

UFRRJ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

$\{\sqrt{1}\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\}$ racional ou irracional?

Guia didático
ISABELA ALCANTARA DO NASCIMENTO
Orientadora: Profª Dora Soraia Kindel

2020

APRESENTAÇÃO

Esse guia didático é resultante de uma dissertação de Mestrado Profissional na linha de na linha de Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática. Tal dissertação prevê como objetivo apresentar um conjunto de tarefas sobre o número irracional que contribuam para a promoção de discussões a respeito da existência dos números irracionais em sala de aula na Educação Básica.

Este material, foi aplicado em um grupo de estudantes do curso de matemática e cada uma das atividades analisadas antes que a segunda fosse aplicada, sofrendo assim adaptações para atender a demanda do grupo. Desta forma, as situações aqui apresentadas apresentam um possível caminho para o estudo dos números irracionais tendo como base aqueles representados na forma de raiz, considerando que os radicandos sejam números naturais. Isto é, \sqrt{n} , $n \in N$.

A apresentação oferece ao leitor o sabor do contexto sobre como a autora, Isabela Alcantara sob a orientação de Dora Soraia, faz um estudo de caso com alunos da Licenciatura em Matemática de uma Universidade. Para tanto, ao longo do conteúdo buscou-se desenvolver uma abordagem desse conceito no dia a dia de sala de aula, com possíveis sequências de abordagem metodológicas para a prática do professor.

As atividades estão divididas em duas seções: Mundo dos Números e Descobrindo buracos nas retas e são compostas de três atividades. Na primeira seção: Atividade 1 -Ouvindo os estudantes; Atividade 2 - Os gregos e os números; Já na segunda seção: Atividade 3 - Números na reta.

Outro aspecto a ser considerado é que as atividades foram experimentadas com futuros professores com vistas a serem implementadas no Ensino Básico, que é o que desejamos.

Convidamos o leitor a experimentar esta proposta com os seus alunos.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	4
ATIVIDADES	6
Mundo dos Números	6
Descobrimos buracos na reta	8
REFERÊNCIAS	11

INTRODUÇÃO

A preocupação com a aprendizagem em Matemática desafia professores e pesquisadores a encontrarem caminhos para aproximar os estudantes dessa ciência. Nos últimos anos, minha inquietação pessoal a respeito do ensino de números irracionais me levou, sem que eu abandonasse o cenário escolar, a ingressar no mestrado para que pudesse me aprofundar nas reflexões sobre o estudo destes números.

O presente trabalho tem como proposta produzir um guia didático para os professores. O material é elaborado a partir da pesquisa sobre Números na forma de raiz considerando-se aqueles cujos radicandos sejam números naturais. Isto é, \sqrt{n} , $n \in \mathbb{N}$, com autoria de Isabela Alcantara e orientação de Dora Soraia, onde se é realizado um estudo de caso com alunos da Licenciatura em Matemática de uma Universidade. Para tanto, ao longo do conteúdo buscou-se desenvolver uma abordagem desse conceito no dia a dia de sala de aula, com possíveis sequências de abordagem metodológicas para a prática do professor. Desejamos que o material aqui elaborado integre o ensino básico e embora seja direcionado para professores de matemática desse nível, também recomendamos para alunos de licenciatura em matemática, alunos de pós-graduação em ensino ou educação matemática e professores que ensinam matemática. Tal abordagem se enquadra no novo ano do Ensino Fundamental para introduzir números irracionais como é orientado na BNCC ou como revisão durante todo o Ensino Médio.

A ação do professor que ensina Matemática, de um modo geral, se baseia nos conteúdos apresentados nos livros didáticos escolhidos por ele ou pela equipe da escola em que atua. Entretanto, muitas vezes o caminho percorrido não atende à real necessidade dos estudantes e o professor se vê com necessidade de fazer adaptações. Nesta busca por soluções, nem sempre o professor encontra respostas para as suas perguntas pois envolve modificar rotinas, conhecer novos materiais, experienciar tarefas; observar e intervir nas ações dos alunos; modificar, quando necessário, as propostas iniciais; avaliar; aprofundar o estudo sobre o tema. Desta forma a organização das tarefas foi idealizada para favorecer a dinâmica do trabalho do professor. Assim, este guia foi estruturado com as seguintes seções:

Material de apoio para a realização da tarefa; Papo aberto com o professor; Tarefa ou descrição da atividade; Objetivos; Sugestões complementares. Veja o quadro com os ícones associados à cada seção e sua respectiva explicação.






