



Saberes (re)significados a partir de discussões coletivas: multiplicação e proporcionalidade

ANDRESSA DE OLIVEIRA FARIA LORENZUTTI
MARIA AUXILIADORA VILELA PAIVA



Edifes
ACADÊMICO

ANDRESSA DE OLIVEIRA FARIA LORENZUTTI
MARIA AUXILIADORA VILELA PAIVA

**SABERES (RE)SIGNIFICADOS A
PARTIR DE DISCUSSÕES COLETIVAS:
MULTIPLICAÇÃO E PROPORCIONALIDADE**

1ª Edição



Edifes
ACADÊMICO

VITÓRIA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO ESPÍRITO SANTO
2020



Edifes
ACADÊMICO

Editora do Ifes

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Pró-Reitoria de Extensão e Produção
Av. Rio Branco, nº 50, Santa Lúcia Vitória – Espírito Santo
CEP 29056255 Tel. (27)3227-5564
E-mail: editoraifes@ifes.edu.br

Comissão Científica

Prof. Dr. Alex JOrdane de Oliveira
Profª. Drª. Sandra Aparecida Fraga da Silva
Profª. Drª. Gabriela dos Santos Barbosa

Projeto Gráfico, Diagramação e Revisão

José Almeida

Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática

Centro de Referência em Formação e Educação a Distância
Rua Barão de Mauá, 30, Bairro Jucutuquara, Vitória-ES, CEP 29040-860

Copyright @ 2019 by Instituto Federal do Espírito Santo
Depósito legal na Biblioteca Nacional conforme Decreto nº. 1.825 de
20 de dezembro de 1907.

O conteúdo dos textos é de inteira responsabilidade dos respectivos autores.

Material didático público para livre reprodução.

Material bibliográfico eletrônico.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L869s	Lorenzutti, Andressa de Oliveira Faria.
	Saberes (re)significados a partir de discussões coletivas: multiplicação e proporcionalidade [recurso eletrônico] / Andressa de Oliveira Faria Lorenzutti, Maria Auxiliadora Vilela Paiva. – Vitória, ES : Editora Ifes, 2020.
	1251Kb: il.; PDF Publicação Eletrônica. Modo de acesso: http://educimat.ifes.edu.br/index.php/produtos-educacionais
	Inclui bibliografia ISBN: 978-65-86361-08-7
1. Matemática – estudo e ensino. 2. Formação de professores. 3. Matemática - multiplicação. 4. Matemática - proporção. 5. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo. 6. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. I. Paiva, Maria Auxiliadora Vilela. II. Título.	
CDD: 510.7	



INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Instituto Federal do Espírito Santo

Jadir José Pela

Reitor

Adriana Piontkovsky Barcellos

Pró-Reitora de Ensino

André Romero da Silva

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós- Graduação

Renato Tannure Rotta de Almeida

Pró-Reitor de Extensão

Lezi José Ferreira

Pró-Reitoria de Administração e Orçamento

Luciano de Oliveira Toledo

Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional

CEFOR - Centro de Referência em Formação em Educação a Distância

Mariella Berger Andrade

Diretora do Cefor

Márcia Gonçalves de Oliveira

Coordenadoria Geral de Pesquisa e Extensão

Larissy Alves Cotonhoto

Coordenadoria Geral de Ensino

Resumo do currículo das autoras



Andressa de Oliveira Faria Lorenzutti

Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo - Ifes atuando na linha de pesquisa: formação de professores no contexto da educação em ciências e matemática. Possui licenciatura Plena em Pedagogia e Bacharel em Administração pela Universidade Norte do Paraná - Unopar. Especialista em educação infantil e séries iniciais do Ensino Fundamental, em Supervisão, Gestão e Orientação Escolar e em Educação Inclusiva: legislação e atendimento a pessoa com deficiência pela Faculdade Castelo Branco - ES. Membro do grupo de estudos e pesquisas em Educação Matemática do ES – Gepem-ES do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática – Educimat do Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes. Servidora efetiva da Secretaria Municipal de Educação de Colatina – Semed. Possui experiência como docente na educação básica: educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental, como gestora na função de supervisora e diretora escolar e como formadora de professores dos anos iniciais do ensino fundamental.

Currículo lattes:

<http://lattes.cnpq.br/1814435242756521>



Maria Auxiliadora Vilela Paiva

Pós-doutora em Ensino da Matemática – IME-UFRJ. Doutora em Matemática - PUC-RJ com ênfase em educação matemática. Mestre em matemática - IMPA. Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo - UFES. Professora aposentada da UFES e, atualmente, professora do Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes, atuando na Licenciatura em Matemática e no Mestrado Profissional em Educação de Ciências e Matemática – Educimat. Atua em Educação Matemática e tem como uma das áreas de pesquisa a Formação do Professor que ensina Matemática. Líder do grupo de estudo e pesquisa em Educação Matemática do ES - Gepem-es e fundadora da Sociedade Brasileira de Educação Matemática do ES.

Currículo lattes:

<http://lattes.cnpq.br/2158519313210506>

Apresentação

Este livro tem por objetivo retratar uma experiência de formação continuada de professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Traz discussões coletivas dessas professoras relacionadas aos conceitos de multiplicação e de proporcionalidade, a partir de suas práticas docentes com vistas ao ensino.

A experiência vivenciada no curso serviu de base de produção de dados para a nossa pesquisa de mestrado intitulada “Formação continuada de professores dos anos iniciais: um estudo coletivo do conceito de proporcionalidade” que objetivou investigar saberes do conceito de proporcionalidade para o ensino que professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental (re)significam em uma formação continuada. Participaram desse processo formativo a mestranda Andressa de Oliveira Faria Lorenzutti, a orientadora Maria Auxiliadora Vilela Paiva, um professor especialista de Matemática André Luiz dos Santos mestrando e participante do grupo de pesquisa, e onze professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

O curso que propiciou as discussões coletivas da experiência docente, denominado “Multiplicação e Proporcionalidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental”, fez parte das ações do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática do ES – GEPEM - ES e ocorreu no Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância – Cefor\Ifes, no segundo semestre de 2018. Foi ofertado na modalidade presencial, com carga horária total de 88 horas, sendo que 58 horas foram organizadas em encontros presenciais, com atividades teóricas e práticas desenvolvidas em sala de aula e as demais 30 horas foram oferecidas a distância, com a utilização do Ambiente Virtual de Aprendizagem – Ava.

Essa formação, com base na experiência e no diálogo, ampliou o olhar de cada professora em termos do seu desenvolvimento profissional, contribuindo para que cada uma se percebesse com potencialidades e necessidades a serem descobertas, valorizadas e promovidas. Nessa perspectiva de formação, cada professora assumiu o papel de sujeito, principal protagonista do processo de (re)significação de sua identidade profissional.

Este livro é composto de uma breve apresentação teórica acerca dos estudos que embasaram a organização desta formação continuada de professores, discussões dos momentos de investigação do conceito de multiplicação e de proporcionalidade, e da elaboração coletiva de situações-problema.

Esperamos que essa experiência de formação contribua para o trabalho docente e de formador de professor de cada leitor que sobre ele se interesse.

Sumário

1 - Um pouco sobre a teoria da formação.....	07
2 - A organização da formação.....	11
3 - Discussões sobre multiplicação.....	15
4 - Discussões sobre proporcionalidade.....	24
5 - Elaboração coletiva de situações-problema.....	38
6 - Conclusões.....	51
REFERÊNCIAS.....	53

1 Um pouco sobre a teoria da formação

A sustentação teórica de nosso trabalho é composta por autores que, como nós, entendem que as experiências, as discussões coletivas e colaborativas devem ser valorizadas nas ações de formação de professores, uma vez que é um caminho de descoberta da matemática para o ensino.

Dessa forma, a metodologia de formação utilizada nesse curso foi subsidiada por características da proposta de “investigação do conceito”¹, desenvolvida por Davis (2012), cuja ideia é valorizar as experiências trazidas pelos sujeitos participantes da pesquisa a partir de suas práticas, utilizando-as como eixo norteador para discussões coletivas e reflexões sobre os próprios saberes do conteúdo matemático necessários para ensinar (GIRALDO, 2017).

Para esses autores, essa abordagem de investigação é vista como uma estrutura de colaboração, em que professores interagem, (re)significando e refletindo entendimentos sobre um determinado conceito matemático, a partir de uma questão inicial que direciona as discussões, tendo como objetivo o ensino. As questões que emergem da prática profissional dos próprios professores é que estruturam a (re)significação de saberes de conteúdos matemáticos para o ensino. Sobre esses saberes para o ensino, emergentes da prática, Davis e Renert (2014) afirmam que:

Matemática para o ensino diz respeito a uma complexa rede de entendimentos, disposições e competências que não podem ser facilmente identificadas ou medidas. A complexidade imbricada na matemática para o ensino deve ser experimentada – vista, ouvida e sentida (DAVIS; RENERT, 2014, p.3, tradução nossa).

Além disso, a função dos professores é muito além de transmitir uma matemática estabelecida. Corroboramos o fato evidenciado por esses autores que enfatizam que para os professores, o saber sobre a matemática estabelecida, entendida como a matemática científica, deve estar indissociável do saber sobre os processos por meios dos quais a matemática é produzida, em coletivos da sala de aula e entendimentos individuais. Assim, Davis e Renert (2009, p. 45) afirmam que:

Professores são participantes vitais na produção de possibilidades matemáticas, dão forma e substância a matemáticas culturais, isto é, não só à matemática formal, mas também à diversidade de práticas, perspectivas e aplicações culturalmente situadas (DAVIS; RENERT, 2009, p. 45).

¹ “Investigação de conceito” é a tradução sugerida pelo professor Victor Giraldo (2017) para o termo “Concept Study” nomeado por Brent Davis (2012).

Nesse contexto, alguns princípios foram elencados com base na pesquisa de Paiva e Cade (2019) para a formação dos professores, de forma a dar-lhes autonomia e permitir que, nas discussões e reflexões coletivas, eles se tornem mais críticos de suas práticas e (re)signifiquem saberes próprios da docência. Entre eles citamos:

- I) Ser professor exige saberes próprios;
- II) A sala de aula como espaço de produção de conhecimento;
- III) Valorização da (re)significação de saberes para o ensino articulados à prática profissional docente;
- IV) Discussões coletivas de conceitos propiciam que o coletivo e o individual não sejam dicotomizados;
- V) Valorização do professor na (re)significação de práticas matemáticas.

A partir dos pressupostos da investigação do conceito e dos princípios traçados, foi organizada a formação de professores que propiciou a experiência socializada neste livro. Pensada de modo a atender às necessidades dos professores que lecionam nos anos iniciais do Ensino Fundamental, cuja formação, em sua maioria, conta com poucas horas dedicadas a estudos de conceitos matemáticos, apontada em pesquisa de Nacarato, Mengali e Passos (2009).

Motivadas a atender às necessidades do grupo de professoras, articulamos à proposta de investigação do conceito, proposta por Davis e Renert (2012), a metodologia de resolução de problemas, considerando-a como potencial para que, nas discussões grupais e coletivas, emergissem saberes do conceito para o ensino e, ainda, como possibilidade de desenvolvimento do pensamento matemático que conduz à construção significativa de conceitos.

