LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA E NA FORMAÇÃO INICIAL E CONTINUADA DE PROFESSORES

Daniela Mendes Vieira da Silva
Darling Domingos Arquieres
(organizadoras)

Bagai

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecária responsável: Aline Graziele Benitez CRB-1/3129

L123
1.ed.

Laboratório de ensino de matemática na educação básica e na formação inicial e continuada de professores [recurso digital] / [org.] Daniela Mendes Vieira da Silva, Darling Domingos Arquieres. – 1.ed. – Curitiba, PR: Bagai, 2020.
Recurso digital.

Formato: e-book
Requisitos do sistema: adobe digital editions
Modo de acesso: word wide web
ISBN: 978-65-87204-63-5

1. Avaliação. 2. Etnomatemática. 3. Laboratório de ensino de Matemática. 4. Materiais concretos. 5. Modelagem matemática. 6. Reflexões ensino de matemática.

CDD 510.07
10-2020/44 CDU 510

Índice para catálogo sistemático:
1. Avaliação: Laboratório de ensino de matemática
2. Etnomatemática: Modelagem matemática
3. Avaliação: Reflexões ensino de matemática

https://doi.org/10.37008/978-65-87204-63-5.20.10.20

Daniela Mendes Vieira da Silva
Darling Domingos Arquieres
(org.)

LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA E NA FORMAÇÃO INICIAL E CONTINUADA DE PROFESSORES

Bagai

Editor-Chefe Cleber Bianchessi

Revisão Os autores

Projeto Gráfico Jhonny Alves dos Reis

Fotografia Daniela Mendes Vieira da Silva

APRESENTAÇÃO

Este livro traz reflexões acerca do papel do Laboratório de Ensino de Matemática em diferentes situações.

O capítulo LABEM: CONTRIBUIÇÕES PARA FORMAÇÃO INICIAL E CONTINUADA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA apresenta o Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM) como uma referência para a formação inicial dos professores de Matemática, para o desenvolvimento de ações que articulem ensino, pesquisa e extensão, para propiciar a integração entre os licenciandos do IFRJ Nilópolis com as unidades escolares do entorno do campus oportunizando a reflexão sobre o processo de ensino aprendizagem de Matemática. O capítulo apresenta: a estrutura física do LabEM, o seu histórico, as ações de seu laboratório itinerante, sua organização de eventos, seus projetos e iniciação científica e extensão e suas ações atuais e futuras.

O capítulo A MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA ESTRATÉGIA METODOLÓGICA PARA O ENSINO discute e apresenta a Modelagem Matemática para o ensino desta disciplina. O capítulo está dividido em três seções: A primeira seção aborda a Modelagem Matemática Aplicada fazendo uma abordagem histórica desde a sua origem até a sua atual situação no Brasil. A segunda seção aborda a Modelagem na Educação Matemática, retratando desde o seu surgimento no Brasil até o contexto atual, assim como faz um levantamento dos principais grupos de estudo e pesquisa de teóricos nacionais e internacionais que contribuíram para a fundamentação desta tendência. A terceira seção é dedicada à discussão acerca de uma aula com uma proposta de ensino utilizando a Modelagem Matemática.

O capítulo O QUE DIZEM E PENSAM ESTUDANTES DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE O QUE É O NÚMERO E PARA QUE SERVEM traz uma discussão acerca da percepção de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental acerca dos números. O texto apresenta uma pesquisa experimental com o tema "números, o que são e para que servem?" por meio de uma abordagem investigativa e experimental. Ele também apresenta a coleta e análise dos dados que foram feitas a partir de registros individuais de alunos elaborados por meio de uma tarefa aplicada. O texto apresenta como conclusão que os números, para os estudantes consultados, servem para contar e medir, aparecendo fortemente em situações escolares.

O capítulo O LABORATÓRIO DE ENSINO EM MATEMÁTICA E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES NO MARAJÓ DAS FLORESTAS traz uma discussão acerca do trabalho desenvolvido no Laboratório de Ensino de Matemática do campus universitário Marajó da Universidade Federal do Pará (UFPA) tanto na licenciatura em Matemática quanto na formação continuada de professores do arquipélago de Marajó dentro de um enfoque interdisciplinar envolvendo ensino pesquisa e extensão. O texto apresenta o Laboratório de Ensino de Matemática Amazônida Marajoara (LEMAM) como espaço de formação docente e traz algumas ações do LEMAM dentro desta perspectiva.

O capítulo TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA apresenta um relato de experiência envolvendo o uso de materiais concretos de baixo custo para a aprendizagem de trigonometria na circunferência. O capítulo apresenta as atividades propostas a estudantes da rede estadual do Rio de Janeiro, discute a análise de regularidades com estes estudantes e traz considerações acerca desta análise.

O capítulo INVESTIGANDO A CONEXÃO ENTRE A UTILIZAÇÃO DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA E A AVALIAÇÃO traz uma fundamentação teórica acerca do Laboratório de Ensino de Matemática, discute a avaliação no Laboratório de Ensino de Matemática. Apresenta uma investigação realizada com grupos de professores que ensinam Matemática sobre o seu perfil e práticas de avaliação. O capítulo é fechado com os resultados e com as considerações finais acerca da análise dos dados coletados.

O capítulo IDEIAS MATEMÁTICAS PRESENTES NAS MANIFESTAÇÕES ARTÍSTICAS DAS MÁSCARAS AFRICANAS: UMA CONCEPÇÃO AFROETNOMATEMÁTICA PARA A PRÁTICA DOCENTE norteia numa leitura fundamentada em Etnomatemática e BNCC no tange as contribuições multiculturais ao processo ensino e aprendizagem de matemática. Expõe uma atividade prática no ensino de matemática a partir da produção de máscaras africanas feitas por alunos do 9º do ensino fundamental da rede pública. O capítulo é finalizado com a apresentação de ponderações dessa prática docente.

O capítulo A SIMETRIA DE ROTAÇÃO E REFLEXÃO: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 4º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL baseia-se na relação entre o Laboratório de Ensino de Matemática e o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico. Esse capítulo apresenta atividades referentes às simetrias de rotação e reflexão que foram feitas com alunos do 4º ano do ensino fundamental, usando a metodologia de ensinar a matemática por exploração e investigação com intenção de levar os alunos a descobrir regras e procedimentos matemáticos, além de compreender suas relações. Por fim, os autores relatam suas considerações dessa aplicação.

O capítulo O USO DE JOGOS AFRICANOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM BREVE RELATO DA EXPERIÊNCIA NO PROGRAMA DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA (PIBID) respalda-se em Etnomatemática como ferramenta para que os alunos possam compreender o mundo e a valorizar o contexto sociocultural de diferentes povos. Os autores apresentam os jogos africanos *Shisima* e *Mancala* como possibilidades de aplicação da lei em sala de aula, utilizando materiais recicláveis, a fim de abordar conceitos da geometria e lógica matemática. Ao longo do capítulo são apresentadas uma sequência didática aplicada a alunos do 6º ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública e reflexões dos autores dessa prática pedagógica.

O capítulo AMBIENTES DIGITAIS DE APRENDIZAGEM: POSSIBILIDADES E DESAFIOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA aborda os Ambientes Digitais de Aprendizagem, especificamente *Classroom, Instagram* e *YouTube* como ambientes de aprendizagem que atendem as necessidades docentes para o ensino de matemática. Os autores apresentam suas experiências e suas ponderações ao usar esses ambientes digitais em suas aulas.

No capítulo ANÁLISE DE UMA TAREFA DE ÁLGEBRA APLICADA A FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA baseado na proposta de Nardi, Biza e Zachariades (2012; 2014), os autores analisam e classificam os argumentos feitos por um grupo de graduandos em Matemática sobre respostas de alunos fictícios numa tarefa que aborda a inequação do segundo grau. Na análise, os autores observam a crença e os valores que esse grupo de graduandos expressam em relação à matemática. Esse capítulo disserta sobre os sujeitos, a tarefa, a metodologia e análise decorrida nesse estudo.

O capítulo VAMOS MANIPULAR QUADRADINHOS? UMA PROPOSTA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO fundamentado em Laboratório de Ensino de Matemática de Lorenzato (2002) no que se refere a Material Didático Manipulável, os autores apresentam uma proposta com o uso de "Quadradinhos de EVA" e uma sequência didática que envolve o conhecimento do material didático, o pensamento algébrico, sequência de números naturais ímpares consecutivos a partir de representações geométricas e princípio da indução finita. Esse texto contempla o passo a passo da proposta e as considerações dos autores.

SUMÁRIO

LABEM: CONTRIBUIÇÕES PARA FORMAÇÃO INICIAL E CONTINUADA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

Aline Mendes Penteado Farves[1]
José Carlos Gonçalves Gaspar[2]
Marcelo Silva Bastos[3]

INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática ao longo de muito tempo foi marcado por práticas que priorizavam a formalização precoce de conceitos, a excessiva preocupação com o treino de habilidades e a mecanização de processos sem compreensão por parte dos alunos. No entanto discussões no campo da Educação Matemática trouxeram contribuições que apontam para a necessidade de adequar o trabalho docente às diferentes abordagens metodológicas que podem levar a melhores formas de se ensinar e aprender Matemática que priorizem o desenvolvimento da autonomia e do pensar crítico do indivíduo.

Nesse contexto, se faz necessário pensar em uma formação de professor que promova tensionamentos em relação ao modelo de escola que temos vivenciado em algumas realidades e que possibilite ao licenciando em Matemática construir um outro olhar em relação à Matemática escolar, pois segundo Fiorentini e Oliveira (2013) "a matemática também precisa ser compreendida em sua relação com o mundo, enquanto instrumento de leitura e compreensão da realidade e de intervenção social, o que implica uma análise crítica desse conhecimento" (2013, p. 925).

---

[1] Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual de São Paulo (Unesp, Rio Claro).
Aluna do Programa de Doutorado da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professora do Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ).

[2] Mestre em Ensino de Ciências pela Universidade do Grande Rio. Professor do Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ).

[3] Mestre em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ). Professor do Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ).

Portanto defendemos a importância de se pensar o ensino de Matemática de uma perspectiva em que seja oportunizado ao aluno “o seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor” (MORAN, 2018, p. 3).

Assim, o laboratório de ensino de Matemática se configura num espaço em que os futuros professores tenham a oportunidade de refletir sobre sua prática por meio da experimentação de materiais, do uso de diferentes metodologias e dos resultados de pesquisas em Educação Matemática, pois de acordo com Turrioni e Perez (2006) o laboratório de ensino de Matemática constitui-se em um:

> [...] ambiente que funciona como um centro de discussão e desenvolvimento de novos conhecimentos dentro do curso de licenciatura em matemática, contribuindo tanto para o desenvolvimento profissional dos futuros professores como para a sua iniciação em atividades de pesquisa. (p. 62).

A vivência dos autores do presente trabalho com as atividades desenvolvidas no âmbito de um Laboratório de Ensino de instituições públicas de ensino superior em cursos de licenciatura em Matemática e no curso de especialização para professores de Matemática influenciou na proposta das ações a serem desenvolvidas no laboratório de ensino de Matemática (LabEM) de uma instituição federal de ensino localizada na Baixada Fluminense - estado do Rio de Janeiro. Apoiados nos trabalhos desenvolvidos por Kaleff (2006), Lorenzato (2006) e Turrioni (2004), acreditamos que experiências na formação inicial contribuem para que, por meio da experimentação de atividades e reflexão sobre elas, promovam uma ressignificação das práticas que podem ser desenvolvidas nas aulas de Matemática.

Nessa perspectiva o Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM) tem sido utilizado, desde o segundo semestre de 2016, pelos licenciandos em Matemática do Instituto Federal do Rio de Janeiro, campus Nilópolis, como espaço de pesquisa de novas metodologias para serem testadas nos estágios, nos trabalhos de conclusão de curso, nos projetos de iniciação científica, nos projetos de extensão e como apoio para atividades das disciplinas relacionadas ao ensino de Matemática.

Assim, esse espaço tem três finalidades principais: (1) contribuir com a formação inicial dos licenciandos em Matemática; (2) desenvolver ações que articulam ensino, pesquisa e extensão; (3) propiciar a integração dos licenciandos em Matemática com as unidades escolares do entorno do campus, possibilitando a oportunidade de refletir sobre o ensinar e aprender Matemática na educação básica.

Atualmente o laboratório conta com um espaço, conforme a Figura 1, equipado com 6 computadores, acervo com cerca de 630 volumes com títulos na área de Matemática e Ensino de Matemática, além de recursos didáticos para uso dos estudantes da licenciatura em Matemática e professores do ensino médio e licenciatura em Matemática do campus.

Figura 1 - LabEM

Fonte: Acervo LabEM.

Numa perspectiva de um laboratório de ensino que em suas ações tem buscado reforçar “[...] a importância dos métodos ativos de aprendizagem, o significado dos sentidos para a aprendizagem, o respeito às diferenças individuais [...]” (LORENZATO, 2006, p. 10), foram desenvolvidas atividades com a finalidade de contribuir com um ensino de Matemática que atenda a uma aprendizagem que garanta uma construção de conceitos de forma ativa pelo aluno rompendo assim com o que tradicionalmente é feito seguindo a sequência “definição → exemplos → exercícios de aplicação”, o que não contribui para uma formação que atenda às necessidades da sociedade atual.

A seguir apresentamos um histórico do que já foi realizado nesse laboratório, assim como as ações futuras previstas para esse espaço tão importante.

HISTÓRICO

O laboratório iniciou como Laboratório de Metodologias de Ensino de Ciências e Matemática (Labmet), com origem na aprovação do projeto de implantação do Laboratório de metodologias de ensino de ciências e matemática, submetido ao Prodocência 2008. O objetivo do Labmet foi dar suporte didático aos cursos de licenciaturas em Física, Química e Matemática. Diante das experiências acumuladas com as propostas que foram desenvolvidas pelo Labmet e das demandas específicas das disciplinas da licenciatura em Matemática (Matemática em Sala de Aula I, II, III, IV e Metodologia do Ensino de Matemática), em 2016 foi criado o Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM), incorporando parte das atividades do Labmet e atividades de cunho específico dos processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Inicialmente o laboratório vinha sendo utilizado em uma perspectiva de laboratório como espaço para realização de atividades com uso de recursos didáticos, mas a partir das ações que vem buscando integrar o ensino, a pesquisa e a extensão temos percebido que o LabEM ganhou uma outra dimensão que se aproxima do que Lorenzato (2006) entende por “um espaço para facilitar tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender" (p. 7). Sendo assim, o uso que tem sido feito desse espaço tem possibilitado que as atividades propostas contribuam para problematizar os desafios envolvidos no ensino e na aprendizagem de conceitos matemáticos de modo a se pensar em caminhos que ajudem a superar algumas práticas ainda muito cristalizadas nas aulas de Matemática.

Desde a sua criação o LabEM tem dado apoio aos alunos do curso de licenciatura em Matemática por meio de ações de ensino, pesquisa e extensão. As atividades de pesquisa têm ocorrido por meio de projetos ligados ao programa interno Prociência com a presença de alunos do curso de licenciatura em Matemática, sendo alguns com bolsa. Ainda no campo da pesquisa vale ressaltar o papel de apoio que o laboratório fornece aos alunos no desenvolvimento do Trabalho Conclusão de Curso (TCC), seja no apoio bibliográfico com o acervo que possui, seja pelos materiais que são cedidos para execução das atividades de aplicação dos seus projetos de pesquisa.

O desenvolvimento da extensão é outra ação muito presente no laboratório, seja no desenvolvimento de projetos com fomento da COEx , seja em ações em parceria com outras instituições.

O foco no ensino ocorre no apoio de pelo menos dez disciplinas do curso de licenciatura em Matemática, seja quando a aula ocorre dentro do laboratório com uso dos materiais que lá se encontram, seja no suporte com material didático que é disponibilizado para que os alunos realizem os trabalhos dessas disciplinas.

Por fim, o LabEM tem dado suporte na organização de diversos eventos internos, possibilitando aos alunos o contato com diversos especialistas da Educação Matemática.

Com o objetivo de fazer um intercâmbio entre professores, pesquisadores e licenciandos ligados a instituições educacionais federais, estaduais e municipais em um ambiente de troca de saberes, levando a Educação Matemática a regiões periféricas da região metropolitana do Rio de Janeiro, já foram organizadas algumas ações, que serão listadas a seguir.

LABORATÓRIO ITINERANTE

O laboratório itinerante é uma ação do LabEM que iniciou em parceria com PIBID e tem por objetivo levar aos alunos de escolas públicas do entorno do campus, metodologias norteadas pelas tendências em Educação Matemática que auxiliem na aprendizagem de conceitos matemáticos. Ações do laboratório itinerante acontecem desde 2018 e têm contribuído para o estímulo à prática da pesquisa para alunos do curso de licenciatura em Matemática da instituição, além de auxiliar os estudantes a superarem algumas dificuldades que surgem durante a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

No momento, o laboratório tem realizado parcerias com algumas escolas da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro que se localizam nos municípios de Mesquita e Nilópolis. As atividades realizadas com os alunos das escolas envolvidas, exploram tanto conceitos matemáticos de forma interdisciplinar, como também jogos e sequências de ensino com uso de materiais manipulativos industrializados ou construídos com material de baixo custo.

A aplicação dessa metodologia tem contribuído para aproximar o licenciando da realidade que vai atuar, pois em muitas realidades a escola não dispõe de recursos didáticos que possibilitem uma construção significativa de conceitos matemáticos. Nesse sentido, o uso desses recursos a partir de materiais de baixo custo, pode contribuir para que os futuros professores sejam instrumentalizados quanto à construção de materiais que atendam às diferentes necessidades dos alunos quanto à aprendizagem da Matemática.

ORGANIZAÇÃO DE EVENTOS

A partir de uma ação do LabEM realizada em junho de 2016 em uma escola da rede estadual localizada no município de Mesquita-Baixada Fluminense que sedia um polo do Laboratório Sustentável de Matemática (LSM), estabeleceu-se uma parceria que culminou na realização do *I Colóquio de Educação Matemática da Baixada Fluminense* (Cedumat), que foi realizado em outubro de 2016, sediado no IFRJ – Campus Nilópolis –, com o tema "*Formação Docente em Rede: Caminhos e Possibilidades*". Os laboratórios citados procuram desenvolver essa atividade como forma de contemplar uma concepção de ensino mais ampla por meio de debates e trocas de experiências com o objetivo de trazer à comunidade da Baixada Fluminense as tendências do ensino na Educação Matemática, gerando benefícios aos participantes em geral e em particular aos alunos do curso de licenciatura em Matemática da instituição.

Na Figura 2 temos a mesa de abertura do I Cedumat, realizada pelo professor José Carlos coordenador do LabEM na ocasião, junto à professora Daniela Mendes coordenadora do LSM; também compuseram a mesa o coordenador do curso de licenciatura em Matemática, professor Edgar Chipanna, e o diretor geral do campus, professor Wallace Valory.

Figura 2 - Mesa de Abertura do I Cedumat

Fonte: Acervo do LabEM.

A programação contou com a palestra de abertura do professor Victor Giraldo da UFRJ, mesa redonda com a participação dos professores Marco Aurélio Kistemann Jr. (UFJF), Paulo Jorge (UFF-CPII) e Rafael Novoa (IFRJ), além de oficinas, realizadas por educadores matemáticos de instituições tais como UFF, Seeduc-RJ, Uerj, UFRRJ, UFRJ, Iserj, Colégio Pedro II e o próprio IFRJ.

No ano seguinte foi dado continuidade ao evento com o II Cedumat com o tema *"Contribuições da Educação Matemática no Contexto da Educação Inclusiva"*, e no mesmo ano o LabEM participou da organização do II EnFLic (Encontro Fluminense das Licenciaturas em Ciências e Matemática). Desde então, tornou-se parte das ações regulares do laboratório a organização e o apoio a diversos eventos, como a XXIII Sematec (Semana da Tecnologia) do IFRJ em comemoração ao biênio da Matemática (2018), I Semana da Matemática do IFRJ/Nilópolis (2019) e Encontros de Educação Matemática on-line do IFRJ – Nilópolis (2020).

Além da organização, o LabEM se fez presente em diversos eventos nacionais com a apresentação de oficinas e relatos experiência a respeito dos projetos nele desenvolvidos, dentre eles vamos destacar: I Jornada de Educação Matemática – Ciep 111 – Gelson Freitas (2016), II Jornada de Educação Matemática – Ciep 111 – Gelson Freitas (2017), Festival da Matemática do Colégio Pedro II (2017), I Jiex (Jornada Interna de Extensão da Proex – 2017), com o trabalho intitulado "*Matemática e meio ambiente: uma relação possível?*", que recebeu a premiação referente à terceira colocação na modalidade pôster, XII JIT (Jornada de Iniciação Científica do IFRJ – 2018), XIII Enem (Encontro Nacional de Educação Matemática – 2019), VI Shiam (Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática – 2019), Mesquita Respira Matemática (2019) e na XIII JIT (2019).

PROJETOS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E EXTENSÃO

Por entendermos que o LabEM é um espaço que estimula a iniciação à pesquisa na formação inicial do professor, foram desenvolvidos os seguintes Projetos de Iniciação Científica: "Matemática e Meio Ambiente", "Laboratório de ensino de matemática no IFRJ campus Nilópolis: desenvolvendo uma identidade" e "Laboratório de ensino: uma realidade no IFRJ – Campus Nilópolis".

A partir de uma atividade de um projeto de intervenção desenvolvido na disciplina de estágio supervisionado, no ano de 2017, foi desenvolvido o projeto "Matemática e Meio Ambiente", que teve por objetivo explorar a função exponencial e logarítmica por meio de atividades, que exploravam o tema Meio Ambiente. Esse projeto serviu de inspiração para se pensar em propostas de reformulação da disciplina Matemática Aplicada que é oferecida no 6.º período do curso de Controle Ambiental, modalidade ensino médio técnico integrado, de modo a articular alguns tópicos da Matemática do ensino médio a temas relacionados a Meio Ambiente.

O projeto "Laboratório de ensino de matemática no IFRJ campus Nilópolis: desenvolvendo uma identidade" foi desenvolvido no ano de 2017 e teve por objetivo catalogar e organizar o acervo já existente no Laboratório de Ensino de Matemática, além de elaborar projetos de ensino que envolvam a construção de materiais de baixo custo para serem desenvolvidos como atividades complementares em estágio supervisionado. Esse projeto possibilitou a ampliação do acervo do laboratório no que se refere aos recursos didáticos industrializados e ao mobiliário adquirido para o espaço.

No período de 2018 a 2019, foi aprovado no edital interno da instituição o projeto de iniciação científica denominado "Laboratório de ensino: Uma realidade no IFRJ – Campus Nilópolis". Esse projeto foi realizado em parceria com uma docente da área de Matemática de uma escola da rede estadual de ensino da Cidade do Rio de Janeiro localizada na Baixada Fluminense. Durante esse período foram produzidas atividades introdutórias ao estudo de poliedros para serem trabalhadas em algumas turmas de ensino médio regular da unidade escolar participante do projeto.

De 2018 a 2019 foi desenvolvido o Projeto de Extensão "Núcleo de Prática de Educação Matemática Cidadã" (Nupemci), que teve como uma de suas ações a construção e aplicação de jogos matemáticos em uma turma de 9.º ano de uma escola da rede estadual localizada no município de Nilópolis. Durante esse período foram utilizados jogos que abordavam conceitos relacionados às unidades temáticas de grandezas e medidas, números e álgebra, segundo as orientações da Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2017). As atividades propostas possibilitaram aos alunos olhar a Matemática escolar de uma outra perspectiva que auxiliou de forma significativa as ações do professor em sala de aula.

Acreditamos que as atividades realizadas nas oficinas ou nos projetos têm contribuído para os alunos atendidos nas escolas apresentarem uma relação positiva com os conceitos matemáticos propostos em sala de aula, o que de certo modo possibilita aos licenciandos refletirem sobre algumas práticas desenvolvidas no ensino de Matemática. Um outro aspecto a ser considerado é o estímulo à prática da pesquisa para alunos do curso de licenciatura por meio do desenvolvimento de estratégias e/ou recursos didáticos que visam à melhoria do ensino-aprendizagem da Matemática na educação básica, o que tem contribuído de modo significativo para a formação inicial dos futuros professores.

AÇÕES ATUAIS/FUTURAS

Atualmente as ações desenvolvidas no LabEM envolvem os seguintes projetos:

- Encontros de Educação Matemática on-line é um projeto de extensão que tem por objetivo realizar mensalmente palestras em formato de lives com transmissão no canal do LabEM no YouTube, onde pesquisadores convidados discutem temáticas relacionadas ao ensino de Matemática;
- LabEM Itinerante, agora com fomento da COEx, está em andamento de forma adaptada para o formato on-line, por conta da epidemia do coronavírus. Dentre as ações em andamento haverá a oficina “Despertando para Educação Financeira: uma introdução gamificada” na XXV Sematec (2020);
- Projeto Ciência na Escola, em parceria com a Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), pretende realizar ações em escolas consideradas MBF, a fim de promover melhoria na qualidade de ensino dessas escolas a partir de ações com materiais de baixo custo, criando nesses espaços pequenos laboratórios que auxiliem o aprendizado dos alunos.

CONCLUSÃO

Neste breve relato destacamos algumas ações de um laboratório de ensino, que ao longo desses quatro anos buscou aproximar futuros professores de Matemática com a realidade da escola básica. Essa aproximação por meio das ações apresentadas aqui mostra a importância na formação inicial com experiências que possam promover o encontro da instituição de formação com a escola. Assim, acreditamos que o uso do laboratório de ensino de Matemática voltado para a formação inicial de professores deve ser "um agente dentro da instituição formadora" (TURRIONI, 2004, p. 63).

Com esse espaço, foi possível oportunizar experiências diversas como participação e organização de eventos e de oficinas, participação em projetos de iniciação científica e projetos de extensão, todos com a finalidade de contribuir para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da matemática na escola básica. Essas experiências têm impactos diretos na formação inicial de professores de matemática e também na atuação futura desses professores na sala de aula da educação básica e por isso, espaços como esses são cada vez mais necessários em cursos de formação de professores. Além disso, uma das metas para esse espaço é investir mais na formação continuada de professores do entorno do campus do IFRJ.

Por fim tivemos a alegria da cessão de um novo espaço dentro do nosso Campus, que possui cerca de 100 m^2 para sediar o LabEM, junto a um novo laboratório denominado Laboratório de Novas Tecnologias para o Ensino de Matemática e Aplicações Computacionais (Lantemac) que terá foco no uso de tecnologias. Esses dois laboratórios vão funcionar de forma integrada dando apoio ao curso de licenciatura em Matemática e ao futuro curso de especialização em Ensino de Matemática, que está com previsão da primeira turma para o ano de 2021.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministérios da Educação e do Desporto. Secretaria de educação fundamental. **Base Nacional Comum Curricular**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2017.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. de C. C. **O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?**. Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 27, n. 47, p. 917-938, 2013.

KALEFF, A. M. M. R. Do fazer concreto ao desenho em geometria: ações e atividades desenvolvidas no laboratório de ensino de geometria da Universidade Federal Fluminense. *In*: LORENZATO, S. (ed.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006, p. 113-134.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. *In*: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

MORAN, J. Metodologias ativas para aprendizagem mais profunda. In: BACICH, L.; MORAN, J. (org.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora**. Porto Alegre: Penso, 2018, p. 1-16.

RÊGO, R. M.; RÊGO, R. G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. *In*: LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. p. 39-56.

TURRIONI, A. M. S. **O laboratório de educação matemática na formação inicial de professores**. Dissertação (Mestrado) – UNESP, Rio Claro, 2004.

TURRIONI, A. M. S.; PEREZ, G. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. *In*: LORENZATO, S. (org.). **O Laboratório de Ensino de matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção formação de professores).

A MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA ESTRATÉGIA METODOLÓGICA PARA O ENSINO

Rogerio dos Santos Carneiro[4]
Raylson dos Santos Carneiro[5]
Kattia Ferreira da Silva[6]

INTRODUÇÃO

Atualmente na sociedade brasileira são evidentes as dificuldades de jovens e adultos em torno da compreensão dos conceitos matemáticos. Além de serem muito altos os níveis de reprovação nas escolas, ainda é muito grande o grau de rejeição da Matemática pela população em geral.

A Modelagem Matemática surge no contexto descrito anteriormente como uma possibilidade de aplicação de uma metodologia diferente de ensino para os professores, de modo que eles possam realizar aulas distintas das realizadas comumente (Método Tradicional). Segundo Burak (2004), ela objetiva maior participação dos alunos no decorrer das aulas, mostrando a eles diversas aplicações usuais dos conceitos matemáticos em seu cotidiano, para que assim os jovens possam ter um melhor aprendizado e assim acabe esse mito de que a Matemática é para poucos, pois a maioria a classifica como algo “Incompreensível” por assim dizer.

> A Modelagem Matemática é uma metodologia alternativa para o ensino da Matemática explorada para tentar esclarecer estas dúvidas, ou seja, tem o objetivo de interpretar e compreender os

---

[4] Doutorando em Educação em Ciências e Matemática (PPGECEM / REAMEC / UFMT). Professor da Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Tocantins (UFT), campus de Araguaína.

[5] Mestre em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT / UFT). Professor da Engenharia Florestal, Universidade Federal do Tocantins (UFT), campus de Gurupi.

[6] Mestre em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT / UFT). Professora efetiva da Universidade de Gurupi - UNIRG, campus de Gurupi.

> mais diversos fenômenos do nosso cotidiano; e se trabalhada de maneira criativa, motivadora e eficaz, ela pode proporcionar diversos benefícios, como por exemplo, motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para futuras profissões, desenvolvimento do raciocínio, desenvolvimento do aluno como cidadão crítico, compreensão do papel sócio-cultural da Matemática tornando-a mais importante e agradável (SILVA, 2013, p. 12).

O desenvolvimento deste trabalho está dividido em três seções. A primeira aborda a Modelagem na Matemática Aplicada, onde será apresentada uma abordagem mais histórica contendo aspectos desde a sua origem até o contexto atual dessa tendência no Brasil. O segundo momento concernirá em retratar de forma sucinta algumas das principais pesquisas desenvolvidas e um levantamento dos principais grupos de estudo e pesquisa (em nível nacional e internacional) famosos que contribuíram não só para a formulação da fundamentação dessa tendência, como para a sua consolidação, uma vez já fundamentada – este segundo se refere a trabalhos realizados –, além dos aspectos metodológicos e práticos relacionados a essa tendência.

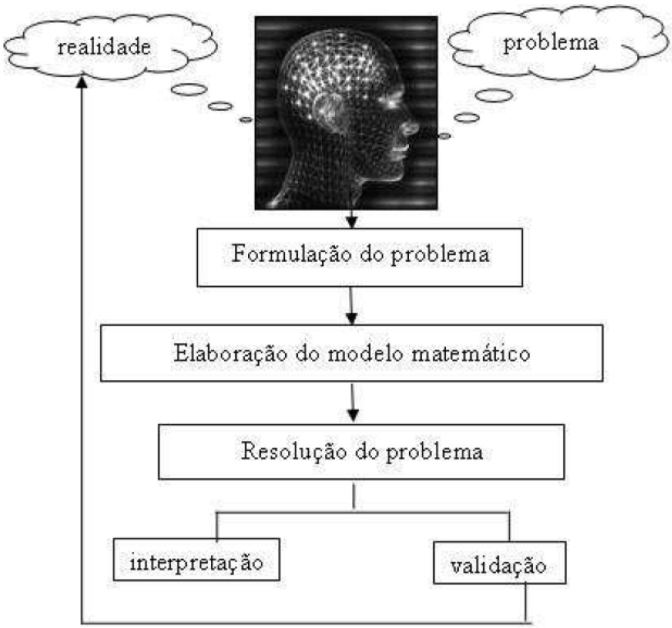
A segunda seção aborda a Modelagem na Educação Matemática, retratando desde o seu surgimento no Brasil até seu contexto atual, a exemplo da primeira; em um segundo momento também serão apresentados algumas das principais pesquisas desenvolvidas e um levantamento dos principais grupos de estudos e pesquisas (em nível nacional e internacional) de teóricos que contribuíram e que ainda contribuem para a fundamentação dessa tendência, pelo fato de a "Educação Matemática" ser uma área ainda emergente no cenário nacional e, sendo assim, ainda não está totalmente consolidada na questão de fundamentação teórica.

E a terceira seção expõe desde como se deu a realização até os comentários sobre resultados dos debates, que ocorreram no decorrer da aplicação de uma aula com proposta de ensino utilizando a tendência Modelagem Matemática.

CONCEITO E CONTEXTO HISTÓRICO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem é um método no qual utilizamos a matemática (abstrata) para tentar criar um modelo de solução para um problema real, ou seja, traduzir para a linguagem matemática um problema do cotidiano, uma vez que feita essa transição procura criar um modelo que por sua vez irá resolver tal situação, sem que seja necessário, por exemplo, algum tipo de investimento por parte do governo em experimentos que geram resultados apenas pelo método de tentativa e erro para com a sociedade, que causam um enorme desperdício de tempo e dinheiro (BARBOSA, 2003). Mas que por meio da modelagem, o tempo e o dinheiro investidos podem ser otimizados, já que é um processo que não requer altos investimentos por ser realizado em laboratório, e as chances de que ocorra uma falha são bem menores em relação ao processo anterior (tentativa e erro).

Figura 3 - Processo de modelagem



Fonte: Costa (2009, p. 119)

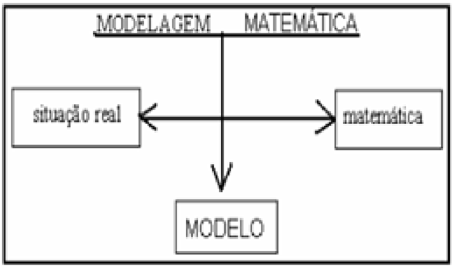
A Figura 1 apresenta um fluxograma de como é realizado o processo de Modelagem Matemática de um determinado problema. Segundo Sodré (2007, p. 4),

> Um modelo matemático consiste de um conjunto de equações que representam de uma forma quantitativa, as hipóteses que foram usadas na construção do modelo, as quais se apoiam sobre o sistema real. Tais equações são resolvidas em função de alguns valores conhecidos ou previstos pelo modelo real e podem ser testadas através da comparação com os dados conhecidos ou previstos com as medidas realizadas no mundo real.

A Modelagem em si surgiu desde os primórdios, em uma época que sequer existiam os números, na qual os povos utilizavam as noções básicas dela para resolver questões do dia a dia, e veio se desenvolvendo com o passar do tempo juntamente à sociedade humana. A Figura 2 expõe um esquema proposto para matemática e realidade. Segundo Biembengut (2009, p. 8), “a modelagem é tão antiga quanto a própria matemática, surgindo de aplicações nas rotinas diárias de povos antigos”.

Com o passar do tempo, surgia no homem a necessidade de controlar seus objetos e animais, para isso ele associava seu rebanho a pequenas pedras, uma para cada animal, assim se estabelecia uma relação de dependência entre as pedras e os animais; esse processo contribuiu para a criação da contagem. Esse foi o primeiro modelo utilizado pelo homem para quantificar o mundo no qual ele vivia.

Figura 4 - Esquema proposto para matemática e realidade



Fonte: Biembengut e Hein (2005)

À medida que a sociedade se desenvolvia, as situações as quais a civilização enfrentava se tornavam cada vez mais complexas, exigindo assim soluções cada vez mais difíceis, foi então que no século XV foi exposto o método cientifico, pelo Italiano Galileu. Método esse que consistia em cinco elementos: observação, idealização, experimentação, validação e reavaliação do modelo.

A conceituação do termo Modelagem Matemática na Educação é mais atual, sendo debatida no cenário Internacional, em especial, na década de 1960, com um movimento chamado "utilitarista", definido como aplicação prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade, que impulsionou a formação de grupos de pesquisadores sobre o tema, como, por exemplo: *Lausanne Symposium*, em 1968, na Suíça, e o Grupo Internacional de Modelagem Matemática e Aplicações – ICTMA – filiado ao ICMI. Alguns desses movimentos educacionais pela Modelagem Matemática na educação influenciaram o Brasil praticamente ao mesmo tempo, com a colaboração dos professores, representantes brasileiros na comunidade internacional de Educação Matemática. A Modelagem Matemática na educação brasileira tem como referência singulares pessoas, fundamentais no impulso e na consolidação da modelagem na Educação Matemática, tais como: Aristides C. Barreto, Ubiratan D' Ambrosio, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani, que iniciaram um movimento pela modelagem no final dos anos 1970 e início dos anos 1980, conquistando adeptos por todo o Brasil (BIEMBENGUT, 2009).

Segundo Tambarussi (2014), a Modelagem surgiu no Brasil em meados dos anos 60, mas só no final dos anos 80 (mais precisamente 1987) foi desenvolvido o primeiro trabalho voltado à área da Modelagem Matemática na Educação (dissertação de mestrado). Feito esse ocorrido na Universidade Estadual de São Paulo, Unesp, Rio Claro, pelo pesquisador e professor doutor Dionísio Burak.

