesmo quando discordam, onde as hipóteses são defendidas e desafiadas respeitosamente, e onde o raciocínio lógico ou matemático é estimado acima de tudo. Essa atmosfera não se desenvolverá fácil nem rapidamente. Você precisará orientar seus alunos sobre suas expectativas durante esta fase e como interagir com os seus colegas.

Já no *nono passo*, o papel do professor é destacar na lousa (ou com outros recursos), de forma organizada e estruturada em linguagem matemática, uma apresentação "formal" e sistematizada o conteúdo matemático. Nessa discussão constarão as definições dos conceitos, os princípios e procedimentos matemáticos construídos através da Resolução de Problemas, explorando demonstrações e diferentes técnicas operatórias, caso necessário. Nessa etapa, Van de Walle (2009, p. 75-76) enfatiza que:

> As convenções sociais de simbolismo e de terminologia (nomenclatura) importantes em matemática nunca serão desenvolvidas por pensamento reflexivo. [...] Como uma regra geral, o simbolismo e a terminologia só devem ser introduzidos depois de os conceitos serem desenvolvidos como um meio de expressar ou nomear ideias. Eles raramente devem ser apresentados de início ou como coisas a serem memorizadas.

Por fim, o *décimo passo* objetiva-se analisar se os elementos essenciais do conteúdo matemático proposto naquela aula foram compreendidos. Nesse propósito, o professor aplica novos problemas relacionados com o problema gerador, buscando consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Ainda, esses novos problemas podem ser resultado de questionamentos realizados pelos estudantes durante a resolução do problema gerador. Allevato e Onuchic (2014) apostam que um círculo deve ser criado, visando aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo específico, pela construção de novos conhecimentos, pela resolução de novos problemas, e assim continuamente.

Durante as aulas de Matemática, enquanto os estudantes resolvem um problema, o professor não precisa formalizar e mostrar aos estudantes todas essas etapas, como se fosse um roteiro definido para qualquer problema. Entretanto, elas são de extrema importância no processo, pois elas têm como objetivo final, não o de resolver o problema em si, mas sim, o de possibilitar a construção de um novo conhecimento.

A metodologia aqui proposta pode ser implementada nas aulas de maneira natural, sem que os estudantes observem ou se sintam obrigados a realizar cada etapa, mas que ela norteie a prática pedagógica na concepção da Resolução de Problemas.

Essa metodologia também é muito relevante para a atuação profissional do professor, uma vez que, nem sempre ele consegue fornecer aos seus estudantes um método de fácil compreensão e de resolução, e ele poderá, com essa metodologia, vislumbrar as diferentes estratégias e caminhos que eles mesmos traçarão na resolução dos problemas. Positivamente, na plenária, a metodologia favorece ainda o professor e os estudantes, no sentido de poderem compartilhar essas diferentes estratégias e decidir qual o caminho que, na sua visão, é o mais conveniente.

Nessa metodologia se começa onde os estudantes estão, com as ideias deles, e não onde está o professor, assim eles estão aprendendo matemática enquanto fazem matemática (VAN DE WALLE, 2009). Nessa perspectiva, o *ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução da Problemas* é a concepção de abordagem dos problemas que serão propostos, a seguir, como Produto Educacional decorrente da pesquisa realizada.

Ressalta-se que se esses problemas não forem abordados utilizando a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e seguirem como aplicações após a explicação do conteúdo, poderão deixar de ser problemas para se tornarem exercícios em uma abordagem tradicional de ensino.

1.3 Geometria Espacial e o Desenvolvimento do Senso Geométrico

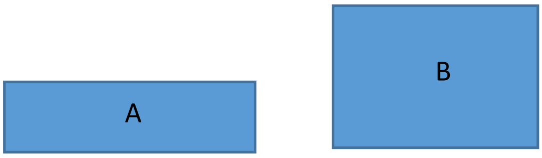
Para desenvolver o pensamento geométrico dois aspectos são importantes, o senso espacial e o conteúdo específico. O senso espacial (ou raciocínio geométrico) está relacionado com a habilidade de visualização mental de formatos e suas relações com os espaços, enquanto que os conteúdos são aqueles desenvolvidos ao longo dos anos de escolaridade (VAN DE WALLE, 2009). Esses dois aspectos se complementam e quando as estratégias de ensino incluem o contexto social e cultural dos estudantes, é possível favorecer o desenvolvimento do pensamento geométrico em detrimento de um ensino que prioriza terminologia e memorização.

Nesse texto problematizamos a linguagem geométrica, uma vez que, mesmo tendo um papel relevante na compreensão do espaço e do mundo, é importante que o estudo da geometria não seja reduzido ao seu uso social. Não se quer aqui definir pela rigidez do uso dos termos que se referem à geometria nas aulas de matemática, mas que o professor tenha um cuidado didático no uso de nomenclatura para a geometria, construindo gradualmente com os estudantes a terminologia adequada.

Inicialmente é importante definir que <u>uma figura geométrica é uma imagem mental controlada por uma definição</u> que pode ser incorporada materialmente, de forma concreta por meio de um desenho. Por exemplo, a imagem mental de um triângulo é uma figura geométrica plana com três lados, porém quando uma criança representa a visualização dessa figura colocando no papel, ela não tem um triângulo, mas sim um desenho de um formato triangular, que é a materialização do seu entendimento.

Nesse aspecto há de se ter cuidado ao se tratar um desenho de uma figura geométrica como “forma” ou “formato”. Os desenhos A e B apresentados na Figura 1, indicam formatos retangulares e não formas retangulares, tampouco são denominadas figuras geométricas (uma vez que essa se trata de uma imagem mental). A forma está associada a ideia de semelhança e figuras geométricas são semelhantes quando possuem ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais, o que não acontece nos desenhos A e B. Logo, o modo correto de se referir aos desenhos A e B é indicando que A e B são desenhos de formatos retangulares (VIANNA; ROLKOUSKI; DRUCK, 2014).

Figura 1: Desenhos de formato retangulares



Fonte: Criado pelo autor

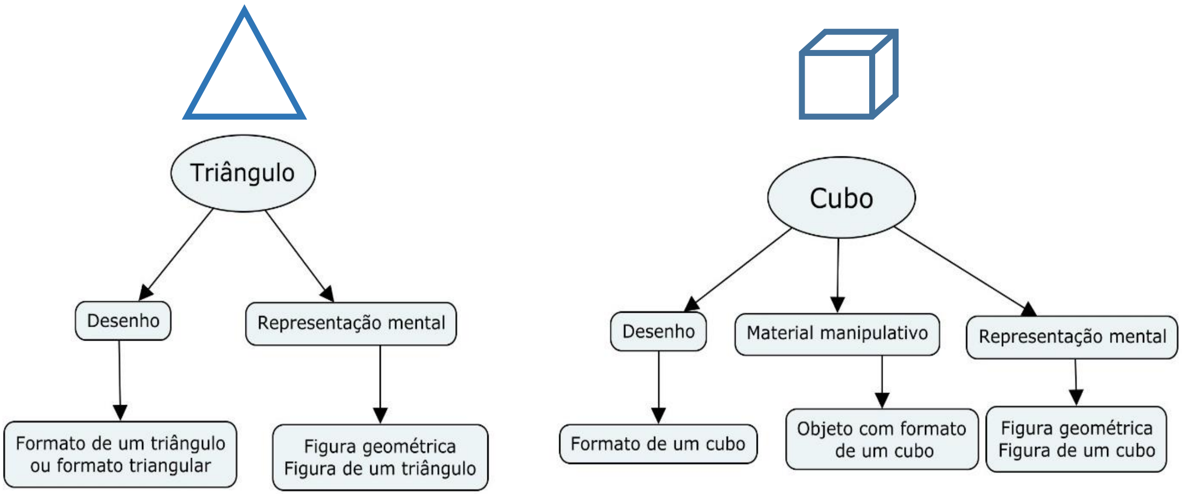
Nosso mundo é formado essencialmente por objetos que são tridimensionais, sendo que alguns tem formatos geométricos conhecidos, como cubo, pirâmide, entre outros. Quando estamos planificando um objeto tridimensional estamos desenhando ou representando a transformação de um formato tridimensional para um formato bidimensional.

No caso da geometria espacial, além da representação por meio de desenhos também se têm os objetos manipuláveis, chamados de materiais didáticos ou modelos físicos, importantes na construção dos conceitos, num processo de generalização e abstração. Nesse aspecto, Pais (1996, p. 66) enfatiza que os "[...] objetos e suas representações por um desenho tem uma influência predominante nos procedimentos de raciocínio do aluno no transcurso da construção de seu conhecimento geométrico".

A manipulação de objetos espaciais para verificação de suas características, como número de faces, vértices e arestas, é inegavelmente mais acessível aos estudantes do que essa verificação por meio de um desenho em perspectiva, justamente pelo imediatismo oferecido pelo objeto. Nesse aspecto, ressalta-se a importância de que o ensino de geometria espacial não priorize apenas aspectos conceituais e reprodução de fórmulas, bem como também não fique limitado a um nível puramente experimental.

Na Figura 2 apresentamos uma síntese dessa linguagem geométrica, relacionada com a geometria plana e espacial, elencando alguns itens que são costumeiramente abordados em sala de aula, com exemplos para triângulo e cubo.