Compartilhamos, portanto, nosso entendimento sobre essa perspectiva metodológica ao que aponta Diniz (2001, p.89) que dissertam sobre essa perspectiva defendendo que corresponde a uma forma de “organizar o ensino o qual envolve mais que aspectos puramente metodológicos, incluindo uma postura frente ao que é ensinar e, consequentemente do que significa aprender”. Reforçamos que nesse tipo de ambiente de aprendizagem o diálogo é fator relevante no processo de investigação, no qual as experiências dos professores sejam o ponto de partida, com vistas a contextualizar, a partir de suas realidades, conhecimentos prévios e práticas educativas.

Alicerçados nas perspectivas apresentadas é que desenvolvemos a formação continuada, de modo que experiências vivenciadas propiciassem a investigação do conceito da multiplicação e da proporcionalidade para o ensino, a fim de que os professores pudessem pensar e ampliar as suas estratégias de ensino a partir da compreensão coletiva do conceito a ser desenvolvido na prática docente.

A seguir, apresentamos a organização da formação e propostas utilizadas para propiciar a experiência de discussões coletivas sobre o conceito da multiplicação e da proporcionalidade para o ensino.



Sugestões de leituras complementares sobre investigação do conceito

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. Mathematics for teaching as shared, dynamic participation. *For the Learning of Mathematics*, v. 29, n. 3, p. 37-43, 2009.

GIRALDO, Victor; RANGEL, Letícia Guimarães; SIL-VA, F. M.; QUINTANEIRO, Wellerson. (Re)construindo saberes para o ensino a partir da prática: investigação de conceito e outras ideias.. In: IV SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIAS E INVESTIGAÇÕES DE/EM AULAS DE MATEMÁTICA, 2017, Campinas. *Anais...* VI SHIAM. Campinas: CEPEN, p. 1-18, 2017.

LORENZUTTI, Andressa de Oliveira Faria; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela. *Formação continuada de professores dos anos iniciais: um estudo coletivo do conceito de proporcionalidade*. 2019, 165 f., Dissertação (Mestrado Profissional em Educação e Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, Vitória, 2019.

PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela. Formação de professor numa perspectiva de trabalho coletivo e colaborativo. In: *Matemática no Espírito Santo*, Vitória, v. 2, cap. 3, 2019.

2 A organização da formação

A proposta de formação de professores foi pensada pelas pesquisadoras e validada pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática do ES – GEPEM – ES. Foram organizadas e estruturadas questões norteadoras para que as professoras pudessem trazer suas “percepções” sobre as várias ideias subjacentes ao conceito de multiplicação e de proporcionalidade que serviram como base de discussões coletivas, a partir dos entendimentos, das dúvidas e das experiências que emergiram da prática docente.



Um pouco de teoria

De acordo com Davis e Renert (2009, 2013), quando a proposta de investigação de conceito é utilizada como instrumento de dados para pesquisas sobre conhecimentos matemáticos para o ensino é possível a identificação de ênfases nas discussões coletivas. Entre elas, destacamos em nossa pesquisa:

Percepções: única intencional, sendo utilizada para a coleta de todo tipo de associações que o estudante pode estabelecer para entender e explicar uma construção matemática e que se estabelece a partir da elaboração de uma lista das diversas imagens, metáforas, impressões que emergem da reflexão a partir de uma questão disparadora;

Panorama: descrita como situações específicas do indivíduo e de sua realidade que influenciam em suas percepções;

Vinculações: que possui o propósito de examinar as implicações de diferentes percepções na compreensão, ou não, de conceitos relacionados e busca identificar, descrever e refletir sobre as diferentes implicações e relevâncias de cada uma das percepções do conceito em estudo.

Com exceção da ênfase percepções, as demais são imprevisíveis, não planejadas, decorrentes de interesses comuns, conhecimentos divergentes e encontros acidentais.

As situações-problema foram utilizadas como possibilidade de criar ambientes de discussões coletivas que permitiram a interação de ideias, já que a formação matemática dessas professoras não lhes permitia trazer, por si só, elementos importantes para a discussão de conceitos. As situações problema propostas possibilitaram a apresentação, a interpretação, o confronto, a elaboração e a reelaboração dos entendimen-

tos do grupo acerca dos conceitos matemáticos e consequentemente caminhos para a apropriação de uma matemática para o ensino. Um dos momentos de formação propunha a elaboração de situações-problema no coletivo para aplicação em sala de aula e posterior socialização, como forma de colaborar para a construção do conceito matemático em suas práticas docentes.

Considerando a organização relatada, apresentamos uma síntese, Quadro 1, da dinâmica dos encontros realizados na formação continuada proposta, com o objetivo de permitir a compreensão da estrutura da formação desenvolvida.

Quadro 1 - Síntese dos encontros da formação continuada

	Objetivos	Atividades presenciais	Atividades Ava–Moodle
1º ENCONTRO	Apresentar a proposta do curso e do projeto de pesquisa; Elaborar o primeiro quadro de percepções do conceito de multiplicação e de proporcionalidade; Identificar saberes prévios dos professores.	Acolhida e apresentação do curso/pesquisa. Apresentação do ambiente virtual de aprendizagem. Atividade individual: Pense e registre! Atividade em grupo: Quadro de Ideias da Multiplicação.	Questionário: Perfil dos participantes. Fórum 1: Vídeo: Pedagogia da Autonomia, Paulo Freire² (capítulo 1).
2º ENCONTRO	Discutir e refletir sobre situações-problema do campo conceitual multiplicativo e aspectos das vivências dos professores e, consequentemente, a matemática para o ensino.	Socialização da atividade do AVA. Continuação da atividade em grupo: Quadro de Ideias da Multiplicação.	Vídeos: Matemática é d+! Somar ou multiplicar e Matemática é d+! Avançando na multiplicação³. Fórum 2: Refletindo sobre o ensino e aprendizagem da multiplicação. Fórum 3: O que é multiplicação?
3º ENCONTRO	Sistematizar conhecimentos sobre o campo conceitual multiplicativo; Reformular o quadro de percepções (multiplicação).	Socialização da atividade do AVA a partir de questões norteadoras. (Re)significação coletiva do quadro de percepções sobre o conceito de multiplicação, a partir das respostas individuais.	Texto: De vezes e de dividir, de Thaís Gurgel⁴. Tarefa 1: Sistematizando ideias. Vídeo: Matemática é D+! Proporcionalidade⁵. Fórum 4: Refletindo sobre o vídeo.

Fonte: Elaborado pela autora (2018)

² Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=8KupomiwEA4>. ³ Disponíveis respectivamente em: <https://www.youtube.com/watch?v=hZ8g5Y7kzpQ> e https://www.youtube.com/watch?v=d_QYOj7MFsw.

⁴ Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/2661/de-vezes-e-de-dividir#>. ⁵ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=pLL65Mm-hF8>

	Objetivos	Atividades presenciais	Atividades Ava–Moodle
4º ENCONTRO	Discutir e refletir sobre situações-problema envolvendo o conceito de proporcionalidade e aspectos das vivências dos professores e, consequentemente, da matemática para o ensino	Resolução de situações-problema envolvendo o conceito de proporcionalidade (relações diretamente e inversamente proporcionais) e situações não proporcionais. Tarefa dos cartões (tarefa de comparação de acordo com Alina Galvão Spinillo).	Texto: O Papel de Intervenções Específicas na Compreensão da Criança sobre Proporção, de Alina Galvão Spinillo ⁶ . Fórum 5: Diálogos sobre o texto.
5º ENCONTRO	Discutir e refletir sobre situação-problema envolvendo o conceito de proporcionalidade; Elaborar e/ou reformular atividades.	Desafio do suco. Elaboração de situações-problema para aplicação em sala de aula.	Tarefa 2: Relato de experiência. Tarefa 3: Socialização de resultados.
6º ENCONTRO	Discutir coletivamente a aplicação das atividades; Reformular o quadro de percepção (proporcionalidade).	Socialização das atividades aplicadas e análise de resolução dos alunos. (Re)significação coletiva do quadro de percepções sobre o conceito de proporcionalidade, a partir das respostas individuais.	Dedicação à escrita do relato da 5ª quinzena.
7º ENCONTRO	Discutir coletivamente a aplicação das atividades; Vivenciar jogos da multiplicação; Avaliar a formação.	Socialização das atividades aplicadas e análise de resolução dos alunos. Vivência dos Jogos: Bilhar Holandês e Produto (Ynaitesa-es). “Roda de conversa”.	Tarefa 4: Avaliando a formação.

Fonte: Elaborado pela autora (2018)

Nas próximas sessões, destacaremos algumas propostas desenvolvidas e a (re)significação dos saberes da multiplicação e da proporcionalidade evidenciados nas discussões coletivas.

3 Discussões sobre multiplicação

Iniciamos a discussão a partir do conceito da multiplicação, importante para o entendimento das professoras sobre o conceito que seria aprofundado na investigação, no caso o conceito de proporcionalidade, o qual pertence ao campo conceitual denominado por Vergnaud (1983; 2014) como multiplicativo.

As discussões ocorreram a partir de duas questões norteadoras com o objetivo de listar as percepções iniciais das professoras sobre o conceito da multiplicação para posterior discussão coletiva e (re)significação, de modo que as professoras pudessem desenvolver uma matemática para o ensino, quais sejam:

1 - O que é multiplicação?

2 - O que é importante para o ensino e aprendizagem da multiplicação?

A primeira lista de percepções evidenciou que os professores reconhecem o conceito de multiplicação com ênfase na soma de parcelas iguais e na aplicação de procedimentos das operações, mais especificamente do algoritmo tradicional.

Essas questões são confirmadas em diálogos posteriores que evidenciaram que os professores utilizam, em sua prática docente, modos que “aprenderam” quando estudantes do ensino básico e as formas priorizadas nos livros didáticos e no currículo.



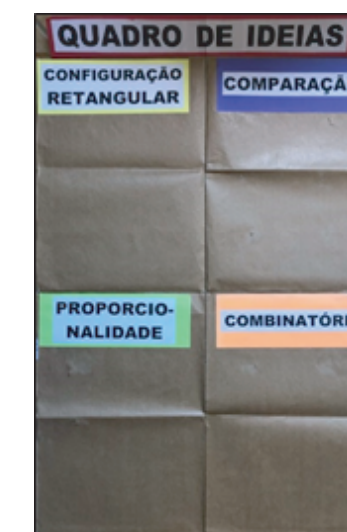
Um pouco de teoria

Ao analisar as percepções, identificamos a ÊNFASE PANORAMA descrita na teoria de investigação do conceito de Davis e Renert (2013), como situações específicas do indivíduo e de sua realidade que influenciam em suas percepções.

Essas situações específicas contribuíram para o nosso entendimento sobre a cultura matemática própria dos professores, para o nosso planejamento de ações futuras e discussões coletivas posteriores

Com base nas percepções iniciais apresentadas e dos panoramas identificados, propusemos discussões coletivas a partir de situações-problema como forma de ampliar entendimentos a respeito do conceito da multiplicação e consequentemente da matemática para o ensino. Apresentamos às professoras a atividade nomeada “Quadro de ideias” (Figura 1): cada dupla recebeu de dois a três problemas alternados, envolvendo uma ideia do campo multiplicativo (comparação, proporcionalidade, configuração retangular, combinatória) (Quadro 2), sugeridos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática (BRASIL, 1997, p. 108-112). Escolhemos problemas simples, pois nosso foco foi a discussão das ideias que representavam.