Segundo dados retirados de Biembengut (2009), em relação a Produções de Modelagem na Educação Brasileira, havia no Brasil:

> Pelos sítios virtuais, identificamos até abril de 2009: *trabalhos de conclusão de Curso*: 15 teses de doutorado, 88 dissertações de mestrado, 105 monografias de pós-graduação *lato sensu,* 31 de conclusão de Curso – TCC, 49 de Iniciação Científica; e *artigos*: 82 em revistas e 754 em anais nos Eventos (ENEMs, II CIBEM, XI CIAEM, CNMEM). Ainda não foram identificados os artigos publicados nos mais diversos eventos de Educação Matemática que ocorrem no Brasil. Há também 12 artigos como capítulos de livros e 4 livros específicos de Modelagem Matemática no Ensino: de Rodney C. Bassanezi, publicado em 2002 (BIEMBENGUT, 2009, p. 13).

Vale destacar que nos dados anteriores citados, foram descartados os milhares de trabalhos orientados por professores em suas disciplinas de modelagem em cursos de graduação ou na educação básica.

PESQUISAS E AS PROPOSTAS METODOLÓGICAS COM O USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

As pesquisas sobre a Modelagem Matemática realizadas tanto no ambiente educacional nacional quanto internacional, no ano de 2003, mostram que os principais pontos foram trabalhados por intermédio de mapeamentos que partiram de ações por meio de produções escritas, como monografias, dissertações, teses e artigos científicos, baseadas em referenciais teóricos dos principais pesquisadores da Modelagem Matemática e também a partir de experimentos das situações reais criando modelos matemáticos.

Desses trabalhos foram analisadas as seguintes informações: o ano de pesquisa, qual temática, o público-alvo, a metodologia e os referenciais teóricos. Com base nesses dados identificaremos os tipos de pesquisa referentes à Modelagem Matemática.

> Atualmente, o número de pesquisas e relatos de experiências em sala de aula apresentados em eventos de Educação Matemática e na Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (que se realiza bi-anualmente desde 1999) tem

> aumentado de forma significativa; assim como os professores interessados por cursos (extensão e pós-graduação) e publicações e de Cursos de formação de professores de matemática (licenciaturas) vêm incluindo à grade curricular a modelagem no ensino como disciplina ou como parte do programa da disciplina Metodologia do Ensino da Matemática. (BIEMBENGUT, 2009, p. 8)

Como podemos observar, a Modelagem Matemática vem crescendo cada vez mais no meio educacional, pois muitos professores estão procurando formação contínua que tenha Modelagem na grade curricular nos cursos de especialização e pós-graduação, com intuito de contribuir para sua formação como professor.

Já a proposta metodológica do uso da Modelagem Matemática é buscar estratégicas adequada nas aulas de Matemática, trabalhando as situações-problema do cotidiano, já essas situações precisam ser analisadas, buscando dados presentes nos problemas e formulando hipóteses do tema proposto, para a construção do modelo matemático (CIPRIANO, 2013).

A Modelagem tem várias propostas metodológicas para o planejamento escolar, assim identificando os objetivos, conforme Biembengut e Hein (2005, p. 18-19):

> Por meio da Modelagem Matemática podemos:
>
> - Aproximar uma outra área do conhecimento da Matemática;
> - Enfatizar a importância da Matemática para a formação do aluno;
> - Despertar o interesse pela matemática ante a aplicabilidade;
> - Melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;
> - Desenvolver a habilidade para resolver problemas e estimular a criatividade.

MATERIAIS E MÉTODOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA

A aplicação do referido trabalho, que é voltado a turmas de 2.º ano, foi simulada por acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática, em que a tendência Modelagem Matemática foi aplicada no contexto do bloco matemático Grandezas e medidas, com o conteúdo de Geometria Espacial (Volume), objetivando que os alunos desenvolvam seu raciocínio, lógico e dedutivo em geral.

Durante sua realização, que durou cerca de 60 minutos, foram utilizados alguns recursos didáticos, como, por exemplo: projetor, papel A4, cola branca, régua, *software* Geogebra, entre outros, os quais serão descritos posteriormente de acordo com seu manuseio em sala de aula juntamente aos momentos nos quais a parte prática do trabalho foi dividida.

Em um primeiro momento apresentou-se o conceito geral de modelagem, em que abordou todos os componentes do sistema referente a essa tendência para criação de um método, ou seja, para a criação de uma possível solução para um problema real, por meio da sua "tradução" para a linguagem matemática.

Durante o segundo momento, foi apresentada aos alunos uma situação-problema que envolve algumas noções de Geometria, em que logo a seguir foi solicitado que os alunos refletissem sobre uma possível solução. Vale destacar que no decorrer desse segundo momento foi utilizado o *software* Geogebra, para auxiliar os alunos no entendimento das figuras espaciais que estão envolvidas no problema proposto aos alunos.

No terceiro e último momento, os alunos resolveram a situação por meio do uso da Modelagem Matemática.

<u>Situação-problema</u> – José é proprietário de uma fazenda que contém cerca de 5 mil "Cabeças de Gado", cuja alimentação consiste basicamente em capim e uma ração especial que deve ser ingerida pelos bovinos ao menos uma vez por dia. Para armazenar a tal ração José decide comprar um silo. Ao chegar à loja agropecuária mais próxima, o vendedor lhe apresenta três modelos de silos diferentes (quadrangular,

triangular e circular). Sabendo que os três silos têm o mesmo preço, e que José irá comprar um único silo (aquele que tem a capacidade de armazenar a maior quantidade de ração), qual silo dos três modelos apresentados José deve comprar?

Objetivo: Resolver problema envolvendo geometria espacial por meio da Modelagem.

Atividade 1: Produzir figuras espaciais referentes aos três modelos de silos ofertados a José.

Tarefa 1: Produzir Paralelepípedo (referente ao silo quadrangular).

a. Medir as dimensões da folha de papel A4.
b. Marcar em uma folha de papel A4 (em formato paisagem), com o auxílio de uma régua, 4 segmentos de mesma medida, de modo a utilizar toda a extensão da folha, deixando somente uma pequena faixa como “sobra”.
c. Dobrar e colar, conforme os professores demonstraram, para que assim forme a figura final (paralelepípedo).

Tarefa 2: Produzir prisma (referente ao silo triangular).

a. Marcar em uma folha de papel A4 (em formato paisagem), com o auxílio de uma régua, 3 segmentos de mesma medida, de modo a utilizar toda a extensão da folha, deixando somente uma pequena faixa como “sobra”.
b. Dobrar e colar, conforme os professores demonstraram, para que assim forme a figura final (prisma).

Tarefa 3: Produzir cilindro (referente ao silo circular).

a. Dobrar e colar, conforme os professores demonstraram, para que assim forme a figura final (cilindro).

Atividade 2: Calcular os volumes das três Figuras Espaciais.

Avaliação: A avaliação foi realizada a partir da análise do desempenho individual de cada aluno no decorrer da aula. Os critérios foram a conclusão da atividade proposta e a participação do aluno no decorrer da aula.

Os resultados obtidos durante a aula de modelagem foram os mais diversos, desde os bons resultados dos desempenhos dos alunos em geral até as críticas, todos os alunos/acadêmicos participaram ativamente da aula, e ao final da aplicação da aula, quando foi lhes perguntado o que tinham achado, expressaram em sua maioria comentários positivos.

A aplicação da aula envolvendo Modelagem ocorreu exatamente conforme a sequência didática anteriormente planejada. Durante sua execução dava para notar que todos os alunos estavam se esforçando, de modo a expor todo o seu potencial quando foi lhes solicitado que manipulassem os papéis, utilizando a régua para fazer medidas, com a intenção de formar as figuras espaciais referentes aos silos que a situação-problema apresentou, para que pudéssemos todos em conjunto resolvê-la.

Conforme a aula se sucedia, os professores (acadêmicos), além de estarem apostos para auxiliar os alunos em qualquer instante, faziam ao mesmo tempo a avaliação individual de cada aluno, em que tinham como critérios a maneira de manusear os materiais dispostos no início da aula (régua e papel), sendo assim a sua capacidade de realizar medidas, e a aplicação das medidas das figuras espaciais nas suas respectivas fórmulas de cálculo de volume apresentado para eles na lousa, com o auxílio de slides. Todos os alunos apresentaram um ótimo comprometimento com o exercício, e apesar de alguns demorarem um pouco para cumprir as suas etapas, todos eles concluíram com êxito a atividade proposta.

CONSIDERAÇÕES

Ao analisar a Modelagem Matemática no decorrer do processo de escrita e de aplicação deste trabalho, notamos que apesar de ter uma definição formulada apenas recentemente no século XX, ela sempre esteve presente em nossa história, desde seus primórdios até os dias atuais, se modificando e se desenvolvendo juntamente à nossa sociedade. Em acordo com Barbosa (1999), vemos a modelagem como uma das grandes pilastras que ajudaram nesse processo de desenvolvimento da humanidade, pois ela é a capacidade do homem, na sagacidade de seu intelecto, de resolver situações/problemas reais em um ambiente controlado, ou seja, um Laboratório de Ensino de Matemática.

Conforme descrevíamos o processo de modelagem na educação, notamos que conhecer e compreender suas características é de fato indispensável para a formação de futuros professores de Matemática, pois essa tendência metodológica de ensino pode ajudar na assimilação dos aspectos e do processo de ensino e aprendizagem dos alunos da educação básica. Já que essa tendência focaliza a associação de uma Matemática vista por muitos jovens como apenas uma coisa abstrata, a fazer uma aplicação no seu cotidiano, fazendo assim com que nossos futuros cidadãos consigam melhor absorver o conhecimento passado em sala de aula e consigam assim interpretar situações do seu dia a dia mediante a Matemática e por meio da sua criatividade buscar uma solução para tal circunstância, assim estimulando o aluno a "pensar", de modo que não se tornem vítimas de um sistema de educação que visa formar uma sociedade pobre de intelecto, como é a que vemos hoje no Brasil.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática na sala de aula. In: **Perspectiva, Erechim (RS)**, v. 27, n. 98, p. 65-74, 2003.

BARBOSA, Jônei Cerqueira. O que pensam os professores sobre a modelagem matemática. In: **Zetetiké, Campinas**, v. 7, n. 11, p. 67-85, 1999.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. In: **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 07-32, 2009. Disponível em: <www.ufrgs.br/espmat/...modelagem/modulo.../30 anos de modelagem.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2018.

BIEMBENGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino** – 4ª ed – São Paulo: Contexto, 2005.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a sala de aula. In: **Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática**, v. 1, p. 1-10, 2004.

CIPRIANO, Tatiana Soares. **Modelagem matemática como metodologia no ensino regular**: Estratégias e possibilidades. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica, 2013.

COSTA, Helisângela Ramos da. A modelagem matemática através de conceitos científicos. In: **Ciências & Cognição**. 2009, Vol 14 (3): 114-133. Disponível em <http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-58212009000300010> acesso em ago. 2018.

SILVA, Antonio Marcos de Oliveira. **Cálculo de área com o uso da modelagem**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Mossoró, 2013.

SODRÉ, Ulysses. **Modelos matemáticos**. Londrina: UEL, 2007. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/modelos.pdf>. Acesso em: 13 set. 2018.

TAMBARUSSI, Carla Melli; KLÜBER2, Tiago Emanuel. Focos da pesquisa stricto sensu em Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira: considerações e reflexões. 2014. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/16695/pdf>. Acesso em: 18 ago. 2018.

O QUE DIZEM E PENSAM ESTUDANTES DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE O QUE É O NÚMERO E PARA QUE SERVEM

Fernando da Rocha da Silva[7]
Dora Soraia Kindel[8]

INTRODUÇÃO

Números servem para governar o mundo. Estão tão presentes no nosso dia a dia que se tem a impressão de que eles são a razão de nosso viver. Através deles somos medidos e mediados. Medidos desde antes de nascermos, quantos dias e semanas de nossa existência são contados, depois os dias e as noites são contados na ânsia de saber quando daremos os primeiros passos, dizemos a primeira palavra ou iniciamos a nossa jornada escolar. Neste momento nossas vidas passam a ser regradas por horas marcadas para os afazeres que transcendem nossos horários de dormir, acordar, comer e brincar. Agora, o relógio marca diuturnamente a hora para se levantar, para pegar a condução da escola, entrada e saída na escola e assim segue. Na escola, a partir da alfabetização é marcada por letras e números. Mas, o que são os números? Para que servem? Onde estão, o que significam? Com questões como estas que nos debruçamos a buscar entender o que são os números para alguns estudantes do 9º ano para a partir desta compreensão propormos atividades em que discutiríamos dois números pouco explorados na escola, mas que são constituintes dos números reais, os números irracionais.

Atualmente tem se discutido muito acerca do senso numérico e o aprimoramento do conceito de número que, por sua vez, desenvolveu-se ao longo dos séculos através de leigos e estudiosos das áreas de Filosofia e Matemática, conforme as necessidades cotidianas. Ao

[7] Mestre em Educação em Ciências e Matemática – UFRRJ / Docente Universidade de Vassouras.

[8] Doutora em Educação Matemática – UNIBAN / Docente UFRRJ.

longo dessa caminhada, surgiram alguns conjuntos numéricos como, por exemplo: os números naturais, os números inteiros, os números racionais, os números irracionais e os números reais.

Compreender a essência dos números é algo que permeia a sociedade em geral desde os primórdios, principalmente pelo fato da necessidade de medir, sendo essa característica a mais genuína. Na sala de aula de Matemática, saber o que estudantes pensam e dizem sobre os números pode ajudá-los a construir este conceito e as diferenças entre os conjuntos numéricos.

Este capítulo, um recorte em que apresentamos uma das tarefas, é parte de uma pesquisa que resultou na dissertação de mestrado intitulada "Estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental exploram situações com os números irracionais π e φ", apresentada no Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGEduCIMAT – UFRRJ).

A pesquisa teve início com o questionamento sobre "Números: o que é e para que servem?" através de uma abordagem investigativa e experimental, com o intuito de compartilhar ideias dos nossos estudantes a respeito do que pensam sobre números. Ou seja, buscamos compreender o que pensam os estudantes e apresentar reflexões a partir da produção de significados que eles nos apresentam.

A coleta e análise dos dados teve como suporte o registro escrito individual das respostas dadas para as questões e a gravação de áudios das discussões, em grupo, dos estudantes enquanto realizavam as atividades. Para a análise nos apoiamos em: a) tabulação das respostas por grupo de questões; b) identificação da ideia teórica envolvida nas respostas escritas dos estudantes em consonância com os áudios de tal forma que pudéssemos melhor compreender o motivo pelo qual estavam dando aquelas respostas.

A análise revelou que, para os estudantes, números servem para medir e contar aparecendo fortemente associado em situações do cotidiano escolar (em problemas, contas e equações) e, neste caso, representados por letras e equações e no dia a dia fazendo referências ao deslocamento em vias expressas e outros contextos comuns.

COMPARTILHANDO EXPERIÊNCIAS DO ESPAÇO ESCOLAR – CAMPO

A dinâmica do trabalho ocorreu presencialmente no ambiente escolar, em horário combinado previamente com todos os participantes da pesquisa. Embora a tarefa tenha sido realizada individualmente, os alunos puderam trocar informações entre si e durou 2 tempos de aula, 100 minutos. Como ponto de partida elaboramos uma atividade em que solicitamos aos estudantes seus pontos de vista sobre alguns aspectos com os seguintes objetivos específicos: a) verificar o que pensavam acerca de número e que tipos de associações faziam para exemplificar ou explicar; b) identificar que tipo de números e/ou grupos de números que os alunos conhecem; c) verificar como os estudantes agrupam/classificam os números que conhecem; d) verificar se para eles existem números "esquisitos" e que números seriam esses.

A tarefa apresenta questões que envolvem: a) reflexão acerca da ideia de número; b) reflexão acerca de conjuntos numéricos. Para isso, elaboramos o roteiro:

Quadro 1 – Roteiro da tarefa.

1-	Escreva algumas ideias sobre o que você lembra quando ouve a palavra número.
2.A-	Diga que números conhece.
2.B-	Que outros números você conhece?
3-	Estes números que você citou têm nomes ou podem ser agrupados? Como?
4-	Que números entram na categoria dos naturais? E dos inteiros? E dos racionais? Qual a diferença entre eles?
5.A-	Que números você conhece como sendo irracionais?
5.B-	Irracionais por quê?
6-	Que outros números "esquisitos" você conhece?

Fonte: autores.

No primeiro item, foi solicitado que expressassem livremente sobre as ideias associadas quando ouvem a palavra número. Embora este item estivesse escrito na ficha de trabalho, ela foi estimulada pelo professor/pesquisador de forma a obter o maior número possível de livres associações. Assim, temos a seguinte frequência dos termos usados para expressar esta ideia: contar, dias e minutos (1); letra (5); medida, multiplicação e régua (6); altura, equação, geometria e relógio (7); conta, problema e trena (8); contagem, dinheiro, distância, matemática e trigonometria (9); cálculo e soma (10) e calculadora (11).

Diante do exposto verificamos que a palavra que aparece com a maior frequência é calculadora e logo em seguida as palavras cálculo e soma. Estes termos nos remetem à ideia de operação e, portanto, a calcular que, por sua vez, remete ao instrumento de cálculo, a calculadora. Ou seja, é interessante observar que associado à ideia de número aparece um instrumento, um procedimento e o resultado de uma operação e que estão muito presentes no dia a dia. Existem muitas situações em que se agrupa, junta, adiciona, amontoa, aumenta e que nos remetem à ideia de obter uma soma para além do fato de efetuarmos a operação de somar propriamente dita e para a qual muitas vezes a calculadora é usada. A calculadora é um objeto presente na palma da mão das pessoas e por isso mesmo um instrumento de fácil acesso pois, com o advento das tecnologias de comunicação, elas passaram a se integrar aos aparelhos telefônicos.

Os estudantes apresentaram ainda, termos relacionados às operações de "soma e multiplicação e conta" sendo que este último está diretamente associado ao algoritmo das operações. Fazer conta significa operar com os algoritmos ou em sua linguagem "conta armada" podendo em alguns casos se referir ao cálculo mental, "fazer de cabeça".

Quando questionados sobre para que servem os números, as respostas dos estudantes consideraram basicamente duas possibilidades: contar e medir. Não foram encontrados evidências e exemplos explícitos do número como código.

Como contagem, os números aparecem nos termos: contar, conta, contagem e são exemplificados por “dias, minutos, dinheiro, distância” (no áudio o estudante explicou que distância é a quantidade de quilômetros rodados e aqueles marcadores na beira da estrada. Estes marcadores existem em grandes vias estaduais e federais como na BR 116 conhecida como Via Dutra. É interessante observar que a via Dutra faz parte do seu dia-a-dia e o município onde moram e a escola se situa é cortada por ela e que muitas vezes precisam transitar de um lado a outro da via.

Como medida, os números servem para medir - “medida, altura, distância”, e para os quais são usados a régua e a trena para medir. Esta ideia está bem localizada em duas áreas da matemática: a geometria e a trigonometria. Para medir os dias e minutos usa-se o relógio.

> Este bloco (medida e grandeza) caracteriza-se por sua forte relevância social, com evidente caráter prático e utilitário. Na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano. (PCN, 1997, p. 56).

Neste caso, observamos que os estudantes participantes desta pesquisa consideram que números servem para contar e medir e apresentam este caráter prático e utilitário, mas também foi possível identificar aspectos que evidenciam a algebrização da aritmética quando usam termos “letra, equação, problemas”.

UMA LUPA PARA ANÁLISE DOS NÚMEROS APRESENTADOS PELOS ESTUDANTES

Para o item 2, diga que números conhece, gostaríamos de saber de que forma expressariam, se usariam ou não a classificação apresentada nos livros didáticos se referindo aos conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e talvez reais) ou se classificariam como sendo números inteiros, fracionários, decimais, dízimas periódicos e não periódicas.

Diante de uma categorização em que buscamos identificar a ideia teórica envolvida nos exemplos dados pelos estudantes, identificamos duas ideias principais: a) a que usa a representação numérica dando ênfase as operações (8 alunos) e b) a que apresenta os números através de conjuntos numéricos (2 alunos). Dos dez estudantes pesquisados, oito apresentaram diferentes exemplos abarcando todos os conjuntos numéricos e um, Dinho, respondeu nomeando-os exclusivamente.

Quadro 2 – Números conhecidos pelos estudantes.

Rique	Thamy	Vick	Ninha	Lane	Pamy
14; 0,5; 3,1; $\frac{16}{8}$*;-* $\frac{14}{4}$*;* $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{2}}$*;* $\sqrt{8}$*; 018,0; 0,9; 100%; -1,3;* $7y^2$*.*	*7;* 5^2*;* $\sqrt{114}$*;* $\frac{30}{3}$*;* $\frac{25}{\sqrt{5}}$*;* $\sqrt[3]{50}$*; 2,77;* $15x^2$*;* $3\sqrt{3}$*.*	10^2*; 5,77;* $\sqrt{5^2}$*;* $\frac{3}{4}$*; 95%;* $7y^2$*;* $\sqrt{2^4}$*.*	*4,5;* $\sqrt{9}$*; 4x; 6,5; -2; 3x.*	$\frac{7}{49}$*; 0,006013;* $2\sqrt{5}$*; 8,5.*	$\sqrt{9}$*;* $\sqrt{25}$*;* $\frac{3}{7}$*;* $\sqrt[2]{5}$*.*

Fonte: autores.

Os seis estudantes apresentaram exemplos de números inteiros positivos e dois estudantes apresentaram números inteiros negativos. Também apareceu o registro de números decimais exatos e frações, percentagem, raízes exatas e não exatas, monômios. No quadro 3, os estudantes apresentaram os nomes dos conjuntos e exemplos.

Quadro 3 – Números e conjuntos numéricos.

Lan	Gu	Dinho	Pepi
π*;* $\sqrt{a}$*; inteiros; graus; radianos; irracionais; incógnitas, etc.*	$\sqrt{4}$*; 10%; 40;* π*; 40:2; MMC; MDC; raiz quadrada; radicais semelhantes; porcentagem, divisão e multiplicação.*	*Racionais; irracionais; inteiros; negativos; frações; radicais.*	*Radicais semelhantes;* $\sqrt[5]{3}$*;* π*; e;* φ*.*

Fonte: autores.

Com o intuito de fazê-los falar mais e explicitar o que estavam nos apresentando, fizemos nova provocação questionando-os sobre que outros tipos de números conheciam. E para esta pergunta obtivemos as seguintes respostas:

Quadro 4 – Números e conjuntos numéricos.

Rique	Thamy	Vick	Ninha	Lane	Pamy
$\sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{4}$; $2\sqrt[3]{4^2}$; $3^1:3^2$; 8^2; $3x^2$.	100; 10^3; $\sqrt{25}$; $\frac{1}{2}$; $25x$	$2\sqrt{5}$; $7\sqrt[3]{2^4}$; $\frac{5}{10}x\frac{10}{5}$; x^2; $\sqrt{5+4}$.	$-6x$	4,3; $\sqrt{2}$; 11; $16x$.	$2\sqrt{3}$; $\sqrt{\frac{7}{9}}$; $\sqrt[3]{-2^3}$.

Fonte: autores.

Comparando-se as respostas dos quadros 2 e 4, aluno por aluno, verificamos que Rique passa a representar os números sob a forma de potência e radical. Thamy permanece no mesmo campo. Vick insere uma operação sob o radical, para talvez representar um número sob a forma de radical. Ninha usa apenas um monômio e Lane o introduz na sua resposta. Pamy, por sua vez, apresenta dois novos números irracionais e a raiz de um número negativo em que um deles é da forma a $\sqrt{b}$ e $\sqrt[3]{-b^3}$. Não foi possível identificar se o expoente usado estava diretamente relacionado com o radicando como uma estratégia para encontrar respostas inteiras ou não. Os outros quatro estudantes reforçaram a ideia vista anteriormente, quadro 5.

Quadro 5 – Números e conjuntos numéricos.

Lan	Gu	Dinho	Pepi
Racionais.	*Equação do 1º grau; equação do 2º grau; adição; subtração e geometria.*	*Pi; número de Euler e Phi.*	*Potências 3^2 ou 2^3.*

Fonte: autores.

Em suma: Dinho e Lan enfatizam, de certo modo, os conjuntos numéricos para relatarem os números que já conhecem e caracterizam que favorecem as ideias de operações matemáticas; os outros estudantes exemplificaram, muitas vezes, os seus respectivos números conhecidos através de estruturas operatórias. Analisando tais números, percebemos o quanto é forte para esse grupo de estudantes a "ideia de operação matemática" para se representar número.

Não é possível saber se a representação através de radicais são representantes de números irracionais ou não $\{2\sqrt{5}\,, \sqrt[2]{5}$ ou se estão se referindo à operação de radiciação. Ou seja, os estudantes utilizam frações e radicais para responderem tanto aos números que conhecem quanto para exemplificar outros números que conhecem. Entretanto, nesta categoria não entram os números inteiros, decimais quer sejam eles representados como frações ordinárias, percentagem ou decimal propriamente dito. Desta forma, entendemos que para este grupo de estudantes os radicais representam uma quinta operação, a de radiciação. Fato este, evidenciados nas múltiplas representações $\{\, 2\sqrt{3};\ \sqrt{\frac{7}{9}};\ \sqrt[3]{-2^3}\}$.

Segundo (POMMER, 2012, p. 16) "o ensino direcionado aos aspectos operatórios, exatos, determinísticos e finitos consiste numa tendência que encobre aspectos importantes e significativos envolvendo os números".

De um modo geral, nos pareceu um pouco difícil para os nossos estudantes responderem ao item 2 sem transcenderem a barreira das operações para relatarem os números que conhecem. De acordo com (KARLSON, 1961, p. 45), "[...] onde o cálculo é tudo. [...] desapareceram irremissivelmente todas aquelas particularidades, aquele caráter multicolorido, que os números apresentavam aos olhos dos gregos, para quem tinham mesmo um significado físico e uma personalidade".

De alguma forma, parte dos estudantes participantes da pesquisa destacam, as operações como elemento primordial para caracterizar e classificar alguns números. Veja as respostas dos estudantes para o 3º item quando foram questionados se os números que citaram possuem nomes ou podem ser agrupados e de que forma.

Rique diz que os números escolhidos podem sim ser agrupados e diz "*Fração, potência, raiz, porcentagem, divisão de potências, equação."*

Thamy afirma que *"elas podem se juntar e formar equações e frações, como por exemplo:* $15x^2 + 25x - 7$ *e* $\frac{25}{\sqrt{5}}$*."*

Vick diz que podem *"chamar de equações, frações, racionalização, porcentagem, potência."*

Ninha **"***temos nomes: raiz quadrada, números decimais. Alguns podem-se agrupar em equações."*

Lane *"Frações, números inteiros, raiz quadrada".*

Pamy: "*São agrupados. Raiz quadradas fracionais, radicais".*

Gu *classifica-os em "Radicais, MMC, MDC e raiz quadrada".*

Pepi são agrupados. Racionais e potências.

Dinho **"***Racionais, irracionais e inteiros".*

Pepi apresenta um conjunto e uma operação e Dinho é o único que classifica os números por conjuntos.

Quanto ao item 4, que números entram na categoria dos naturais? E dos inteiros? E dos racionais? Qual a diferença entre eles? Foi possível identificar que os estudantes, de um modo geral, fazem sobreposição entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos inteiros positivos visto que apenas um dos estudantes apresentou um único número negativo como exemplo. Lan diz: "*Uns podem ter números negativos e não podem ser quebrados. Alguns números podem se encaixar nos 3 grupos" e apresentou como exemplos "Natural: 2. Inteiros: -3; 4. Racional:* $\sqrt{4}$ *".* Um dos pontos interessantes observados nas suas respostas sobre os números racionais é o fato de associá-los como sendo representados por radicais ao invés de associarem às frações. Veja no quadro 6.

Quadro 6 – Agrupamento/Classificação.

ALUNO	Que números entram na categoria dos naturais? E dos inteiros? E dos racionais? Qual a diferença entre eles?
RIQUE e VICK	*Naturais: 1; 2; 3; 4; 5; ... Inteiros: 20; 30; 40; 60; ... Racionais:* $\sqrt{4}; \sqrt{25}; \sqrt{24};$ *Não* têm diferença porque de algum modo ele pode se encaixar nos 3.
THAMMY	*Naturais: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; ...Inteiros:* $\sqrt{25}$*; 7;*$\sqrt{100}$*; 114; ... Racionais:* $\sqrt{9}$ *Muitos números não têm diferenças, mas outros tem. Tipo: se for uma fração vai saber se tem diferença quando for o resultado final, como por exemplo,* $\sqrt{25}$ *é 5 e ele se encaixa em todos.*
LANE e NINHA	*Natural: 5. Inteiro: 16.* Não podem ser quebrados. . *Racional:* $\sqrt{4}$
LAN e GU	*Natural: 2. Inteiros: -3; 4.Racional:* $\sqrt{4}$ *.* *Uns podem ter números negativos e não podem ser quebrados. Alguns números podem se encaixar nos 3 grupos.*
PAMY	*Natural:* $\sqrt{9}$*;* $\sqrt{25}$*;* $\sqrt[3]{25}$*;* $\sqrt[2]{-2^3}$ *Inteiro: 4; 8; 36. Racional:* $\sqrt{16}$*;* $\sqrt{49}$*.* *Que existe um número racional que pode ser natural e que pode ser inteiro.*
DINHO	*Naturais: 1; 2; 3; 4; 5. Inteiros: 10; 100; 1000. Racionais:* $\sqrt{4}$ *A diferença: o jeito de dizer.*
PEPI	*Números naturais: 1; 2; 3; 4; 5. Números inteiros: 2; 4; 6; 8; 10; ...* *Números racionais:* $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{9} = 3$. *A diferença entre eles é que eles são de categorias diferentes.*

Fonte: autores.

Analisando as respostas e justificativas verificamos que Pamy apresenta alguns exemplos $\sqrt[2]{5}$; $\sqrt[3]{-2^3}$ que não pertencem ao conjunto dos números naturais e Lane, afirma que números inteiros são números que não podem ser quebrados.

Para explicar a diferença entre os conjuntos Pepi, Dinho, Gu se referem à representação dos seus elementos. Os três alunos apresentam números naturais para os três conjuntos deixando claro que entenderam a ideia de classe inclusa. Ou seja, a de que o conjunto dos números naturais é um subconjunto dos números inteiros e do conjunto dos números racionais. Esta observação aparece na justificativa dada por Rique quando afirma que "*Não têm diferença porque de algum modo ele pode se encaixar nos 3*" depois que ele apresentou três exemplos usando radicais cujo resultado é um número natural na categoria dos racionais "Naturais: 1; 2; 3; 4; 5; ... Inteiros: 20; 30; 40; 60; ... Racionais: $\sqrt{4}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{24}$" e na de Dinho quando diz que a diferença entre os três conjuntos é "o jeito de dizer".

Trecho do áudio_ 17: 32

Vick_ *Professor, tem números que servem para os três!*

Lan _ É *verdade!*

Prof_ *Vocês podem me dar um exemplo de um número que seja natural, inteiro e racional?*

Vick_ *O 3.*

Vick_ *Então* não tem diferença entre eles?

No áudio acima alguns alunos percebem que todo número natural é inteiro e racional, mas não conseguem perceber a diferença entre eles. A justificativa e argumentação são elementos da escrita matemática pouco trabalhados na sala de aula de matemática, favorecendo a minimização dos processos de pensamento matemático e sua discussão entre os estudantes.

> [...] ensino dos números e das operações na educação básica não deve visar a aquisição de um conjunto de técnicas rotineiras, mas sim uma aprendizagem significativa ligada a uma compreensão relacional das propriedades dos números e das operações. Não basta aprender procedimentos, é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento. (COELHO, 2005, p. 29)

Lan e Dinho esboçam a ideia de conjuntos numéricos nesta tarefa, desta vez para agrupar os números que haviam citado na atividade anterior. Quanto aos demais estudantes, observamos que estes agruparam os números a partir da sua estrutura operatória, fazendo pouco uso da classificação em relação aos conjuntos numéricos. Observe a ilustração: Radical – Número Racional e $\sqrt{25}$ - Radical $\sqrt{5}$ – Número Irracional.

Em ambos os casos temos um radical, porém, a classificação quanto aos conjuntos numéricos depende dos valores do índice e do radicando. Podemos inferir que esses dados são oriundos de uma linguagem utilizada nas salas de aula e nos materiais didáticos que, por sua vez, fazem pouco uso de reflexões voltadas para os conjuntos numéricos, favorecendo a um olhar para este como uma operação matemática.

Buscando compreender o que os estudantes entendem ou representam como sendo números irracionais, elaboramos duas perguntas: a primeira levou em conta uma pergunta comum sobre o que é um número irracional e a segunda, usou um termo usado pelos estudantes "números esquisitos". Com relação ao 1º item, temos:

Quadro 7 – Agrupamento/Classificação.

ALUNO	Que números você conhece como sendo irracionais?	Irracionais por quê?
RIQUE e PAMY	$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; ...	*Não são números inteiros como na raiz dois não irá dar um número inteiro, será um número quebrado.*
THAMMY	$\sqrt{2}$; $-\sqrt{5}$; $-1{,}2$	*Na minha opinião são números não inteiros e negativos.*
VICK	$\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; 5,33; 12,66.	*São números que não são exatos e inteiros, números quebrados, que provavelmente não dão um valor exato.*
NINHA	*3; 0,444...;* $\sqrt{7}$; $\sqrt{5}$.	*Por que não dá para simplificar, como a* $\sqrt{7}$*, não tem uma resposta de só um número.*
LANE	*0,85858585..., pelo motivo de nunca acabar.*	*Por não ser inteiro e pelo motivo de nunca acabar.*
LAN	*Raízes não exatas, números aproximados, Phi.*	*Além de não serem exatos, a maioria, não são números que aparecem tanto no dia a dia.*

ALUNO	Que números você conhece como sendo irracionais?	Irracionais por quê?
GU e PEPI	*Uma raiz não exata. Exemplo:* $\sqrt{7} = 3{,}5$; $\sqrt{5} = 2{,}5$.	*Por que ele não é uma raiz exata e não é um número inteiro. Exemplo:* $\sqrt{7} = 3{,}5$. *Por que ele não tem um número exato que possa dar um valor sem vírgula.*
DINHO	*São os números que nunca acabam. Ex:* $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$.	$\sqrt{7}$ não é exato porque não tem resultado exato.

Fonte: autores.

A respeito dos números irracionais, observamos que os alunos associam estes números à estrutura do radical (neste caso raízes inexatas), o que sugere um olhar mais próximo de uma operação matemática, a radiciação. Por sinal, as raízes aproximadas fornecidas nos exemplos de Gu e Pepi apresentam falha nos cálculos ou no próprio conceito quanto à operação com radicais.

Tammy e Vick acreditam que o número irracional pode ser um decimal com finitas casas decimais. Talvez essa ideia possa estar associada aos exercícios dos livros didáticos de matemática que enfatizam a extração de raízes não exatas fazendo a aproximação para um número racional por falta ou por excesso. Enquanto para Ninha e Lane, o número irracional está ligado às dízimas periódicas. Provavelmente o que causou tal confusão, tenha sido o fato de que as dízimas periódicas apresentem infinitas casas decimais. Diante do exposto, fica evidente que os estudantes apresentaram dificuldade para definir um número irracional. Para eles, número irracional é um número não inteiro, um número quebrado, um número com infinitas casas decimais, números que não apresentam raízes exatas. Para esses estudantes, números racionais e números irracionais são antagônicos, ou seja, números racionais estão diretamente ligados às raízes exatas enquanto os números irracionais são as raízes inexatas. Esta ideia está relacionada à etimologia das palavras e que, portanto, prevalece sobre o real significado desses números.

Segundo (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995, p. 29), “pouca atenção é dada aos números irracionais na Matemática Elementar. A principal razão, em nossa opinião, é que a matemática da escola básica é essencialmente concebida como um conjunto de aplicação de técnicas”.

NÚMEROS ESQUISITOS

A expressão “número esquisito” é comumente usada pelos alunos para designar alguns dos números que lhes são apresentados em sala de aula. Não sabemos ao certo o motivo pelo qual eles acham alguns números esquisitos, mas acreditamos que esse fato se deve à característica e estrutura não tão comuns apresentadas por esses números, além do fato de não serem usados cotidianamente. Assim, a não familiarização e as dificuldades para entendê-los pode contribuir para que não construam significado para eles. Nessa categoria, entraram as dízimas, as raízes não exatas, o decimal exato, raízes com índices altos e dois números irracionais particulares pi e fi.

CONSIDERAÇÕES

Apesar da experiência relatada acima ter sido realizada em uma sala de aula, percebemos como a dinâmica desenvolvida favoreceu para ambiente colaborativo com trocas de experiências, contribuindo para o compartilhamento de ideias entre os estudantes participantes da pesquisa, onde em muitos casos prevaleceu o consenso. Daí a possibilidade de se juntar as respostas de dois alunos no quadro de respostas.

Falar e escrever o que pensa (tarefa de cunho aberto) não costuma ser comum na sala de aula de matemática, o que contribuiu, de certa forma, para o estranhamento dos estudantes.