 <p>1</p>	<p>Material de apoio para a realização da tarefa</p> <p>Esse ícone lança os conteúdos que selecionamos para apoiar o trabalho indicado na ficha de atividade. São materiais que podem ser diretamente relacionados em sala de aula.</p>
 <p>2</p>	<p>Papo aberto com o professor</p> <p>Esse ícone marca o início do tópico papo aberto com o professor, onde é realizada uma conversa direcionada. Esperamos que o leitor, aproveite essas ideias, utilizando-a e aprimorando-a na sua sala de aula, acontecendo uma intersecção de ideias entre o conteúdo apresentado e as do professor.</p>
 <p>3</p>	<p>Ficha de atividade ou Descrição da atividade</p> <p>Esse ícone prevê uma ficha de atividade ou a descrição da que pode ser utilizada em sua sala de aula.</p>
 <p>4</p>	<p>Objetivo da atividade</p> <p>Essa seção descreve os objetivos pensados de cada atividade, que podem também ser incrementados por você professor.</p>
 <p>5</p>	<p>Sugestões complementares</p> <p>São materiais selecionados para aprofundar o estudo.</p>

Tabela 1 – Seções do guia didático.

Fonte: Dados da pesquisa

¹ Fonte da imagem: <https://publicdomainvectors.org/pt/vetorial-gratis/Lupa-de-desenhos-animados/47276.html>

² Fonte da imagem: <https://pixabay.com/pt/illustrations/conversa%C3%A7%C3%A3o-di%C3%A1logo-entrevista-1262311/>

³ Fonte da imagem: <https://pixabay.com/pt/illustrations/relat%C3%B3rios-arquivo-dados-san%C3%A7%C3%A3o-1420210/>

⁴ Fonte da imagem: <https://pixabay.com/pt/illustrations/criatividade-elemento-desenho-3813611/>

⁵ Fonte da imagem: <https://www.google.com/save?ved=0ahUKEwj0sdzqovTmAhVBA9QKHVVuDu4Q7XUIHw&authuser=0>

ATIVIDADES

Mundo dos Números



Para iniciar o trabalho com os estudantes sugerimos que o professor elabore situações familiares ou não familiares para saber o que os estudantes conhecem sobre os números. Entendemos como atividades não familiares, a leitura de extratos de livros ou de capítulos de livros que apresentem, por exemplo, a origem dos números, o desenvolvimento dos números ao longo da história, uma curiosidade sobre o número pi, o número de ouro, os palíndromos, ou qualquer outra ideia que ajude os estudantes a se sentirem à vontade para conversar sobre o que conhecem sobre os números.

Embora não seja muito comum a leitura de livros de literatura em ambientes de aula de matemática, sugerimos esta estratégia como forma de enriquecer a aula e investigar o que os estudantes conhecem, aprenderam sobre números. Assim, nosso



OBJETIVO é

- ✓ Investigar a resposta dos estudantes;
- ✓ Identificar de que forma os estudantes entendem números.



TAREFA 1: Ouvindo os estudantes

Consiste em ouvir o que os estudantes sabem sobre números. Você, professor, deve conduzir como julgar melhor e pode partir dos materiais aqui selecionados. A ideia desta tarefa é partir do que os estudantes conhecem. Saber um pouco sobre sua realidade, avaliar conhecimentos prévios, identificar quais as concepções de números que eles possuem. É possível saber se eles conhecem e usam outros números além dos números naturais e no caso dos números racionais que tipo de representações lhes é familiar. E para o caso do \sqrt{n} , com n maior ou igual a 1, essa representação é uma operação ou um número irracional?

A seguir apresentamos algumas sugestões de atividades que foram realizadas para este fim. Nesta atividade, queremos indicar a tarefa pronta.

Material de apoio



No trabalho realizado por Silva (2019), você encontra um questionário realizado com estudantes do 9º ano em que o professor levanta uma série de questões para tomar conhecimento do que os estudantes conhecem sobre os números em particular sobre números

irracionais. Um outro tipo de questionário você encontrará no trabalho de Rocha (2018). Para consulta, veja:

ROCHA, R. R. M.; **Sensibilização para existência dos números irracionais.**

SILVA, F. R.; **Estudantes do 9.º Ano do Ensino Fundamental Explorando Situações com os Números Irracionais *Pi* e *Phi*.**

Você também encontrará um roteiro de atividades a partir do uso de vídeos disponíveis gratuitamente no *YouTube*. Para este trabalho usamos Donald no país da Matemática; a história do número 1 e o número de ouro.

Na pesquisa realizada por Kindel (2012), você encontra o passo-a-passo de como se elaborar uma Tempestade de ideias. Ver sobre em:

KINDEL, D. S.; **Um ambiente colaborativo a distância: licenciandos dialogando sobre os infinitos.**

Sobre como elaborar atividade usando extratos de livro, você encontra exemplo no texto de Silva (2019). A partir da pesquisa realizada por ele, usamos um trecho do livro 20.000 léguas matemáticas.



TAREFA 2: Os gregos e os números.

A aritmética tem a ver com números e a geometria, com comprimentos. Para todo comprimento havia um número privilegiado, um inteiro, que o expressava. E todo inteiro, mais cedo ou mais tarde, revelaria ser o comprimento disto ou daquilo.