Figura 2: Linguagem geométrica



Fonte: Criado pelo autor

O objetivo de dar importância a essas terminologias não é o de corrigir usos inadequados, mas o de alertar o professor para um cuidado didático em sala de aula, evitando gerar confusões conceituais viciosas e duradouras.

1.4 As habilidades da BNCC para o ensino da Geometria e as Medidas

A BNCC orienta que o professor proponha ações e empregue métodos para que os estudantes desenvolvam habilidades de deduzir, calcular e aplicar, em situações cotidianas, a Geometria e as Medidas. Destacamos as habilidades relacionadas com o estudo da geometria espacial e que faz relação com o que exploraremos durante a aplicação dos problemas propostos nesse material didático. São elas:

> (EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
> (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
> (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
> (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), como usem apoio de tecnologias digitais.

> (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
> (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. (BRASIL, 2018, p. 545)

Trata-se de habilidades que estão direta ou indiretamente ligadas com essa abordagem metodológica, pois com ela busca-se proporcionar momentos de construção de conhecimento geométrico para que os estudantes consigam dialogar sobre, construir reflexões, interpretar e resolver situações problemas propostos naquele momento e, todavia, posteriores problemas rotineiros do mundo que o cerca.

1.5 Reflexões para iniciar sua prática

Seguindo a abordagem que apresentamos sobre a *Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas,* propomos um conjunto de oito problemas~~,~~ que seguem uma sequência de aplicação, para o ensino do conteúdo geometria espacial, para estudantes do ensino médio.

O professor recebe essa proposta no formato de um Caderno do Professor, para usá-la seguindo os dez passos sugeridos pelas autoras Allevato e Onuchic (2014). Para isso, ressaltamos que, para obter êxito nesse processo de ensino o professor:

– Deve ter compreendido o que é de fato um problema;

– Ter claro que o que é um problema para mim pode não ser um problema para você;

– Entender que o ato de resolver um problema não caracteriza essa metodologia;

– Ter compreendido o seu papel e do estudante dentro dos dez passos da metodologia e que o estudante não precisa, necessariamente, visualizar o término e o início de cada etapa (passo);

– Assumir a posição de mediador, enquanto os estudantes resolvem o problema, que os erros cometidos por eles sejam aceitos como parte do processo e incentive-os para fazer de novo e pensar coletivamente, achando o caminho certo;

– Estar preparado para a possibilidade de um sentimento de desconforto, tanto de sua parte, quanto dos seus estudantes, uma vez que eles estranharão que o professor não dará os caminhos a serem seguidos;

– Acompanhar o que os grupos estão produzindo e saber o que e quando perguntar, sempre instigando e incentivando os estudantes;

– Ajudar nem demais nem de menos: não fornecer informações demais, de modo a excluir o desafio do problema, mas também não os deixar caminhar sozinhos, sem nenhum auxílio caso não estejam progredindo.

– Formar grupos heterogêneos e de, no máximo, 4 estudantes (se possível, priorizar duplas ou trios).

Acreditamos que o desejo de vivenciar novas práticas de ensino e a aplicabilidade dessa metodologia possam transformar, de fato, as suas futuras aulas, e que os estudantes aprendam matemática de forma prazerosa.

Cordialmente,

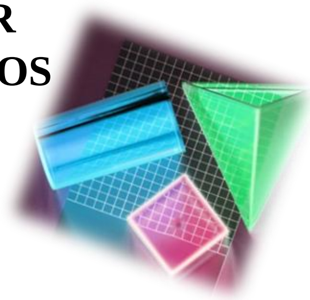
Dioney Luiz Fernandes – Professor Pesquisador

Janaina Poffo Possamai – Professora Orientadora

SEÇÃO 02 -CADERNO DO PROFESSOR

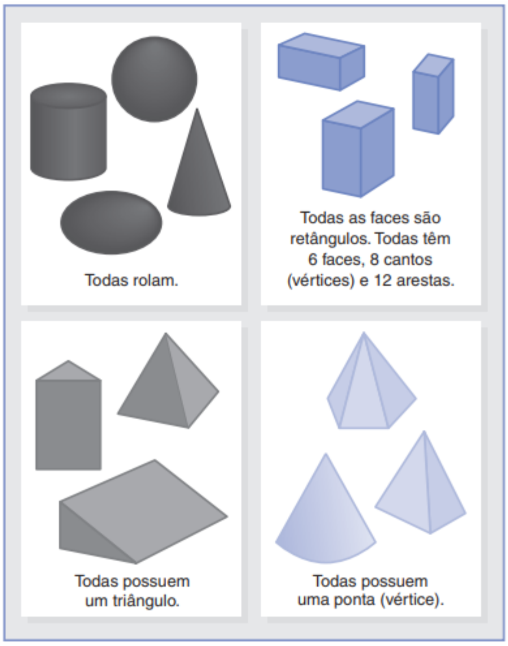
CONSTRUINDO CONCEITOS DE GEOMETRIA ESPACIAL ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

PROBLEMA 01 - AGRUPAR E CLASSIFICAR FORMATOS GEOMÉTRICOS



- **Habilidades da BNCC**

Segundo a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018, p. 529), “[...] os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas”. Nesse sentido, os estudantes devem explorar o seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, por meio de discussões e validações conjuntas, aprender conceitos, desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.



Para que os estudantes consigam resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de área, volume e capacidade, é necessário que eles tomem conhecimento primeiramente das figuras geométricas espaciais existentes e procurem observar suas características, através de materiais manipuláveis de formatos variados, classificando-as conforme seus critérios, como ilustra a Figura[1].

1 Fonte: Van de Walle – MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. 2009, p. 446.

- **Objetivos**

Para atingir as habilidades anteriormente elencadas, essa proposta (problema 01) tem como objetivo:

- Conhecer todas as figuras geométricas espaciais;

- Classificar e nomear embalagens com formatos geométricos espaciais.

- **Considerações metodológicas e didáticas**

Essa atividade consiste em dividir a turma em pequenos grupos (de 3 a 5 estudantes) e entregar diferentes embalagens tridimensionais (numeradas) para cada grupo. Primeiramente, o professor orienta para que eles agrupem essas embalagens usando algum tipo de critério, de maneira que acharem mais conveniente, e classifiquem cada agrupamento (grupo A, B, C, ...), justificando suas escolhas. A segunda tarefa é nomear cada embalagem, etiquetando-as, na qual a equipe recorrerá ao que lembram ou reconhecem, discutindo e trocando ideias entre eles.

O professor deve ter em mente que são os estudantes que decidem como agrupar, e não ele próprio, permitindo assim, que eles usem os seus conhecimentos prévios e suas ideias. Desta forma, o professor pode fazer uma análise das propriedades que eles já conhecem e usam das figuras geométricas espaciais.

Uma dificuldade é encontrar embalagens com uma variedade de formatos suficientes. Uma opção, para aquelas não encontradas, é a construção em madeira, acrílico ou papel cartão. Serão necessárias, para cada equipe, uma embalagem de cada formato:

– Uma esfera
– Um cilindro
– Um cone
– Um cubo
– Um paralelepípedo
– Um tetraedro
– Uma pirâmide de base triangular
– Uma pirâmide de base quadrada
– Uma pirâmide de base pentagonal
– Uma pirâmide de base hexagonal

Assim que eles finalizarem a classificação e nomeação, um integrante de cada equipe vai à lousa e faz os seus registros. Logo após, na plenária, suas estratégias são discutidas e comparadas entre as equipes. O professor, nesse momento, os instiga e os leva a um consenso, buscando uma classificação mais convincente e coerente, entre elas, assim como as nomeações. Finalizando essa etapa, o professor deverá *formalizar* a classificação das figuras geométricas espaciais (prismas, pirâmides e corpos redondos), nomeando-as e explorando suas especificidades. O cálculo de área e perímetro também podem ser explorados, retomando os conceitos e os cálculos.

- **Conteúdo a ser explorado na formalização**
    - Classificação: prismas, pirâmides e corpos redondos.
    - Conceitos de vértices, arestas e faces.
    - Conceitos de ângulos.
    - Relação de Euler: V + F = A + 2.

ATIVIDADE A SER ENTREGUE AOS ESTUDANTES
PROBLEMA 01

PROBLEMA 01

Você está recendo uma variedade de embalagens de diferentes tamanhos, formatos, materiais, cores e marcas. Pensando matematicamente, em relação aos diferentes formatos dessas embalagens, você deverá adotar algum critério de classificação e agrupá-las. Não importando o número de grupos criados e o número de embalagens em cada grupo. Assim:

1) **Crie os grupos (Grupo A, Grupo B, ...) necessários e justifique, explicando seus critérios adotados.**

2) **Cada embalagem possui um número. Pensando ainda em seus formatos, procure nomear corretamente cada embalagem, etiquetando-as.**

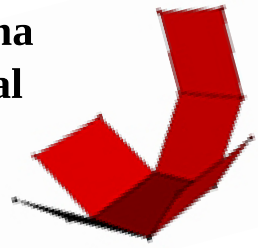
DICAS AO PROFESSOR:

- A numeração nas embalagens favorece na hora dos estudantes irem até a lousa e colocarem suas respostas, enumerando-as, sem a necessidade de desenhá-las;

- Buscar utilizar embalagens prontas do dia a dia, na medida do possível. Assim, o professor terá uma ótima oportunidade de discussão, na plenária, sobre a inexistência de alguns formatos~~,~~ nas embalagens/objetos do cotidiano;

- As que forem necessárias sua construção, de papel cartão, aconselhamos utilizar as mesmas medidas de bases e alturas, pois elas poderão ser reutilizadas nas atividades posteriores;

PROBLEMA 02 - DO PLANO AO ESPAÇO: Uma Transformação em Tempo Real



- **Habilidades da BNCC**

Quando se trabalha com a planificação de uma figura geométrica espacial, é necessário que os estudantes consigam "[...] imaginar o resultado final, antecipar mentalmente e inferir corretamente" (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 83) o formato plano (bidimensional) e as transformações necessárias para apresentá-lo em formato espacial (tridimensional). Nesse aspecto, o uso de recursos tecnológicos ou manipuláveis é importante, para facilitar esse processo de abstração e construção de imagens mentais.