Figura 1 – Quadro de ideias



Fonte: Elaborado pela autora (2018)

As duplas tiveram um pequeno tempo para dialogar antes da discussão no coletivo. Precisaram responder à situação utilizando, no mínimo, duas estratégias diferentes de resolução e escolher no “quadro de ideias” do campo multiplicativo a qual ideia o problema estaria relacionado. A seguir, apresentamos o quadro de ideias e as situações-problema utilizadas.

Quadro 2 – Situações-problema do campo conceitual multiplicativo

Situações-problema do campo conceitual multiplicativo

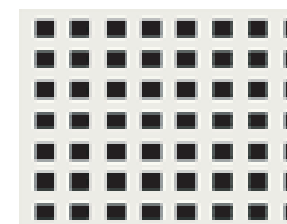
P1: Marta tem 4 selos e João tem 5 vezes mais selos do que ela. Quantos selos tem João?

P2: Lia tem R\$ 10,00. Pedro tem metade do que Lia. Quanto tem Pedro?

P3: Dois abacaxis custam R\$ 2,50. Quanto pagarei por 4 abacaxis?

P4: Marta gastou R\$ 24,00 na compra de pacotes de chocolate que custavam R\$ 3,00 cada um. Quantos pacotes de chocolate ela comprou?

P5: Num pequeno auditório, as cadeiras estão dispostas em 7 fileiras e 8 colunas. Quantas cadeiras há no auditório?



P6: A área de uma figura retangular é de 54 cm². Se um dos lados mede 6 cm, quanto mede o outro lado?

P7: Possuindo duas saias - uma preta (P) e uma branca (B) - e três blusas - uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C) - de quantas maneiras diferentes posso me vestir?

P8: Numa festa foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todos os presentes dançaram, quantos eram os rapazes?

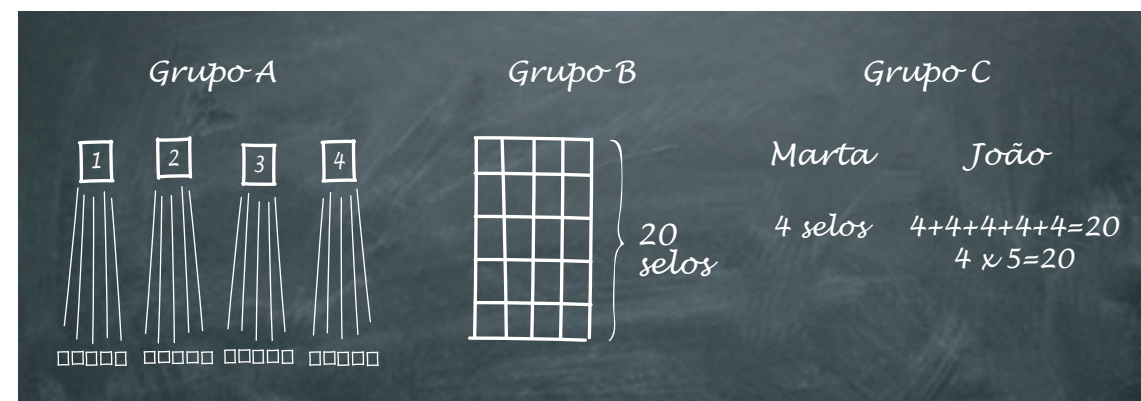
Fonte: Elaborado pela autora (2018)

Na socialização, outras duplas também tinham os mesmos problemas e, ao projetar cada problema, as duplas iam apresentando suas soluções e escolhas a respeito do “quadro de ideias”, justificando-as. Nesse momento de problematização e de discussão coletiva os participantes analisavam as propostas para a resolução da situação, apresentavam novas propostas, compartilhavam suas experiências de forma colaborativa, o que lhes proporcionava a (re)significações do conceito de multiplicação com vistas ao ensino.



Para a resolução do problema P1 - *Marta tem 4 selos e João tem 5 vezes mais selos do que ela. Quantos selos tem João?*, as professoras utilizaram diferentes representações, classificando-o em diferentes ideias do campo multiplicativo. Em um primeiro momento, os grupos A e C classificaram o problema como ideia de proporcionalidade e o grupo B como configuração retangular. Seguem algumas representações que suscitaram discussões coletivas (Figura 2).

Figura 2 – Resolução do problema P1 para discussão coletiva



Fonte: Elaborado pela autora (2018)

Já nessa primeira discussão coletiva identificamos, nas professoras, avanços em relação às ideias que envolvem o conceito da multiplicação, ideias antes desconhecidas pela maioria do grupo de professoras. As docentes, ao refletirem sobre suas representações e entendimentos, constataram que nunca haviam refletido coletivamente, em outros processos formativos, as situações-problema a partir de suas ideias e que, dessa forma, escolhiam as ideias do quadro de acordo com o modo que representavam a solução para o problema.

Em discussões coletivas, elas relacionaram o problema a três ideias diferentes (combinatória, proporcionalidade e comparação). Após reflexões e análise das justificativas apresentadas nos diálogos, em colaboração, o grupo chegou à conclusão que esse problema retratava a *ideia de comparação*, observando que, na situação, havia uma única grandeza a ser comparada - número de selos. Também apresentaram problemas que retratavam as outras ideias.



Ideia de proporcionalidade seria uma investigação bem maior de descoberta, um exemplo, se com 10 litros de leite eu faço 22 mamadeiras. Quantos litros eu precisaria para fazer 10 mamadeiras (Profª. Jóia, 2018).

Ideia de combinatória é quando estamos combinando grupos, por exemplo, 4 sabores de sorvetes e 3 tipos de caldas, aí vai sorvete de chocolate, calda de chocolate, sorvete de chocolate, calda de morango [...] (Profª. Eva, 2018).



Um pouco de teoria e exemplos

Ideia de comparação: entende-se como um único caso de medidas $A \times B = C$, ou seja, $A = C:B$, ou seja $B = C:A$. Exemplo: Marta tem 4 selos. João tem 3 vezes mais do que ela. Quantos selos tem João?

Ideia de proporcionalidade: entende-se como um isomorfismo de medida⁷, onde A está para B, na mesma medida que C está para D, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Exemplo: Na festa de aniversário da Vanessa, cada criança levou 2 refrigerantes. Ao todo 8 crianças compareceram à festa. Quantos refrigerantes havia?

Ideia de configuração retangular: entende-se como uma análise das dimensões. Exemplo: Um salão tem 5 fileiras com 4 cadeiras em cada uma. Quantas cadeiras há nesse salão?



Ideia de combinatória: entende-se como a observação de formação de conjunto. Exemplo: Uma menina tem 2 saias e 3 blusas de cores diferentes. De quantas maneiras ela pode se arrumar, combinando as saias e as blusas?

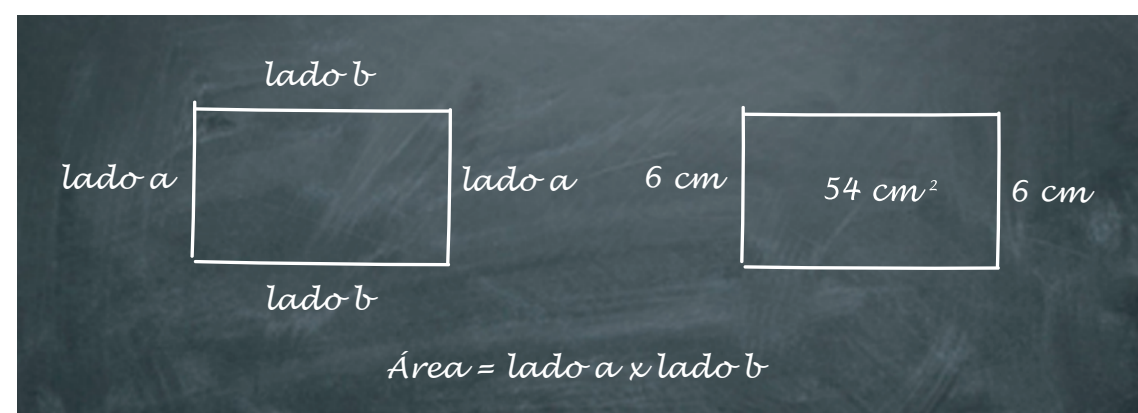
⁷ Isomorfismo de medida significa: caráter de dois conjuntos isomorfos, com uma relação de correspondência de modo que cada elemento de um corresponde a um, somente um, elemento do outro, preservando as operações de ambos.

Para além de analisar as ideias relacionados ao conceito da multiplicação, as professoras refletiram sobre três saberes importantes da ação docente, saberes do conteúdo, pedagógico do conteúdo, e do estudante SHULMAN (1986), BALL, THAMES E PHELPS (2008). No diálogo a seguir, a partir da situação P6 - *A área de uma figura retangular é de 54 cm². Se um dos lados mede 6 cm, quanto mede o outro lado?*, é possível evidenciar (re)significação do saber pedagógico do conteúdo, onde se insere o saber matemático para o ensino, por meio das discussões coletivas (Figura 3).

Pesquisadora Andressa - Então o que precisamos fazer para tornar a situação mais compreendida por nossos alunos? O que podemos utilizar para o ensino?

Profª. Nina – Podemos usar o recurso da imagem (representou no quadro – Figura 3), primeiro a gente discute com os alunos o que é área (Diálogo extraído do curso, 18 set. 2018)

Figura 3 – Representação da situação-problema P6



Fonte: Elaborado pela autora (2018)

Na Figura 3 a professora Nina representou o retângulo duas vezes. Na primeira representação, demonstrou os quatro lados da imagem, lado A, B, C e D e, na segunda representação, demonstrou o total da área, dentro do retângulo, e os lados que medem 6 cm cada. Ainda escreveu uma fórmula para a descoberta da área [Área = lado a x lado b] a ser discutida com os alunos. De acordo com a professora, o recurso da imagem poderia contribuir para que os alunos percebessem a operação necessária para solucionar a situação problema. O grupo concordou que poderia e continuaram as discussões, ampliando outras possibilidades da matemática para o ensino sem ser com o foco na fórmula, mas na construção conceitual da matemática.

Profª. André – Eu pensei que podemos construir com eles essa ideia de área de uma unidade padrão predeterminada, sendo comparado com um espaço predeterminado, ele daria conta de fazer isso, mesmo sem a ideia da fórmula.

Pesquisadora Dora – Eu só não usaria essa linguagem de unidade padrão, eu diria assim, quantos quadradinhos cabem aqui dentro, ou seja, que vou usar para recobrir essa figura.

Profª. André – Esse quadradinho pode existir fisicamente. A criança assim pode ir experimentando as possibilidades.

Profª. Linda – Pode fazer utilizando o quadradinho, aí você já tem um lado que é 6cm, aí você pergunta para ele quantos quadradinhos eles utilizarão para fazer a área total 54 cm²?

Profª. André – Você pode dar para ele 54 quadradinhos para ele dispor em um retângulo, se em um lado deu 6, quanto tem que ter esse lado para caber os 54.

Profª. Nina – Só que tem que falar com eles que não pode sobrepor. É um do lado do outro, tem que colocar uma regra, é um jogo.