Com relação a ideia de números e conjuntos numéricos, vimos como, para este grupo, esses conjuntos muitas vezes se confundem ou são abordados mecanicamente. Foi através da possibilidade de trazer termos usados por eles, números esquisitos, que pudemos obter alguns resultados diferenciados e com maior riqueza de detalhes. Algumas das dificuldades apresentadas pelos estudantes em classificar os números e relacionar os conjuntos numéricos pode estar relacionado às abordagens dadas nos livros didáticos de matemática, onde autores tratam de maneira isolada os conjuntos numéricos, dando pouca ênfase a evolução e ampliação do campo numérico, colaborando para uma aprendizagem por blocos independentes.

A respeito dos racionais e irracionais, observamos como os nossos estudantes tratam estes como antagônicos, provavelmente influenciados pela etimologia, configurando assim uma negação.

Cabe ao professor criar ambientes onde os alunos possam externar seus pensamentos, compartilhar experiências, conceituar os números conhecidos, discutir ideias de aproximações em diferentes contextos, elaborar regras e formalizar suas descobertas. Erros e ressignificações fazem parte da caminhada e corroboram para a construção do conceito e devem fazer parte do processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. (1997). Brasília: MEC/SEF.

COELHO, M. P. F. **A multiplicação de números inteiros relativos no 'Ábaco do Inteiros': uma investigação com alunos do 7º ano de escolaridade**. 2005, 151 f. Dissertação de Mestrado - Universidade do Minho, Braga, 2005.

FISCHBEIN, E; JEHIAM, R; COHEN, D. **The Concepto f Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers**. Educational Studies in Mathematics. Jul 1995, v. 29, n. 1, p. 29-44.

KARLSON, P. **A Magia dos Números**. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1961.

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais**. 2012. 246 f. Tese de Doutorado – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

O LABORATÓRIO DE ENSINO EM MATEMÁTICA E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES NO MARAJÓ DAS FLORESTAS

Robson dos Santos Ferreira[9]
Alan Gonçalves Lacerda[10]
Adriano Aparecido Soares da Rocha[11]

INTRODUÇÃO

Ao pensar na formação de futuros professores e professoras de matemática consideremos mudanças de natureza didática e epistemológicas no seio dessa ciência. Várias são as concepções de professores atreladas ao ensino e da qual vem sofrendo influências por questões sociais, políticas, ideológicas e culturais.

Nesta perspectiva, ao problematizarmos o processo de formação do professor de matemática é importante frisarmos sobre o papel do laboratório, a saber, da atuação dos professores do ensino superior e dos jovens futuros professores em formação inicial. Além disso, desenvolver atividades, sobretudo, no emprego de metodologias que possam ser exitosas.

O laboratório de ensino de matemática tem sido um elo, em termos de aprendizagem na atualidade para os alunos que buscam uma formação diferenciada, pois as pesquisas desenvolvidas no âmbito universitário requer uma conexão entre a teoria e a prática. Para tal, este projeto que se iniciou no ano de 2018 com a implementação do laboratório de ensino de matemática da amazônida marajoara (LEMAM), vêm surgindo como palco para desenvolvimento de estudos e pesquisas relacionados ao ensino e aprendizagem de matemática.

Lorenzato (2006) considera o Laboratório de ensino de matemática como:

[9] Doutor em Educação Matemática, professor da UFPA campus Marajó/Breves.
[10] Doutor em ensino em Ciências e Matemática, professor da UFPA campus Marajó/Breves.
[11] Doutor em ensino em Ciências e Matemática, professor da UFPA campus Marajó/Breves.

> Uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender. (LORENZATO, 2006, p. 7).

O laboratório pode ser vislumbrado como um espaço de construção do conhecimento coletivo e individual. Neste ambiente, os recursos didáticos pedagógicos aplicados podem ser conjecturados sobre a utilização da tecnologia que requer sempre o desafio dos professores envolvidos, seja enquanto propostas didáticas ou mesmo como ferramenta que auxiliem a construção epistemológica dos que nele se encontrem. Nesse espaço, a dinamização dos processos de ensino e de aprendizagem podem conceber novos caminhos tanto para os professores quantos os alunos que interagem e vivenciam práticas formativas nesses espaços.

Sendo assim, este artigo pretende apresentar o trabalho desenvolvido ao longo desses últimos anos no Laboratório de ensino de matemática, do campus universitário Marajó, vinculado à faculdade de matemática.

De modo geral, as licenciaturas têm por finalidade a formação de profissionais para a atuação no ensino básico, como espaço de formação inicial e continuada de professores de Matemática para a região do Arquipélago do Marajó é que o laboratório vem se constituindo como enfoque interdisciplinar no trato com seus conteúdos e buscando promover o tripé: ensino, pesquisa e extensão.

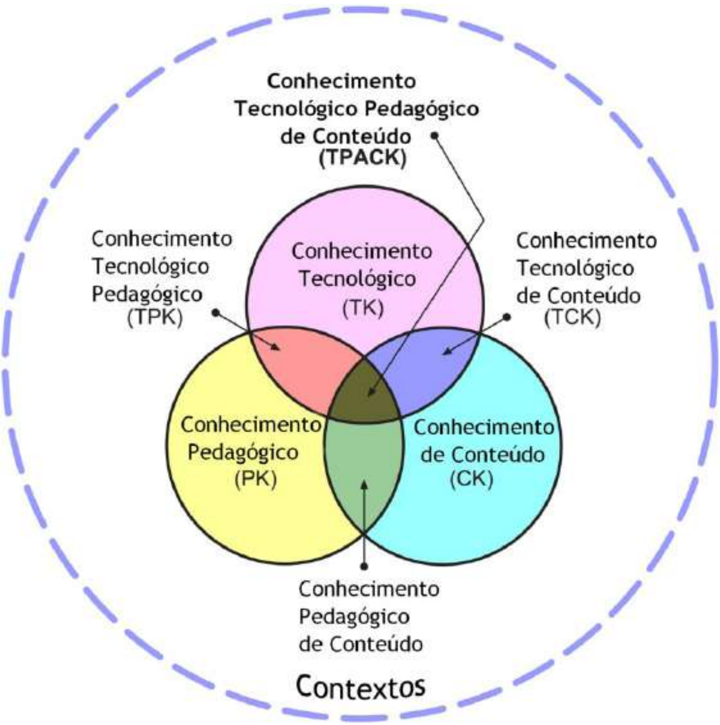
O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA AMAZÔNIDA MARAJOARA (LEMAM) COMO ESPAÇO DE FORMAÇÃO DOCENTE

Para implementarmos a criação de materiais didáticos e recursos manipuláveis há necessidade de direcionarmos nossas ações aos objetivos do LEMAM, que a partir da sua criação em 2018 persegue as metas:

- Contribuir para articulação da teoria e prática necessária a formação dos futuros docentes, elevando a qualidade das ações acadêmicas do curso;
- Contribuir com a valorização do magistério, incentivando os estudantes a desenvolverem propostas didático-pedagógicas;
- Promover a integração entre a Universidade Federal do Pará do Campus Universitário do Marajó/Breves e as escolas públicas do município, de modo a permitir a troca de experiências entre os acadêmicos e docentes do curso de Licenciatura em Matemática com os alunos e professores do ensino fundamental e médio;
- Promover uma formação inicial e continuada de professor por meio de atividades integradas de ensino, pesquisa e extensão;
- Desenvolver, validar e aplicar produtos finais (softwares, sequência de ensino, jogos, materiais didáticos, materiais manipulativos) em colaboração com alunos da graduação/pós-graduação, professores e alunos da educação básica;

A partir desses objetivos espera-se que o LEMAM possa se constituir como um espaço de articulação das disciplinas de formação pedagógica, específicas de Matemática e de formação profissional proporcionando a possibilidade de aplicação das teorias discutidas nessas disciplinas. Tais características corroboram para que o LEMAM seja pensado como um ambiente propício para a construção dos conhecimentos básicos para atuação docente como o explicitado por Misha e Koehler (2006) ao articular os conhecimentos de conteúdo, pedagógicos e tecnológicos no que denomina de modelo TPACK (Figura 1) que aqui traduzimos como Conhecimento do Conteúdo Pedagógico Tecnológico.

Figura 1 - Modelo TPACK



Fonte: http://tpack.org/

Para Misha e Koehler (2006) o TPACK resulta da intersecção de três de conhecimentos: (a) O Pedagogical Content Knowledge (Conhecimento de Conteúdo Pedagógico) se retratando a conhecimentos atrelados ao processo de ensino dos conteúdos curriculares; (b) O Technological Content Knowledge (Conhecimento de Conteúdo Tecnológico) que possibilita a seleção dos recursos tecnológicos mais adequados para o desenvolvimento dos conteúdos adequados para comunicar um determinado conteúdo curricular e o (c) Technological Pedagogical Knowledge (Conhecimento Tecnológico Pedagógico) se retratando da habilidade de saber usar os recursos adequados nos processos de ensino e a articulação desses três tipos de conhecimento resulta no Conhecimento do Conteúdo Pedagógico Tecnológica que possibilita uma visão ampla sobre os processos envolvidos na ação docente.

ALGUMAS AÇÕES

Destacamos inicialmente os avanços observados nas atividades de estágio a partir da constituição do LEMAM, uma vez que os alunos agora contam com mais um espaço propício para a articulação dos conhecimentos de conteúdo, pedagógico e tecnológico, tanto do ponto de vista instrumental, pois nesse espaço estão disponibilizados aos alunos materiais pedagógicos e recursos tecnológicos específicos para o ensino de matemática o que ampliou as possibilidades de preparação de atividades para serem aplicadas aos alunos da educação básica durante o desenvolvimento dos estágios que na FAMAT. Atualmente são quatro, estágio 1 nas séries iniciais do ensino fundamental, estágio 2 como intervenção por meio de oficinas ou projetos na educação básica, estágio 3 nos anos finais do ensino fundamental e estágio 4 no ensino médio como também do ponto de vista da possibilidade da construção de materiais pedagógicos a partir dos objetivo das atividades de intervenção pensadas por eles nos estágios.

Observamos que a partir das disciplinas cursadas os alunos chegavam aos momentos de orientação dos estágios com certo aporte teórico de conhecimentos do conteúdo, pedagógicos e tecnológicos, no entanto o maior desafio era justamente a articulação desses conhecimentos muitas vezes trabalhados de forma isolada para que pudessem planejar e executar as atividades de intervenção no ambiente escolar (regência em sala de aula, execução de oficinas e projetos de ensino).

A partir da constituição do LEMAM os alunos começaram a utilizar o espaço como um momento para testar com os demais colegas da turma suas atividades preparadas para que assim tivessem outros elementos para planejá-las e/ou aprimorá-las a partir das observações feitas tanto pelos colegas como pelo professor orientador.

Como exemplo, temos uma atividade preparado pelos alunos durante a realização do estágio 2 que foi preparada e testada em laboratório e posteriormente aplicada a uma turma multiano (1º ao 5º ano do ensino fundamental) de uma escola municipal de curralinho - PA utilizando dois jogos o jogo “das 7 cobras” e o jogo da “simetria” para trabalhar cálculos básicos, estimativas e conceitos de simetria.

Figura 2 - Jogos matemáticos

Fonte: acervo próprio

Observamos que a partir da organização prévia em ambiente de Laboratório os alunos em formação inicial em matemática constituíram uma maior confiança e autonomia na condução da atividade junto aos alunos da educação básica. Como consequência direta, percebemos uma melhor interação dos alunos da escola com a atividade proposta. O que corrobora a construção do Conhecimento do Conteúdo Pedagógico Tecnológica na perspectiva de Misha e Koehler (2006).

O projeto de extensão intitulado “O uso de softwares para o ensino de matemática: pensando Inclusão digital a Partir da Realidade Marajoara “, tem sido desenvolvido em colaboração com o LEMAM, foi realizado uma minicurso intitulado “Estatística utilizando o Excel” para a comunidade de Breves. Por meio desse projeto há a expectativa de futuros minicursos a comunidade, porém a pandemia interrompeu esse cronograma temporariamente.

A partir de março com a suspensão do calendário acadêmico em decorrência do covid-19, as ações e a utilização dos espaços físicos foram suspensas por medidas de segurança. Diante disso, os cenários antes problematizados nos espaços físicos são agora problematizados em um novo palco de discussão que é o virtual. Os espaços dos laboratórios de ensino buscam tornar a linguagem matemática mais compreensível aos sujeitos envolvidos no processo de aprendizagem. Mas, como então se criar situações e condições de aprendizagem para o atual cenário?

Responder a essa pergunta, nos coloca as reflexões sobre aprender com o uso de tecnologias. Esse movimento, já vinha ocorrendo, no entanto, urge evidenciar as tecnologias da informação e comunicação para a educação. Contudo, o que tal situação nos impõe é a necessidade de reorganizarmos as atividades frente a comunicação que se evidencia que é a digital.

A realização de webnários abordando temáticas inerentes ao ensino de matemática para que dessa forma pudéssemos dar continuidade à fomentação de ações atreladas ao ensino, e no sentido, de atender ao cenário de isolamento social decorrente da pandemia, disponibilizamos as gravações resultantes desses encontros num canal criado no youtube. Tratamos dos mais variados temas conforme aparecem no quadro 1:

Quadro 1 - Webnários realizados

Professor convidado	**Instituição**	**Tema abordado**	**Modalidade**
Prof. Dr. Jesaias da Silva Souza	Universidade de Sorocaba	O pensar no fazer matemático	Entrevista
Prof. Dr. Walber Christiano Lima da Costa	Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará	Educação Matemática Inclusiva: Uma reflexão sobre os desafios da Educação Básica	Entrevista

Professor convidado	Instituição	Tema abordado	Modalidade
Prof. Me. Vanilson Gomes Pereira	Universidade Federal do Pará	O avanço da covid-19 no município de Breves: um olhar a partir de modelos matemáticos	Palestra
Dra. Rosana Nogueira de Lima	Centro Nacional de Educação	Recursos Digitais para uma nova prática pedagógica	Palestra
Prof. Rodrigo G Barbosa	Rede Municipal de Campinas/SP	O ensino remoto experiências e expectativas	Entrevista
Prof.ª Edivana Vieira Praia	Rede Estadual e Municipal de Breves/PA		
Prof. Gabriel Brabo de Vasconcelos	Escola Pitágoras Breves/PA		
Prof. José Wallerson Farias Lima	Rede Estadual e particular do Amapá/AP		
Camila Santos Carvalho	Membro do Diretório Acadêmico - UFPA-Breves		
Fernanda Pinheiro	Aluna do curso de matemática – UFPA – Breves		
Manoel Silvino Batalha de Araújo	Universidade Federal do Pará	Aspectos matemáticos da simulação numérica	
Prof. Dr. Denivaldo Pantoja da Silva	Universidade Federal do Pará	Aspectos da criação didática e a regra de três inversa	Palestra

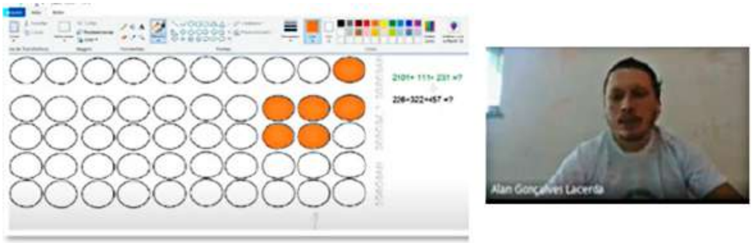
Professor convidado	Instituição	Tema abordado	Modalidade
Profa. Dra Irene Mauricio Cazorla	Universidade Estadual de Santa Cruz	A Estatística na formação do professor de Matemática da Educação Básica	Palestra
Prof. Dr. Alan Gonçalves Lacerda	Universidade Federal do Pará	Como construir recursos digitais para aulas de matemática? A utilização do software "paint" para o ensino e aprendizagem das operações básicas	Oficina

Fonte: Autoria própria

Consideramos que por meio das discussões promovidas por meio dos webnários que contemplaram tanto conhecimentos de conteúdo matemático, conhecimentos relacionados a variadas metodologias e recursos de ensino, bem como reflexões sobre o cenário de pandemia e o papel da Matemática no enfrentamento. Sendo assim, conseguimos como meta constituir um ambiente virtual com potencialidades para a continuidade de ações que nos põem a refletir sobre os processos de ensino e de aprendizagem de matemática e de sua importância para uma formação integral dos alunos tanto do ensino superior como da educação básica.

Em cenário de pandemia destacamos ainda a realização de um minicurso ministrado pela plataforma google meet intitulado "Como construir recursos digitais para aulas de matemática? A utilização do software "paint" para o ensino e aprendizagem das operações básicas" ministrado pelo Prof. Dr. Alan Gonçalves Lacerda da faculdade de matemática da UFPA campus Breves. Conforme nos mostra a figura 3:

Figura 3: Cálculo realizado pelo professor com o auxílio do software durante a oficina



Fonte: Próprio autor

O proponente da oficina problematizou dois momentos. O primeiro de natureza teórica que evidenciou o instrumento denominado ábaco japonês para utilização das 4 operações matemáticas básicas, situando aspectos históricos e suas potencialidades. O responsável pela oficina evidenciou ainda a necessidade de se pensar novas formas de comunicação que exige a atual conjectura que vivemos de isolamento social. Pierre Levy (1999) propõe pensar a cybercultura como forma de experimentar coletivamente esses novos palcos que são assinalados a comunicação.

Já num segundo momento de natureza mais prática foi explanado o tratamento por meio do software paint a realização das 4 operações matemáticas, por ser um software simples e de fácil manuseio.

O professor destacou a importância de se considerar ao ensino de matemática a compreensão das regras operatórias e da didática da matemática, sobretudo na hora de explicitar a linguagem matemática os seus fundamentos. Nesta perspectiva, Lacerda e Ferreira (2009) afirmam que ao ensino de matemática, existem lacunas no processo de formação do professor, uma vez que ainda é comum que conceitos matemáticos, ao serem introduzidos durante a escolarização, professores apontam apenas a matemática como um conjunto de regras operatórias sem sentidos e significados para os alunos.

Nesta oportunidade, alcançamos os propósitos anteriormente definidos ao LEMAM com realização do primeiro minicurso na modalidade virtual, no qual nos apresentou o desafio de explorar as potencialidades dos recursos digitais, tanto para elaboração como para a execução do mesmo. Como resultado tivemos um feedback positivo dos participantes, uma vez que os envolvidos que em sua maioria eram professores da educação básica apontaram que estavam precisando de ideias para suas aulas na modalidade remota.

Neste sentido, considerando o contexto das ações e as tarefas transcorridas na ocasião da oficina é que podemos destacar avanços no LEMAM, pois articulação dos variados conhecimentos (de conteúdo, pedagógico e tecnológico) assinalou a incorporação daquilo que faz sentido trazer e problematizar as aulas.

CONSIDERAÇÕES

A cada dia se mostra mais importante a necessidade de ampliação dos espaços educativos no processo de formação inicial dos professores de matemática com o objetivo de aproximar a teoria às práticas de ensino, nesse sentido consideramos que a criação e manutenção do LEMAM tem se consolidado como um importante espaço de formação docente.

A partir da implantação do LEMAM em 2018 foi possível notar um avanço no trabalho realizado nas disciplinas que discutem o ensino de matemática, uma vez que agora contam com mais um espaço de formação a ser explorado conjuntamente ao espaço de sala de aula. Ressaltamos ainda que tanto os professores do curso como os alunos já apresentam uma maior familiaridade com o espaço, o incluindo em suas ações.

Nesse sentido, o LEMAM vem se constituindo como um importante espaço de formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática por meio de atividades integradas de ensino, pesquisa e extensão, por meio do desenvolvimento, aplicação e validação de produtos finais (softwares, sequência de ensinos, jogos, materiais didáticos, materiais manipulativos) em colaboração com alunos da graduação/pós-graduação, professores e alunos da educação básica, bem como um espaço para reflexão da prática docente por meio da articulação das disciplinas de formação pedagógica, específicas de Matemática e de formação profissional proporcionando a possibilidade de aplicação das teorias discutidas nessas disciplinas e desta forma ajudando no processo de constituição da TPACK na perspectiva de Misha e Koehler (2006).

REFERÊNCIAS

LORENZATO, Sérgio Aparecido. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. In: LORENZATO, Sérgio (org.). O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

MISHRA, Punya; KOEHLER, Matthew J. **Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge**. Teachers College Record, 108(6), 1017-1054, 2006.

LEVY, Pierre **Cibercultura**. Tradução de Carlos Irineu da Costa. São Paulo: Editora 34, 1999.

LACERDA, Alan Gonçalves; FERREIRA, Robson dos Santos. O uso do ábaco para abordar as operações aritméticas básicas e o sistema de numeração: uma experiência com monitores do programa novo mais educação **Trilhas Pedagógicas,** v. 9, n. 11, Ago. 2019, p. 9-27.

TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Darling Domingos Arquieres[12]
Daniela Mendes Vieira da Silva[13]
Isabela Alcantara do Nascimento[14]

INTRODUÇÃO

O conteúdo de trigonometria é trabalhado, geralmente, por meio de aulas expositivas no quadro e os estudantes, muitas vezes, precisam decorar fórmulas para calcular os valores de seno e cosseno, por exemplo. Esse tipo de ensino não possibilita que os alunos "olhem com seus próprios olhos" para o que está sendo ensinado, deixando a crítica de lado e não dando opção para a construção de novas possibilidades de aprender o conteúdo em questão.

Entendemos que o ensino não se baseia apenas no contexto, mas, também, na problematização de conceitos e conteúdos a serem construídos. Neste sentido, buscamos reelaborar a nossa prática pedagógica, planejando atividades e criando materiais didáticos que propiciem aos alunos a participação no processo de construção do conhecimento.

O desejo por práticas diferenciadas surgiu em 2014, com a professora Daniela Mendes Vieira da Silva e seus alunos do Colégio Estadual Hebe Camargo, no Rio de Janeiro, RJ. Onde começaram a confeccionar objetos mediadores do aprendizado da matemática utilizando materiais recicláveis doados pela comunidade escolar. O objetivo era facilitar a aprendizagem dos conteúdos dessa disciplina e motivar os estudantes. E assim, nasceu o Laboratório Sustentável de Matemática (LSM).

O projeto cresceu e ultrapassou os muros do colégio. Hoje, o LSM é um grupo colaborativo de professores, licenciandos e pesqui-

[12] Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da UFRRJ. Docente da SEEDUC/RJ.

[13] Doutora em Ensino e História da Matemática e Física pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRJ. Docente da SEEDUC/RJ.

[14] Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da UFRRJ. Tutora no CECIERJ.

sadores que trocam saberes e experiências. O LSM possui um *blog*[15] onde estão disponíveis os materiais desenvolvidos no laboratório e os trabalhos realizados pelo grupo, além de informações sobre conteúdos matemáticos.

Para a atividade de trigonometria na circunferência, organizamos um plano de aula com atividades relacionadas ao conteúdo de razões trigonométricas, articulando uma atividade de construção do círculo trigonométrico. Nosso objetivo foi que os estudantes compreendessem os conceitos de seno e cosseno a partir de atividades exploratórias e investigativas, tendo como subsídios materiais concretos, proporcionando assim um aprendizado prazeroso e significativo (ALVES, 1990). As atividades foram realizadas pela professora Darling Domingos em suas três turmas de 1° ano do ensino médio, no Colégio Estadual Brasil, situado em Mesquita, RJ.

DESENVOLVIMENTO

As relações trigonométricas são relações angulares importantes no estudo dos triângulos para a (e na) modelagem de fenômenos periódicos e cálculo de distâncias. Podem ser definidas como razões entre dois lados de um triângulo retângulo em relação a algum ângulo interno. Existem seis razões trigonométricas consideradas básicas: seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente.

Já o círculo trigonométrico, também chamado de círculo unitário, é uma circunferência que tem raio igual a 1. Seu centro também é o centro de eixos coordenados. Pode ser usado para obter determinadas propriedades trigonométricas especiais, além de facilitar na marcação de gráficos.

A primeira atividade foi construir o círculo trigonométrico. Os alunos foram separados em grupos de, no máximo, quatro participantes. Foi solicitado, uma semana antes, que cada grupo levasse os seguintes materiais: dois quadrados de papelão com 30 centímetros de lado, 1 folha

---

15 Disponível em https://www.laboratoriosustentaveldematematica.com/. Acessado em: 25 ago 2020.

de jornal, 50 centímetros de barbante, 24 alfinetes, régua, compasso, transferidor, lápis, canetas hidrográficas, cola, tesoura, tinta guache de cores claras e pincel.

Um dos quadrados de papelão foi pintado com tinta guache. No outro, os alunos desenharam, com auxílio do compasso, um círculo com 10 centímetros de raio (20 centímetros de diâmetro). Em seguida, o círculo desenhado foi recortado e pintado com tinta guache de cor diferente da utilizada anteriormente. Depois de seco, esse círculo foi utilizando como molde para fazer uma figura idêntica, dessa vez na folha de jornal. Após recortar, os alunos dobraram o círculo de jornal em quatro partes iguais, marcando, assim, o centro e os eixos x e y. O círculo de papelão foi colado ao quadrado de papelão. Sobre ele foi colocado o círculo de jornal. Com régua e caneta hidrográfica, os estudantes utilizaram as marcas das dobras no papel para desenhar, no papelão, os eixos x e y, dividindo o círculo em quatro quadrantes.

Com o círculo trigonométrico pronto, o segundo passo foi encontrar os ângulos notáveis (30°, 45° e 60°) no 1º quadrante e seus correspondentes nos outros quadrantes. Para isso, foi lembrado aos estudantes que uma volta completa no círculo é igual a 360°. Logo, dividido em 4 partes, cada quadrante terá 90°. Usando o transferidor, os estudantes encontraram o ângulo correspondente a 30° no 1º quadrante. A partir daí, foi possível determinar os locais dos ângulos correspondentes a 30° no 2°, 3º e 4° quadrantes, conforme a Figura 1. Já no 2º quadrante foi localizado o ângulo de 150º devido à simetria em relação ao eixo vertical (eixo y). No 3º quadrante foi localizado o ângulo de 210º devido à simetria em relação ao centro do círculo. No 4º quadrante foi a vez do ângulo de 330º devido à simetria em relação ao eixo horizontal (eixo x). O mesmo raciocínio foi utilizado para encontrar a correspondência em relação aos outros ângulos notáveis, de 45° e 60°, nos quatro quadrantes. E assim, os estudantes marcaram, com caneta hidrográfica, todos os ângulos notáveis e os seus correspondentes no círculo trigonométrico de papelão.

FIGURA 1. Determinação dos ângulos notáveis e seus correspondentes

Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos através do manuseio do objeto e das perguntas da professora que encaminharam a exploração, o encorajaram a registrar suas descobertas. Uma delas foi de que os ângulos em relação aos quadrantes são simétricos quanto aos eixos ou ao centro. Ou seja, nessa etapa foi explorada, a relação dos arcos do círculo trigonométrico com as extremidades simétricas em relação aos eixos coordenados ou ao centro do sistema cartesiano, e esta relação ajudará a calcular senos, cossenos e tangentes desses arcos. Dado um ponto M na circunferência trigonométrica associado à medida do ângulo 30º é possível determinar ângulos simétricos por reflexão no segundo, terceiro e quarto quadrantes usando os eixos x e y como simetria, por exemplo.

Podemos generalizar os resultados desse momento da atividade, tendo o ângulo α no primeiro quadrante medido em graus: no segundo quadrante o arco simétrico: $180^\circ - \alpha$; no terceiro quadrante ao arco: $180^\circ + \alpha$; no quarto quadrante o arco: $360 - \alpha$.

Na etapa seguinte, os estudantes analisaram triângulos retângulos semelhantes existentes no círculo trigonométrico. Para isso, eles fixaram alfinetes em todos os ângulos marcados e prenderam barbantes no centro do círculo, podendo assim manipular o objeto e encontrar qualquer triângulo retângulo dentro do círculo.

1º) O barbante que parte do centro do círculo é esticado até o alfinete que marca o ângulo desejado no 1º quadrante. O mesmo alfinete é utilizado para fixá-lo.

2º) O restante do barbante é esticado até sua projeção ortogonal no eixo x (formando um ângulo de 90º) e é fixado com um alfinete, marcando esse ponto.

3º) Do ponto marcado no eixo x, estica-se o barbante de volta para o centro do círculo, onde é fixado.

O mesmo procedimento foi realizado com os ângulos de 30°, 45° e 60° do primeiro quadrante. Esses passos foram repetidos também fazendo projeções em relação ao eixo y. A repetição é importante neste caso porque quanto mais imagens podermos dar a um conceito, melhor ele será construído, consolidado e definido. Os vértices dos ângulos de 90º de cada triângulo formado foram assinalados com alfinetes no eixo x. (Vide Figura 2 - na esquerda)

Ao observarem os triângulos retângulos formados com barbante, os alunos puderam relacionar a imagem à teoria que diz que dois triângulos serão semelhantes quando seus lados correspondentes possuírem medidas proporcionais e seus ângulos correspondentes também tiverem medidas iguais. Sabendo que seno do ângulo $\alpha = \frac{\textit{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\textit{hipotenusa}}$ e cosseno do ângulo $\alpha = \frac{\textit{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\textit{hipotenusa}}$.

Chegamos ao objetivo central de nosso trabalho: a compreensão dos conceitos de seno e cosseno. Os ângulos notáveis dos 4 quadrantes são 30º, 45º, 60º, 120° 135º, 150º, 210°, 225°. 240°, 300°, 315° e 330°. Porém ainda foi solicitado aos alunos que o seno dos seguintes ângulos: 30º, 45º, 60º, 120º, 135º, 150º, 210º, 300º, 315° fossem determinados. O valor do seno de cada ângulo restante será descoberto após o registro no círculo trigonométrico de papelão dos ângulos do exercício e através de alguns questionamentos feitos pela professora.

Para isso, primeiramente, os alunos construíram triângulos retângulos no círculo trigonométrico usando o barbante conforme feito no momento anterior. Os lados opostos aos ângulos marcados no centro do círculo trigonométrico foram medidos com régua. Já o valor da hipotenusa de cada triângulo retângulo não precisou ser medido, pois coincidia com o raio da circunferência, de valor já conhecido: 10 centímetros.

Com o auxílio da calculadora e da fórmula dada, os estudantes encontraram os valores do seno dos ângulos solicitados. Apresentaremos uma reprodução das anotações feitas por eles.

a. $\text{sen } 30° = \frac{5}{10} = 0{,}5;$

b. $\text{sen } 45° = \frac{7{,}1}{10} = 0{,}71;$

c. $\text{sen } 60° = \frac{8{,}7}{10} = 0{,}87;$

d. $\text{sen } 135° = \frac{7{,}1}{10} = 0{,}71;$

e. $\text{sen } 150° = \frac{5}{10} = 0{,}5;$

f. $\text{sen } 210° = -\frac{5}{10} = -0{,}5;$

g. $\text{sen } 240° = -\frac{8{,}7}{10} = 0{,}87;$

h. $\text{sen } 300° = -\frac{8{,}7}{10} = 0{,}87;$

i. $\text{sen } 330° = -\frac{5}{10} = -\ 0{,}5.$

Ao término dos cálculos, os estudantes foram lembrados que o círculo trigonométrico é uma circunferência que tem raio igual a 1. Foi questionado, então, como poderíamos fazer para que nosso círculo (com raio igual a 10 centímetros) tivesse raio igual a 1. Um dos alunos respondeu que bastava converter as medidas para decímetros. Assim, os resultados encontrados ao realizar a divisão da medida do cateto oposto ao ângulo pelo raio, ambos em centímetros, seriam iguais para a mesma divisão com as medidas em decímetros. Eles ainda comentaram que era claro que o cálculo para seno seria mais simples com as medidas convertidas em decímetros, pois o raio é igual a 1.

As medidas dos catetos opostos e do raio foram, então, convertidas em decímetros, e os alunos refizeram os cálculos do seno. Com o raio igual a 1 decímetro, o valor do seno passou a corresponder ao valor do cateto oposto (cateto oposto/hipotenusa). Como os catetos opostos ao ângulo são paralelos ao eixo y, essas medidas foram marcadas no eixo y com alfinete. Cada alfinete preso no eixo y representa a medida dos catetos opostos em decímetro e é o resultado do seno do ângulo correspondente.

Ao registrar os valores no eixo y encontrados na questão, os estudantes foram lembrados que o círculo trigonométrico está associado diretamente ao sistema cartesiano pelo centro da circunferência ser simultaneamente o ponto de origem do sistema cartesiano, assim os sinais das razões trigonométricas são analisados de acordo com as suas posições no círculo. E observaram que os valores dos senos são iguais nos seguintes casos: sen 30º = sen 150º = 0,5; sen 45º = sen 135º = 0,71; sen 60º = sen 120º = 0,87; sen 210º = sen 330º = -0,5; sen 240º = sen 300º = -0,87.

Os estudantes perceberam que ficou um alfinete sem registro, conforme a Figura 2. Nesse momento a professora questionou os estudantes: Qual é o valor que estava faltando no eixo y? Esse valor representa o seno de quais ângulos? Comparando com os valores positivos registrados, logo eles disseram que faltava o valor -0,71 e que representa o seno dos ângulos 225º e 315º.

Analogamente, a professora pediu aos estudantes para que fosse determinado o cosseno de alguns ângulos notáveis 30º, 45º, 60º, 120º, 135º, 150º, 225º, 300º e 330º. Esse detalhe foi de propósito para posteriormente gerar alguns questionamentos. O processo foi o mesmo: construíram os triângulos com barbante no círculo trigonométrico, mediram os lados adjacentes aos ângulos centrais com a régua e os compararam com a hipotenusa como no exercício anterior. Ao término da questão, os estudantes registraram os valores no eixo x, lembrando que o círculo consta no plano cartesiano, conforme a Figura 2.

ANÁLISE DE REGULARIDADES

Na etapa final, decidimos aplicar um questionário com 8 perguntas, que foram elaboradas por Rosembaum (2010) e constam em sua dissertação de mestrado intitulada "*Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista*", que investigou a compreensão dos alunos sobre funções trigonométricas ao realizar atividades com o uso de calculadora e o *software* GeoGebra.

A folha com o questionário foi entregue aos grupos, o mesmo desde o início do projeto, numa outra aula. Os grupos responderam ao questionário tendo em mãos apenas o círculo trigonométrico de papelão. O objetivo dessa etapa foi facilitar a visualização das razões trigonométricas no momento em que o estudante manuseia o círculo trigonométrico de raio 1; perceber que o valor do seno de um ângulo é a sua projeção ao eixo y; perceber que o valor do cosseno de um ângulo é a sua projeção ao eixo x; perceber algumas regularidades geométricas para o seno e o cosseno.

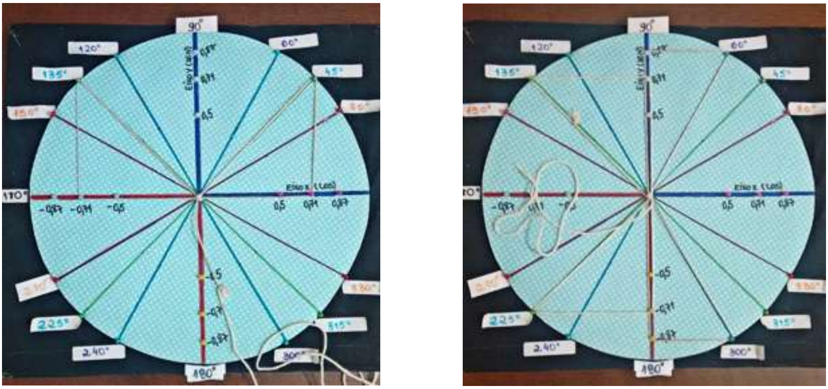
Questões para análise

1. Escreva abaixo os pares de ângulos que têm o mesmo valor de seno.
2. Você consegue perceber alguma regularidade que ocorre entre os pares de ângulos com o mesmo seno? Qual?
3. Escreva abaixo os pares de ângulos que tem valor opostos de seno.
4. Você consegue perceber alguma regularidade que ocorre entre os pares de ângulos com senos opostos? Qual?
5. Escreva abaixo os pares de ângulos que têm o mesmo valor de cosseno.
6. Você consegue perceber alguma regularidade que ocorre entre os pares de ângulos com o mesmo cosseno? Qual?
7. Escreva abaixo os pares de ângulos que tem valor opostos de cosseno.
8. Você consegue perceber alguma regularidade que ocorre entre os pares de ângulos com cossenos opostos? Qual?

Para determinar o cosseno de um ângulo β basta formar um triângulo retângulo esticando o barbante do centro do círculo ao ângulo β, e daí até sua projeção ortogonal no eixo x, assim encontrará o valor do cosseno de β que está registrado no eixo x, conforme Figura 2 na esquerda.

Para determinar o seno de um ângulo β basta formar um triângulo retângulo esticando o barbante do centro do círculo ao ângulo β, e daí até sua projeção ortogonal no eixo y, assim encontrará o valor do cosseno de β que está registrado no eixo y, conforme a Figura 2 na direita.

Figura 2. Círculo trigonométrico



Fonte: Dados da pesquisa.

Cada grupo teve uma aula de 100 minutos para responder ao questionário, que foi entregue à professora.

CONSIDERAÇÕES

Posteriormente, nós do projeto Laboratório Sustentável de Matemática analisamos juntas os questionários respondidos pelos grupos. As perguntas do questionário não eram fechadas, permitindo aos alunos discorrer sobre o que perceberam. Observamos ainda que a atividade proporcionou uma troca de ideias entre os participantes dos grupos, além de relatos bastante ricos.

