Série Guias Didáticos de Matemática

71

Números Figurados Planos em Formação de Professores

Tiago Magno de Souza Dutra
Rodolfo Chaves

EDIFES
2020

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Tiago Magno de Souza Dutra

Rodolfo Chaves

NÚMEROS FIGURADOS PLANOS EM FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Série Guia Didático de Matemática – Nº 71

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo

Vitória – ES
2020

FICHA CATALOGRÁFICA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

D978n Dutra, Tiago Magno de Souza.

Números figurados planos em formação de professores [recurso eletrônico] / Tiago Magno de Souza Dutra, Rodolfo Chaves. – Vitória: Editora Ifes, 2019.

2737Kb: il.; PDF (Série guias didáticos de matemática; 71)
Publicação Eletrônica.
Modo de acesso: http://educimat.ifes.edu.br/index.php/produtos-educacionais

Produto Educacional (Pós-Graduação Stricto Sensu) Instituto Federal do Espírito Santo, Cefor, Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, 2019.

Inclui bibliografia
ISBN: 978-65-86361-07-0

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Formação de professores. 3. Matemática - aritmética. 4. Matemática – padrões numéricos. I. Chaves, Rodolfo. II. Instituto Federal do Espírito Santo. IV. Cefor. V. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Viviane Bessa Lopes Alvarenga CRB/06-745

Realização

Apoio

Edifes

Centro de Referência em Formação e Educação a Distância
Instituto Federal do Espírito Santo
Rua Barão de Mauá, 30, Bairro Jucutuquara
Vitória, Espírito Santo. CEP: 29040-860
Tel. +55(27) 3198-0934
E-mail: editora@ifes.edu.br

Comissão Científica

Ana Nery Furlan Mendes
Vilma Reis Terra
Marize Lyra Silva Passos

Coordenação Editorial

Sidnei Quezada Meireles Leite
Carlos Roberto Pires Campos

Revisão do Texto

Mariana Queiroz Castro

Apoio Técnico

Alessandro Poleto Oliveira

Ana Christina Alcoforado

Capa e editoração eletrônica

Katy Kênio Ribeiro

Produção e Divulgação

Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática

Centro de Referência em Formação e Educação a Distância
Rua Barão de Mauá, 30, Bairro Jucutuquara
Vitória, Espírito Santo. CEP: 29040-860

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Reitoria do Ifes
Reitor
Jadir Jose Pela

Pró-Reitor de Administração e Planejamento
Lezi José Ferreira

Pró-Reitora de Desenvolvimento Institucional
Luciano de Oliveira Toledo

Pró-Reitora de Ensino
Adriana Pionttkovsky Barcellos

Pró-Reitor de Extensão
Renato Tannure Rota de Almeida

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-graduação
André Romero da Silva

Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância
Diretoria do Cefor
Mariella Berger Andrade

Coordenadoria Geral De Ensino
Larissy Alves Cotonhoto

Coordenadoria Geral de Pesquisa e Extensão
Márcia Gonçalves de Oliveira

Coordenadoria Geral de Administração
João Paulo Santos

MINICURRÍCULO DOS AUTORES

Tiago Magno de Souza Dutra

Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem). Especialista em Matemática Educacional pelo Centro de Ensino Superior Fabra – ES. Bacharel em Administração de Empresas pela Universidade Estácio de Sá, com Complementação Pedagógica pelo Centro de Ensino Superior Fabra – ES. Professor temporário da Rede Municipal de Serra – ES.

Rodolfo Chaves

Professor Titular no Instituto Federal de Educação do Espírito Santo. Pós-doutor em Educação Matemática e Ensino de Física pela UFSM. Doutor e Mestre em Educação Matemática pela UNESP/Rio Claro. Especialista em Educação pela Unigranrio e pelo Centro de Estudos de Pessoal do Exército. Licenciado em Matemática pela FEUC. Pesquisador e Líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem). Pesquisador do Grupo de Pesquisa Sigma-t (Unesp). Áreas de atuação profissional: Formação de Professores de Matemática, Modelo dos Campos Semânticos.

Dedicamos esse trabalho aos amigos, membros do Gepemem, integrantes do Projeto de Pesquisa “Pitágoras: em (e além do) teorema”, Alexandre Krüger Zocolotti, Bruna Moll Fernandes, Davi Magalhães Vieira, Esthefany Rabello Macedo, Filyppe Neves de Andrade, Ian Neto Bonfim e Lucca Jeveaux Oliveira Bonatto, que sem a dedicação e compromisso dos mesmos não poderíamos desenvolver nosso trabalho.

A todos que lutam e militam por uma educação pública, gratuita, libertadora e de qualidade!

Do mesmo modo que proponho uma educação matemática que não seja preparação para a vida, e sim vida, proponho uma reflexão que não seja preparação para a ação, e sim ação.

(LINS, 1999, p. 94).

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Neste material, destinado a professores da Educação Básica, em formação inicial e continuada, apresentamos na forma de um Guia Didático de Matemática o resultado da uma pesquisa de mestrado, envolvendo alunos do Curso de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes –, *campus* Vitória, membros do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem) e professores da Educação Básica, participantes de oficinas e minicursos ministrados por nós, durante duas versões consecutivas da Semana da Matemática do Ifes (7ª e 8ª Semat), da VI Escola de Inverno em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (VI EIMAT), 4º Encontro Nacional Pibid Matemática e XIII Encontro Gaúcho de Educação Matemática – RS e alunos de Ensino Médio das redes públicas (estadual e federal).

Tal pesquisa foi desenvolvida junto ao Programa de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática (Educimat), do Ifes e no Gepemem, onde investigamos a produção de significado a respeito de números figurados planos, em processos de formação de professores de Matemática.

Nas oficinas e minicursos supracitados, trabalhamos com padrões numéricos envolvendo a Aritmética pitagórica, a partir de sequências de números figurados planos, em uma perspectiva do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), ressaltando modos de produção de significado[1] (MPS) geométrico,

1 *Modos de produção de significados* são "'campos semânticos idealizados' que existem na forma de repertórios segundo os quais nos preparamos para tentar antecipar de que é que os outros estão falando ou se o que dizem é legítimo ou não" (LINS, 2012, p. 29 – *grifos da obra*). Já *Campo Semântico* é "um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade (...) sendo um processo, ao ser colocado em marcha cria condições para sua própria transformação" (LINS, 2012, p.17). Para nós, *Produção de*

aritmético e algébrico, e o trânsito entre eles, com o propósito de obter os termos gerais dessas sequências, explorando formas, tabelas, técnicas de recursividade e comportamento algébrico dos padrões analisados. Para tal, contamos com a participação dos licenciandos em Matemática, membros do Gepemem e participantes do Projeto "Pitágoras: em (e além do) teorema" que, além das contribuições nos estudos e análise de dados, atuaram empenhadamente como monitores das práticas desenvolvidas, nas referidas oficinas e minicursos.

Para tal, seguimos os princípios elementares da Teoria da Atividade, de Alexis Nikolaevich Leontiev (1903-1979) – no que se referem ao desenvolvimento de ações e operações em um

---

significado "é *o* aspecto central de toda aprendizagem – em verdade o aspecto central de toda a cognição humana*"* (LINS, 1999, p. 86), no qual "*significado* é o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e, sim, o que efetivamente se diz no interior de uma atividade". *Produzir significado* é então, falar a respeito de um objeto (LINS; GIMENEZ, 1997, p.145-146 – *grifos da obra*).

conjunto de práticas educativas – e do MCS – no que se referem à utilização de algumas ideias elementares frente à análise de produções de significado dos envolvidos no processo.

Este guia, dirigido a professores da Educação Básica, visa proporcionar possibilidades de se trabalhar no viés da Teoria da Atividade e do Modelo dos Campos Semânticos, na qual atividade é uma unidade de análise onde é possível: (i) vislumbrar a possibilidade de ir além da relação dicotômica de "acertar" ou "errar"; (ii) aflorar e discutir perspectivas investigativas em aulas de Matemática, a partir de inquietações e perguntas relativas às dinâmicas e aos processos de ensino e de aprendizagem; (iii) caracterizar o que os alunos pensam quando *erram* e quando aprendem, mas sem recorrer à ideia de *erro* como (de)mérito ou fracasso.

Expectamos que esse guia didático possa colaborar com a prática docente de professores de Matemática que vislumbrem trabalhar em um viés investigativo, bem como, com todos que entendem e lutam por educação pública, gratuita, de qualidade e libertadora.

Nos apêndices de nosso guia didático apresentamos rápidas biografias de pessoas que, ao longo da história, trabalharam com números figurados.

2 O QUE PRETENDEMOS

Para tratarmos de algumas questões relativas à Aritmética Pitagórica, abordando números figurados planos, partimos do entendimento de que os pensamentos[2] relativos à Aritmética e à Geometria, são profundamente relacionados ao fazer humano, pois, de acordo com estudos históricos, (Domingues,

---

2 Trataremos *pensamentos* como apresentado em Sad (1999), que considera os pensamentos como proporcionados por nossas "percepções e funções mentais básicas – capacidade de atenção, de formação de imagens e de conexões – cuja atuação consideramos sempre em um meio psíquico-social (aqui o hífen é para lembrar o quanto estão imbricados) (...) Entendemos *pensamento* como relações e combinações, conscientes, das funções mentais básicas – associação, atenção, formação de imagens e conexões –. Concordamos com Vygotsky, quando diz que '*o pensamento não é algo acabado, pronto para ser expresso. O pensamento se precipita, realiza função, como trabalho. Este trabalho do pensamento é a transição desde as sensações da tarefa – através da construção do significado – ao desenvolvimento do próprio pensamento*' (VYGOTSKY, 1991, p. 125 apud SAD, 1999, p. 77 – *grifos da obra*). Dessa forma, assumimos que, em nosso trabalho, consideraremos a premissa de que o sujeito estrutura o *pensamento* por objetos, mas que tais objetos são secundários em relação aos sujeitos.

2017 [1991]; Brolezzi, 2014; Roque, 2014 [2012]; Eves, 2004; Boyer, 1978 [1974]), o desenvolvimento da capacidade e habilidade de fazer contagem bem como de mensurar objetos, ou seja, as noções básicas a respeito da Aritmética e da Geometria, situam-se na dinâmica do fazer matemático e, concomitantemente, da construção da civilização humana como nós conhecemos.

Esse desenvolvimento da capacidade de quantificar e medir, a princípio pequenas quantidades e espaços de coleções simples de objetos e posteriormente, perpassando por formas e padrões cada vez mais complexos, envolvendo grandes quantidades, distâncias e espaços, com o objetivo de atender às exigências e necessidades crescentes de uma sociedade cada vez mais fluida, líquida e também complexa, possibilitou grande desenvolvimento tecnológico e populacional de nossa civilização. Dessa forma, entendemos o quão compreensível, natural e comum é o pensamento aritmético e geométrico, básico, que praticamos no nosso dia a dia.

Quando nos referimos a pensamentos aritmético e geométrico, tomamos como premissa a Aritmética, que por definição, é a parte da Matemática que estuda e lida com operações numéricas como adicionar, subtrair, multiplicar, dividir, logaritmar[3], dentre outras; e a Geometria a linha que estuda formas e tamanhos no espaço, distâncias, localização, medições etc. No entanto, a questão posta aqui é: o que sucede para que ocorra *fracassos* no que se refere aos processos de ensino e de aprendizagem a essas áreas de conhecimento da Matemática, quando se trata do âmbito escolar?

---

3 Segundo Caraça (1984 [1948]), desde nos anos iniciais da Educação Básica, aprendemos em Aritmética que as quatro operações fundamentais são: adição; subtração; multiplicação; divisão. “A estas há que juntar mais três que se lhes ligam imediatamente; são a potenciação, a radiciação e a logaritmação” (p. 17 – *ipsis litteris*).

Para atacarmos o problema de como se dá esse *fracasso*, pautamo-nos em Lins e Giménez (1997) quando tratam de que ele não se restringe apenas ao interior da escola, ao contrário disso, estende-se além-muros. Embora em muitos casos este seja mais amplo, como, por exemplo, o que se refere à “farsa” no ensino de que as pessoas aprendem o que lhes é ensinado na escola, mas apenas para ser utilizado na escola. Ou seja, a possibilidade da existência de pelo menos duas Matemáticas: a da rua e a da escola. Na escola temos adição, multiplicação, subtração, divisão, frações, dentre outras; na rua tudo isso é usado para calcular preços, tamanho, distâncias, tempos e volumes e que é feito tão naturalmente pelas pessoas na vivência do cotidiano, e muitas vezes feito com considerável habilidade mesmo por aqueles que pouco frequentaram a escola ou mesmo nunca foram.

Segundo Lins e Giménez (1997), a questão é que *na escola os números não são números de nada e na rua eles têm outros significados, podendo ser o* *tamanho de alguma coisa*, por exemplo. Na Aritmética da rua a precisão – no sentido da cartesiana exatidão dos livros didáticos – nem sempre é o mais importante, bastando ser suficiente um valor aproximado naquele devido momento, e é nesse ponto onde se escuta de pessoas comuns que boa parte da Aritmética escolar é “inútil” porque se vê que é bem possível aprender a Aritmética da rua na rua.

Com isso, deixamos claro que nosso propósito não é propagar a dicotomização entre “Matemática da rua” e “Matemática da escola”, mas em praticar uma Educação Matemática, como proposto em Lins (1999), que não seja uma preparação para a vida, mas que seja vida; e que a reflexão, advinda dos processos investigativos apresentados, não seja uma preparação para ação, mas sim ação.

Dessa forma, as práticas educativas no viés investigativo, envolvendo padrões numéricos de números figurados planos que propomos, pautam-se pelos princípios da manipulação de materiais concretos, da ludicidade, mas também pelo trabalho colaborativo, em grupos orientados de forma a pautarem-se nos princípios da liberdade e da dialogicidade.

3 INTRODUÇÃO E ALICERCE TEÓRICO

Motivamo-nos a partir de três textos que nos impulsionaram a pesquisar o ensino da Aritmética, da Geometria e da Álgebra e que, consequentemente nos levaram ao tema "números figurados", resultando na produção deste material, fruto do Projeto de pesquisa "Pitágoras: em (e além do) teorema", desenvolvido pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem), que trabalha na ótica indissociável de ensino, pesquisa e extensão.

Os textos a que nos referimos são "*Parâmetros Curriculares Nacionais*" (BRASIL, 1998), "*Base Nacional Comum Curricular*" (BRASIL, 2018) e "*Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*", de Romulo Campos Lins[(XXV)] e Joaquin Giménez[(XXIV)], que sugerem que o desenvolvimento do pensamento algébrico ocorra em todos os anos da Educação Básica e também recomendam desde os primeiros anos de escolarização, a observância e a investigação de padrões aritméticos e geométricos.

O projeto "Pitágoras: em (e além do) teorema", registrado (PJ00004234) junto à diretoria de Pesquisa do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), *campus* Vitória, desde setembro de 2017, visa o desenvolvimento de Práticas Educativas Investigativas (PEI), tendo como participantes professores da Educação Básica de escolas públicas, professores formadores (que trabalham em cursos de formação de professores, em nível de graduação e pós-graduação), licenciandos em Matemática, mestrandos em Educação Matemática e alunos do Ensino Médio de escolas públicas.

A partir da discussão e da produção de materiais didático-pedagógicos (MDP) relativos ao tema e considerando o conhecimento matemático como historicamente construído e, portanto, em permanente transformação, propomos práticas e tarefas educativas (a partir da experimentação), em uma perspectiva sócio-histórica; isto é, subdividindo essas práticas em ações, operações e tarefas de estudo, com vistas a uma possível transformação criativa da realidade do aluno.

Subentendemos por MDP todo material produzido com o propósito de atender às expectativas básicas do professor para o desenvolvimento de suas atividades de docência. De técnicas de utilização de lousa e giz à utilização de *softwares* educativos; da produção de textos científicos à produção de guias e catálogos de prática pedagógica; da confecção de textos a livros; do desenvolvimento de dinâmicas, métodos, materiais concretos e manipulativos, e a técnicas de avaliação. Todo material produzido pelo professor, com o propósito de modificar e transformar sua prática docente (CHAVES, 2000, p. 43).

Para tratarmos de sequências de números figurados, produzimos MDP concretos e manipulativos, a partir de materiais reaproveitáveis, como, por exemplo, tampinhas de garrafas PET[4] (figura 1), com o propósito de desenvolvermos práticas e tarefas de estudo[5] – no sentido proposto por Vasily Vasilovich Davydov[XXII] (DAVYDOV, 1999, p. 3) – para a fixação daquilo que usualmente se denomina "conteúdo" e que envolvessem ludicidade, manipulação e reflexão. Estes materiais deveriam possibilitar também que pudéssemos estabelecer um espaço comunicativo[6] com os

---

[4] **PET** (**P**oli**e**tileno **T**ereftalato), polímero termoplástico, o mais resistente plástico para fabricação de garrafas, frascos e embalagens para refrigerantes, águas, sucos, óleos comestíveis, medicamentos, cosméticos, produtos de higiene e limpeza, destilados, isotônicos, cervejas dentre outros, permite ***r***eciclagem, ***r***eutilização e ***r***eaproveitamento.

[5] É tão somente o começo do desdobramento da atividade de estudo na sua plenitude, que exige dos alunos da escola uma análise das condições de origem destes ou daqueles conhecimentos teóricos e o domínio das formas de ações generalizadas correspondentes. Em outras palavras, ao resolver a tarefa de estudo o aluno descobre no objeto sua relação de origem ou essencial. (DAVYDOV, 1999, p. 3).

[6] É um processo de interação no qual interlocutores são compartilhados. (LINS, 2012, p. 24). Onde o interlocutor – um ser cognitivo e não biológico – é uma direção na qual se fala.

alunos, buscando uma interação de forma a produzirmos significados a respeito do comportamento desses números, distribuídos em sequências, levando em conta os modos de produção de significado geométrico, aritmético, algébrico, bem como o trânsito entre eles.

A coleta de tampinhas antecedeu as práticas e envolveu toda a comunidade escolar. Espalhamos pelos pátios e corredores do *campus* vários coletores feitos com garrafas PET, com o propósito de coletarmos o material necessário. Por mais de um ano a coleta foi sistematizada na qual recolhíamos semanalmente, higienizávamos, selecionávamos e catalogávamos o material. Nosso alicerce teórico para esse conjunto de ações, buscamos em Patrick Geddes (1854-1923), urbanista escocês, considerado o pai da Educação Ambiental, defensor da ideia de que

---

"Quando falo na direção de um interlocutor é porque acredito que este interlocutor diria o que estou dizendo e acreditaria/adotaria a justificação que autoriza a dizer o que estou dizendo" (LINS, 2012, p. 19).

> “um aluno em contato com a realidade do seu ambiente desenvolve atitudes criativas em relação ao mesmo, cabendo aos professores desempenhar o papel de interlocutores de uma educação que incorpore uma análise da realidade socioambiental opondo-se àquela em que o aluno é levado a ignorar as consequências dos seus atos” (CHAVES, 2004, p. 84).

Figura 1: Formação geométrica de números figurados usando tampinhas de garrafas PET

Fonte: acervo dos autores.