Profª. Linda – E no papel quadriculado também, é só pedir para eles pintarem os quadradinhos, de modo que forme um retângulo, sendo que um dos lados tem que pintar 6, também é uma forma de construir o conceito. Brincando e aprendendo.

Profª. Jóia – Essas discussões nos possibilitaram várias ideias de como trabalhar (Diálogo extraído do curso, 18 set. 2018)



As discussões a partir das situações-problemas do campo conceitual multiplicativo e dos questionamentos levaram o grupo a perceber a necessidade de utilizar diferentes representações, antes da formalização, pois a inserção imediata de algoritmos, fórmulas e tabuada prejudicam a criatividade dos alunos ao buscar outras representações e comprometem as percepções conceituais.

Nesse contexto de compartilhamento de ideias, sobre o campo multiplicativo, iniciamos o processo de discussão visando à composição da lista das percepções (re)significada no coletivo, entendida como de autoria do grupo de professoras, sem modelos e julgamentos predeterminados. Esses momentos de discussão permitiram que as professoras participantes identificassem, por exemplo, ideias convergentes, preocupações e dúvidas comuns e práticas compartilhadas, assinalando-as, dando unidade ao grupo, atribuindo um caráter colaborativo à discussão.

Durante a composição da lista (re)significada no coletivo, surgiram várias indagações e entendimentos matemáticos. Destacamos a análise do grupo em relação a uma das percepções iniciais que dizia: a multiplicação é a operação de relacionar dois algarismos através do algoritmo de multiplicação gerando um resultado que será múltiplo dos iniciais, cada um desses algarismos tem um valor, os quais poderão ser somados quantas vezes um valor tem do outro. Surgiu o questionamento: o que é algarismo? As professoras responderam que é um código, um símbolo e chegaram à conclusão coletivamente que um símbolo não é número. Na realidade, na multiplicação, relacionam-se dois números e não algarismos. Relembaram que temos dez algarismos, de 0 a 9 para representações decimais, e que se fossem outros sistemas, seriam outros símbolos.

Ainda, discutindo a percepção inicial apresentada no parágrafo anterior, surgiu a dúvida: o resultado sempre será múltiplo dos iniciais? 3 vezes 5 é 15, 15 é múltiplo de 3 e 5, por quê? Muitas professoras apontaram não conseguir explicar bem a situação aos alunos. Em discussões coletivas, surgiu a explicação de que o 15 é múltiplo de 3 e 5 porque existe o 5 que multiplicado por 3 dá 15 e existe o 3 que multiplicado por 5 dá 15, assim o resultado gera o múltiplo dos fatores. Nos elementos da multiplicação, 3 e 5 são fatores e o 15 é o produto, o qual, portanto, é múltiplo de cada um dos fatores. De acordo com Paiva, Pereira e Freitas (2018) essa é uma leitura da matemática científica, é como os múltiplos são trabalhados em Teoria dos Números que articulada na matemática escolar dizemos que 15 é múltiplo de 3 pois a divisão de 15 por 3 dá resto zero.

Lista das percepções (re)significada no coletivo: multiplicação

A Multiplicação envolve...	O que é importante para o ensino e aprendizagem da multiplicação?
• Adição de um mesmo número, certo número de vezes. • Operação de relacionar números, gerando um resultado que será múltiplo dos iniciais. • Representação da combinação de elementos de grupos distintos. • Comparação entre grandezas de mesma natureza. • Comparação de grandezas de natureza distintas • Uma maneira de determinar o total de objetos dispostos em filas e colunas, em disposição retangular.	• Saber o conceito de número. • Ter experiências concretas de agrupamentos de quantidades iguais. • Dar significado às diferentes ideias da multiplicação. • Comparar grandezas. • Combinar elementos. • Conhecer o sistema de numeração. • Saber realizar operações de adição. • Interpretar situações-problema.

Fonte: Elaborado pela autora (2018)

As indagações e compreensões a partir das respostas iniciais do grupo para as questões norteadoras de discussão *O que é multiplicação?* e *O que é importante para o ensino e aprendizagem da multiplicação?* demonstraram a importância do coletivo para a compreensão de conceitos básicos da Matemática. Fato relevante para a (re)significação da lista das percepções no coletivo. Destacamos que não se trata de uma lista finalizada, pois defendemos a aprendizagem como construção social e as modificações possíveis nas interações de outros sujeitos. Importante pontuar, também, que, por uma decisão coletiva, alteramos o título da primeira parte do quadro por acreditarmos que a pergunta inicial *O que é multiplicação?* induzia à interpretação de haver uma única definição ao conceito investigado, sendo que o mesmo apresenta várias ideias envolvidas, discutidas durante os encontros de formação.

Por fim, ressaltamos que a reflexão colaborativa que conduziu à composição da lista apontou questões conceituais determinantes para a (re)significação do conceito da multiplicação para o ensino.



Sugestões de leituras complementares sobre o campo conceitual multiplicativo

VERGNAUD, Gérard. *A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino de matemática na escola elementar*. Curitiba: Ed. da UFPR, 2014. 322p.

LAUTERT, Síntria Labres Lautert; FILHO, José Aires de Castro; SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos (Orgs.). *Ensinando multiplicação e divisão do 1º ao 3º ano*. Itabuna: Via Litterarum, 2017⁸.

SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos; LAUTERT, Síntria Labres Lautert; FILHO, José Aires de Castro (Orgs.). *Ensinando multiplicação e divisão do 4º e 5º ano*. Itabuna: Via Litterarum, 2017⁹.

GURGEL, Thaís. Multiplicação e divisão já nas séries iniciais. *Revista Nova Escola*, set. 2009¹⁰.

⁸ Disponível em: <https://www.ufpe.br/documents/956358/956387/Ensinando+multiplica%C3%A7%C3%A3o+e+divis%C3%A3o+-+1%C2%BA+ao+3%C2%BA+ano.pdf/2fd00c0a-31b1-49de-9926-8b146ffb7701>
⁹ Disponível em: <https://www.ufpe.br/documents/956358/956387/Ensinando+multiplica%C3%A7%C3%A3o+e+divis%C3%A3o+-+4%C2%BA+e+5%C2%BA+anos.pdf/ce06949d-5ab6-4462-8bed-5e4c6af28b99>
¹⁰ Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/2662/multiplicacao-e-divisao-ja-nas-series-iniciais>. Acesso em: 11 nov 2017.

4 Discussões sobre proporcionalidade

Em relação ao conceito de proporcionalidade, a realização da primeira lista de percepções do grupo de professoras evidenciou que elas acreditavam que o ensino de proporcionalidade estava diretamente relacionado ao ensino da “regra de três”. Essa percepção demonstra a tendência de reproduzir os modelos que vivenciaram como estudantes. Contudo, pesquisas como de Ponte *et. al.* (2010); Spinillo (1993, 2002); apontam que o ensino por meio da utilização direta de procedimentos pouco privilegia a construção do aparato conceitual do aluno.

A fim de promover elementos importantes para a compreensão conceitual das professoras e subsídios de análise de suas percepções iniciais, investigamos o conceito novamente a partir de situações-problema. Apresentamos a seguir as situações propostas e algumas discussões coletivas (Quadro 3).

Quadro 3 – Situações-problema sobre o conceito de proporcionalidade

Situações-problema para discussão do conceito de proporcionalidade

Questão 1: Na pizzeria *Pizza Express*, 3 pizzas tamanho-família alimentam 8 pessoas no jantar. (Considere que todas as pessoas comam igualmente)

- a) Quantas pizzas tamanho família serão necessárias para o jantar de 40 pessoas?
- b) E se houver apenas $1 \frac{1}{2}$ da pizza tamanho-família, quantas pessoas podem jantar?

Questão 2: Doze operários constroem o telhado de uma escola em 4 dias. Quantos dias são necessários se existirem somente 3 operários? (Os operários trabalham diariamente o mesmo número de horas e ao mesmo ritmo)

Questão 3: Na figura, podemos ver o Sr. Baixo medido com *clips*. O Sr. Baixo tem um amigo, o Sr. Alto. Quando medimos a altura dos dois amigos com fósforos, o Sr. Baixo mede quatro fósforos e o Sr. Alto mede seis fósforos. Quantos *clips* são necessários para medir o Sr. Alto?



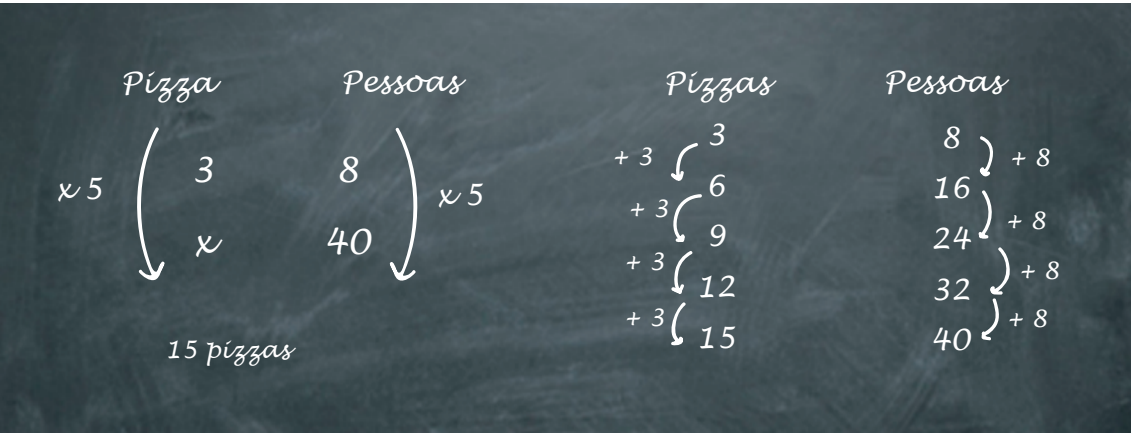
Questão 4: A mãe da Inês colocou uma toalha no varal e esta demorou 30 minutos para secar, quanto tempo demoraria se tivesse colocado três toalhas para secar ao mesmo tempo?

Fonte: Elaborado pela autora (2018)

Na resolução da questão 1 - letra A, as professoras demonstraram duas soluções, motivadas pela proposta de pensarem em estratégias diferentes de resolução que contribuíssem para o entendimento matemático do aluno. Apresentaram as soluções representadas na Figura 4, e refletiram que a segunda forma de resolução é a mesma da primei

ra, realizada por etapas, sendo que a primeira utilizou a multiplicação e a segunda utilizou a adição, evidenciando que essas poderiam ser fases do desenvolvimento do pensamento proporcional:

Figura 4 – Resolução da questão 1 do quadro 3



Fonte: Elaborado pela autora (2018)



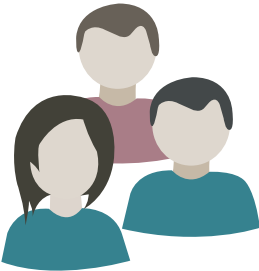
Um pouco de teoria

De acordo com Silvestre (2012) o desenvolvimento do raciocínio proporcional passa do pensamento qualitativo para as estratégias de composição e destas para as estratégias que envolvem raciocínio multiplicativo. A pesquisadora aponta três fases:

- 1 - **Fase do pensamento qualitativo**, cujas estratégias são informais e qualitativas, com recurso a expressões, tais como, “maior que”, “menor que”, “mais que”, “menos que” para comparar as grandezas;
- 2 - **Fase em que usam a estratégia de composição**, quando os alunos usam seu conhecimento sobre a adição e subtração para resolver os problemas de proporcionalidade, após identificarem a regularidade numérica dentro da razão, que utilizam para, de forma aditiva, determinarem o valor omisso;
- 3 - **Fase de maior sofisticação**, em que os alunos usam estratégias multiplicativas para resolver problemas de proporcionalidade direta.

Essa reflexão permitiu que as professoras percebessem duas das três fases apresentadas por Silvestre (2012): *fase de composição* apresentada na segunda resolução e *fase de sofisticação*, exposta na primeira resolução. Destacamos outra percepção coletiva importante, nesse momento de discussão, após uma professora ter enfatizado que teria utilizado a “regra de três” se o grupo não tivesse proposto a utilização de estratégias diferentes que ajudassem as crianças a compreenderem o conceito.

O uso da “regra de três” não deve ser o foco no ensino do conceito matemático, podendo ser utilizada como um recurso de formalização quando o aluno já compreendeu o processo de transformação que ocorre nas situações de proporcionalidade.



Assim, o grupo percebeu que o uso da estratégia do produto cruzado, também conhecido como “regra de três” é a aplicação da expressão $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ que, embora eficiente, é um processo mecânico desprovido de significado no contexto de um problema e que o desenvolvimento do conceito de proporcionalidade implica muito mais do que a aplicação de um algoritmo.

Outros entendimentos matemáticos também surgiram a partir das discussões coletivas e, consequentemente, formas da matemática para o ensino foram socializadas como possibilidade de auxiliar o aluno na compreensão de conceitos matemáticos, tais como (Figura 5):

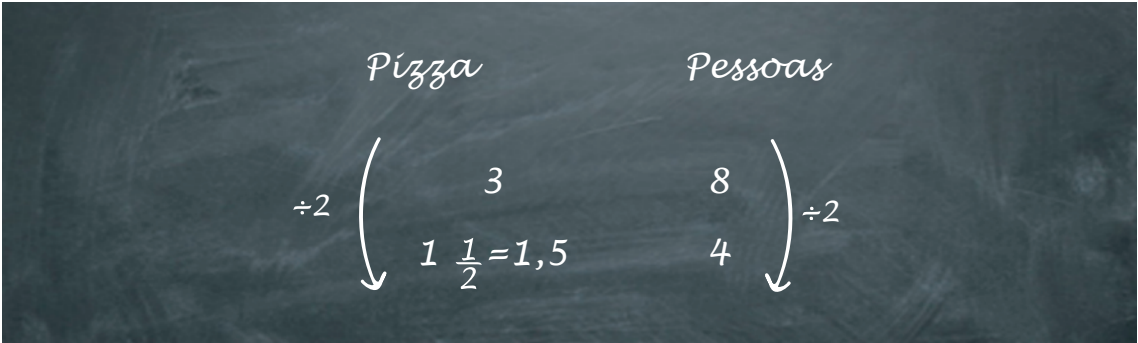
Figura 5 - Registro pictográfico – resolução da questão 1 – letra B do quadro 3



Fonte: Elaborado pela autora (2018)

O grupo sugeriu que o registro pictográfico fosse utilizado como forma de contribuir para a visualização do aluno das transformações decorrentes da relação proporcional. No caso do desenho representado na Figura 5, na primeira linha da relação “pizzas e pessoas”, temos 3 pizzas para alimentar 8 pessoas, já na segunda linha dessa relação, se só tivermos uma pizza e meia, que representa metade da que tínhamos, só conseguiremos alimentar metade do grupo de pessoas, considerando que todos comam igualmente, sugerido na situação-problema (Figura 6).

Figura 6 - Tabela vertical – resolução da questão 1 – letra B do quadro 3



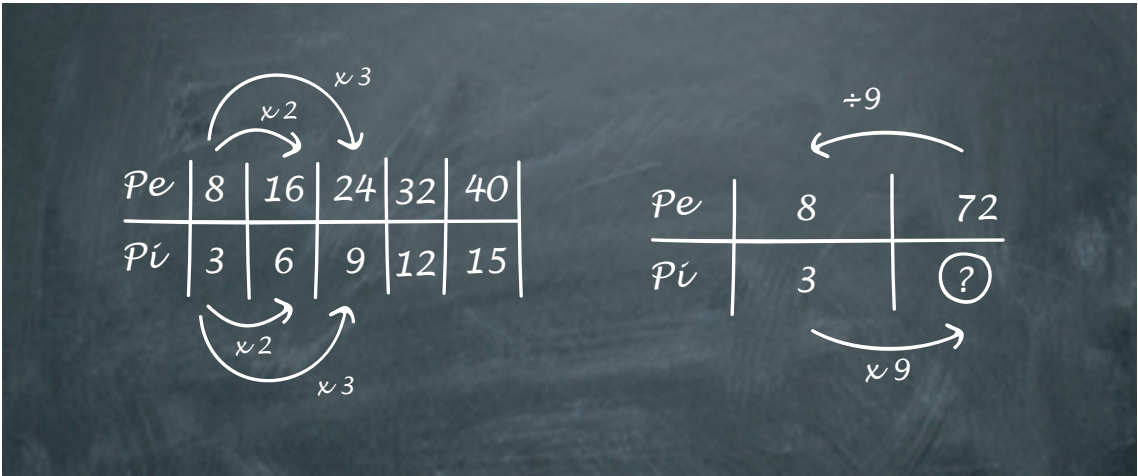
Fonte: Elaborado pela autora (2018)

Com a representação da situação-problema na tabela vertical, utilizando-se a representação numérica e setas indicativas, as professoras também defenderam que essa forma possibilita ao professor discutir com seus alunos as transformações que ocorrem em cada grandeza, ou seja, se dividimos a quantidade inicial de pizzas por 2, também teremos que dividir a quantidade inicial da grandeza “pessoas” por 2, considerando a relação proporcional sugerida na situação-problema, em que todos comam igualmente.

O grupo sugeriu, ainda, a utilização de material concreto como as caixas de pizzas, e mudanças numéricas, que são maneiras de variar os problemas e ampliar discussões de acordo com diferentes níveis de aprendizagens. Acrescentaram que para o ensino das crianças do 1º e 2º ano, por exemplo, podemos utilizar números menores e que caem em divisões exatas e depois ir graduando as dificuldades.



Figura 7 - Tabela horizontal - resolução da questão 1 – letra A do quadro 3



Fonte: Elaborado pela autora (2018)

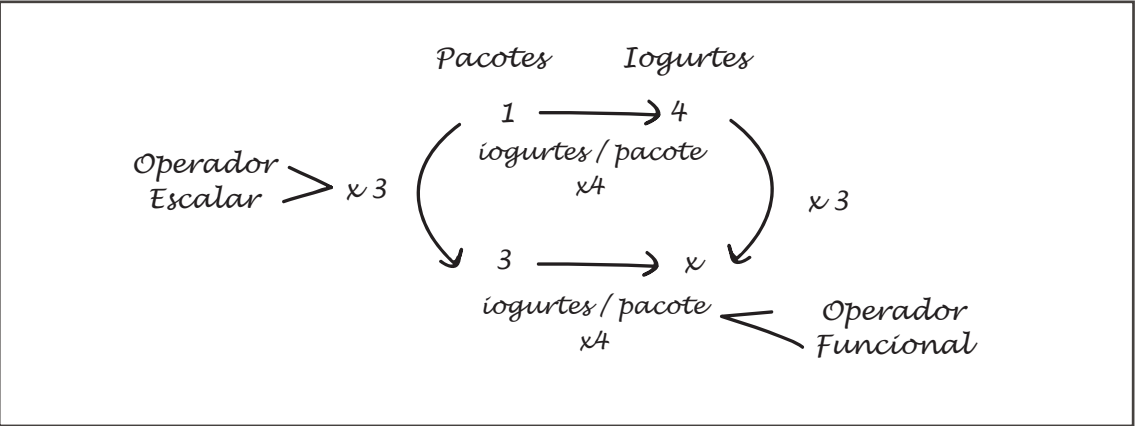
Na resolução representada na tabela horizontal (Figura 7) Pe significa pessoas e Pi significa pizzas. Foi sugerido por uma das professoras que utilizássemos números e setas na representação do problema, demonstrando as transformações que ocorrem, até que o aluno evolua no nível de sofisticação do raciocínio proporcional. Nessa representação, discutiram-se coletivamente processos multiplicativos para resolução de problemas que envolvem o raciocínio proporcional. Vinculou-se, também, a utilização, no ensino, da ideia de frações equivalentes, devido a visualização proporcionada pela organização horizontal dos dados.



Um pouco de teoria

A teoria de Vergnaud (2014) aponta, no mínimo, dois processos com caráter multiplicativo para a resolução de problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta.

Considerando o exemplo citado pelo próprio autor “Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?” (VERGNAUD, 2014, p. 239), vejamos a análise em detalhe do conjunto de relações nele presentes. Ressaltamos que essa análise é destinada aos professores, não aos alunos.



Os números 1 e 3 representam quantidades de pacotes, eles são medidas, segundo Vergnaud (2014). E os números 4 e x também representam medidas, as quantidades de iogurtes, porém, de outra natureza.

Os operadores verticais, também chamados de OPERADOR ESCALAR - x 3 –, são operadores sem dimensão, que permitem passar de uma linha à outra na mesma categoria de medidas. Os operadores horizontais, também chamados de OPERADOR FUNCIONAL – x 4 –, representam

funções e expressam a passagem de uma categoria de medida à outra, de onde o emprego de uma forma verbal que expressa uma relação: iogurte por pacote = iogurte/pacote.

Existem, de fato, duas formas de encontrar x . A primeira consiste em aplicar o operador sem dimensão, ou seja, operador escalar – $\times 3$ – à quantidade 4 iogurtes e a segunda em aplicar a função, ou seja, operador funcional – $\times 4$ – à quantidade 3 pacotes. Essas duas formas são equivalentes, mas também distintas, não devendo ser confundidas.

As reflexões coletivas a partir da apresentação dessas estratégias de resolução evidenciaram transformações de concepções matemáticas dos professores, aspectos relevantes para a teoria investigação do conceito escolhida como base para nossa formação de professores. Como segue.

Utilizar na resolução representações de números, setas e discutir coletivamente com os alunos permite o entendimento do que está sendo transformado. Isso reforça que quando nós vamos resolver, podemos seguir o que é mais fácil para nós, mas quando nós vamos ensinar precisamos conhecer um pouco mais, diferentes possibilidades, para ajudar o aluno a ter acesso ao conhecimento (Profª. Ceci, 2018).



Estamos aprendendo nesse curso, tanto o conceito como a matemática para o ensino e isso ocorre porque temos mediadores para isso. É diferente de eu tentar estudar sozinha.

Essa mediação é muito importante para que a gente chegue a essas conclusões e quebre paradigmas.

Isso não seria possível sem mediadores. E acredito que somos todos mediadores nesse grupo e isso colabora com nosso conhecimento (Profª. Flávia, 2018).