Pudemos perceber, também, como o trabalho com o círculo trigonométrico de papelão contribuiu para o aprendizado dos alunos, facilitando a visualização geométrica dos conceitos. Eles verificaram a simetria dos pares de ângulos em relação ao eixo y e perceberam que os pares de ângulos com senos opostos possuem o mesmo valor de cosseno. O que dificilmente não seria percebido utilizando cálculos e fórmulas.

O trabalho com o círculo trigonométrico permitiu a articulação entre teoria e prática, ambas com os mesmos valores hierárquicos para a produção de saberes. Isso faz parte do que chamamos de boas práticas profissionais, principalmente, para quem vive o chão da escola.

Compreendemos que, por meio da vivência do conjunto de atividades proposto durante o trabalho que desenvolvemos, o entendimento dos alunos acerca do tema foi ampliado devido às possibilidades existentes ao trabalhar com material didático. Foi possível girar o círculo trigonométrico, verificar medidas com a régua, dobrar para observar simetria etc. Isso permitiu que a turma percebesse o conteúdo de forma tátil e visual, possibilitando uma aprendizagem mais prazerosa.

Lorenzato (2010) salienta que cada pessoa tem uma visão diferente ao manusear um material concreto, e que qualquer material didático sozinho não colabora na apreensão do conhecimento, é necessário à sua utilização entrelaçando a uma proposta pedagógica. O que foi verificado na prática de atividades desenvolvidas em nosso trabalho, onde cada grupo de alunos utilizou o círculo trigonométrico da forma que achou melhor, escolhendo conceitos matemáticos variados.

REFERÊNCIAS

ALVES, Rubem. **O prazer de aprender**. Conferência proferida no Encontro de Psicopedagogos. São Paulo, julho/1990.

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2010.

ROSENBAUM, Luciane Santos. **Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista**. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em <https://goo.gl/plZ9I2>. Acesso em: 28 ago 2020.

PAIVA, M. **MATEMÁTICA (Ensino Médio)**. São Paulo: Moderna, 2004. 1.ed. volume 2. p.6.

SILVA, D.M.V. Oficina: **Trigonometria na circunferência**, disponível em: <goo.gl/Vx4552>. Acesso em: 28 ago 2020.

GIRALDO, V. CARVALHO, L. M.; TALL, D. **Conflitos Teórico-Computacionais e a Formação da Imagem Conceitual de Derivada.**

*O artigo é uma revisão do publicado na Revista Presença Pedagógica, mar./abr. 2017, v.23, n.134, ISSN: 1413-1862.

INVESTIGANDO A CONEXÃO ENTRE A UTILIZAÇÃO DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA E A AVALIAÇÃO

Rafael Filipe Novôa Vaz[16]
Felipe Olavo Silva[17]
Paula Monteiro Baptista[18]

INTRODUÇÃO

As aulas de Matemática normalmente possuem características bem definidas: são expositivas, se iniciam com uma breve explicação teórica do professor, seguida de alguns exercícios. O livro didático e o professor assumem o papel de 'detentores do conhecimento'. Os alunos, por sua vez, comportam-se passivamente, são receptores desse conhecimento. Skovsmose (2000) denomina esse padrão de aula de Paradigma do Exercício, descrito como aula expositiva seguida de exemplos e uma lista de exercícios de aplicação.

Do mesmo modo que as aulas expositivas se consolidaram como forma predominante de ensinar matemática, as provas individuais, escritas, com tempo delimitado e sem consulta se configuraram como os principais instrumentos utilizados na avaliação das aprendizagens. O modo de conceber a avaliação atual teve sua origem no século XVII. No entanto, foi no final do século XIX e início do século XX que as avaliações foram pensadas para atender a um grande contingente de estudantes. Com os testes em massa, a avaliação assume um papel classificatório. O desenvolvimento de testes padronizados e testes de QI foram elaborados para selecionar e classificar estudantes nas escolas,

---

[16] Doutorando em Ensino de matemática (PEMAT/UFRJ); Pesquisador GPAM/UFRJ; Professor IFRJ/CPAR.

[17] Mestre em Matemática (ProfMat/UNIRIO); Pesquisador GPAM/UFRJ; Professor SME/Rio e SEEDUC/RJ.

[18] Doutoranda em Ensino de Matemática (PEMAT/UFRJ); Pesquisadora GPAM/UFRJ; Fórum Cultural CELART.

profissionais na indústria e militares nas forças armadas. (FERNANDES, 2009; GUBA; LINCOLN, 2011)

Os testes escolares tinham como objetivo mensurar a aprendizagem dos estudantes. Nesse contexto, a avaliação estava associada à ideia da medida e, apesar de todos os avanços na Educação no século XX, tal convicção está, até hoje, fortemente enraizada nas nossas concepções avaliativas. A ideia de medir está relacionada à filosofia, amparada em pressupostos positivistas e tecnicistas. Tais pressupostos sustentam o que Fernandes (2009) denomina de Paradigma Psicométrico da Avaliação Escolar. As principais características desse paradigma são: é possível determinar exatamente o que os alunos sabem e são capazes de fazer; as aprendizagens constituem uma realidade que pode ser avaliada de forma objetiva e neutra; a avaliação ocorre através de instrumentos cientificamente construídos e a avaliação deve centrar-se mais nos resultados do que nos processos.

Em oposição à função somativa, que através das provas afere a aprendizagem, está a função formativa da avaliação. Esta função atribui à avaliação um relevante papel integrador, associando ensino, aprendizagem e avaliação. Normalmente, a função formativa da avaliação é associada a diversos procedimentos avaliativos: autoavaliação, avaliação em pares, os testes formativos, prova em fases, etc. De modo análogo, em contraponto ao Paradigma do Exercício, estão o Cenário para a Investigação (SKOVSMOSE, 2000) e as atividades de investigação e exploração (PONTE, 2004, 2017): um ambiente de aprendizagem mais propício para o desenvolvimento de atividades investigativas, de pequenos projetos, com a exploração de diferentes materiais concretos e recursos tecnológicos, caracterizando assim o que chamamos neste texto de Laboratório de Ensino de Matemática (LEM).

A primeira premissa desta pesquisa é que o ensino através do LEM se configura como uma possibilidade de romper o Paradigma do Exercício e promover um ambiente diferenciado para a aprendizagem em Matemática: atividades de exploração e investigação são concebidas e desencadeadas mais naturalmente, onde o estudante passa a assumir um papel central no processo de ensino-aprendizagem.

A segunda premissa é que as atividades do LEM dialogam mais e melhor com as avaliações formativas, por romperem com concepções positivistas e tecnicistas e estarem, ambas, mais associadas às concepções socioconstrutivistas e dialógicas da Educação. Ao conceber a aquisição de conhecimento como uma construção cognitiva e social, em que a interação com o outro seja relevante para sua eficácia e o professor tenha seu papel ressignificado para a figura de mediador da aprendizagem, é coerente supor que a avaliação em pares e o feedback dado pelo professor em testes formativos sejam mais adequados a esse novo modelo.

Este trabalho faz parte de um estudo desenvolvido pelo Grupo de Pesquisa em Avaliação em Matemática (GPAM - UFRJ) que investiga a conexão existente entre a utilização de atividades relacionadas ao LEM e os processos avaliativos de professores de Matemática.

O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Quando se fala em Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), tem-se a ideia de um espaço com prateleiras cheias de sólidos geométricos, jogos matemáticos e diversos materiais prontos. O LEM será interpretado neste texto como qualquer local utilizado pelo professor para a prática de “ensino-aprendizagem exploratório”, termo sugerido por Ponte (2017, p. 121).

Nessa prática, o professor não fornece todas as informações como nas aulas expositivas ditas tradicionais, deixando a importante parte de descoberta para os estudantes. A maior vantagem do trabalho com LEM talvez não seja o material por si, mas o ambiente criado pela utilização dele. Kaleff (2011, p. 8) afirma que “nos procedimentos laboratoriais os alunos investigam, descobrem e constroem conhecimentos por meio da interação entre os colegas, o professor e o material”. Nesse ambiente, os estudantes fazem questionamentos e reflexões a respeito das experiências vivenciadas. O protagonista da aula é o aluno e o professor torna-se o gestor da aprendizagem. É importante ressaltar que em situações de ensino remoto, o LEM pode ser concebido nos Ambientes Virtuais de Aprendizagem ou, até mesmo, no local de moradia do aluno.

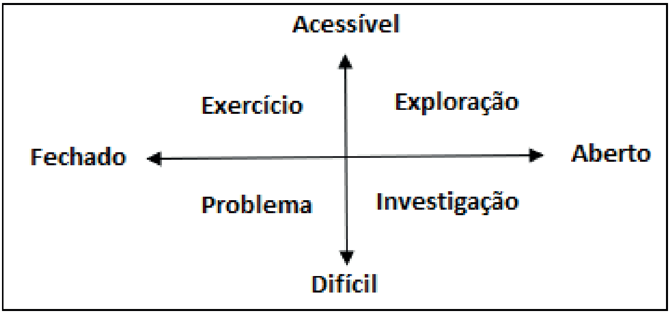
Incentivar a manipulação de materiais concretos e virtuais nas aulas de matemática e estabelecer ambientes de exploração e investigação podem ressignificar a relação professor-aluno, trazendo diversos benefícios para a educação matemática e para a formação de um cidadão mais crítico. Vale ressaltar que os alunos vivem em um mundo onde o acesso à informação pronta é imediato. Sendo assim, o conhecimento necessário para o exercício da cidadania não se relaciona com a memorização, como há algumas décadas, mas com a interpretação e análise das informações.

O foco tende a sair da resposta certa e se fixar mais no processo usado para a obtenção desta. “A ênfase desloca-se do ensino para a atividade mais complexa ensino-aprendizagem” (PONTE, 2017, p. 121). A Base Nacional Comum Curricular, em seus pressupostos, considera o processo de investigação como uma forma privilegiada de atividade matemática, o qual se estabelece como objeto e estratégia para a aprendizagem (BRASIL, 2018).

Segundo Ponte (2004, p. 25), “uma boa estratégia de ensino é geralmente composta de diferentes tipos de tarefas”. Elas podem ser “acessíveis ou difíceis, abertas ou fechadas, contextualizadas ou não” (p. 25). Os exercícios são tarefas acessíveis pois são bem diretos, geralmente, com enunciados compostos por verbos imperativos e de fácil resolução. Os problemas envolvem alguma dificuldade, demandam melhor interpretação e solicitam uma solução para a situação explicitada. Apesar de serem diferentes com relação à dificuldade, ambos são atividades fechadas, já que possuem apenas uma resposta correta.

Em contrapartida, tarefas de exploração não solicitam uma resposta, o objetivo é que os alunos façam inferências matemáticas sobre a experiência vivenciada. Nas investigações, as perguntas surgem durante o processo, que podem ser respondidas ou não, há demanda por mais tempo para serem concluídas. Essas duas atividades são abertas, a diferença é que as investigações são mais difíceis, pois demandam a elaboração de hipóteses e a junção de conhecimentos para verificá-las (PONTE, 2004). O quadro abaixo, faz um resumo destes quatro tipos de tarefas com relação às dimensões de abertura e dificuldade.

Figura 1 - Distribuição de tarefas quanto à dificuldade e abertura.



Fonte: Ponte (2004)

Ponte (2017) elucida que uma mesma tarefa pode se caracterizar como um exercício ou uma investigação, dependendo do que os estudantes já sabem. Suponhamos que os estudantes conheçam as fórmulas para calcular as áreas de quadrados e retângulos, mas não conheçam a fórmula da área do triângulo. Uma simples tarefa onde os estudantes são solicitados a calcular a área de um triângulo, em que tenham que explorar materiais concretos para determinar a área desejada, pode se configurar em uma atividade bem proveitosa.

Em relação à sua natureza, as tarefas podem ser classificadas em matemática pura, semi-realidade ou realidade. Os exercícios sem nenhum tipo de contextualização são caracterizados como de matemática pura. Por exemplo: resolva a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Uma tarefa relacionada à realidade é formada por situações verdadeiras, reais. Podemos citar como exemplo atividades: (1) o cálculo da perda do poder de compra a partir da inflação em determinado período de tempo ou (2) o cálculo da área da superfície e do volume de um cubo construído em uma atividade de LEM.

Se o problema da perda do poder de compra fosse inspirado em situações reais, mas artificial, ou seja, se os dados não fossem absolutamente reais, teríamos uma tarefa de semi-realidade. Skovsmose (2000, p. 74) descreve esta contextualização como uma semi-realidade, pois "é totalmente descrita pelo texto do exercício; nenhuma outra informação é relevante para a resolução do exercício; mais informações são totalmente irrelevantes; o único propósito de apresentar o exercício é resolvê-lo."

A partir da escolha estratégica de materiais concretos ou de situações relacionadas à realidade, o professor cria atividades abertas, nas quais poderá provocar discussões, receber as proposições feitas pelos alunos, fazer questionamentos e guiá-los. Neste processo, o conhecimento matemático e multidisciplinar é desenvolvido pelos estudantes apoiados pelo professor. Destaca-se também a grande importância do LEM no desenvolvimento de atitudes ligadas à formação do perfil investigativo do aluno, possibilitando um contato mais próximo com a matemática. Assim, aumenta-se a sua perseverança na busca de soluções e a confiança na sua capacidade de aprender e investigar. (FILHO; OLIVEIRA; CABRAL, 2019, p. 140)

As atividades investigativas e exploratórias caracterizadas pelo LEM propiciam reflexões sobre um importante tema que permeia os debates e as pesquisas em Educação há mais de um século: avaliação escolar. Quais instrumentos e quais são as funções avaliativas que melhor dialogam com as atividades do LEM?

AVALIAÇÃO NO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Fernandes (2008) e Guba e Lincoln (2011) defendem uma avaliação amparada em uma perspectiva mais construtivista. Ontologicamente, o paradigma construtivista nega a existência de uma realidade objetiva. As realidades são construções sociais. Epistemologicamente, o enfoque construtivista nega a possibilidade do dualismo sujeito-objeto, propondo uma interação entre observador e observado. Metodologicamente, rejeita a abordagem dominante e

> manipulatória (experimental) que caracteriza a ciência e substitui por um processo hermenêutico-dialético que aproveita ao máximo – e leva em conta – a interação observador-observado para criar uma realidade construída que seja, tanto quanto possível, fundamentada e esclarecida em um determinado momento. (GUBA; LINCOLN, 2011, p. 53)

Por suas características de interação e diálogo, entendemos que a abordagem construtivista dialoga com o ensino-aprendizagem exploratório desenvolvido nos Laboratórios de Ensino de Matemática. Partindo dessa premissa, consideramos que as avaliações praticadas comumente nas escolas, tanto no que se refere aos instrumentos como às funções, não são coerentes com o LEM.

As provas, caracterizadas por exames individuais, escritos, sem consulta e com tempo delimitado, e a função somativa que a avaliação normalmente adquire - classificatória e seletiva - estão em dissonância com as práticas investigativas-exploratórias. As tarefas do LEM são construídas em um ambiente de diálogo e de cooperação. Neste ambiente, que Skovsmose (2000) denomina de Cenário para Investigação, o professor atua como mediador da aprendizagem, a memorização fica em segundo plano, a cooperação se torna mais importante. O conhecimento é construído na interação entre professores e estudantes, entre estudantes e seus pares. Já a avaliação por pares e a autoavaliação, possíveis avaliações formativas, são opções que estão em consonância com as atividades do LEM.

Ao contrário da Somativa, a Função Formativa parece mais coerente com a prática do LEM, pois é voltada à promoção da aprendizagem e tem como objetivo a regulação do ensino e da aprendizagem. Ocorre durante todo o processo, e não em uma data pontual no final do ciclo. Tem por objetivo identificar as dificuldades dos estudantes através de um feedback orientar as aprendizagens. A Avaliação Formativa pode ter como avaliadores os professores e os próprios estudantes (PINTO, 2019).

No LEM, o erro é, ou pelo menos deveria ser, ressignificado em comparação às aulas que denotam o paradigma do exercício. O erro não é algo a ser execrado, uma vez que faz parte do processo de ensino-aprendizagem. Exploramos o erro! Testamos! Experimentamos! Aprendemos com o erro. Neste cenário, qual é o papel de um instrumento avaliativo pontual, aplicado no fim de um período, que visa "medir" a aprendizagem?

Se o conhecimento é multifacetado, complexo, construído individualmente e inextricavelmente ligado ao contexto no qual o aprendizado ocorre, conclui-se que nenhum instrumento único é capaz de "medir" esse conhecimento de maneira consistente e significativa (ROMAGNANO, 2011). A prova não fornece uma medida, fornece uma leitura (HADJI, 2001). Uma leitura, pois, depende de como o avaliador interpreta as informações coletadas do que será avaliado. O próprio instrumento foi selecionado e elaborado a partir de concepções do avaliador.

A INVESTIGAÇÃO REALIZADA

Foi aplicado um questionário virtual por meio da plataforma Google Forms, na forma de divulgação de um link de internet em grupos virtuais de professores que ensinam matemática, em julho de 2020. Desde então foram obtidas respostas de sessenta de professores.

O referido questionário coletou dados sobre o perfil profissional dos entrevistados e sobre as práticas de LEM, sobre questões utilizadas em sala de aula e tipos de instrumentos e/ou práticas de avaliação. Neste texto, será feita uma análise das respostas coletadas por três perguntas deste questionário, denominadas de questões 1, 2 e 3. A primeira questão teve por objetivo classificar os entrevistados em dois grupos: professores que trabalham frequentemente com LEM e professores que não trabalham com LEM. A questão 2 foi construída com o objetivo de investigar, indiretamente, a utilização de quatro tipos de atividades: exercício, problema, exploração e investigação. A questão é composta de um enunciado contendo um pequeno texto e um infográfico (Figura 2).

Figura 2 – Enunciado da questão 2

A imagem contém dados a respeito dos casos de infecção pelo COVID-19 no Brasil colhidos no site do Ministério da Saúde, em 19/04/2020. A respeito de possíveis atividades desenvolvidas em aula a partir desta tabela. Marque as opções que contém tipos de atividades que você geralmente desenvolve:

	Confirmados	Óbitos		Confirmados	Óbitos
Acre (AC)	163	6	Paraíba (PB)	236	29
Alagoas (AL)	159	15	Paraná (PR)	987	48
Amapá (AP)	416	11	Pernambuco (PE)	2.459	216
Amazonas (AM)	2.044	182	Piauí (PI)	145	10
Bahia (BA)	1.230	45	Rio de Janeiro (RJ)	4.765	402
Ceará (CE)	3.252	186	Rio Grande do Norte (RN)	531	25
Distrito Federal (DF)	827	24	Rio Grande do Sul (RS)	854	24
Espírito Santo (ES)	1.099	30	Rondônia (RO)	128	4
Goiás (GO)	393	18	Roraima (RR)	222	3
Mararanhão (MA)	1.205	48	Santa Catarina (SC)	975	32
Mato Grosso (MT)	174	5	São Paulo (SP)	14.267	1.015
Mato grosso do Sul (MS)	168	5	Sergipe (SE)	83	5
Minas Gerais (MG)	1.154	39	Tocantins (TO)	33	1
Pará (PA)	685	34	Brasil	38.654	2.462

Fonte: G1, em 19/04/2020.

Nessa questão, os professores deveriam selecionar, dentre as quatro opções a seguir, aquelas que eles frequentemente utilizam nas suas aulas. Os autores elaboraram quatro opções, 1, 2, 3 e 4 que representassem, respectivamente, as quatro categorias descritas por Ponte (2004): exercício, problema, exploração e investigação. As opções são:

1. Leia a tabela e calcule o percentual de óbitos em relação aos casos confirmados de infecção pelo COVID-19 em cada um dos seguintes Estados: Pernambuco, Rio de Janeiro e Goiás.
2. Taxa de letalidade é a razão entre o número de óbitos e o número de pessoas que foram acometidas por uma doença, normalmente expressa na forma de porcentagem. O Brasil tem taxa de letalidade de aproximadamente 6,4%, quais Estados possuem taxa de letalidade superior à média brasileira?
3. Respiradores são responsáveis por facilitar a respiração de pacientes acometidos pela COVID-19 que tem os pulmões comprometidos. Suponha que o Governo Federal tenha comprado 1.000 respiradores para distribuir entre todos os Estados do Brasil. Elabore uma sugestão do quantitativo de respiradores a serem distribuídos por Estado.

4. Um digital influencer leu a tabela e fez a seguinte postagem: “O Estado da Paraíba tem menor número de óbitos do que o Maranhão, então o sistema de saúde da Paraíba está proporcionando melhor assistência aos infectados pela COVID-19”. Faça uma investigação baseada em dados de fontes oficiais e cálculos matemáticos a respeito da proliferação da COVID-19 nestes dois Estados para concluir se a afirmação feita pelo digital influencer pode ser considerada uma Fake News.

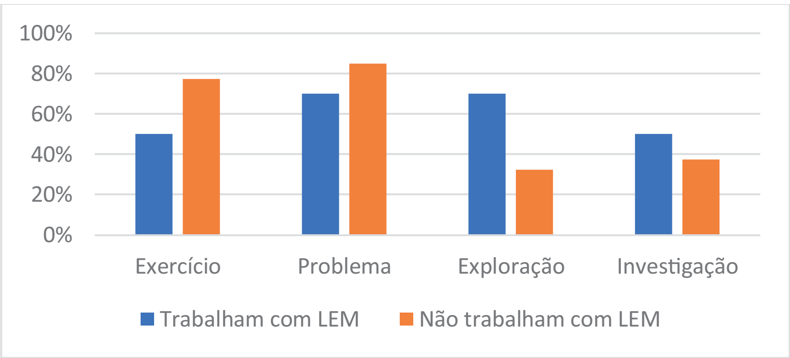
A questão 3 traz um rol de 7 (sete) opções com diferentes tipos de instrumentos e/ou práticas de avaliação, das quais três têm características somativas (simulado, ranqueamento e provas bimestrais) e quatro, formativas (autoavaliação, utilização de feedback, questões abertas e a utilização constante de testes e trabalhos). Cada entrevistado assinalou as opções correspondentes aos instrumentos e/ou práticas que ele utiliza suas avaliações. Dentre as seguintes:

- Simulado, exame composto por questões de múltipla escolha retiradas de avaliações de larga escala (SAEB, ENEM, Pisa, vestibulares, concursos públicos, ...);
- Autoavaliação por parte dos alunos;
- Utilização de Feedback individual, escrito ou oral, com comentários sobre a prova realizada;
- Ranqueamento dos alunos em avaliações e/ou premiações aos alunos com melhores notas;
- Utilização em provas de questões que admitem diversas respostas válidas, neste tipo de questão geralmente é solicitado que o aluno crie uma resposta que atenda a determinados critérios;
- Provas bimestrais com questões predominantemente discursivas;
- Utilização de testes e/ou trabalhos durante o bimestre, com curto espaço de tempo entre eles.

OS RESULTADOS

A partir dos resultados da questão 1, verificou-se que que vinte professores respondentes utilizam, com frequência alta ou média, atividades de laboratório e quarenta utilizam pouco, raramente ou não utilizam. Para efeito de classificação neste estudo, dividiremos os respondentes em dois grupos: os que trabalham (20) e aqueles que não trabalham (40) com LEM. A partir da questão 2, foi possível verificar os tipos de atividades utilizadas pelos respondentes. O gráfico 1 ilustra a frequência percentual da utilização de exercícios, problemas, atividades de exploração e investigação para os dois grupos de professores: aqueles que trabalham com LEM e aqueles que não trabalham.

Gráfico 1 - Tipos de tarefas por grupo



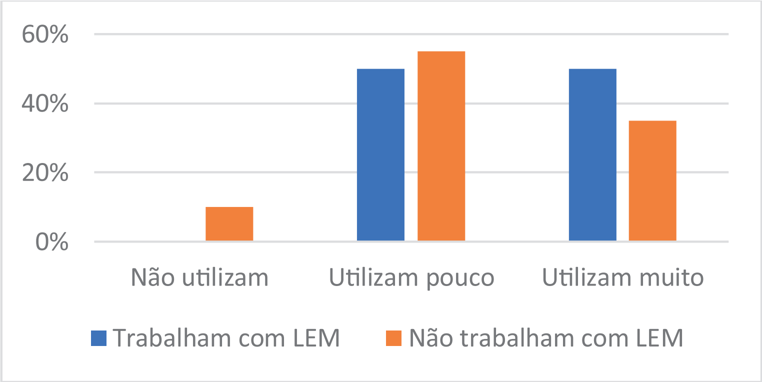
Fonte: elaborado pelos autores

A comparação dos dois grupos evidencia a diferença na estrutura de aula quanto aos tipos de atividades empregadas. O grupo de professores que trabalha com LEM consegue circular melhor nos diferentes ambientes, já que neste grupo atividades abertas (exploração e investigação) são amplamente utilizadas. Para comprovar estatisticamente a relação encontrada, realizou-se um teste de independência denominado Qui-quadrado. Este teste apontou, com certeza superior a 95%, que dentre os respondentes, a utilização de LEM está associada à utilização de questões de exploração e investigação. Esse resultado é, de certa forma, coerente com as práticas de laboratório.

Acreditamos que propor atividades que permitam a circulação em diferentes ambientes de aprendizagem pode aumentar o engajamento, espírito crítico e autoconfiança dos alunos, aspectos desejáveis, mas pouco explorados nas aulas tradicionais. Além disto, colaboram para a implementação de autoavaliação, feedback de boa qualidade, questões com respostas abertas, entre outros aspectos de avaliações com características formativas. Em relação àqueles que não trabalham frequentemente com LEM, observamos uma notória preferência em utilizar atividades que envolvam exercícios e problemas, havendo baixa utilização de atividades abertas. Há indicação de um trabalho em sala de aula muito focado em atividades fechadas, o que nos remete às aulas pautadas no paradigma do exercício e nos sugere avaliações pautadas em exames individuais.

A questão 3 tinha por objetivo verificar a existência de uma conexão entre os instrumentos e práticas avaliativas e a utilização do LEM. Dentre as sete opções desta questão, quatro eram mais associadas às avaliações formativas. Os respondentes foram classificados em relação à utilização destes instrumentos e/ou práticas: aqueles que não utilizam nenhum destes, os que utilizam 1 ou 2 destes (utilizam pouco) e os que utilizam 3 ou todos os 4 (utilizam muito). O gráfico 2 ilustra, percentualmente, estas categorias relacionadas ao trabalho ou não com LEM.

Gráfico 2 – Frequência de utilização de instrumentos formativos



Fonte: elaborado pelos autores

Estes dados indicam uma tendência de maior emprego de instrumentos e/ou práticas associadas às avaliações formativas pelo grupo de professores que trabalha com LEM. Note que, dentre os que não utilizam avaliações mais formativas, nenhum deles trabalha com LEM. Novamente realizou-se o teste qui-quadrado para comprovar se havia dependência entre as duas variáveis: trabalho com LEM e utilização de práticas formativas. O teste apontou, com uma certeza de 75,5%, que é possível concluir que os professores que trabalham com LEM são mais propensos a utilizar instrumentos e práticas formativas e vice-versa.

Como o resultado do teste não foi superior a 95%, não podemos afirmar essa propensão com grande relevância estatística. Neste sentido, surge a necessidade de novas investigações que possibilitem traçar de maneira mais conclusiva os perfis avaliativos dos profissionais que trabalham com LEM.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo não associamos a aula expositiva e as avaliações somativas como vilãs do ensino. Essa associação seria simplista e equivocada. Há muitos outros fatores, internos e externos à escola, que interferem na qualidade do processo de ensino-aprendizagem. No entanto, os resultados indicam que há uma conexão entre os dois paradigmas: o do exercício e o da avaliação. Professores que adotam um perfil mais tradicional tendem a adotá-lo tanto no modo de ensinar como no modo de avaliar.

Segundo Skovsmose (2000, p.89) “a educação matemática deve mover-se entre diferentes ambientes”. Esses ambientes percorrem o modo como ensinamos, o modo como avaliamos e, consequentemente, o modo como os estudantes aprendem. Entretanto, considerando a multiplicidade cognitiva dos indivíduos e a realidade multifacetada e complexa na sociedade em que vivemos, associar o ensino de matemática às aulas exclusivamente expositivas e as avaliações às provas é algo que deve e precisa ser reconsiderado.

REFERÊNCIAS

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO / CÂMARADE EDUCAÇÃO BÁSICA. Resolução CNE/CP nº 2, de 22 de dezembro de 2017. Brasília, 2017.

CASOS de Coronavírus e número de mortes no Brasil em 19 de abril. G1, 19/04/2020. Disponível em: https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/04/19/casos-de-coronavirus-e-numero-de-mortes-no-brasil-em-19-de-abril.ghtml. Acesso em: 20 abr. 2020.

FERNANDES, D. Avaliar para aprender: fundamentos, práticas e políticas. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

FILHO, J. R. S.; OLIVEIRA, L. M.; CABRAL, M. F. B. Importância e Implantação do Laboratório de Ensino de Matemática. Ciências exatas e tecnológicas, Aracaju – SE, v. 5, n.2, p. 135-142, Mar, 2019.

GUBA, E. G.; LINCOLN, Y. S. Avaliação de quarta geração. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

HADJI, C. Avaliação desmistificada. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001. 136 p.

KALEFF, A. M. M.R. Criatividade, educação matemática e laboratórios de ensino. In: Encontro Brasiliense de Educação Matemática, 5., 2011, Brasília. Palestras. Distrito Federal: SBEM-DF, 2011, p. 1-12. Disponível em: http://www.sbemdf.com.br/eventos/ebrem/edicoes-anteriores. Acesso em: 23 jun. 2020.

PONTE, J. P. Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. In: GIMÉNEZ, J.; SANTOS, L.; PONTE, J. P. (Coord.). La actividad matemática en el aula. Barcelona: Editorial GRAÓ, 2004. p. 25-34.

PINTO, J. Avaliação Formativa: uma prática para a aprendizagem. In: ORTIGÃO, M. I. R.et al (org.). Avaliar para aprender no Brasil e em Portugal: perspectivas teóricas, práticas e de desenvolvimento. Curitiba: CRV, 2019. v. 1, p. 19 – 44

ROMAGNANO, L. The myth of objectivity in mathematics assessment. Mathematics Teacher, v. 94, n. 1, p. 31-37. 2001

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. Bolema, Rio Claro - SP, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

Nota: este texto foi originalmente submetido ao IX SPEM, sofrendo poucas modificações para a confecção deste capítulo.

IDEIAS MATEMÁTICAS PRESENTES NAS MANIFESTAÇÕES ARTÍSTICAS DAS MÁSCARAS AFRICANAS: UMA CONCEPÇÃO AFROETNOMATEMÁTICA PARA A PRÁTICA DOCENTE

Cleiton da Silva Resplande[19]
Frederico Alan de Oliveira Cruz[20]

INTRODUÇÃO

O presente texto compõe um dos tópicos de discussão de uma dissertação de mestrado intitulada "Os saberes populares da etnomatemática numa cosmovisão africana: contribuições à etnociência" (RESPLANDE, 2020), construída durante o período de formação ocorrida no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGEduCIMAT), na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). O tema principal surgiu a partir da ideia de possibilitar o fortalecimento de uma visão etnocientífica, que favoreça a aprendizagem dos estudantes, e ao mesmo tempo possa cooperar com o processo de valorização e resgate da cultura africana e afro-brasileira.

A possibilidade de impacto positivo na aprendizagem está apoiada em Forde (2008) que atribui o baixo desempenho de grande parte dos estudantes brasileiros nas avaliações na falta de identificação do universo escolar com o mundo sociocultural vivenciado por eles. Além disso, apesar de mais da metade da nossa população ser formada por negros, segundo os dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2019), são raros os exemplos e práticas que possam mostrar as contribuições - culturais, científicas e tecnológicas - deste grupo no currículo escolar. Além disso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2019) destaca a importância de um ensino com contribuições multiculturais:

[19] Professor Regente da SMERJ e da SEEDUC RJ. Membro do Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem em Física da UFRRJ. Licenciado em Matemática pela UCB.

[20] Professor Associado do Departamento de Física e Líder do Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem de Física da UFRRJ. Doutor em Ciências e Licenciado em Física pela UERJ.

> O exercício de reflexão, que preside a construção do pensamento filosófico, permite aos jovens compreender os fundamentos da ética em diferentes culturas, estimulando o respeito às diferenças (linguísticas, culturais, religiosas, étnico-raciais etc.), à cidadania e aos Direitos Humanos. Ao realizar esse exercício na abordagem de circunstâncias da vida cotidiana, os estudantes podem desnaturalizar condutas, relativizar costumes e perceber a desigualdade, o preconceito e a discriminação presentes em atitudes, gestos e silenciamentos, avaliando as ambiguidades e contradições presentes em políticas públicas tanto de âmbito nacional como internacional. (*ibidem*, p. 577)

É de suma importância salientar que esta proposta está em consonância com a Lei 10.639/03, sancionada em 2003 pelo então Presidente da República Luiz Inácio Lula da Silva, mostrando que é possível que seus fundamentos sejam estendidos a todas as áreas do conhecimento, não sendo restrita aos professores de Arte e História.

AFROETNOMATEMÁTICA: EM BUSCA DE RESGATE A PARTIR DE UMA CONCEPÇÃO HISTÓRICA

A compreensão do saber matemático no contexto social de um povo decorre de um processo de construção e reconstrução, em que um conjunto de conhecimentos pertencentes em um contexto vai se aperfeiçoando a cada geração. Esse processo, que pode ser identificado por aprendizagem cultural, foi descrito por Bishop (1991) da seguinte forma:

> Aprendizagem cultural é, portanto, um ato de recriação gerado a partir de cada pessoa. Cada jovem e cada nova geração de jovens recria os símbolos e valores de sua cultura e valida dentro de sua vida, em seguida, compartilha com a próxima geração que, por sua vez recria, redefine. (*ibidem*, p. 88, apud TRAORE; BEDNARZ, 2008, p. 177)

Esse tipo de construção vem ocorrendo com o passar dos séculos em várias civilizações, no entanto, ao nos depararmos com os livros didáticos atuais eles mostram que as diversas explicações do mundo são verdades absolutas, surgidas a partir de mentes “divinas”, e que trazem a perspectiva do conhecimento apenas de um local do mundo. Assim sendo, torna-se fundamental resgatar, bem como valorizar, as produções e as contribuições do conhecimento matemático africano produzido mostrando em primeiro lugar a multiculturalidade do conhecimento e da quebra do estigma de povos menores que os outros. É a partir deste olhar que surge a Afroetnomatemática, proposta por Cunha (2005) que a define como:

> Sendo a área de pesquisa que estuda as contribuições dos africanos e dos afrodescendentes à Matemática e à Informática, assim como também desenvolve conhecimento sobre o ensino e aprendizado da Matemática, Física e Informática nos territórios afrodescendentes. (*idibem*, p. 1)

De acordo com o autor, a Afroetnomatemática emerge por meio das práticas pedagógicas criadas dentro dos movimentos de valorização da cultura negra que busca, até os dias de hoje, melhoria do ensino e do aprendizado da matemática nas comunidades quilombolas e nas áreas urbanas de população, majoritariamente, de descendência africana. Para Cunha (2005):

> A Afroetnomatemática tem uma ampliação pelo estudo da história africana e pela elaboração de repertórios de evidência matemática encontrados nas diversas culturas africanas. Este estudo da história da matemática no continente africano trabalha com evidências de conhecimento matemático contidas nos conhecimentos religiosos africanos, nos mitos populares, nas construções, nas artes, nas danças, nos jogos, na astronomia e na matemática propriamente dita, realizada no continente africano. (*ibidem*, p. 2)

A preocupação com o processo de ensino e aprendizado da Matemática em territórios, predominantemente, afrodescendentes manifesta-se, a partir da constatação da ineficiência da educação matemática formal nessas áreas, que, na maioria das vezes, são aquelas localizadas em regiões mais pobres e de pouca infraestrutura social, cultural e econômica. Diante disso, segundo o autor, percebe-se o seguinte cenário:

> Discursos antipedagógicos onde o educador ensina utilizando uma linguagem universal (europeizada) e deduz que uns aprendem – os euro descendentes – e outros não aprendem. Os outros têm designação social de pretos, pobres e pardos. Nós pesquisadores, interessados no desempenho matemático de afrodescendentes, temos observado que nos territórios onde essa população é preeminente, por vezes, inexiste o ensino de matemática. Trata-se apenas de uma simulação de ensino. [...] E onde ele existe é deficiente e desprovido dos meios e métodos adequados. (*ibidem*, p. 2)

Em consonância às ideias de Cunha, D'Ambrósio (2011) reconhece que os métodos usados para o ensino de matemática é um reflexo da era colonial, uma vez que, a partir da invasão dos povos europeus em territórios que consideravam estarem descobrindo, passamos a ser receptores do conhecimento produzido por eles, como pode ser percebido no trecho abaixo:

> Na América Latina, o fato de termos sido colonizados por países que se tornavam marginais[21] no grande desenvolvimento das ciências e da matemática a partir do século XVI, revela desvantagens e dificuldades que até hoje persistem. Por outro lado, isso estimula uma historiografia mais ampla, buscando fontes desprezadas e, mesmo, ignoradas por historiadores dos países centrais. (D'AMBRÓSIO, 2011, p. 15)

Dessa forma, as consequências causadas pela importação de uma matemática europeia imposta em diversas regiões do mundo

---

21 De acordo com Filgueiras, ciência marginal é aquele corpo de conhecimento ou de doutrina que se pretende ciência e que, frequentemente, é apresentado na linguagem da ciência, mas que não compartilha suas premissas e regras, de acordo com o elenco apresentado na conceituação de ciência central que, por sua vez, constitui o paradigma científico vigente, inicialmente, na Europa, estendendo-se aos poucos a todos os continentes, até sua completa mundialização. A astrologia e a alquimia, outrora tidas como ciência, por vezes ostentando uma ou outra das características apontadas para a ciência central, não resistiram aos critérios que passaram a ser exigidos no decorrer da revolução científica, e acabaram resvalando para o estado de marginalidade. No entanto, por séculos ambas haviam constituído paradigmas dominantes em sociedades e culturas das mais variadas. (2001, p. 710)

levam-nos a refletir acerca da nossa inquietação na busca por uma historiografia que a cultura eurocêntrica não conta. Percebe-se que os livros desconsideram as contribuições dos povos africanos na construção do conhecimento matemático, uma dessas produções refere-se a uma colaboração de matemáticos e pensadores da região do Magrebe – formada por Marrocos, Argélia e Tunísia – que foram fundamentais para o desenvolvimento da Matemática ao substituir palavras para descrever várias operações aritméticas por símbolos, como por exemplo, a representação simbólica das frações e das equações, nunca ou quase nunca são citados.