Para os gregos antigos, a aritmética e a geometria já eram tidas como aspectos de uma mesma realidade fundamental. Ou seja, uma cesta de figos continha um número definido de figos, e uma pedra tinha sempre um tamanho definido. Ora, o primeiro tipo de número era o inteiro. Mas, que tipo de número se poderia atribuir à pedra? (DEWDNEY, 2000, p.27)

Qual a sua opinião sobre o texto acima? Discuta com o seu grupo e, comente o texto concordando ou discordando e justificando seu ponto de vista. Elaborem um texto e entregue ao professor.



Leitura do **Livro do professor de matemática volume I: números naturais.**

Descobrimos buracos na reta



Nesta sequência de atividades propomos questionamentos aos estudantes para saber se a reta tem ou não todos os números? Ou se para cada um dos pontos da reta existe um número associado a ele? Ou ainda, todos os pontos possuem um número associado a ele e vice-versa?



Para Pommer (2012), os conjuntos numéricos são apresentados, na maioria das vezes, em uma ordem diferente da ordem em que apareceram historicamente. Ou seja, de um modo geral os conjuntos são apresentados como tendo sido criados na seguinte ordem: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{I} , \mathbb{R} . Quando de fato temos, que historicamente os números seguiram na seguinte ordem: \mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{Z} e por fim os reais. Mas, que foram sendo permeados pela descoberta de alguns exemplares de números irracionais ao longo do caminho. Desta forma, Kindel (1998) afirma que é preciso estabelecer conexões históricas em busca dos postos-chave que surgiram ao longo do caminho para se compreender conceitos matemáticos elaborados e complexos como é o caso dos números irracionais.

Por outro lado, para os estudantes a reta é racional, pois sempre é possível encontrar a metade do segmento e, portanto, a metade associada à soma dos extremos do intervalo. Com base nisso, pode-se mostrar aos estudantes que a reta possui buracos, os irracionais.



Assim, nosso OBJETIVO com a tarefa 3, foi dar início ao trabalho para mostrar que existem outros números, os irracionais, além daqueles conhecidos para poder:

- ✓ Verificar de que formas os estudantes localizam os números na reta em que a unidade é dada;
- ✓ Verificar que estratégias os licenciandos usam para determinar o intervalo de localização dos números dado



TAREFA 3: Números nas retas

(Responda individualmente)

1) Escolha cinco números inteiros de sua preferência e os localize em cada uma das retas abaixo.

São dadas as retas r e s com a unidade $u = 2\text{cm}$ e unidade $u = 2,5\text{cm}$, respetivamente.

a) reta r



b) reta s



2) Desenhe a reta t , e marque os números escolhidos considerando agora a unidade $u = 3\text{cm}$.

3) Descreva como você faria para localizar exatamente os seguintes números na reta?

a) $\sqrt{2}$?

b) $\sqrt{3}$?

c) $\sqrt{4}$?

d) $\sqrt{5}$?

4) Localize os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ e $\sqrt{5}$ na reta r .

5) Sabendo que 2 está entre os números 1 e 3, podemos dizer que o número 2 está localizado no intervalo $(1,3)$ ou ainda $[1,3]$. No primeiro caso, os números 1 e 3 não pertencem ao intervalo e no segundo, eles pertencem. Com base nesta informação, identifique o menor intervalo em

que os extremos sejam inteiros para localizar cada um dos seguintes números: $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{16}, \sqrt{17}, \sqrt{18}, \sqrt{19}, \sqrt{20}$ e $\sqrt{21}$.

Responda:

- a) Quais dos números acima, representam um número inteiro?
- b) Todos os intervalos inteiros apresentaram a mesma quantidade de números representados na forma de radicais? Explique.

- c) Veja que os números $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{18}, \sqrt{19}, \sqrt{20}, \sqrt{21}\}$ também podem ser representados da seguinte forma:

$$\{\sqrt{n}, n \in \mathbb{N} / 1 \leq n \leq 21\}.$$

Agora, trace a reta r e usando como unidade $u = 1,5$ cm, localize os números \sqrt{n} , em que $\{n \in \mathbb{N} / 3 \leq n \leq 28\}$.

REFERÊNCIAS

BRASIL: CinePlayers. **Donald no País da Matemática.**

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC – Ensino Fundamental.** Homologado em 2017.

DEWDNEY, A. K. **20.000 léguas matemática: um passeio pelo misterioso mundo dos números.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2000.

EDUCAÇÃO DOCUMENTÁRIOS. **Donald no País da Matemática** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk>. Acesso em: mar/2020.

KINDEL, D. S.; **Um Ambiente Colaborativo a Distância: Licenciandos Dialogando sobre os Infinitos/** São Paulo:[s.n.], 2012.

RIPOLL, C. C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V.; **Livro do professor de matemática volume I: números naturais.** Rio de Janeiro: SBM, 2015.

REDE CATARINENSE. **A História do Número 1 - Como Tudo Começou.** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ZWZKJb06CTU>. Acesso em: mar/2020.

ROCHA, R. R. M. **Sensibilização para existência dos números irracionais.** 2018. 154f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica.

SILVA, F. R.; **Estudantes do 9.º Ano do Ensino Fundamental Explorando Situações com os Números Irracionais *Pi* e *Phi*.** 2019. 205f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica.