



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS
E MATEMÁTICA**

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

**TRIGONOMETRIA ESFÉRICA: SEUS CONCEITOS
FUNDAMENTAIS E SUAS APLICAÇÕES**

CÉSAR DIAS QUINTANA

Orientadora: professora Doutora
Sílvia Moreira Goulart

Seropédica, RJ
Junho de 2020

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO I – A TRIGONOMETRIA ESFÉRICA.....	2
1.1 História e desenvolvimento.....	2
1.2 As Geometrias não Euclidianas.....	5
1.2.1 Conceitos Fundamentais de Trigonometria Esférica.....	6
1.2.1.1 Ângulo diedro.....	6
1.2.1.2 Triedro (ou ângulo triedro)	7
1.2.1.3 Círculos máximos.....	7
1.2.1.4 Polos de um Círculo Máximo.....	8
1.2.1.5 Ângulos esféricos.....	8
1.2.1.6 Triângulo Esférico.....	9
1.2.1.6.1 Propriedades dos Triângulos Esféricos.....	11
1.2.1.6.2 Triângulos Esféricos Polares (ou Suplementares)	12
1.3 A Demonstração da Fórmula Fundamental.....	14
1.4 A Aplicação da Fórmula Fundamental no Globo Terrestre.....	16
1.5 Aplicações do Conhecimento de Trigonometria Esférica nas Ciências Náuticas.....	20
1.5.1 A Navegação Ortodrômica.....	20
1.5.2 A Navegação Astronômica.....	22
1.5.2.1 O Triângulo Astronômico ou Triângulo de Posição.....	22
CAPÍTULO II - A PROPOSTA DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	24
2.5.1 Sequência Didática.....	24
2.5.2 A Proposta de uma Sequência Didática.....	26
CAPÍTULO III - O PRODUTO: A SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA.....	28
3.1 Tema: Trigonometria Esférica: Seus Conceitos Fundamentais e suas Aplicações	28
3.2 Objetivo Geral	28
3.3 Público-alvo.....	28
3.4 Pré-requisitos.....	28
3.5 Recursos Materiais e Tecnologias.....	28
3.6 Recomendações Metodológicas.....	29
3.7 Tempo estimado da sequência didática.....	29
3.8 Conteúdos e Atividades.....	29
3.9 Descrição das Atividades.....	29
3.10 Sugestão para Avaliação da Sequência Didática.....	39
3.11 Recomendação para a Confecção de Uma Esfera Similar de Isopor.....	39
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	42

INTRODUÇÃO

A sequência didática proposta, apresentada neste trabalho, foi o produto desenvolvido no âmbito das aulas de Trigonometria Esférica e Ortodromia (TEO-1), ministrada no Centro de Instrução Almirante Graça Aranha (CIAGA). Nesta sequência figuram quatro conteúdos e seis atividades, articuladas e interligadas, colocadas e ordenadas visando uma aprendizagem significativa para os discentes. Além disso, foram empregados diversos recursos como elemento facilitador do processo ensino-aprendizagem.

Em relação aos conteúdos que figuram na sequência didática proposta, todos fazem parte da Dissertação: A Importância do Conhecimento da Trigonometria Esférica na Formação do Bacharel em Ciências Náuticas.

No que tange à ordem dos conteúdos e das atividades, estes foram elaborados com base nos conhecimentos prévios dos alunos, além de seguir um encadeamento lógico. Dessa maneira, a cada atividade buscou-se aumentar o grau de dificuldade, permitindo ampliar gradativamente os conhecimentos prévios em relação aos novos conteúdos.

Um outro aspecto relevante, tendo como objetivo facilitar o desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem, se encontra na utilização de vários materiais de ensino na sequência didática proposta, tais como: projetor de multimídia, livro-texto, folhas de informação, listas de exercícios, esfera de madeira-manipulável, globo terrestre de plástico pequeno-manipulável, calculadora científica, régua, transferidor, compasso, utilização de email e whatsapp para envio de folhas de informação e de exercícios, além de ser criado um grupo de estudos via whatsapp, visando dirimir dúvidas e estimular pesquisas.

Destaca-se que, para estipular o tempo de duração da sequência didática, com base na minha experiência, foi considerada a complexidade e dificuldades dos conteúdos e atividades, não apenas ao aspecto quantitativo.

Portanto, essa proposta tenta buscar estratégias que auxiliem os professores de matemática, e de outras áreas do conhecimento, nesse complexo processo de ensino-aprendizagem.

CAPÍTULO I

A TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

1.1 História e Desenvolvimento

A trigonometria na atualidade se apresenta como um dos ramos da Matemática. Entretanto, na antiguidade seu desenvolvimento aconteceu por ser um importante instrumento de auxílio a Astronomia. Essa relação entre as duas ciências era muito intensa, e a separação ocorreu somente na Idade Média (PEREIRA, 2013).

Constata-se que o desenvolvimento da trigonometria, no mundo antigo, foi consequência das práticas relacionadas aos cálculos ligados à Astronomia, Navegação e Agricultura. Sendo que a sua trajetória não foi curta para se tornar uma disciplina independente no universo da matemática, tendo como marcos iniciais os século IV ou V a.C., protagonizados principalmente pelos egípcios e os babilônios (PEREIRA, 2013).

A civilização egípcia, através de seus papiros, deixou seus estudos sobre matemática e trigonometria para a posteridade, destacando dentre eles o papiro de Rhind, datado de, aproximadamente, 3000 a.C., com problemas relativos à cotangente, e a tábua cuneiforme Plimpton 322, escrita entre 1900 e 1600 a.C., com problemas sobre secantes¹. A trigonometria se desenvolveu nessa civilização tendo como cerne sua aplicação prática na construção das pirâmides e na agrimensura, determinando as áreas alagadas para o plantio.

Após os egípcios, os babilônios desenvolveram a trigonometria através de técnicas, tendo como objetivo resolver problemas relacionados a sua vida cotidiana (SILVA e MENDES, 2014). Eles faziam uso de tábuas para registrar a resolução específica para determinado problema, visando ensinar a operação utilizada. Somente foi possível estudar o desenvolvimento matemático dessa civilização quando foram feitas as interpretações das tábuas mencionadas. Dessa forma, descobriu-se que o sistema de base 60 era utilizado, o que ocasionou um posterior desenvolvimento da matemática em outras civilizações, além da criação das importantes tábuas trigonométricas.

Os gregos, partindo dos conhecimentos egípcios e babilônicos, começaram a reestruturar a trigonometria, figurando no trabalho de Menelaus de Alexandria (70 – 130) d.C., a primeira definição de triângulo esférico. Contudo, destaca-se que a obra *O Almagesto*, de Cláudio Ptolomeu (90 - 168) d.C., foi o trabalho mais relevante da trigonometria na

¹ <<http://www.matematica.br/historia/trigonometria.html>>, acesso em mai, 2019.

antiguidade, pois resume grande parte do conhecimento de Astronomia, de trigonometria plana e trigonometria esférica (SILVA e MENDES, 2014). Convém também ressaltar o Teorema de Menelaus², que foi a base da trigonometria esférica durante séculos, servindo como sustentação para esse ramo da matemática a posteriori.

No século V a.C, na Índia, a obra de trigonometria que mais se destaca é o *Paitamahasiddanta* (SILVA e MENDES, 2014), que tratava de astronomia associada a matemática, contendo importantes conceitos de trigonometria esférica na resolução de problemas astronômicos. Uma das mais relevantes contribuições dos matemáticos na área da trigonometria foram os conceitos de função seno, e, também, da função seno verso ou seno versado.

Séculos mais tarde a função seno verso foi transformada na função semissenoverso, apresentando-se como uma ferramenta importante da trigonometria esférica para a resolução dos triângulos de posição na navegação, originando no século XIX, a tábua trigonométrica de Norie, criada por John William Norie (1772 – 1843). Essa tábua de navegação foi muito difundida, podendo ser utilizada até hoje para vários cálculos de navegação astronômica e ortodrômica (SILVA e MENDES, 2014).

No mundo árabe, o que impulsionou o estudo e evolução da trigonometria plana e esférica foram os cálculos relacionados a astronomia. Pois as leis islâmicas determinam que os muçulmanos deveriam se voltar para meca cinco vezes por dia para efetuar suas orações. Dessa forma, as resoluções dos triângulos esféricos tornaram-se fundamentais para determinar: direção, tempo, início e final da luz solar.

Convém ressaltar que os matemáticos árabes com seus estudos, e desenvolvimento no campo da trigonometria, influenciaram de maneira significativa a ciência ocidental. Dentre os quais se destacam Al-Jayyani (989–1079) e Nasir Eddin al-Tusi (1201–1274), com base em Silva e Mendes (2014).

Na China, a matemática era voltada para fins práticos, tais como: observações celestes, ajustes no calendário, medidas ligadas a agricultura, impostos e outros. De acordo com Silva e Mendes (2014), observa-se a existência de registros sobre trigonometria esférica no século VI, entretanto os mais relevantes figuram nos séculos XII e XIII, estando relacionados aos cálculos de astronomia e ajustes de calendário.

Segundo Coutinho (2015), foi na Idade Média que apareceram os primeiros tratados do que denominamos hoje de trigonometria. O alemão Bartholomeo Pitiscus (1561-1613) criou a

² Sobre o Teorema de Menelaus, consultar Silva (2015).

palavra trigonometria, que tem como origem dois termos gregos, trigonon, triângulo e metria, medida, tendo, portanto, o significado de medida do triângulo.

Coutinho (*Ibidem*, p. 3) afirma:

“Pitiscus, na sua obra Trigonometria, chamava a atenção do leitor sobre a abrangência do texto, pois continha material que poderia ser usado na medição de terras, na geografia e na astronomia. Uma novidade! Até então a trigonometria era usada exclusivamente na Astronomia.”

De acordo com Coutinho (*Idem*), a primeira apresentação sistemática na Europa da Trigonometria Plana e Esférica foi o tratado de Johann Müller Regiomontanus (1436- 1476), escrito aproximadamente em 1464, porém publicado postumamente, em 1533, com a seguinte denominação: De Triangulis Omnimodis Libri Quinque, que consiste em cinco livros abordando todos os tipos de triângulos. Destacando que sua relevância se deve, principalmente, em tratar a Trigonometria de forma independente da Astronomia.

Os avanços do estudo da trigonometria esférica na Idade Média, tendo como base a obra de Johann Muller Regiomontanus, impulsionaram o movimento das grandes navegações, ampliando o conhecimento do mundo que existia até aquele momento.

Vale ressaltar, que a Astronomia é uma das mais antigas ciências, assim sendo, os primeiros tratados sobre trigonometria estão intrinsicamente ligados aos triângulos esféricos, já os escritos destinados aos triângulos planos surgiram posteriormente, conforme Coutinho (2015). Em consequência, tem-se a hipótese de que a trigonometria esférica surgiu antes da trigonometria plana.

Na atualidade, a trigonometria esférica é uma importante ferramenta matemática aplicada em várias áreas do conhecimento, tais como: astronomia, cartografia, navegação, engenharia e física. Podemos, também, destacar conceitos importantes da trigonometria esférica em outras disciplinas, tais como: nas geometrias não euclidianas, cálculo diferencial e integral.

Observa-se que o ensino da trigonometria esférica figura em poucas grades curriculares dos cursos em licenciatura matemática atualmente. Dessa forma, o ensino dessa disciplina é objeto de estudo em alguns cursos específicos de graduação, entre eles: Astronomia, Engenharia Cartográfica, Ciências Geodésicas, Ciências Aeronáuticas, Bacharel em Ciências Náuticas (Oficial de Marinha Mercante) e Curso de Formação de Oficial de Marinha de Guerra.

Nesse mundo globalizado com todos os avanços tecnológicos ligados à área de navegação e comunicação, temos que as órbitas dos satélites artificiais, com suas trajetórias

bem definidas, possuem ainda como base de cálculo os triângulos esféricos. Vale ressaltar, segundo Coutinho (Op. cit., p. 8), que a “A astronomia, a mais antiga das ciências, desenvolveu-se a partir do conceito de triângulo esférico, o primeiro e ainda atuante instrumento de medida do Universo!”.