De acordo com Gerdes (2005), esse procedimento de esconder a origem das ideias matemáticas que são incorporadas no ensino da Matemática ocorre de forma frequentemente proposital na maioria das vezes, mas também porque grande parte dos professores desconhece a origem histórica dessas ideias. Cunha (2005) revela-nos uma série de conhecimentos matemáticos, identificados na cultura africana:

> Os conhecimentos de geometria no continente africano não se restringem a geometria euclidiana. Outras lógicas de composição geométrica são encontradas. Uma delas, bastante difundida em diversas aplicações práticas, é a geometria fractal. Nela cada elemento é constituído de elementos com o mesmo formato, mas em tamanho e disposição diferentes. Essa geometria aparece na composição de vilas de casas numa cidade, em formas de penteados de cabelos, em padronagem de tecidos ou em paredes acústicas em cabanas. (CUNHA, 2005, p. 6)

O processo de apagar as origens tem impacto direto em diversos aspectos sociais e que não são levados em conta na maioria das vezes, como pode ser percebido no trecho trazido por Cunha (2005):

> A prepotência europeia fez com que as teorias racistas tivessem espaço na ciência do Ocidental, atrasando significativamente os conhecimentos sobre o continente Africano. Os povos foram denominados de tribais, incultos, meio irracionais e desprovidos

> de civilização. A onda de racismo nas ciências se proliferou no séculos XIX e XX. Infelizmente, até hoje faz parte do conhecimento difundido por muitos educadores sem informações conscientes sobre África. Essa ausência de informação e prática da desinformação fazem desses educadores racistas inconscientes das suas formas de ação. Deste fato resulta que muitos não se consideram racistas, mas executam práticas educacionais e sociais racistas. As práticas sociais inadequadas impediram a ciência e os educadores de verem o esplendor das culturas de base africana. (*ibidem*, p. 6)

Se para D'Ambrósio a matemática consolidou-se, a partir das grandes navegações com os ocidentais, para Gerdes e Cunha ela teve a sua difusão em várias outras matemáticas que foram se estruturando bem antes das ideias racionalistas. O ponto de convergência entre os pensamentos desses autores dá-se no reconhecimento de uma matemática ocidental imposta e carregada de dominação e subordinação. Isso fica claro no pensamento de D'Ambrósio:

> O sistema colonial é perverso. [...] Chegamos a uma estrutura de sociedade, a conceitos perversos, de nação e de soberania, que impõe a conveniência e mesmo a necessidade de ensinar a língua, a matemática, a medicina, as leis do dominador aos dominados. [...] O que se questiona é a agressão à dignidade e à identidade cultural daqueles subordinados a essa estrutura. Uma responsabilidade maior dos teóricos da educação é alertar para os danos irreversíveis que se podem causar a uma cultura, a um povo e a um indivíduo se o processo for conduzido levianamente. (*ibidem*, p. 80)

Dessa forma, precisamos ver, na África, um continente que vai além de uma história massacrada pela dor, pelo escravismo criminoso, pelas guerras estimuladas pelos países europeus e pela subordinação, como é mostrado muitas vezes nos livros didáticos. É necessário mais do que nunca mostrar uma África que emerge, por meio do conhecimento produzido pela sua multiculturalidade e como peça fundamental que integra o mosaico epistemológico da evolução do conhecimento.

O SENTIDO HISTÓRICO E A FUNÇÃO SOCIAL DAS MÁSCARAS AFRICANAS DAS SOCIEDADES TRADICIONAIS

As expressões artísticas, tais como as expressões científicas, presentes no continente africano manifestam-se de diversas formas, assim como acontece em qualquer outro grupo do mundo – sejam por esculturas, músicas, danças e literatura, por exemplo – sendo, geralmente, produzidas por artistas anônimos que têm como fontes de inspiração doutrinas religiosas, mitos e experiências vividas individual ou coletivamente. Essa forma de expressão tem resistido ao processo de desvalorização devido a uma suposta superioridade da cultura ocidental que ocorre muitas vezes por uma vaidade sem sentido. De acordo com Cunha (2019), isso tem ocorrido pela perpetuação de um cenário antigo, mas ainda sim levado em conta:

> As histórias e as culturas africanas foram desprezadas e ocultadas das informações difundidas no ocidente devido à imposição de um sistema de dominação dos povos europeus sobre os africanos e descendentes. [...] Neste sistema de dominação, o africano e os descendentes foram sempre caracterizados como povos sem história, sem cultura e sem civilização. (*ibdem*, p. s/i)

Jubainski (2014) mostra a importante contribuição africana para o desenvolvimento do homem no mundo, relatando as várias dimensões culturais e artísticas que os povos dessa região produziram ao longo de todo esse tempo:

> A arte africana é definida ao grande número de etnias, cada qual com seus respectivos costumes. A pintura é uma arte bastante significativa e funcional em decorações internas, pinturas corporais e até em máscaras, que despertam muita admiração através do seu simbolismo e da expressiva emoção ao representar o africano. (*ibidem*, 2014, p. 4).

Para muitos povos africanos, entre os objetos artísticos de grande relevância encontram-se as máscaras que também possuem um significativo valor sagrado, uma vez que, para eles, simboliza a ponte que liga o mundo dos vivos ao mundo dos deuses e dos mortos. Esses objetos estão presentes em diversas ocasiões festivas ou solenes como rituais para celebrar os antepassados, espantar maus espíritos, pedir boas colheitas, o fim da guerra, rituais de iniciação, casamentos e entre outros motivos. Portanto, a máscara utilizada por uma pessoa representa uma divindade e uma força da sociedade humana e, para a cultura africana, ela desempenha a função de proteger quem a vestia, como pode ser visto nos trechos a seguir:

> As máscaras representavam para os africanos um disfarce místico com o qual poderiam absorver forças mágicas dos espíritos e assim utilizá-las em benefício da comunidade como na cura de doentes, em rituais fúnebres, cerimônias de iniciação, casamentos e nascimentos. (REZENDE; SILVA, 2013, p. 6)

> Cada máscara é um livro aberto que nos causa sedução, curiosidade e nos convida a interpretar sua mensagem a cada página. As máscaras africanas são vistas muitas vezes, pelos ocidentais, com preconceito e julgamentos prévios, no entanto ela não é um acessório de teatro, nem uma peça decorativa ou um acessório de feitiçaria. Ela é um ser sagrado que se aproveita do suporte material do homem para aparecer e se expressar. A máscara não representa um ser, ela é um ser. (REZENDE; SILVA, 2013, p. 8)

Lima (2013) vai ao encontro de Rezende e Silva (2013), revelando que, geralmente, as máscaras africanas representam manifestações artísticas de seres mitológicos que são carregadas de forças personificadas da natureza ou de antepassados que permitem a conexão entre o mundo real e o mundo espiritual. Conforme a autora, muitas máscaras apresentam características humanas e/ou animais que devem estar de acordo com a linguagem tradicional da comunidade e da divindade representada. Segundo Lima (2013), os ancestrais africanos não consideram o animal como um ser animalizado e, dessa forma, os veem como uma força sagrada de sobrevivência do corpo e da alma, como pode ser percebido no trecho destacado pela autora:

> O Homem, nesta concepção de cosmo, está situado na base da pirâmide vital, junto aos animais, aos vegetais e aos minerais, estabelecendo uma relação de unidade harmônica. Devido à posse da palavra, concedida pelos deuses, cabe ao Homem a função de manipular os outros elementos e suas energias em seu proveito, buscando o equilíbrio necessário para a sua vida. (LIMA, 2013, p. s/i)

Além disso, é muito comum na atualidade da cultura africana as máscaras serem utilizadas como elemento de decoração de casas, lojas e restaurantes, entretanto, de acordo com Monti (1982, p. 12):

> Nas sociedades africanas tradicionais as máscaras exercem outras funções sociais, tais como: fazer observar certas leis políticas, sociais ou higiênicas, educar os jovens, superar discórdias, presidir os julgamentos, os funerais, as cerimônias agrícolas, manter a ordem ou simplesmente divertir os habitantes da aldeia (*ibidem*, apud REZENDE; SILVA, 2013).

IDEIAS MATEMÁTICAS PRESENTES NAS MANIFESTAÇÕES ARTÍSTICAS DAS MÁSCARAS AFRICANAS

O processo para unir o conhecimento matemático e a importância do resgate da cultura africana, em especial das máscaras, ocorreu na forma de uma atividade realizada com 47 estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal localizada no bairro de Pedra de Guaratiba, no Rio de janeiro. A escolha do local ocorreu entre outros fatores pela presença majoritária de indivíduos negros, que não se reconheciam como descendentes daqueles que, de acordo com a nossa história, foram o berço da humanidade.

Como processo metodológico optou-se por uma abordagem qualitativa tendo a pesquisa-ação como procedimento técnico. A atividade foi iniciada abordando a importante função histórico-social das máscaras nas sociedades tradicionais africanas, além de destacar o significado espiritual e religioso que esses objetos representam nesses grupos. A partir dessa explanação histórica foi possível revelar para os estudantes que essas máscaras simbolizam um importante elemento de identidade cultural de cada etnia e sendo assim elas validam a riqueza e a complexidade do patrimônio cultural africano.

No intuito de promover o respeito à identidade étnicorracial e cultural, considerei importante ressaltar a influência artística africana na formação da nossa cultura e, como forma de significar ainda mais as máscaras para os estudantes, usei como exemplo a presença da arte africana nas manifestações culturais do bumba meu boi, revelando também, para eles, que esse costume não é exclusivo de alguns estados da Região Norte, mas também do Nordeste, Sul e Sudeste.

Após esse momento de sensibilização usei algumas imagens de máscaras disponíveis na rede mundial de computadores para apresentar aos estudantes e, em seguida, os instiguei com as seguintes perguntas:

a. Observando essas máscaras, você seria capaz de perceber nelas a presença da matemática?
b. Que elementos da matemática você identifica nestas máscaras?

Na primeira indagação, todos responderam sim, ou seja, os estudantes perceberam nas máscaras a presença da matemática e essas percepções são apresentadas no episódio a seguir:

1. *Aluno C: Professor, tem muitos traços geométricos.*
2. *Prof.: Pode citar algum?*
3. *Aluno C: Pontos.*
4. *Aluno G: Simetria.*
5. *Prof.: Isso! Mais o quê?*
6. *Aluno D: Tem muitas curvas, professor, e o desenho de um lado é sempre semelhante ao do outro.*

7. *Prof.: Semelhança de figuras, lembram que vimos isso no bimestre anterior?*
8. *Aluno D: Lembro.*
9. *Prof.: E, se essas máscaras fossem assimétricas, ou seja, tivessem o lado direito diferente do esquerdo, será que ficaria legal?*
10. *Aluno E: Não professor, fica estranho um lado diferente do outro.*
11. *Aluno D: Verdade, a professora de Artes mostrou pra gente uma pintura de Pablo Picasso de um rosto que não é simétrico.*
12. *Prof.: Bem lembrado! Vocês sabiam que Picasso*[22] *teve muitas inspirações da arte africana nas suas obras?*
13. *Aluno D: A professora de Artes falou.*
14. *Prof.: Daí vemos que a arte africana não influenciou somente a cultura brasileira, mas também a de outros povos.*

Foi possível perceber a interação entre os estudantes e o quanto eles já demonstravam certa naturalidade e segurança ao falarem da matemática, relacionando-a com a aula ministrada pela professora de Artes. A partir dessa exploração visual eles foram capazes de perceber que a matemática pode estar presente onde menos imaginamos e muitas vezes a utilizamos involuntariamente. O presente tema pode ser utilizado como elemento introdutório na construção de diversos conceitos matemáticos, tais como semelhança de polígonos, segmentos proporcionais, etc. Mesmo não tendo direcionado a atividade para um conteúdo específico, acredito que o resultado dessa intervenção pedagógica foi positivo, uma vez que a exploração visual da matemática na arte africana foi capaz de constituir uma nova perspectiva do processo de ensino e aprendizagem, além de reconhecer a arte produzida por um povo que os livros didáticos pouco falam.

[22] "Pablo Picasso (1881 -1973) nunca foi à África, no entanto produziu obras como máscaras e esculturas com clara influência da mesma. Picasso, por volta de 1905, tomou conhecimento da arte africana e aí surgiu nitidamente a inspiração para o movimento cubista. Picasso fazia este rascunho para um de seus quadros quando tomou contato com esculturas africanas em um museu antropológico de Paris em 1907" (SEP, 2020).

Como forma de subsidiar a prática docente para o trabalho com conteúdos relativos à História da África e Cultura Afro-brasileira, de modo a possibilitar uma abordagem mais consistente sobre a arte africana em sala de aula, apoiando-se no fato de Jubainski indicar a necessidade de dialogar a matemática com a história e cultura africana e afro-brasileira nas salas de aula, pois acredita que essa ação contribui para que o aluno perceba, compreenda e respeite a diversidade em vários contextos:

> É possível e necessário fazer a relação da matemática com a história e cultura afro-brasileira para que o aluno perceba essa diversidade em vários contextos. Discutir as diferenças culturais e oferecer aos alunos um espaço para reflexão de maneira que venha contribuir para uma mudança de atitude e de uma sociedade. (JUBAINSKI, 2014, p. 4)

Além disso, percebemos a possibilidade real de abordar conceitos geométricos, como simetria e formas nas máscaras africanas, conduzido a aprendizagem a partir do lúdico e de cunho investigativo. Nesse sentido, Ponte, Brocado e Oliveira (2005, p. 71) admitem que:

> A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações de matemática, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática. [...] Em uma aula de investigação, uma atividade pode desenvolver-se habitualmente em três fases: (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. (apud JUBAINSKI, 2014, p. 6)

Posto isto, vale lembrar os cuidados que o professor deve ter ao propor uma atividade que integre um processo investigativo como a clareza e a brevidade no discurso, visto que, ao apresentar a proposta à turma, é fundamental que crie um ambiente de aprendizagem instigante para que o discente sinta-se à vontade, coloque as suas questões durante a investigação e que estas sejam valorizadas.

ATIVIDADE PRÁTICA: PRODUZINDO MÁSCARAS AFRICANAS

Após as aulas expositivas, foi proposta aos estudantes a confecção de algumas máscaras para que estas, em momento posterior, fossem expostas para toda a comunidade escolar. Percebi que essa atividade encorajou e despertou o lado artístico dos estudantes, uma vez que todos queriam produzir as suas próprias máscaras. Para realização dessa atividade, levei para a sala de aula os seguintes materiais: telhas de barro na cor marfim, pincéis, copos descartáveis com água para limpeza dos pincéis, tinta guache, folhas de 40 kg e papel manilha para proteger as mesas.

Inicialmente, foi proposto aos estudantes que se organizassem em grupos de 4 pessoas e que cada um produzisse uma máscara africana explorando as formas e os seus conhecimentos geométricos. Durante as produções (figura 1), observei a concentração dos grupos na construção dos desenhos que deram forma às máscaras, alguns, preocupados com a apresentação final das suas obras, usaram um lápis para riscar o desenho antes de pintar e, com isso, foram utilizando ideias matemáticas que antes faziam parte do processo mecânico das ações deles, ou seja, começaram a perceber que, no decorrer da manipulação, vários conceitos matemáticos eram empregados como: simetria, polígonos, pontos e posições relativas entre retas.

***Figura 1** - Processo de produção de uma máscara africana pelos estudantes.*

Fonte: Acervo dos autores.

Foi interessante observar que, na medida em que a rigidez pela perfeição do resultado final aumentava, as ideias matemáticas presentes também iam surgindo de forma espontânea e os resultados superaram as minhas expectativas (figura 2).

Figura 2 - Exposição das máscaras africanas produzidas pelos estudantes.

Fonte: Acervo dos autores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Levar os estudantes a compreenderem a função e o sentido social das máscaras nas sociedades tradicionais africanas, revelando, com isso, a sua importância, possibilitou construir uma ponte entre as criações artísticas com as relações de trabalho, cultura e poder, referentes à História da África e da Cultura Afro-brasileira, além de se agregar a isto a percepção de conceitos matemáticos muitas vezes implícitos nessas obras. Em conformidade com Rezende e Silva (2013), “esse diálogo possibilita uma base mais consistente sobre a arte africana em sala de aula, evitando assim a simplificação do tema e sua redução a uma mera atividade recreativa”.

Vimos na presente aula que as máscaras africanas representam um entre tantos outros elementos que expressam os sentimentos e as percepções dessas culturas. É inegável a forte influência artística africana nas manifestações da arte brasileira, mesmo que essa seja uma cultura desvalorizada ou estigmatizada por certos grupos da sociedade, nesse sentido, nós, professores, precisamos buscar maneiras que permitam a inserção desses elementos nas nossas aulas, uma vez que eles são suprimidos dos planejamentos pedagógicos por falta de conhecimento ou até mesmo pelo preconceito.

A proposta de se abordar as máscaras africanas nas aulas de matemática apresentou duas direções principais: a primeira refere-se ao cumprimento da Lei 10.639/03 (BRASIL, 2003) e a segunda vertente debruça-se na investigação e na análise dos conceitos matemáticos a partir da exploração histórica, social e visual encontrados nesses objetos.

A questão é que, muitas vezes, o material didático produzido para o ensino de matemática chega padronizado por meio de propostas prontas e fundamentado no modelo eurocêntrico, sem ao menos provocar no estudante questionamentos que o leve a uma reflexão acerca do assunto abordado. Diante disso, Jubainski defende a seguinte ideia:

> A busca de uma possível solução para um problema matemático depende de um trabalho investigativo que varia de estudante para estudante, podendo alcançar ou não resultados imprevisíveis capazes de conduzi-lo à formulação de conjecturas a partir daquilo que está sob investigação. (2014, p. 5).

Para finalizar este trabalho, o qual tive muito prazer em desenvolver, gostaria de encerrar minhas considerações baseado nas ideias de Almeida (2010) que faz um alerta para o perigo de conceber o conhecimento como algo que deva ser pautado exclusivamente como forma de produção:

> Ao se considerar os conhecimentos tradicionais como conhecimentos menores ou sem relevância corremos o risco de não perceber que parte das grandes descobertas da ciência teve como base a experiência cotidiana, e muitas delas de pessoas comuns não cientistas. (ALMEIDA, 2010, p. 36)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, M. da C. **Complexidade, saberes científicos, saberes da tradição**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão Final revista. Brasília: MEC, dez. 2017. Disponível em: http://abre.ai/a4rJ. Acesso em: 03 jul. 2019.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Lei n°10.639**. Inclui a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira" no currículo official da rede de ensino. Diário Oficial da união, Brasília, 2003.

CUNHA JR, H. **Afroetnomatemática, África e Afrodescendência**. Fortaleza: Ano 23 v.2, n.42, 2005.

CUNHA JR, H. SALTO PARA O FUTURO / **TV ESCOLA** in http://abre.ai/bbg4. Acesso em: 18 jul. de 2019.

D'AMBRÓSIO, U. **Uma história concisa da Matemática no Brasil**. 2.ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

FORDE. G. H. A. **A presença africana no ensino da matemática: análises dialogadas entre história, etnocentrismo e educação**. 2008. Dissertação apresentada ao Centro de Educação. Universidade Federal do Espírito Santo.

FILGUEIRAS, C. A. L. A história da ciência e o objeto de seu estudo: confrontos entre a ciência periférica, a ciência central e a ciêmcia marginal. **Química Nova**, v.24, n.5, 2001, pp.709-712.

GERDES, P. Incorporar ideias matemáticas provenientes da África na educação Matemática no Brasil. **Revista Quipu,** ano 23, v.14, n.1, 2005, pp. 93-108.

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Censo 2010**, 2010. Disponível em http://www.ibge.gov.br. Acesso em: 12 jun. 2019.

JUBAINSKI, R. de F. Investigando a Geometria, explorando a Arte Africana e valorizando a Cultura Afro-Brasileira. **Governo do Estado do Paraná.** Maringá, 2014.

LIMA, V. Relações sobre o uso das máscaras na África e no Brasil, 2013. Disponível em http://abre.ai/bA7c. Acesso em: 10 abr. 2020.

REZENDE, E. C. de; SILVA, R. T. C. **O sentido social das máscaras africanas tradicionais e o seu uso como objeto pedagógico em sala de aula**. PDE: Programa de Desenvolvimentos Eduacacional da Secretaria de Educação do Estado do Paraná, 2013.

SEP - Secretaria da Educação do Paraná. **Picasso desenho inspirado em máscara africana**, 1907, 2020. Disponível em: http://abre.ai/a7yE. Acesso em: 16 mai. 2020.

TRAORE, K; BEDINARZ, N. Matemática construída em contexto: Uma análise de número do sistema oral utilizado por Siamous em Burkina Faso. **Nordic Journal of African Studies**. v.17, n.3, 2008, pp. 175-197.

A SIMETRIA DE ROTAÇÃO E REFLEXÃO: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 4º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Rosineide de Sousa Jucá[23]
Ingrid de Sousa Alves[24]
Wallyson Oliveira de Sousa[25]

INTRODUÇÃO

Não se pode ignorar as dificuldades enfrentadas pelos alunos na compreensão dos conteúdos e o desinteresse que mostram nas aulas de matemática; assim, é importante buscar estratégias metodológicas que propiciem aos alunos assumirem um papel ativo na aprendizagem e um papel de investigador do conhecimento matemático por meio de atividades que os coloquem para construir conceitos, observar propriedades, padrões e regras matemáticas, e isso é possível por meio de investigações matemáticas em sala de aula.

Nesse sentido, Brousseau (2008), coloca que o professor deve promover em suas aulas de matemática micro sociedades científicas, levando o aluno a descobrir o conhecimento matemático e atuando como se fosse um pesquisador; dessa forma, a sala de aula deve ser um ambiente propício para o desenvolvimento de atividades exploratório-investigativas que promovam a aprendizagem da matemática. Tal sala de sala, nessa perspectiva, funcionaria como se fosse um laboratório de matemática no qual os alunos desenvolveriam investigações para a construção do conhecimento matemático.

Uma das áreas da matemática que é, particularmente, propícia à investigação e à exploração, é a geometria. Para Ponte, Brocado e

---

[23] Doutora em ensino de Ciências e Matemática. É professora da Secretaria de Educação do Estado do Pará, onde atua no Centro de formação dos profissionais da Educação e como professora orientadora do Clube de Ciências da Universidade Federal do Pará. É professora da graduação e do PPGED da Universidade do Estado do Pará

[24] Professora de Ciências biológicas.

[25] Discente do curso de química da Universidade Federal do Pará.

Oliveira (2005), as investigações geométricas contribuem para aprender aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações. Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é relatar uma experiência realizada com os alunos do 4º ano do ensino fundamental para aprendizagem das ideias de simetria de rotação e reflexão.

O ENSINO DE MATEMÁTICA POR EXPLORAÇÃO E INVESTIGAÇÃO

O ensino de matemática por investigação tem oportunizado aos professores momentos para repensar suas metodologias de ensino e aos alunos a oportunidade de aprender matemática de forma mais atraente e significativa. Os estudos de Jucá e Santos (2011), Jucá, Alves e Sousa (2019) e Boaler, Munson e Williams (2018) apontam resultados favoráveis às atividades de ensino de matemática por investigação, pois tais atividades levam o aluno a descobrir as regras e procedimentos matemáticos e a compreender suas relações. Nesse tipo de atividades os alunos podem refletir e raciocinar sobre suas respostas e compreender as relações que existem entre os conteúdos de matemática.

Quando os alunos são colocados em situação de investigação se mostram mais interessados e motivados e a aprendizagem se torna significativa, pois segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), o uso das investigações matemáticas como atividades de ensino-aprendizagem, propicia o "espírito da atividade matemática genuína".

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na 5ª competência geral aponta o desenvolvimento do espírito investigativo do aluno quando coloca que é preciso:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p. 8).

Nessa mesma diretriz, a 2ª competência específica de matemática da BNCC (BRASIL, 2018), também corrobora com o desenvolvimento do espírito de investigação do aluno para que ele possa compreender e atuar no mundo. Assim, para desenvolver tais competências, não se pode pensar em aulas expositivas com alunos passivos e sim em um processo de ensino e aprendizagem ativo no qual professor e aluno participem ativamente para o desenvolvimento de tais competências.

O ensino por investigação pode oferecer ao aluno o prazer da descoberta do conhecimento, além de possibilitar a reflexão e compreensão desse conhecimento.

> A chave para uma aprendizagem bem-sucedida é a reflexão, no entanto, ao serem convidadas a refletir sobre suas aprendizagens ou ações, muitos alunos não conseguem se envolver significativamente com o processo, porque o termo reflexão, no sentido educacional, ainda não foi definido nem modelado com clareza (VICKERY, 2016, p. 93).

Nessa perspectiva, as atividades matemática devem propiciar aos alunos de qualquer etapa da educação básica problemas que levem os mesmos a pensar e refletir em diferentes estratégias de resolução e não apenas na aplicação de um método memorizado, pois, como coloca Boaler, Munson e Williams (2018), a matemática não é um conjunto de métodos, é um conjunto de ideias conectadas que precisam ser entendidas; quando os alunos entendem as ideias fundamentais em matemática, os métodos e regras se encaixam perfeitamente.

Ao desenvolver o ensino de matemática por investigação, os alunos se sentem motivados ao vivenciar a matemática de forma significativa e se beneficiam com a oportunidade de expor suas ideias e criatividade em diferentes estratégias para a solução dos problemas. À medida que os alunos se desenvolvem em sua compreensão da matemática, podemos encorajá-los a ampliar e a generalizar suas ideias por meio do raciocínio, da justificação e da comprovação; esse processo aprofunda a sua compreensão e os ajuda a comprimir sua aprendizagem (BOALER; MUNSON; WILLIAMS, 2018).

Nesse sentido, destacamos a importância dos laboratórios de ensino de matemática – LEM – no processo de ensino e aprendizagem, visto que os mesmos podem propiciar aos alunos uma matemática mais atraente. Lorenzato (2012) coloca que o LEM deve ser o centro da vida matemática na escola, pois é o lugar onde os professores estão empenhados em tornar a matemática mais compreensível para os alunos. Segundo Ewbank (1977 *apud* TURRIONI; PEREZ, 2012) a expressão laboratório de matemática é utilizada para representar um lugar, um processo, um procedimento; um lugar para experimentos matemáticos e atividades práticas.

> O termo também é utilizado para caracterizar uma abordagem em sala de aula onde os alunos trabalham de maneira informal, movimentam-se, discutem, escolhem seus materiais e métodos e geralmente fazem e descobrem matemática por si próprios (TURRIONI; PEREZ, 2012, p.60).

O professor tem um papel de mediador em atividades por investigação, será ele quem vai conduzir todo o processo para que o aluno possa encontrar as respostas para as perguntas que serão postas no início da atividade; assim, muito mais que saber o conteúdo de matemática, ele deve saber conduzir uma aula por investigação. Dessa forma, tanto na formação inicial ou continuada, o LEM permite que o professor possa experimentar novas metodologias para ensinar matemática, e abandonar velhas práticas de ensino que pouco tem contribuído para a aprendizagem dos alunos. Na colocação de Turrioni e Perez (2012), a formação inicial deve proporcionar aos professores um conhecimento gerador de atitude que valorize a necessidade de atualização permanente em função das mudanças que ocorrem no ambiente educacional e que os futuros professores devem ser capazes de criar estratégias e métodos de intervenção por meio de investigações.

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

A geometria, representada pelo estudo do espaço e forma e das grandezas e medidas, é um campo de estudo propício para as aulas investigativas, visto que dentro da sua construção histórica a investigação sempre esteve presente. Ponte, Brocado e Oliveira (2005) colocam que a exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação.

Rêgo, Rêgo e Vieira (2012) expressam que é a partir da exploração de elementos ligados à realidade do aluno que as primeiras noções relativas aos elementos geométricos podem ser trabalhadas, incorporando-se sua experiência pessoal com os elementos do espaço. Para os autores o raciocínio geométrico, por sua vez, está associado ao raciocínio espacial; raciocinar espacialmente consiste, portanto, na habilidade de "ver", analisar e refletir sobre os objetos, imagens, relações e transformações espaciais.

Assim, é importante que o ensino de geometria se desenvolva nos anos iniciais por meio de exploração e investigação das diferentes formas geométricas, de suas representações e propriedades, bem como sua relação com a vida real, pois segundo Rêgo, Rêgo e Vieira (2012, p.15), "a geometria nas séries iniciais pode ser pensada como uma série de conceitos, maneiras de pensar e representar o espaço ao nosso redor".

Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) salientam a importância de estudar os conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação de geometria em situações da vida real e de utilizar diagramas e modelos concretos na construção conceitual em geometria; nessa direção, as atividades investigativas em geometria podem colaborar para o desenvolvimento do pensamento geométrico em qualquer etapa de ensino – dos anos iniciais ao ensino médio.

Nessa perspectiva, o modelo de Van Hiele, desenvolvido pelo casal holandês Dina Van Hiele Geldof e Pierre Van Hiele, pode ser um orientador para o planejamento de aulas de geometria por investigação, porque descreve os cinco níveis de compreensão do aluno em relação à geometria que são: visualização, análise, dedução informal, dedução e rigor.

Segundo Crowley (1994), o modelo mostra que o aluno se move sequencialmente a partir do nível inicial, ou básico (visualização), no qual o espaço é simplesmente observado, até o nível mais elevado de rigor, como mostra o quadro 1.

Quadro 1: Níveis de compressão do modelo de Van Hiele

NÍVEIS DE COMPREENSÃO	**CARACTERÍSITICAS**
NÍVEL 0: Visualização	Reconhece uma figura geométrica por sua forma, e não pelas propriedades. Consegue aprender o vocabulário geométrico.
NÍVEL 1: Análise	Identifica as características das figuras. Não são capazes de explicar as relações entre as propriedades, e não veem inter-relações entre as propriedades.
NÍVEL 2: Dedução Informal	Conseguem estabelecer inter-relações entre as propriedades. Conseguem deduzir propriedades de uma figura.
NÍVEL 3: Dedução	Consegue construir demonstrações. Compreende a interação das condições necessárias e suficiente.
NÍVEL 4: Rigor	- É capaz de trabalhar em diferentes sistemas axiomas; - As geometrias não-euclidianas são estudadas.

Fonte: Crowley (1994).

Crowley (1994), explica que o modelo de Van Hiele propõe cinco fases sequenciais de aprendizagem: interrogação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. São por meio dessas fases de aprendizagem que o pensamento geométrico do aluno vai sendo desenvolvido.

Nesse sentido, a primeira fase se configura na interrogação, na qual algumas perguntas são feitas aos alunos sobre o tema, professor dialoga sobre o tema com os alunos; a segunda fase da orientação dirigida, na qual o professor orienta as atividades a serem desenvolvidas pelos alunos que exploram o tópico de estudos por meio do material que o professor ordenou em sequência; a terceira fase, temos a explicação no qual os alunos explicam suas ideias, estratégias e ações realizadas; a quarta fase da orientação livre, o aluno se vê diante de tarefas complexas, tarefas com muitos passos, tarefas que podem ser concluídas de diversas maneiras; e a quinta e última fase da integração, os alunos reveem e sintetizam o que aprenderam com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações.

Na proposta de Van Hiele, aulas precisam ser dinâmicas em que o aluno participa ativamente do processo de aprendizagem, explorando, investigando e constatando o que foi aprendido na prática. Segundo Rêgo, Rêgo e Vieira (2012), há fortes indicações que o ensino de geometria, por meio de aula expositiva, utilizando a linguagem formal e sem envolver o aluno em atividades práticas, não permite que a os alunos desenvolvam conhecimentos que respondam às demandas de saberes matemáticos atuais, sejam formativos ou funcionais.

A BNCC também orienta que, para os anos iniciais, o ensino de geometria deve ser feito de forma dinâmica, de forma que os alunos possam, por meio da investigação, construir os conceitos geométricos. Em relação ao ensino das transformações geométricas, ela explicita que:

> Se deve considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. O estudo das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de softwares de geometria dinâmica (BRASIL, 2018, p. 274).

Em relação ao estudo das simetrias, Pimentel (*et al.*, 2010) coloca que as transformações geométricas são mudanças que se efetuam na posição, no tamanho e na forma, assim, uma figura pode sofrer algum tipo de transformação no tamanho ou na forma.

Dentre os diversos tipos de transformações geométricas, nos anos iniciais, especificamente no 4º e 5º ano, estudam-se as transformações que envolvem movimentos de voltar, deslizar e rodar, e que chamamos de isometrias de rotação, reflexão e translação; nesse sentido, nesse trabalho apresentamos duas atividades didáticas por meio de exploração das ideias geométricas para que os alunos do 4º ano desenvolvessem a ideia de simetria de rotação e reflexão.

CAMINHO METODOLÓGICO

O Clube de Ciências da Universidade Federal do Pará (CCIUFPA) é um ambiente alternativo de ensino, popularização da ciência e aperfeiçoamento de professores de ciências e matemática. Aos sábados, os professores em formação inicial de diversos cursos das Universidades da Cidade de Belém-PA, atuam como estagiários e aplicam as atividades que foram planejadas durante a semana, sob a orientação de um professor orientador que faz parte do Clube, alguns desses orientadores são professores de Ciência e Matemática da Secretaria de Educação do Estado do Pará, e que estão lotados no Clube de Ciência.

As atividades didáticas que serão apresentadas foram planejadas e aplicadas em conjunto com dois estagiários (coautores desse artigo), que atuaram em 2019 com os alunos do 4º ano do ensino fundamental e que participaram do Clube de Ciências. Tais atividades tinham por intuito o desenvolvimento do pensamento geométrico, mais especificamente as ideias de simetria de rotação e de reflexão, e para realização das atividades, utilizamos algumas das fases do desenvolvimento do pensamento algébrico do modelo de Van Hiele: interrogação, orientação e explicação.

A DESCRIÇÃO E APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

As atividades desenvolvidas tinham por objetivo explorar as ideias de simetria de rotação e reflexão e contemplar a habilidade da BNCC (BRASIL, 2018) que estabelece que o aluno reconheça a simetria de reflexão, no entanto, fomos além do que pede a habilidade e decidimos explorar também a simetria de rotação, visto que a BNCC aponta os conteúdos mínimos a serem ensinados aos alunos, mas não se limita apenas a isso; assim, as atividades foram pensadas para explorar as ideias de simetria de rotação e reflexão.

A primeira atividade tinha o intuito de explorar a ideia da simetria de rotação com os alunos; os recursos utilizados foram: cartolina, palitos de madeira e tachinha. Iniciamos a atividade com o seguinte questionamento aos alunos: O que é um movimento de rotação?

Após algumas respostas dadas pelos alunos, construímos com eles um cata-vento, assim, a cada aluno foi entregue uma folha de papel para construir o seu cata-vento recebendo orientações dos estagiários da turma; nessa construção, é importante que inicie as primeiras ideias de simetria, que todas as dobras que se fizer em um lado, deve se fazer do outro.

Após a construção dos cata-ventos, os alunos foram levados para fora da sala para observar a rotação do mesmo; retornamos para a sala e foi perguntado aos alunos:

> Estagiário: O que faz o cata-vento girar?
>
> Aluno 4: O cata-vento gira por causa do vento.
>
> Aluno 5: Ele gira porque a tachinha está presa no palito.

A partir da resposta do aluno 5, aproveitou-se para falar da ideia de eixo central e conduzir os alunos para a construção da ideia de simetria de rotação, assim após as explicações foi pedido que os alunos dessem outros exemplos. É importante que a explanação da ideia de simetria de rotação seja feita de forma a levar o aluno a compreender a ideia trabalhada e mostrar outras situações para eles.

A segunda atividade tinha por objetivo explorar as ideias de reflexão com os alunos. Utilizamos, como recurso, peças de vidro, um holograma (construído com folhas de acetato transparente) e celular.

Os alunos foram orientados a formarem duplas, cada dupla recebeu uma peça de vidro conhecida como espelho mágico, um desenho impresso e uma folha em branco. A atividade consistia em reproduzir o desenho na folha em branco, mas para isso teriam que observar a imagem projetada na peça de vidro para que pudessem compreender a ideia de simetria de reflexão.

Os alunos observaram que quando colocavam o desenho de um lado do espelho, ele se refletia do outro lado, produzindo uma reflexão. Foi perguntado aos alunos o que eles observaram no desenho que aparecia do outro lado. A imagem 2 e 3 mostra os alunos desenvolvendo as atividades de reflexão.

> Estagiário: Qual principal diferença entre eles?
>
> Aluno 1: Estão ao contrário
>
> Estagiário: E como chamamos a imagem que observaram no vidro?
>
> Aluno 2: Reflexo.

Imagem 1: Ideias da reflexão

Fonte: Arquivo pessoal.

A partir das observações dos alunos sobre a ideia de reflexão, o estagiário ampliou as discussões e aprofundou as ideias trabalhadas, solicitando que os alunos dessem outros exemplos.

A terceira atividade foi realizada para que os alunos aprofundassem a ideia de simetria de reflexão, para isso foi utilizado como recurso didático um celular e um pequeno projetor de holograma.

A atividade consistia em colocar um holograma para refletir a imagem que se encontrava na tela do celular, produzindo assim uma situação de reflexão. Com o experimento, os alunos conseguiram observar como o espelhamento pode reconstruir imagens tridimensionais por meio da simetria de reflexão.

Imagem 2: A reflexão

Fonte: Arquivo pessoal.

O experimento proporcionou aos alunos um momento de aprendizado significativo, pois eles se mostraram encantados e curiosos para entender como aquilo acontecia. Após o experimento, foram feitas as devidas explicações das ideias trabalhadas com os alunos.

A atividade realizada com a utilização do celular mostrou que o uso das tecnologias, além de ser atraente para os alunos, contribui para o processo de aprendizagem, pois propicia aos alunos a apreensão de diferentes conceitos.

Na utilização dos celulares, por exemplo, ao ampliar ou reduzir uma imagem, os alunos estão trabalhando com as transformações geométricas e nem se dão conta, cabe ao professor esclarecer para os alunos a matemática que está por trás dessa tecnologia e, dessa forma, tornar as aulas muito mais interessantes e significativas. Para Miskulin (2012), o desenvolvimento tecnológico proporciona uma nova dimensão ao processo educacional, a qual transcende os paradigmas ultrapassados do ensino tradicional, baseado na transmissão de informação e treinamentos do pensamento algorítmico e mecânico.

Por fim, com a aplicação das atividades observamos que as mesmas colaboraram para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, pois por meio das atividades investigativas os alunos conseguiram observar as diferenças entre as simetrias de rotação e reflexão, causando neles interesses por esses conceitos que aparentemente fazem parte do seu cotidiano e que não são percebidos como um conhecimento matemático.

Também constatamos que o desenvolvimento de atividades visuais é importante para a aprendizagem em matemática, uma vez que, segundo Boaler, Munson e Williams (2018), os alunos são inspirados pela criatividade que se torna possível quando a matemática é visual e investigativa.

Na colocação de Humphreys e Parker (2019), os alunos precisam descobrir algo, em vez de alguém lhes dizer o passo a passo que devem seguir; assim, é importante que os alunos tenham a oportunidade de explicar o que eles pensam, em vez de esperar que lhes expliquemos algo.

Dessa forma, os alunos precisam de atividades que propiciem oportunidades para pensar e aprender a resolver problemas de forma que faça sentidos para eles e à medida que os alunos se desenvolvem em sua compreensão da matemática, podemos encorajá-los a ampliar e a generalizar suas ideias por meio do raciocínio, da justificação e da comprovação. Esse processo aprofunda a sua compreensão e os ajuda a comprimir sua aprendizagem (BOALER; MUNSON; WILLIAMS, 2018).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento das atividades, percebemos a compreensão dos alunos em relação aos conceitos geométricos trabalhados, visto que partiram da observação para a construção das ideias de simetria de rotação e reflexão que estavam sendo trabalhados.

Observamos o envolvimento, curiosidade e interesse dos alunos na realização das atividades e seu entusiasmo na descoberta do novo conhecimento, pois se mostraram participativos nas discussões, bem como na realização das atividades. Assim, as atitudes dos alunos nos levam a corroborar com os estudos de Ponte, Broca e Oliveira (2005), reafirmando o maior alcance de aulas exploratório-investigativas, dando espaço ao aluno a criar e correlacionar a matemática com o meio que o circunda.

Por fim, ao se observar a potencialidade didático-pedagógica das atividades por investigação não se pode deixar de notar a contribuição que esse tipo de atividades traz como contribuição para a formação inicial, visto que tais atividades proporcionaram um contexto interativo e compartilhado de aprendizagens para os futuros professores que puderam vivenciar um momento de aulas diferenciadas das aulas tradicionais.

REFERÊNCIAS

BOALER, J.; MUNSON, J.; WILLIAMS, C. **Mentalidades matemáticas na sala de aula**. Porto Alegre: Penso, 2018.

BRASIL. MISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CROWLEY, M.L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. *In*.: LINDQUIST, M.M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994, p. x-y.

HUMPHREYS, C.; PARKER, R. **Conversas numéricas**. Porto Alegre: Penso, 2019.

JUCÁ. R. S.; SANTOS, W.S. Ensino de área de figuras planas utilizando o software Geogebra. **Anais do Encontro Paraense de Educação Matemática**. Belém do Pará, 2011.

JUCÁ, R.S.; ALVES, I.S.; SOUSA, W.O. Desenvolvimento do pensamento geométrico: uma experiência com uma turma do 4º ano do ensino fundamental. Anais do Encontro Nacional dos Clubes de Ciência. IEMCI, UFPA, Belém, 2019.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais manipuláveis. *In.*: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas, São Paulo: Autores associados, 2012, p. x-y.

MISKULIN, R.G.S. As potencialidades didático-pedagógicas de um laboratório em educação matemática mediado pelas TICs na formação de professores. *In.*: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas, São Paulo: Autores associados, 2012, p. x-y.

PIMENTEL, T.; VALE, I.; FREIRE, F.; ALVARENGA, D.; FÃO, A. **Matemática nos primeiros anos**: tarefas e desafios para a sala de aula. Lisboa: Texto, 2010.

PONTE, J.P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

RÊGO, R.G. do; RÊGO, R.M. do; VIEIRA, K.M. **Laboratório de ensino de geometria**. São Paulo: Autores associados, 2012.

TURRIONI, A.M.S. & PEREZ, G. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. *In.*: LOREZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas, São Paulo: Autores associados, 2012, p. x-y.

VICKERY, A. **Aprendizagem ativa nos anos iniciais do ensino fundamental**. Porto Alegre: Penso, 2016.

O USO DE JOGOS AFRICANOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM BREVE RELATO DA EXPERIÊNCIA NO PROGRAMA DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA (PIBID)

Calvim Costa[26]
Márcio de Albuquerque Vianna[27]
Rosemeiry da Silva Pinto Cavalcante[28]
Allan Vicente de Macedo Silva[29]

INTRODUÇÃO

A partir das experiências realizadas no projeto PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência) e da Residência Pedagógica na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, este capítulo tem como objetivo de não somente analisar a aprendizagem do conteúdo por parte dos alunos, mas, também, a valorização e a habilidade do senso crítico dos estudantes da Educação Básica, assim como a propiciar diferentes maneiras de pensar em matemática.

Com intuito de atingir o objetivo de desenvolver uma matemática crítica dentro e fora da sala de aula, pudemos perceber que a Etnomatemática seria uma proposta educacional que poderia auxiliar os educadores matemáticos na construção de uma matemática menos tecnicista da reprodução do currículo hegemônico de características eurocêntricas. Tal visão afasta-se das abordagens conservadoras e tradicionais de ensino, podendo levar o educando a perceber e a valorizar

---

[26] Mestrando do PPGEduCIMAT/UFRRJ. Membro do GEtCiMat (Grupo de Estudos e Pesquisas em Etnociências e Etnomatemática da UFRRJ). Professor do Colégio Hermann.

[27] Professor do DTPE/PPGEduCIMAT/IE/UFRRJ. Mestre em Educação Matemática pela USU. Doutor na área de Políticas Públicas Comparadas pelo PPGCTIA/UFRRJ. Coordenador do GEtCiMat.

[28] Mestranda do PPGEduCIMAT/UFRRJ. Membro do GEtCiMat. Professora das redes municipais de ensino de Resende e de Itatiaia (RJ).

[29] Mestre em Educação Matemática pela USS. Membro do GEtCiMat e Mediador da Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ.

os saberes presentes nas práticas cotidianas, sejam de sua localidade ou de grupos com os quais se identifique.

Com isso buscamos abordagens nas quais os alunos possam observar a matemática como uma ferramenta para compreender o mundo em que vivem, valorizando assim, o contexto sociocultural de diferentes povos e comunidades.

Na perspectiva da Etnomatemática colocamos em prática a lei 10.639/03 que posteriormente foi alterada pela lei 11645/08, cujo conteúdo preconiza a obrigatoriedade do estudo da história e cultura afro-brasileira e indígena na educação básica, em escolas públicas e privadas.

O propósito de essa lei aplicar na prática docente é combater a negligência quanto à história da cultura afro-brasileira e indígena nas salas de aula de matemática, além de valorizá-las com o intuito de amenizar os impactos causados por um currículo escolar eurocêntrico, dando destaque à herança matemática presente nestas culturas.

O currículo eurocêntrico vigente nos programas e redes escolares elabora ideias estereotipadas em relação às sociedades indígenas e africanas, cujas ideias aparecem na matemática quando livros didáticos não mencionam o desenvolvimento matemático elaborado pelos povos africanos, como, por exemplo, as polias móveis, alguns conceitos geométricos e aritméticos, dentre outros.

O **objetivo geral** deste capítulo é apresentar como a proposta educacional com base na Etnomatemática para a sala de aula foi desenvolvida em parceria com o Pibid da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), com o intuito de valorizar a cultura afro-brasileira e africana por meio da lei 11645/08. Os **objetivos específicos** são: (i) apresentar os jogos africanos *Shisima* e *Mancala* como possibilidades de aplicação da lei em sala de aula, utilizando materiais recicláveis, (ii) trabalhar alguns pontos da geometria e da lógica matemática presente nesses jogos, procurando desenvolver uma matemática crítica e criativa e (iii) abordar os aspectos históricos e culturais das matemáticas presentes nos povos africanos.

REFERENCIAL TEÓRICO ADOTADO

O referencial teórico se inicia com as ideias do matemático e professor Ubiratan D'Ambrósio, formado pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), mundialmente conhecido pelos seus estudos referentes à área da Etnomatemática, cujo significado é a aproximação etimológica dos termos **tica** (*techné* = arte ou técnica), **matema** (explicar, compreender e difundir) e **etno** (em sua cultura).

Ubiratan D'Ambrósio, em meados da década de 70, apresenta suas primeiras teorizações acerca da Etnomatemática dando início a seu desenvolvimento como área da Educação Matemática.

D'Ambrósio (2007) acredita na necessidade de epistemologias alternativas para explicar diferentes formas de conhecimento, contrapondo o ensino mecânico e engessado da matemática moderna. D'Ambrósio (Ibidem), com o seu programa Etnomatemática, procura trazer uma proposta historiográfica, em que se deseja voltar-se para o saber matemático de culturas marginalizadas, enfatizando a dinâmica e a evolução desses fazeres, que são resultados da exposição de diversas culturas.

O pensamento etnomatemático se preocupa com a história do conhecimento, ou seja, existe a preocupação do desenvolvimento da ciência e a sua relação com o meio social. Tal preocupação existe para dar visibilidade a conhecimentos marginalizados, o que permite a descoberta de novas formas de se compreender o mundo por meio da matemática.

Devido a questões históricas, o modo de produzir conhecimentos de povos não europeus e de povos não urbanos podem ser considerados como não-ciência, o que causa uma desvalorização desses saberes e conhecimentos, pois constituem, segundo uma percepção eurocêntrica, produções de povos que não são capazes de produzir ciência. Segundo Esquincalha (2004, p.1) o pensamento que perdurou por centenas de anos no "reino científico", foi de que toda produção não eurocentrista ou influenciada pela mesma poderia ser, no máximo, qualificada como em evolução ao status de Ciência, desconsiderando, contudo, tanto as produções de grupos nativos colonizados, quanto as orientais, sendo as mesmas datadas de período anterior ao do Império Centro Europeu estabelecido.

Através da Etnomatemática, D'Ambrósio (2007) aspira problematizar essa classificação de não ciência das produções realizadas por povos não europeus. Para tal, o autor afirma que a produção de conhecimento de cada cultura se deve a uma gama de fatores, como as relações entre diferentes grupos e, principalmente, às suas condições sociais.

A Etnomatemática procura questionar o que se entende por ciência, trazendo uma reflexão, de forma crítica, a respeito da naturalização do discurso que diz que ciência é o que se produz apenas no contexto acadêmico/escolar. Emmánuel Lizcano (2004), na conferência plenária do 2º Congresso Internacional em Etnomatemática, afirma que:

> Por formação e por hábito, costumamos nos situar na matemática acadêmica, dá-la por 'suposta' (isto é, posta debaixo de nós, como solo fixo) e desde aí, olhar para as práticas populares, em particular, para os modos populares de contar, medir, calcular... Assim colocados, apreciamos seus rasgos tendo os nossos como referência. Medimos a distância que separa essas práticas das nossas, isto é, da matemática (assim mesmo, no singular) e, em função disto, consideremos que certas matemáticas estão mais ou menos avançadas ou julgamos que em certo lugar podemos encontrar 'rastros', 'embriões' ou 'instituições' de certas operações ou conceitos matemáticos. As práticas matemáticas ficam assim legitimadas ou deslegitimadoras em função da sua maior ou menor parecença com a matemática que aprendemos nas instituições acadêmicas. Mas, o que ocorre se invertemos o olhar? Que enxergamos se, em lugar de se olhar as práticas populares a partir da 'matemática' olharmos a matemática a partir das práticas populares? (LIZCANO, 2004, p. 58).

É interessante notar que Lizcano (Ibidem) propunha invertemos o olhar e analisarmos a matemática acadêmica, apontando para uma direção que D'Ambrósio (2007) já se referia em seu programa sobre Etnomatemática, possibilitando um melhor entendimento sobre a matemática das instituições de ensino, nas quais somos alfabetizados matematicamente, buscando resgatar uma matemática coletiva oriunda das práticas e dos saberes populares.

A LEI DE INCLUSÃO DE TEMAS AFRICANOS E INDÍGENAS

A escola, como um aparelho do Estado, tem uma responsabilidade social importante no combate a essa visão discriminatória. Devido a importância da escola no combate a essa violência, foi aprovado a lei 10.639/03 (BRASIL, 2003) que propunha trazer novas diretrizes para o estudo da história da África e seu povo, a cultura afro-brasileira, e sua contribuição nas áreas sócio-política-econômica na história do Brasil, ampliando essa abordagem para todas as disciplinas do currículo da Educação Básica (inclui o ensino fundamental e médio), modificando a Lei 9394/96 que, de forma tímida, atribuía apenas ao ensino da História do Brasil considerar as contribuições das diferentes culturas e etnias (indígena, africana e europeia) para a formação da população brasileira (BRASIL, 1996). Assim, a lei 10.639/03 alterada mais tarde pela lei 11.645/08 (BRASIL, 2008), incluiu os estudos da história e da cultura indígena.

A lei 11.645/08 é um marco na sociedade brasileira, pois reconhece os povos indígenas e africanos como povos importantes na construção do Brasil e esse reconhecimento pode ser observado no parágrafo primeiro do artigo 26-A da lei 11.645/08:

> § 1º O conteúdo programático a que se refere este artigo incluirá diversos aspectos da história e da cultura que caracterizam a formação da população brasileira, a partir desses dois grupos étnicos, tais como o estudo da história da África e dos africanos, a luta dos negros e dos povos indígenas no Brasil, a cultura negra e indígena brasileira e o negro e o índio na formação da sociedade nacional, resgatando as suas contribuições nas áreas social,

> econômica e política, pertinentes à história do Brasil. (BRASIL, 2008, p. 1).

Esta lei traz um reconhecimento social e cultural dos grupos étnicos afro-brasileiros e indígenas, englobando tais sujeitos como seres históricos que contribuíram no processo de identidade nacional. De acordo com o MEC (Ministério da Educação):

> Reconhecimento implica justiça e iguais direitos sociais, civis, culturais e econômicos, bem como valorização da diversidade daquilo que distingue os negros dos outros grupos que compõem a população brasileira. E isto requer mudança nos discursos, raciocínios, lógicas, gestos, posturas, modo de tratar as pessoas negras. Requer também Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana que se conheça a sua história e cultura apresentadas, explicadas, buscando-se especificamente desconstruir o mito da democracia racial na sociedade brasileira (BRASIL, 2004, p.11-12).

A implantação dessa lei foi uma vitória, principalmente para os negros e índios presentes no ambiente acadêmico, e que se sentiram abraçados e representados nos assuntos escolares que lhes são providos em salas de aula.

OS JOGOS AFRICANOS E A SUA IMPORTÂNCIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Com a implantação das leis 10639/03 e 11645/08 surgem questões sobre como abordar tais conteúdos em sala de aula: Como o professor de matemática pode trabalhar a história e cultura afro-brasileira com seus alunos? Quais ferramentas ele deve usar? Uma boa alternativa para responder a essas perguntas é a de se utilizar os jogos que foram produzidos por esses grupos culturais.

Os jogos que serão utilizados aqui como base para iniciar as discussões relacionadas a questões étnico-raciais serão o *Shisima* e o *Mancala*, jogos milenares africanos. A importância de inserir tais jogos nas aulas de matemática é introduzir, de uma forma didática, a cultura africana no ensino formal, dando origem a debates e a construção de conhecimentos, no sentido de falar sobre temas como o racismo, o feminismo da mulher negra, entre outros assuntos polêmicos e que buscam reflexões profundas acerca dos processos de construção da nossa sociedade. A importância de se trabalhar com esses jogos está, também, na representatividade da cultura e do povo negro em sala de aula ao serem trazidos para o ambiente escolar, pois, o uso desses jogos africanos mostra que o povo africano é um grande construtor de conhecimentos matemáticos.

No livro “Racismo Estrutural”, de Silvio Almeida (2019), o autor diz que o racismo não é simplesmente um ato isolado, não é como se a prática do racismo fosse algo patológico, mas sim institucional/estrutural. Por isso o professor de matemática, com a Etnomatemática com base na lei 11645/08, pode encontrar nos jogos africanos uma ferramenta de auxílio para a valorização da cultura africana e dos afro-brasileiros, a fim de estimular o rompimento do racismo estrutural.

A EXPERIÊNCIA COM O PIBID DA UFRRJ

No ano de 2017 ocorreu a experiência no Programa de Iniciação à Docência (Pibid)[30], o que proporcionou uma apuração de senso crítico acerca da prática docente na Educação Básica e o impacto na formação dos jovens participantes.

A experiência docente foi desenvolvida na instituição Caic[31] Paulo Dacorso Filho, escola municipal em Seropédica, local onde ocorreram as atividades do Pibid. Nesse período, um questionamento inquietava as nossas discussões: “como aplicar o conhecimento adquirido no Pibid de forma significativa?”. A resposta apareceu, sobretudo, nas leituras e estudos sobre a Etnomatemática que se mostrou uma ferramenta

[30] O PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência) é uma iniciativa do Governo Federal que visa melhorar e a valorizar a formação de professores para a educação básica por meio das universidades que formam docentes.

[31] CAIC significa Centro de Atenção Integral à Criança e ao Adolescente. O Caic Paulo Dacorso Filho possui gestão compartilhada entre a Prefeitura de Seropédica e a UFRRJ.

extraordinária para o desenvolvimento de uma educação matemática crítica no sentido de abordar questões como saberes locais, saberes ancestrais e saberes dos povos milenares africanos.

O ponto de partida foi o desenvolvimento de uma atividade com base na Etnomatemática, na qual foram utilizados os jogos africanos, *Shisima* e *Mancala*. Esses jogos foram pensados como possíveis ferramentas metodológicas, primeira e evidentemente, por sua origem africana. Sendo assim, foi possível construir uma reflexão entre a matemática escolar e as matemáticas presentes na história das culturas dos povos originários africanos. Além desse aspecto, esses jogos são acessíveis e podem ser construídos com materiais reutilizáveis. Também são jogos dinâmicos e divertidos. Sua acessibilidade pode motivar o professor a utilizá-los, e sua “recreatividade” pode ser estimulante para que os alunos se envolvam na atividade.

Outro ponto é a diversidade de conteúdos matemáticos presentes nesses jogos. Devido a essa diversidade, as atividades com esses jogos podem ser desenvolvidas nos diversos segmentos e anos escolares. Por exemplo, em turmas do Ensino Fundamental, o jogo *Shisima* pode ser utilizado para trabalhar conceitos de geometria como ângulos, polígonos, ponto, retas, entre outros.

O jogo *Mancala* segue o mesmo exemplo no que diz respeito à amplitude de conteúdos escolares, podendo-se trabalhar com soma, multiplicação, subtração e divisão, além de possibilitar o desenvolvimento do raciocínio lógico e da estratégia, assim como no xadrez, com a diferença que o *Mancala* pode ser construído com materiais mais simples e de fácil acesso.

A atividade aplicada com os alunos no Caic gerou muitas reflexões, sobre as quais elaboramos uma sequência didática. Tais reflexões serão apontadas nos parágrafos seguintes, embora não tenham sido objeto de análise, mas como ponto de partida para a elaboração das atividades que foram desenvolvidas.

A ideia inicial foi começar com a atividade na forma de uma roda de conversa com os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, que foram iniciadas com as seguintes perguntas: "vocês gostam de matemática?", "sabem dizer onde surgiu a matemática?", "o que vocês sabem sobre o continente africano?" e "vocês conseguem fazer um paralelo entre a matemática e o continente africano?". A proposta da roda de conversa e dessas indagações iniciais foi de propiciar espaço de fala para os alunos e, com isso, analisar se suas percepções sobre o continente africano são baseadas em um senso comum que carrega uma visão estigmatizada e folclorizada sobre o mesmo. Posteriormente, apresentou-se os jogos africanos *Shisima* e *Mancala*, os quais foram construídos, juntamente com os alunos, com matérias reutilizáveis, como papelão, caixa de ovo, cabo de vassoura, tampinha de garrafa pet e outros.

Ao longo do desenvolvimento da atividade, entre a apresentação dos jogos, construção dos tabuleiros e explanação do conteúdo acreditamos ser importante trazer discussões baseadas nas perguntas iniciais, nas quais o professor argumente contra os possíveis pensamentos da África estigmatizada, visando desconstruir o senso comum que possa existir.

A ATIVIDADE DESENVOLVIDA COMO SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Como o trabalho envolve dois jogos, o *Shisima* e o *Mancala*, para cada jogo foram desenvolvidas atividades específicas para serem trabalhadas em sala de aula.

O jogo *Shisima* e sua apresentação:

Tendo em vista as dificuldades dos alunos em geometria, foi desenvolvida uma atividade com a intenção de trabalhar as definições iniciais de geometria euclidiana, trazendo como base para isso as propostas educacionais desenvolvidas pela Etnomatemática.

Dessa maneira, além de desenvolver os conceitos matemáticos, a atividade estaria explorando o senso crítico dos alunos, pois trabalharia a matemática em um meio contextualizado em uma abordagem sociocultural.

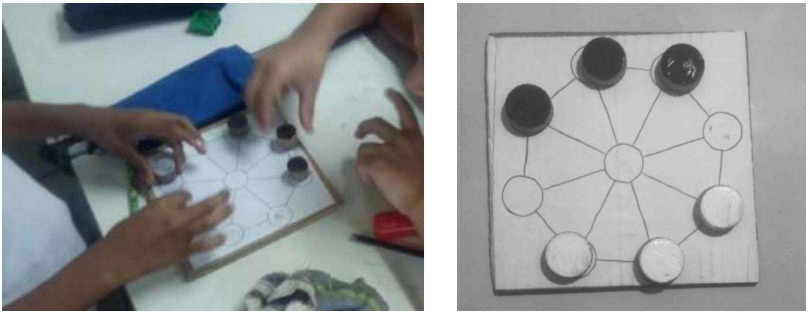
Para atividade que envolve geometria euclidiana, viajamos até a África para trazer um jogo do Quênia, muito popular e fácil de se jogar onde as crianças desenham o tabuleiro na areia e utilizam pedras, tampinhas de garrafa ou botões como peças chamado *Shisima*, que significa "extensão d'agua" e suas peças "imbalavali", "pulgas d'agua" em português. O jogo exige agilidade dos participantes no movimento das peças lembrando a agilidade das pulgas d'agua que se movimentam com grande rapidez na água. Suas estratégias se assemelham ao "jogo da velha", porém com menor possibilidades de alinhamento das peças (GELEDÉS, 2013).

Objetivos:

- Confeccionar e manipular o jogo africano Shisima;
- Compreender a importância da lei 11645/08;
- Estimular o trabalho em grupo.

Recursos: Papelão, 6 tampas de garrafa pet (ou qualquer peça redonda a serem pintadas com 2 cores diferentes, ou seja, 3 de uma tonalidade e 3 de outra), canetas coloridas, tesoura e réguas

Figura 1: Alunos do Caic jogando *Shisima* confeccionado com material reciclado.



Fonte: acervo dos autores.

Aplicação e metodologia:

O início da atividade tratou de apresentar a origem do jogo *Shisima,* falando um pouco da sua origem Quênia – país africano – e da lei 11645/08. Em seguida, a turma foi dividida em duplas e cada dupla recebeu um pedaço de papelão, seis tampas de garrafas pet, canetas coloridas, uma tesoura e uma régua. Na sequência, o professor apresentou três tipos de tabuleiros para a turma, um tabuleiro com a forma de um círculo, outro no formato de um octógono e o terceiro na forma de um retângulo. Os alunos montaram os seus tabuleiros da forma que escolheram. Logo após a confecção dos tabuleiros as regras do jogo foram apresentadas pelo professor.

Ao final dessa distribuição de tarefas, o próximo passo foi a construção dos diálogos, entre o professor e os alunos que conversaram sobre as figuras geométricas que aparecem no tabuleiro ao passo em que o professor condutor da atividade anotava suas respostas.

Depois do comentário de cada dupla, foi apresentada a geometria a partir do tabuleiro que possui o formato de um octaedro, e também foram apresentados conceitos de ponto, segmento de reta, semirreta, reta, o conceito de ângulos, entre outros.

Apresentados tais conceitos, o professor ensinou a turma a como colocar as peças em suas posições, explicando as regras e utilizando a geometria como referência, além de explicar que nenhuma peça pode passar por cima de outra, que cada peça só pode percorrer um ponto por vez, e vence aquele que formar primeiro um segmento de reta com as três peças.

E enquanto os alunos jogavam o professor seguiu para a outra parte da atividade que foi mencionar a cultura africana, fazendo um paralelo entre o jogo de origem africana e a geometria aplicada neste jogo, sempre promovendo uma reflexão e debate entre os alunos.

O jogo *Mancala* e sua apresentação:

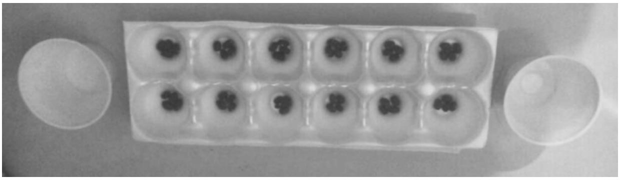
A atividade apresenta como tema central, para o estudo da matemática e da cultura africana, o jogo *Mancala,* como um dos jogos de tabuleiros mais antigos do mundo. O nome *Mancala* é apontado como uma denominação genérica para centenas de jogos de tabuleiro, sendo conhecidos como "jogos de semeadura". O termo *Mancala* vem do árabe "*naqaala*" que significa "transportar" ou "mover" sendo este o objetivo do jogo, simular o ato de semear. Alguns autores creditam sua origem como egípcia. Os participantes recebem a mesma quantidade de grãos que são distribuídos dentre as 12 cavidades presentes no tabuleiro, embora tenha características simples é um jogo de estratégias envolvendo concentração e cálculos mentais (ZUIN e SANT'ANA, 2015).

Objetivos:

- Montar e trabalhar o jogo africano *Mancala*;
- Desenvolver o pensamento e o raciocínio lógico matemático e padrões de contagem;
- Trabalhar a cultura africana em sala de aula para resgatar a representatividade no ambiente escolar.

Recursos: Caixa de ovos, grãos como feijão ou milho de pipoca e dois copos descartáveis.

Figura 2: Jogo *Mancala* construído com materiais recicláveis.



Fonte: acervo dos autores.

Aplicação e metodologia:

A atividade iniciou com a apresentação da lei 11645/08 em paralelo com a exposição da origem do jogo *Mancala*, o seu significado e a sua importância. Em seguida, separados em grupos, os alunos receberam uma caixa de ovo, 48 grãos de feijão e dois copos descartáveis. Logo depois, sob a orientação do professor, os alunos montaram o jogo e o professor explicou as regras.

No final da atividade, foi realizada uma roda de conversa na qual os alunos compartilharam as estratégias que utilizaram e que tipos de conceitos matemáticos os alunos conseguiram observar no jogo, fazendo um paralelo entre a matemática acadêmica e a matemática presente no jogo africano, buscando valorizar a cultura africana e trabalha-la no ambiente acadêmico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Consideramos neste trabalho que a Etnomatemática, aliada à lei 11645/08, pode ser uma ferramenta extremamente importante para o combate ao “senso comum”, que traz uma percepção do continente africano como um lugar cientificamente escasso e de cultura inferior às culturas ocidentais.

Através da observação dos ambientes escolares durante a ação no Pibid, concluímos que os mecanismos de processo de ensino gerados pela Etnomatemática são extremamente funcionais quando o professor busca uma educação matemática crítica e que se relaciona com cotidiano e a historicidade ancestral de seus alunos.

Por meio das atividades aqui apresentadas, nas quais refletimos sobre a matemática de uma maneira mais crítica, acreditamos que seja possível que se proponha uma maior participação dos alunos em sala de aula, contribuindo para o desenvolvimento da aula com mais questionamentos e dúvidas acerca dos aspectos sociais, étnicos e históricos do conhecimento, além da construção das definições de conceitos matemáticos.

Acreditamos que a Etnomatemática é uma área de pesquisa muito importante, pois permite dar voz aos alunos, os tornando protagonistas no processo ensino-aprendizagem. Assim, consideramos que os professores devam se apropriar dos conceitos desta área da educação, para que desenvolvam uma educação matemática mais crítica com a participação ampla dos alunos e possibilitando, assim, o desenvolvimento de uma aula mais participativa, reflexiva, menos tecnicista e reprodutivista da cultura hegemônica eurocêntrica.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Silvio. **Racismo estrutural**. Feminismos Plurais. Ed. Pólem, São Paulo, 2019.

BRASIL. **Lei n° 9 394, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1996/lei-9394-20-dezembro-1996-362578-publicacaooriginal-1-pl.html> Acesso em 04/09/2020

BRASIL. **Lei n° 10 639, de 9 de janeiro de 2003.** Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática «História e Cultura Afro-Brasileira», e dá outras providências. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/l10.639.htm> Acesso em 04/09/2020.

BRASIL. **Lei n° 11 645, de 10 de março de 2008.** Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, modificada pela Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da rede de ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira e Indígena". Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2008/Lei/L11645.htm> Acesso em 04/09/2020.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana**. MEC. Brasília, DF, 2004

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade.** Autêntica, 2007

ESQUINCALHA, Agnaldo da Conceição. **Etnomatemática: um estudo da evolução das ideias.** Anais do VIII Encontro Nacional da Educação Matemática. SBEM. Recife, 2004. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/05/1CC08743214762.pdf> Acesso em: 04/09/2020

GELEDÉS. INSTITUTO DA MULHER NEGRA. **Jogos Africanos – A Matemática na Cultura Africana**. 30 de nov. de 2013. Disponível em: <https://www.geledes.org.br/jogos-africanos-matematica-na-cultura-africana/>. Acesso em 10/09/2020

LIZSCANO, Emmanuel. As matemáticas da tribo européia: um estudo de caso. In: KNIJNIK, Gelsa; WANDERER, Fernanda; OLIVEIRA, Cláudio Jose. **Etnomatemática currículo e formação de professores.** Santa Cruz do Sul: EDUNISC, 2004.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron, SANT'ANA, Nádia Aparecida dos Santos. **Produzindo aproximações da cultura africana com a Matemática escolar: a utilização do jogo Mancala.** Revista Pedagogia em Ação, v. 7, n.1. 2015. P. 7-26. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/186646/ELENICE%20ZUIN_NADIA%20SANTANA_ARTIGO%20MANCALA_PEDAGOGIA%20EM%20A%C3%87%C3%83O.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Acesso em: 10/09/2020

AMBIENTES DIGITAIS DE APRENDIZAGEM: POSSIBILIDADES E DESAFIOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Juliana C. Silva[32]
Silvana Andrade[33]
Weslley Oliveira[34]
André R. Magalhães[35]

INTRODUÇÃO

O constante e intenso aperfeiçoamento tecnológico tem modificado os modos como lidamos com o conhecimento. Imersa nesse contexto, a Educação também vem demandando alterações. Saberes antes restritos a materiais estáticos, como os livros, têm ganhado movimento a partir de recursos audiovisuais propiciados pelo uso de tecnologias digitais. Novas formas de ensinar e de aprender estão surgindo ou se reinventado, sobretudo, a partir do acesso à internet.

Segundo Magalhães (2009) para delinear o cenário educacional que a sociedade contemporânea se encontra, com a diversidade e quantidade de informações disponíveis nas redes e nos dispositivos midiáticos, é necessário sair dos pilares tradicionais da educação escolar e empreender as novas formas de construção de conhecimento.

Uma alternativa que pode contribuir para melhorar a dinâmica do ensino de matemática e provocar a aproximação dos alunos com a disciplina é a inserção de tecnologia no ambiente educacional, mas especificamente, a inserção de recursos tecnológicos próprios de comunicação

[32] Mestranda em Gestão e Tecnologias Aplicadas à Educação, Universidade do Estado da Bahia.

[33] Mestranda em Gestão e Tecnologias Aplicadas à Educação, Universidade do Estado da Bahia.

[34] Mestrando em Gestão e Tecnologias Aplicadas à Educação, Universidade do Estado da Bahia.

[35] Doutor em Educação Matemática. Coordenador do Mestrado em Gestão e Tecnologias Aplicadas à Educação, Universidade do Estado da Bahia.

e/ou interação que os jovens já estão familiarizados ou conhecem, pois fazem parte de seu meio social. (SILVA; ANDRADE, MAGALHÃES, 2019).

Com o avanço da tecnologia digital e o desenvolvimento dos ecossistemas digitais em rede, nos apropriamos cada dia mais de ferramentas que surgem com a intenção de dar mais alcance entre seus usuários no que diz respeito a interatividade colaborativa. A educação vem se moldando a este novo olhar e experimentado estes espaços digitais como forma de alcançar seu público alvo. Mas será que essas ferramentas são potencializadoras quando falamos do ensino de matemática? E será que esses ambientes digitais, com todos seus recursos disponíveis, são apropriados para o desenvolvimento eficiente e eficaz para a aprendizagem de quem irá utilizá-lo?

Citaremos aqui três ferramentas digitais já conhecidas e utilizadas por nós em sala, e seus recursos para fins acadêmicos. São elas, o *Classroom*, conhecido também como *Google Sala de Aula*, o *Instagram*, uma Rede Social e a Plataforma de *Vídeos YouTube*.

O *Classroom* é uma ferramenta que agrega muito valor a educação pois permite através de criação de salas de aulas virtuais, incluirmos vídeos, listas de exercícios e interações múltiplas. O *Instagram*, é a rede social preferida entre o público brasileiro segundo a *Social Media Trends* 2018[36], que permite além de comunicação direta a postagens de imagens e vídeos. E o uso dos vídeos, através especificamente da plataforma Youtube, também traz uma grande contribuição para a aprendizagem.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA
AMBIENTES DIGITAIS DE APRENDIZAGEM

A educação carece dessas transformações e os recursos tecnológicos podem ser parceiros nesta jornada. Segundo a agência Nacional de notícias (CNI), não temos noção de onde chegaremos com o avanço da tecnologia, mas precisamos estar preparados.

---

36 “As 10 redes sociais mais usadas no Brasil [2019] - Rock Content.” 19 jun. 2019, https://rockcontent.com/blog/redes-sociais-mais-usadas-no-brasil/. Acessado em 2 nov. 2019.