Para tal, pautamo-nos em Luria (1990) que, ao alfabetizar trabalhadores campesinos, utilizou vários tipos de tarefas e práticas educativas. O desenvolvimento dessas práticas mostrou que ocorreram alterações fundamentais na atividade psicológica durante o processo de alfabetização e escolarização desses trabalhadores. Também ocorreram mudanças básicas de trabalho, trazendo indícios de interferências, portanto, nas interações humanas enquanto produto social. As tarefas propostas por Luria (1990) foram:

> (i) de ***percepção*** (nomeação e agrupamento de cores, nomeação e agrupamento de figuras geométricas, respostas a ilusões visuais); (ii) de ***abstração e generalização*** (comparação, discriminação e agrupamento de objetos, definição de conceitos); (iii) de ***dedução e inferência*** (estabelecimento de conclusões lógicas a partir de informações dadas); (iv) de ***solução de problemas matemáticos*** a partir de situações hipotéticas apresentadas oralmente; (v) de ***imaginação*** (elaboração de perguntas ao experimentador); (vi) de ***auto-análise*** (avaliação de suas próprias características). (OLIVEIRA, 1997, p. 90 – *grifos da obra*).

Além desse referencial teórico, com vistas a uma efetiva possibilidade de aprendizagem, no que se refere à construção de um senso de padrões numéricos e à produção de significado algébrico, baseamo-nos em três ideias postas por Lins e Giménez:

(i) como um convite à superação de percepções errôneas de conceitos, de “formar um sentido numérico, que se baseia num sentido comum, passa por reconhecer elementos visuais mediante experiências perspectivas de todo tipo. Para isso, utiliza-se todo tipo de expressões, desenhos e experiências” (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 62);

(ii) de que, nos dias atuais, indubitavelmente, prevalece o interesse pela Matemática discreta, por diversos fatores que podem ser vistos em:

> De fato, seu desenvolvimento é necessário, na medida em que dá sentido à resolução de problemas aplicáveis à vida cotidiana que não podem ser resolvidos mediante rotinas simples de cálculo, e enfatiza métodos importantes da matemática, como indução e o tratamento recursivo (conforme recomendações curriculares do National Council of Teachers of Mathematics, dos Estados Unidos, de 1991). Além disso, o discreto é importante tecnologicamente, já que todos os equipamentos digitais trabalham nesse domínio, inclusive os computadores. (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 63).

(iii) em se tratando de números figurados, no que se refere ao visual numérico:

> É indubitável o valor crescente que adquire o comunicativo no mundo atual. É habitual, cada vez mais, tentar dar às pessoas dados de forma aproximada, visual, atrativa, que causem impacto. Porém não somente por isso. Já indicamos que **raciocinamos melhor se temos imagens visuais**. **Por isso, as configurações pontuais dos números** (ou seja, desenhar cinco pontos para indicar 5, um retângulo de 2 x 3 pontos para indicar 6 etc.) **adquirem valor**. (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 64 – *grifos nossos*).

Não apenas o livro *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI* (LINS, GIMÉNEZ, 1997), mas também os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (BRASIL, 1998), como dito anteriormente, sugerem que o desenvolvimento do pensamento algébrico ocorra em todos os anos da Educação Básica e, portanto, é recomendável, desde os primeiros anos de escolarização, a observância e a investigação de padrões aritméticos e geométricos.

A intervenção sociocultural de uma ação pedagógica não vinculada à realidade dos alunos possibilita o enfraquecimento de sua identidade cultural no que tange à manutenção de seus valores. Baseado nessas ideias, o texto Lins e Giménez (1997), sugere que, em classe, se investigue o visual propondo diversas situações cotidianas que envolvam visualização e, para tal, citam como uma situação possível, porém, mais complexa, identificar sequências numéricas pela visualização, como, por exemplo, tomando sequências de números figurados.

Para se trabalhar na perspectiva da investigação em classe, entendemos então que as PEI se constituem como uma proposta político educativa, apresentada em Chaves (2004), que toma como base alguns postulados, dos quais destacamos:

> Frente a diferentes realidades, distintos saberes de natureza matemática são produzidos;
> As formas como se produz conhecimento são dependentes de diversas variáveis que compõem as dinâmicas de uma cultura, logo, não há como pensar em produção única que seja válida em todos os contextos a todos os indivíduos.
> A Educação Matemática que defendemos produz legitimidade, dentro da escola, para os

> modos de produção de significado[7] da rua (ato político, ato pedagógico) (LINS, 1999, p. 92).
> O desenvolvimento intelectual se origina na interiorização de formas produzidas socialmente (VYGOTSKY *apud* LINS, 1999, p. 79).
> (CHAVES, 2015, p. 7-8).

O cerne destas práticas está em instrumentalizar o aluno para que ele possa agir e intervir em um problema local (agir localmente mas pensando globalmente), e ao propor tais ações, devem ser exaltados valores como a solidariedade, o labor colaborativo e a liberdade, para que o conhecimento possa ser produzido a partir de um problema que leve à sistematização de conceitos. (CHAVES; ZOCOLOTTI, 2017, p. 4-5). Tal diretriz vai ao encontro do que é apresentado por Vasily Vasilovich Davydov[(XXIII)] (DAVYDOV, 1999), ao defender que

---

[7] À luz do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), modos de produção de significados são "'*campos semânticos idealizados*' que existem na forma de repertórios segundo os quais nos preparamos para tentar antecipar de que é que os outros estão falando ou se o que dizem é legítimo ou não" (LINS, 2012, p. 29). Enquanto que, campo semântico é "um processo de *produção de significado*, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade (...) sendo um processo, ao ser colocado em marcha cria condições para sua própria transformação" (LINS, 2012, p. 17).

um aluno assimila um material – quando apresentado na forma de atividade de estudo – se tal atividade possui um princípio criativo ou transformador:

> A criança assimila um certo material sob a forma de atividade de estudo somente quando ela tem uma necessidade e motivação interior para tal assimilação. Ademais, isto está relacionado com uma transformação do material assimilado e desta forma com a obtenção de um novo produto espiritual, ou seja de conhecimento deste material. Sem isto não há uma plena atividade humana.
> As necessidades e os motivos educacionais direcionam as crianças para a obtenção por eles de conhecimentos como resultados da transformação do material dado. Tal transformação expõe no material as relações internas ou essenciais, cuja consideração permite ao aluno da escola acompanhar a *origem* das manifestações externas do material assimilado. A necessidade educacional vem a ser a necessidade que o aluno da escola tem de experimentar de forma real ou mental este ou aquele material com o fim de desmembrar nele o essencial-geral do particular, com o fim de observar as suas interligações. (DAVYDOV, 1999, p. 2, *ipsis litteris*).

Ao propormos as tarefas e atividades que apresentaremos neste guia didático, levamos em conta tais suportes teóricos e, para o desenvolvimento de todas as práticas apresentadas, propusemos a divisão da classe em grupo de quatro alunos/participantes, acompanhados por um monitor, por exemplo, um licenciando ou bolsista do Pibid, que participou conosco do processo de produção, elaboração e discussão do MDP e da prática proposta. No momento da realização da tarefa procuramos "ler" o aluno com vistas à produção de significado[8], para saber de onde ele fala, o que fala e o porquê fala o que está falando.

Por trabalharmos à luz do Modelo dos Campos Semânticos, consideramos a importância de estabelecermos um espaço comunicativo com os

[8] "Produção de significado é o aspecto central de toda aprendizagem – em verdade o aspecto central de toda cognição humana – é a produção de significados (...) para mim o significado de algo é aquilo que digo deste algo. Grosso modo, significado, para mim, é o que a coisa é." (LINS, 1999, p. 86 – *grifos da obra*). E significado "é o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e, sim, o que efetivamente se diz no interior de uma atividade. Produzir significado é, então, falar a respeito de um objeto" (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 145-146 – *grifos da obra*).

integrantes (os alunos) com vistas à interação. Para tal, buscamos efetuar leituras plausíveis[9] que se propõem "a saber *onde o outro* (*cognitivo*) *está*, para que eu possa dizer 'acho que sei como você está pensando, e eu estou pensando de uma forma diferente', para *talvez* conseguir interessá-lo em saber como estou pensando" (LINS, 2012, p. 23-24 – *grifos da obra*).

> Toda tentativa de se entender um autor deve passar pelo esforço de olhar o mundo com os olhos do autor, de usar os termos que ele usa de uma forma que torne o todo de seu texto plausível, e é aqui que devemos prestar atenção às definições que um autor propõe. (LINS, 1999, p. 93).

Nossa ideia é de que, quando falamos, o fazemos em uma direção, a partir de um referencial. A direção é a promoção de PEI pautadas nos princípios da

---

[9] "Trata-se de saber de que forma uma coerência se compõe na fala de uma pessoa, num livro, e assim por diante, e não de, *em meus termos*, dizer que aquela fala indica falta de informação, ou de reflexão (...) A leitura positiva tem por objetivo, por assim dizer, mapear o terreno ao mesmo tempo que trata de saber onde o outro está" (LINS, 2012, p. 23-24 – *grifos da obra*).

investigação, reflexão, liberdade e trabalho colaborativo em ação. O referencial, acabamos de apresentar nesse capítulo, mas indagamos: *de que vale teorizar se não tivermos ação?*

4 BASES HISTÓRICAS

A respeito de Pitágoras de Samos[(I),] há um clima de incertezas e mistério, pois não se sabe ao certo se fora apenas um semideus – portanto, um mito – uma lenda ou um personagem real da história da humanidade mas, mesmo assim, a ele é atribuído o desenvolvimento das relações matemáticas que envolvem as harmonias[10] musicais. Segundo Pickover (2009, p. 44), Pitágoras observou, por exemplo, que as cordas vibratórias produzem sons harmoniosos quando os comprimentos dessas cordas podem ser expressos na forma de razões de números inteiros.

---

[10] "Harmonia geralmente é entendida como um ajuste, uma junção ordenada e agradável dos diferentes que em si já carregam muitos contrastes. Nesse sentido, harmonia é uma relação dinérgica na qual elementos diferentes e muitas vezes contrastantes complementam-se ao juntar-se. Que tal junção dinérgica está no núcleo de todas as harmonias é sugerido pela origem da palavra *harmonia*, do grego *harmos*, juntar" (DOCZI, 2012, p. 8 – *grifos da obra*).

Os pitagóricos defendiam que “todas as coisas são números” e que, por isso “os números eram como deuses, puros e livres do mundo material” (PICKOVER, 2009, p. 44). Para eles os números têm vida e por isso devotavam-se aos inteiros positivos – de 1 a 10 – como uma forma de politeísmo. Nesse sentido, o Universo poderia ser entendido como uma escala musical, onde o número 1 é tido como a essência da vida, o princípio criador.

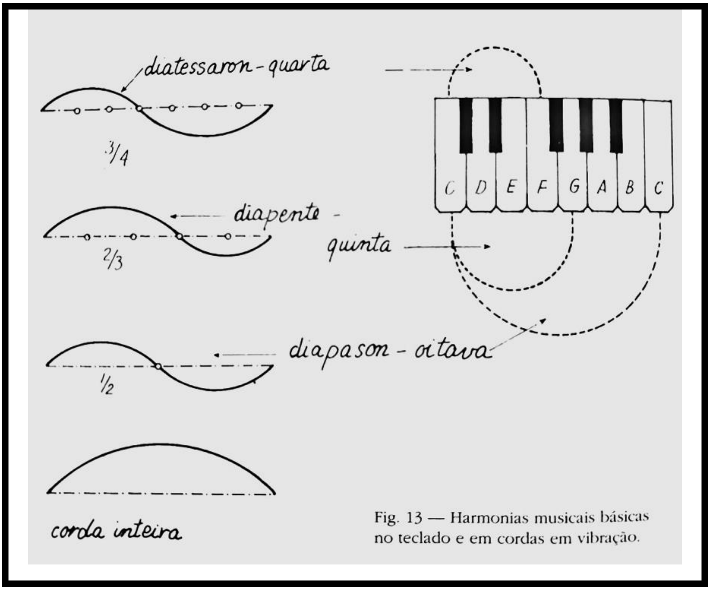
> A Unidade é o elemento criador de tudo (Pitágoras) (...) Dentro da concepção de Pitágoras a unidade, isto é, a *mônada* era o elemento criador de tudo (...) “Pitágoras chamava *Um* ao primeiro concerto de harmônios, o Fogo Viril, que tudo trespassa, o Espírito que se move por si mesmo, o Indivisível, e o grande Não-Manifestado, cujos mundos efêmeros revelam o pensamento criador, o Universo, o Eterno, o Imutável, o culto sob as coisas múltiplas e transitórias, que passam e mudam.” E. Schuré – “Os Grande Iniciados”, vol. II, pág. 162. (TAHAN, 1972 [1965], p. 35-36, *ipsis litteris – grifos da obra*).

A partir dessas ideias, eles desenvolveram estudos a respeito das notas musicais em que concluíram que as cordas em vibração emitiam sons que dependiam de seu comprimento e, para tal, construíram um instrumento de cordas (a lira) para ensinar e demonstrar essa teoria (figura 2). É bem provável que esse tenha sido o primeiro experimento de Física que existiu; isto é, possivelmente esse foi o primeiro experimento científico onde a Matemática tenha se relacionado à natureza e uma primeira tentativa de equacionar um fenômeno natural.

> Um dos característicos fundamentais da escola de Pitágoras foi o destaque dado ao número em relação com tôda sorte de fenômenos, como sejam os movimentos dos corpos celestes, os sons musicais, etc. A êste respeito há uma tradição: indo Pitágoras, certa vez, a passear e a refletir num meio de medir os sons musicais, sucedeu que passasse diante da tenda de um ferreiro e chamaram-lhe a atenção as pancadas do malho na bigorna, produzindo sons que eram musicais em relação uns com os outros. Já se havia notado que as cordas em vibração emitem sons que guardam uma relação simples com o comprimento daquelas. Cordas de comprimentos 2, 3 e 4, por exemplo, dão uma nota, a sua quinta e a sua oitava respectivamente. O fato é que o ferreiro, em seu trabalho de rotina, inspirou Pitágoras.
>
> Evidentemente, Pitágoras e seus discípulos sabiam que as cordas mais curtas dão notas mais altas; mas ainda não se davam conta de que o

som emitido por um instrumento musical é inteiramente determinado pela estrutura física do instrumento. Supunha-se, mesmo, que cada um dos vários corpos celestes, e também a esfera fixa das estrêlas, emitissem notas características, e que tôdas estas se unissem para produzir a chamada “música das esferas”. Êste ponto de vista quantitativo, introduzido por Pitágoras, prenuncia, de certo modo, tôda a evolução ulterior da Física Matemática. (TAHAN, 1967, p. 75, *ipsis litteris – grifos da obra*).

Figura 2: Harmonias musicais básicas no teclado e em cordas em vibração



Fonte: DOCZI (2012, p. 9).

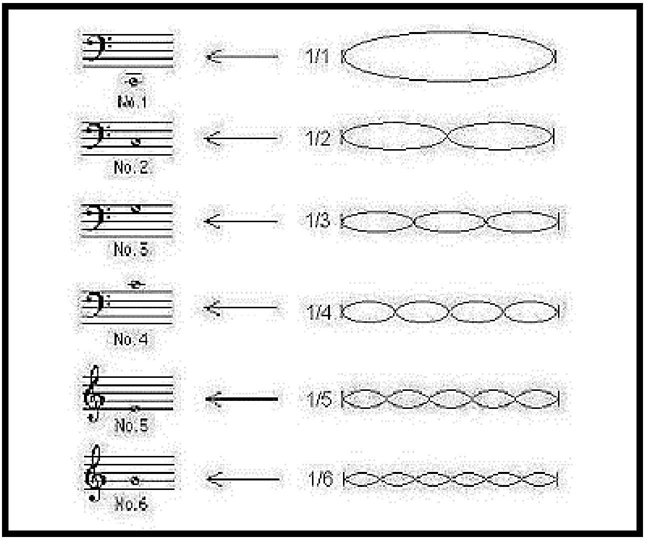
As notas que formam a escala musical ocidental, como a conhecemos hoje, são: dó (*C*), ré (*D*), mi (*E*), fá (*F*), sol (*G*), lá (*A*) e si (*B*). A cada conjunto de sete notas brancas, distribuídas no teclado do piano (figura 2), temos uma organização de tons (valores inteiros ou distância entre dois sustenidos ou dois bemóis – teclas pretas) e semitons (valores fracionados ou distância entre um sustenido ou um bemol) que são representados por teclas brancas e pretas. As distâncias entre as notas dó e ré, ré e mi, sol e lá são distâncias de um tom cada e essas cinco notas (dó, ré, mi, sol, lá) constituem a escala oriental ou pentatônica. As distâncias entre as notas mi e fá e si e dó são de meio tom, ou um semitom e por isso são conhecidas como as notas semitonadas.

> A proporção 1:1, que é a identidade, é chamada de *uníssono*. A proporção **1:2**, que produz o mesmo som da corda inteira, apenas mais agudo, é chamada de *oitava* porque alcança os oito intervalos da escala [as oito teclas brancas do teclado – cf. Figura 02]. Os gregos chamavam a essa proporção de *diapason*: *dia*, "através"; *pason*, de *pas* ou *pan* significando "tudo". O som agradável da proporção **2:3** era chamado *diapente* (*penta*, cinco), hoje em dia chamamos

> *quinta*, por abranger cinco intervalos. A consonância da proporção **3:4** era chamada *diatessaron* (*tessares*, “quatro”) ou *quarta*. (DOCZI, 2012, p. 8 – *palavras entre aspas e em itálico são grifos da própria obra e entre colchetes são grifos nossos*).

A conclusão do experimento desenvolvido pelos pitagóricos levou-os a enunciar que as notas são obtidas por divisões da corda por um número inteiro (figura 3), mas atribuíram a isso o significado de uma força mística afirmando que a relação entre os números e a natureza era tão perfeita que não só os sons naturais, mas todos os eventos deveriam ser números representados por harmonia, de forma que até as órbitas dos corpos celestes estavam relacionadas aos intervalos musicais onde esses movimentos celestes representavam música das esferas.

Figura 3: Divisão de corda para obtenção de notas musicais



Fonte: <http://musicienciarte.blogspot.com/2013/03/a-origem-das-notas-musicais-parte-2.html>

A fascinação dos pitagóricos pelos números e seus "atributos místicos" levou-os a categorizá-los e a classificá-los. Muitas dessas categorizações se perderam ao longo do tempo, mas algumas, segundo Roque (2012, p. 109) – indo a Aristóteles – perduraram, como por exemplo, classifica-los em limitados e ilimitados, pares e ímpares, perfeitos[11], amigáveis[12], defectivos ou deficientes[13], abundantes[14] ou excedentes, masculinos e femininos, quadrados e oblongos.

> Os números naturais, para os discípulos de Pitágoras, eram divididos em duas grandes categorias: masculinos e femininos. O número três, por exemplo, era masculino, ao passo que o dois pertencia ao conjunto dos números femininos. (TAHAN, 1972 [1965], p. 9).
> Os pitagóricos compreenderam, com admirável clareza, que na natureza tudo é ordem e harmonia; que todos os fenômenos estão sujeitos a leis suscetíveis de se formularem matematicamente.

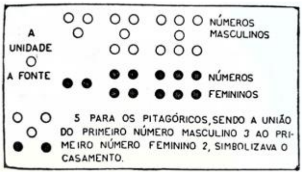
---

[11] "cujas partes alíquota, quando somadas, reproduziam o próprio número. O primeiro desses era o seis, cujos divisores menores são: 1, 2 e 3 (1+2+3=6). O segundo número perfeito era o 28, cujos divisores menores são: 1, 2, 4, 7 e 14 (1+2+4+7+14=28)" (TAHAN, 1967, p. 76).