Com esse breve histórico, nota-se que a trigonometria esférica se desenvolveu através da contribuição de muitos matemáticos, das mais variadas matizes de povos e civilizações.

1.2 As Geometrias não Euclidianas

Durante muito tempo, aproximadamente dois mil anos, a Geometria de Euclides, contida na sua obra Os Elementos, foi a única considerada possível no meio matemático. Entretanto, muitos matemáticos começaram a questionar o quinto postulado de Euclides, ou seja, não o consideravam uma consequência lógica dos quatro anteriores.

Dessa forma, notáveis matemáticos como Bolyai, Lobachevsky, Gauss e Riemann, criaram fundamentos para surgirem outras geometrias, tão embasadas logicamente, como a Geometria Euclidiana. Convém destacar, que dentre as geometrias não Euclidianas, uma se relaciona com a Teoria da Relatividade, a hiperbólica, pois o universo sendo curvo, na concepção de Einstein, a Geometria Euclidiana não seria adequada para ser utilizada nesse caso.

Nota-se que, dependendo da forma que se substitui o quinto postulado de Euclides, surgem duas concepções de Geometria não Euclidianas: a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica.

Um fato interessante foi que a Geometria Hiperbólica se desenvolveu de forma, praticamente, simultânea e independente por dois matemáticos contemporâneos, isto é, o russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) e o húngaro Janos Bolyai (1802-1860).

Destaca Coutinho (2001):

“Nicolai dedicou mais de vinte anos à sua descoberta. A primeira apresentação pública de seu trabalho, feita à Sociedade de Física-Matemática da cidade de Kazan, ocorreu em 1826 sem nenhuma aceitação. Pregara no deserto. As afirmações de Lobachevsky punham em dúvida a inquestionável Geometria de Euclides”. (COUTINHO, 2001, p. 9).

O matemático húngaro Janos Bolyai, não aprofundou seus estudos e conceitos sobre essa nova geometria. Em consequência, essa geometria não euclidiana é denominada mundialmente como Geometria de Lobachevsky.

A Geometria Elíptica, que será o foco do nosso trabalho, foi desenvolvida pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), tendo como um de seus principais axiomas que não há paralelas a uma reta dada, contrariando, de forma bem categórica, o quinto postulado de Euclides. Vale destacar, que a Geometria Elíptica é conhecida por Geometria de Riemann.

1.2.1 Conceitos Fundamentais de Trigonometria Esférica

A trigonometria esférica faz parte da geometria elíptica (esférica) de Riemann. Os conceitos fundamentais apresentados nesta seção, servem como base para a sequência didática elaborada pela minha prática docente, sendo utilizada para o aprendizado da disciplina Trigonometria Esférica e Ortodromia (TEO-1) no curso de Bacharel em Ciências Náuticas do Centro de Instrução Almirante Graça Aranha.

1.2.1.1 Ângulo diedro

São ângulos formados entre dois planos que se interceptam, convergindo para uma reta comum denominada aresta, conforme a figura 1.

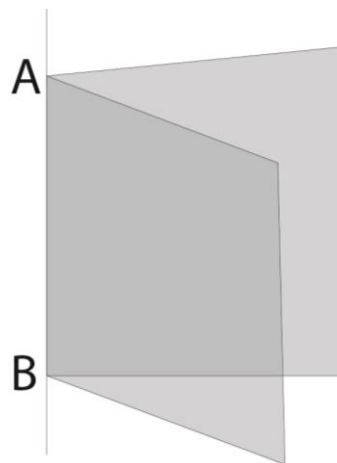


Figura 1: Ângulo Diedro. Fonte: Autor

Onde: AB é a aresta

1.2.1.2 Triedro (ou ângulo triedro)

É a região definida pela reunião de três semirretas não coplanares com origem no mesmo ponto, denominado vértice, conforme a figura 2.

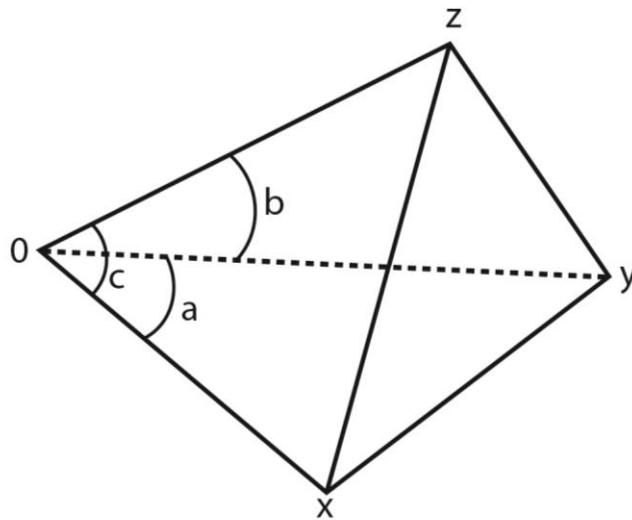


Figura 2: Ângulo triedro. Fonte: Autor

Onde temos:

- O ponto **O** é chamado vértice e os planos OXY, OYZ e OZX, as faces do triedro.
- As faces, tomadas aos pares, formam três ângulos diedros, cujas arestas são: OX, OY e OZ.
- Os ângulos planos a, b e c são denominados ângulos das faces do triedro ou simplesmente faces, para fins de determinação dos elementos do triedro.
- O triedro possui três arestas, três faces e três ângulos diedros.

1.2.1.3 Círculos máximos

São os círculos cujos planos interceptadores passam pelo centro de uma esfera, conforme a figura 3, a seguir.

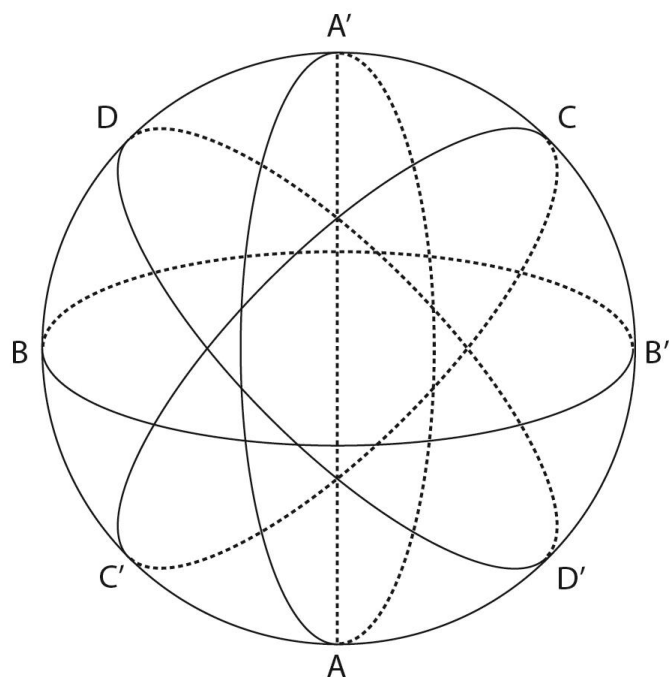


Figura 3: Círculos Máximos. Fonte: Autor

1.2.1.4 Polos de um Círculo Máximo

São os pontos situados a 90° de um círculo máximo de referência. Na figura 3, os pontos A e A' são os polos do círculo máximo que passa por BB'.

1.2.1.5 Ângulos esféricos

São ângulos diedros formados entre dois círculos máximos, conforme a figura 4.

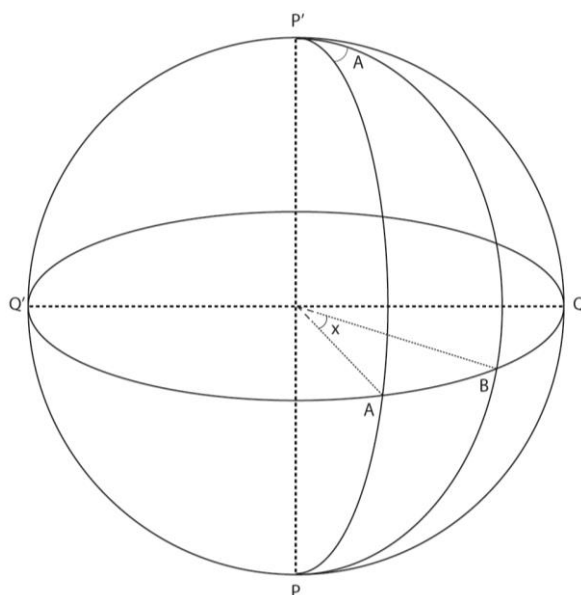


Figura 4: Ângulos Esféricos. Fonte: Autor

Onde temos:

- **Aresta do ângulo esférico $\hat{A}$:** $\overline{NS}$
- **Vértices do ângulo esférico $\hat{A}$:** N e S
- **Um ângulo esférico:** pode ser medido no círculo máximo situado a 90° do vértice, ver figura 4.

Temos então: $\hat{X} = \hat{A} = \hat{AB}$

Segundo Coutinho (2001), o ângulo esférico é definido pela interseção de dois círculos máximos, como ilustrado na figura 5, sendo sua medida a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes obtidas no ponto de interseção.

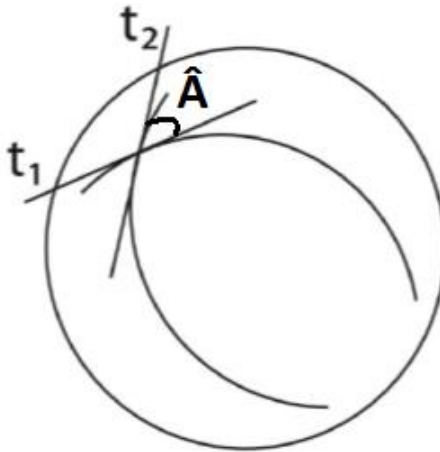


Figura 5: Medida do Ângulo Esférico formado pelas tangentes. Fonte: Autor

1.2.1.6 Triângulo Esférico

É a porção da superfície de uma esfera limitada por três arcos de círculos máximos, que se interceptam dois a dois, conforme a figura 6.

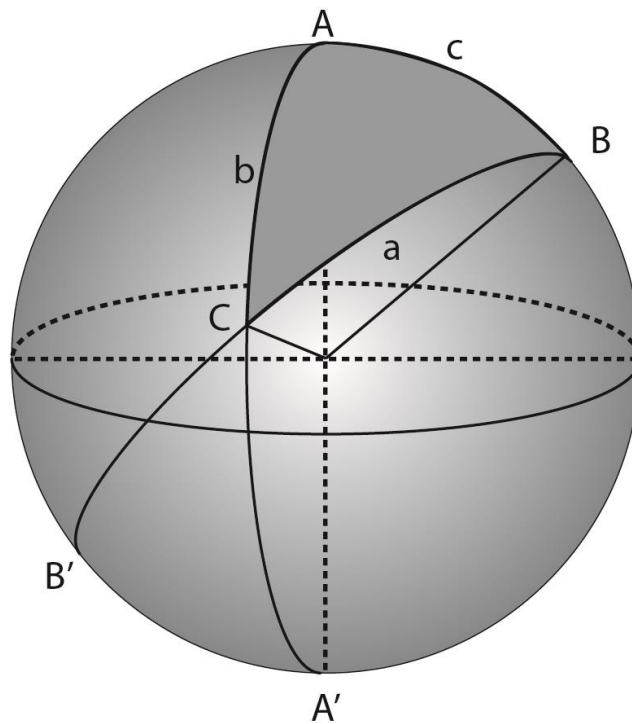


Figura 6: Triângulo Esférico. Fonte: Autor

Logo:

- A todo triângulo esférico corresponde a um Triedro com vértice no centro da esfera, conforme figura 7.
- Os lados do triângulo esférico são medidos pelos ângulos formados entre as arestas do triedro correspondente.
- Os ângulos do triângulo esférico têm as medidas dos ângulos diedros: $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$
- Em um triângulo ABC, os vértices são representados por letras maiúsculas e os lados por letras minúsculas.
- Exceto quando especificado, os triângulos esféricos a serem estudados serão, apenas, aqueles cujos lados e ângulos sejam menores que 180° .

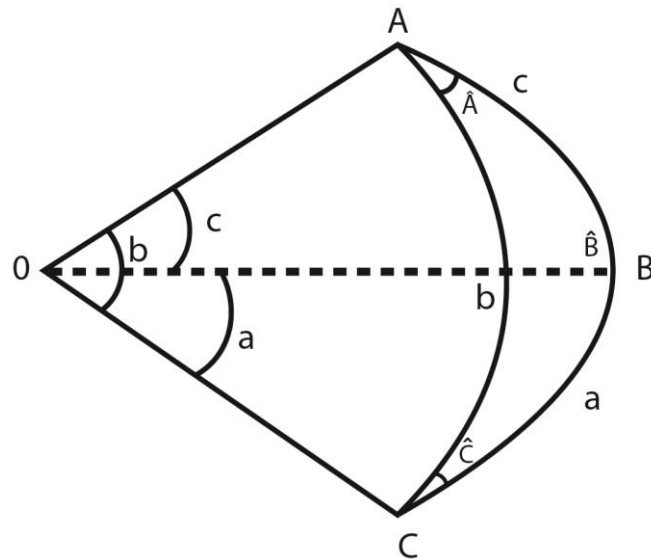


Figura 7: Triedro Correspondente. Fonte: Autor

Nota: Utilizaremos a seguinte convenção: *os ângulos esféricos* serão representados por letras maiúsculas com acento circunflexo, por exemplo: $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Já *os ângulos planos* e os lados do triângulo esférico serão representados somente por letras minúsculas, por exemplo: a , b e c .

1.2.1.6.1 Propriedades dos Triângulos Esféricos

1ª) A soma dos lados é maior do que 000° e menor do que 360° .

$$000^\circ < a + b + c < 360^\circ$$

2ª) Qualquer lado é menor que a soma e maior que a diferença entre os outros dois lados.

$$a + b > c > a - b$$

$$a + c > b > a - c$$

$$b + c > a > b - c$$

3ª) Os lados e os ângulos opõem-se na ordem sucessiva de suas respectivas grandezas:

- Aos maiores ângulos opõem-se os maiores lados e vice-versa.
- Aos menores ângulos opõem-se os menores lados e vice-versa.
- A ângulos iguais opõem-se lados iguais e vice-versa.

4ª) A soma dos ângulos de um Triângulo Esférico é maior que 180° e menor que 540° .

$$180^\circ < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540^\circ$$

5ª) A soma de 180° a um ângulo do triângulo esférico é maior que a soma dos outros dois ângulos

$$\hat{A} + 180^\circ > \hat{B} + \hat{C}$$

6ª) Todo triângulo esférico trirretângulo é trirretilátero e vice-versa

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$, isso implica dizer que $a = b = c = 90^\circ$

7ª) Se o triângulo original existe, o triângulo polar também existe.

1.2.1.6.2 Triângulos Esféricos Polares (ou Suplementares)

Dois triângulos esféricos são polares quando os vértices do primeiro são os polos dos lados homônimos do outro, e reciprocamente, conforme a figura 8.

Existe uma relação fundamental entre os triângulos esféricos polares, que será demonstrada, que é a seguinte: os lados de um triângulo esférico polar são suplementos dos ângulos do triângulo primário, e seus ângulos são suplementos dos lados do triângulo primário, conforme a figura 9.

É importante ressaltar que: Polar é o lugar geométrico dos pontos da superfície esférica que distam 90° dos polos; assim sendo, todas as circunferências máximas perpendiculares a polar, contêm os polos.

A seguir, tem-se a ilustração das figuras 8 e 9.

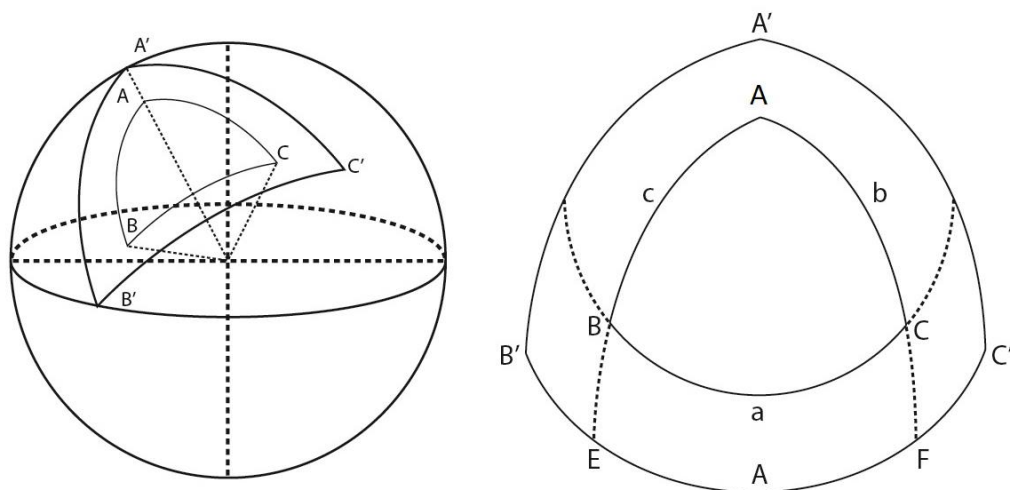


Figura 8: Triângulos Esféricos Polares. Fonte: Autor

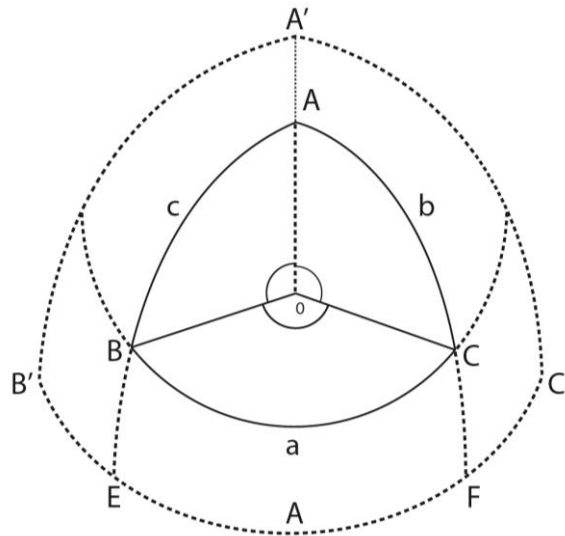


Figura 9: Relação entre os Triângulos Polares. Fonte: Autor

Primeira relação:

$$\widehat{KL} = \widehat{KB} + \widehat{BC} + \widehat{CL}, \text{ substituindo teremos: } \hat{A}' = 90^\circ - a + a + 90^\circ - a$$

Obtemos: $\hat{A}' = 180^\circ - a$, analogamente: $\hat{B}' = 180^\circ - b$ e $\hat{C}' = 180^\circ - c$

Segunda relação:

$$\widehat{B'C'} = \widehat{B'E} + \widehat{EF} + \widehat{FC'}, \text{ substituindo teremos: } a' = 90^\circ - \hat{A} + \hat{A} + 90^\circ - \hat{A}$$

Obtemos: $\hat{A} = 180^\circ - a'$, analogamente: $\hat{B} = 180^\circ - b'$ e $\hat{C} = 180^\circ - c'$

Decorrentes da demonstração, podemos escrever as seguintes relações entre os triângulos esféricos polares:

$$\hat{A} + a' = 180^\circ \quad \text{e} \quad a + \hat{A}' = 180^\circ$$

$$\hat{B} + b' = 180^\circ \quad \text{e} \quad b + \hat{B}' = 180^\circ$$

$$\hat{C} + c' = 180^\circ \quad \text{e} \quad c + \hat{C}' = 180^\circ$$

Os conceitos fundamentais que foram apresentados, servem como base para o desenvolvimento do ensino da trigonometria esférica. Portanto, são primordiais para o entendimento da demonstração da lei dos cossenos para os triângulos esféricos, denominada como fórmula fundamental. Isto é, as demais fórmulas são obtidas a partir dela.

1.3 A Demonstração da Fórmula Fundamental

A lei dos cossenos para os triângulos esféricos é denominada fórmula fundamental, sendo expressa da seguinte forma: $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A}$.

Sendo **a**, **b** e **c** os lados do triângulo esférico e $\hat{A}$ o ângulo do triângulo esférico oposto ao lado **a** do triângulo esférico ABC, ver figura 9. Podemos escrever também a fórmula tomando como referências os lados **b** e **c**, obtendo: $\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \hat{B}$ e $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \hat{C}$.

Com base no triângulo esférico ABC da figura 10, cujos lados são a, b e c. Sendo que: b e c são menores que 90° ; $\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{OC} = 1$, o raio da esfera que pertence o triângulo esférico; OABC o triedro associado ao triângulo esférico e $\overline{AL}$ e $\overline{AK}$ tangentes em A aos lados b e c do triângulo esférico. Convém lembrar, que o ângulo formado por estas tangentes tem o valor do ângulo esférico $\hat{A}$ do triângulo esférico.

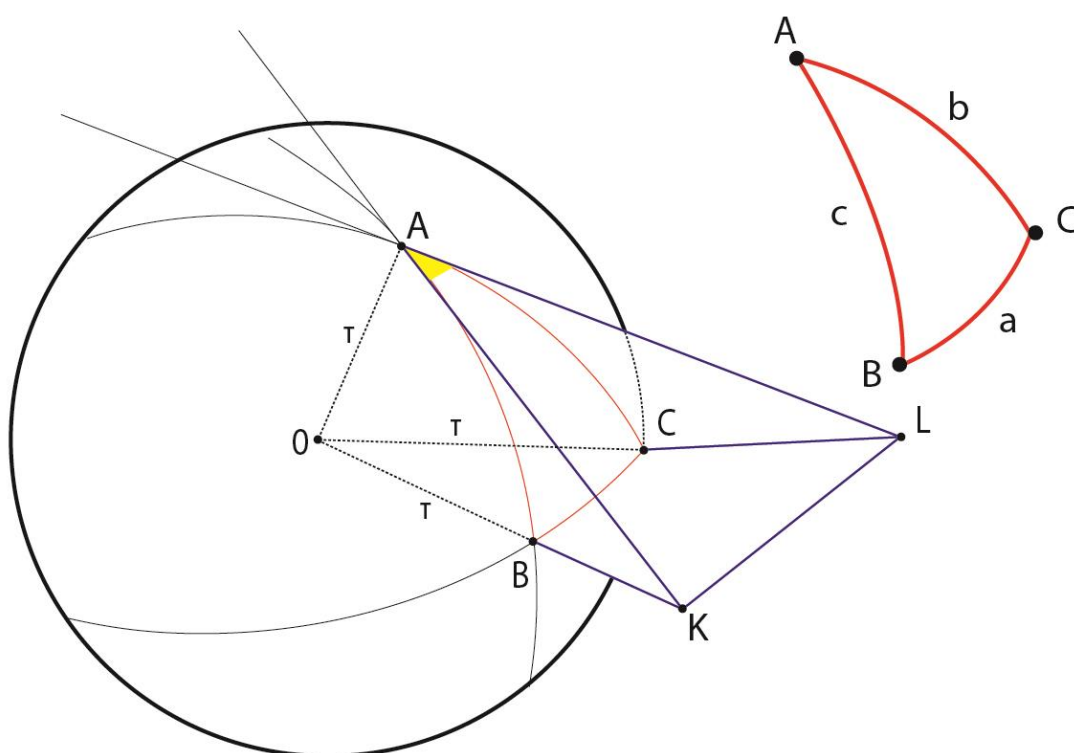


Figura 10: Triângulo esférico e o poliedro formado pelas tangentes. Fonte: Autor

Destacando, da figura 10, os elementos principais para a demonstração, obtemos a figura 11.