Dentro deste processo de preparação a maior urgência está instalada nas práticas e na mentalidade docente, que precisam ser reconfiguradas. É imprescindível a capacitação para a atuação em ambientes híbridos, de acordo com Moreira (2018), o desafio é criar ambientes férteis, dinâmicos, vivos e diversificados. Contudo, para que os ambientes digitais de aprendizagem possam vigorar, o maior desafio é convencer o professor que ele precisa dispor de tempo para qualificar - se. Que ele não está em um "pedestal intocável " e que independente de todas as formações adquiridas, é essencial atualizar-se para se manter inserido no ambiente que se propõe a interagir e conviver.

Estamos conectados a esta grande teia que se chama vida. Toda educação é a distância. O problema é, foi e será, o de como eliminar esta distância. (GIGLIO e SOUZA, 2015).

Em vista disto, é importante reconhecer que os ambientes digitais de aprendizagem em rede se configuram como uma premência para o mundo tecnológico que vivenciamos, e são minimizadores desta distância presente no processo educativo. Contudo, não podemos considerar esta modalidade como um substituto da educação analógica, mas como um agente potencializador do ensino e aprendizagem.

CLASSROOM: SALA DE AULA VIRTUAL

O *Classroom* é uma sala virtual, ela permite que seu idealizador execute avaliações com correções online, tópicos diversos de temas trabalhados em sala, permite também a interação entre todos que estão vinculados a turma, incluir e excluir turmas e alunos a qualquer momento. Além disso, é possível dar um feedback das questões propostas para resolução. Neste ambiente, podemos também apresentar um retorno individualizado, ou em grupo, caso algum aluno necessite ou mesmo toda a turma, e também interagir através de conversas dentro da plataforma.

Segundo Alecrim (2014), o *Google Classroom* é uma plataforma online que concentra ferramentas do *Google* para auxiliar e promover atividades educacionais.[37] Contudo, a utilização desta ferramenta vai além do auxílio e promoções de atividades, ela pode ser usada como um espaço para trocas em rede do que comumente é feito na relação presencial.

O *Classroom* consiste basicamente em uma página na rede na qual o professor cria a sala de aula virtual e neste espaço é possível manter as práticas analógicas no ambiente. Para utilização desta ferramenta é necessário apenas ter uma conta *Google*, o que permite que qualquer pessoa possa criar a sua sala de aula virtual.

"O *Google Classroom* é ideal para quem tem projeto educacional e quer reunir seus alunos em uma plataforma digital. Bastante simples, a ferramenta permite que você crie uma sala de aula, adicione seus alunos por e-mail e elabore tarefas para compartilhar na agenda da sala. É possível conversar ainda em tempo real com os alunos, dentro ou fora da sala de aula." [38]

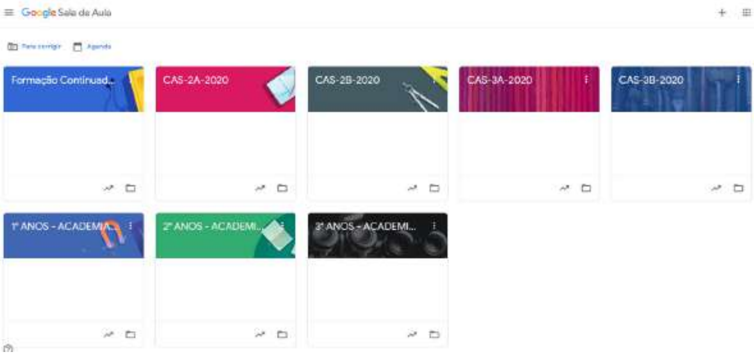
De acordo com a experiência com o uso desta ferramenta em sua sala de aula, como apresentados na figura abaixo, o professor de matemática Weslley Oliveira, coautor deste capítulo, ressalta a importância para a interatividade e a exclusividade que esta Plataforma oferece ao educador e educando. É possível compartilhar arquivos como: listas de exercícios, vídeos e atividades complementares, tendo também a possibilidade de uma devolutiva ao aluno de forma individual ou coletiva das questões propostas. Com relação aos erros e acertos, existe a possibilidade de interagir com o(os) aluno(os) acerca de suas dúvidas e comentários, socializando as ideias. Tudo isso em sua sala virtual exclusiva para aquela turma particular, mostrando uma organização e um bom funcionamento.

---

[37] "Qualquer um pode usar o Google Classroom para criar uma ...." https://tecnoblog.net/213723/google-classroom-para-todos/. Acessado em 31 out. 2019.

[38] "Google Classroom: veja como funciona essa ferramenta." 1 jun. 2018, https://regrasparatcc.com.br/ferramentas/google-classroom/. Acessado em 31 out. 2019.

Figura 1



Fonte: Ambientes do Classroom do professor Weslley. [39]

A proposta da sala de aula Google é bastante consistente, mas é importante salientar que não seja apenas utilizada como uma espécie de repositório de tarefas, ou recebimento das mesmas. É preciso analisar o potencial deste uso tecnológico, dos ambientes digitais de aprendizagem. de acordo com Moreira, Lemos e Vieira (2018) o simples uso da tecnologia pela tecnologia não é suficiente para a melhoria dos processos educacionais, tornando-se, por isso, necessárias a reflexão e a mudança das práticas pedagógicas. Não basta inserir o digital sem atentar para a prática do analógico atrelada a este processo de maneira síncrona. A reflexão voltada para o ensino híbrido harmoniza esta ideia, pois ultrapassa a simples inserção de recursos tecnológicos, mas promove a integração significativa do grupo que compõe este espaço.

Moreira (2015, p.92) aborda que as interações, não só com o professor, mas também com os colegas, configuraram - se como a base prática da aprendizagem, e tais interações foram suportadas pelas teorias de caráter construtivista e sociointeracionista.

De maneira análoga a citação clássica de Exupéry: “Tu te tornas eternamente responsável por aquilo que cativas”(2014, p.72). Nestes ambientes digitais de aprendizagem manter a interação com os estudantes faz parte do cativar, do promover interações que despertem

39 Disponível em: < https://classroom.google.com/u/1/h > Acessado em 24 set. 2020.

o interesse e permitam que os estudantes se envolvam cada vez nos diferentes ambientes com seus pares.

Ou seja, nesta plataforma é necessário que o professor desenvolva um processo de interação para que a função primordial de um ecossistema digital seja valorizada e não relegue o uso da ferramenta apenas como um instrumento estético que encerra as práticas antigas de educação e não explora a interação ou socialização.

REDE SOCIAL: INSTAGRAM

A finalidade da rede social era encarada como um momento de lazer e interação social apenas, contudo com a evolução e influência das redes em todos os aspectos, estas têm desempenhado papéis muito mais influentes na economia, educação, política e outros setores. No entanto, existe uma imensa variedade de redes sociais presente no nosso cotidiano, contudo nenhuma delas apresenta um potencial de crescimento e interesse tão alto quanto o Instagram.

De acordo com Aguiar (2016) e com pesquisas realizadas pela Social Media Trends 2018, a rede social que mais apresentou crescimento esse ano foi o Instagram, passando de 63,3% de adoção para 80,2% e se consolidando como a segunda colocada em preferência no Brasil.[40]

Além disso, a rede tem demonstrado um alto desenvolvimento para movimentações econômicas referentes ao mundo dos negócios. Na educação isto não tem sido muito diferente, muitos docentes renomados no mundo das redes sociais apresentam perfis com mais de 175 mil seguidores, como o professor Rafael Procópio, da página “Matemática Rio”. A sua página tem origem do *YouTube*, que será descrita a seguir neste artigo, e no *Instagram* já apresenta forte influência para o ensino de matemática. Em entrevista ao site O Globo[41] Rafael ressalta que a

[40] “Instagram: saiba tudo sobre a segunda rede mais usada do ....” 12 set. 2016, https://rockcontent.com/blog/instagram/. Acessado em 31 out. 2019.

[41] “Professor explica matemática de forma inovadora ... - O Globo.” 6 set. 2014, https://oglobo.globo.com/sociedade/educacao/educacao-360/professor-explica-matematica-de-forma-inovadora-no-youtube-ja-coleciona-80-mil-seguidores-13856075. Acessado em 2 nov. 2019.

intenção da divulgação do conteúdo nas redes não se limita a replicar o modelo tradicional que ocorre nas salas de aula, mas sim uma forma de complementar este estudo.

A professora de matemática Juliana Silva, que vos escreve, utiliza o *Instagram* como uma ferramenta lúdica para colaborar no ensino dos seus estudantes. Nesta rede são realizados desafios (nomeado como "*Challenge de Quinta*") uma vez na semana, solicito que nas imagens publicadas com o desafio os alunos comentem com a resposta. Durante a semana, são publicadas imagens com conceitos que embasam para formulação da resposta do desafio, como mostra a figura abaixo. Após uma semana a resposta é disponibilizada, comentada e os estudantes interagem comentando sobre o entendimento ou não das questões.

Figura 2

Fonte: Página no Instagram da Professora Juliana.[42]

[42] Disponível em: < https://www.instagram.com/proju.ncarvalho/> Acessado em 24 set. 2020.

Por se tratar de uma rede social que não possui um fim acadêmico, alguns desdobramentos são encontrados para execução da plataforma com o viés educacional, no entanto ela apresenta um grande potencial para colaborar com o ensino, de uma forma mais atrativa para o estudante.

YOUTUBE

Os vídeos têm um grande potencial e pode agregar valores à sala de aula, tanto para aquele que aprende, como para aquele que ensina. É preciso também que os professores tenham condições técnicas para isso, conhecimento, que pode ser adquirido e vontade para fazer da prática docente um mundo de encantamento e oportunidades para todos.

De uma forma geral, o uso de vídeos em sala de aula tem toda validade pedagógica.

> O vídeo é sensorial, visual, linguagem falada, linguagem musical e escrita. Linguagens que interagem superpostas, interligadas, somadas, não-separadas. Daí a sua forma. Somos atingidos por todos os sentidos e de todas as maneiras. O vídeo nos seduz, informa, entretém, projeta em outras realidades (no imaginário), em outros tempos e espaços. (MORAN, 1995, p. 28).

Algumas características positivas na utilização de vídeos nas aulas podem ser apontadas: Os vídeos já fazem parte da realidade de muitas instituições de ensino e, portanto, já inseridos na prática dos professores. Tem um formato que atrai muito a atenção e o interesse dos estudantes, pois alia som e imagens para transmitir sua mensagem. Pode ser usado como elemento de estímulo à criatividade. Os alunos podem criar seus vídeos, exercitando as diversas formas do pensar e fomentando as diferentes dinâmicas de transmitir o que querem.

As possibilidades do uso de vídeos nas aulas são muitas e dependem dos objetivos e estratégias metodológicas, podemos citar:

-Na simulação de experiências que não podem ser realizadas em sala;

-Para discussão de objetos do conhecimento de forma direta ou indireta;

-Para produção de material, como por exemplo, registro de aulas, estudo de objetos do conhecimento e a própria documentação de ferramentas.

Ao se escolher um vídeo para ser utilizado em sala de aula, deve-se aliar aos objetivos metodológicos e alguns critérios podem ser elencados: forma e o conteúdo interessante para estimular o interesse do aluno; conteúdo adequado ao público; clareza nos objetivos educativos.

Portanto, dentro deste olhar e escolha metodológica, pode-se aliar as escolhas com o uso da plataforma de vídeos YouTube que permite além de participar na posição de aprendizes, podemos também ser autores de nossas próprias produções e estender esta realidade para os alunos.

O *YouTube* surgiu em 2005 com intuito de ser uma plataforma para postar, assistir e compartilhar vídeos na internet, ele é um dos principais sites do segmento atualmente disponíveis, com mais de 1 bilhão de usuários em todo mundo.

A plataforma *YouTube* agrega um fator muito importante que é a quebra de barreiras entre o espaço-tempo, permitindo ao usuário um livre acesso às videoaulas onde puder, no tempo que quiser e no horário mais conveniente.

Esta plataforma disponibiliza diversos objetos do conhecimento, com temáticas variadas, gravados por diversos professores. Configura-se num grande celeiro de possíveis aprendizagens. Isto traz um significado positivo para aqueles que dificilmente aprendem um conteúdo abordado apenas por uma pessoa, que talvez não tenha uma didática que se assemelhe à sua forma de recepção, ou que talvez não utilize um recurso capaz de conquistar a atenção de quem acessa.

Também permite interação aos usuários ao abrir espaço através de chats de conversas onde se analisa e discute se tais vídeos ou tais aulas têm impacto significativo para quem se dispõe assisti-la, isso permite avaliar se será necessária uma reformulação na metodologia escolhida por esses elementos. *Playlist* podem ser criadas a fim de organizar os conteúdos por temas ou categorias.

Com o avanço das tecnologias digitais e o fácil acesso as redes sociais, podemos perceber que essas novas ferramentas tem sido um grande potencial no que diz respeito ao ensino e aprendizagem. Antes restrito ao ambiente escolar, hoje o saber encontra-se nas mãos daqueles que possuam o equipamento necessário não só para acessá-lo, mas também para produzi-lo e divulgá-lo.

Com um crescimento de mais de 58% usuários no Brasil nos últimos anos, o YouTube é, hoje, a maior rede no Brasil e a segunda maior do mundo. Segundo dados da pesquisa, 95% dos respondentes afirmaram que o site de vídeos é a plataforma mais usada (Social Media Trends 2018).

O *YouTube* apresenta-se, mundialmente, como um dos maiores sites de visualização de vídeos, caracterizado por ser uma plataforma dinâmica, em que é possível "contar as visualizações", "curtir" os vídeos, postar comentários e criar um canal específico para cada usuário" (KAMERS, 2013, p.83).

Por ter esta dinâmica, o *YouTube* tem sido uma ferramenta útil para os docentes de matemática, pois permite além de postar seus conteúdos de uma forma clara e sem interrupções, ele poderá editar quantas vezes quiser o seu vídeo antes de postá-lo na plataforma. Pausar os vídeos para praticar alguma questão, acessar outros vídeos com assuntos afins para dirimir suas dúvidas, sem ter a preocupação do espaço-tempo como numa sala de aula convencional, e ainda conta com o recurso da interatividade, pois poderá deixar seus comentários para que o autor do canal e outros usuários possam compartilhar suas ideias e tecer contribuições para todos. Também existe o *YouTube Edu*, uma plataforma que seleciona e agrega vídeos de educação feitos por professores brasileiros. A iniciativa, criada em parceria com a Fundação Lemann, do empresário Jorge Paulo Lemann. www.youtube.com/edu.

A professora de matemática Silvana Andrade, uma das coautoras deste artigo, utiliza um canal do *YouTube* para apresentar suas aulas, o canal DM-Dialogando com a Matemática. Tem objetivo primordial de potencializar o aprendizado dos alunos com aulas para o Ensino Médio e Ensino Fundamental Maior. Também nutri salas de aulas no Google Sala de Aula com o mesmo público alvo, diversificando as práticas de acordo com os ambientes.

Figura 3

Fonte: Canal no YouTube da professora Silvana.[43]

CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com as análises feitas nos ambientes do *Classroom, Instagram* e *YouTube*, foi possível observar que a ferramenta do Google *Classroom* ainda é a que atende melhor às necessidades docentes para o ensino de matemática. Pois, esta plataforma foi estruturada com o intuito educacional e possui estruturas análogas a da sala de aula analógica. Além disso, neste ambiente é possível anexar qualquer arquivo que o professor já possua, a formatação que permite comentários para interações, é possível determinar um prazo final para entrega de tarefas e até a programação de envio de atividades para a turma, o que corrobora para o trabalho docente. No entanto, este espaço por representar de forma tão clássica a sala de aula tradicional e analógica ainda não conquista tanto os estudantes como os outros ambientes que constituem a rotina dos mesmos.

No caso do *Instagram e YouTube*, por exemplo, a dinâmica é mais atrativa para os alunos, porém não há esta delineação tão específica

[43] Disponível em: < https://www.youtube.com/channel/UC_sE2xMjiz3AM5-YAXE_6lg > Acessado em 24 set. 2019

em relação ao meio acadêmico. Como foram estruturadas com outras finalidades, estas plataformas não programam tarefas, ou registram o recebimento das mesmas, assim como não permitem anexar arquivos para que os alunos tenham acesso. Contudo, elas são ágeis na informação, além de serem ferramentas leves e de utilização diária.

A partir dos pressupostos analisados, foi possível verificar que os espaços apresentados neste escrito, o *Classroom, Instagram e o YouTube*, se configuram como ambientes digitais de aprendizagem e permeiam uma relação de ensino que permite ao estudante um crescimento de autonomia e desenvolvimento de habilidades que corroboram para a integração social do cidadão.

"(....) ensinar e aprender nesta escola digital, recorrendo a ferramentas da web 2.0, é sem dúvida, um desafio aliciante, mas ao mesmo tempo muito exigente" Moreira (2015, p. 380).

Ao se utilizar *vídeos, chats, ambientes virtuais*, em sala de aula, como também as demais tecnologias digitais, apresentadas neste artigo, não são garantias de uma boa aprendizagem. Mas, quando as mesmas estão alinhadas há um bom planejamento, havendo um preparo dos sujeitos que irão aplicá-las, objetivos bem definidos e claros para os atores que participam desse procedimento, elas se tornam catalisadoras da aprendizagem, de forma que o professor passa a atuar como mediador destas práticas no processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

AMARAL, R. B. Vídeo na Sala de Aula de Matemática: que possibilidades? Educação Matemática em Revista, n. 40, p. 38–47, nov. 2013.

COSTA, Ana; FERREIRA, André. Redes Sociais na Educação: aprendizagem colaborativa no ensino de Matemática. Faculdade de Educação. Pelotas, 2012.

COSTA, Thaís. Quais são as redes sociais mais usadas no Brasil em 2019? Disponível em https://rockcontent.com/blog/redes-sociais-mais-usadas-no-brasil. Acesso em 23 out. 2019.

GIGLIO, K.; SOUZA, M. Mídias digitais, redes sociais e educação em rede: experiências na pesquisa e extensão universitária. 1 ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2015.

KAMERS, N. J. O Youtube como ferramenta Pedagógica. Dissertação apresentada à Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC): Florianópolis, 2013.

KAMPFF, Adriana Justin Cerveira. Tecnologia da Informação e Comunicação na Educação. Curitiba: IESDE Brasil, 2008.

LEMOS, Cátia; VIEIRA, Cristina; MOREIRA, José. A Promoção de Competências de Aprendizagem em Redes Sociais. Um Estudo Exploratório no Facebook num Curso de Aprendizagem ao Longo da Vida. Rio de Janeiro. Revista Educa online. Volume 12. Nº 1. Janeiro/Abril 2018.

MAGALHÃES, A. R. Mapas conceituais digitais como estratégia para o desenvolvimento e metacognição. - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2019.

MORAN, J. M. O vídeo na sala de aula. Comunicação e Educação, São Paulo, v. 1, n. 2, p.27-35, jan./abr. 1995.

MOREIRA, J. A. (2018). Reconfigurando Ecossistemas Digitais de Aprendizagem com tecnologias audiovisuais. Revista Em Rede, v.5, 2018.

MOREIRA, José Pedagogia 2.0 na web social e o seu impacto no Autoconceito de estudantes de pós-graduação. Salvador. Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade, v. 24, n. 44, p. 83-95, jul./dez. 2015

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. Técnicas de Pesquisa. 8. ed. São Paulo: Atlas, 201.

O avanço da tecnologia e as transformações na sociedade.2017. Disponível em:< https://noticias.portaldaindustria.com.br/artigos/paulo-afonso-ferreira/o-avanco-da-tecnologia-e-as-transformacoes-na-sociedade/ > Acessado em: 03 out. 2019.

SILVA, Juliana; ANDRADE, Silvana; MAGALHÃES, André. Uso de recursos tecnológicos por professores de matemática em formação continuada no âmbito do Gestec. 2019.

Videoaulas: uma forma de contextualizar a teoria na prática. Disponível em: < http://www.abed.org.br/hotsite/20-ciaed/pt/anais/pdf/352.pdf > Acessado em 22 abr. 2019.

Vídeos didáticos: uma proposta de critérios para análise. Disponível em: < e-revista.unioeste.br/index.php/travessias/article/download/3128/2463 > Acessado em 22 abr. 2019.

ANÁLISE DE UMA TAREFA DE ÁLGEBRA APLICADA A FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Daniela Mendes Vieira Silva[44]
Mara Jane Neves Lima Freire[45]
Daniel de Oliveira Lima[46]

INTRODUÇÃO

No estudo apresentado convidamos licenciandos a analisar e comentar uma tarefa de álgebra dentro da proposta de Nardi, Biza e Watson (2014), que eles provavelmente experimentarão em suas futuras salas de aula. Para tanto, escolhemos uma tarefa com o conteúdo de inequação do segundo grau, que propunha uma questão e respostas fictícias[47] de alunos, porém suscetíveis de ocorrer.

A tarefa em questão também continha um questionário que eles deveriam responder após a análise das respostas fictícias, ao final fizemos uma discussão em grupo sobre a mesma, tendo como objetivo compreender sob a perspectiva matemática, pedagógica e didática a produção escrita e os argumentos apresentados nas falas desses licenciandos.

Os sujeitos da pesquisa foram 13 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), que cursavam a disciplina de Didática para o Ensino de Matemática, que faz parte do quinto semestre da grade curricular do curso.

---

44 Doutora em Ensino e História da Matemática e da Física pela UFRJ, Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela UFRRJ e Graduada em Licenciatura em Matemática pelo CEDERJ/UFF e em Pedagogia pelo IET. Professora da Universidade Castelo Branco, das Faculdades Campo Grandenses e da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro.

45 Mestre em Modelagem Computacional pela UERJ e Graduada em Licenciatura em Matemática pela UERJ. Professora do Departamento de Matemática da UNIRIO.

46 Mestre em Matemática pela UFRJ e Graduado em Licenciatura em Matemática pela UERJ. Professor da Escola SESC de Ensino Médio e Diretor da ONG Instituto Bem.

47 Que só existe na imaginação, imaginário.

Os argumentos que os licenciandos propuseram, foram analisados, a partir do modelo de argumentação de Toulmin, adaptado por Nardi, Biza e Zachariades (2012), na qual eles classificam as justificativas dos professores de acordo com a pedagogia, considerações epistemológicas e institucionais. Segundo Nardi, Biza e Watson (2014), este modelo tem sido empregado por pesquisadores em educação matemática em todos os níveis de ensino, principalmente para analisar os argumentos dos alunos.

Na sequência fazemos uma revisão de literatura, apresentamos a metodologia utilizada, onde apontamos os sujeitos da pesquisa, a tarefa e todo processo que envolveu a produção de dados. Em seguida passamos a análise dos dados, e por fim as considerações finais onde comprovamos a dupla descontinuidade de Klein a partir da análise das falas dos sujeitos envolvidos na pesquisa.

REVISÃO DE LITERATURA

Nardi, Biza e Watson (2014) apresentam um trabalho voltado para reflexão sobre as crenças dos professores e sua relação com a prática, onde reconhecem a discrepância evidente entre a teoria, que fica fora do contexto, expressa nas crenças dos professores sobre matemática, pedagogia (por estudos baseados em entrevistas) e prática real. Eles trazem uma ideia de como os professores analisam as produções dos seus alunos a partir das suas crenças e dos seus valores, e destacam ainda a importância de levar para a formação inicial dos professores situações reais, assim como advogados e médicos fazem em suas formações.

O fato dos licenciandos não revisitarem os conteúdos do Ensino Fundamental e Médio durante a sua formação, por serem considerados "básicos", faz com que segundo Klein (2009), exista uma dupla descontinuidade na formação do professor da escola básica. Por um lado, durante a formação acadêmica do professor, há pouca relação entre a matemática estudada na universidade e aquela aprendida na formação básica e, por outro lado, em sua ação profissional, o professor da escola básica dificilmente consegue estabelecer relação entre a matemática que ensina e aquela que estudou em sua formação acadêmica. Essa dupla descontinuidade reflete a existência de uma ruptura entre a matemática escolar e a matemática acadêmica. Isto determina e contribui para um distanciamento entre essas dimensões que se pauta em uma percepção hierárquica.

> Os jovens estudantes universitários são confrontados com problemas que nada têm a ver com as coisas que estudaram na escola e, naturalmente, esquecem-nas rapidamente. Quando, depois de completarem o curso, se tornam professores confrontados com a necessidade de ensinar a matemática elementar na forma adequada ao grau de ensino, primário ou secundário, a que se dedicam, e como não conseguem estabelecer praticamente nenhuma relação entre esta tarefa e a matemática que aprenderam na universidade, facilmente aceitam o ensino tradicional, ficando os estudos universitários como uma memória mais ou menos agradável que não tem influência na sua forma de ensinar. (KLEIN, 2009, p. 1).

O relato de professores e futuros professores corrobora para o entendimento de que a dupla descontinuidade, denunciada por Klein[48] em sua obra publicada pela primeira vez há mais de um século e apontada ainda hoje por pesquisadores em educação matemática (BALL, 1988) é, de fato, uma realidade.

Acreditamos que é no confrontamento das ideias e na discussão de aspectos do conteúdo que o conhecimento dos futuros professores participantes é examinado e reelaborado, promovendo um conhecimento sobre o conhecimento da matemática.

Com o intuito de promover esse conhecimento, que a tarefa deste estudo apresenta a seguinte estrutura:

- Reflexão sobre os objetivos de aprendizagem dentro de um problema matemático (e resolvê-lo);

[48] Na versão original, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, publicada em 1908 e 1909 – Obra em três volumes que traz lições de matemática elaboradas por Felix Klein para professores das séries finais do ensino básico.

- Exame de uma falha na solução (fictícia) de estudantes;
- Descrição, por escrito, de um *feedback* para o aluno em questão.

Como estrutura de trabalho, Nardi, Biza e Watson (2014) propõem explorar o conhecimento de conteúdo que o professor tem, entender suas crenças, suas motivações e ideologias, suas práticas e os tipos de *feedback* que eles dão aos alunos. Em suma, a tarefa permite ao professor explorar e desenvolver a sensibilidade dos licenciandos envolvidos, assim como entender um pouco mais as dificuldades e as necessidades dos alunos da educação básica. Com isso, ampliar seu repertório de *feedbacks* ao aluno, para identificar o erro, investigar suas causas e compreender a oportunidade didática oferecida no momento.

METODOLOGIA: PRODUÇÃO DE DADOS

A primeira etapa da produção de dados consistiu em definir os sujeitos da nossa pesquisa. Decidimos fazer uma oficina para licenciandos em matemática que não estudassem diretamente com nenhum dos autores do presente capítulo. Para tanto, a Professora R.S.[49], que ministra a disciplina Didática para o Ensino de Matemática no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro – UNIRIO, nos cedeu quatro tempos da sua aula para ministrarmos a atividade. A disciplina é ofertada no quinto período do curso, ou seja, os estudantes nela matriculados já possuem uma caminhada na instituição.

A segunda etapa da produção de dados consistiu em escolher tarefas a serem propostas aos licenciandos, da elaboração de um questionário socioeconômico com perguntas referentes a vida profissional e universitária dos sujeitos da pesquisa, e de um termo de consentimento.

Após a leitura coletiva de artigos das autoras cuja temática era o uso de Tarefas de Álgebra em formações iniciais e continuadas de

---

[49] Escolhemos identificar os professores participantes do presente estudo pelas iniciais de seus nomes; e, havendo coincidência, optamos por acrescentar um número às iniciais. A referida professora é estudante do mesmo programa de pós-graduação ao qual os autores deste capítulo estavam vinculados.

professores que ensinam matemática, decidimos por utilizar em nossa pesquisa duas tarefas, denominadas Tarefa 1 cujos dados produzidos estão disponíveis em (SILVA, FREIRE e LIMA, 2020) e Tarefa 2 (Figura 1) que é o objeto de estudo do presente capítulo. A seguir apresentamos os sujeitos da pesquisa.

Sujeitos da pesquisa

A partir da leitura dos questionários dos licenciandos (identificados por letras do alfabeto que vão de A a M) verificamos que o público participante era de 5 licenciandas e 8 licenciandos, sendo 8 deles com faixa etária entre 20 e 25 anos, 2 com faixa etária entre 26 e 30 anos, 1 entre 17 e 20 anos, 1 entre 31 e 45 anos e 1 com 50 anos ou mais. Todos cursam a primeira graduação, 9 participantes já têm alguma experiência com ensino em aulas particulares. Também observamos o destaque dado pelos licenciandos, a grade curricular do curso que está passando por uma reformulação, visando aumentar os componentes práticos.

A Tarefa de Álgebra

A Tarefa em que os licenciandos se envolveram consiste em cinco perguntas (Figura 1). Na questão 1, os licenciandos foram convidados a resolver um problema de inequação do segundo grau, que faz parte do currículo do ensino fundamental, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017). Então, nas três partes da questão 2 (2A, 2B e 2C) foram oferecidas respostas fictícias de três alunos para o mesmo problema e os licenciandos foram convidados a fornecer *feedback* para essas respostas. Finalmente, os licenciandos foram convidados a refletir sobre os objetivos desse problema (questão 3); comentar se essas respostas fictícias seriam prováveis de ocorrer em suas aulas (questão 4); e, oferecer qualquer outro comentário sobre a Tarefa (questão 5).

Figura 1: Tarefa de Álgebra

TAREFA DE ÁLGEBRA

Questão 1: Escreva abaixo a sua solução para o seguinte problema:

A expressão $x^2 < x$ sempre é verdadeira, as vezes é verdadeira ou nunca é verdadeira? Justifique a sua resposta.

Questão 2: Um professor deu a seus estudantes a questão acima. Por favor, providencie um feedback para os estudantes que deram as seguintes respostas:

Aluno A
Eu tentei vários números positivos e negativos e para nenhum deles o resultado foi verdadeiro:
Para $x = 0$; $0 < 0$, não é verdadeiro.
Para $x = 1$; $1 < 1$, não é verdadeiro.
Para $x = -1$; $1 < -1$, não é verdadeiro.
Para $x = 1{,}5$; $2{,}25 < 1{,}5$, não é verdadeiro.
Para $x = -1{,}5$; $2{,}25 < -1{,}5$, não é verdadeiro.
Logo está expressão nunca será verdadeira.

Aluno B
Está expressão nunca será verdadeira, porque o quadrado de um número é sempre maior que o número.

Aluno C
Se x é negativo, x^2 é positivo. Então, $x^2 > x$ é verdadeiro, assim sendo, $x^2 < x$ não é verdadeiro.
Se $x = 0$, $0^2 = 0$. Então, $x^2 < x$, não é verdadeiro.
Se x é positivo, x^2 é igual a x vezes x e isto é sempre maior que x.
Então $x^2 > x$ é verdadeiro, entretanto, $x^2 < x$ não é verdadeiro.
Como resultado a expressão nunca será verdadeira.

Questão 3: Em sua opinião qual é o objetivo do problema em destaque?

Questão 4: As respostas dos alunos apresentadas acima poderiam ser observadas em suas aulas? Se sim, qual(is)? Se não, que tipo de resposta você esperaria?

Questão 5: Se você tiver algum comentário sobre a tarefa, em relação ao estudo principal que pretendemos realizar, escreva-os aqui.

Fonte: Nardi, Biza e Watson (2014, p. 258)

Nesta atividade, foi dada aos professores a expressão algébrica $x^2 < x$ e eles foram convidados a considerar se esta expressão "é sempre, às vezes ou nunca verdadeira". Esta expressão é *às vezes verdadeira*: é verdadeira para qualquer valor de x entre 0 e 1 e falsa para qualquer outro valor de x. Existe uma gama de abordagens para justificar que a expressão *às vezes* é *verdadeira*, como:

- Números de teste para os quais a expressão não é verdadeira (por exemplo, 0, 1, 1.5, etc.) e outros em que é verdade (por exemplo, ¼, ½, etc.). Um teste de um número para cada caso é evidência suficiente.
- Fazer os gráficos de $y = x^2$ e $y = x$ e observar que o gráfico de $y = x^2$ é sempre acima do gráfico de $y = x$, exceto para o intervalo]0, 1[.

- Resolver a desigualdade algébrica: $x^2 < x$ ou $x^2 - x < 0$ ou x (x - 1) < 0, que é verdadeiro somente quando x e x - 1 têm sinais diferentes. Isto é verdade apenas quando $x > 0$ e $x < 1$.

Os alunos, muitas vezes, tentam números específicos para validar a verdade de uma expressão e ignoram frações e números decimais, especialmente aqueles que estão entre zero e um. Esta prática imprecisa é refletida na resposta ficcional 2A. Além disso, a expressão $x^2 < x$ desafia um equívoco comum de que o quadrado de um número é sempre maior que o número, refletido na resposta 2B e no terceiro passo da resposta 2C. A resposta 2C, em comparação com 2B, oferece uma explicação elaborada com uma distinção de casos para números diferentes (ou seja, negativos, zero e positivos). Este tipo de resposta foi incluída na Tarefa, com o intuito de examinar se o *feedback* dos licenciandos seria afetado pelo formato da resposta fictícia do aluno.

Produzindo Dados

Esta atividade foi desenvolvida em dois dias, pela professora R.S., responsável pela disciplina e pela professora M.F., responsável pela condução da atividade. No primeiro dia os alunos foram convidados a responder: um questionário socioeconômico, uma autorização para uso dos dados coletados e as Tarefas 1 e 2. Foi pedido aos mesmos que as resolvessem, individualmente.

No segundo dia, os participantes da pesquisa discutiram sobre a tarefa aplicada, que foi gravada em áudio, cuja opção pela transcrição apenas dos momentos de críticos foi feita na perspectiva de Powell e Quintaneiro (2015).

A terceira etapa da produção de dados se deu, a partir das gravações em áudio, da discussão do grupo e também do uso do diário de campo elaborado pela professora M.F., aplicadora da atividade.

No primeiro dia, 13 licenciandos compareceram à aula e participaram da pesquisa. Antes de terminar a aula, restaram alguns minutos, e como os licenciandos ficaram muito intrigados, a professora R.S.

decidiu iniciar a discussão[50] que foi direcionada pelas perguntas 3, 4 e 5 das Tarefas. No segundo dia, somente seis licenciandos compareceram e a aula teve início com a retomada da discussão.

ANÁLISE DE DADOS

As respostas dos estudantes foram analisadas com fundamento no modelo de Toulmin adaptado por Nardi, Biza e Zachariades (2012) a partir da qual se pode discernir, diferenciar e discutir um espectro sobre os argumentos utilizados por professores em seu cotidiano em sala de aula. Para viabilizar tal entendimento, eles elaboraram um modelo que oferece uma classificação de justificativas, como a de Freeman (2005), cuja adaptação feita por eles pode ser vista no Quadro 1:

Quadro 1: Categorias de Análise

Justificativa *A priori*	Recorre-se a um teorema matemático ou definição (*a priori*-epistemológica) ou a um princípio pedagógico (*a priori*-pedagógico).
Justificativa Institucional	Uma justificação de uma escolha pedagógica com base no que está sendo recomendado ou requerido por uma política institucional, tal como um currículo nacional ou um livro (institucional-curricular), ou se isto reflete práticas padrão da comunidade matemática (institucional-epistemológica).
Justificativa Empírica	A citação de uma ocorrência frequente na sala de aula (de acordo com experiências de ensino em matemática (empírico-profissional), ou recorrendo à aprendizagem pessoal em matemática (empírico-pessoal).
Justificativa Avaliativa	Uma justificação de uma escolha pedagógica nos termos de um ponto de vista, valor ou crença pessoal.

Fonte: (NARDI, BIZA e ZACHARIADES, 2012, pp 160-161, tradução nossa).

[50] Toda discussão, com as falas dos licenciandos e professoras participantes da aplicação das tarefas foi gravada em áudio.

O propósito da elaboração dos tipos de argumentos usados por professores, no que tange à sua prática, é o de demonstrar que as decisões que eles tomam cotidianamente em sala de aula não são exclusivamente fundamentadas epistemologicamente em matemática (NARDI, BIZA e WATSON, 2014).

Em nossa análise emergiram das falas dos participantes as categorias, A Priori Epistemológica, A Priori Pedagógica e Empírico Pessoal. Adiante fazemos a discussão, a partir da metodologia de análise proposta por Nardi, Biza e Watson (2014), das respostas dos participantes e destacamos as categorias às quais pertencem.

Questão 1: Justificativas Empírico Pessoal na totalidade

A partir da Questão 1 foi pedido aos participantes que escrevessem e justificassem a sua solução para o problema: A expressão $x^2 < x$ sempre é verdadeira, às vezes é verdadeira ou nunca é verdadeira. As respostas da maior parte dos licenciandos é idêntica, ou seja, em sua maioria são afirmações de que a sentença é verdadeira apenas no caso em que $0 < x < 1$. Tal postura foi percebida pela aplicadora da tarefa e registrada em seu diário de campo.

> Na Tarefa 2, alguns responderam que diriam aos alunos para testar valores entre 0 e 1, então perguntei a eles se isso não era o mesmo que dar a resposta, e a partir da minha fala, eles perceberam que sem querer acabariam dando a resposta para os alunos, sem colocar os mesmos para pensar um pouco em como chegar a solução correta sozinhos. (Trecho de Diário de campo da aplicadora, p. 2).

Poucos alunos apresentaram soluções alternativas à supracitada, este é o caso dos estudantes C, D, J e M, o caminho escolhido por eles para contestar a sentença proposta foi o de elencar uma fração própria para o lugar de x fazendo o cálculo e apresentando o fato de que a sentença proposta é verdadeira, neste caso. A professora R.S. conversou com os participantes a respeito da escolha de valores aleatórios, conforme registrado adiante.