A professora Flavia, ainda nesse momento de reflexão, expressou a ideia de que *ensinar é dar oportunidade* a partir de seu relato:

“A gente ouve falar muito em desenvolver potencialidade, mas não se fala em gerar oportunidades. Há uma coisa muito séria a ser quebrada na

educação, a questão do ego do professor que está acima, pois quando o aluno chega e mostra “tá eu achei dessa forma” o professor logo diz, não, vamos fazer da outra. Em formação a gente vai quebrando isso e vai se igualando à criança no sentido de aprender (Profª. Flávia, 2018)”.



Um pouco de teoria

Os relatos das professoras nos remetem ao que defende Paulo Freire (1996, p. 26) “nas condições de verdadeira aprendizagem, os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado, ao lado do educador igualmente sujeito do processo” e ao que afirma Ponte (2014, p. 347) “[...] o desenvolvimento do professor poderá ser promovido pela sua participação em processos formativos que proporcionem oportunidades de reflexão, participando em práticas sociais, com um forte envolvimento pessoal e um suporte dado pelos grupos sociais em que participa”.

Na resolução da questão 2 - 12 operários constroem o telhado de uma escola em 4 dias. Quantos dias são necessários se existirem 3 operários? (Os operários trabalham diariamente o mesmo número de horas e ao mesmo ritmo) as professoras apresentaram a formalização a seguir (Figura 8) considerando que a situação proposta é inversamente proporcional, porque quando se reduz a mão de obra, aumenta-se a quantidade de dias. Utilizaram a operação inversa, no entanto, as discussões coletivas levaram o grupo a outras descobertas, como consta do diálogo a seguir.

Figura 8 – Resolução da questão 2 do quadro 3



Fonte: Elaborado pela autora (2018)

Profª. André – A ideia de ser inverso inicialmente pelo senso comum é essa mesma, mas se a gente for pensar em matematizar isso eu imagino que o inverso não venha dessa situação, talvez esse problema não fosse o problema ideal para a gente começar a falar sobre grandezas inversamente proporcionais. Pegando o exemplo anterior da professora Nina, vimos que na coluna dias, de cima para baixo, iremos multiplicar o número por quatro, assim na linha operários de cima para baixo, nós também iremos multiplicar o número representado pelo inverso do 4, ou seja, $\frac{1}{4}$ que de 12 é 3 e $\frac{1}{4}$ de 16 é 4. Por isso que a gente está chamando de inverso porque o operador escalar – $\times 4$ e $\times \frac{1}{4}$ – um é o inverso do outro.

Profª. Jóia – Então não é o inverso da operação e o inverso do operador escalar. Como é possível então a gente descobrir esse operador escalar?

Profª. André – Para eu saber que operador é esse eu vou pegar o 3 e dividir por 12, simplificando a fração eu tenho $\frac{1}{4}$. Então sabendo que as grandezas são inversas, enquanto uma cresce a outra diminuir eu sei que vou ter que inverter o operador escalar, ou seja enquanto você multiplica uma por $\frac{1}{4}$ a outra você multiplica por 4, que é o inverso de $\frac{1}{4}$.

Profª. Jóia – Se a gente decora, não refletimos sobre isso com nossos alunos e não compreendemos porque multiplicamos por 4 (Diálogo extraído do curso, 16 out. 2018).

Nessa primeira parte do diálogo percebemos a compreensão das professoras sobre o conceito relacionado a grandezas inversamente proporcionais e na continuação das discussões, diálogo a seguir, o desenvolvimento da matemática para o ensino, que possibilita ao professor estruturar situações de aprendizagens, interpretar conscientemente as ações dos alunos, ter flexibilidade no ensino, de modo que permita aos alunos estender entendimentos e expandir o alcance de suas possibilidades de interpretações (DAVIS; RENERT, 2014).

Profª. Nina – Como a gente faria então para introduzir o assunto?

Profª. André – Eu começaria assim, eu tenho 3 operários que fazem a obra em 16 dias, mas eu tenho pressa na obra, gente, e, aí, eu contratei 12 operários. Quantos dias eu vou gastar agora? Eu mexeria na posição dos dados numéricos eu teria crescendo aqui de 3 passando para 12.

Profª. Jóia – Poderíamos também mexer no dado numérico do problema, trabalharíamos com o dobro e a metade que é um referencial mais próximo dos alunos e que são importantes de serem utilizados para explorar as ideias iniciais do raciocínio proporcional. Esse fator pode facilitar o entendimento do aluno.

Profª. André – Gostei da ideia, se a gente escolher bem os números, para fazer a introdução fica mais fácil do aluno observar, a escolha da posição ou a escolha dos números vai influenciar no entendimento do aluno, como no exemplo a seguir (Figura 9). Onde O significa operário e D significa dias.

Profª. Alexia – Até para mim ficou mais fácil para compreender e a linha de raciocínio irá permanecer (Diálogo extraído do curso, 16 out. 2018).

Figura 9 - Adaptação numérica para a questão 2 do quadro 3 e uso da tabela horizontal

O	12
D	4

Fonte: Elaborado pela autora (2018)



Nesse momento da discussão, os professores sugeriram iniciar a ideia da proporcionalidade com relações de METADE, DOBRO, TRIPLO, considerando esse fator um facilitador, dentro das possibilidades de interpretações dos alunos.

Os professores deram continuidade nas reflexões.

Profª. Nina – Mas devemos utilizar essa maneira desde o começo. Se fosse os pequeninhos como faríamos então?

Profº. André – A proposta é utilizar a tabela para que o aluno possa perceber a regularidade da sequência numérica e depois que ele percebe essa regularidade e que a gente tenta encurtar esse processo.

Profª. Flávia – Podemos iniciar pelos registros pictográficos, que fazem parte das fases do desenvolvimento do conceito, depois avançar para o concreto, para o raciocínio aditivo, para o raciocínio multiplicativo. Essa é uma evolução do pensamento proporcional. É possível promover com alunos essa reflexão pelos desenhos e palitinhos antes da abstração, por exemplo, a tabela que apesar de trazer o significado é uma representação abstrata.

Profª. Alexia – E é um problema que faz parte da realidade dos alunos, eu por exemplo, trabalho na periferia, e tenho um quantitativo significativo de alunos que os pais são pedreiros. Então essa correlação de operários e dias, quando a gente conversa com eles, conseguem fazer essa ideia.

Profº. André – Lá no 2º ano da minha escola, as professoras utilizam uma atividade que é bastante interessante para a gente fazer essa relação. No fundo da sala, a gente coloca 16 garrafas pet, aí, você pega dois alunos e eles têm que ir ao fundo da sala pegar as garrafas e trazer para frente da sala. Esses alunos só podem trazer uma de cada vez, aí a gente vai contar quantas idas e vindas eles terão que dar que será o trabalho, e problematizar, se eu aumentar agora e ao invés de ser dois coleguinhas, forem quatro coleguinhas, vamos contar quantas idas e vindas, eles vão fazer agora, para eles terem essa vivência, caso não tenha como a colega falou. Se eu aumento a quantidade de trabalhadores, eu diminuo as idas e vindas do trabalho. Nessa situação, vocês estarão fazendo a relação de números de idas e vindas com a quantidade de trabalhadores.

Profª. Nina – Então, não necessariamente eu preciso usar a estratégia da tabela e das setas. Muito bom!! (Diálogo extraído do curso, 16 out. 2018).

Continuando as discussões coletivas a partir das duas últimas questões de proporcionalidade do Quadro 3, destacamos entendimentos que surgiram mediante a questão 4 *A mãe da Inês colocou uma toalha no varal e esta demorou 30 minutos para secar, quanto tempo demoraria se tivesse colocado três toalhas para secar ao mesmo tempo?*

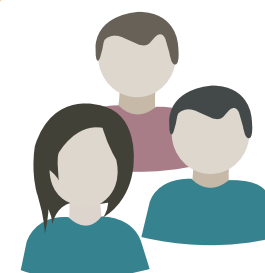


Não é porque duas grandezas estão sendo relacionadas que elas são diretamente ou inversamente proporcionais. Por exemplo, quando vamos ao pediatra vemos todo o mês o médico medindo e pesando a criança, até um determinado tempo, vemos que aquele gráfico é quase que reto, depois vemos que ele irá fazer uma curvinha.

Esse é um bom exemplo para usarmos com nossos alunos, a idade e o peso.

A massa do sujeito não é uma relação proporcional, pode até ser quando você tem meses, agora se você tem 20 anos 60kg, quanto você tiver 40 anos, terá 120kg! (Profº. André, 2018).

É importante explorar no ensino as relações não proporcionais, pelo fato de termos muitas relações no cotidiano que trabalham com duas grandezas. As duas até podem crescer juntas, mas não em uma relação proporcional.



Um pouco de teoria

As discussões coletivas apresentadas pelo grupo de professoras nos remetem ao que aponta Giraldo *et al.* (2017, p. 8):

[...] os saberes de matemática para o ensino não se caracterizam como algo que os professores adquirem a partir de referências externas ao ambiente cultural da profissão, para somente então pôr em prática, ou aplicar à sua atividade profissional. Ao contrário, a construção desses saberes está inerentemente entrelaçada à prática profissional: os saberes de matemática para o ensino são construídos ao mesmo tempo em que são mobilizados na prática profissional, e se produzem a partir dessa mobilização na prática que demonstram a construção de uma matemática para o ensino (GIRALDO et al., 2017, p. 8).

Para uma verdadeira aprendizagem e desenvolvimento do raciocínio proporcional é salutar partir do informal e do intuitivo para a formalização e uso de algoritmos (PAIVA *et al*, 1994).

E, ainda, possibilitam a percepção que os saberes próprios da docência precisam ir além de ensinar matemática, como afirma Giraldo (2018, p. 40) que nossa profissão “está associada a uma rede complexa de práticas e saberes específicos, isto é, que se estabelece a partir de uma epistemologia própria”.

Do mesmo modo como ocorreu nas discussões acerca do campo multiplicativo, retomamos a primeira lista de percepções da proporcionalidade para (re)significar no coletivo. Ao iniciar o processo de análise das percepções, os professores vincularam outros conceitos matemáticos, como o conceito de medir e a equivalência de frações, que foram importantes para a ampliação de seus entendimentos.

A partir desse movimento de (re)significação, indagações e entendimentos matemáticos surgiram e contribuíram para alterações de percepções e produção da lista a seguir.

Lista das percepções (re)significada no coletivo: proporcionalidade

A Proporcionalidade envolve...	O que é importante para o ensino e aprendizagem da proporcionalidade?
Relação entre duas ou mais grandezas obedecendo a uma condição constante. Comparação de grandezas distintas ou não. Comparação entre razões.	- Promover e analisar a relação entre quantidades. - Trabalhar a lógica da relação entre as grandezas. - Compreender o significado dos termos porção, dimensão e quantidade. - Perceber regularidade entre grandezas diretamente e inversamente proporcionais. - Compreender a relação de causa e consequência. - Perceber igualdade entre razões.

Fonte: Elaborado pela autora (2018)



Sugestões de leituras complementares sobre o conceito de proporcionalidade

PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (Org.). *O Ensino de Proporcionalidade no 1º Grau*. Laboratório de Ensino de Ciências e Matemática – LEACIM – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 1994.

PONTE, João Pedro da; SILVESTRE, Ana Isabel; GARCIA, Cristina; COSTA, Sara. *O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade directa pela exploração de regularidades: tarefas para o 1º e o 2º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Projecto IMLNA, 2010¹¹.