[12] "São pares de números em que cada um é a soma dos divisores próprios do outro. Uma definição equivalente é que dois números são amigáveis, quando sua soma é a soma de todos os divisores de ambos esses números" (GUNDLACH, 1992, p. 42).

[13] "Se excede a soma de seus divisores próprios" (EVES, 2004, p. 99).

[14] "Se é menor que a soma de seus divisores próprios" (EVES, 2004, p. 99).



> Cometeram, porém, o erro de verem no número não apenas a expressão, mas o próprio princípio da ordem, a causa dos sêres e fenômenos. "As cousas são números" – dizia Pitágoras. (MELLO e SOUZA, 1939, p. 68, *ipsis litteris – grifos da obra*).

A composição dos números figurados, enquanto sequências numéricas, que possibilitam associar forma (modo de produção de significado geométrico) a número, expressando quantidade (modo de produção de significado aritmético), adquiriu ao longo do tempo uma considerável relevância entre muitos matemáticos, a ponto de se constituir como uma teoria, segundo Deza e Deza (2012). Dedicaram-se ao estudo dos números figurados, nada mais nada menos que: Pitágoras de Samos (±582-±507 AEC), Hípsicles de Alexandria (190-120 AEC), Lúcio Méstrio Plutarco de Queroneia (46-120)(II), Nicômaco de Gerasa (60-120)(III), Téon de Esmirna (70-135)(IV), Diofanto de

Alexandria (210-290)[V], Leonardo Fibonacci (1170-1250)[VI], Michel Stifel (1487-1567)[VII], Girolamo Cardano (1501-1576)[VIII], Bachet de Méziriac (1581-1638)[IX], René Descartes (1596-1650)[X], Pierre de Fermat (1601-1665)[XI], John Pell (1611-1685)[XII], Blaise Pascal (1623-1662)[XIII], Leonhard Eüler (1707-1783)[XIV], Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)[XV], Andrien-Marie Legendre (1752-1833)[XVI], Carl Friedrich Gauss (1777-1855)[XVII], Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)[XVIII], Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)[XIX], Wacław Sierpiński (1882-1969)[XX], Barnes Wallis (1887-1979)[XXI], George Pólya (1887-1985)[XXII].

Fruto do trabalho desses pensadores, muitos fatos matemáticos estão intrinsicamente relacionados aos números figurados.

> Os números poligonais, segundo se depreende da obra de Diofante, já haviam sido assinalados por Hípsicles, de Alexandria, cuja vida decorreu num período que remonta a dois séculos antes de Cristo. (TAHAN, 1966, p. 213).

Vários dos teoremas conhecidos em Teoria dos Números foram formulados a partir da observância e de pesquisas envolvendo esses números. Particularmente, podemos destacar que os figurados se relacionam a algumas classes de números inteiros positivos, como por exemplo, coeficientes binominais, ternos pitagóricos, números perfeitos, números de Mersenne e Fermat[(XI)], sequência de Lucas e Fibonacci[(VI)] etc.

Segundo Tahan (1966, p. 212-221), os números figurados e, em particular, os números triangulares, conhecidos desde a Antiguidade, têm sua origem lendária na observância do voo de certas aves (figura 4).

> Um camponês, certa vez, procurou Pitágoras, desejoso, de adquirir alguns novos conhecimentos com o filósofo. Disse-lhe Pitágoras: – "Vou ensinar-te a contar". Replicou com entusiasmo o camponês: – "Isso não é preciso. Já sei". Indagou o mestre: – "E como contas?". O camponês, com a maior naturalidade, começou: – "Um, dois, três,

> quatro...". – "Pára! – gritou Pitágoras. – Isso que tomas por quatro é dez[15], o triângulo perfeito, nosso símbolo!" (TAHAN, 1966, p. 212-213, *ipsis litteris – grifos da obra*).

Figura 4: Voo em "V" – formação triangular de voo

Fonte: <http://www.sonoticiaboa.com.br/2012/11/28/voo-em-qvq-dos-gansos-ensina-como-o-homem-pode-trabalhar-em-equipe/>

Dez, o quarto número triangular, gozava de grande prestígio entre os pitagóricos, como é possível observarmos em Tahan (1972 [1965]):

[15] "O quarto número triangular gozava de grande prestígio entre os pitagóricos" (TAHAN, 1966, p. 212).

> Pitágoras alertava seus discípulos para a formação particular que apresentava o número dez.
> Esse número é expresso pela soma dos quatro primeiros números:
>
> $$1 + 2 + 3 + 4$$
>
> na qual as três primeiras parcelas formam o número seis (número perfeito). Se ao número seis, com suas perfeições notáveis, juntamos o número quatro (símbolo da Terra) vamos obter o número *universal*, o número dez.
> Destaquemos os dois números ímpares que entram na soma 1 + 2 + 3 + 4, formação do dez. Esses números são 1 e 3 que elevados ao quadrado e somados, dão resultado igual a dez.
> E, assim, dentro do misticismo pitagórico, era o *dez* incluído no quadro das maravilhas do Universo. Para exprimir beleza ou perfeição, os discípulos de Pitágoras recorriam sempre ao décuplo:
> – Isso é dez vezes melhor!
> – Aquela idéia é dez vezes mais correta!
> – Ele é dez vezes mais talentoso!
> Em todas essas comparações, o único múltiplo aceitável era expresso pela razão décupla. A admiração máxima do pitagórico era manifestada igualmente com o auxílio do número dez. (TAHAN, 1972 [1965], p. 229 *ipsis litteris – grifos da obra*).

Ainda a respeito desta mística entorno do número 10, os pitagóricos o consideravam o símbolo da amizade porque duas pessoas, ao se cumprimentarem apertando as mãos, totalizavam dez dedos, representando então a segurança da amizade.

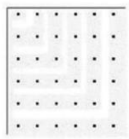
Mas também o 10 (ou a década), segundo Tahan (1972 [1965]), soma dos três primeiros números triangulares 1 + 3 + 6, “encerra os atributos sagrados do quatro e os atributos divinos do três”.

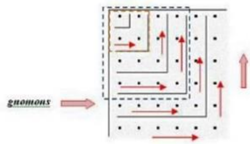
Chineses e gregos consideravam a distribuição gnomônica de quantidades. Para compreendermos o significado de distribuição gnomônica, primeiro examinemos o que é um gnomon.

> Os gregos da Antiguidade consideravam *gnomon* (etimologicamente, conhecedor) como uma peça que poderia juntar-se a uma figura da mesma forma, mas de tamanho maior. Se tomarmos a figura 2 a seguir verificaremos que cada *gnomon*, representado pelo corredor em forma de “**L**” (refletido) representa um número ímpar da sequência (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...). Observemos que cada novo quadrado formado apresenta como resultado a soma dos *gnomons* que os constituem. Comparemos então a figura 2 com a tabela 1 a seguir.

Figura 1. Representação da distribuição de pontos em forma de quadrado.

Figura 2. *Gnomons* que representam a série 1 + 3 + 5 + 7 (...).



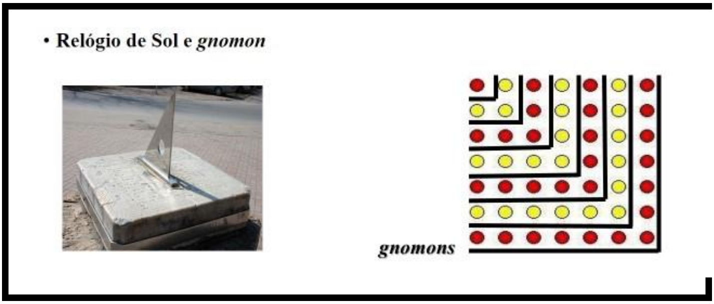


Fonte: Dados da pesquisa.

> Gonomon é também a parte do relógio solar que possibilita a projeção da sombra. Herótodo relata que os babilônios foram os inventores, mas foi Anaximandro de Mileto que ocidentalizou tal conhecimento. (CHAVES; RODRIGUES, 2014, p. 137 – *grifos da obra*).

Neste mesmo texto encontramos a referência de que um gnomon é uma haste plana fixada perpendicularmente a uma superfície horizontal plana, na qual a sombra produzida pelos raios do sol é projetada. A referência a gnomons está associada à haste que permite a leitura das horas em um relógio de sol (figura 5).

Figura 5: Gnomons



Fonte: acervo dos autores

Quanto aos chineses, o gnomon aparece na obra, *Chóu-Peï Suan Ching* – literalmente: "*O Clássico de Aritmética do gnomon e das trajetórias circulares do céu*" ou, simplesmente "*Horas solares*" – *foi escrito*, entre 1200 e 300 AEC. e, ao longo da história, atribuíram-lhe vários possíveis autores.

> Afirmações quanto a terem os chineses feito observações astronômicas importantes, ou descrito os doze signos do zodíaco, pelo décimo quinto milênio a.C. são provavelmente infundadas, mas uma tradição que coloca o primeiro império chinês em 2750 a.C. aproximadamente não é absurda (…) Datar os documentos matemáticos da China não é nada fácil, e estimativas quanto ao Chou Pei Suang Ching, geralmente considerado o mais antigo

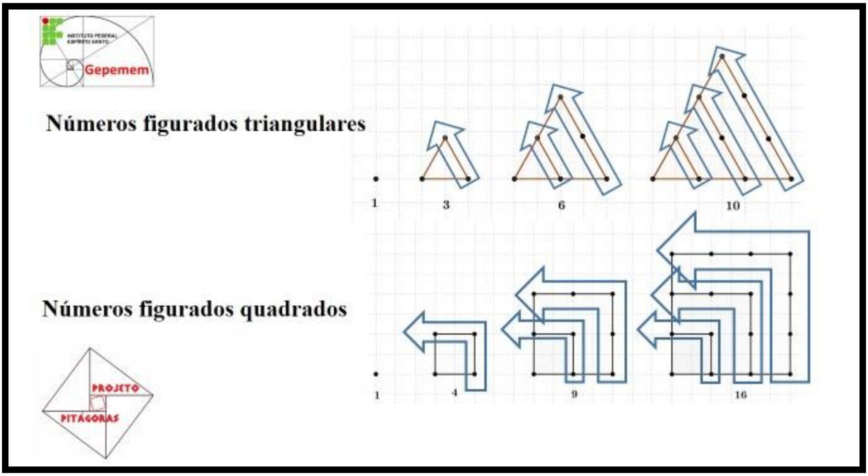
dos clássicos matemáticos, diferem por quase mil anos. O problema de sua data é dificultado pelo fato de poder ser obra de vários homens em períodos diferentes. Alguns consideram o Chou Pei como uma boa exposição da matemática chinesa de cerca de 1200 a. C., mas outros colocam a obra no primeiro século da nossa era (BOYER, 1978 [1974], p. 143).

Figura 6: Distribuições gnomônicas de números triangulares e quadrados

Fonte: Acervo Gepemem (2018)

No que se refere aos números figurados, uma distribuição gnomônica está relacionada à formatação em "L" (princípio da perpendicularidade) para os números quadrados, mas, generalizando, equivale à cada nova linha de elementos que acrescentamos para formar um novo número figurado (figura 7).

Figura 7: Distribuições gnomônicas de números triangulares e quadrados

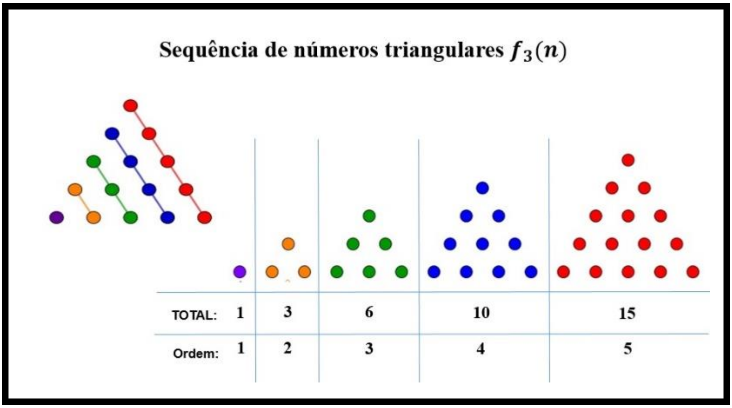


Fonte: acervo dos autores

5 NÚMEROS TRIANGULARES

O propósito de formar números figurados é expressar uma sequência numérica a partir de pontos, seixos, bolinhas etc., conforme nos apresenta Tahan (1966, p. 212), de maneira que se preserve a forma (triangular, quadrada, pentagonal, hexagonal etc.), com vistas a identificar a representação algébrica do termo geral. Assim, para construirmos uma sequência de números triangulares, devemos distribuir pontos de tal jeito que se preserve ou se confeccione triângulos (figura 8) – no nosso caso com tampinhas de garrafas PET. Para os pitagóricos, as sequências numéricas sempre começam pelo 1 por defenderem que o 1 é o princípio criador, como vimos anteriormente: “O número 1 é triangular por extensão de conceito” (TAHAN, 1966, p. 212).

Figura 8: Distribuição geométrica e aritmética de sequência de números triangulares



Fonte: acervo dos autores

Para trabalharmos a sequência de números figurados, retomamos a forma utilizada pelos pitagóricos, ou seja, representamos geometricamente. Procuramos identificar um padrão não apenas geométrico, mas também na sequência numérica formada e, a partir da técnica de recorrência ou recursividade, encontrar a generalização para o termo geral. Em nosso trabalho chamamos esse caminho de trânsito entre os modos de produção de significado geométrico, aritmético e algébrico.

Nas oficinas e minicursos que desenvolvemos, envolvendo alunos e professores (em formação inicial ou continuada) de escolas públicas, propusemos a seguinte tarefa: *Com o uso de tampinhas formemos a sequência de números triangulares* (figura 9).

Figura 9: Sequência de números triangulares considerando ordem por cores

Fonte: acervo dos autores

Iniciamos sempre pelo 1, primeiro termo de toda sequência de números figurados, por motivos já explicitados. Propositalmente, a partir da perspectiva de tarefas de Alexander Romanovich

Luria no que se refere à percepção, separamos e entregamos agrupamentos de tampinhas por sequências de cores de forma que puderam organizá-las para produzirem um sentido numérico (conjunto de características e de rede de relações que permitem relacionar números com operações com o objetivo de resolver problemas flexivelmente e mediante formas criativas)[16] e, assim, obter respostas, de maneira a explorarmos a visualização, permitindo a aproximação de dados reais, como sugerido por Lins e Giménez (1997) nas páginas sessenta e três e sessenta e quatro de sua obra.

Para organização das tarefas, dividimos a classe em grupos de quatro participantes com a orientação de

---

[16] "É indiscutível que os estudantes devem desenvolver intuições quantitativas, ou seja, devem dispor de técnicas e conceitos necessários para reconhecer o valor de quantidade, ordem, situação e operação, que expressam mediante números e correspondem a inúmeras situações cotidianas ou, simplesmente, reais (...) Diversos autores citaram, já faz tempo, a importância de reconhecer uma *arquitetura numérica*, entendendo como tal o conjunto de relações entre um número e os demais, considerando-o como quantidade" (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 59 – *grifos da obra*).

um monitor por grupo. No nosso caso, os monitores eram alunos da licenciatura em Matemática, integrantes do nosso grupo de pesquisa e participantes do Projeto Pitágoras.

Cada grupo recebeu um *kit* (figura 10) com uma coleção de tabelas a serem preenchidas e um conjunto de tampinhas, distribuídas por cores, de forma que chegassem ao número figurado em questão (triangular, quadrado, pentagonal etc.) na quinta ordem.

Figura 10: *kit* entregue para cada grupo com separação para cada categoria de números figurados

Fonte: acervo dos autores.

Seguindo o padrão de cores buscamos trabalhar atributos de abstração e generalização, como proposto em Luria (1990), a partir da comparação e agrupamento – por cores – dos objetos “tampinhas”, para que, em seguida, por dedução e inferência, estabelecessem conclusões lógicas a partir das informações obtidas. Para tal, sugerimos e orientamos o preenchimento da tabela a seguir (figura 11), considerando o que fora posto por Lins e Giménez, ao abordarem textos numéricos e seus significados.

> Durante a década de 1980, realizou-se muita pesquisa sobre a importância de representar graficamente situações aritméticas. Isso pode favorecer, por exemplo, a aquisição de estratégias de cálculo. (...) O interessante desses esquemas ou formas textuais é que não devemos esperar que os alunos os desenvolvam, e, sim, que os introduzam o professor e o livro-texto, o que faz com que devam ser considerados como um elemento de provocação. (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 60-61).

Inicialmente lhes entregamos a tabela com apenas a primeira coluna preenchida. Para a segunda coluna (quantidade de tampinhas por linha), sugerimos o preenchimento associando cores à quantidade. Até a ordem 5, os participantes contaram com o apelo visual da forma triangular, obtida pelas sequências coloridas de tampinhas (figura 8 e 11) para o preenchimento das entradas referentes às linhas 2, 3, 4, 5 e 6 e colunas 2, 3 e 4 da tabela.

Em seguida, propositalmente, sem que pudessem associar o número à forma – pois não contavam mais com as tampinhas para um apelo visual – propusemos que preenchessem as linhas relativas às ordens 10 e 37. A partir da técnica da recorrência e, com base na tabela – até onde preenchemos – solicitamos que determinassem o termo geral de um número triangular, observando a segunda coluna linha por linha (quantidade de tampinhas por linha).

Figura 11: Distribuição aritmética de sequência de números triangulares

dem	Quantidade de tampinhas por linha	TOTAL $f_3(n)$	Expressão numérica
1	1	1	$1 = 1$
2	1, 2	3	$1 + 2 = 3$
3	1, 2, 3	6	$1 + 2 + 3 = 6$
4	1, 2, 3, 4	10	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
5	1, 2, 3, 4, 5	15	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
...	...	...	...
10	1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 10	?	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 10 = ?$
...	...	...	...
37	1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 10, ..., 37	?	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 37 = ?$
...	...	...	...
n	1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 10, ..., 37, ..., n	?	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + n = ?$

Fonte: acervo dos autores

Nas oficinas, que desenvolvemos com alunos da 1ª série da Educação Básica, verificamos que trabalhar inicialmente com os números quadrados, introduzindo a ideia de recursividade, para obtenção do termo geral de um número quadrado

$$f_4(n)$$

facilitou o entendimento da representação algébrica sem tentar sair por Progressão Aritmética (P.A.) de segunda ordem, pois o termo geral de um número triangular[17]

$$f_3(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

possui um grau de dificuldade maior para efeito de abstração e generalização (comparação, discriminação e agrupamento de objetos, definição de conceitos, segundo Luria (1990)) do que o entendimento de

$$f_4(n) = n^2$$

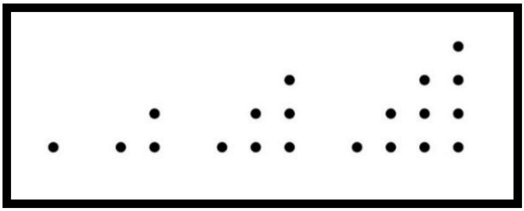
[17] Na época em que ministramos as primeiras oficinas e minicursos, adotávamos a nomenclatura T_n para expressar um termo de um número triangular de ordem *n*. Posteriormente, padronizamos o termo geral de um número triangular de ordem *n* por $f_3(n)$, da mesma forma que trocamos a nomenclatura Q_n por $f_4(n)$ para número quadrado, trocamos P_n por $f_5(n)$ para número pentagonal, H_n por $f_6(n)$ para número hexagonal etc. Assim, o um número poligonal $f_k(n)$ é relativo ao formato de um polígono de *k* lados, de ordem *n*.

visto que

$$f_4(1) = 1 = 1^2 = 1$$
$$f_4(2) = 1 + 3 = 2^2 = 4$$
$$f_4(3) = 1 + 3 + 5 = 3^2 = 9$$
$$f_4(4) = 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 = 16$$
$$f_4(5) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2 = 25$$
$$\vdots$$
$$f_4(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

A saída didática que encontramos, para os alunos supracitados – que ainda não haviam estudado P.A. – foi apresentarmos a ideia que denominamos de *soma gaussiana*, onde contamos a história da façanha de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) que, desafiado pelo professor apresentou, sem delongas, a soma dos cem primeiros números naturais e, para tal, adotamos como recurso o uso do vídeo *Carl*

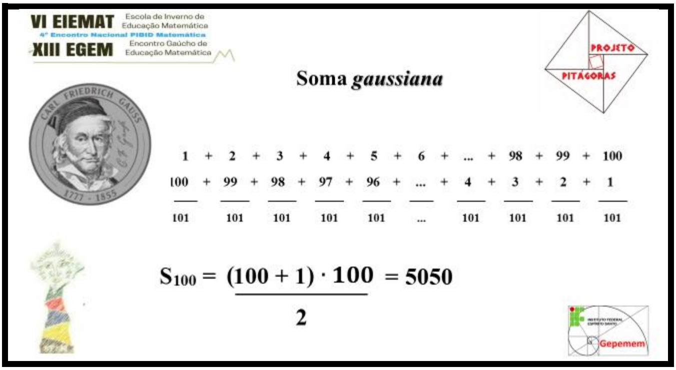
Friedrich Gauss – o menino prodígio[18]. Mas também, segundo Lins e Giménez,

> O caso mais conhecido é o dos números triangulares (1, 1+2, 1+2+3, ...) associados ao jovem Gauss, de quem se diz, com 11 anos, soube calcular o triângulo de 100 linhas; abaixo, apresentamos as configurações visuais para os primeiros números triangulares.
>
> 
>
> Os estudantes adotam diversas resoluções na visualização correspondente. Assim, estabelece-se um primeiro grau de generalização, que é encontrar a regra de formação e contagem dos números triangulares. (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 64).