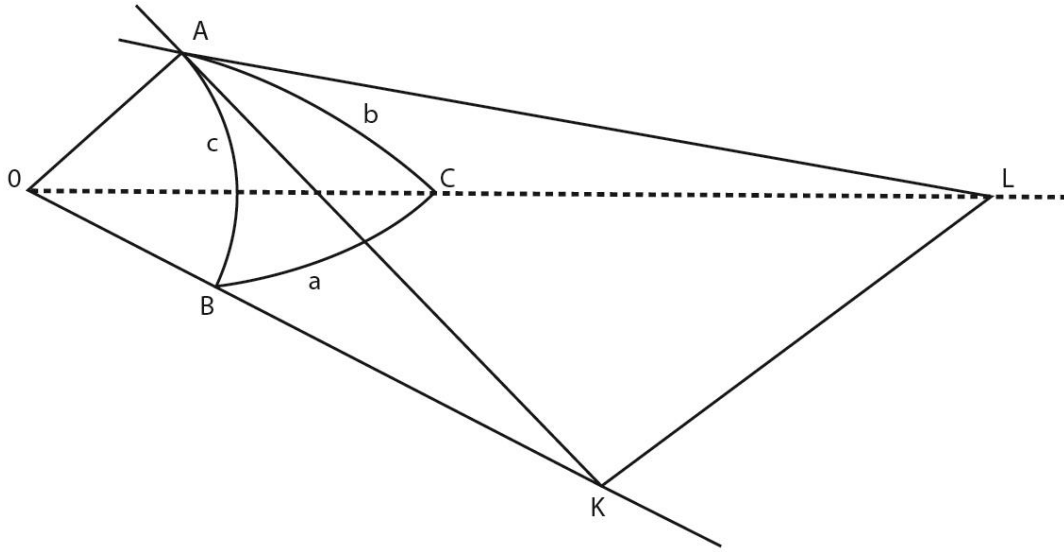


Figura 11: Triângulo Esférico, triedro correspondente e poliedro. Fonte: Autor

Da figura 11, obtém-se: $\text{tg } b = \overline{AL}$, $\text{tg } c = \overline{AK}$, $\text{sec } b = \overline{OL}$, $\text{sec } c = \overline{OK}$

Os triângulos planos retilíneos KOL e KAL, permitem-nos escrever:

$$\overline{KL}^2 = \overline{OL}^2 + \overline{OK}^2 - 2 \cdot \overline{OL} \cdot \overline{OK} \cdot \cos a \quad (\text{equação 1})$$

$$\overline{KL}^2 = \overline{AL}^2 + \overline{AK}^2 - 2 \cdot \overline{AL} \cdot \overline{AK} \cdot \cos \hat{A} \quad (\text{equação 2})$$

Igualando as equações (1) e (2), e substituindo os valores de $\overline{OL}$; $\overline{OK}$; $\overline{AL}$ e $\overline{AK}$, temos:

$$\text{sec}^2 b + \text{sec}^2 c - 2 \cdot \text{sec } b \cdot \text{sec } c \cdot \cos a = \text{tg}^2 b + \text{tg}^2 c - 2 \cdot \text{tg } b \cdot \text{tg } c \cdot \cos \hat{A}$$

$$\text{Então: } -2 \cdot \text{sec } b \cdot \text{sec } c \cdot \cos a = \text{tg}^2 b - \text{sec}^2 b + \text{tg}^2 c - \text{sec}^2 c - 2 \cdot \text{tg } b \cdot \text{tg } c \cdot \cos \hat{A}$$

Dividindo por (-2) ambos os membros da igualdade acima, obtemos:

$$\text{sec } b \cdot \text{sec } c \cdot \cos a = 1 + \text{tg } b \cdot \text{tg } c \cdot \cos \hat{A}$$

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por $(\cos b \cdot \cos c)$ e usando a definição de secante e tangente, teremos:

$$\frac{1}{\cos b} \cdot \frac{1}{\cos c} \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c = \cos b \cdot \cos c + \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\sin c}{\cos c} \cdot \cos \hat{A} \cdot \cos b \cdot \cos c$$

$$\text{Encontrando, então: } \cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A}$$

Deduzindo de forma semelhante, chegaríamos as outras duas combinações, completando o grupo que se denomina por *fórmulas fundamentais da trigonometria esférica*:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A} \\ \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \hat{B} \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \hat{C}\end{aligned}$$

1.4 A Aplicação da Fórmula Fundamental no Globo Terrestre

Para o entendimento desse tópico, alguns conceitos de geografia são muito importantes, e os mais relevantes serão aqui apresentados. Assim sendo, entre eles temos o sistema de coordenadas geográficas. Sabe-se que para localizar qualquer ponto na superfície da Terra utilizamos duas coordenadas, latitude e longitude. Dessa forma, dois referenciais foram estabelecidos, um a linha do Equador e o outro o meridiano de Greenwich, uma cidade próxima a Londres na Inglaterra.

A linha do Equador é uma circunferência máxima que divide a terra em dois hemisférios, sendo perpendicular aos eixos que passam pelos polos. Já os paralelos são circunferências menores paralelas ao Equador. Vale ressaltar, conforme a figura 12, que o Equador corresponde ao paralelo 00°, o Polo Norte ao de +90° e o Polo Sul -90°.



Figura 12: Os Paralelos. Fonte: Autor

Tem-se que os meridianos são semicircunferências máximas, perpendiculares ao círculo máximo de referência das latitudes, o Equador, indo do Polo Norte ao Polo Sul e cortando os paralelos, conforme a figura 13.

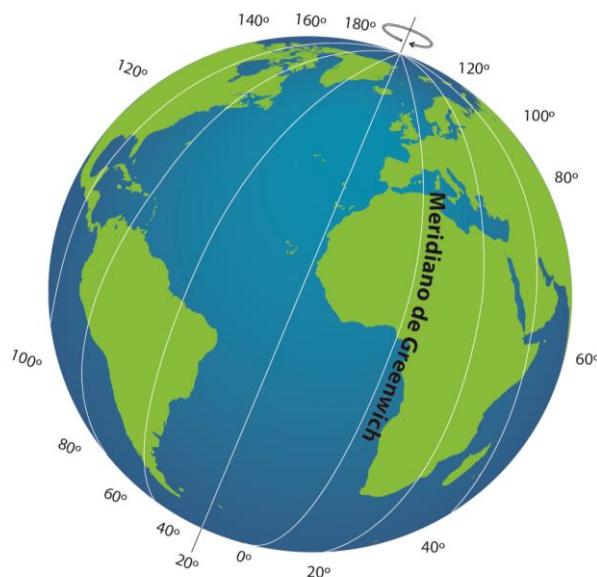


Figura 13: Os Meridianos. Fonte: Autor

Os meridianos possuem o mesmo comprimento, tendo como referência inicial para contagem o Meridiano de Greenwich 000° . Os meridianos situados a leste de Greenwich são medidos por valores crescentes (positivos) até 180° , já a oeste, seus valores são decrescentes (negativos) até -180° .

Portanto, após definir meridianos, equador e paralelos, tornou-se possível desenvolver um sistema capaz de localizar um ponto qualquer na superfície da terra, denominado sistema de coordenadas. Nesse sistema, cada ponto é localizado através das interseções dos meridianos com os paralelos. Sendo a coordenada latitude definida como ângulo formado entre o Equador e um ponto qualquer, conforme a figura 14. Já a longitude é definida como o ângulo formado entre o meridiano que passa por um ponto qualquer e o meridiano de Greenwich, ver a figura 15.

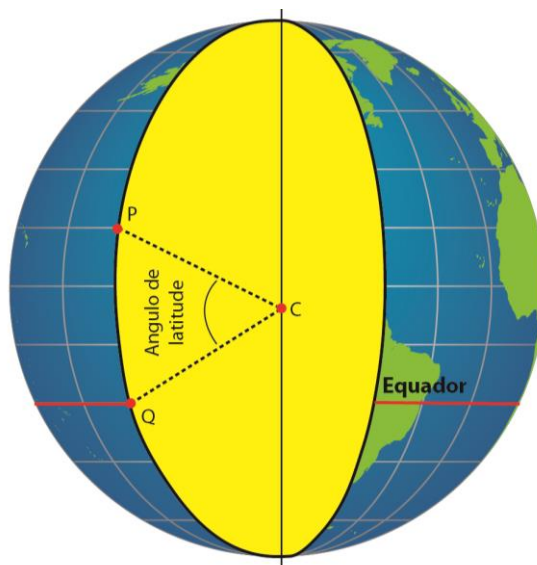


Figura 14: A latitude. Fonte: Autor

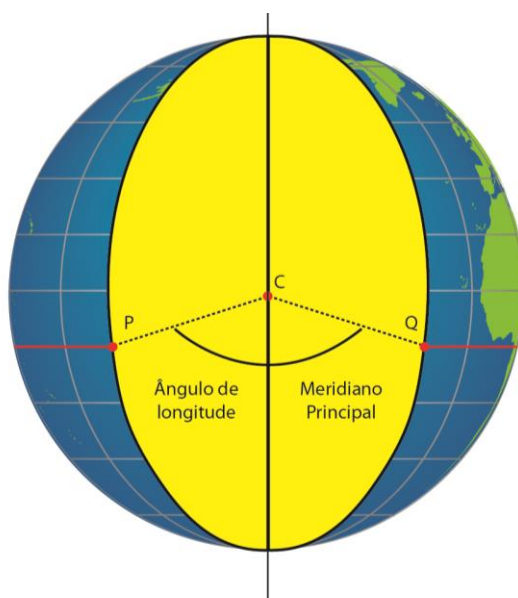


Figura 15: A Longitude. Fonte: Autor

Considerando a terra como uma esfera, e conhecendo-se as coordenadas geográficas, podemos calcular as distâncias entre dois pontos sobre a superfície terrestre, aplicando a fórmula fundamental. Vale lembrar, que a menor distância entre dois pontos numa superfície esférica é o arco de círculo máximo que os une (geodésica).

Podemos ilustrar, a aplicação da fórmula fundamental, através do seguinte exemplo, conforme a figura 16: Calcular a distância, em milhas náuticas, sobre o círculo máximo que passa pelos pontos A de coordenadas: latitude 20° N e longitude 120° W e o ponto B de coordenadas: latitude 45° N e longitude 070° W. Nota: uma milha náutica = arco de um minuto de um círculo máximo.

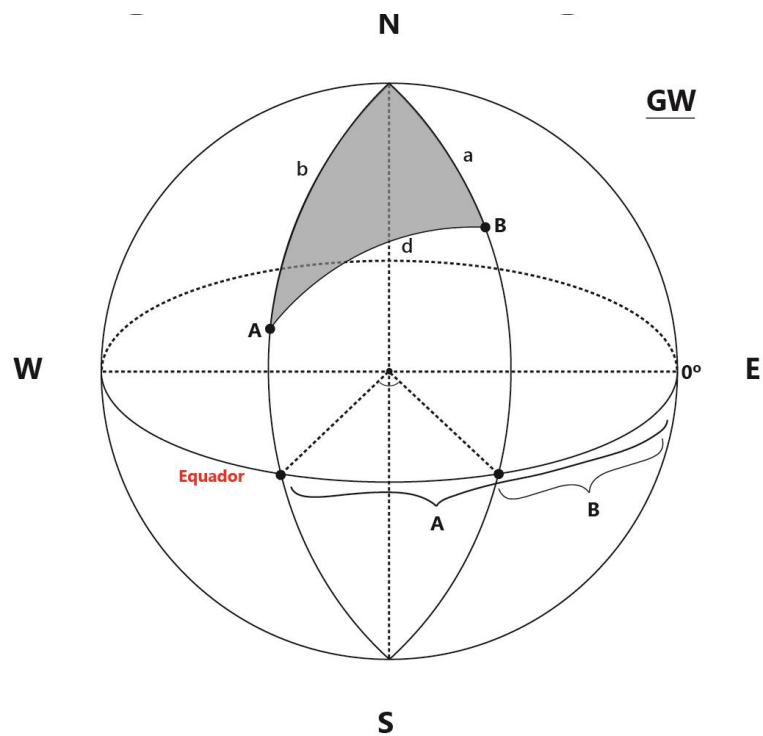


Figura 16: Distância medida sobre o círculo máximo. Fonte: Autor

Para a solução, destacaremos o triângulo esférico NAB, conforme a figura 17.

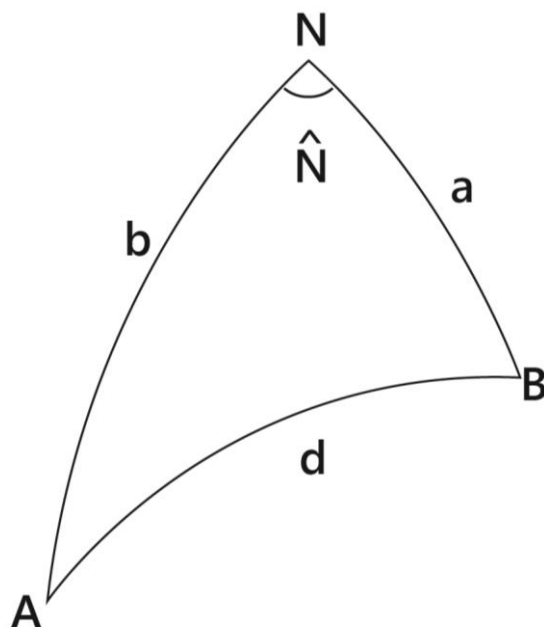


Figura 17: Triângulo para o cálculo do arco de círculo máximo. Fonte: Autor

Aplicamos a fórmula fundamental ao triângulo formado pelos pontos correspondentes ao polo Norte, A e B, figura 16. Sabe-se que a menor distância entre dois pontos na superfície esférica é o arco de círculo máximo que os une.

Temos que: $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \hat{C}$

Nesse exemplo: $\cos d = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \hat{N}$

Sendo: $a = 90^\circ - \phi_B$ (colatitude de B); $b = 90^\circ - \phi_A$ (colatitude de A) e $\hat{N} = \lambda_A - \lambda_B$ (diferença em longitude entre A e B).

De posse desses dados, podemos então calcular a distância **d**:

$$\cos d = \cos 45^\circ \cdot \cos 70^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \cos 050^\circ$$

Obtendo o seguinte resultado: $d = 48,02^\circ = 2882'$, que equivale a 2882 milhas náuticas.

1.5 Aplicações do Conhecimento de Trigonometria Esférica nas Ciências Náuticas

Observa-se que o estudo da geometria esférica, principalmente da trigonometria esférica, é bastante antigo, sendo o seu estudo e desenvolvimento, através dos séculos, sempre muito relacionado as suas aplicações na Astronomia e, também, na navegação.

Dentro do universo marítimo, os cálculos da trigonometria esférica servem como uma importante base para as seguintes atividades: na confecção de cartas náuticas, na navegação Ortodrômica (navegação em círculo máximo) e na navegação Astronômica. Em consequência, esse conhecimento é fundamental para que o navegador tenha um entendimento mais amplo no que tange ao desempenho de suas funções.

Aos profissionais da área de náutica, que é o escopo desse trabalho, o maior interesse da aplicação dos conhecimentos da trigonometria esférica se relaciona com a prática da navegação Ortodrômica e Astronômica.

1.5.1 A Navegação Ortodrômica

Denomina-se navegação Ortodrômica aquela que se realiza sobre o arco de círculo máximo que passa pelos pontos de partida e chegada. Considerando a terra uma esfera, sabe-se que a menor distância entre dois pontos na superfície esférica é o arco de círculo máximo que passa por eles.

Sabe-se que, na Marinha Mercante, todos os fatores estão relacionados ao ganho comercial, ou seja, tempo de navegação, gasto de combustível, víveres e outros. Em consequência, as derrotas ortodrômicas possibilitam otimizar esses fatores, e para dominar a

prática desse tipo de navegação, torna-se fundamental o conhecimento da trigonometria esférica.

Nos cálculos da navegação (derrota³) ortodrômica, conforme a figura 18, tem-se como base o triângulo esférico formado na superfície da terra, que possui como vértices: o ponto de partida A, o ponto de chegada B e o polo elevado do ponto de partida Pn. Observa-se que todos os lados desse triângulo são arcos de círculos máximos, sendo: o lado PnA, o arco do meridiano do ponto de partida A; o lado PnB, o arco do meridiano do ponto de chegada e o lado AB, representa a ortodromia entre os pontos A e B.

Determina-se o ângulo esférico no polo elevado (Pn) pela diferença de longitude entre os pontos A e B. Já o ângulo esférico do vértice A é denominado como rumo inicial da derrota ortodrômica⁴.

Portanto, conhecendo-se as coordenadas do ponto de partida A e a do ponto de chegada B, pode-se resolver o triângulo esférico, que serve como base da navegação ortodrômica, utilizando a fórmula fundamental, pois teremos condições de determinar os dois lados (lado PnA e lado PnB) e o ângulo esférico do polo elevado Pn.

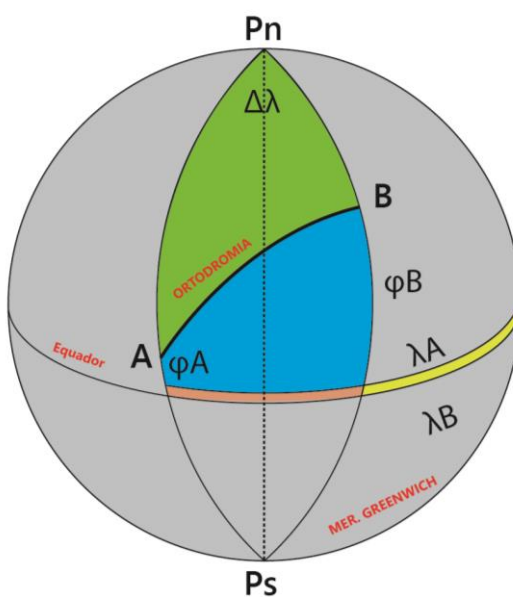


Figura 18: Distância ortodrômica entre dois pontos. Fonte: Autor

³ Derrota, na náutica, é o caminho seguido numa viagem por mar do ponto "A" para outro ponto "B".

⁴ Derrota ortodrômica é o caminho seguido sob o arco de círculo máximo, numa viagem do ponto "A" para outro ponto "B".

1.5.2 A Navegação Astronômica

O dicionário fornece a definição da palavra *navegar*, do latim *navigare*: conduzir qualquer tipo de embarcação ou aeronave de um ponto a outro. Há muito tempo o homem se aventura a cruzar os mares, verifica-se que existem registros que as primeiras aventuras marítimas datam de 4800 anos atrás. Entretanto, ao ter a noção de governar sua embarcação surge, então, a navegação marítima (MIGUENS, 1996).

Existe um tipo de navegação a Navegação Astronômica, que consiste em um método empregado pelo navegador para determinar a sua posição através das observações dos astros. Em consequência, obtendo outras informações relevantes para a segurança da navegação marítima.

Foi entre os séculos XIII e XVIII que a navegação astronômica desempenhou um papel fundamental, na era das grandes navegações, pois com o desenvolvimento do comércio, as grandes potências europeias buscavam descobrir novas rotas para as Índias. Vale destacar que essas buscas resultaram na descoberta de novas terras além dos mares já conhecidos: *O Novo Mundo* (MIGUENS, 1996).

Ainda durante esse período, vários equipamentos para auxiliar a prática da navegação astronômica foram desenvolvidos. Dessa forma, os navegadores podiam determinar sua posição no mar com grande precisão, possibilitando uma navegação mais segura e previsível.

Convém ressaltar que, para chegarmos à navegação astronômica como é praticada na atualidade, se fez necessário muito mais conhecimento de astronomia, destacando-se, entre eles, uma maior precisão dos movimentos dos corpos celestes. Dessa maneira, os navegantes conseguem obter, nos dias de hoje, rumos e posições mais confiáveis do que os antigos descobridores em suas aventuras marítimas.

1.5.2.1 O Triângulo Astronômico ou Triângulo de Posição

A navegação astronômica tem como principal fundamento o Triângulo Astronômico ou também denominado Triângulo de Posição, ver a figura 19. Verifica-se que esse triângulo é um triângulo esférico, e que ele é determinado pela combinação dos três sistemas de coordenadas utilizados em Navegação Astronômica.

A trigonometria esférica possibilita a solução do triângulo astronômico, no caso ilustrado na figura 19, o navegador conhece dois dos seus lados, a colatitude (c) e a distância polar (p), e o ângulo formado entre eles, o Ângulo no Polo (t_1). Assim, pode resolver o triângulo de posição através das fórmulas da trigonometria esférica, determinando os outros

elementos que são do seu interesse: a distância zenital do astro (z), a altura do astro (ae) e o Ângulo no Zênite ($\hat{Z}$). Temos:

$$ae = \text{arc sen} (\text{sen Lat} \cdot \text{sen Dec} + \cos \text{Lat} \cdot \cos \text{Dec} \cdot \cos t1)$$

$$\hat{Z} = \frac{\text{arc cos} (\text{sen Dec} - \text{sen Lat} \cdot \text{sen ae})}{(\cos ae \cdot \cos \text{Lat})}$$

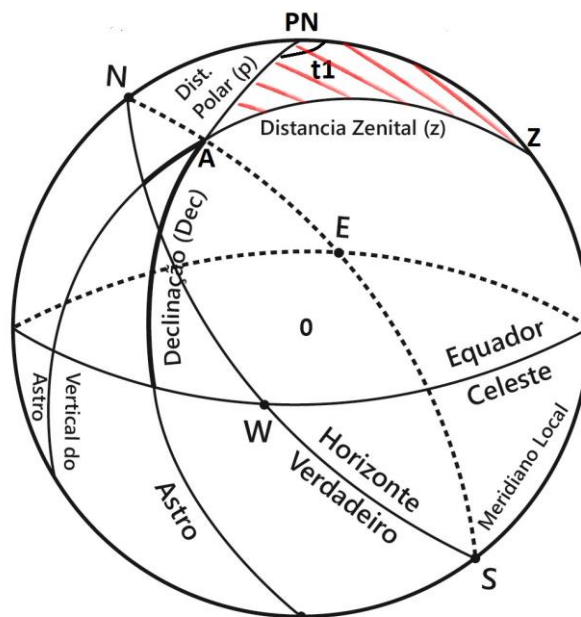


Figura 19: Triângulo de Posição. Fonte: Autor

Quadro 1: Elementos do triângulo de posição

VÉRTICE	LADOS	ÂNGULOS
POLO ELEVADO	COLATITUDE: $c = 90^\circ - \varphi$	ÂNGULO NO POLO: $t1$
ZÊNITE DO OBSERVADOR (posição estimada ou assumida)	DISTÂNCIA ZENITAL: $z = 90^\circ - ae$	ÂNGULO NO ZÊNITE: $\hat{Z}$
ASTRO OBSERVADO	DISTÂNCIA POLAR: $p = 90^\circ (+ \text{ ou } -) \text{ declinação}$	ÂNGULO PARALÁTICO

Na atualidade, surgiram novas tábuas para navegação astronômica, além das máquinas de calcular pré-programadas, ou seja, facilitando e simplificando os cálculos para a resolução do triângulo astronômico. Em consequência, os navegadores podem obter as posições através dos astros com mais precisão e rapidez.

CAPÍTULO II

A PROPOSTA DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

2.5.1 Sequência Didática

O termo Sequência Didática (SD) surgiu na França, por volta dos anos de 1980, durante uma reforma educacional. Esse termo representava um conjunto de atividades relacionadas a aprendizagem, podendo ser aplicada ao ensino de qualquer disciplina. Já em nosso país, a expressão Sequência Didática, começou a figurar no âmbito educacional no final de 1990, através da publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (FARIA, 2019).

Segundo Zabala (1998, p. 18), deve-se atribuir uma grande importância na ordenação da prática pedagógica, afirmando que uma Sequência Didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”.

Na visão do mesmo autor, de todas as variáveis que se relacionam nos processos de ensino-aprendizagem, denomina-se atividade ou tarefas as seguintes, por exemplo: exposição, debate, leitura, exercício, estudo, entre outras. Assim sendo, são elas as unidades básicas do processo de ensino-aprendizado, determinando relações interativas fundamentais entre professor/alunos e alunos/alunos.

Vale destacar o que diz Zabala (1998):

“A maneira de configurar as sequências de atividades é um dos traços mais claros que determinam as características diferenciais da prática educativa. Desde o modelo mais tradicional de “aula magistral” (com a sequência: exposição, estudos sobre apontamentos ou manual, prova, qualificação) até o método de “projetos de trabalho global” (escolha do tema, planejamento, pesquisa e processamento da informação, índice, dossiê de síntese, avaliação), podemos ver que todos têm como elementos identificadores as atividades que os compõem, mas que adquirem personalidade diferencial segundo o modo como se organizam e articulam em sequências ordenadas”. (ZABALA, 1998, p.18)

Convém ressaltar que, na sua obra “*A Prática Educativa: Como Ensinar*” (ZABALA, 1998), o pesquisador coloca quatro modelos, que servem de base para Sequência Didática, sendo abstratos e podendo ser aplicados em diferentes níveis de ensino.

Verifica-se que não somente as atividades, mas, também, a forma que são articuladas são determinantes para a especificidade de uma proposta didática. Portanto, os diferentes conteúdos apresentados exigem esforços e ajudas específicas aos estudantes, pois nem todos aprendem do mesmo modo e no mesmo tempo. Cabe ao docente ter o discernimento, e o bom

senso, dentro da dinâmica do processo, de estabelecer metas e prioridades para atingir os objetivos desejados.

Constata-se que não existe um modelo pronto e ideal, devido à complexidade do processo ensino-aprendizagem, sendo o papel do professor de fundamental importância nesse imbricado universo. A esse respeito afirma Zabala (1998):

“Os próprios efeitos educativos dependem da interação complexa de todos os fatores que se inter-relacionam nas situações de ensino: tipo de atividade metodológica, aspectos materiais da situação, estilo do professor, relações sociais, conteúdos culturais, etc. Evidentemente, nos movemos num âmbito no qual os modelos explicativos de causa-efeito são inviáveis. Certamente nosso marco de análise deve se configurar mediante modelos mais próximos à teoria do caos - em que a resposta aos mesmos estímulos nem sempre dá os mesmos resultados - do que a modelos mecanicistas”. (ZABALA, 1998, p.15).

Dessa forma, o docente ao elaborar uma sequência didática, deve procurar buscar uma abordagem que trate de forma significativa o conteúdo, ou seja, através de um encadeamento lógico das atividades e estratégias que auxiliem no processo de ensino-aprendizagem. Contudo, não deve gerar um sistema rígido, que não possa ser modificado mediante as necessidades decorrentes da própria dinâmica da sala de aula.

Ressaltando o que diz Zabala (1998):

“A prática na aula, marcada por estes condicionantes, não é o resultado de uma decisão firme sobre as finalidades do ensino e segundo uma concepção determinada dos processos de ensino/aprendizagem, mas corresponde àquilo que pode se fazer levando em conta a globalidade do contexto educacional em que se desenvolve a prática educativa”. (Zabala, 1998, p.23)

Após elaborar e aplicar uma sequência didática, o professor deve refletir e modificar, se necessário, a sua metodologia e até mesmo a sequência, pois a prática docente é muito dinâmica e complexa. Segundo Zabala (1998):

“O que nos interessa desta análise é reconhecer as possibilidades e as carências de cada unidade, com o fim de que nos permita compreender outras propostas e reconhecer, em cada momento, aquelas sequências que se adaptam mais às necessidades educacionais de nossos alunos”. (ZABALA, 1998, p.59)

Atuando como docente a vários anos na disciplina TEO-1, constato a importância de uma constante reflexão do trabalho realizado em sala de aula, pois a mesma sequência didática pode gerar aprendizagens diferentes no mesmo ano letivo aplicadas em turmas distintas.

Vale ressaltar o que afirma Zabala (1998):

“Podemos extrair do conhecimento da forma de produção das aprendizagens duas perguntas: a primeira, relacionada com a potencialidade das sequências para favorecer o maior grau de significância das aprendizagens, e a segunda, sua capacidade para favorecer que os professores prestem atenção à diversidade”. (ZABALA, 1998, p.63).

O docente deve observar-se que a sequência didática não pode ser entendida como uma “fórmula” ou “receita” que sempre irá gerar sucesso no processo ensino-aprendizagem. Cabe ao professor um papel relevante nesse contexto para atingir os objetivos educacionais desejados e, também, extrapolar os limites dos conteúdos, gerando uma maior autonomia para o aprendizado dos alunos. De acordo com Zabala (1998):

“Em tudo isto desempenha um papel essencial a pessoa especializada, que ajuda a detectar um conflito inicial entre o que já se conhece e o que se deve-saber, que contribui para que o aluno se sinta capaz e com vontade de resolvê-lo, que propõe o novo conteúdo como um desafio interessante, cuja resolução terá alguma utilidade, que intervém de forma adequada nos progressos e nas dificuldades que o aluno manifesta, apoiando-o e prevendo, ao mesmo tempo, a atuação autônoma do aluno. É um processo que não só contribui para que o aluno aprenda certos conteúdos, mas também faz com que aprenda a aprender e que aprenda que pode aprender. Sua repercussão não se limita ao que o aluno sabe, igualmente influi no que sabe fazer e na imagem que tem de si mesmo”. (ZABALA, 1998, p. 63)

O docente deve compreender e estar ciente que no complexo universo educacional, não existe uma fórmula ou modelo ideal. Dessa maneira, devemos sempre como educadores tentar reconhecer as falhas e corrigir os rumos, quando necessário, nesse imbricado processo de ensino-aprendizagem. A esse respeito diz Zabala (1998):

“Em minha opinião, refletir sobre o que implica aprender o que propomos, e o que implica aprendê-lo de maneira significativa, pode nos conduzir a estabelecer propostas mais fundamentadas, suscetíveis de ajudar mais os alunos e ajudar nós mesmos”. (ZABALA, 1998, p. 86)

Com base nessas informações, apresento, a seguir, a proposta de Sequência Didática.

2.5.2 A Proposta de uma Sequência Didática

Inicialmente, convém destacar que a elaboração, o planejamento e a metodologia das atividades didáticas apresentadas neste trabalho tiveram como base o conceito que figura na obra *Prática Educativa* de Zabala (1998). Dessa forma, uma Sequência Didática é entendida como um conjunto de atividades ou tarefas, ordenadas, estruturadas e articuladas visando à realização dos objetivos educacionais estabelecidos.

Entretanto, além da obra de Zabala (1998), vários trabalhos ajudaram de forma relevante na sequência didática proposta, entre eles, serão apresentados pela ordem cronológica, os seguintes:

- 1- PATAKI (2003): Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar.
- 2- COSTA (2013): Processo de Construção de Sequência Didática como (pro) motor da Educação Matemática na Formação de Professores.
- 3- HEIM (2013): Geometria esférica: proposta de atividades em conexão com a geografia.
- 4- RUFATO (2013): Sistemas lineares, aplicações e uma sequência didática.
- 5- FASSARELLA (2014): Sequência Didática Matemática.
- 6- SHYRLENE e OTTONI (2015): Geometria Esférica e Trigonometria Esférica Aplicadas à Astronomia de Posição.
- 7- CARBONI (2016): Astronomia no Ensino Médio: Uma Proposta de Sequência Didática.
- 8- BABINSKI (2017): Sequência Didática (SD): experiência no ensino da Matemática.
- 9- SOUZA (2017): Intervenção Prática para Aplicação de Sequência Didática com Alunos de Licenciatura em Matemática.
- 10- MOREIRA (2018): Uma sequência didática para o estudo de derivadas no Ensino Médio.

Vale ressaltar que a sequência didática proposta neste trabalho, também, foi o resultado da experiência de muitos anos como docente, em especial, na disciplina TEO-1, tendo sempre como objetivo conseguir uma aprendizagem significativa e uma autonomia cada vez maior dos discentes.

Finalizo esta seção, ressaltando o que afirma Zabala (1998):

“Em resumo, o que queremos dizer é que mais do que nos movermos pelo apoio acrítico a um ou outro modo de organizar o ensino, devemos dispor de critérios que nos permitam considerar o que é mais conveniente num dado momento para determinados objetivos a partir da convicção de que nem tudo tem o mesmo valor, nem vale para satisfazer as mesmas finalidades. Utilizar estes critérios para analisar nossa prática e, se convém, para reorientá-la em algum sentido, pode representar, em princípio, um esforço adicional, mas o que é certo é que pode evitar perplexidades e confusões posteriores”. (ZABALA, 1998, p. 65)

CAPÍTULO III

O PRODUTO: A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

TRIGONOMETRIA ESFÉRICA: SEUS CONCEITOS FUNDAMENTAIS E SUAS APLICAÇÕES

3.1 Tema: Conceitos Fundamentais e Aplicações da Trigonometria Esférica

3.2 Objetivo Geral

Proporcionar aos alunos conhecimentos dos conceitos fundamentais da Trigonometria Esférica (Geometria da Esfera) para adquirir condições de solucionar problemas inerentes a suas aplicações.

3.3 Público-alvo

Ensino Superior: Alunos do sexto período do Curso de Formação de Oficial de Náutica da Marinha Mercante (FONT), podendo ser aplicada em graduandos das áreas afins.

3.4 Pré-requisitos

Para que as atividades propostas consigam atingir os objetivos de uma aprendizagem significativa, recomenda-se que os discentes façam uma revisão dos seguintes conhecimentos:

Na disciplina de Matemática: Geometria plana: circunferência e suas propriedades, triângulos – Lei dos Cossenos e soma dos ângulos internos, trigonometria, cálculo de áreas, perpendicularismo. Geometria espacial: esfera, fuso esférico, área da superfície esférica e do fuso esférico, ângulo entre planos, intersecção de um plano com uma superfície esférica.

Na disciplina de Geografia: coordenadas geográficas, latitude, longitude, meridianos e paralelos notáveis.

3.5 Recursos Materiais e Tecnologias

Quadro Branco/ Pincel
Projetor de Multimídia
Livro-texto
Caderno para anotações
Folhas de informação
Listas de exercícios
Esfera de madeira, manipulável
Globo terrestre de plástico pequeno, manipulável

Calculadora científica
Régua, transferidor e compasso
Utilização de email e *whatsapp* para envio de folhas de informação e de exercícios
Grupo de estudos via *whatsapp*, visando dirimir dúvidas e estimular pesquisas

3.6 Recomendações Metodológicas

Sugere-se que os alunos sejam organizados em turmas de, no máximo, 30 alunos.

3.7 Tempo estimado da sequência didática

Vinte e duas aulas com cinquenta minutos de duração.

3.8 Conteúdos e Atividades

Conteúdo 1. História e desenvolvimento da Trigonometria

Atividade 1: *História e desenvolvimento da Trigonometria e das Geometrias não Euclidianas (02 aulas)*

Conteúdo 2: Conceitos Fundamentais da Trigonometria Esférica

Atividade 2: *Ângulo diedro, Triedro (ou ângulo triedro), Círculos máximos, Polos de um Círculo Máximo, Ângulos esféricos. (04 aulas)*

Atividade 3: *O Triângulo Esférico (04 aulas)*

Atividade 4: *O Triângulo Polar (ou Suplementar) (04 aulas)*

Conteúdo 3: A Fórmula Fundamental da Trigonometria Esférica

Atividade 5: *A Fórmula Fundamental da Trigonometria Esférica (04 aulas)*

Conteúdo 4: A Aplicação da Fórmula fundamental no globo terrestre

Atividade 6: *O Cálculo de Distâncias numa Superfície Esférica (04 aulas)*

3.9 Descrição das Atividades

Atividade 1:

História e desenvolvimento da Trigonometria e das Geometrias não Euclidianas (04 aulas)
Objetivos específicos:

Apresentar a evolução histórica da geometria e seus desdobramentos que deram origem à criação de uma geometria não-Euclidiana e na trigonometria denominada esférica.

Desenvolvimento:

Aula expositiva dialógica, contextualizada e orientada pela interação alunos – professor – conhecimento. Discussão e debate sobre os aspectos mais relevantes.

Material utilizado:

Quadro Branco/ Pincel
Projektor de Multimídia
Livro-texto
Caderno para anotações
Folhas de informação
Listas de exercícios
Esfera de madeira, manipulável

Sugestão para verificação da aprendizagem:

Apresentar um resumo individual, por escrito, sobre a evolução histórica da geometria e os seus desdobramentos que deram origem à criação de uma geometria não-Euclidiana e na trigonometria denominada esférica.

Atividade 2:

Ângulo diedro, Triedro (ou ângulo triedro), Círculos máximos, Polos de um Círculo Máximo, Ângulos esféricos. (04 aulas)

Objetivos específicos:

Conceituar os principais elementos necessários para compreender e definir triângulo esférico: Ângulo diedro, Triedro (ou ângulo triedro), Círculos máximos, Polos de um Círculo Máximo, Ângulos esféricos.

Desenvolvimento:

Aula expositiva dialógica, contextualizada e orientada pela interação alunos – professor – conhecimento. Discussão e debate sobre as dúvidas em relação aos novos conceitos.

Material utilizado:

Quadro Branco/ Pincel
Projektor de Multimídia
Livro-texto
Caderno para anotações

Folhas de informação
Listas de exercícios
Esfera de madeira, manipulável
Calculadora científica
Régua, transferidor e compasso

Procedimento Didático:

Utilizando a esfera de madeira os alunos visualizando e manipulando o material, puderam entender com mais facilidade os conceitos de Ângulo diedro, Triedro (ou ângulo triedro), Círculos máximos, Polos de um Círculo Máximo, Ângulos esféricos. Ver figuras 20, 21 e 22.



Figura 20: Visualização do ângulo diedro e do ângulo esférico. Fonte: Autor



Figura 21: Visualização do Triedro (ou ângulo triedro). Fonte: Autor



Figura 22: Visualização dos círculos máximos e dos polos de um círculo máximo.
Fonte: Autor

Sugestão para verificação da aprendizagem:

Lista de exercícios

Atividade 3:

O Triângulo Esférico (04 aulas)

Objetivos específicos:

Definir o Triângulo Esférico relacionando-o com o seu Triedro correspondente, além de apresentar suas propriedades.

Desenvolvimento:

Aula expositiva dialógica, contextualizada e orientada pela interação alunos – professor – conhecimento. Discussão e debate sobre as dúvidas em relação ao novo conceito e suas propriedades.

Procedimento Didático:

Utilizando a esfera de madeira, os alunos visualizaram e manipularam o material, puderam compreender, com mais facilidade, o conceito de Triângulo Esférico, relacionando-o com o seu Triedro correspondente. Ver figuras 23 e 24.



Figura 23: Visualização do Triângulo Esférico. Fonte: Autor



Figura 24: Visualização do Triedro correspondente. Fonte: Autor

Material utilizado:

Quadro Branco/ Pincel
Projektor de Multimídia
Livro-texto
Caderno para anotações
Folhas de informação
Listas de exercícios
Esfera de madeira- manipulável
Calculadora científica
Régua, transferidor e compasso

Sugestão para verificação da aprendizagem:

Lista de exercícios

Atividade 4:

O Triângulo Polar (ou Suplementar) (04 aulas)

Objetivos específicos:

Conceituar o triângulo polar, ressaltando a relação de reciprocidade (dual) de um triângulo esférico com o seu triângulo polar correspondente e vice-versa.

Desenvolvimento:

Aula expositiva dialógica, contextualizada e orientada pela interação alunos – professor – conhecimento. Discussão e debate sobre as dúvidas em relação ao novo conceito e sua importância.

Material utilizado:

Quadro Branco/ Pincel
Projektor de Multimídia
Livro-texto
Caderno para anotações
Folhas de informação
Listas de exercícios
Esfera de madeira, manipulável
Calculadora científica
Régua, transferidor e compasso

Procedimento Didático:

Utilizando a esfera de madeira, os alunos visualizaram e manipularam o material, puderam compreender, com mais facilidade, o conceito de triângulo polar e a relação de reciprocidade (dual) de um triângulo esférico com o seu triângulo polar correspondente e vice-versa. Ver figura 25.



Figura 25: Visualização do Triângulo polar e a relação de reciprocidade. Fonte: Autor

Sugestão para verificação da aprendizagem:

Lista de exercícios

Atividade 5:***A Fórmula Fundamental da Trigonometria Esférica (04 aulas)*****Objetivos específicos:**

Demonstrar a fórmula fundamental da trigonometria esférica, tendo como base o triedro correspondente ao triângulo esférico.

Desenvolvimento:

Aula expositiva dialógica, contextualizada e orientada pela interação alunos – professor – conhecimento. Discussão e debate sobre as dúvidas em relação ao novo conceito, sua relevância e aplicação.

Material utilizado:

Quadro Branco/ Pincel
Projetor de Multimídia
Livro-texto
Caderno para anotações
Folhas de informação
Listas de exercícios
Esfera de madeira, manipulável
Globo terrestre de plástico pequeno, manipulável
Calculadora científica
Régua, transferidor e compasso

Procedimento Didático:

Utilizando a esfera de madeira, os alunos visualizaram e manipularam o material, puderam compreender, com mais facilidade, a demonstração da fórmula fundamental da trigonometria esférica, tendo como base o triedro correspondente ao triângulo esférico. Ver figura 26.

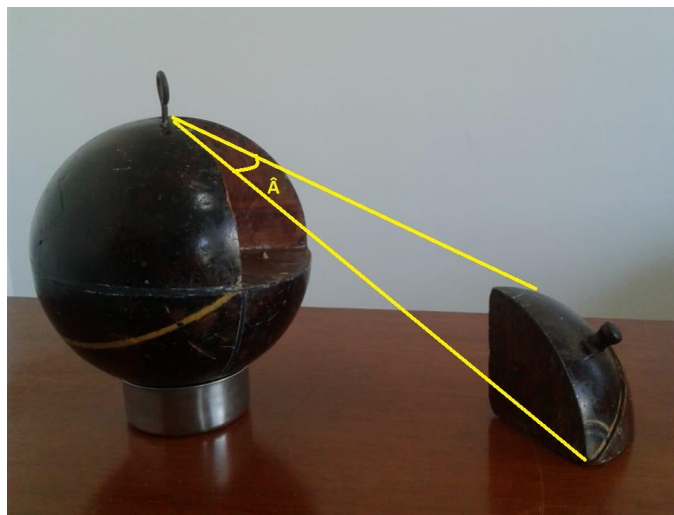


Figura 26: Visualização da demonstração da fórmula fundamental da trigonometria esférica, tendo como base o triedro correspondente. Fonte: Autor

Sugestão para verificação da aprendizagem:

Lista de exercícios

Atividade 6:

O Cálculo de Distâncias numa Superfície Esférica (04 aulas)

Objetivos específicos:

Resolver problemas envolvendo o cálculo de distâncias numa superfície esférica através da aplicação da fórmula fundamental, em particular, na superfície da Terra.

Desenvolvimento:

Aula expositiva dialógica, contextualizada e orientada pela interação alunos – professor – conhecimento. Discussão e debate sobre as dúvidas em relação a aplicação da fórmula fundamental no cálculo de distâncias, principalmente, na superfície da Terra.

Material utilizado:

Quadro Branco/ Pincel
 Projetor de Multimídia
 Livro-texto
 Caderno para anotações
 Folhas de informação
 Listas de exercícios
 Esfera de madeira, manipulável
 Globo terrestre de plástico pequeno, manipulável
 Calculadora científica

Régua, transferidor e compasso

Procedimento Didático:

Utilizando a esfera de madeira, os alunos visualizaram e manipularam o material, puderam compreender, com mais facilidade, os problemas envolvendo o cálculo de distâncias numa superfície esférica através da aplicação da fórmula fundamental, em particular, na superfície da Terra. Ver figuras 27 e 28.



Figura 27: Visualização na esfera de madeira de distâncias numa superfície esférica. Fonte: Autor



Figura 28: Visualização no globo de plástico de distâncias na superfície da Terra. Fonte: Autor

Sugestão para verificação da aprendizagem:

Lista de exercícios

3.10 Sugestão para Avaliação da Sequência Didática

Uma prova escrita, com peso 8, que envolva todos os conceitos abordados, contendo um formulário. Além das listas de exercícios, com peso 2, feitas e entregues nos prazos acordados.

3.11 Recomendação para a Confecção de Uma Esfera Similar de Isopor

Para facilitar a utilização dessa sequência didática, em outras instituições, recomenda-se a confecção de uma esfera de isopor, material de baixo custo, similar à de madeira da figura 29.

Sugere-se que o docente confeccione uma esfera similar de isopor com, no mínimo, de 15 centímetros de diâmetro, cujas dimensões são próximas da original de madeira (18 centímetros de diâmetro). Uma esfera de isopor com essas dimensões facilita a visualização e manipulação. (Ver figura 30.)



Figura 29: Esfera de madeira com 18 cm de diâmetro. Fonte: Autor



Figura 30: Esfera de isopor similar com 15 cm de diâmetro. Fonte: Autor

Em um dos hemisférios, somente, deve-se fazer, em primeiro lugar, um corte, de preferência com um estilete, para se obter um ângulo esférico de noventa graus. Além disso, recomenda-se colocar uma argola no polo, para um melhor manuseio. (Ver figura 31.)



Figura 31: Esfera de isopor similar com 15 cm de diâmetro, aberta. Fonte: Autor

Já com o ângulo esférico de noventa graus, pode-se, então, dividir esse ângulo em dois, tendo como base o círculo máximo que representa o equador. Dessa forma, o ângulo menor ficará com o valor aproximado de trinta graus e o outro sessenta graus, formando dois diedros. Além disso, recomenda-se colocar uma argola na parte externa do maior dos diedros. (Ver figura 32.)



Figura 32: Triedros da Esfera de isopor similar com 15 cm de diâmetro, aberta. Fonte: Autor

Convém ressaltar que a esfera utilizada nas aulas ficava sob a responsabilidade do monitor da disciplina TEO-1. Isso possibilitava o acesso de todos os discentes para o manuseio e a visualização dos conceitos, além dos horários das aulas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APPLE, Michael. Ideologia e currículo. São Paulo: Brasiliense, 1979.

ARRUDA, J. P.; MORETTI, M. T. Cidadania e matemática: um olhar sobre os livros didáticos para as séries iniciais do ensino fundamental. *Contrapontos*, Itajaí, v. 2, n.6, p. 423-438, 2002.

AUSUBEL, D.P.; NOVAK, J.D.; HANESIAN, H. Psicologia Educativa, un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas, 1983.

AYRES, JR., F. Trigonometria Plana y Esférica. Tradução de Mario Pinto Guedes e revisão técnica de Luiz Clovis de Oliveira. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil. 1971.

BABINSKI, Adriano Luis. Sequência Didática (SD): experiência no ensino da Matemática. Sinop, 2017. 89 f.: il. Dissertação (Mestrado). Universidade do Estado do Mato Grosso, Campos Universitário de Sinop, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática.

BINI, I. C.; BINI, M. C. C. ; MORAIS, A. C. L. O LEM e os materiais manipuláveis: práticas possíveis de ensino da matemática. I Encontro Mato-grossense de professores que ensinam Matemática, Tangará da Serra/MT, 2018, p 1-9. Disponível em: <https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/emapem/2018/paper/view/69/199> Acesso em: 20 de dez 2019.

BITTENCOURT, Circe. Em foco: História, produção e memória do livro didático. Educação e Pesquisa - Revista da Faculdade de Educação da USP. São Paulo, Universidade de São Paulo, v. 30, n. 3, set./dez. 2004, p. 471-473.

BRASIL. Marinha do Brasil, Diretoria de Portos e Costas, Ensino Profissional Marítimo, Curso de Formação de Oficial de Náutica da Marinha Mercante (FONT), 2013.

_____. Marinha do Brasil. Centro de Instrução Almirante Graça Aranha. O CIAGA. Disponível em: <<http://www.mar.mil.br/ciaga/>>. Acesso em: mar 2018.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, ensino de quinta a oitava séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARBONI, Ariovaldo. Astronomia no Ensino Médio: Uma Proposta de Sequência Didática / Ariovaldo Carboni - Sorocaba: USCAR /PROFIS, 2016. 172 f. Dissertação (mestrado) – UFSCAR / PROFIS / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2016.

CLEMENTE, João Carlos; BEDIM, Acácia. Ensino e aprendizagem da Geometria: Um Estudo a Partir dos Periódicos em Educação Matemática. Juiz de Fora: UFJF, 2015.

COSTA, Dailson Evangelista. Processo de Construção de Sequência Didática como (pro) motor da Educação Matemática na Formação de Professores. 2013. 196 f.: il. Dissertação

- (Mestrado). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2013.
- COUTINHO, Lázaro. Convite às Geometrias não-euclidianas. Rio de Janeiro, Interciência, 2001.
- _____. Trigonometria esférica: a matemática de um espaço curvo. 1.ed.: Rio de Janeiro: Interciência, 2015.
- DENECA, M. L.; PIRES, M. N. M. O Ensino da Matemática com Auxílio de Materiais Manipuláveis. 2008, p. 1-23. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/625-4.pdf>. Acesso em: 20 de dez 2019.
- DOLL Jr., William E. Currículo: uma perspectiva pós-moderna. Tradução: Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.
- ESCOLA NAVAL. Navegação Astronômica. Cap. 1. Rio de Janeiro. Editora Atlas, 1972.
- FARIA, Thiago. Proposta de Sequência Didática para o Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral / Thiago Faria – Sinop, 2019. 58 f. (Dissertação/Mestrado) Curso de Pós-graduação Stricto Sensu (Mestrado Profissional) Profmat, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2019.
- FASSARELLA, L. Sequência Didática Matemática. 2014. Disponível em: <http://www.luciofassarella.net/ensino/math/files/Fas2014.pdf> . Acesso em: nov. 2019.
- FÜRKOTTER, M.; MORELATTI, M. R. M. A Geometria da Tartaruga: uma introdução à Linguagem LOGO. In: SIMPÓSIO DE MATEMÁTICA, 4, 2009, Presidente Prudente, Anais, p. 1-29.
- GERVÁZIO, S. N. Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da matemática e incentivar à pesquisa. C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 9, p. 42-55, jul. 2017. DOI: 10.21167/cqdv9201723169664sng4255 - Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/> . Acesso em: 20 de dez 2019.
- GESSER, V. Novas Tecnologias E Educação Superior: Avanços, Desdobramentos, Implicações E Limites Para A Qualidade Da Aprendizagem. Revista Iberoamericana de Informática Educativa, nº 16, 2012, pp 23-31.
- GONÇALVES, A. O. O Livro Didático de Matemática Frente aos Avanços Tecnológicos: Novos Usos? EDUCARE, XIII CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2017, p. 10350 - 10364. Disponível em: https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/24522_12593.pdf . Acesso em: 15 de dez 2019.
- HEIM, Luciane. Geometria esférica: proposta de atividades em conexão com a geografia. Recife, 2013. 76 f.: il. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco. Departamento de Matemática, Recife, 2013.
- JACQUES, J.J.; et al. Nova Abordagem para o Ensino de Geometria Descritiva Básica. Cobenge, p. 417-422, 2001.

KALEFF, A. M. M. R. Do fazer concreto ao desenho em geometria: ações e atividades deenvolvidas no laboratório de ensino de geometria da Universidade Federal Fluminense. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 113-134.

KOPKE, R. C. M. (2001) Ensino de Geometria Descritiva: Inovando na Metodologia. In: Revista Escola de Minas, v. 54, 1. Ouro Preto, Minas Gerais.

LAKATOS, E. M. & Marcone. Fundamentos de metodologia científica. 7 ed. São Paulo: Atlas, 2010.

LIMA, I. N.; MOURA, M.J.N.A.; COSTA, M.L.C. Materiais Didáticos Manipuláveis: Investigações Sobre seu Uso nas Aulas de Matemática. III CONEDU, Natal-RN, 2016. Disponível em:

http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV056_MD1_SA8_ID8213_15082016164626.pdf . Acesso em: 20 de dez 2019.

LORENZATO, Sérgio (org.). O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

MARQUES, N. L. R. Teorias da Aprendizagem. Pelotas: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul Rio Grandense, 2013.

MATOS, C.C. de. A produção textual de alunos do ensino superior, a partir do texto jornalístico. 2016. 177 f. Dissertação (Mestrado em Letras e Ciências Humanas) – Universidade do Grande Rio. UNIGRANRIO. Duque de Caxias, Rio de Janeiro. 2016.

MIGUENS, Altineu Pires. Navegação: a Ciência e a Arte. Rio de Janeiro: Diretoria de Hidrografia e Navegação, 1996. v. 2.

MOREIRA, Antonio Flavio; SILVA, Tomaz Tadeu (Org.). Currículo, cultura e sociedade. 10. ed. São Paulo: Cortez, 2008.

MOREIRA, Fabrício Borges. Uma sequência didática para o estudo de derivadas no Ensino Médio. São Carlos, 2018. 67 p. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

MOREIRA, M. A. Comportamentalismo, construtivismo e humanismo. Coletânea de breves monografias sobre teorias de aprendizagem como subsídio para o professor pesquisador, particularmente da área de ciências. 2. ed. Porto Alegre: UFRGS, 2016. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/~moreira/Subsidios5> . Acesso em: 10 dez. 2019.

OLIVEIRA, B. K. S.; *et al.* Materiais Manipuláveis como Metodologia de Ensino e Aprendizagem de Geometria Espacial: Uma Proposta de Ensino. VII ENCONTRO NACIONAL DAS LICENCIATURAS, UECE, Fortaleza-CE, 2018, p. 1-13. Disponível em: <http://editorarealize.com.br/revistas/enalic/trabalhos/443-55326-29112018-095731.pdf>. Acesso em: 20 de dez 2019.

PATAKI, I. Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar. São Paulo, 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

_____. Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

PEREIRA, A. C. C. A Trigonometria Esférica presente na obra de triangulis de regionomontanus. X Seminário Nacional da História da Matemática. Sociedade Brasileira de História da Matemática. 2013.

RIBEIRO, F.M; PAZ, M.G. O ensino da matemática por meio de novas tecnologias. Revista Modelo, FACOS/CNEC, Osório, ano 2, vol.2, nº 2, 2012, p. 12-21.

RODRIGUES, F. C. ; GAZIRE, E. S. Reflexões sobre uso de Material Didático Manipulável no Ensino de Matemática: da Ação Experimental à Reflexão. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 187-196, 2012.

ROGENSKI, Maria Lúcia Cordeiro; Pedroso, Sandra Mara Dias. (2007). *O Ensino da Geometria na Educação Básica: Realidade e Possibilidades*. Disponível na Internet: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf>. Acessado em: 18 de dezembro de 2019.

RUFATO, Sônia Aparecida Carreira. Sistemas lineares, aplicações e uma sequência didática. São Carlos, 2013. 53 p. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2013.

SANTOS, J. J. A.; MOITA, F. M. G. S. C. Objetos de Aprendizagem e o Ensino de Matemática Análise de sua importância na aprendizagem de conceitos de probabilidade. 2º Encontro regional de educação matemática – EREM, Rio Grande do Norte, Brasil, 2009. Disponível em: http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/objetos/comunica13.pdf . Acesso em 19 de dez, 2019.

SANTOS, M. A. Novas tecnologias no ensino de matemática: possibilidades e desafios, 2010, p. 38-45. Disponível em: http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto_2011/pdf/novas_tecnologias_no_ensino_de_matematica_-_possibilidades_e_desafios.pdf . Acesso em 20 de dez, 2019.

SHYRLENE Martins de Abreu; OTTONI, Jose Eloy. Geometria Esférica e Trigonometria Esférica aplicadas à Astronomia de Posição. 2015, 41. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba - CAP Sociedade Brasileira de Matemática – SBM.

SILVA, E. R. da.; MENDES, M. J. de FREITAS. O surgimento das Trigonometrias Plana e Esférica em diferentes culturas. XI Seminário Nacional da História da Matemática. Sociedade Brasileira de História da Matemática. 2014.

SILVA, J.C. da. Os teoremas de Menelaus e Ceva. 128f. 2015. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco. UFRPE. Recife, Pernambuco.2015.

SILVA, M.A.A; BRAZ, L.H.C. Geometria espacial no ensino médio: investigação sobre as dificuldades no ensino-aprendizagem. VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Ulbra – Canoas –Rio Grande do sul – Brasil., 2017.

SILVA, Tomaz Tadeu. Documentos de identidade: uma introdução às teorias do currículo. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

SILVA, W.; CLARO, G. R.; MENDES, A. P. Aprendizagem Significativa e Mapas Conceituais. EDUCARE, XIII CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2017, p. 22694- 22705. Disponível em: https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/24179_12230.pdf . Acesso em: 15 de dez 2019.

SILVA JUNIOR, C. G. O Livro Didático de Matemática e o Tempo. Revista de Iniciação Científica da FFC, v. 7, n. 1, p.13-21, 2007.

SOUZA, Pablo Mendes Peres de. Intervenção Prática para Aplicação de Sequência Didática com Alunos de Licenciatura em Matemática / Pablo Mendes Peres de Souza. - 2017. 52 f.: il. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.PROFMAT, 2017.

TASHIMA, Marina Massaco; SILVA, Ana Lúcia da. As lacunas no ensino aprendizagem da geometria, 2009. Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_marina_massaco_tashima.pdf. Acesso em 18 de dezembro de 2019.

TAYLOR, Frederick Winslow. Princípios de administração científica. Tradução Arlindo Vieira Ramos. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1957.

TEIXEIRA, F.G. Perspectivas Axonométricas e Vistas Principais no Ensino de Geometria Descritiva. Educação Gráfica.Ano 2016 - V.20 – Nº. 02, p. 289-302.

VALE, I. Materiais manipuláveis. Edição do Laboratório de Educação Matemática. Departamento de Matemática, Ciência e Tecnologia do Instituto Politécnico de Viana do Castelo-PT.. 1ª edição – 2ª tiragem - outubro 2002.

VERGARA, S. C. Projetos e relatórios de pesquisa em Administração. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

VIEIRA, G.; PAULO, R.M. O desenvolvimento do pensamento geométrico via resolução de problemas: uma alternativa para o ensino de geometria. XIII Encontro Latino Americano de Iniciação Científica e IX Encontro Latino Americano de Pós-Graduação – Universidade do Vale do Paraíba, 2009.

VIEIRA, M. M. Educação e Novas Tecnologias: o papel do professor nesse cenário de inovações. Revista Espaço Acadêmico, nº129, 2012, p. 95-102.

ZABALA, Antoni. A Prática Educativa - Como ensinar. Porto Alegre - RS: Artmed, 1998.

ZICCARDI, L. R. N. ; FUSCO, C. A. S. . Aprendizagem Significativa de Matemática em um Curso Superior de Engenharia Utilizando o Geogebra. Ensino da Matemática em Debate (ISSN 2358-4122) v. 6, n. 2 (2019): v. 6 - n. 2 Sumário

<https://revistas.pucsp.br/emd/issue/view/2091>, PUCSP, p. 84 - 95, 31 ago. 2019.