SPINILLO, Alina Galvão. Proporções nas séries iniciais do primeiro grau. In A. Schliemann; D. Carraher; A. Spinillo; L. Meira; J. Falcão; N. Acioly-Régner (Org.). *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, p. 13-37, 1997.

LORENZUTTI, Andressa de Oliveira Faria; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela; SANTOS, André Luiz dos. Formação de professores: uma experiência prática para o ensino de proporcionalidade. In: XIII ENEM – ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, *Anais...* Cuiabá - MT¹².

SANTOS, André Luiz dos; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela; LORENZUTTI, Andressa de Oliveira Faria. Investigando o conceito de proporcionalidade em uma formação continuada de professores. *Revista digital Sala de Aula em Foco*, v. 8 n. 1, 2019¹³.

¹¹ Disponível em: https://www.academia.edu/1079373/O_DESENVOLVIMENTO_DO_CONCEITO_DE_PROPORCIONALIDADE_DIRECTA_PELA_EXPLORA%C3%87%C3%83O_DE_REGULARIDADES
¹² Disponível em: <https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/1736>
¹³ Disponível em: <https://ojs2.ifes.edu.br/index.php/saladeaula/search/authors/view?firstName=Andressa&middleName=de%20Oliveira%20Faria&lastName=Lorenzutti&affiliation=Ifes&country=BR>

5 Elaboração coletiva de situações-problema

Após reflexões coletivas sobre situações-problema envolvendo o campo conceitual multiplicativo e o conceito de proporcionalidade, retomada, análise e (re)significação da lista de percepções no coletivo acerca dos conceitos em estudo, foi proposto ao grupo de professoras o planejamento de situação-problema para o desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta.

Pedimos às professoras que se dividissem em três grupos para elaborarem uma primeira ideia da situação-problema. Realizamos discussão coletiva sobre as situações propostas e as professoras socializaram modos de estruturar situações de aprendizagem pensados no grupo. Apresentamos a seguir as propostas, algumas discussões coletivas do planejamento e algumas reflexões coletivas a partir da socialização das experiências em sala de aula com os alunos.

Situação para o 2º ano: construção do muro

O primeiro grupo apresentou um problema para o 2º ano, ao pensar relataram ter levado em consideração que a profissão de pedreiro era algo muito comum na realidade das crianças:

Primeira ideia

Um pedreiro utiliza 16 tijolos para construir um muro de 4 metros. Quantos tijolos serão necessários para construir outro muro de 2 metros?

Nas discussões coletivas, uma professora chamou a atenção sobre a necessidade de delimitar que o “outro muro” precisa manter o mesmo padrão, sugerindo a reformulação para:

Reformulação coletiva

Um pedreiro utiliza 16 tijolos para construir um muro de 4 metros de comprimento. Quantos tijolos serão necessários para construir a metade deste muro?

Para a aplicação, as professoras pensaram em realizar em grupos de quatro alunos e acompanhar o raciocínio de cada grupo. Depois, colocar as soluções de cada grupo e discutir coletivamente com os alunos e, para sistematizar, utilizariam as soluções dadas pelos alunos, enfatizando tanto a ideia do pictograma quanto a tabela. Como proposta de intervenção, o coletivo sugeriu que as professoras poderiam fazer mudanças dos valores iniciais do problema, como forma de problematização.

Durante a socialização da experiência, vivenciada com os alunos, algumas professoras revelaram que os mesmos utilizaram os dados numéricos e fizeram a divisão direta de 16 por 4, apresentando falta de compreensão da situação-problema proposta e, consequentemente, em sua resolução. Foi sugerido pelo coletivo o uso da malha quadriculada como forma de auxiliar a visualização do aluno sobre a situação, na qual cada quadradinho representaria um tijolo. Foi identificado, ainda, que não havia necessidade de ter a medida do muro para a solução da situação, uma vez que só era necessária a informação de um muro e depois a metade dele.

Para a exploração da ideia de proporcionalidade, foi sugerida a utilização da tabela na horizontal, de modo que, na discussão coletiva, os alunos pudessem ir preenchendo a tabela, com a situação planejada e outras problematizadas, visualizando as transformações, percebendo que as grandezas, a quantidade de tijolos e a quantidade de muros com o mesmo padrão variam em uma relação proporcional. As professoras perceberam, ainda, que devem explorar, com os alunos, as relações multiplicativas dentro e entre as variáveis, ou seja, o *operador escalar*, indicado na Figura 11 com a seta azul e o *operador funcional*, indicado na Figura 11 com a seta vermelha, citado por Vergnaud (2014).

Figura 11 – Operador escalar e Operador funcional

Quant. de tijolos	Operador Escalar					
	0,5		1		2	
Quant. de muros	8	Operador Funcional	16	Operador Funcional	32	Operador Funcional
	Operador Escalar					

Fonte: Elaborado pela autora (2018)



Um pouco de teoria

Para o ensino do raciocínio proporcional, há três fases a serem consideradas: conceitual, conectiva e simbólica. Baroody e Coslick (1998, apud Silvestre, 2012, p. 40) explicam que

A fase conceptual caracteriza-se pelo encorajamento ao uso de estratégias informais numa grande variedade de problemas. Nesta fase, deve ser fomentado o raciocínio qualitativo, a utilização de problemas variados e contextualizados na realidade e encorajamento os alunos a desenvolver estratégias próprias. A fase conectiva é definida como o desenvolvimento do simbolismo proporcional apoiado no simbolismo com o que os alunos já conhecem. Nesta fase, os autores aconselham que a noção de proporção seja desenvolvida por meio de problemas, recorrendo a desenhos de figuras e esquemas que ajudem a resolver problemas, desenvolvendo deste modo uma compreensão explícita sobre proporções enfatizando as características matemáticas das situações que envolvem relações de proporcionalidade direta. Finalmente, na fase simbólica, os alunos devem ser encorajados a discutir as representações e a verificar se as suas respostas sobre as proporções estão corretas (BAROODY; COSLICK, 1998, apud SILVESTRE, 2012, p. 40).

Situação para o 4º ano: feira do Empreendedor

O segundo grupo apresentou uma situação-problema para turma do 4º ano:

Na segunda feira do empreendedor a turma do 4º ano arrecadou R\$ 15,00 em moedas de R\$ 0,25. Quantas moedas de R\$ 0,25 são necessárias para atingir este total?

Nas discussões coletivas surgiu a dúvida se o problema seria sobre a ideia de proporcionalidade. Uma das professoras que elaborou defendeu que sim, pois estava relacionando duas grandezas, a quantidade de moedas e o valor das moedas, apresentado o exemplo “Se eu tenho 1 moeda tenho 25 centavos, se eu tenho 2 moedas tenho 50 centavos, se eu

tenho 4 moedas tenho 1 real, até chegar ao total de valor que é 15 reais (Profª. Gabi, 2018)”. Uma das pesquisadoras chamou a atenção alegando que essa relação de proporcionalidade não é tão natural e a professora Gabi demonstrou no quadro como pensaram em desenvolver a ideia proporcional com os alunos utilizando a tabela (Figura 12).

Figura 12 - Problema para 4º ano - proposta de tabela vertical para resolução

2) Na segunda Feira do empreendedor a turma do 4º ano arrecadou R\$ 15,00 em moedas de R\$ 0,25. Quantas moedas de R\$ 0,25 são necessárias para atingir este total?

4º ano	R\$ 0,25	
Quant. moedas	valor	
2	0,50	
4	1,00	
$\times 15$ 60	15,00	$\times 15$

Fonte: Elaborado pela autora (2018)

Durante a representação, foi sugerido que quando os alunos chegassem à ideia de que 4 moedas valem R\$1,00, que as professoras poderiam perguntar diretamente a eles: Se vocês têm o 1 e querem chegar ao 15, o que devem fazer? Durante as reflexões coletivas, o grupo de professoras percebeu que é só multiplicar o 1 por 15 e, a partir dessa percepção, apontaram que para a descoberta da quantidade de moedas de R\$ 0,25 é também necessária a multiplicação da quantidade de moedas por 15.

Na análise da situação, o grupo de professoras apontou que se os alunos pegassem 15 reais e dividissem por 25 centavos de modo direto, dessa forma não estariam explorando o conceito de proporcionalidade e sim, o de divisão. A professora que elaborou e apresentou a proposta para o grupo reforçou que, nessa faixa etária, os alunos utilizam caminhos diferentes, pois muitos desconhecem a divisão de números decimais.

Foi discutido, ainda, que o professor poderia ir estimulando os alunos a experimentarem, quantas moedas de 25 centavos tem em um real, o que é uma ideia da divisão, e depois indicar a transformação para 15 reais, problematizando também outros valores na situação proposta. Assim, ao utilizar a representação em tabelas, poderiam explorar a ideia de divisão e de proporcionalidade direta, dependendo da proposta de resolução e das mediações do professor.

Como proposta de intervenção com os alunos, o grupo de professoras sugeriu o uso de dados numéricos diferentes, mais simples e mais complexos, moedas recortadas do material complementar para uns grupos e outros não, de modo que todos os alunos pudessem ser

protagonistas no processo de aprendizagem. Ainda destacaram a importância de ensinar aos alunos sobre o trabalho em grupo, relatando-se uma sugestão dessa modalidade de trabalho.

Como sugestão de trabalho em grupo, uma professora relatou que separa a turma em grupos e a cada trabalho é nomeado um líder diferente para expor a ideia do grupo, de modo que todos precisam se envolver porque um será o relator naquele trabalho, ou seja, o grupo tem 4 componentes e a professora faz o trabalho em 4 aulas, em cada aula um será o líder desse grupo.



Na vivência do planejamento em sala de aula, a maioria das professoras relatou que seus alunos utilizaram o desenho e a contagem de um por um e foram adicionando, levando-os a perceber que os alunos utilizaram a estratégia aditiva para a resolução.



Os alunos para descobrir foram desenhando as moedas e somando, de 0,25 em 0,25, até 1,00.

Depois, na contagem, perceberam que podiam fazer multiplicando.

O que eles mais perguntaram foi a operação que eles deviam usar, multiplicação ou divisão (Profª Gabi, 2018).

Um aluno chamou minha atenção porque ele fez primeiro, 15 bolinhas e depois dentro de cada bolinha ele colocou 4 pauzinhos, aí eu perguntei o que são esses pauzinhos aqui?



Ele disse, moedas de 25 centavos. Ele partiu do pressuposto de que em 1 real tenho 4 moedas de 25 centavos, e depois fez por contagem. Como é dinheiro, ele fez a relação, mas não percebeu a multiplicação (Profª. Bilyk, 2018).

Durante as socializações e discussões coletivas, as professoras expuseram a percepção de que os alunos utilizaram somente o raciocínio aditivo para a resolução do problema e demonstraram dificuldades em como poderiam auxiliar os alunos no avanço do pensamento para o raciocínio multiplicativo. As discussões coletivas colaboraram apontando a necessidade de se fazerem intervenções com questionamentos e com organização do pensamento, tal como: *Quando eles descobriam que 4 moedas dava 1 real, caberia perguntar: Se eu já sei que 4 moedas dá 1 real, não teria maneira de descobrir quanto eu preciso para 15 reais, sem ficar contando?* Nesse momento, o professor André socializou uma experiência de sua prática docente.