Em seguida, apresentamos e discutimos os *slides* das figuras 12 e 13 a seguir.

[18] In: <https://www.youtube.com/watch?v=toWaGfYeQ0k>.

Figura 12: Soma gaussiana dos 100 primeiros números inteiros positivos



Fonte: acervo dos autores

A justificativa para

$$S_{100} = \frac{(100 + 1) \cdot 100}{2}$$

no processo de discussão se deu a partir da ideia de haver cem resultados de soma cento e um (101 = 100 + 1 = 99 + 2 = 98 + 3 = ... = 1 + 100); contudo, tal resultado expressava o dobro da soma solicitada no vídeo, por isso reduzimos à metade.

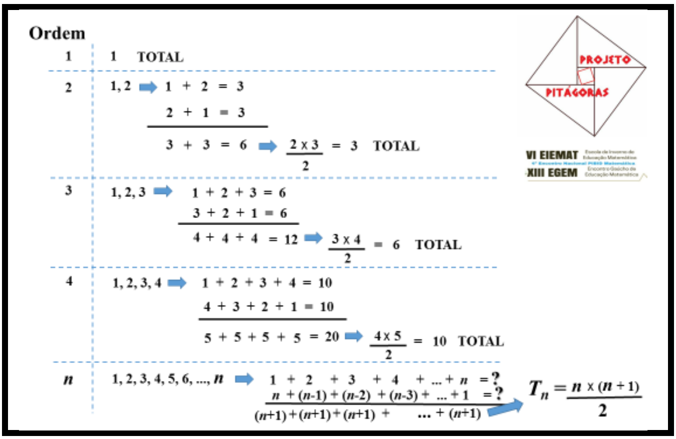
Tratando-se dos números triangulares, o processo gaussiano de soma (figura 13) envolve a soma dos gnomons formados onde,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$$

são as tampinhas que acrescentamos na formação de cada novo número triangular (figura 9) a partir do anterior e, na dinâmica de das ações propostas, a partir da Teoria da Atividade e de tarefas (Luria, 1990) a sequência supracitada é apresentada como

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$$

Figura 13: Uso da recursividade para obter o termo geral dos números triangulares



Fonte: acervo dos autores

É possível que o professor se pergunte: *Qual a relevância de se trabalhar com a sequência de números triangulares? Qual a relevância desse tema? Encontrar o termo geral dessa sucessão é "difícil" para alunos de Ensino Médio?*

Responder à terceira questão é muito pontual, pois não é possível uma generalização, sem levarmos em conta questões sociais envolvidas. Cada caso merece uma análise específica, que deve pautar-se pelos objetivos do professor ao aplica-la e estes devem, considerar, antes mesmo da unidade curricular, a realidade dos alunos. Porém, de acordo com nossa experiência, entendemos que dependerá dos procedimentos metodológicos elencados pelo professor. No nosso caso, aplicamos essa prática com alunos de 1ª série do Ensino Médio de escolas estaduais e também federal, além de trabalharmos com professores em formação e em treinamento e observamos que uma introdução histórica, bem como o uso de materiais concretos manipulativos, juntamente com o caráter investigativo, proporcionou aos alunos um ambiente colaborativo de discussão, pautados principalmente pelo interesse que lhes foi despertado.

A primeira indagação pode ser respondida com uma rápida análise das unidades curriculares. É quase que unânime, principalmente pelas recomendações dos documentos oficiais supracitados, que se trabalhe com padrões numéricos. Vislumbramos que sequências de números figurados primeiramente nos faculta irmos além do usual (Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas). Uma visita à História da Matemática permite-nos procurar entender os motivos que levaram os pitagóricos a se dedicarem ao estudo de tais padrões numéricos.

O trânsito entre os modos de produção de significado – geométrico, aritmético e algébrico – tal como apresentamos nas ações e operações propostas com o uso da recursividade pode possibilitar aos alunos chegarem a um termo geral, como consequência de um conjunto de tarefas (LURIA, 1990), ao invés de receberem como *fórmulas prontas*. O viés investigativo possibilita o entendimento de que a Matemática é um processo, resultado da produção humana e que não está pronta e acabada. Mais ainda, possibilita ao aluno o entendimento de que ele também pode produzir conhecimento matemático.

6 NÚMEROS QUADRADOS

Os números que resultam da disposição de pontos (pedrinhas, tampinhas ou seixos) num plano, de modo a formar quadrados, são denominados *números quadrados* ou *quadrangulares*, segundo Domingues (2017). Números quadrados sucessivos, de acordo com Boyer (1978 [1974]), são formados pela sequência

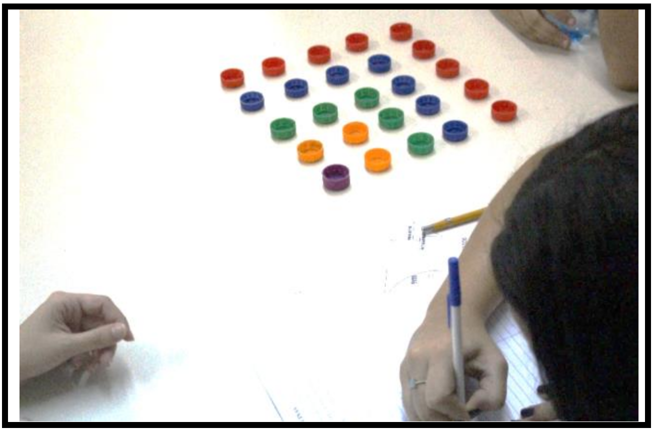
$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$$

Em nosso entendimento, se efetuarmos um trânsito entre os MPS geométrico (construindo com tampinhas, por exemplo, considerando a distribuição gnomônica por cor – figuras 14a e 14b) e o aritmético (com preenchimento de tabela, por exemplo – figura 15, onde a soma supracitada passa a ser representada por)

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots$$

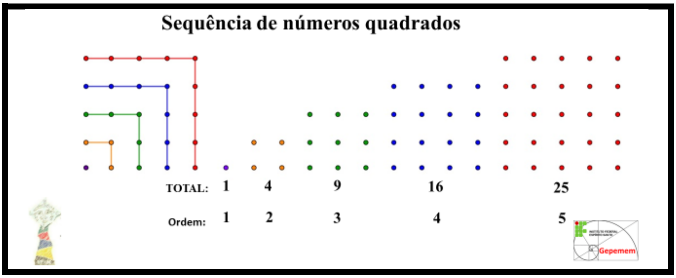
grafando 1 (em roxo), 3 (em laranja), 5 (em verde), 7 (em azul), 9 (em vermelho) etc., levando em consideração a tarefa de percepção de cores proposta em Luria (1990), facilita o entendimento de que o *n*-ésimo gnomon terá (2*n*-1) pontos (tampinhas, seixos ou pedrinhas).

Figura 14a: Distribuição gnomônica de números quadrados por cor



Fonte: acervo dos autores

Figura 14b: Distribuição gnomônica de números quadrados por cor



Fonte: acervo dos autores

O trabalho sequencial de formar um termo (figuras 14a e 14b) e de preencher linha a linha na tabela (figura 15), possibilita o entendimento de que, para obtenção do termo geral de um número quadrado $f_4(n)$, o total de pontos (seixos, pedrinhas ou tampinhas) é o quadrado da ordem do termo em questão.

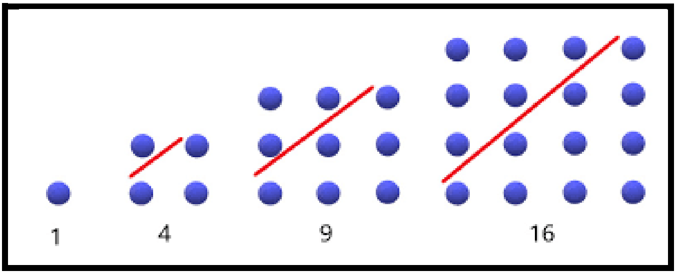
Figura 15: Tabela para análise de formação de números quadrados

Ordem	Quantidade de tampinhas por *gnomon*	TOTAL	Expressão numérica
1	1	1	$1 = 1$
2	1, 3	4	$1 + 3 = 4$
3	1, 3, 5	9	$1 + 3 + 5 = 9$
4	1, 3, 5, 7	16	$1 + 3 + 5 + 7 = 16$
5	1, 3, 5, 7, 9	25	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$
...	...	...	...
10	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19	100	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 19 = 100$
...	...	...	...
37	1, 3, 5, 7, 9, ..., 73	1369	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 73 = 1369$
...	...	...	...
n	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ..., $2n - 1$	n^2	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 2n - 1 = n^2 = Q_n$

Fonte: acervo dos autores

Se observarmos a representação geométrica de cada número quadrado ($f_4(n)$), estes podem ser obtidos a partir da formação de dois números triangulares, como na figura a seguir (figura 16).

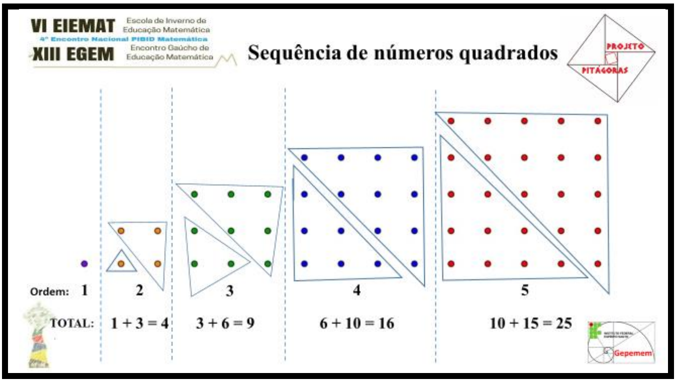
Figura 16: Formação de números quadrados a partir de dois triangulares



Fonte: acervo dos autores

Assim, detalhando mais essas partições, podemos representá-las da forma a seguir (figura 17).

Figura 17: Formação de números quadrados a partir de dois triangulares



Fonte: acervo dos autores

Tal representação geométrica, por si só, não facilita o emprego da recursividade.No entanto, se utilizarmos como suporte a tabela a seguir (figura 18), a partir da leitura das formas encontradas,

Figura 18: Tabela de números quadrados a partir de dois triangulares

NÚMEROS QUADRADOS – SOMA DE TRIANGULARES

Ordem	TOTAL	Soma de Triangulares	
		Triangular 1	Triangular 2
1	1	0	1
2	4	1	3
3	9	3	6
4	16	6	10
5	25	10	15
...	...	...	...
10	100	45	55
...	...	...	...
37	1369	666	703
...	...	...	...
n	n^2	$\frac{(n-1)\cdot n}{2}$	$\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

$$f_4(n) = f_3(n-1) + f_3(n)$$

$$\frac{(n-1)\cdot n}{2} + \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$n^2$$

Fonte: acervo dos autores

a generalização, quando comparada à tabela de números triangulares (figura 11), torna-se uma consequência natural. Esse resultado, segundo Luria (1990), decorre da realização de tarefas de ***percepção*** – a partir da nomeação e agrupamento de cores, nomeação e agrupamento de figuras geométricas, respostas a ilusões visuais, ***abstração e generalização*** – advindas da comparação, discriminação e agrupamento de objetos, definição de conceitos e ***dedução e inferência*** – ao induzirmos ao alunos a estabelecerem conclusões lógicas a partir de informações dadas.

A ideia de escrever um número quadrado

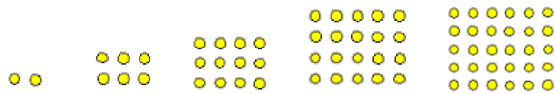
$$(f_4(n))$$

a partir de outros dois números triangulares

$$(f_3(n) \text{ e } f_3(n-1))$$

nos permitiu discutir a ideia de *números oblongos* ($f_R(n)$), que são números figurados de um tipo especial, também conhecidos como números retangulares (figura 19).

Figura 19: Números oblongos ou retangulares



Ordem	1	2	3	4	5
Oblongo	**2**	**6**	**12**	**20**	**30**

Fonte: acervo dos autores

Esses números assumem a forma

$$f_R(n) = n \cdot (n + 1),$$

que, Nicômaco de Gerasa (veja anexo III) – filósofo e matemático neopitagórico, autor do trabalho denominado *Introdução à Aritmética*, que foi de grande influência por ser um tratado onde ele lida com a Teoria dos Números –denominava de *números heteromécicos*.

Se observarmos a figura 19, a partir das tarefas de *percepção, abstração e generalização* e de *dedução e inferência*, tal como propostas em Luria (1990), podemos verificar que a organização geométrica desses números pode ser comparada a uma distribuição matricial, considerando a organização de linhas e colunas (tabela 1)

Tabela 1: distribuição de linhas e colunas de números oblongos segundo a ordem

Ordem (n)	**Quantidade de linhas**	**Quantidade de Colunas**
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6

e, a partir de tal distribuição, é possível inferir a forma

$$f_R(n) = n \cdot (n+1)$$

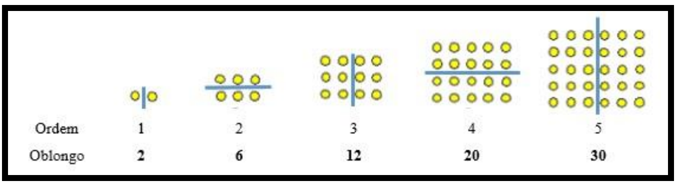
Gundlach (1992) afirma que, a partir de organização matricial, é possível se chegar ao entendimento de que a soma dos n primeiros números pares positivos é um número oblongo, por isso temos

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n \cdot (n + 1)$$

Nosso entendimento é de que, em se tratando de conclusão algébrica – que à luz do MCS denominaríamos de análise dos MPS algébrico – o trânsito entre os dois lados da igualdade supracitada não é tão simples assim, principalmente quando apresentada a alunos da Educação Básica.

Pensando então em trabalharmos a partir do MCS, procuramos, inicialmente, partir de MPS geométricos e, para tal, como os números oblongos são pares, propusemos efetuarmos uma divisão em partes iguais (figura 20).

Figura 20: Divisão de números retangulares



Fonte: acervo dos autores

Com tal divisão pudemos reescrevê-los em tabela da seguinte forma (tabela 2)

Tabela 2: Números oblongos pela partição da figura 20

Ordem (n)	**Oblongo [$f_R(n)$]**	**Partição**
1	2	1 + 1
2	6	3 + 3
3	12	6 + 6
4	20	10 + 10
5	30	15 + 15

Porém, se observarmos a terceira coluna (tabela 2) e compararmos com os números triangulares (figura 11), tal como na tabela a seguir (tabela 3)

Tabela 3: Comparação de números oblongos e triangulares

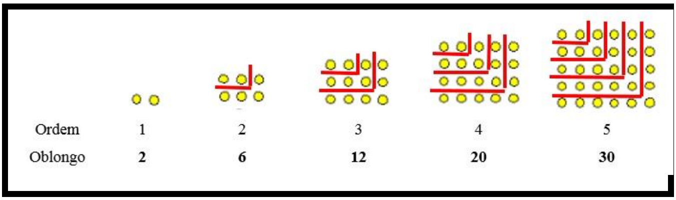
Ordem (n)	**Oblongo [$f_R(n)$]**	**Triangular [$f_3(n)$]**
1	2	1
2	6	3
3	12	6
4	20	10
5	30	15

por recursividade, comparando as três colunas da tabela 3, podemos observar que, relativo à ordem, cada oblongo é o dobro de um triangular. Assim, em relação ao termo geral, algebricamente, podemos verificar que

$$f_R(n) = 2 \cdot f_3(n) = 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = n \cdot (n+1)$$

Dessa forma, chegamos ao segundo lado da igualdade da expressão apresentada em Gundlach (1992) mas entendemos que ainda não foi suficiente para compararmos e relacionarmos com o primeiro lado dessa igualdade; ou seja, faltou-nos explicar que a soma consecutiva de números pares, inteiros positivos seja $n \cdot (n+1)$, que é o termo geral de um número oblongo ($f_R(n)$). Para tal, recorremos ao uso de distribuição gnomônicas dos oblongos (MPS geométrico) (figura 21), representando tais distribuições em tabelas (MPS aritmético) (tabela 4), com vistas à generalização (MPS algébrico), a partir da recursividade.

Figura 21: Construção gnomônica de números oblongos



Fonte: acervo dos autores

Observando a figura 21, podemos pensar que cada oblongo advém de um anterior; isto é, um novo termo possui a quantidade de pontos do oblongo anterior, adicionando-se mais uma quantidade de pontos, gnomonicamente, para formar um novo retângulo. Tal observação, à luz do que propôs Luria

(1990), fica mais clara quando propusemos o preenchimento da tabela 4, a seguir.