Nacarato e Passos (2003, p. 84) enfatizam que no ensino tradicional pouco se explora o problema de representação de figuras espaciais como uma construção dos estudantes. Em geral, se espera que o estudante "aprenda e aceite os métodos de representar dos adultos". Essa prática é evidente na medida que o professor entrega aos estudantes a planificação pronta para que eles recortem e montem um objeto.

A BNCC orienta que o professor proponha ações e empregue métodos para que os estudantes desenvolvam habilidades de deduzir, calcular e aplicar, em situações cotidianas, a Geometria e as Medidas. Nesse sentido, trabalhar com os materiais manipuláveis permitirá que os estudantes se envolvam no processo e tenham condições de experimentar e desenvolver tais habilidades.

Quando a representação mental dos estudantes não é explorada e fica restrita à transmissão de informações que partem das ideias do professor, a construção dos conceitos pode ser tornar frágil e o entendimento da geometria (plana e espacial) pode não ocorrer, sendo que a compreensão dos conceitos fica no campo da intuição.

Nesse sentido, essa proposta (problema 02) tem como intuito desenvolver nos estudantes uma representação mental capaz de conduzi-los à construção dos conceitos necessários para que eles possam deduzir, calcular e aplicar a geometria em situações reais, adquirindo desse modo, as habilidades propostas pela BNCC.

- **Objetivos**

Para atingir as habilidades anteriormente elencadas, essa proposta (problema 02) tem como objetivo:

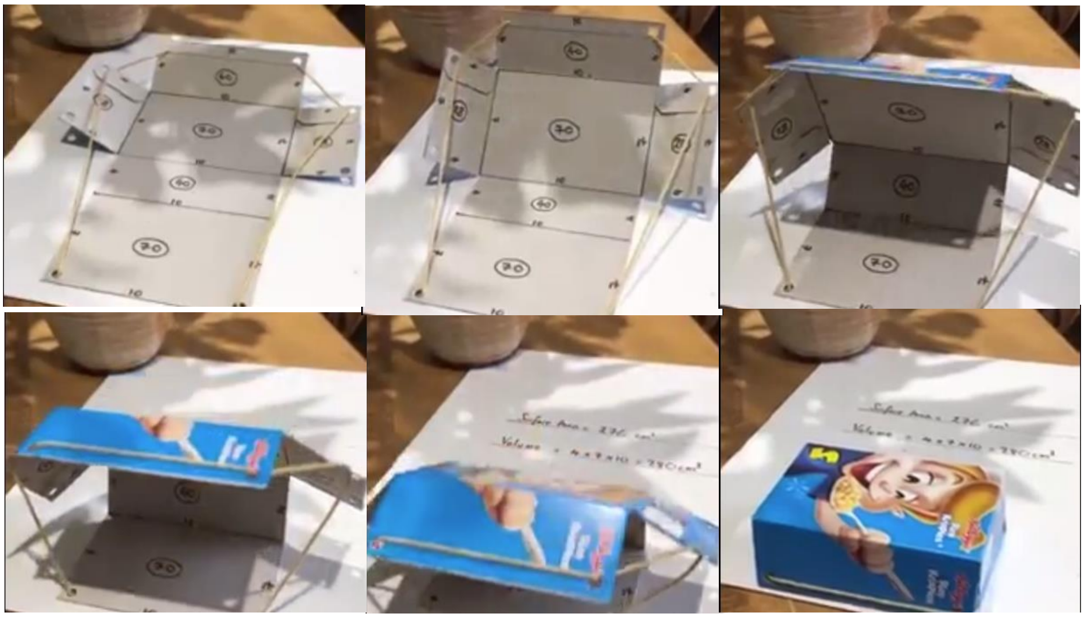
- Construir ou ampliar a representação mental através da elaboração/confecção da planificação de objetos com formato geométrico;

- Analisar as características da geometria plana em um objeto tridimensional.

- **Considerações metodológicas e didáticas**

Essa atividade foi planejada com base em um vídeo[2] postado em uma rede social, pelo professor Edigley Alexandre. Trata-se de um projeto com um mecanismo de movimentação, no qual é realizada a planificação de um objeto com formato de um paralelepípedo, construído em papel cartão, com furações próximas aos vértices pelas quais se passa um barbante que, ao ser puxado lentamente, faz todo o movimento e a união dos vértices, fechando a caixa. Essa transformação, da planificação saindo do plano (2D) para o espaço (3D), possibilita a construção do raciocínio espacial.

Figura 4: Do plano ao espaço – transformação em tempo real



Fonte: *Print screen* do vídeo postado na página do Facebook

2 https://m.facebook.com/story.php?story_fbid=1822784984443210&id=143910325664026

A atividade inicia-se com a apresentação do vídeo aos estudantes. Pode-se pensar que nesse momento o professor fornecerá a eles o caminho, a receita pronta, o que faria a proposta deixar de ser um problema para eles, mas na verdade não. Eles terão apenas a ideia da proposta ou desafio que está sendo proposto, sem ter contato com os cálculos e os moldes da planificação, além do que, os projetos que serão lançados a eles serão diferentes.

Após eles assistirem o vídeo, o professor deve instigá-los e motivá-los para o desafio de construírem o seu próprio projeto. Assim, dividindo-os em equipes de 3 ou 4 estudantes, no máximo, o professor pode entregar uma ficha, através de sorteio, com um projeto semelhante, mas com outros formatos geométricos, para cada equipe. Exemplos:

– prisma triangular;
– prisma pentagonal
– pirâmide de base triangular;
– pirâmide de base quadrada;
– cilindro;
– cone;
– cubo.

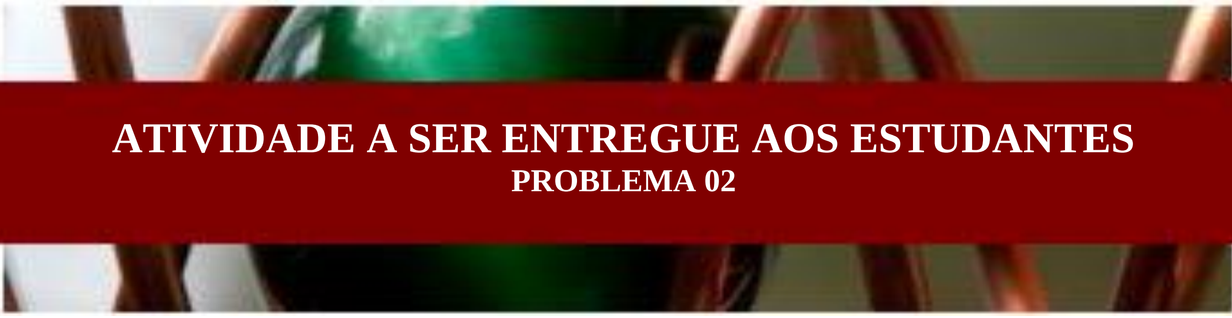
Com apenas a informação do formato que receberam para seu projeto, os estudantes devem caminhar sozinhos, devem discutir entre si, traçar estratégias e pesquisar caso necessário, para encontrarem os cálculos, os desenhos e as furações corretas ou mais adequadas. Muitas dúvidas podem surgir e cabe ao professor, nesse momento, mediar, de forma a não dar a resposta pronta, mas sim questionando e provocando suas curiosidades e anseios, conforme o 5º passo da metodologia.

Após terminarem, cada equipe deve preparar um vídeo, com a utilização do celular, organizando a filmagem de apresentação do seu projeto, com animação, identificação e música de fundo. O professor pode sugerir alguns aplicativos de formatação de vídeos ou os próprios estudantes podem compartilhar os de seu conhecimento.

Para a apresentação ao grande grupo, sugere-se o uso do projetor multimídia. Cada equipe apresenta o seu vídeo, explicando o caminho adotado. O material confeccionado pelos grupos também será apresentado, dando a oportunidade aos colegas de conhecer, testar e observar todo o funcionamento. No término das apresentações, pode-se abrir uma discussão para sanar qualquer dúvida, falar sobre as dificuldades encontradas, sugestões e curiosidades.

O professor poderá explorar e apresentar aos estudantes os Poliedros de Platão, falando de suas particularidades. Para produzir a animação desses sólidos e obter uma melhor visão tridimensional, o professor pode conduzir os estudantes à sala de informática, caso a escola disponha, e apresentar o *software GeoGebra*. Os estudantes poderão construir seus sólidos informando os comandos, fazer e usar animação de sua planificação.

- **Conteúdos a serem explorados na formalização**
  - O cálculo da altura e apótema da pirâmide;
  - O cálculo da altura e geratriz do cone;
  - O cálculo do setor circular do cone;
  - O cálculo de perímetro e área das figuras planas utilizadas.



ATIVIDADE A SER ENTREGUE AOS ESTUDANTES
PROBLEMA 02

PROBLEMA 02

Agora, de acordo com os mecanismos adotados naquele projeto apresentado no vídeo, você está desafiado a construir o seu próprio projeto. Conforme o tipo de projeto sorteado:

- Analise, discuta com sua equipe, crie um protótipo e execute-o, de modo a funcionar o seu movimento de transformação "do plano ao espaço";

- Grave um vídeo, com o uso do celular, mostrando o movimento em tempo real, com vista frontal, lateral e superior. Edite o vídeo de forma adequada para uma apresentação.

FICHA PARA RECORTAR – SORTEIO		
PRISMA TRIANGULAR	PRISMA PENTAGONAL	PIRÂMIDE DE BASE TRINGULAR
PIRÂMIDE DE BASE QUADRADA	PIRÂMIDE DE BASE HEXAGONAL	CONE
CILINDRO	CUBO	TETRAEDRO

DICAS:

- O professor pode combinar com os estudantes, em uma ou duas aulas anteriores, de trazerem papel cartão, tesoura, régua, cola, compasso, transferidor, esquadro e barbante, caso a escola não disponibilize;

- Os estudantes podem pesquisar em livros e/ou pela internet. O importante é eles buscarem a construção do seu próprio conhecimento.

- Instruir os estudantes da importância do uso do esquadro no momento de desenhar a planificação, em alguns casos;

- O material a ser usado deve ser firme, tipo papel cartão, pois a cartolina não resiste no momento de puxar o barbante e a furação acaba rasgando.

PROBLEMA 03 - PROJETANDO UMA CAIXA

- **Habilidades da BNCC**

Para desenvolver o pensamento geométrico dois aspectos são importantes: o senso espacial e o conteúdo específico. O senso espacial (ou raciocínio geométrico) está relacionado com a habilidade de visualização mental e suas relações com os espaços, enquanto os conteúdos são aqueles desenvolvidos ao longo dos anos de escolaridade (VAN DE WALLE, 2009). Esses dois aspectos se complementam e quando as estratégias de ensino incluem o contexto social e cultural dos estudantes, é possível favorecer o desenvolvimento do pensamento geométrico em detrimento de um ensino que prioriza terminologia e memorização.

Nessa proposta (problema 03) problematiza-se a linguagem geométrica, uma vez que, mesmo tendo um papel relevante na compreensão do espaço e do mundo, é importante que o estudo da geometria não seja reduzido ao seu uso social. Não se quer aqui definir pela rigidez do uso dos termos que se referem à geometria nas aulas de matemática, mas que o professor tenha um cuidado didático no uso de nomenclatura para a geometria, construindo gradualmente com os estudantes a terminologia adequada.

Busca-se, nesse sentido, uma proposta que leve os estudantes a construírem conhecimento e nomenclaturas adequadas no que se refere aos conceitos de volume e capacidade, bem como a exploração do raciocínio geométrico, acionando a habilidade da visualização mental no uso de medidas e formatos adequados e suas relações com o espaço.

- **Objetivos**

No propósito de atingir as habilidades anteriormente elencadas, essa proposta (problema 03) tem como objetivo:

- Desenvolver o raciocínio geométrico, ampliando a visualização mental ao explorar a relação dos formatos e medidas com o espaço;
- Construir os conceitos de volume e capacidade;

– Compreender a noção de espaço e do cálculo de volume;
– Desenvolver o senso de investigação e de escrita matemática.

- **Considerações metodológicas e didáticas**

Os estudantes são desafiados com um problema que propõe a construção de um projeto de uma caixa com tampa, a partir de uma chapa retangular de alumínio, com medidas de 120 x 80 cm, de modo que desperdice o mínimo possível, ou absolutamente nada, e que também resulte na maior caixa possível.

O professor entrega o problema para cada estudante fazer a leitura, individual. Em seguida, eles podem se juntar em equipes, fazendo a leitura novamente, no coletivo. Assim compartilharão as suas ideias iniciais e definirão estratégias para a resolução do problema proposto. O que normalmente acontece é que eles iniciam individualmente, fazendo testes, rascunhando, mesmo estando em equipe. Esse fato, que provavelmente vai ocorrer, é extremamente normal e importante, pois cada um, assim que obtiver o seu modelo de resposta pronto, confrontará com os dos demais, verificando as possibilidades, trocando ideias e corrigindo erros, o que, na verdade, auxilia na construção de seu próprio conhecimento.

Após encontrarem o “modelo ideal” para a confecção da caixa, os estudantes de cada equipe devem responder um questionário, com perguntas relacionadas às medidas definidas por eles. As perguntas foram elencadas com o objetivo de levar os estudantes a desenvolverem o pensamento geométrico, ou seja, que atinjam os dois aspectos citados inicialmente: o senso espacial, enquanto buscam uma análise quanto as medidas e os formatos a serem utilizados para não haver o desperdício, e o conteúdo específico, enquanto eles buscam os conceitos e cálculos de volume para comprovarem se as medidas estipuladas resultam na maior caixa possível.

- **Conteúdos a serem explorados na formalização**
  - O cálculo de perímetro e área;
  - O cálculo de volume;
  - O cálculo de capacidade.
  - O cálculo de perímetro e área das figuras planas utilizadas.

ATIVIDADE A SER ENTREGUE AOS ESTUDANTES
PROBLEMA 03

PROBLEMA 03

Alguns objetos ou produtos, durante sua fabricação, necessitam passar anteriormente por uma análise, definição de projeto e medidas, custos, aproveitamentos etc. Para construção de uma caixa, com tampa, conforme exemplo abaixo (meramente ilustrativo), uma empresa comprou uma chapa de alumínio retangular, com medida de 120 cm x 80 cm. O objetivo principal é de aproveitar ao máximo essa chapa, construindo um projeto com medidas que sejam possíveis de se chegar, através de dobras e soldas, na maior caixa possível.

Com as informações dadas, ajude esta empresa:

a) **Elabore um projeto com a planificação dessa caixa, com as medidas necessárias e possíveis, atendendo ao que se pede.**
b) **Imagine que seu projeto foi aprovado com sucesso. Desenhe sua caixa depois de pronta com as suas devidas medidas.**
c) **Como você chegou a essas medidas? Você acredita ser essa a maior caixa possível de ser construída? Quais critérios você usaria para comparar a sua com as dos colegas e comprovar isso? Relate.**
d) **Quais figuras geométricas planas estão representadas no seu projeto?**
e) **Analisando seu projeto, quantas dobras e quantas soldas seriam necessárias, na prática, para a construção de sua caixa? Qualquer outro projeto com medidas diferentes, mudariam essa quantidade? Justifique.**
f) **Se depois de pronta, essa sua caixa fosse furada e enchida completamente com querosene, como descobrir, através de seu projeto, quantos litros foram utilizados? A medida da espessura dessa chapa seria relevante para esse cálculo?**

DICAS:

- É importante que o professor instigue cada equipe, provocando-os: por que dessas medidas? Por que nesse formato? O que garante que essa é a maior caixa? Que cálculo fizeram que justifique? Será que não há outra maneira que não haja desperdício? Esses questionamentos impedem que os estudantes façam uma única tentativa e se desmotivem a pesquisar, testar, calcular, comparar etc.

- Provavelmente os estudantes farão planificações tipo "padrão", com as famosas "abas" para a colagem. O professor deve se conter e não dizer de imediato, mas orientá-los perguntando: o molde tem que ser assim? Por que dessas abas? Como será a junção das laterais de alumínio?

- O professor deve conduzi-los, de modo que compreendam que o fato de não haver desperdício de material, não garante a maior caixa.

- Intensificar o debate, na plenária, sobre as dobras e soldas (questão e) conforme o modelo de planificação adotado. Momento importante para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

- Garantir, no momento da plenária, a compreensão do conceito de volume e de capacidade. Iniciando com o professor ouvindo os estudantes, compreendendo suas falas e argumentos, verificando dessa forma o nível de conhecimento atingido para, finalmente, intervir, buscar o consenso e formalizar os conceitos. Saber calcular volume e capacidade não é o que se busca nesse momento, pois os próximos problemas terão esse objetivo. O mais importante, portanto, é os estudantes saberem definir o que é o volume de um objeto e a capacidade de um recipiente, bem como saber diferenciar um do outro e suas respectivas unidades de medida.

PROBLEMA 04 – CUBINHOS E CÚBICOS: Construindo o Conceito de Volume

- **Habilidades da BNCC**

A BNCC (2018, p.272) afirma que "[...] a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume [...]" e que, para isso, desde os anos iniciais as atividades devem contemplar o uso de materiais variados com possibilidades de manipulação, com objetos de formatos tridimensionais.

Porém, quando o ensino de geometria é reduzido a reprodução mecânica de fórmulas e a processos que priorizam a memorização, corre-se o risco de haver fragilidade no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Dentro dessa proposta (problema 04), propõe-se que os estudantes, em equipes, busquem a compreensão e a construção do conceito de volume, por meio de material manipulável de formato tridimensional. Com o uso do material manipulável, espera-se um maior entendimento sobre o uso da unidade de medida "centímetro cúbico" no cálculo de volume e capacidade de um recipiente.

- **Objetivos**

No propósito de atingir as habilidades anteriormente elencadas, essa proposta (problema 04) tem como objetivo:

- Desenvolver o raciocínio geométrico, ampliando a visualização mental ao explorar o material, manipulando-o e relacionando-o com o espaço;

- Desenvolver um método para o cálculo do volume/capacidade dos prismas e do cilindro;

- **Considerações metodológicas e didáticas**

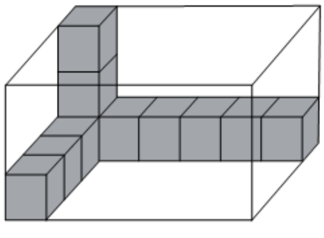
Nessa atividade os estudantes, em equipes de dois ou três estudantes no máximo, recebem duas embalagens de papel sem tampa (um cubo e um paralelepípedo) e um cubinho de madeira de 1x1cm (material dourado). As duas embalagens devem ter medidas exatas de comprimento, largura e altura, para que caibam quantidades exatas de cubinhos. A embalagem de formato paralelepipedal pode ser encontrada facilmente, como em caixas de remédios e pode ser cortada na sua altura, caso não tenha uma medida exata. Já o cubo pode ser confeccionado em papel cartão, caso seja difícil de se encontrar.

Os cubinhos de madeira são encontrados no material didático, que a grande maioria das escolas possuem, conhecido como Material Dourado. A quantidade de cubinhos a ser entregue a cada equipe não deve ser superior a quantidade necessária para se encher por completo as duas embalagens, o que transformaria o problema muito fácil para o propósito. O que se recomenda é um ou no máximo dois cubinhos por equipe.

Cada estudante recebe o problema para leitura individual e depois, em equipe, recebem as duas embalagens e os cubinhos e fazem a releitura. As perguntas que constam no problema foram desenvolvidas com o intuito de conduzir os estudantes para uma percepção clara da quantidade necessária de cubinhos para cobrir aquela área, bem como a quantidade para o preenchimento total naquele espaço (altura da embalagem).

Com isso, fazer uma relação da quantidade total de cubinhos que cabem na embalagem com as medidas da embalagem, sem a necessidade de se contar um por um. Outras perguntas levam os estudantes a uma “generalização” para a contagem dos cubinhos em qualquer prisma, inclusive para prismas com medidas não exatas, prismas oblíquos e também para os cilindros.

Figura 5: Cálculo de volume através da contagem dos cubinhos



Fonte: Elaborado pelo autor

Cada equipe deve apresentar na plenária seus cálculos e sua “fórmula mágica” ou “fórmula padrão” para a contagem dos cubinhos em qualquer prisma. A busca por um consenso, nesse momento, é importante, pois todos devem estabelecer uma fórmula a ser seguida e que seja igual para todos, até para facilitar nas atividades futuras, mas com o entendimento de que os símbolos definidos representam a mesma coisa~~,~~ na prática. Isso deve ficar claro para os estudantes. Apesar deles terem apresentado fórmulas diferentes um do outro, assim como temos autores que também usam de diferentes fórmulas nos livros didáticos, o conceito é o mesmo.

O professor deve, também, orientar seus estudantes que a contagem desses cubinhos envolve, na verdade, a contagem do espaço que se tem ali dentro daquela embalagem. Que essa contagem ou medição do espaço resulta no Volume da embalagem e que, no Sistema Internacional de medidas, a unidade oficial é o metro cúbico e que o centímetro cúbico que estamos trabalhando é um submúltiplo. Algum estudante pode utilizar do termo capacidade em vez de volume e o professor deve, também, abrir discussão sobre a capacidade da embalagem, qual a utilidade do termo volume e do termo capacidade, assim como suas unidades de medidas.

A formalização desses conceitos deve ser colocada na lousa pelo professor, o qual poderá explorar ainda as outras unidades de medidas, múltiplos e submúltiplos, bem como suas transformações.

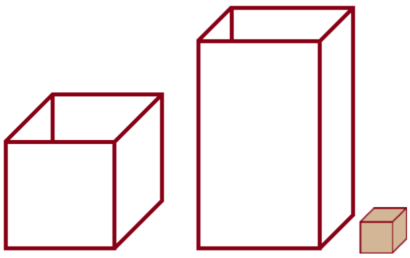
Algumas atividades podem ser trabalhadas após a formalização desse conteúdo, explorando o cálculo de volume de prismas oblíquos, prismas de bases diferentes e de cilindros.

- **Conteúdos a serem explorados na formalização**
    - O cálculo de volume;
    - O cálculo de capacidade;

ATIVIDADE A SER ENTREGUE AOS ESTUDANTES
PROBLEMA 04

PROBLEMA 04

Caro estudante, você está recebendo essas duas embalagens de papel, sem tampas, e um cubinho de madeira.



Responda:

a) **Quantos cubinhos de madeira iguais a esse seriam necessários para preencher completamente a embalagem cúbica?**
b) **Quantos cubinhos de madeira iguais a esse seriam necessários para preencher completamente a embalagem paralelepipedal?**
c) **Como você classifica geometricamente essas embalagens e o cubinho de madeira?**
d) **Quais as dimensões de cada embalagem?**
e) **Quais as dimensões do cubinho de madeira?**
f) **Qual método você utilizou para encontrar a quantidade de cubinhos necessários? Explique.**
g) **Desenvolva uma fórmula mágica para calcular a quantidade de cubinhos necessários para preencher qualquer embalagem desse formato, sem a necessidade dos cubinhos.**
h) **No caso de usarmos água para preencher as embalagens, como saber a quantidade exata e necessária?**
i) **No caso da embalagem ser cilíndrica, como você determinaria uma fórmula para calcular a quantidade necessária?**

DICAS:

- Na questão “c” é provável que alguns respondam “cubo e paralelepípedo”. Cabe ao professor de lembrá-los que se refere a classificação que eles fizeram no problema 01, quanto as suas características, em qual grupo pertence, mas não dando a resposta pronta.

- Intensificar o debate, na plenária, sobre os diferentes tipos de prismas, com base pentagonal, hexagonal, por exemplo, como seria calculado. O objetivo é que os estudantes cheguem no entendimento que é a área da base que determina a quantidade de cubinhos na “primeira camada” e que a altura define a quantidade total.

- Garantir, no momento da plenária, a compreensão de que, caso a embalagem tenha medida não exata, o cálculo permanece o mesmo, pois seria como se derretêssemos ou cortássemos os cubinhos e encaixássemos nos espaços vazios. Usar desse argumento para a compreensão do volume do cilindro e dos prismas oblíquos.

- Esclarecer que os objetos ou sólidos geométricos tridimensionais que calculamos o volume são considerados maciços, ou seja, não ocos. Nesse caso que estamos trabalhando, trata-se de volume interno ou volume líquido da embalagem, cujas medidas são internas.

PROBLEMA 05 – PRISMA X PIRÂMIDE - CILINDRO X CONE: Construindo o Conceito de Volume

- **Habilidades da BNCC**

Quando o ensino de geometria é reduzido à reprodução mecânica de fórmulas e a processos que priorizam a memorização, corre-se o risco de haver fragilidade no desenvolvimento do pensamento geométrico. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) indicam que “A experiência tem mostrado que os alunos que aprendem mecanicamente fórmulas costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo resultados sobre os quais não têm nenhum tipo de crítica e controle, além de as esquecerem rapidamente” (BRASIL, 1998, p. 131).

Nesse sentido, busca-se com essa proposta (problema 05), atingir as habilidades propostas pela BNCC ao propor que os estudantes, em equipes, busquem a compreensão e a construção do conceito do volume das pirâmides e dos cones, por meio de material manipulável de formato tridimensional e o uso de grãos de arroz. Com o uso do material manipulável, espera-se um maior entendimento sobre a relação existente entre o volume das pirâmides com prismas de mesma base, assim como o volume dos cones com cilindros de mesma base, que se relacionam na proporção de um terço.

- **Objetivos**

No propósito de atingir as habilidades anteriormente elencadas, essa proposta (problema 05) tem como objetivo:

- Desenvolver o raciocínio geométrico, ampliando a visualização mental ao explorar o material, manipulando e relacionando-os;
- Desenvolver um método para o cálculo do volume/capacidade das pirâmides e dos cones;

- **Considerações metodológicas e didáticas**

Nessa atividade os estudantes receberão o problema impresso e farão a leitura individual. Em seguida, o professor coloca-os em pequenos grupos, de no máximo 4 estudantes, os quais farão a leitura novamente no coletivo. O professor deve entregar embalagens (que podem ser reutilizadas do problema 01) a cada grupo, contendo: uma pirâmide e um prisma de mesma altura e mesma base, um cone e um cilindro também com mesma medida de altura e mesmo raio da base. Essas embalagens devem conter uma abertura na parte superior para que os estudantes consigam colocar e retirar os grãos de arroz com facilidade.

Com os grãos de arroz disponíveis para manuseio, os estudantes deverão encontrar uma maneira de provar qual a relação existente entre o volume das embalagens agrupadas. Partindo da fórmula do cálculo do volume do prisma e do cilindro, desenvolvidas por eles na atividade anterior, os estudantes serão instigados a definirem uma outra, que satisfaça a relação do volume da pirâmide e do cone encontrada com o uso do arroz.

Espera-se que os estudantes compreendam a relação de um terço do volume/capacidade existente entre as embalagens de mesmas bases e alturas apresentadas.

O resultado encontrado pelas equipes deve ser colocado na lousa e então abrir uma discussão, onde o professor e os estudantes debatem os diferentes caminhos tomados e chegam a um consenso, de qual fórmula adotarão como padrão a partir de então.

O professor deve formalizar os conceitos no quadro, pode exemplificar e trabalhar com mais atividades semelhantes, explorando o cálculo de volume e capacidade das diferentes pirâmides e cones. É interessante o professor explorar nesse momento também os troncos de pirâmide e de cone, podendo inclusive, criar um problema para que os estudantes construam esses conceitos, com o uso de arroz, areia ou água.

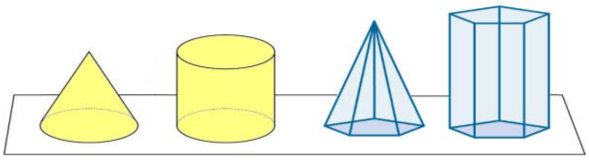
- **Conteúdos a serem explorados na formalização**
    - O cálculo de volume;
    - O cálculo de capacidade;

ATIVIDADE A SER ENTREGUE AOS ESTUDANTES

PROBLEMA 05

PROBLEMA 05

Observando os pares de embalagens que você recebeu, responda:



a) **Qual a semelhança entre os pares de embalagens recebidas?**

b) **Qual o volume do prisma?**

c) **Qual o volume do cilindro?**

d) **Qual a relação entre o volume do prisma e da pirâmide?**

e) **Qual a relação entre o volume do cilindro e do cone?**

f) **Encontre uma maneira de calcular o volume de qualquer pirâmide e de qualquer cone.**

DICAS:

– Na questão “a” espera-se que os estudantes identifiquem que os pares de embalagens apresentam as mesmas alturas e as bases possuem o mesmo formato e medidas. É fundamental essa concepção para que explorem as relações existentes entre elas.

– As questões “b” e “c” não serão um problema para eles, pois já desenvolveram esse conceito de calcular o volume de prisma e cilindro no problema anterior (problema 4).

– É provável que algumas equipes iniciem por encher o prisma e o cilindro de arroz por primeiro, repassando em seguida para a pirâmide e para o cone, o que dificultará suas conclusões. O professor deve se conter nesse momento para não dar o caminho a ser seguido, deixando que eles desenvolvam suas próprias estratégias.

– Dependendo do tipo de prisma que o professor for trabalhar (de base quadrada, pentagonal, hexagonal etc.), os estudantes podem construir a fórmula do cálculo do volume da pirâmide e do cone utilizando a fórmula de área dessas bases. É importante que na plenária o professor conduza o raciocínio de que a base dos prismas pode mudar. Pode ser interessante, inclusive, que o professor disponibilize prismas e pirâmides de diferentes bases para cada equipe.

– Intensificar o debate, na plenária, sobre os diferentes tipos de prismas, com base pentagonal, hexagonal, por exemplo, como seria calculado. O objetivo é que os estudantes cheguem no entendimento que é a área da base multiplicada pela altura e dividido por três que determina o volume de qualquer pirâmide e de qualquer cone.

– Explorar também o cálculo de capacidade, mostrando que, se o volume da pirâmide e do cone é um terço do volume do prisma e cilindro, respectivamente, a capacidade também assim será.

PROBLEMA 06 – MERGULHANDO ESFERAS NA ÁGUA: Construindo Conceitos de Volume

- **Habilidades da BNCC**

A exploração de materiais manipuláveis na construção de conceitos matemáticos está presente também nessa proposta, ao trabalhar o cálculo de volume da esfera com o uso de embalagens tridimensionais e a utilização de água. Como colocado no problema anterior, quando o ensino de geometria é reduzido a reprodução mecânica de fórmulas e a processos que priorizam a memorização corre-se o risco de haver fragilidade no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) indicam que “A experiência tem mostrado que os alunos que aprendem mecanicamente fórmulas costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo resultados sobre os quais não têm nenhum tipo de crítica e controle, além de as esquecerem rapidamente” (BRASIL, 1998, p. 131).

Fugindo desse viés, a BNCC propõe que os estudantes possam investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, e,para isso, devem ser oportunizados avivenciar estratégias e recursos que desenvolvam habilidades “[...] voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo.” (BRASIL, 2018, p. 540).

Para que os estudantes desenvolvam e disponham dessas habilidades e que possam resolver problemas ao longo de sua trajetória de trabalho e de vida, essa proposta (problema 06) propõe que os estudantes, em equipes, busquem a compreensão e a construção do conceito do volume da esfera por meio de material manipulável de formato tridimensional e o uso de água. Com o uso do material manipulável, espera-se um maior entendimento sobre a relação existente entre o volume da esfera, do cone e do cilindro (de medidas).

- **Objetivos**

Buscando atingir as habilidades anteriormente elencadas, essa proposta tem como objetivo:

- Desenvolver o raciocínio geométrico, ampliando a visualização mental ao explorar o material, manipulando e relacionando-o;

- Desenvolver um método para o cálculo do volume/capacidade da esfera.

- **Considerações metodológicas e didáticas**

Nessa atividade os estudantes, em grupos de 3 ou 4 integrantes, recebem três recipientes: um cilindro, uma esfera e um cone. O cilindro e o cone devem possuir o mesmo diâmetro da base e os três recipientes devem ter a mesma altura, ou seja, o diâmetro da esfera é que vai determinar o diâmetro também do cilindro e do cone e assim, obviamente, as suas alturas.

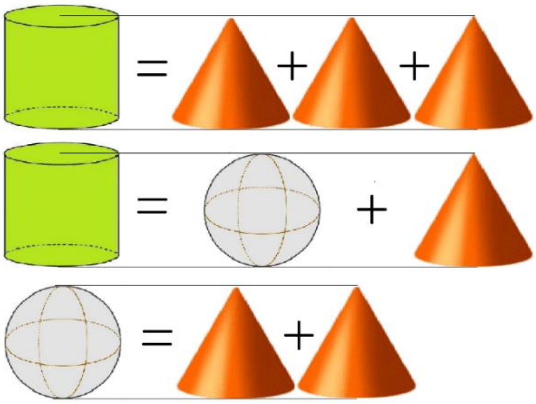
Figura 6: Relação existente entre os volumes

Fonte: Elaborado pelo autor

Recomenda-se usar uma bola de plástico daquelas do tipo de "piscina de bolinhas" como a esfera. Para o Cilindro, que deve ter o mesmo diâmetro e altura dessa esfera, indica-se a procura por um copo/caneca numa loja do tipo "tudo por 1,99", pois normalmente há muita variedade e, no pior das hipóteses, pode-se cortar/serrar na altura desejada, bastando apenas que os diâmetros coincidam, nesse caso. Já o cone, dificilmente encontramos um objeto nas medidas desejadas. Nesse caso, recomenda-se a confecção com papel cartão, respeitando as medidas do diâmetro e altura necessários. Como os estudantes irão enchê-los de água, indica-se que esse papel cartão seja revestido com papel adesivo, do tipo "papel contact". As embalagens devem ter, logicamente, uma abertura para que eles consigam colocar e retirar a água com facilidade.

Como os estudantes já desenvolveram a construção dos conceitos e do cálculo do volume do cilindro e do cone nas atividades anteriores, espera-se com essa atividade que os estudantes encontrem uma relação existente entre o volume dos recipientes que terão em suas mãos, para encher de água, manusear e fazer comparações. Diferentes conclusões que cada grupo pode encontrar:

Figura 7: Diferentes relações esperadas



Fonte: Elaborado pelo autor

Objetiva-se que eles encontrem uma fórmula para o cálculo de volume de qualquer esfera, independente do caminho trilhado. O professor deve mediar e instigar para que eles não desistam, que busquem caminhos e utilizem das fórmulas já definidas, do cilindro e do cone, trabalhando algebricamente e não com as medidas das embalagens.

O caminho a percorrer já é sabido, dentro da metodologia da Resolução de Problemas. Logo, o professor deve organizar as etapas para que os estudantes passem por elas, trocando e ampliando seus conhecimentos. A plenária é fundamental para que sejam discutidos os pontos conflitantes e/ou para sanar as dificuldades daquele(s) grupo(s) que, por qualquer razão, não conseguiu(ram) chegar na solução do problema.

O professor deve também formalizar esses conceitos no quadro e pode explorar, por exemplo, a área da superfície da esfera. Outros problemas podem ser desenvolvidos, explorando tais conceitos matemáticos.

- **Conteúdos a serem explorados na formalização**
  - O cálculo de volume;
  - O cálculo de capacidade;

ATIVIDADE A SER ENTREGUE AOS ESTUDANTES
PROBLEMA 06

PROBLEMA 06

Observe as embalagens que você recebeu e encontre:

a) **O que as três embalagens possuem em comum?**

b) **Qual o volume do cone?**

c) **Qual o volume do cilindro?**

d) **Qual a relação existente entre o volume das embalagens?**

e) **Encontre uma fórmula para calcular o volume de qualquer esfera.**

DICAS:

- Na questão “a” espera-se que os estudantes identifiquem que as embalagens apresentam as mesmas alturas e as bases do cone e do cilindro possuem o mesmo diâmetro. É fundamental essa concepção para que explorem as relações existentes entre elas.

- As questões “b” e “c” não serão um problema para eles, pois já desenvolveram esse conceito de calcular o volume de cone e cilindro nos problemas anteriores.

- É provável que algumas equipes iniciem por encher o cilindro de água, por primeiro, repassando em seguida para a esfera ou cone, ou iniciem pelo cone, não importa. Conforme suas dificuldades em obter as relações, eles vão, automaticamente, buscar novas estratégias. O professor deve se conter nesse momento para não dar o caminho a ser seguido, deixando que eles desenvolvam suas próprias estratégias.

- Alguns grupos podem não conseguir dar início a equação, igualando a fórmula do volume do cilindro com a soma do volume do cone com a da esfera.

$$\pi . r^2 . h = \frac{\pi . r^2 . h}{3} + V_{esfera}$$

Nesse caso, o professor pode levá-los a esse entendimento, ligando como fizeram a comparação com a água. Normalmente, são poucos os estudantes que, ao final, observam que a altura “h” da esfera se trata do diâmetro ou duas vezes o raio da própria esfera. Essa constatação pode ser apresentada na plenária. Um erro que normalmente também ocorre é dos estudantes passarem, de imediato, o 3 multiplicando para o outro lado da igualdade.

- Explorar na plenária que é apenas o raio que define o volume e a capacidade de uma esfera. E também que, se o volume do cone é um terço do volume do cilindro, então o da esfera é de dois terços do cilindro, ou seja, que dois cones correspondem a uma esfera. Essas relações são importantíssimas para a construção do conhecimento geométrico espacial.

PROBLEMA 07 – LANÇAR UM NOVO PRODUTO NO MERCADO – Projetando uma Embalagem

- **Habilidades da BNCC**

Os problemas propostos até aqui, para o ensino da geometria espacial, estão direcionados para uma formação para a vida, demonstrando as competências e habilidades voltadas na relação do estudante com a geometria e o mundo que o cerca. Todos os problemas propostos favorecem o ensino-aprendizagem-avaliação de seus estudantes para que, de fato, eles consigam criar gosto pelo conhecimento e aprender a aprender.

> [...] é fundamental assegurar aos estudantes as competências específicas e habilidades relativas aos seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum. (BRASIL, 2018, p. 535)

A BNCC sugere, nesse sentido, que o professor planeje ações e empregue métodos para que os estudantes desenvolvam habilidades de deduzir, calcular e que também possam aplicar os conceitos adquiridos em situações cotidianas.

Buscando atingir essas habilidades, essa proposta (problema 07) traz uma situação na qual o professor poderá fazer uma leitura do que o estudante compreendeu dos conceitos de volume e capacidade até aqui, explorados nos problemas anteriores. O estudante, por sua vez, terá a oportunidade de aplicar tais conceitos, trabalhando com um problema do seu cotidiano.

- **Objetivos**

Os objetivos a serem alcançados nessa proposta de trabalho, são:

- Desenvolver o raciocínio geométrico, ampliando os seus conhecimentos, o modo de pensar e agir;

- Interpretar, compreender e determinar as dimensões de uma figura espacial a partir da capacidade dada;

- Aplicar os conceitos de volume e capacidade;

- **Considerações metodológicas e didáticas**

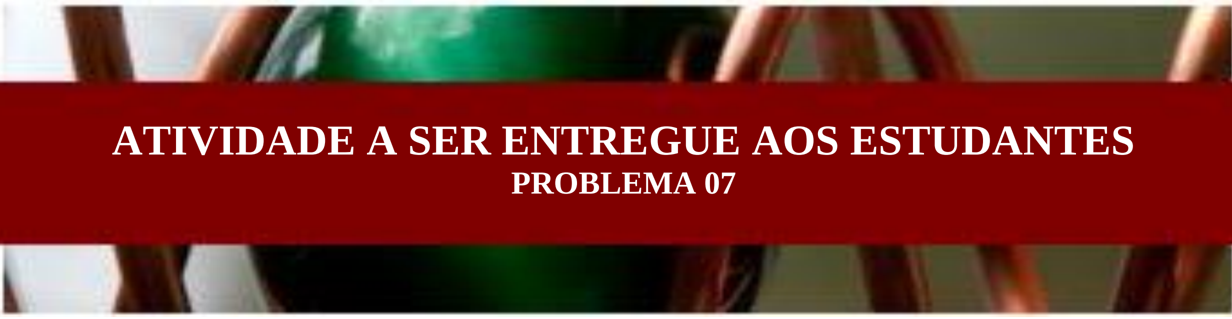
Trata-se de um problema que busca uma ação concreta dos estudantes no sentido de desenvolver e confeccionar uma embalagem para o lançamento de um novo produto no mercado. Ela deve conter medidas reais, partindo de uma medida de capacidade dada, ou seja, levar os estudantes a pensarem no sentido contrário do modo que normalmente se trabalha. Essas medidas devem satisfazer as condições especificadas no problema.

Em grupos de 2 ou 3 estudantes, eles receberão uma ficha (que pode ser por meio de sorteio) contendo três informações apenas: o produto que deverá ser armazenado, o formato da embalagem e a capacidade da mesma. Com essas informações, os estudantes devem fazer a transformação necessária (de capacidade para volume), estimar algumas medidas (altura, largura ou raio, por exemplo) e aplicar os dados na fórmula de volume adequada ao formato de sua embalagem. Após fazer os cálculos e encontrar todas as medidas necessárias, cada grupo deverá planejar a sua embalagem, desenhando sua planificação em papel cartão, com medidas reais que atendam a especificação dada.

Se propõe que eles façam a embalagem do seu produto e que, além de conter a capacidade real específica, ela seja bem decorada, atraente e mais próxima da realidade possível. Sugere-se que ela tenha um rótulo, contendo um nome para seu produto, a sua capacidade, código de barras, informações nutricionais ou cuidados, modo de usar, validade, entre outros.

Após concluírem seus trabalhos, cada grupo pode lançar seu novo produto, apresentando o mesmo aos demais colegas. Os cálculos podem ser colocados na lousa para fim de correção e conhecimento de todos.

- **Conteúdos a serem explorados na formalização**
    - O cálculo de volume;
    - O cálculo de capacidade
    - A área da região esférica;



ATIVIDADE A SER ENTREGUE AOS ESTUDANTES

PROBLEMA 07

PROBLEMA 07

Você acaba de assumir a responsabilidade de gerenciar a produção de um novo produto que será lançado no mercado, para uma empresa X. Para isso, você precisa:

- Criar um nome atraente para esse produto;

- Rascunhar a planificação da embalagem com o formato indicado em seu cartão;

- Encontrar a relação existente entre a capacidade do seu produto com o volume de sua embalagem;

- Encontrar as medidas para sua embalagem de forma que seu volume suporte à capacidade indicada;

- Desenhar a planificação em papel cartão, com as medidas reais encontradas, recortar e construir a embalagem;

- Decorar o rótulo, com as informações necessárias para sua embalagem.

Lembre-se: o sucesso de vendas de seu produto dependerá de uma embalagem de qualidade e atraente.

Mãos à obra!

FICHAS PARA SORTEIO ENTRE AS EQUIPES		
***CILINDRO** ***AZEITE DE OLIVA** ***620ml**	***PARALELEPIPEDO** ***MOLHO DE PIMENTA** ***680ml**	***CUBO** *** ACHOCOLATADO** ***729ml**
***PIRÂMIDE DE BASE TRIANGULAR** ***VINAGRE** ***820ml**	***PIRÂMIDE DE BASE QUADRADA** ***IOGURTE**	***PRISMA TRIANGULAR** *** DETERGENTE** ***400ml**
***PRISMA PENTAGONAL** *** MOLHO DE TOMATE** ***500ml**	***PRISMA HEXAGONAL** *** SUCO** ***580ml**	***CONE** *** ENERGÉTICO** *** 700ml**

DICAS:

- Para essa atividade o professor deverá pedir, com antecedência, que os estudantes se organizem para trazer para essa aula: uma folha de papel cartão, revistas velhas, régua, tesoura, cola, compasso, esquadro, canetinha e lápis de cor.
- O professor, caso preferir, pode iniciar entregando o problema acima para cada estudante, individualmente. As fichas também podem, nesse caso, ser confeccionadas de forma repetida e entregue ao estudante individualmente.

- Dessa forma, individualmente, os estudantes terão um tempo para pensar e acessar seus conhecimentos prévios para poder encontrar alguma estratégia de resolução. Após esse tempo, o professor pode perguntar como estão prosseguindo com suas ideias e então sugerir que se juntem em grupos, conforme as fichas que apresentam os mesmos dados (iguais). Assim, eles poderão trocar ideias no coletivo, onde cada estudante poderá argumentar, defender seu ponto de vista, construir o conhecimento, chegar num consenso e então planejar em conjunto um projeto adequado para a construção de sua embalagem.

- Explorar na apresentação (plenária) os diferentes aspectos utilizados nos projetos, pensando que cada grupo fez um diferente dos demais, logo, cada experiência deve ser compartilhada com os demais.