> Professora: Uma coisa que eu esperava também, era qual seria a abordagem de vocês com os alunos? Como que vocês abordariam o aluno? Eu vi que uma pessoa falou assim: “eu diria para o aluno que ele deveria testar os valores entre 0 e 1.” Então, eu questionei: “Mas falar para ele que testar valores entre 0 e 1, não seria o mesmo que dar a resposta?
>
> Aluno: “Acho que testar valores não é uma estratégia muito boa, né?!” (Gravação de áudio da discussão, dia 2, 9 minutos).

Também em relação à estas respostas temos uma reflexão da professora aplicadora.

> Li os questionários dos licenciandos e verifiquei que alguns já tem alguma experiência com ensino em aulas particulares. Apesar disso, pude perceber pelas respostas que eles deram as questões, quanto ao retorno que eles deveriam dar aos alunos, que eles não têm muita noção de como direcionar o aluno para chegar à solução correta, sem dar a resposta diretamente (Trecho de Diário de campo da aplicação, p. 2).

As respostas de todos os licenciandos à questão em foco se encaixam na categoria Empírico Pessoal, uma vez que, de maneira geral refletem a matemática escolar[51] vivenciada por eles na maior parte de sua trajetória acadêmica. Na matemática escolar busca-se uma resposta coerente a uma questão dada, caso de todas as respostas oferecidas, as quais apresentaram apenas soluções parciais para o problema proposto, e não o esgotamento de todas as possibilidades por meio de contraexemplos e provas matemáticas como é requerido em um curso universitário de Matemática.

[51] Para um maior aprofundamento no tema recomendamos a leitura do artigo A Matemática Escolar, O Aluno e o Professor: Paradoxos Aparentes e Polarizações em Discussão. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v28n74/v28n74a03.pdf

Questões 2 e 4: Justificativas Empírico Pessoal e *A Priori* Epistemológicas

Em sequência, na questão 2, pediu-se aos participantes que providenciassem um feedback para as respostas fictícias de três estudantes: André, Bruno e Claudia[52], respectivamente, à questão 2 supracitada.

O aluno André utilizou valores aleatórios para x, e como não encontrou nenhum valor que satisfizesse à sentença proposta, concluiu que $x^2 < x$ é sempre errado. Já o aluno Bruno, chegou à mesma conclusão do aluno André, sem o uso de tentativa e erro, uma vez que ele, provavelmente, pensando em um domínio de números Inteiros para x, chegou à conclusão de que o quadrado de um número é sempre maior do que o mesmo. A aluna Cláudia chega à mesma conclusão dos alunos André e Bruno, ou seja, de que a sentença é sempre falsa, utilizando, provavelmente, uma combinação das premissas do primeiro e do segundo.

Os licenciandos C, D e E deram feedbacks consistentes com a categoria A Priori Epistemológica aos três alunos do problema, uma vez que em suas respostas eles alertam para o fato de que vários exemplos não constituem uma prova matemática, o licenciando D chega a chamar a atenção dos três alunos fictícios para o fato de que existem conjuntos numéricos diferentes dos Naturais e dos Inteiros. A professora R.S. faz uma reflexão a respeito desta colocação, a qual podemos observar adiante.

> Professora: Nesse caso ele testou valores racionais, mas não pegou um que fizesse ser verdadeira. E aí?
>
> Aluno: Se ele manipulasse *x* ao quadrado menor que *x*, se ele passasse para o outro lado, achasse entre 1 e zero.
>
> Professora: Resolvesse a equação? Você pode chegar para o aluno e falar: "tenta resolver algebricamente, isso é uma das opções... (Gravação de áudio da discussão, dia 2, 12 minutos).

52 Nomes enxertados na análise para evitar a confusão entre alunos da tarefa e alunos participantes, uma vez que todos foram nomeados com letras do alfabeto.

Já o participante B fez um feedback, que se encaixa na categoria de Justificativa A Priori Epistemológica, para André quando indica a ele que avalie o caso geral. Entretanto, para os demais alunos ele recorre, como a maioria, a Empírico Pessoal, quando indica ao aluno de maneira direta que utilize os valores do intervalo]0,1[. Os demais participantes se dividem em seus feedbacks, ora a destacar a importância do uso do intervalo supracitado, ora a destacar diretamente o uso de frações. Houve também uns poucos participantes que se abstiveram de responder a esta questão.

Questão 3: Justificativas Empírico Pessoais e *A Priori* Pedagógicas

A Questão 3 pede que os participantes escrevam qual é o objetivo do problema em destaque.

Os participantes G, L e B destacaram o objetivo pedagógico da questão, portanto, suas respostas podem ser associadas à categoria *A Priori* Pedagógica. O participante G destacou como objetivo da mesma o estímulo do raciocínio matemático e a verificação da familiaridade dos alunos com a linguagem matemática. A avaliação dos saberes dos alunos sobre o tema também está presente nas respostas dos alunos B, E e I à questão proposta. Já o participante L, foge à questão e enuncia a intenção de estabelecer uma roda de conversa para a discussão do tema em foco, sem se alongar em maiores detalhes.

Os participantes F, J, C, D, M utilizaram-se da estrutura matemática ao dar suas respostas à questão. Para eles, o objetivo da questão é o de abordar a importância do fato de que uma prova em matemática deve ser demonstrada para que seja aceita como verdadeira. Suas justificativas, portanto, foram compreendidas como *A Priori* Epistemológica.

Os participantes H e A responderam à questão proposta informando que seu objetivo foi o de trabalhar intervalos, retomando as suas próprias respostas à Questão 1. Tais respostas são identificadas com a categoria Empírico Pedagógica, uma vez que os participantes em foco têm as suas próprias respostas parciais e identificadas com a matemática escolar à questão matemática proposta, como centro de suas discussões.

Questão 5: Abstenções, desentendimento e Justificativas Empírico Pessoal e *A Priori* Pedagógica

A Questão 5 pedia aos participantes algum comentário sobre a tarefa, em relação ao estudo principal realizado. Esta questão teve baixo quórum de respostas, apenas três participantes a responderam. Dentre as respostas dadas os participantes E e H apresentaram Justificativas Empírico Pessoais, compatíveis desse modo com a cultura escolar, visto que o primeiro afirma observar ambiguidade quanto à pergunta feita (o que contraria as questões diretas que costumam ser utilizadas na cultura escolar brasileira), enquanto o segundo defende a importância dos detalhes na matemática e destaca que x^2 pode ser menor do que x (tal resposta remonta à respostas imediatas e parciais presentes na cultura escolar) e por fim o licenciando I destaca a importância de se fazer uma revisão de conteúdo após a aplicação da tarefa, o que pode ser entendido como uma Justificativa *A Priori* Pedagógica, uma vez que o participante externa a sua proposta de manejo de sala de aula com vistas a aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observando os dados coletados verificamos que alguns alunos se abstiveram de responder à Questão 3 que pedia um retorno a três alunos hipotéticos sobre suas respostas, e que a maioria dos participantes deixou de responder à Questão 5 que pedia um comentário sobre a tarefa proposta. Tal postura se diferenciou em relação às questões 1, 3 e 4 que se caracterizavam por envolverem apenas os participantes, nas quais houve uma adesão de 100%.

Durante a análise observamos a emergência de três categorias de justificativas, em ordem de frequência de ocorrência, a saber: Empírico Pessoal, A Priori Epistemológica e A Priori Pedagógica. A recorrência destas categorias nas respostas dos participantes é compatível com o fato de que os participantes são professores em formação, e que portanto, vivenciaram o papel de estudantes ao longo da maior parte de sua trajetória, e vivenciam este papel na licenciatura em matemática na UNIRIO - que é uma universidade que busca interligar as disciplinas Matemáticas e Pedagógicas. Na transcrição dos momentos críticos desta aplicação encontramos eco a esta afirmação:

> Professora: Vocês se veem como professor? Agora, nesse momento?
>
> Aluno 1: Eu dou aula. Sim.
>
> Aluno 2: Eu acho que nem quem dá aula há 30 anos se sente preparado para dar aula.
>
> Professora: A questão que estou falando é sobre a abordagem diferente em sala de aula. Você se sente preparado para ensinar matemática?
>
> Aluno 1: Estou aqui há um ano e meio, antes eu achava que essa grade era muito de bacharelado, e via muita gente desesperada, e era um curso de licenciatura. Já nessa grade nova, está mais licenciatura. (Gravação de áudio da discussão, dia 2, 49 minutos).

Tarefas como esta, portanto, trazem a possibilidade de promoção desta mudança de papel, ou seja, ao tirar o estudante de sua zona de conforto por meio da vivência de tarefas que são compatíveis com uma sala de aula real criamos as condições para a superação do fenômeno da dupla descontinuidade de Klein (2009), o que é uma necessidade central para os cursos de Licenciatura. Fecho estas considerações finais com as palavras da aplicadora da atividade.

> Em suas falas os licenciandos deixaram claro que eles têm perfeita noção de que algumas percepções só ocorreram com dia a dia em sala de aula com vários alunos, mas consideraram que esse tipo de atividade contribui muito para formação deles (Diário de Campo da Aplicadora, p. 2).

REFERÊNCIAS

BALL, D. L. The subject matter preparation of prospective mathematics teachers: Challenging the myths. National Center for Research on Teacher Education, College of Education, Michigan State University, 1988.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? Journal of teacher education, 59(5), 389-407, 2008.

BIZA, I.; NARDI, E.; ZACHARIADES, T. Using Tasks to Explore Teacher Knowledge in Situation-Specific Contexts. J Math Teacher Education (2007) 10: 301–309. DOI 10.1007/s10857-007-9043-y.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

FREEMAN, J. B. Systematizing Toulmin's warrants: Na epistemic approach. Argumentation, 19(3), p. 331-346, 2005.

KLEIN, F. Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior. Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

NARDI, E.; BIZA, I.; ZACHARIADES, T. 'Warrant revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. Educ Stud Math (2012) 79:157–173. DOI 10.1007/s10649-011-9345-y

NARDI, E.; BIZA, I.; WATSON, S. What makes a claim an acceptable mathematical argument in the secondary classroom? A preliminary analysis of teachers' warrants in the context of an Algebra Task. Pope, S. (Ed.) Proceedings of the 8th British Congress of Mathematics Education, 2014.

POWELL, A. B.; QUINTANEIRO, W. O Vídeo na Pesquisa Qualitativa em Educação matemática: Investigando pensamentos de alunos. In: Arthur Powell. (Org.). Métodos de pesquisa em educação matemática usando escrita, vídeo e internet. 1ed. São Paulo: Mercado de Letras, v. 1, p. 15-60, 2015.

SILVA, D. M. V.; FREIRE, M; LIMA, D. Análise de percepções de estudantes de licenciatura em matemática frente a respostas a uma tarefa sobre o conceito de Equação Modular. COM A PALAVRA, O PROFESSOR., v. 5, p. 87 - 103, 2020.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, v.15, p. 4-14, 1986.

VAMOS MANIPULAR QUADRADINHOS? UMA PROPOSTA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Jorge Henrique Gualandi[53]
Maria Laucinéia Carari[54]
Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon[55]

INTRODUÇÃO

Um dos questionamentos acerca dos processos de ensino de matemática, que permeiam o trabalho do professor que atua tanto na formação inicial como na continuada, refere-se às metodologias de ensino e aos recursos didáticos. Desse modo, há necessidade de o educador planejar suas aulas com o propósito de promover a interação entre os diferentes sujeitos, pois isso pode tornar as aulas mais dinâmicas e proporcionar reflexões sobre a própria prática pedagógica do professor.

Assim, entende-se que um modo de promover o dinamismo em aulas de matemática é o desenvolvimento de práticas pedagógicas no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM). Acredita-se que, nesse espaço, o aluno (futuro professor, professor em formação continuada ou estudante da educação básica) terá contato com Material Didático Manipulável (MDM) por meio da elaboração, organização, visualização e exploração dele, o que possivelmente auxiliará na construção do conhecimento matemático. Apreende-se, assim como Lorenzato (2012), que o LEM é um espaço no qual professores e alunos buscam tornar a matemática mais compreensível, por isso tem-se que MD "[...] é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem" (LORENZATO, 2012, p. 18).

---

[53] Doutor em Educação Matemática (PUC/SP), professor do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) *campus* Cachoeiro de Itapemirim.

[54] Mestra em Estatística e Experimentação Agropecuária (UFLA), professora do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) *campus* Cachoeiro de Itapemirim.

[55] Doutora em Educação (UFES), professora do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) *campus* Cachoeiro de Itapemirim.

Nessa perspectiva, vê-se que um MD permite que os estudantes sintam, toquem e manipulem um recurso de ensino que pode ser real, coma aplicação direta no contexto, ou subjetivo, usado para representar, neste caso, uma ideia matemática. Por assim ser compreendido, entende-se que se assemelha aos materiais manipuláveis (MM), descritos por Reys (1971) e citados por Matos e Serrazina (1996).Logo,para Reys (1971), os MM são "objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objectos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objectos que são usados para representar uma ideia" (p. 193). Dessa forma, compreende-se e assume-se aqui que um MD se configura em um MM.

Apresentando pensamento semelhante ao de Lorenzato (2012) e Reys (1971), citado por Matos e Serrazina (1996), Candeias (2007, p. 319) enfatiza que

> [...] os materiais didácticos não podem servir apenas para o professor fazer demonstrações, os alunos devem ter oportunidade de manipulá-los e descobrirem por si próprios os conhecimentos matemáticos [...] o professor adquire um novo papel, o de orientador das aprendizagens [...] é a partir de experiências pessoais, individuais e concretas que o aluno desenvolve uma aprendizagem dos conteúdos matemáticos (CANDEIAS, 2007, p. 319).

Corroborando as ideias de Candeias (2007), compreende-se que o LEM se configura em um espaço propício para oportunizar a professores e alunos vivências de investigação como uso de MM. Para tanto, uma aula planejada no intuito de promover o enriquecimento do pensamento matemático a partir de um MM pode tornar-se um momento em que estudantes sejam provocados a desenvolver "habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização" (SANTOS; GUALANDI, 2016, p. 4).

Vale ressaltar que as tarefas[56] elaboradas e planejadas para serem desenvolvidas no LEM com uso de algum MM podem provocar situações

[56] Entendemos tarefa como "um segmento de atividades da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular" (STEIN; SMITH, 2009, p. 22).

em que alunos e/ou professores vivenciem experiências que permitam articular a matemática com ela mesma, ou seja, entre a geometria, a álgebra e a aritmética (GUALANDI, 2012).Acerca disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais [PCN] (BRASIL, 1997), enfatizam a importância da articulação entre as noções algébricas e aritméticas, ao ressaltarem que

> [...] os adolescentes desenvolvem de forma significativa a habilidade de pensar "abstratamente", se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um *trabalho articulado com a aritmética*. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de álgebra mais sólida e rica em significados (BRASIL, 1997, p. 117, grifo nosso).

Diante do exposto, entende-se que o MM permite discutir sobre o pensamento algébrico, de forma que uma mesma prática admita explorá-lo em diferentes níveis de ensino. Ainda na perspectiva dos documentos oficiais, vê-se na Base Nacional Comum Curricular [BNCC] (BRASIL, 2017), na unidade temática álgebra, no que se refere às generalizações de padrões, que o desenvolvimento do pensamento algébrico ocorre inicialmente por meio de identificação de regularidades. Esse documento destaca que

> [...] é necessário que os alunos *identifiquem regularidades e padrões* de sequências numéricas e não numéricas, *estabeleçam leis matemáticas* que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e *transitar entre as diversas representações* gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (BRASIL, 2017, p. 227, grifo nosso).

Para tanto, é fundamental que o professor pense em tarefas que proporcionem o desenvolvimento do pensamento algébrico, com uso de questões que explorem as regularidades e os padrões, de forma a garantir que o contato com a álgebra esteja presente em todos os níveis de ensino. Cabe ao professor organizar as tarefas e/ou adaptar materiais, permitindo aos alunos investigar, levantar hipóteses, argumentar e comunicar matematicamente. Ressalta-se que o nível de investigação e exploração da tarefa depende do conhecimento matemático de cada aluno, pois, conforme já dito anteriormente, uma mesma tarefa pode ser explorada de maneiras diferenciadas de acordo com o desenvolvimento de cada grupo de estudantes.

Ainda de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), o ensino de matemática proporciona ao aluno desenvolver a habilidade de

> [...] enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, *utilizando diferentes registros e linguagens: gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna* (BRASIL, 2017, p. 223, grifo nosso).

Desse modo, é possível inferir que uma das possibilidades para o desenvolvimento da habilidade citada é o trabalho envolvendo os registros de representação semiótica. Eles são compreendidos como "[...] um sistema dotado de signos[57] que permitem identificar uma representação de um objeto de saber" (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016, p. 469). Assim, "a coordenação de muitos registros de representação aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos" (DUVAL, 2012, p. 270).

Além disso, Duval (2003) salienta que "a compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro" (p. 21), por isso ressalta a importância dos registros de representações. Logo, é fundamental a articulação entre o maior número de registros possíveis para que aconteça melhor compreensão do objeto matemático. Nesse cenário, entende-se que as tarefas envolvendo padrões são propícias à

[57] Um signo é um sinal mobilizado por alguém (sujeito) capaz de permitir-lhe identificar um sistema ou registro de representação semiótico, como as regras linguísticas ou gramaticais na língua materna, as propriedades ou escritas algébricas para o registro algébrico, as figuras geométricas (pontos, segmentos/ retas/curvas, planos e superfícies). (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016, p. 468).

articulação da matemática com ela mesma, proporcionando a transição entre vários registros de um mesmo objeto matemático.

DESENVOLVIMENTO DA PROPOSTA DE TRABALHO

Mostramos aqui o contexto de elaboração do MM e da SD, apresentamos os “Quadradinhos de EVA” e descrevemos uma proposta de trabalho com a utilização do material em questão. Esta última foi estrutura em quatro etapas que buscam organizar e dinamizar a prática docente de seus usuários.

O CONTEXTO DE ELABORAÇÃO DO MM “QUADRADINHOS DE EVA” E DA SD

O Ifes campus Cachoeiro de Itapemirim oferta, desde 2010, o curso de licenciatura em Matemática. Ele tem duração de quatro anos com oferta noturna. Para o desenvolvimento das ações do curso, bem como de algumas disciplinas específicas, conta com o LEM. Além das aulas que ocorrem nesse espaço, o *campus*,por intermédio da licenciatura em Matemática, estabelece parcerias com as escolas de educação básica,para a utilização do LEM à oferta de formação continuada. Esta tem o propósito de trabalhar práticas que podem oportunizar o desenvolvimento profissional docente mediante situações pensadas com o professor.

Atualmente o LEM é coordenado por um professor[58] que leciona no curso. Além disso, conta com monitores voluntários ou bolsistas, estudantes da licenciatura em Matemática que atuam desde a confecção[59] até a organização de materiais. Isso inclui também ações conjuntas com os demais professores do curso no desenvolvimento de propostas de formação continuada que são ofertadas às escolas de educação básica da região e exposições de MM realizadas no próprio *campus* e/ou em outras instituições de ensino.

[58] Atualmente o coordenador do LEM é o professor doutor Jorge Henrique Gualandi, que ministra, entre outras, a disciplina Instrumentação para o Ensino.

[59] Enfatiza-se que, para a confecção dos materiais manipuláveis do LEM, são utilizados recursos de baixo custo, a saber: papelão, embalagens, EVA, entre outros.

Ressalta-se que as tarefas desenvolvidas no LEM, com o auxílio dos MM, são organizadas em forma de sequências didáticas (SD) que, segundo Zabala (1998), constituem "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos" (p. 18). Assim, o professor, ao organizar uma SD, poderá

> [...] incluir atividades diversas como leitura, pesquisa individual ou coletiva, aula dialogada, produções textuais, aulas práticas, etc., pois a sequência de atividades visa trabalhar um conteúdo específico, um tema ou um gênero textual da exploração inicial até a formação de um conceito, uma ideia, uma elaboração prática, uma produção escrita (BRASIL, 2002, p. 21).

Nessa perspectiva, entende-se que a SD contribui na apropriação do conhecimento que está em processo de construção e permite que os estudantes articulem, de forma progressiva, as novas ideias e entendimentos dos conteúdos que são abarcados em cada tarefa.

Por isso, a seguir, apresenta-se uma proposta de SD na qual se utiliza o MM denominado "Quadradinhos de EVA". Elaborado no LEM por um dos autores, o material manipulável, aqui em questão, compõe-se de quadradinhos coloridos de EVA com medidas de 2cm por 2cm. Além do MM, a sequência didática descrita aqui foi desenvolvida nesse mesmo espaço. Destaca-se que ela foi aplicada tanto no curso de licenciatura em Matemática do *campus*, na disciplina Instrumentação para o Ensino, quanto em formações continuadas, ministrados pelos autores do texto em escolas de um município do sul do estado do Espírito Santo, durante 2019.

PROPOSTA DE TRABALHO COM A UTILIZAÇÃO DO MM "QUADRADINHOS DE EVA"

A seguir, descrevemos as quatro etapas que buscam organizar e dinamizar a prática docente e, consequentemente, potencializar o processo de ensino e de aprendizagem em matemática.

1ª etapa: Conhecendo o MM

Utiliza-se a seguinte proposta inicial para que os sujeitos tenham contato com o material manipulável “Quadradinhos de EVA”:

a. usando o MM, represente o menor quadrado possível; espera-se que os sujeitos representem o quadradinho solicitado utilizando apenas uma das peças disponíveis, uma vez que ela já representa um quadrado;

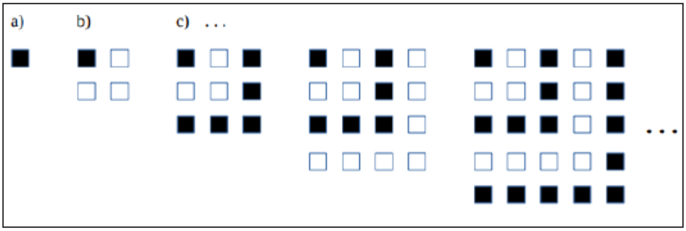
b. a partir da figura representada em “a”, forme o segundo quadrado utilizando peças de mesma cor, mas diferentes da cor inicial; deseja-se que a figura representada seja composta pelo quadrado inicial acrescido de mais três quadradinhos (peças) de outra cor, formando, assim, um quadrado maior composto por quatro peças;

c. a partir da figura representada em “b”, forme o terceiro quadrado utilizando peças de cores distintas daquelas já utilizadas e assim sucessivamente, até que os sujeitos se familiarizem com o MM e com a proposta de trabalho; pensa-se que o quadrado a ser formado deverá ser composto por nove quadradinhos (peças), sendo a figura anterior (aquela formada em “b”) acrescida de outras cinco peças.

Utiliza-se de quadradinhos em cores variadas pelo fato de seu uso favorecera visualização, processo fundamental no desenvolvimento do pensamento algébrico (MACHADO; BIANCHINI, 2013). Além disso, por esta primeira etapa consistir no primeiro contato com o MM, os sujeitos podem representar os quadrados com quantidades de peças diversificadas.

A seguir, no quadro 1, exemplifica-se uma possível representação de como seria a resolução da proposta inicial.

Quadro 1 –Possívelrepresentação à tarefa proposta



Fonte: Acervo do LEM, 2019.

Durante o processo de representação, espera-se que, ao visualizar e observar as construções, os sujeitos investiguem possíveis regularidades na sequência apresentada. Isso propiciará o desenvolvimento de seu pensamento algébrico e, por conseguinte, a generalização de padrões. Assim, vai ao encontro dos objetivos de conhecimento estabelecidos na BNCC (BRASIL, 2017).

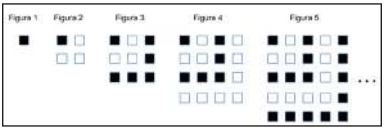
2ª etapa: Trabalhando com o MM

Esta segunda etapa consiste na proposição de uma tarefa com objetivo de proporcionar aos sujeitos a observação de um padrão, cujo propósito é provocar o desenvolvimento do pensamento algébrico. Desse modo, sugere-se que observem a sequência mostrada no quadro 2 e respondam a alguns questionamentos. Vejamos:

Quadro 2 – Tarefa proposta

Observe a seguinte sequência construída com quadradinhos e responda aos questionamentos que seguem.

Figura 1 – Sequência construída com "Quadradinhos de EVA"



Fonte: Acervo do LEM, 2019.

Com o auxílio dos "Quadradinhos de EVA", represente as **figuras 6 e 7**.

Escreva a sequência de números que representam a quantidade de quadradinhos de cada figura.

Existe alguma figura com exatamente 90 quadradinhos? Explique sua resposta.

Existe alguma figura com exatamente 144 quadradinhos? Explique sua resposta.

Escreva a sequência numérica que representa a quantidade de quadradinhos até a **figura 13**.

Quantos quadradinhos terá a **figura 15**? Como você obteve a resposta?

Matematicamente, como são conhecidos os números que representam a sequência numérica obtida em **"e"?**

Uma forma de representar algebricamente uma figura qualquer é nomeando-a de enésima figura, ou seja, **figura n**. Quantos quadradinhos terá a **figura n**? Como você obteve a resposta?

Fonte: Acervo do LEM, 2019.

3ª etapa: Explorando o MM

Com objetivo de articular as representações "geométricas", conforme mostrado no quadro 1 e na figura 1, com os "Quadradinhos de EVA" e a soma de números naturais ímpares consecutivos, propõem-se algumas situações a partir da figura 1 do quadro 2, tais como:

a. Escreva a sequência numérica que representa a quantidade de quadradinhos até a **figura 10**.

b. Observe a sequência do item “a” e escreva suas conclusões acerca das observações feitas.

c. Pergunta-se:

- Quanto aumentou do primeiro para o segundo termo?
- Quanto aumentou do segundo para o terceiro termo?
- Quanto aumentou do terceiro para o quarto termo?
- Repita o processo com os termos seguintes.

a. O que podemos descrever acerca dos resultados obtidos no item “c” desta tarefa?

b. Os números conhecidos matematicamente como “quadrados perfeitos”, com exceção do número 1, podem ser escritos a partir de adições de números naturais ímpares consecutivos, sendo o número 1 (um) o primeiro ímpar. Assim:

(i) $1 = 1$ (ii) $4 = 1 + 3$ (iii) $9 = 1 + 3 + 5$ (iv) $16 = 1 + 3 + 5 + 7$

(v) Escreva os números 25, 36, 100, 169 e n^2 usando somas de números naturais ímpares consecutivos.

4ª etapa: Ampliando ideias

A tarefa apresentada na 3ª etapa pode ser desenvolvida na formação inicial de professores de matemática em disciplinas específicas que exijam uma linguagem formal. Para tanto, há necessidade de enunciar o Princípio da Indução Finita (PIF). Segundo Corrêa (2008, p.18), “esse princípio é utilizado quando surgem afirmações que envolvam números naturais. Defrontamo-nos, então, com a questão de saber se tais afirmações são verdadeiras para todo número natural $n \geq n_0$, em que $n_0 \in \mathbb{N}$”.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

Assim, Moreira, Martínez e Saldanha (2012) salientam a seguinte ideia conceitual para o PIF:

Seja P uma propriedade satisfeita por um conjunto de números $n \in \mathbb{N}$*e* suponhamos que:

i. o número n_0 satisfaz a propriedade *P*, então $P(n_0)$ é verdadeira e;

ii. se um número natural k tal que $n_0 \leq k \leq n$ satisfaz a propriedade *P*, então $n + 1$ também satisfaz a propriedade *P*, logo $P(n + 1)$ também é verdadeira.

Como base da indução representada em (i), verifica-se que, para o valor inicial $n = n_0$, a propriedade é válida. Como passo indutivo, representado em (ii), consiste em utilizar $P(n)$, a chamada hipótese de indução, para provar que $P(n + 1)$, é válida. Uma vez verificados a base e o passo indutivo, temos uma "cadeia de implicações", de modo que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$ (p.2).

Como objetivo de proporcionar aos sujeitos contato com o Princípio da Indução Finita (PIF), propõe-se o seguinte:

a. Represente o conjunto dos números naturais ímpares, enumerando seus primeiros elementos;

b. Observe a sequência:

(i)$1 = 1$ (ii) $1 + 3 = 4$ (iii) $1 + 3 + 5 = 9$ (iv) $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ ...

Pode-se indicar a soma dos primeiros n números naturais ímpares por

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 2n - 1 = n^2, \text{ com } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Mostre, pelo Princípio da Indução Finita, que a proposição é verdadeira.

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 2n - 1 = n^2, \text{ com } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

1º passo: Verificar a base da indução, ou seja, verificar que P(1) é verdadeira para o valor inicial. P(1): $1 = 1^2$

2º passo: Estabelecer a hipótese de indução, ou seja, supor que a proposição é verdadeira para um número natural *k*, $1 \leq k \leq n$.

$$P(k): \underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 2k - 1 = k^2}_{\textit{Hipótese de Indução}}$$

3º passo: Usar a hipótese de indução para provar que P (k + 1) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$P(k+1): \underbrace{1+3+5+7+9+\ldots+2k-1}_{\textit{Hipótese de Indução}} \quad [2(k+1)-1] = (k+1)^2$$

Utilizando a hipótese de indução ($1+3+5+7+9+\ldots+2k-1 = k^2$), substituir $1+3+5+7+9+\ldots+2k-1$ por k^2:

$$\underbrace{1+3+5+7+9+\ldots+2k-1}_{\textit{Hipótese de Indução}} \quad [2(k+1)-1] = (k+1)^2$$

$$k^2 + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$$

Desenvolver a soma $k^2 + [2(k+1)-1]$ para mostrar que corresponde a $(k+1)^2$, comprovando a validade da proposição.

$$k^2 + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$$

$$k^2 + (2k+2-1)$$

$$k^2 + 2k + 1$$

$$k^2 + k + k + 1$$

$$k(k+1) + 1.(k+1)$$

$$(k+1)(k+1)$$

$$(k+1)^2$$

Logo, temos que $(k+1)^2 = (k+1)^2$, verificando, assim, que a proposição é verdadeira, como queríamos provar (*c.q.p.*).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A literatura referente ao uso do MM, assim como a diversidade desses materiais para ensino de matemática, é vasta. Cabe aos professores selecionar os MM e adequar à realidade e ao contexto de suas turmas. Destaca-se que existem diversas propostas para o uso do LEM e dos MM. Porém, a proposta aqui apresentada visa proporcionar a articulação da aritmética, geometria e álgebra, culminando na sintetização de conclusões e utilizando diferentes registros de linguagem, conforme recomendado pela BNCC (2017).

Na primeira etapa, no que tange à sistematização de ideias acerca do processo de representação, espera-se que os sujeitos, ao visualizarem e observarem as construções, investiguem possíveis regularidades na sequência apresentada. Isso propiciará o desenvolvimento de seu pensamento algébrico e, por conseguinte, a generalização de padrões. Assim, vai ao encontro dos objetivos de conhecimento estabelecidos na BNCC (BRASIL, 2017).

Ao avançar para a segunda etapa desta proposta de trabalho, entende-se que tarefas dessa natureza promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico em qualquer nível de ensino. No entanto, é importante ressaltar que o professor, ao trabalhar com essa ideia, deve adaptar as questões de acordo com o nível de conhecimento matemático de suas turmas. Assim, entende-se que a sugestão atende aos objetivos de conhecimento estabelecidos na BNCC (BRASIL, 2017).Além disso, concordamos com Gualandi (2012), ao entendermos que este é um momento propício para articular geometria, aritmética e álgebra, pois proporciona a transição entre vários registros de representação semiótica, conforme discutido por Duval (2003).

Ao desenvolver a terceira etapa, o professor pode proporcionaraosalunos a construção do pensamento algébrico, uma vez que o discente, ao ser instigado a observar, representar, generalizar e sintetizar uma ideia matemática, é provocado a transitar entre as várias formas de registro para um mesmo objeto matemático (DUVAL, 2003). Ademais, proporciona que os sujeitos articulem geometria, aritmética e álgebra, o que é discutido por Gualandi (2012), atendendo, assim, aos objetivos de conhecimento estabelecidos na BNCC (BRASIL, 2017). Por fim, a quarta etapa desta proposta de trabalho abarca o rigor da escrita matemática, proporcionando aos sujeitos situações em que ela é fundamental.

Observando as quatro etapas, verifica-se que é possível desenvolver tarefas relacionadas à generalização de padrões, no intuito de provocar o desenvolvimento do pensamento algébrico nos estudantes, desde a educação básica ao ensino superior. Nos anos iniciais do ensino fundamental, recomenda-se o trabalho com MM, de forma a culminar no ensino superior, quando os sujeitos generalizam e sintetizam uma ideia matemática.

REFERÊNCIAS

HENRIQUES A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Revista Eletrônica Ciência e Educação**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, v. 3. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais– Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. MEC. Brasília, DF, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_ publicacao.pdf >. Acesso em 20 set. 2020.

CANDEIAS, R. P. C. B. B. **Contributo para a história das inovações no ensino da matemática no primário**: João António Nabais e o Ensino da Matemática no Colégio Vasco da Gama. Dissertação (Mestrado em Educação Didática da Matemática) – Departamento de Educação, Universidade de Lisboa Faculdade de Ciências, Lisboa, Portugal, 2007.

CORRÊA, F. J. S. de A. **Introdução à Análise Real**. Belém: UFPA, Faculdade de Matemática, Matemática a Distância, Belém, 2008.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-33.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

GUALANDI, J. H.**Investigações matemáticas com grafos para o Ensino Médio**. 2012. 109f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte.

LORENZATO, S. (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas-SP, Autores Associados. 3. ed. 2012.

MACHADO, S. D. A.; BIANCHINI. B. L. Aportes dos processos do pensamento matemático avançado para a reflexão do professor sobre sua “forma” de pensar a matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p.590-605, 2013.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. de L. **Didáctica da Matemática**. Lisboa, Universidade Aberta, 1996.

MOREIRA, C. G. T. de A.; MARTÍNEZ, F. E. B.; SALDANHA, N. C. **Tópicos de Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

REYS, R. E. **Considerations for teaching using manipulative materials**. In Arithmetic Teacher, 1971.

SANTOS, R. C. dos; GUALANDI, J. H. **Laboratório de Ensino de Matemática:** O uso de materiais manipuláveis na formação continuada dos professores. In: XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. Anais do XII ENEM. 2016. p. 1-12.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão. **Revista Educação e Matemática**. Lisboa, n.105, 2009, p. 22-28.

ZABALA, A.**A prática educativa**: como ensinar. Trad. Ernani F. da F. Rosa – Porto Alegre: Artmed, 1998.

Nota: parte deste texto foi publicada no VII SHIAM – Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática.

SOBRE AS ORGANIZADORAS

DANIELA MENDES VIEIRA DA SILVA

Sou doutora em Ensino de Matemática pela UFRJ, Mestra em Educação em Ciências e Matemática pela UFRRJ, Graduada em Matemática-Licenciatura Plena pelo CEDERJ/UFF. Possuo também atualização em Mídias na Educação pela UFRJ e Especialização em Educação Tecnológica pelo CEFET-RJ. Sou professora Auxiliar nas Licenciaturas em Matemática e Pedagogia e na Pós Graduação Lato Sensu em Educação Matemática e suas Aplicações no Ensino, atuando nas disciplinas de Instrumentação/Metodologia do Ensino de Matemática (UCB); sou professora Auxiliar na Licenciatura em Matemática, atuando nas disciplinas de Introdução à Análise Matemática e Geometria Espacial e também sou professora da pós graduação Lato Sensu em Teoria e prática da Matemática, atuando nas disciplinas álgebra 1 e 2 e Tendências em Educação Matemática (FEUC); sou professora regente da rede estadual do Rio de Janeiro onde coordeno, desde a fundação do Colégio Estadual Hebe Camargo (CEHC), o premiado projeto Laboratório Sustentável de Matemática (LSM); sou bolsista de Incentivo à Docência (extensão) na Fundação Cecierj e integrante do grupo de pesquisa do Instituto de Matemática da UFRJ: TIME (Tecnologias, Inclusão, Matemática e Ensino).

DARLING DOMINGOS ARQUIERES

Sou Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática - PPGEduCIMAT pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ (2019). Especialista em Educação Matemática pela PUC-RJ (2002), Especialista em Novas Tecnologias no Ensino de Matemática pela Universidade Federal Fluminense - UFF (2014). Graduada em Licenciatura e Bacharel em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ (2001). Colaboradora no Projeto Laboratório Sustentável de Matemática, onde estudo o papel da utilização de objetos de aprendizagem específicos na melhoria do ensino de Matemática (2015). Desde 2005 sou professora da rede estadual do RJ. A partir de 2018, docente convidada na Pós Graduação Lato Sensu em Educação Matemática e suas Aplicações no Ensino (UCB). Tenho experiência na área de Educação, ministrando aulas no Ensino Fundamental 2º Segmento, no Ensino Médio e na pós-graduação.

Este livro foi composto pela Editora Bagai.

www.editorabagai.com.br

/editorabagai

/editorabagai

contato@editorabagai.com.br