Tabela 4: Números oblongos a partir da organização gnomônica

Ordem (n)	**Oblongo [$f_R(n)$]**	**Formação dos gnomons**
1	2	2
2	6	2 + 4
3	12	2 + 4 + 6
4	20	2 + 4 + 6 + 8
5	30	2 + 4 + 6 + 8 + 10

Como já obtivemos o termo geral ($f_R(n) = n \cdot (n+1)$), a partir dele, pudemos inferir que, na *n*-ésima linha, e terceira coluna temos

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n$$

Mas na *n*-ésima linha, e segunda coluna temos

$$f_R(n) = n \cdot (n+1)$$

Logo, a partir de tais observações, agora sim, podemos então concluir que

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n \cdot (n + 1)$$

Para aqueles que já trabalharam com a soma dos termos de uma P.A., uma constatação do que fizemos, pode ser justificada a partir da ideia de que

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n$$

trata-se da soma dos *n* primeiros termos de uma P.A. de razão 2. Como, em uma P.A., a soma dos *n* primeiros termos é dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

então,

$$S_n = \frac{(2 + 2n) \cdot n}{2} = n \cdot (n + 1) = f_R(n)$$

Apesar do formalismo algébrico que adotamos, o fizemos por nos dirigirmos a professores. Todavia, o uso de tabelas, pode configurar-se como um elemento facilitador da aprendizagem. Não nos esqueçamos que os documentos supracitados – PCNs, BNCC e Lins e Giménez (1997) – sugerem o tratamento da informação utilizando tabelas.

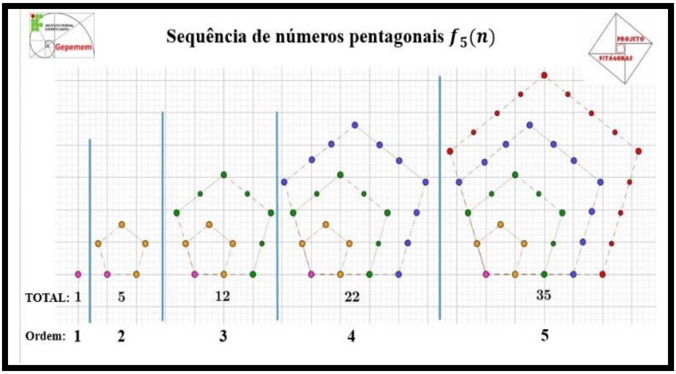
7 NÚMEROS PENTAGONAIS

Os números pentagonais

$$f_5(1) = 1,\ \ f_5(2) = 5,\ \ f_5(3) = 12,\ f_5(4) = 22,\ f_5(5) = 35, \ldots$$

geometricamente, são representados por pentágonos formados por pontos com a distribuição a seguir (figuras 22 e 23):

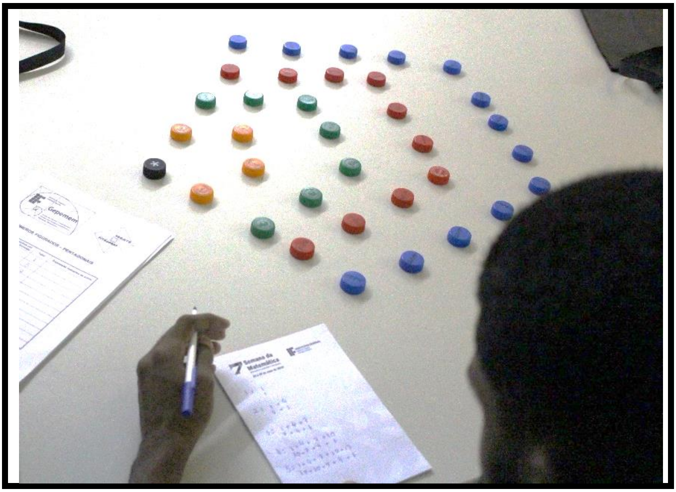
Figura 22: Sequência de números pentagonais



Fonte: acervo dos autores

Na figura 22 apresentamos um esboço a partir da construção dos alunos (figura 23).

Figura 23: Sequência de números pentagonais



Fonte: acervo dos autores

A distribuição geométrica dos pontos que formam os pentagonais (figuras 22 e 23) nos levou ao entendimento de que os participantes das oficinas e minicursos operavam em MPS geométrico que possibilitou o preenchimento da tabela a seguir (figuras 24 e 25):

Figura 24: Tabela de números pentagonais

NÚMEROS FIGURADOS – PENTAGONAIS

Ordem	Soma de tampinhas por Parcela para o nº formado	TOTAL	Expressão numérica da soma
1	1	1	1 = 1
2	1, 4	5	1 + 4 = 5
3	1, 4, 7	12	1 + 4 + 7 = 12
4	1, 4, 7, 10	22	1 + 4 + 7 + 10 = 22
5	1, 4, 7, 10, 13	35	1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35
...	...	...	...
10	1, 4, 7, 10, 13, ..., 28	145	1 + 4 + 7 + 10 + 13 + ... + 28 = 145
...	...	...	...
37	1, 4, 7, 10, 13, ..., 28, ..., 109	2035	1 + 4 + 7 + 10 + 13 + ... + 109 = 2035
...	...	...	...
n	1, 4, 7, 10, 13, ..., $(3n - 2)$		$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + ... + (3n - 2) = \frac{(3n-1)\,n}{2} = P_n$

Fonte: acervo dos autores

O fato de produzirem conhecimento em relação ao que se constitui como uma distribuição gnomônica, principalmente se considerarmos os atributos de cores por cada novo gnomon formado (figura 23), pudemos afirmar que facilitou a observação de que, cada pentagonal pode ser escrito a partir da soma dos respectivos gnomons, tal como podemos observar na constituição da quarta coluna da figura 24.

Figura 25: Alunos preenchendo a tabela de números pentagonais

Fonte: acervo dos autores

Examinando a segunda coluna dessa tabela (figura 24), é possível verificar que, a cada nova ordem, o que se põe em curso, é a formação de uma sucessão de números em P.A. onde o primeiro termo é 1, a razão é 3 e, daí o *n*-ésimo termo será então,

$$a_n = 3n - 2.$$

Como o total de pontos à formação de cada pentagonal é a soma de pontos de cada gnomon, recaímos então na soma dos termos de uma P.A., o que explica a formação do termo geral:

$$f_5(n) = \frac{(3n - 1) \cdot n}{2}$$

Ao término de cada encontro desenvolvíamos uma prática avaliativa que denominamos de plenária, em que discutimos, dentre outras coisas, possibilidades didáticas à sala de aula. Uma das conclusões a que chegamos refere-se ao fato de que a dinâmica até então proposta (trânsito entre os MPS geométrico, aritmético e algébrico; isto é, formar o polígono com tampinhas, contar quantas formam aquele polígono, preencher a tabela e, por recursividade, obter o termo geral), no que tange à construção do termo geral dos pentagonais, pela técnica de recursividade, é um elemento que tende a levar o aluno – sobretudo, de Educação Básica – ao desenvolvimento de limites epistemológicos[19], por isso optamos usar P.A. Mas, será que é possível usar algum recurso didático que possa romper com tais limites de forma a usar a recursividade? Pois bem, a História da Matemática nos brinda com uma belíssima proposta desenvolvida por Leonhard Eüler (1707-1783) que representa os pentagonais da forma a seguir (figura 26).

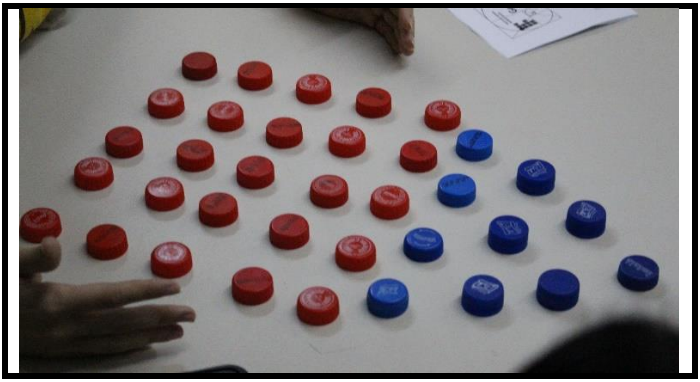
Figura 26: Representação de números pentagonais apresentada por Eüler

Fonte: acervo dos autores

[19] Quando tratamos de limites epistemológicos, referimo-nos à "impossibilidade do sujeito produzir significado para o resíduo de enunciação numa certa direção devido à sua maneira de operar" (SILVA, 2012, p. 88).

Tal formação (figura 26) torna-se mais familiar para os alunos e, automaticamente, quando solicitamos que formassem pentágonos, em todas as oficinas e minicursos que ministramos, sempre houve pelo menos um grupo que apresentava a forma supracitada, tal como podemos observar na figura 27.

Figura 27: Representação de números pentagonais apresentada por alunos



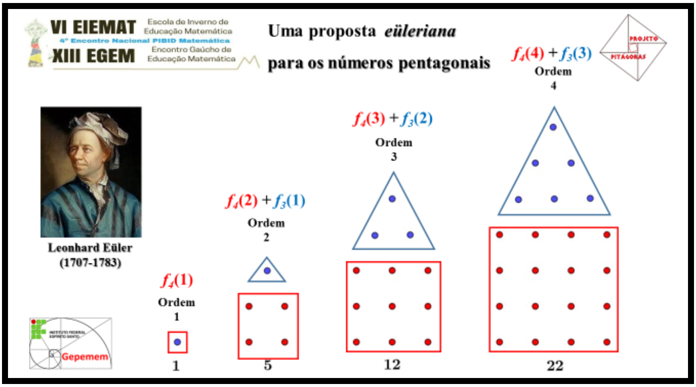
Fonte: acervo dos autores

A vantagem dessa disposição é possibilitar o entendimento de que é possível formar um pentagonal a partir de um número triangular e um número quadrado, proposta essa que fora apresentada e desenvolvida por Eüler; isto é,

$$f_5(n) = f_4(n) + f_3(n-1)$$

Para voltarmos à dinâmica até então desenvolvida – a do trânsito entre os MPS geométrico, aritmético e algébrico – propusemos uma organização espacial que resultou na seguinte formação (figura 28).

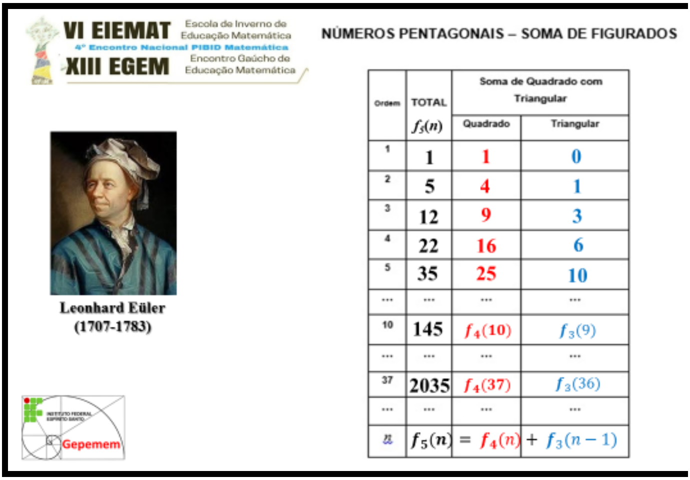
Figura 28: Distribuição de números pentagonais a partir de triangulares e quadrados



Fonte: acervo dos autores

Partindo do MPS geométrico então, foi possível o preenchimento da tabela a seguir (figura 29).

Figura 29: Tabela de números pentagonais a partir de triangulares e quadrados



Ordem	TOTAL	Soma de Quadrado com Triangular	
	$f_5(n)$	Quadrado	Triangular
1	1	1	0
2	5	4	1
3	12	9	3
4	22	16	6
5	35	25	10
...	...	...	...
10	145	$f_4(10)$	$f_3(9)$
...	...	...	...
37	2035	$f_4(37)$	$f_3(36)$
...	...	...	...
n	$f_5(n) =$	$f_4(n) +$	$f_3(n-1)$

Fonte: acervo dos autores

Daí, por recorrência, foi possível chegarmos à expressão

$$f_5(n) = f_4(n) + f_3(n-1)$$

A partir dessa distribuição, como já produzimos conhecimento para os respectivos termos gerais dos números triangulares e quadrados, pelo desenvolvimento algébrico, podemos escrever então que

$$f_5(n) = n^2 + \frac{(n-1)\cdot(n-1+1)}{2} = \frac{(3n-1)\cdot n}{2}$$

Dessa forma, não precisamos recorrer à necessidade de se trabalhar com P.A.

Vimos anteriormente que, ao longo da história, muitos matemáticos se dedicaram a estudar os números figurados e uma pergunta que os perseguia era: *será que se pode tomar os números triangulares como uma unidade padrão?* Em outras palavras: é *possível escrever outros números figurados como agrupamento de triangulares?* Observemos então!

Anteriormente (figuras 17 e 18), a partir da configuração dos números quadrados (tal como apresentamos na figura 17), demonstramos que é possível agrupa-los em triangulares, de maneira a concluir que

$$f_4(n) = f_3(n) + f_3(n-1)$$

Isso decorre da seguinte organização em tabela (figura 30):

Figura 30: Tabela da disposição de números quadrados a partir de triangulares

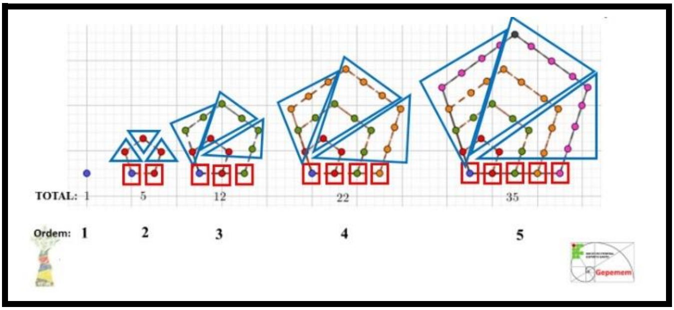
Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_4(n)$	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$f_3(n)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45
$f_3(n-1)$		1	3	6	10	15	21	28	36

$$f_4(n) = f_3(n-1) + f_3(n)$$

Fonte: acervo dos autores

E em relação aos pentagonais, também será possível reorganizá-los a partir da junção de triangulares? Vejamos o seguinte agrupamento (figura 31).

Figura 31: Disposição de números pentagonais a partir de triangulares



Fonte: acervo dos autores

Tal agrupamento nos possibilita o preenchimento da seguinte tabela:

Tabela 5: Tabela da disposição de números pentagonais a partir de triangulares

Ordem (n)	**Pentagonal [$f_5(n)$]**	**Agrupamentos**
1	1	1
2	5	3 x 1 + 2
3	12	3 x 3 + 3
4	22	3 x 6 + 4
5	35	3 x 10 + 5

Se bem observarmos, a sucessão numérica

$$1, 3, 6, 10, \ldots$$

é a sequência de números figurados triangulares. Assim, por recursividade,

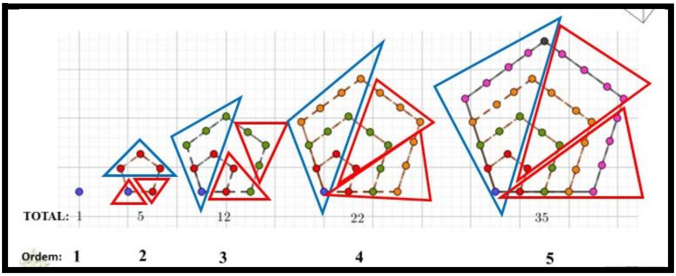
$$\boldsymbol{f_5(n) = 3.\ f_3(n-1) + n}$$

A partir de tal relação, podemos verificar algebricamente o seguinte resultado

$$3.\ f_3(n-1) + n = \frac{3 \cdot n \cdot (n-1)}{2} + n = \frac{3n^2 - 3n + 2n}{2}$$
$$= \frac{3n \cdot (n-1)}{2} = f_5(n)$$

Mas essa não é a única distribuição e agrupamento de triangulares. Podemos, por exemplo, pensar na seguinte configuração (figura 32):

Figura 32: Uma nova disposição de números pentagonais a partir de triangulares



Fonte: acervo dos autores

Tal configuração nos permite reescrevermos esses pontos da seguinte forma:

Tabela 6: Tabela da nova disposição de números pentagonais a partir de triangulares

Ordem (n)	**Pentagonal [$f_5(n)$]**	**Agrupamentos**
1	1	1
2	5	3 + 2 x 1
3	12	6 + 2 x 3
4	22	9 + 2 x 6
5	35	15 + 2 x 10

Mas a sequência numérica

$$1, 3, 6, 9, 15, \dots$$

forma uma sucessão de números que obedecem um padrão de figurados triangulares. Logo, podemos reescrever, por recorrência, que na n-ésima ordem, pela tabela antecedente, teremos

$$f_5(n) = f_3(n) + 2 \cdot f_3(n-1)$$

A verificação algébrica dessa relação é imediata, bastando para tal substituirmos pelo termo geral de um triangular. Assim,

$$\begin{aligned} f_5(n) &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot (n-1+1)}{2} \\ &= \frac{(3n-1) \cdot n}{2} \end{aligned}$$

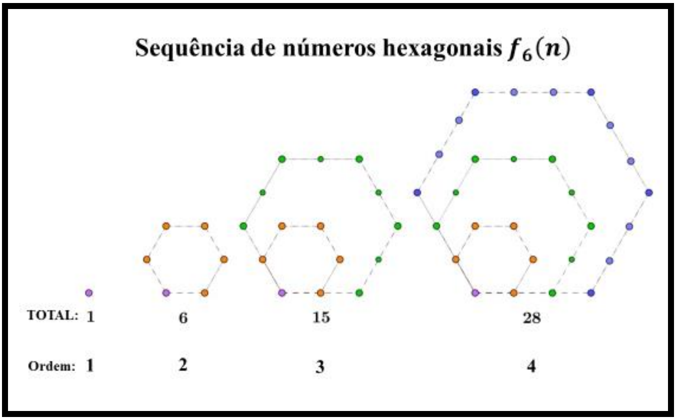
A maior dificuldade que os participantes de nossas oficinas encontraram, não estava associada ao padrão, à recursividade ou ao desenvolvimento algébrico, mas ao mecanismo de construção de pentágonos, sobretudo quando tentavam reproduzi-los de forma regular. Porém, a proposta euleriana (fazer pentágonos como casinhas) resolveu a questão.

Destacamos que mesmo sendo uma dificuldade, não há o porquê de desprezar o formato de pentágono regular, mas orientá-los na construção pode ser um bom caminho. Por exemplo, ter à mesa uma malha quadriculada para que os participantes possam usar como pano de fundo, facilitando assim o processo. E aí a criatividade e as escolhas metodológicas do professor farão a diferença.

8 NÚMEROS HEXAGONAIS

Quando usamos o recurso de formar esses polígonos para a disposição espacial de pontos na formação de números hexagonais, $f_6(n)$, a partir do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra e deixamos em tracejado as linhas gnomônicas (figura 33), identificamos, nos minicursos que ministramos, que os participantes visualizam com mais clareza a quantidade de pontos. A formação de cada número como uma soma surge automaticamente como consequência da soma dos gnomons. O preenchimento da tabela (figura 34) decorre das ações e operações com números triangulares, quadrados e pentagonais

Figura 33: Disposição espacial de números hexagonais



Fonte: acervo dos autores

A proposta que apresentamos a seguir, para o preenchimento da tabela que dispusemos (figura 34), foi sugerida por um grupo de professores da Educação Básica. Eles observaram que a cada nova ordem, o gnomon formado (figura 33) apresentava um número de pontos que constituía uma P.A. de razão 4 (figura 34) e que, portanto, a quantidade de pontos de um gnomon de n-ésima ordem é dada pelo termo geral dessa P.A.

$$a_n = 4n - 3$$

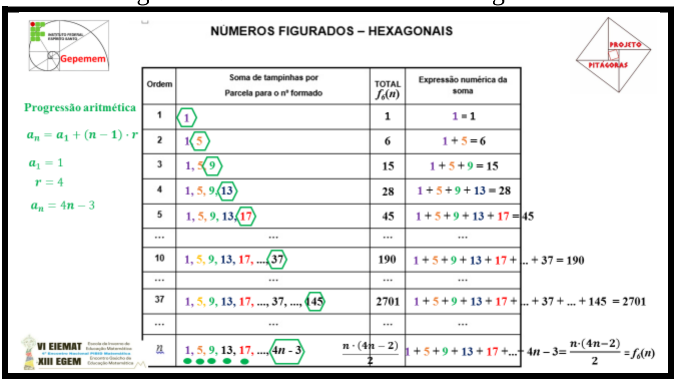
Consequentemente, o termo de n-ésima ordem ($f_6(n)$) de uma sequência de números hexagonais

$$f_6(n) = 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \ldots + 4\text{n} - 3$$

pode ser escrito como a soma dos termos dessa P.A., ou seja

$$f_6(n) = \frac{(1 + 4n - 3) \cdot n}{2} = \frac{n \cdot (4n - 2)}{2}$$

Figura 34: Tabela de números hexagonais

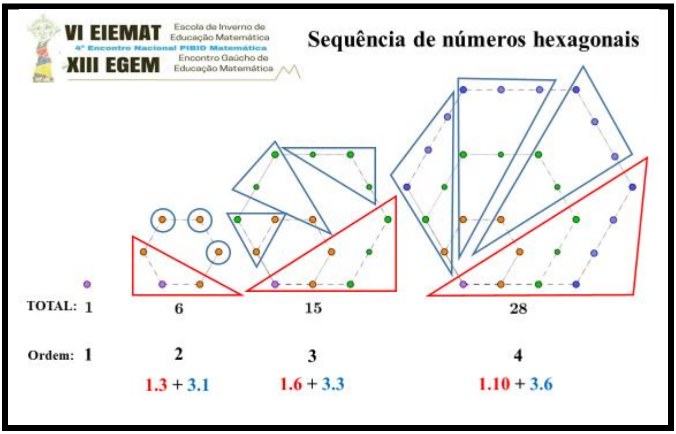


Ordem	Soma de tampinhas por Parcela para o nº formado	TOTAL $f_6(n)$	Expressão numérica da soma
1	1	1	$1 = 1$
2	1, 5	6	$1 + 5 = 6$
3	1, 5, 9	15	$1 + 5 + 9 = 15$
4	1, 5, 9, 13	28	$1 + 5 + 9 + 13 = 28$
5	1, 5, 9, 13, 17	45	$1 + 5 + 9 + 13 + 17 = 45$
...	...	...	...
10	1, 5, 9, 13, 17, ..., 37	190	$1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \ldots + 37 = 190$
...	...	...	...
37	1, 5, 9, 13, 17, ..., 37, ..., 145	2701	$1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \ldots + 37 + \ldots + 145 = 2701$
...	...	...	...
n	1, 5, 9, 13, 17, ..., $4n - 3$	$\frac{n \cdot (4n-2)}{2}$	$1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \ldots + 4n - 3 = \frac{n \cdot (4n-2)}{2} = f_6(n)$

Fonte: acervo dos autores

Todavia, nosso propósito consiste em efetuarmos um trânsito entre os MPS geométrico, aritmético e algébrico. Por isso, objetivando seguir a dinâmica proposta, pensamos em como desenvolver, pela recursividade, a fórmula do termo geral ($f_6(n)$). Para tal, perguntamo-nos se seria possível escrevermos um número hexagonal qualquer a partir de número(s) triangular(es). Com o propósito de respondermos tal questão buscamos a seguinte configuração (figura 35):

Figura 35: Disposição de números hexagonais a partir de triangulares



Fonte: acervo dos autores

A configuração a qual chegamos nos leva, a partir das tarefas de *percepção, abstração e generalização* e *dedução e inferência* à confecção e preenchimento da seguinte tabela (figura 36):

Figura 36: Tabela de números hexagonais como agrupamento de triangulares

NÚMEROS HEXAGONAIS – SOMA DE FIGURADOS

Ordem	TOTAL $f_6(n)$	Soma de Triangulares	
		Triangular 1	Triangular 2
1	1	$1.f_3(1)$	
2	6	$1.f_3(2)$	$3.f_3(1)$
3	15	$1.f_3(3)$	$3.f_3(2)$
4	28	$1.f_3(4)$	$3.f_3(3)$
5	45	$1.f_3(5)$	$3.f_3(4)$
...	...	...	...
10	190	$1.f_3(10)$	$3.f_3(9)$
...	...	...	...
37	2701	$1.f_3(37)$	$3.f_3(36)$
...	...	...	...
n	$f_6(n)$	$1.f_3(n)$	$3.f_3(n-1)$

$1.3 + 3.1$

$1.6 + 3.3$

$1.10 + 3.6$

$$f_6(n) = f_3(n) + 3.f_3(n-1)$$

$$\frac{n \cdot (4n-2)}{2}$$

Fonte: acervo dos autores

Como já concluímos a relação relativa ao termo geral de um número triangular, algebricamente podemos então reescrever a expressão

$$f_6(n) = f_3(n) + 3 \cdot f_3(n-1)$$

como

$$
\begin{aligned}
f_6(n) = f_3(n) + 3 \cdot f_3(n-1) &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\
&+ 3.\frac{(n-1) \cdot (n-1+1)}{2} \\
&= \frac{n \cdot (4n-2)}{2}
\end{aligned}
$$

Diferentemente da forma pentagonal, os alunos não tiveram muitas dificuldades em construir os hexágonos, principalmente quando produziram significado para a ideia de que cada novo termo era obtido pela formação de um novo gnomon. Aliás, produzir significado à formação gnomônica dos figurados planos, é fundamental para pensarmos em generalizações e por isso, propomos os capítulos nove e dez.

9 TERMO GERAL DE UM NÚMERO FIGURADO POLIGONAL

Até aqui, mostramos que números figurados poligonais quadrados, pentagonais e hexagonais podem ser escritos a partir de números triangulares, porém não respondemos se *os números triangulares podem ser tomados como uma unidade padrão para escrevermos um número figurado plano qualquer*. Vejamos então! A respeito dos números quadrados, verificamos que

$$f_4(n) = f_3(n) + 1 \cdot f_3(n-1)$$

Também vimos, a respeito dos números pentagonais que

$$f_5(n) = f_3(n) + 2 \cdot f_3(n-1)$$

Da mesma forma, em relação aos números hexagonais verificamos que

$$f_6(n) = f_3(n) + 3 \cdot f_3(n-1)$$

A pergunta então é a seguinte: *será que para um número figurado poligonal de k lados vale a relação*

$$f_k(n) = f_3(n) + (k-3) \cdot f_3(n-1)?$$

Por recursividade podemos verificar que:

(0) No caso dos números triângulos ($k = 3$): $f_3(n) = f_3(n) + (3-3) \cdot f_3(n-1)$

(1) No caso dos números quadrados ($k = 4$): $f_4(n) = f_3(n) + (4-3) \cdot f_3(n-1)$

(2) No caso dos números pentagonais (k = 5):

$$f_5(n) = f_3(n) + (5 - 3) \cdot f_3(n - 1)$$

(3) No caso dos números hexagonais (k = 6):

$$f_6(n) = f_3(n) + (6 - 3) \cdot f_3(n - 1)$$

Mas será válida para qualquer k a relação $f_k(n) = f_3(n) + (k - 3) \cdot f_3(n - 1)$?

Isso responderemos a seguir.

10 TERMO GERAL DE UMA SEQUÊNCIA GNOMÔNICA DE UM NÚMERO FIGURADO

Em relação a todos os números figurados poligonais que analisamos (triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais), verificamos que, a cada nova ordem, há uma distribuição gnomônica de pontos de forma que um número figurado pode ser obtido como a soma dos termos desses gnomons.

Acontece que todos os gnomons que vimos são termos de uma P.A. e, portanto, tais somas ($f_k(n)$) podem ser obtidas por somas de termos de P.A. A verificação por P.A. deixaremos para o leitor. Mas não nos refutaremos de utilizar uma proposta que apresentamos e que denominamos de soma gaussiana.

Recordemos a distribuição gnomônica de cada sequência de figurados poligonais, onde designaremos por

$$g_k(n)$$

o número de pontos de um gnomon, com ordem *n*, termos de uma sequência de números poligonais de *k* lados, no qual o número figurado poligonal de *k* lados

$$f_k(n)$$

é a soma dos gnomons de cada sucessão $g_k(n)$.

Se examinarmos as figuras antecedentes (11, 15, 24 e 34), verificaremos que

Tabela 7: Distribuição gnomônica de pontos e números poligonais segundo a ordem *n*

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{g_k(n)}$	$\boldsymbol{f_k(n)}$
3	$g_3(n) = n$	$f_3(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
4	$g_4(n) = 2n - 1$	$f_4(n) = n^2$
5	$g_5(n) = 3n - 2$	$f_5(n) = \frac{n \cdot (3n-1)}{2}$
6	$g_6(n) = 4n - 3$	$f_6(n) = \frac{n \cdot (4n-2)}{2}$

Tomando a segunda coluna da tabela antecedente (tabela 7), podemos reescrever cada gnomon $g_k(n)$ da seguinte maneira:

(0) Para *k* = 6 (hexagonal): $g_6(n) = \mathbf{4} \cdot n - \mathbf{3}$

(1) Para *k* = 5 (pentagonal): $g_5(n) = \mathbf{3} \cdot n - \mathbf{2}$

(2) Para *k* = 4 (quadrado): $g_4(n) = \mathbf{2} \cdot n - \mathbf{1}$

(3) Para *k* = 3 (triangular): $g_3(n) = \mathbf{1} \cdot n - \mathbf{0}$

Por recorrência então, para um *k* qualquer, temos:

$$g_k(n) = (\boldsymbol{k-2}) \cdot n - (\boldsymbol{k-3})$$

Porém, vimos que cada número figurado poligonal $f_k(n)$ é a soma dos termos de uma P.A. cujo termo geral é $g_k(n)$. Se considerarmos a partir de P.A. ou a partir da soma gaussiana, em qualquer um desses casos, $f_k(n)$ é a metade do produto do número de termos pela soma do primeiro com o último termo, isto é:

$$f_k(n) = \frac{(1 + g_k(n)) \cdot n}{2}$$
$$= \frac{(1 + (k-2) \cdot n - (k-3)) \cdot n}{2}$$

Simplificando a expressão, podemos verificar então, que um número figurado poligonal (com *k* lados) de ordem *n*, pode ser escrito como

$$f_k(n) = \frac{[(k-2)\cdot n - (k-4)]\cdot n}{2}$$

Se o leitor estiver lembrado, gostaríamos saber se a relação

$$f_k(n) = f_3(n) + (k-3)\cdot f_3(n-1)$$

obtida por recorrência era válida ou não. Algebricamente,

$$f_k(n) = f_3(n) + (k-3)\cdot f_3(n-1)$$
$$= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (k-3)$$
$$\cdot \frac{(n-1)\cdot(n-1+1)}{2}$$

$$f_k(n) = \frac{n^2+n}{2} + (k-3)\cdot\frac{(n^2-n)}{2}$$
$$= \frac{kn^2 - 2n^2 + 4n - kn}{2} \therefore$$

$$f_k(n) = \frac{[(k-2)\cdot n - (k-4)]\cdot n}{2}$$

Com a proposta apresentada, o desenvolvimento algébrico é uma consequência de um conjunto de ações e operações matemáticas, envolvendo formas, números e tabelas, que facultam a observação de padronizações.

O que observamos está associado à ideia de que o desenvolvimento algébrico pode ser entendido pelo aluno não como causa, mas como consequência de processos investigativos que lhes facultam um fazer matemático.

11 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Trabalhar na perspectiva do Modelo dos Campos Semânticos, tomando a atividade como unidade de análise, tal como proposto por Leontiev, bem como as noções de tarefas propostas por Luria, demanda, antes de mais nada, que o aluno fale, participe e seja ativo no processo. Para tal, cabe a nós, professores, propor ações e práticas em um viés que convide o aluno a participar e, portanto, não nos fixarmos em algo mecânico, pronto e acabado, mas que privilegie a investigação e o trabalho colaborativo.

Por esse prisma, assumimos que o que fora produzido nesse guia não deva ser entendido como algo para ser replicado *ipsis litteris*, mas que sirva como um parâmetro, uma ideia que possa levar ao desenvolvimento de outras operações, ações, práticas e, portanto, outras atividades. Sempre respeitando as potencialidades, e realidades sócio históricas, socioculturais e socioambientais dos alunos.

Optamos por trabalhar com tampinhas de garrafas PET, o que movimentou as escolas na qual trabalhamos, de forma que as comunidades escolares (alunos, professores e técnicos-administrativos) envolvidas mobilizaram-se em processos de coleta seletiva para a reutilização, reaproveitamento e reciclagem de materiais que, quando mal-empregados e pessimamente descartados, causam degradação ao meio ambiente.

Com isso, queremos deixar claro que não acreditamos em fórmulas prontas nos processos de ensino e de aprendizagem, mas entendemos que a troca de experiências nos possibilita principalmente romper com o marasmo de uma educação oca, bancária e descontextualizada, que fixa castas e desmotiva os alunos, levando-os a ignorarem e desprezarem as consequências de seus atos.

Nossa proposta, para qualquer que seja o material didático e em relação a qualquer conteúdo programático, visa desenvolver junto com o aluno atitudes criativas e de engajamento socioambiental. Isso porque acreditamos em uma educação que seja libertadora e engajada.

Contudo, há de ressaltar que, apesar do uso do material concreto manipulativo utilizado – que envolveu processos de trabalho pautados nos princípios socioambientais relevantes à vida no planeta –, qualquer MDP é objeto, mesmo quando planejado pelos professores e, como objeto, não pode ser entendido como um fim, mas como um meio, um recurso, pronto para ser descartado, substituído, modificado, pois o sujeito é o principal e o meio – ambiente em que vive – é essencial.

O caráter investigativo que propusemos, mereceu destaque, principalmente por valorizarmos e incentivarmos a coletividade e a dialogicidade. É preciso que o aluno fale e seja protagonista no processo, constituindo-se um autor.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2. Reimp. São Paulo: Edgard Blücher, 1978 [1974].

BRASIL. **Ministério da Educação e do Desporto, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais**. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: introdução. Brasília, 1998.

BRITO, Eugênio Oscar de. **Dicionário de Matemática** MAGALHÃES, Álvaro (org.). Porto Alegre: Globo, 1969. (Enciclopédia Globo para os cursos Fundamental e Médio).

BROLEZZI, Antonio Carlos. **A arte de contar**: história da Matemática e Educação Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2014. (Coleção História da Matemática para professores).

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1984 [1948].

CHAVES, Rodolfo; ZOCOLOTTI, Alexandre Krüger. Projeto de Pesquisa Pitágoras: em (e além do) teorema. **Instituto Federal do Espírito Santo**. Vitória: Ifes, 2017.

CHAVES, Rodolfo. (des)contínuos entre Modelo dos Campos Semânticos (MCS) e Etnomatemática. Plano de trabalho (Pós-doutorado) no **PPG Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física.** Área de concentração Educação Matemática, linha de pesquisa de Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus fundamentos filosóficos, históricos e epistemológicos. Santa Maria: CCNE – UFSM, 2015.

CHAVES, Rodolfo. Por que anarquizar o ensino de matemática intervindo em questões socioambientais? 2004. 223 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – **PGEM, IGCE, UNESP-Rio Claro**.

CHAVES, Rodolfo; RODRIGUES, Caio Lopes. Produções de significados matemáticos em obras de Leonardo da Vinci. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 04, n. 02, p.128-167, 2014.

DAVYDOV, Vasily Vasilovich. O que é atividade de estudo. Trad. PRESTES, Ermelinda**. Revista Escola Inicial**, n.7, ano 1999.

DEZA, Elena; DEZA, Michel Marie. ***Figurate numbers***. Londres – UK: British Library, 2012.

DOCZI, GYÖRGY. O poder dos limites: harmonias e proporções na natureza, arte e arquitetura. 6. ed. São Paulo: Mercuryo Novo Tempo, 2012.

DOMINGUES, Hygino Huguеros. **Fundamentos de Aritmética**. 2. ed. rev. Florianópolis: Editora da UFSC, 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

GUNDLACH, Bernard H. Trad.: DOMINGUES, Hygino Huguеros. **História dos números e numerais**. v. 1. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula).

HUISMAN, Denis. **Dicionário dos filósofos**. São Paulo: Martins Fontes, 2001. p. 765-772.

LEONTIEV, Alexis Nikolaevich. ***Actividad, conciencia y personalidad***. México: Cartago, 1984.
LEONTIEV, Alexis Nikolaevich. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Horizonte Universitário, 1978.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 3. ed. Campinas: Papirus, 1997.

LINS, Romulo Campos. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimento e notas de teorizações.

In: ANGELO, Cláudia Laos et al (org). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história. São Paulo: Micrograf, 2012, p. 11-30.

LINS, Romulo Campos. Matemática, monstros, significados e Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. (orgs.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p.92-120.

LINS, Romulo Campos. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. (Seminários DEBATES Unesp).

MARQUES, Sofia Cardoso. **A descoberta do Teorema de Pitágoras**. São Paulo: Livraria da Física, 2011. (Coleção História da Matemática para Professores).

MELLO e SOUZA, Júlio Cézar. **Histórias e fantasias da Matemática**. (?): Getulio M. Costa, 1939.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Vygotsky**: aprendizado e desenvolvimento – um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1997. (Pensamento e ação no magistério).

PICKOVER, Clifford Alan. **O livro da Matemática**: de Pitágoras à 57ª dimensão, 250 marcos da história da matemática. Kerkdriel: Librero, 2009.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 2. reimp. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAD, Ligia Arantes. Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. 371 p. Tese de Doutorado (em Educação Matemática), **Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto deGeociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista**. Rio Claro,1999.

SILVA, Amarildo Melchiades da. Impermeabilização no Processo de Produção de Significados para a Álgebra Linear. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. et al (org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. p. 79-90.

TAHAN, Malba. **Antologia da Matemática**. v. 1. 3. ed. São Paulo: Saraiva, 1967.

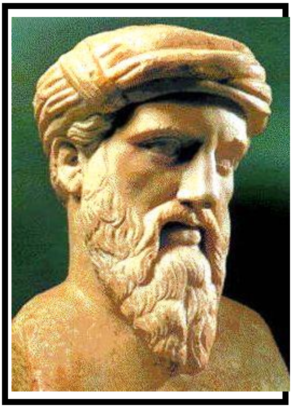
TAHAN, Malba. **Diabruras de Matemática**: problemas curiosos e fantasias aritméticas. 2. ed.

São Paulo: Saraiva, 1966. (Maravilhas da Matemática).

TAHAN, Malba. **Os números governam o mundo**: folclore da Matemática. Rio de Janeiro: Ediouro, 1972 [1965].

VYGOTSKY, LEV SEMYONOVICH. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

(I) Pitágoras de Samos (±582 – ±507 AEC)



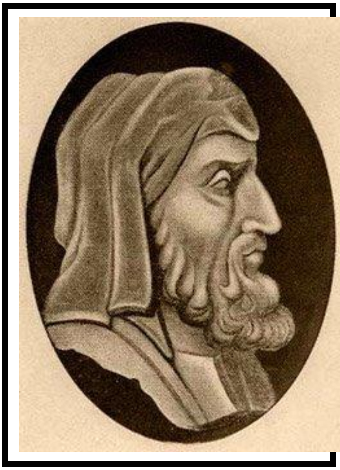
A respeito de Pitágoras de Samos há um ambiente de mitos, lendas, feitos e estórias e muito se fala a respeito de sua possível existência, ou não. O nome Pitágoras significa *o anunciador pítico* (*Pythios*), filho de Partênis, ou Pythais, a pitiana, que assim fora designada por Mnesarcus, pai carnal do filósofo de Samos, em homenagem à sacerdotisa Pítia, de Delfos.