PROBLEMA 08 – OBSERVANDO A NATUREZA E O MUNDO QUE NOS CERCA

- **Habilidades da BNCC**

Essa proposta agrega estratégias que aproximam a escola do mundo real, colocando os estudantes em confronto com um problema e oportunizando-os a entrar em contato com a realidade social, cultural e produtiva em qual estão inseridos, desenvolvendo com vantagem o aprendizado investigativo e significativo.

Os estudantes, inseridos na sociedade, além de compreenderem os fatos que os cercam, desde as modificações climáticas, artigos científicos até os avanços tecnológicos, devem ter condições efetivas de propor ou participar de ações de modificação ou cooperação com o meio em que vivem. E, nesse aspecto, a proposta vem de encontro com a BNCC, quando apresenta habilidades a serem desenvolvidas aos estudantes, nesse contato com o mundo que os cercam.

Portanto, propõe-se uma tarefa, extraclasse, em que os estudantes obtenham esse enfrentamento com as adversidades que o mundo nos apresenta.

- **Objetivos**

Os objetivos a serem alcançados nessa proposta de trabalho são:

- Relacionar os conceitos matemáticos com aspectos do cotidiano.
- Desenvolver o raciocínio geométrico, ampliando os seus conhecimentos, o modo de pensar e agir;

- **Considerações metodológicas e didáticas**

Para finalizar as atividades, propõe-se aos estudantes a apresentação do vídeo[3]: “Observando a natureza e pela trilha de Arquimedes”.

Figura 8: Imagens da geometria explorada no vídeo

Fonte: *Print screen* do vídeo do Youtube

A ideia principal é amarrar tudo que foi vivenciado nas atividades anteriores, compactuando com as relações da natureza.

Com isso, de forma motivadora, o professor propõe que os estudantes busquem na natureza, nas construções, no seu dia a dia, formatos geométricos planos e espaciais que tenham alguma relação de semelhança, congruência, proporcionalidade, entre outros, e façam o seu vídeo autoexplicativo, de forma dinâmica e envolvente, os quais serão apresentados para o grande grupo.

---

3 https://www.youtube.com/watch?v=HVLzgBVqfnU.

Espera-se como resultado um vídeo composto de questionamentos, suposições, onde possam relacionar os conceitos matemáticos e suas aplicações nas diversas situações e realidades, propondo ideias. Espera-se também que seu conhecimento e seu olhar geométrico nas coisas que os cercam sejam ampliados.

- **Conteúdos a serem explorados na formalização**
    - Conceitos matemáticos;
    - Geometria plana e espacial no dia a dia.

ATIVIDADE A SER ENTREGUE AOS ESTUDANTES
PROBLEMA 08

PROBLEMA 08

Para ampliar seu conhecimento geométrico, assista o vídeo "Observando a Natureza e Pela Trilha de Arquimedes", que você pode ter acesso pelo link:

https://www.youtube.com/watch?v=HVLzgBVqfnU

Agora, após construirmos o conhecimento acerca da geometria espacial e assistirmos o vídeo, propomos que você busque ao seu redor, na natureza ou nas construções do homem, situações que você visualize a presença da geometria espacial e faça um vídeo narrado. Que, nesse vídeo, você faça levantamentos, questionamentos, suposições, que relacione com os conceitos estudados até aqui e que também possa sugerir modificações ou contribuições para o benefício comum da população ou o meio em que vive.

Edite o vídeo caso necessário.

Vamos apresentar suas descobertas aos demais colegas?

Vá fundo e bom trabalho!

DICAS:

- O ideal nessa proposta é lançar uma data de entrega do vídeo para a sua apresentação ao grande grupo.

- O tempo ideal estimado, para a produção do vídeo, é de 10 a 15 minutos, no máximo.

- Para não ocorrer dificuldades no carregamento do vídeo, sugere-se que cada estudante traga seu vídeo salvo num *pendrive* e num certo formato, tipo wmv ou mp4.

- É sempre importante reforçar aos estudantes que o vídeo deve ser criado e não copiado algo pronto da internet.

- A apresentação pode ser feita em sala, pelo projetor multimídia, com caixas de som ou no auditório, caso a escola dispunha.

- O professor pode avaliar, com nota, o desempenho do estudante ao narrar os conceitos estudados de geometria espacial, envolvidos no vídeo.

- A cada apresentação sugere-se que o professor dê espaço para comentários. Nesse momento os estudantes podem dar algumas contribuições, fazer perguntas, críticas ou levantar hipóteses.

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018) é o documento atual que norteia o conjunto de aprendizagens ao longo da Educação Básica e nela a resolução de problemas é apontada como uma forma privilegiada de atividade matemática.

O professor, por sua vez, deve compreender que a resolução de problemas vai muito além do ato de resolver problemas, podendo ser, ao mesmo tempo, objeto e estratégia de ensino. Não se trata de uma metodologia para o ensino apenas de geometria espacial, no ensino médio, mas para qualquer unidade de ensino, do ensino infantil ao ensino superior.

A BNCC deixa claro perante as diferentes redes e escolas que se pode organizar as unidades de ensino com suas próprias especificidades e demandas, mas sem fugir das ideias básicas, referentes à articulação entre os vários campos da Matemática, com vistas à construção de uma visão integrada de Matemática e aplicada à realidade. Reforça ainda que:

> [...] é fundamental assegurar aos estudantes as competências específicas e habilidades relativas aos seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum. (BRASIL, 2018, p. 535)

Mais uma vez, as intenções para o ensino convergem na formação para a vida, demonstrando competências e habilidades voltadas na relação do estudante com o mundo que o cerca. O Ensino-Aprendizagem-Avaliação Através da Resolução de Problemas é uma metodologia surpreendente e facilitadora nesse processo, no sentido do professor conseguir trabalhar com a matemática aplicada à realidade do estudante com situações de sua realidade, como defende a BNCC.

Os métodos tradicionais de ensino ainda predominam nos dias atuais e por vezes se distanciam das propostas anteriormente elencadas. Os professores necessitam de caminhos e metodologias eficazes para um direcionamento de seus trabalhos, de seus planejamentos, favorecendo o ensino-aprendizagem-avaliação de seus estudantes.

Trabalhar com essa metodologia, de início, causa certamente um desconforto, tanto por parte do professor quanto por parte dos estudantes. O professor tem a sensação que perde o controle da turma, pois o estudante possui maior autonomia~~,~~ em tentar, arriscar, trocar ideias e defender seu ponto de vista. Isso causa um certo desconforto, pois normalmente é o professor que fala e os estudantes ficam calados, ouvindo.

O estudante também sente-se desconfortável, pois normalmente é dependente do professor. Ele é acostumado a ganhar do seu professor os caminhos a serem seguidos – através de fórmulas e exemplos – e as respostas prontas – quando aponta o erro e diz como fazer. Ele pode sentir-se irritado ao ponto de dizer pro professor: “diga logo professor”, “vamos ganhar tempo, mostra como faz”, “eu não sei fazer, me ajuda” ou ainda “tá certo assim? Diz aonde está o erro”.

Esses paradigmas~~,~~ aos poucos são deixados de lado e o professor se torna um mediador que cobra, auxilia, instiga e, ao mesmo tempo, incentiva, dando autonomia ao estudante. E ele, de fato, vai se tornar independente, que arrisca~~,~~ sem medo de errar, troca ideias e constrói seu próprio conhecimento. O resultado é, de fato, muito gratificante. Todos participam igualmente, desde o estudante mais tímido, que dificilmente se manifesta nas aulas, até aquele que as vezes anda desanimado e que não faz nada.

Eles, aos poucos, conseguem criar gosto pelo conhecimento e aprendem a aprender. Observar de perto o desenvolvimento do pensamento e da construção do conhecimento de seus estudantes é muito prazeroso e gratificante. O professor que faz uso dessa metodologia em suas aulas dificilmente volta a ensinar do modo anterior, o dito ensino tradicional.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM,** Rio de Janeiro, v. 55, p.1-19, dez. 2009.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? *In*: ONUCHIC, L. R., 2014 (Org.). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio. Acesso em: 20 abr. 2020.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

CAI, J; LESTER, F. Por que o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno? In: **Boletim GEPEM**. Trad. BASTOS, A. S. A. M. e ALLEVATO, N. S. G., Rio de Janeiro, n. 60, p. 241-254, 2012.

LESTER JR, F. K. **Mathematical Problem Solving Project Technical Report I**: Documents Related to a Problem-Solving Model. Part B: Mathematical Problem Solving in the Elementary School-Some Educational and Psychological Considerations. Final Report. Bloomington: Indiana University, 1977. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED168834.pdf. Acesso em: 01 jun. 20.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C.L.B. **A Geometria nas séries iniciais**: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. 1. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2003. v. 1. 151 p.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000. 719 p.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em EducaçãoMatemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. Tradução: Paulo Henrique Colonese.

ANEXO 1 – FOLHA DE APROVAÇÃO

PROBLEMA GERADORES - GEOMETRIA ESPACIAL

Por

DIONEY LUIZ FERNANDES

Este Produto Educacional foi julgado e aprovado em sua forma final pelo orientador e demais membros da banca examinadora.

Presidente: Prof.ª Drª Janaína Poffo Possamai

Universidade Regional de Blumenau (FURB)

Prof. Dr Silvanio de Andrade

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof.ª Drª Viviane Clotilde da Silva

Universidade Regional de Blumenau (FURB)

Blumenau, 21 de setembro de 2020.