Para uns, Pitágoras foi uma lenda, uma fantasia, um ser misterioso, um semideus, um ícone da mitologia, tido como filho de Apolo e sua vida estava envolta em uma infindável trama de lendas; para outros, foi um ser biológico com excepcional destaque entre os filósofos gregos ligados à Matemática. A respeito de sua existência (biológica) pouco podemos dizer, mas há comprovação da existência da escola pitagórica e do pitagorismo.

A literatura relativa à História da Matemática e à Filosofia atribuem a Pitágoras, ou à escola pitagórica, ou ao pitagorismo a origem das palavras *filosofia* (*φιλοσφια*– amor do saber) e *matemática* (*μαθηματικα* – aquilo que se aprende), indicando a atividade intelectual que se praticava na escola pitagórica,

com o propósito de “ir além da pura teoria, pois a intenção era libertar a alma imortal da cadeia de suas reencarnações, e constituir regimes políticos de tipo conservador, dirigido por elites culturais” (CATTANEI, 2005, p. 24).
Pitágoras – mito, semideus ou humano – segundo Chaves (2004) é merecedor de muitos comentários, seja pelas concepções filosóficas, pelo conteúdo aritmético de sua doutrina ou por suas ambições políticas, de querer à frente do Estado um governo científico que pudesse ser colocado tão alto como o sacerdócio egípcio. Para ele, saber é poder e isso, segundo o referido texto, talvez este seja um vestígio da gênese do mito positivista da cientificidade, que sustenta que “o saber gera o poder”.

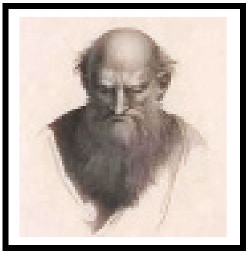
(II) Lúcio Méstrio Plutarco de Queroneia (46-120)



Plutarco, também conhecido como Lúcio Méstrio Plutarco, foi um historiador, biógrafo, ensaísta e filósofo médio platônico grego, conhecido principalmente por suas obras *Vidas Paralelas e Marália.* Pertenceu a uma família proeminente em Queroneia onde nasceu. Produziu uma vasta obra literária, com aproximadamente duzentos e trinta livros. Durante sua vida percorreu a Ásia e o Egito e, por um tempo, instalou-se em Roma. Seus estudos em Matemática e Filosofia advêm da Academia de Atenas. Plutarco era um platônico, mas também era aberto à influência dos peripatéticos, tendendo em alguns detalhes até mesmo ao estoicismo, apesar de sua polêmica contra os princípios estóicos. Ele rejeitou em absoluto o epicurismo. Interessado em questões morais e religiosas, atribuiu pouca importância às questões teóricas e duvidou da possibilidade de algum dia estas questões serem resolvidas. Sobre os números figurados, dentre outros desenvolvimentos, Plutarco estabeleceu a seguinte relação: oito vezes qualquer número triangular mais 1 é um número quadrado.

Fonte: adaptado de <https://pt.wikipedia.org/wiki/Plutarco>

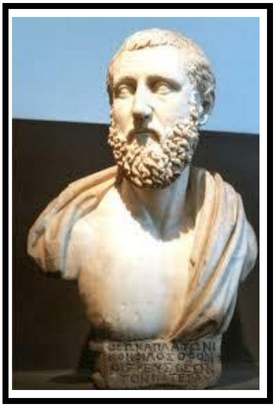
(III) Nicômaco de Gerasa (60-120)



Escritor, filósofo, aritmético e pregador neopitagórico. Autor de *Introdução à Aritmética* (*Arithmetike Eisagoge*), obra que aborda Teoria dos Números, de grande relevância entre os historiadores matemáticos. Nicômaco reconhece “quatro métodos científicos” ou “ciências irmãs”: a Aritmética, a Música, a Geometria e a Astronomia, constituintes do *quadrivuim* pitagórico. A respeito da Aritmética defendia “que preexiste às outras na mente do deus artesão”. *Introdução à Aritmética* é o primeiro trabalho que trata da Aritmética separada da Geometria e nessa obra Nicômaco traz uma ampla discussão envolvendo os números triangulares e quadrangulares, de acordo com Gundlach (1992), embora, nos meios acadêmicos admite-se que pouco deste trabalho seja de fato criação de Nicômaco. Seu trabalho reuniu os resultados de gerações anteriores de maneira clara e concisa.

Fonte: adaptado de
<http://biografiaecuriosidade.blogspot.com/2014/11/biografia-de-nicomaco-de-gerasa.html>

(IV) Téon de Esmirna (70-135)



Filósofo e matemático grego, cujas obras sofreram influências da escola pitagórica. Muito pouco se sabe sobre sua vida. Mas é sabido da existência de um busto esculpido por seu filho, descoberto em Izmir, cidade mais ocidental da Turquia, hoje conhecida como Esmirna, e os historiadores de Arte o datam por volta do ano 135 d. C. Ptolomeu cita Téon várias vezes em seu *Almagesto,* mas é incerto se tais referências destinam-se a Téon de Esmirna. Todavia, é sabido que Téon escreveu vários comentários sobre as obras de matemáticos e filósofos de sua época, incluindo obras que envolviam a filosofia de Platão; contudo, parte desses trabalhos perderam-se. O mais importante, ainda preservado, é "*Sobre as matemáticas utilizadas para o entendimento de Platão*", tido como uma compilação da Matemática grega. Sua dedicação ao apresentar os saberes já estabelecidos e sua abordagem detalhada em relação às fontes primárias é, em parte, o que o torna um documento histórico valioso. A primeira seção de, "*Sobre as matemáticas utilizadas para o entendimento de Platão*", divide-se em duas partes: a primeira refere-se a números; a segunda aborda música e harmonia. A seção de foco matemático se concentra no que, hoje, é conhecida como a Teoria dos Números: números pares e ímpares, números primos, números perfeitos, números abundantes e outras propriedades semelhantes, atribuídas aos pitagóricos.

Fonte: adaptado de <https://es.wikipedia.org/wiki/Te%C3%B3n_de_Esmirna>

(V) Diofanto de Alexandria (210-290)

Diofanto de Alexandria (em grego clássico: Διόφαντος ʾΑκεξανδρεύς), matemático grego, nascido entre 201 e 214 e falecido entre 284 e 298, é considerado por muitos como "o pai da Álgebra" e, para muitos historiadores, desempenha um papel semelhante ao que Euclides (360-295 a.C.) em relação à Geometria e Ptolomeu (85–165) em relação à Astronomia. Pouco se sabe a respeito de sua vida, mas em seus escritos ele cita Hípsicles (240-170 a.C.) e, por outro lado, Teón de Alexandria (335–395) o cita como um clássico, sendo possível marcar limites temporais que permitem situar sua existência entre o século II a.C. e o princípio do século IV d.C. da nossa era. Pode-se considerar Diofanto como contemporâneo de Papus (290–350) e pertencendo à segunda metade do século III. Por outro lado, na parte da Aritmética da mutilada obra de Papus não é mencionado o nome de Diofanto, sendo citados, não só diversos outros geômetras da época, mas também quase todos os matemáticos do seu tempo: Héron (10–75), Nicômaco

(60–120), Téon e Ptolomeu. Diofanto pode ser, no entanto, um pouco posterior a Papus. Sua principal obra é *Aritmética*, composta de treze livros, como relata o próprio Diofanto no prefácio. *Aritmética* é apresentada como uma coleção de problemas sob forma de exemplos numéricos específicos, foi encontrada em Veneza, por Johann Müller (matemático e astrônomo alemão) em 1464 e a primeira tradução se deve a Wilhelm Holzmann (1532-1576). *Aritmética* de Diofanto é um trabalho completamente diferente dos demais trabalhos gregos da época, assemelhando-se aos trabalhos "algébricos" dos babilônios, mas revelando, relativamente a eles, um grande avanço nesta área.

Fonte: adaptado de
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Diofanto_de_Alexandria>

(VI) Leonardo Fibonacci (1170-1250)

Fibonacci, diminutivo de *fillius Bonacci* (filho de Bonacci), também conhecido como Leonardo de Pisa ou Leonardo Pisano ou ainda Leonardo Bigollo, nasceu em Pisa (Itália). Foi reconhecido como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média e também considerado o mais talentoso matemático ocidental de sua época. Ficou conhecido pela sequência que leva seu nome e pela sua participação na introdução dos algarismos hindu-arábicos na Europa, fruto das várias viagens que fizera ao Oriente e ao Norte de África, onde esse sistema de numeração era já largamente usado. Nessas viagens também teve acesso à obra de *al-Khwarismi* e assimilou numerosas informações aritméticas e algébricas compilando-as em seus livros. Fibonacci dedicou-se a estudar as operações elementares, assim como os números naturais, a decomposição de números em fatores primos, as frações e as equações, dentre outros assuntos.

Como outros matemáticos de seu tempo, contribuiu para o renascimento das ciências exatas após a decadência do último período da antiguidade clássica e do início da Idade Média, mas Fibonacci se destacou ao escrever o *Liber Abacci*, em 1202 (atualizado em 1254), que para muitos é a primeira obra importante sobre Matemática desde Eratóstenes; isto é, mais de mil anos depois. Foi em *Liber Abacci* que Fibonacci apresentou a sequência que levou seu nome, embora tal sequência já tivesse sido descrita por matemáticos indianos.

Fonte: adaptado de
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci>

(VII) Michel Stifel (1487-1567)

Michael Stifel, ou ainda *Styfel, Stieffel, Stiefel*, foi um matemático alemão. Desenvolveu o logaritmo e inventou uma breve tabela logarítmica décadas antes de John Napier. Publicou *Arithmetica Integra* em 1544, seu trabalho mais famoso. Stifel foi criado pela Igreja e estudou na Universidade de *Wittenberg*. Entrou no monastério de *Augustinian*, em Esslingen, e foi ordenado em 1511. Foi expulso do monastério em 1522, por acreditar que, de certa forma, a Igreja retinha dinheiro dos mais pobres e não se sentir bem com relação a isso. Procurou, então, refúgio com luteranos e viveu na própria casa de Lutero por um tempo. Lutero conseguiu um cargo de pastor para Stifel, mas ele cometeu o erro de querer “prever” o fim do mundo. Quando perceberam que ele estava errado, foi preso e demitido de seu cargo. Em 1535 mudou-se para uma paroquia em Holzdorf, e permaneceu lá por 12 anos. Em 1547

Stifel foi para a Prússia, onde lecionou Matemática e Teologia na universidade de Königsberg, voltando três anos mais tarde para a Saxônia. Em 1559, conseguiu um cargo na universidade de Jena, onde lecionou Aritmética e Geometria, embora sua pesquisa fosse sobre Aritmética e Álgebra. Desenvolveu logaritmos independentemente de Napier usando uma aproximação totalmente diferente. Em *Arithmetica Integra* apresentou uma regra para o binômio de Newton no qual mencionava que "a soma de dois números binominais de mesmo numerador e denominadores consecutivos é um número binominal cujo numerador possui uma unidade a mais que os numeradores das parcelas e o denominador é o maior dos denominadores das parcelas". Essa regra ficou conhecida como Relação de Stifel.

Fonte: adaptado de <https://pt.wikipedia.org/wiki/Michael_Stifel>

(VIII) Girolamo Cardano (1501-1576)

Girolamo Cardano, polímata italiano, escreveu mais de duzentos trabalhos sobre Medicina, Matemática, Física, Filosofia, Religião e Música. Na Matemática foi o primeiro a introduzir as ideias gerais da teoria das equações algébricas. Seu gosto por jogos o levou a desenvolver as primeiras regras da teoria da probabilidade. Ele confessa em sua autobiografia, *De Propria Vita*, ser viciado em jogos e conta que havia jogado xadrez por quarenta anos e dados por vinte e cinco. Na área de Medicina foi o primeiro a descrever clinicamente a febre tifoide. Em relação à Física estudou a respeito das diferenças entre energia elétrica e magnetismo e, mesmo antes de ter apresentado provas de sua aptidão para o estudo das ciências naturais e da Matemática, já possuía reconhecimento como astrólogo. Em 1526 escreveu *Liber de Ludo Aleae* (Livro dos jogos de azar) e apresentou a resolução de vários problemas de enumeração, retomando problemas levantados por Luca Pacioli. Entretanto, a obra de Cardano só veio a ser publicada em 1663. Em 1534 obteve a cadeira de Matemática em Milão, mas continuou a estudar Medicina e a desenvolver suas práticas de Astrologia.

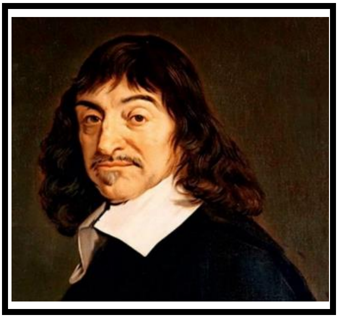
Fonte: adaptado de
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano>

(IX) Bachet de Méziriac (1581-1638)

Claude-Gaspard Bachet de Méziriac, teólogo, matemático, poeta, latinista e tradutor francêsfoi aluno e amigo do jesuíta e matemático francês *Jacques de Billy* (1602-1679), no Colégio dos Jesuítas da cidade de *Rheimbs*. Poliglota, Méziriac falava hebraico, grego, latim, italiano e espanhol; tornou-se membro da Ordem dos Jesuítas em 1601 e lecionou no Colégio Jesuíta de Milão antes de renunciar e fazer seus votos para dedicar-se somente à tradução dos poetas latinos e dos matemáticos gregos. Méziriac foi autor de um manuscrito intitulado *Éléments arithmétiques* (Elementos de Aritmética) e de uma tradução greco-latina do texto *Aritmética de Diofanto de Alexandria*, publicada em 1621. Méziriac foi um dos primeiros escritores a discutir a solução das *equações indeterminadas* por meio das frações contínuas. Ele também trabalhou com a Teoria dos Números e desenvolveu um método para construir quadrados mágicos.

Fonte: adaptado de <https://pt.wikipedia.org/wiki/Bachet_de_M%C3%A9ziriac>

(X) René Descartes (1596-1650)



René Descartes foi um filósofo, físico e matemático francês. Durante a Idade Moderna, também era conhecido por seu nome latino Renatus Cartesius. O interesse de Descartes pela matemática surgiu cedo, no *College de la Flèche*, escola do mais alto padrão, dirigida por jesuítas, na qual ingressara aos oito anos de idade. Esse interesse se deu por uma razão muito especial e que já revelava seus pendores filosóficos: a certeza proporcionada pelas demonstrações ou justificativas matemáticas. Aos vinte e um anos de idade, depois de frequentar rodas matemáticas em Paris (e em outras cidades), já graduado em Direito, ingressa voluntariamente na carreira das armas, uma das poucas opções "dignas" que se ofereciam a um jovem como ele, oriundo da nobreza menor da França. Durante os quase nove anos que serviu em vários exércitos, não se sabe de nenhuma proeza militar realizada por Descartes.

A Geometria Analítica de Descartes foi apresentada em 1637 no pequeno texto chamado *Geometria*, um dos três apêndices do *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (Discurso do método para bem conduzir a própria razão e procurar a verdade nas ciências), prefácio de uma série de ensaios científicos (Dióptrica, Meteoros, Geometria), que só no século XIX passaram a ser publicados independentemente. O Discurso de Descartes é considerada uma obra emblemática de filosofia rigorosa, tida como o marco inicial da filosofia moderna. Nela, Descartes defende o método matemático como modelo à aquisição de conhecimentos em todos os campos.

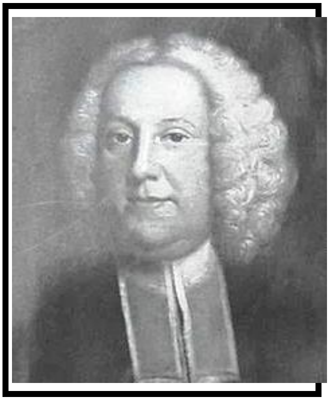
Fonte: adaptado de Chaves (2004) e
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes>

(XI) Pierre de Fermat (1601-1665)

Pierre de Fermat, magistrado, matemático entusiasta e cientista francês, desenvolveu uma Geometria Analítica, em 1629, apresentando suas ideias num trabalho não publicado intitulado *Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos*, que circulou tão somente na forma de manuscrito. Nesse trabalho Fermat introduziu a ideia de eixos ortogonais e descobriu as equações gerais da reta, circunferência e equações mais simples para parábolas, elipses e hipérboles e, seguidamente, demonstrou que toda equação de 1º e 2º grau pode ser reduzida a um desses tipos. Tais demonstrações não constam dos ensaios de Descartes, apesar dele ter tido acesso a essa obra de Fermat vários meses antes de publicar sua obra intitulada *Geometria*, de 1637. Conhecido como o *príncipe dos amadores*, Fermat, formalmente, nunca teve a Matemática como atividade principal de sua vida. Devido à sua dedicação à magistratura, para ele, a Matemática era apenas lazer e, ainda assim, foi considerado por Blaise Pascal o maior matemático de seu tempo.

Fonte: adaptado de
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat>

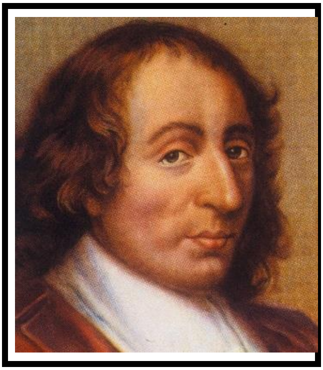
(XII) John Pell (1611-1685)



John Pell foi um matemático inglês que tornou-se um talentoso linguista durante sua carreira universitária e, mesmo antes de se formar (em 1629), mantinha correspondência com Henry Briggs, além de outros matemáticos. Em seus estudos em Matemática, ele se dedicou à expansão do escopo da Álgebra na teoria das equações e em analisar tabelas matemáticas. Ele é mais lembrado pela equação indeterminada $ax^2 + 1 = y^2$ que é conhecida como *equação de Pell*. Como estudioso, produziu grande quantidade de material adicional sobre Teoria dos Números.

Fonte: adaptado de https://en.m.wikipedia.org/wiki/John_Pell

(XIII) Blaise Pascal (1623-1662)



Blaise Pascal foi matemático, físico, inventor, filósofo e teólogo católico francês. Muito prodigioso e de talento precoce para as ciências físicas, levou sua família a Paris, onde se consagrou ao estudo da Matemática. Pascal contribuiu decisivamente para a criação, à época, de dois novos ramos da Matemática – a Geometria Projetiva e a Teoria das probabilidades – e também se dedicou ao Cálculo Infinitesimal, estudando sequências, tendo enunciado o princípio da recorrência matemática, também conhecida como técnica da recursividade. O Cálculo Diferencial e Integral de Newton e Leibniz, base da Física Clássica, traz como referência um tratado publicado por Blaise Pascal sobre os senos num quadrante de um círculo onde buscou a integração da função seno, que também viria a ser a base da Matemática Moderna. Pascal continuou a influenciar a Matemática ao longo de sua vida. Em seu *Traité du triangle arithmétique*

(*Tratado sobre o triângulo aritmético*), de 1653, Blaise apresentou uma apresentação tabular conveniente para os coeficientes binomiais, hoje conhecido como triângulo de Pascal. Em 1654, a pedido de um amigo que se interessava por problemas de jogos, ele correspondeu-se com Pierre de Fermat para tratar desse tema e, a partir dessa colaboração, desenvolver a teoria matemática das probabilidades. Uma importante contribuição de Pascal à Filosofia da Matemática veio com sua obra *De l'Esprit géométrique* (*Do Espírito Geométrico*), originalmente escrito como prefácio para um livro de Geometria para as *Petites écoles de Port-Royal* (*Escolinhas de Port-Royal*).

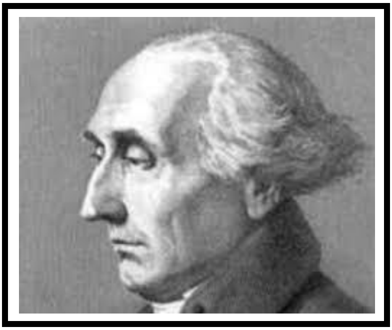
Fonte: adaptado de <https://pt.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal>

(XIV) Leonhard Eüler (1707-1783)

Leonhard Paul Eüler foi um matemático e físico suíço, de língua alemã e passou sua vida principalmente entre a Rússia e a Alemanha. Desenvolveu importantes trabalhos em várias áreas da Matemática como, por exemplo, o Cálculo e a teoria dos grafos. Também introduziu várias terminologias peculiares à Matemática moderna e também notações matemáticas relativas à Análise Matemática, como também o conceito de função matemática. Euler é considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII e também é tido como um dos grandes matemáticos de todos os tempos, assim como Isaac Newton, Arquimedes e Carl Friedrich Gauss. Eüler trabalhou em quase todas os ramos da Matemática: Geometria, Cálculo, Trigonometria, Álgebra e Teoria dos Números.

Fonte: adaptado de <https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler>

(XV) Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)



Joseph Louis Lagrange, matemático italiano, caiu nas graças de Napoleão Bonaparte que fez dele senador, conde do império e grande oficial de sua Legião de Honra. Aos dezesseis anos exercia a função de professor de Matemática na Escola Real de Artilharia de Turim. Desde o início de sua carreira matemática projetou-se como um analista, mas não como um geômetra; aos vinte e três anos aplicou o Cálculo Diferencial à teoria da probabilidade, indo além de Isaac Newton com um novo começo na teoria matemática do som. Foi o primeiro a formular o teorema do valor médio.

Fonte: adaptado de <https://pt.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange>

(XVI) Andrien-Marie Legendre (1752-1833)

Adrien-Marie Legendre, matemático francês, contribuiu sistematicamente com a Estatística, a Teoria dos Números, a Álgebra abstrata e Análise matemática. Foi eleito membro da *Royal Society* em 1789. Na Teoria dos Números, conjecturou a lei da reciprocidade quadrática, posteriormente provada por Gauss e, em adição, o símbolo de Legendre tem esse nome em sua homenagem. Ele também desenvolveu um trabalho pioneiro envolvendo a distribuição dos números primos, e também a aplicação da Análise à Teoria dos Números. Em 1796, sua conjectura do teorema dos números primos foi provado com rigor por Jacques Hadamard e por Charles-Jean de *La Vallée Poussin*, em 1898. Legendre produziu uma quantidade relevante de trabalhos envolvendo funções elípticas, incluindo a classificação das integrais elípticas. A ele também é atribuído o nome dos polinômios de Legendre, as soluções da equação diferencial de Legendre, que ocorrem com frequência na Física e em aplicações de engenharia, como, por exemplo na Eletrostática. Nos meios acadêmicos, Legendre possui reconhecimento por sua autoria em *Éléments de géométrie*, publicado em 1794, texto básico sobre o tema durante aproximadamente 100 anos. Essa obra reorganizou e simplificou muitas das proposições de Os Elementos, de Euclides.

Fonte: adaptado de <https://pt.wikipedia.org/wiki/Adrien-Marie_Legendre>

(XVII) Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Johann Carl Friedrich Gauss, matemático, astrônomo e físico alemão, realizou muitas contribuições em várias áreas das ciências, dais quais destacamos, a Teoria dos Números, Estatística, Análise matemática, Geometria diferencial, Geodésia, Geofísica, Eletrostática, Astronomia e Ótica. Entre os matemáticos Gauss era conhecido como o mais notável dos matemáticos, ou *um grande matemático desde a antiguidade*, ou como o *princeps mathematicorum* (em latim, *o príncipe da Matemática*). De renome em muitas áreas da Matemática e das Ciências, também foi muito influente na História da Matemática. Gauss considerava a Matemática como "*a rainha das ciências*".

Aos onze anos, ainda nas classes escolares, o jovem Gauss calculou o centésimo termo da sequência de números figurados triangulares; aos doze, debruçava-se desconfiadamente sobre os fundamentos da Geometria euclidiana; aos dezesseis, vislumbra uma Geometria diferente da de Euclides e um ano mais tarde, em relação à Teoria dos Números, iniciou criticamente provas que tinham sido aceitas por seus antecessores e decidiu então preencher as lacunas que tinham sido deixadas nessa área. A Aritmética, foi o campo de seus primeiros triunfos e configurou-se como ramo favorito de seus estudos. Preocupado com o rigor de suas provas matemáticas, Gauss desenvolveu uma fecunda e engenhosa matemática que nunca foi superada, mas nunca reivindicou autoria das demonstrações a que ele se antecipara (algumas de grande relevância nos ramos da Matemática no século XIX). Em seu diário foram deixadas anotações pessoais, mas de cunho matemático, como, por exemplo, no dia 10 de julho de 1798 há a seguinte enunciação: *Eureka! Todo número inteiro positivo é a soma de três números triangulares*.

Fonte: adaptado de
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss>

(XVIII) Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Augustin-Louis Cauchy, matemático francês, responsável por introduzir o rigor na Análise Matemática, também apresenta contribuições à análise combinatorial. Na teoria das equações, partindo do ponto central do método de Lagrange, tornou-a abstrata e sistematizou a criação da teoria dos grupos. Por não se interessar pelas eventuais aplicações do que produzia, desenvolveu para si mesmo um sistema abstrato. Antes dele poucos se preocuparam com simples manipulações da Álgebra. Em análise infinitesimal, criou uma moderna noção de continuidade para as funções de variável real ou complexa. Mostrou a importância da convergência das séries inteiras, às quais seu nome está associado. Definiu de forma mais precisa as noções de limite e integral definida, transformando-as em instrumento ao estudo das funções complexas. Suas abordagens a respeito da teoria das equações diferenciais foram inovadoras, demonstrando a existência de unicidade das soluções, quando definidas as condições de contorno.

Fonte: adaptado de <https://pt.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy>

(XIX) Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

Carl Gustav Jakob Jacobi foi um matemático judeu, o primeiro a ser nomeado professor em uma universidade alemã, que muito contribuiu para o desenvolvimento da teoria dos números, da dinâmica, das funções elípticas e das equações diferenciais. Seu professor, Heinrich Bauer, percebendo que Jacobi tendia à genialidade como matemático, deixou que ele estudasse sozinho, depois de se ter ele rebelado, recusando o aprendizado da Matemática através de um roteiro e uma regra. Os trabalhos de Leonhard Eüler e Lagrange contribuíram para o seu desenvolvimento em Álgebra e no Cálculo, e também permitiram que progredisse na teoria dos números. Seu autodidatismo propiciou-lhe seu primeiro trabalho em funções elípticas. Permaneceu estudando em Berlim de abril de 1821 a maio de 1825. Durante os primeiros dois anos dividiu seu tempo, equitativamente, entre Filosofia, Filologia e Matemática. Em agosto de 1825 recebeu seu grau de Ph.D.

sobre frações parciais e tópicos relacionados. Em 1826 tornou-se professor na Universidade de Königsberg. Em 1827 algumas de suas pesquisas a respeito da teoria dos números (relativas à reciprocidade cúbica), suscitou a admiração deGauss que interviu junto ao Ministério de Educação, que promoveu Jacobi, na época com vinte e três anos, para um posto acima de seus colegas. Em 1849, aos quarenta e cinco anos, era, com a exceção de Gauss, o mais famoso matemático na Europa.

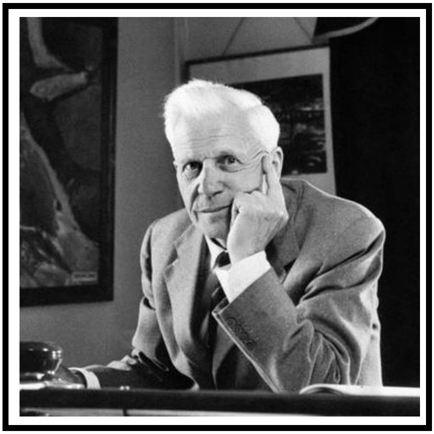
Fonte: adaptado de <
https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Gustav_Jakob_Jacobi>

(XX) Wacław Sierpiński (1882-1969)

Frequentou a escola em Varsóvia, em um período de ocupação russa da Polônia. Lá seu professor observou sua dedicação à Matemática e, apesar das dificuldades advindas do momento político vivido, Sierpiński entrou no Departamento de Matemática e Física da Universidade de Varsóvia em 1899. Um de seus professores, Voronoy (Georgy Voronoy – matemático ucraniano conhecido pelo *diagrama de voronoy*), o atraiu com um trabalho sobre teoria dos números, o que levou Sierpiński a ser premiado com uma medalha de ouro por sua dissertação a respeito deste trabalho, num concurso realizado pela universidade. Sierpiński se formou em 1904 e trabalhou por algum tempo como professor de Matemática e Física em uma escola para meninas em Varsóvia. Logo depois decidiu ir à Cracóvia para fazer seu doutorado. Na Universidade Jagiellonian, ele assistiu a palestras de Zaremba (Stanislaw Zaremba – matemático polonês que trabalhou com equações diferenciais parciais e análise clássica) sobre Matemática, estudando além de Astronomia e Filosofia. Ao doutorar-se foi nomeado para a Universidade de Lvov em 1908. Em 1907 Sierpiński se interessou pela teoria dos conjuntos e iniciou seus estudos nessa área. Também esteve muito envolvido com o desenvolvimento da Matemática na Polônia. Ele foi homenageado com a eleição para a Academia Polonesa em 1921 e nomeado reitor da faculdade da Universidade de Varsóvia no mesmo ano. Em 1928, tornou-se vice-presidente da Sociedade Científica de Varsóvia, e depois no mesmo ano eleito presidente dela. Foi o autor de setecentos e vinte e quatro artigos e cinquenta livros. Aposentou-se em 1960 como professor da Universidade de Varsóvia, mas continuou a dar seminários sobre teoria dos números.

Fonte: adaptado dehttp://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Sierpinski.html

(XXI) Barnes Wallis (1887-1979)



Cientista, inventor e engenheiro aeronáutico, ficou conhecido principalmente por inventar uma bomba usada pela Força Aérea Real Britânica, para atacar as represas de Mohne, Eder e Sorpe na região do Ruhr na Alemanha durante a Segunda Guerra Mundial. Ele projetou outras bombas, incluindo: o Tall Boy de 6 toneladas e o terremoto de Grand Slam de 10 toneladas (que foram usados para bombardear alvos inimigos, incluindo o navio de guerra Tirpitz). Tornou-se membro da Royal Society em 1954 e recebeu o título de Cavaleiro por seu trabalho e serviço a seu país, em 1968. Recebeu muitos elogios em sua vida e foi recompensado com um Prêmio do Governo de 10.000 libras, que concedeu a sua antiga Escola.

Fonte: adaptado de < https://www.geni.com/people/Sir-Barnes-Wallis/6000000014525836904>

(XXII) George Pólya (1887-1985)

George Pólya (Pólya György, em húngaro) foi um matemático, professor de Matemática de 1914 a 1940, no *ETH Zürich*, na Suíça, e de 1940 a 1953, na *Stanford University*. Pólya permaneceu como professor emérito de *Stanford* o resto de sua vida e carreira. Trabalhou com uma variedade de tópicos matemáticos, incluindo séries, teoria dos números, Análise Matemática, Geometria, Álgebra, Combinatória e Probabilidade. Também foi indubitável sua contribuição à heurística em Educação Matemática. Foi um ótimo estudante no ensino secundário apesar da escola que frequentava valorizar muito a aprendizagem com base na memória, prática que Polya considerava monótona e sem utilidade. Licenciou-se em 1905 sendo considerado como um dos quatro melhores alunos do seu ano, o que lhe permitiu galgar uma bolsa de estudo na Universidade de Budapeste. Interessou-se por Latim, Física, Filosofia e finalmente por Matemática tendo se doutorado em 1912. Em 1924, trabalhou com *Hardy and Littlewood* em *Oxford* e *Cambridge*. Publicou a classificação em dezessete grupos dos planos de simetria. Em 1940 foi para os Estados Unidos e, em 1942, aceitou um cargo de professor na Universidade de *Stanford* onde permaneceu até à sua retirada do ensino, em 1953.

Fonte:adaptadode<https://pt.wikipedia.org/wiki/George_P%C3%B3lya>ehttp://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/polya.html

(XXIII) Vasily Vasilovich Davydov (1930-1998)

Vasily Vasilyevich Davydov, moscovita nascido em 1930. Em 1948, entrou no Departamento de Psicologia (Faculdade de Filosofia) da Universidade Estadual de Moscou. Nos estágios iniciais de seu trabalho Davydov propôs não usar o termo "desenvolvimento" aplicado a um indivíduo. O cientista decidiu substituí-lo pelo termo "formação". Davydov defendia que as instituições públicas, de uma forma ou de outra, afetam a formação do indivíduo. Consequentemente, o conceito de "desenvolvimento" é aplicado não ao indivíduo, mas à sociedade como um todo. Para ele a formação da psique do sujeito já é formação. Com base nos estudos teoria de Vygotsky, Davydov elaborou um novo programa pedagógico. Sua biografia é conhecida por aqueles que se dedicam à Psicologia educacional. Vale destacar que defendia que a pessoa é o principal sujeito da atividade criativa, mas não a única. Ele assumiu a possibilidade da existência do termo “indivíduo coletivo”.

Fonte: adaptado de
https://pt.trendexmexico.com/samosovershenstvovanie/102041-vasiliy-vasilevich-davydov-avtor-teorii-razvivayuschego-obrazovaniya.html

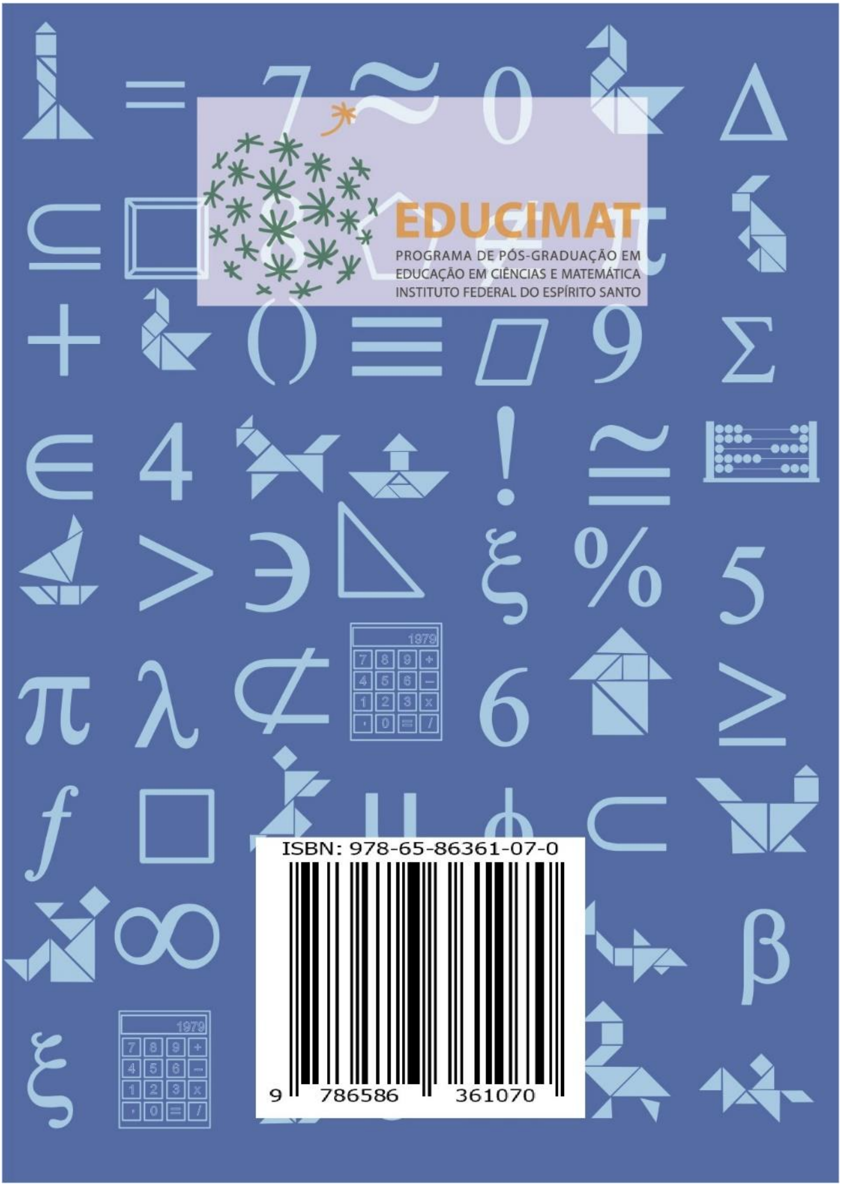
(XXIV) Joaquin Giménez (1952)

Joaquin Giménez é graduado em Matemática (1976) e PhD em Filosofia e Ciência da Educação da *Universidad Autónoma de Barcelona*, onde é membro honorário. É titular da Cadeira de Didática da Matemática da *Universidad Rovira y Virgili* (Tarragona, Catalunha – Espanha) e especialista em Educação Matemática, com interesse de pesquisa envolvendo a produção do conhecimento matemático em diferentes contextos culturais, o desenvolvimento do raciocínio matemático em estudantes, a contextualização e a avaliação em Matemática escolar. Professor associado das universidades de Pilsen (República Tcheca), de Maribor e Liubliana (Eslovênia) é membro do Comitê Internacional da *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amelloration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM).

(XXV) Romulo Campos Lins (1955 – 2017)

Romulo Campos Lins é licenciado pelo Instituto de Matemática, IME, da Universidade de São Paulo, USP (1986) e doutorado em Educação Matemática pela *University of Nottinngham*, UK (1992). Foi professor Livre Docente da UNESP de Rio Claro, onde trabalhou por vinte e cinco anos no Departamento de Matemática e no Programa de Pós-Graduação Matemática (PPGEM). É reconhecido internacionalmente por seus estudos a respeito do pensamento algébrico e também por ter elaborado o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), um modelo epistemológico que não se restringe a uma teoria a ser estudada, mas uma teorização a ser adotada. A partir do MCS vislumbrava a possibilidade de ir além do "acertar" ou "errar", ou como dizia:

> *Eu tinha muitas inquietações e perguntas relacionadas à sala de aula, sempre coisa de professor mesmo, e que os autores que eu lia não me ajudavam a tratar. Em particular, queria dar conta de caracterizar o que os alunos estavam pensando quando "erravam", mas sem recorrer a esta ideia do erro.* (LINS, 2012, p. 11).


EDUCIMAT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
ISBN: 978-65-86361-07-0
9 786586 361070