Fazer uma sequência, para eles fica mais visual, não perguntando direto o 15. Ir construindo, assim, para 1 real, nós fizemos 4 moedas e para 2 reais? E para 3 reais? Então para 1, 4x1, para 2, 4x2, para 3, 4x3, e para 15? Aí fica como automático, quando você faz a sequência, você faz um salto mais tranquilo (Prof. André, 2018).



Diante do relato, o grupo percebeu que, quando os alunos investigam as relações entre os números, põe, em evidência, regularidades numéricas, ou seja, quando eu relaciono com o aluno as moedas, 4 a 1, 8 a 2, [...], estou desenvolvendo o raciocínio proporcional. As professoras vinculam que o modo sugerido pelo professor pode levá-los a relacionar a tabuada do número 4, compreendendo o processo e não só o resultado.



Um pouco de teoria

De acordo com Nunes, Campos, Magina e Bryant (2009, p. 84-85): o raciocínio aditivo refere-se a situações que podem ser analisadas a partir de um axioma básico: o todo é igual à soma das partes. Essa afirmativa resume a essência do raciocínio aditivo. Se queremos saber qual o valor do todo, somamos as partes; se queremos saber o valor de uma parte, subtraímos a outra parte do todo; se queremos comparar duas quantidades, analisamos que parte da maior quantidade sobra se retiramos dela uma quantia equivalente à outra parte. Por essa razão, diz-se que o invariante conceitual do raciocínio aditivo é a relação parte-todo. Em contraste, o invariante conceitual do raciocínio multiplicati-

vo é a existência de uma relação fixa entre duas variáveis (ou duas grandezas ou quantidades). Qualquer situação multiplicativa envolve duas quantidades em relação entre si.

Situação para o 3º ano: promoção de cadernos

O terceiro grupo elaborou um problema para a turma do 3º ano:

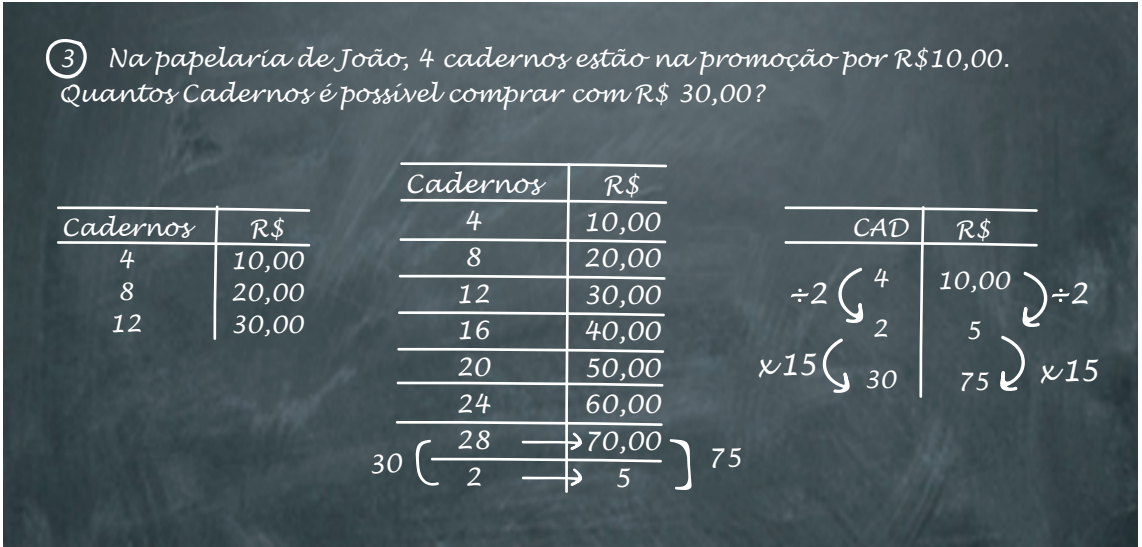
Primeira ideia
Na papelaria do João, 4 cadernos estão em promoção por R\$ 10,00. Com R\$ 30,00, quantos cadernos é possível comprar?

Nas discussões coletivas, uma professora chamou a atenção para a forma como foi realizada a pergunta e o grupo decidiu modificar para:

Reformulação do coletivo:
Na papelaria do João, 4 cadernos estão na promoção por R\$ 10,00. Quantos cadernos é possível comprar com R\$ 30,00?.

O grupo que elaborou a situação expôs tabelas como modos de propor as discussões coletivas para seus alunos, para análise do coletivo (Figura 13).

Figura 13 - Problema para o 3º ano – proposta de tabelas para resolução



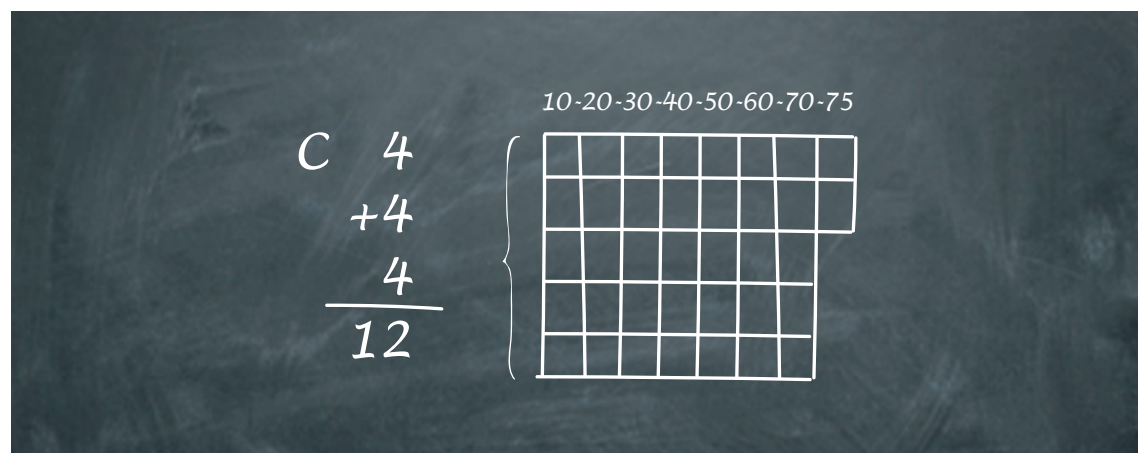
Fonte: Elaborado pela autora (2018)

Na análise, as professoras avaliaram possíveis interpretações que os alunos poderiam apontar e variações da situação, tais como: Se eu tiver R\$ 5,00 eu compro 2 cadernos? Se 4 cadernos custam R\$10,00. Quanto custam 30 cadernos? Foi lembrado nas discussões coletivas que trabalhar com a resolução de problemas é apresentar diferentes situações para problematizar. Foi destacado, também, que, ao utilizar o recurso da tabela, é importante a investigação das relações entre os números e a utilização de setas que indiquem as transformações e as regularidades numéricas até que o aluno as compreendam.

Na socialização da experiência vivenciada com os alunos, uma professora compartilhou que seus alunos do 5º ano precisaram do apoio do desenho, demonstrando dificuldades em compreender o enunciado do problema, principalmente quando feita a mudança da questão para: Quanto eu pagaria por 30 cadernos?

Uma professora do 3º ano relatou ter vivenciado a mesma situação, que um de seus alunos desenhou quadradinhos para descobrir a resposta da primeira questão: *Quantos cadernos é possível comprar com R\$ 30,00?* e deu continuidade à representação à medida em que era desafiado, como o caso da segunda questão: *Quanto eu pagaria por 30 cadernos?*, cuja resposta era R\$75,00 (Figura 14).

Figura 14 – Solução do problema do 3º ano: aluno da professora Bilyk



Fonte: Elaborado pela autora (2018)

A professora Bilyk continuou sua socialização compartilhando que uma de suas alunas preferiu descobrir o valor unitário e depois foi realizando os outros desafios, com maior facilidade. Mas também relatou que houve alunos que fizeram a operação 4×10 , os quais, mesmo com a leitura do enunciado no coletivo, não conseguiram perceber o erro naquele momento. O grupo de professoras colaborou com a professora apresentando modos que poderiam ajudar nas interpretações dos alunos em relação ao enunciado e aos dados numéricos.

É preciso ir questionando o significado de cada número que está sendo usado na operação, para colaborar com a percepção dos dados do problema, com perguntas do tipo: O que o problema está pedindo? Quais são os dados que ele nos dá?



Durante as discussões coletivas, a partir das situações-problema planejadas, ocorreram reflexões sobre o trabalho de matemática mais crítica, aproximando-se da realidade das crianças, visto que isso colabora para suas percepções e compreensões matemáticas. Ainda, mediante dificuldades apresentadas pelas professoras em aplicar a atividade e dos alunos em interpretar e comunicar o seu processo de resolução, o grupo percebeu que a prática de trabalhar com a resolução de problemas precisa ser desenvolvida com frequência para que as crianças tenham espaços de tentar, investigar, conjecturar e daí proporem uma comunicação matemática. Entendimentos relevantes às práticas docentes surgiram nas discussões coletivas.



É importante trabalhar as ideias dos campos conceituais juntas com a utilização de diferentes representações e operações e separadas somente na hora de ensinar os algoritmos (Profª, Jóia, 2018).

A resolução de problema deve ser utilizada como objeto de discussão coletiva no início do processo do ensino e não no fim do processo, como lista de exercício que a gente “apelida” de problema, mas que, na verdade, são exercícios de fixação.



Por esse fator, é que os alunos estão habituados a pegar os dados dos problemas e resolver com a operação que a gente acabou de ensinar, sem uma reflexão (Profª. Eva, 2018).

A gente precisa habituar os alunos a fazer a leitura e interpretação do texto nas aulas de matemática também porque sempre ficamos naquela que o menino não sabe ler e por isso não resolve.

Assim, quando a gente coloca problemas diferentes com o mesmo número, você está forçando ele a voltar no texto e analisar, agora são os mesmos números, mas a história é diferente (Prof^o. André, 2018).



Continuando as discussões sobre a metodologia de resolução de problema, foi enfatizado que o professor deve propor uma situação de cada vez, deixando que os alunos resolvam, observem seus processos e depois socializem e discutam coletivamente as estratégias utilizadas na resolução. Com isso a professora Bilyk relatou:

Eu demorei mas eu percebi isso, porque às vezes você quer passar logo uns cinco problemas e não funciona, você passa um e eles ficam envolvidos, quando eu passava vários eles davam prioridade a copiar, então agora, eu passo um, e todos vão resolvendo e eu vejo que a maioria produz, até aquele que tem mais dificuldades porque eles não precisam correr para copiar, eu vejo que o envolvimento é bem maior e outra coisa, você consegue fazer uma discussão coletiva mais produtiva (Prof^a. Bilyk, 2018).



Acrescentamos que a discussão coletiva gera a aprendizagem, porque um utilizará o raciocínio aditivo, mas o outro já vai ter avançado para o raciocínio multiplicativo.

É nessa hora que o professor precisa intervir para que o aluno perceba que pode utilizar outras estratégias, como multiplicação, tabelas, desenhos, como formas de expandir suas aprendizagens. Reforçamos que depois da discussão é importante uma síntese com os alunos sobre as aprendizagens e o registro no caderno com exemplos, para a organização do pensamento.

Uma das professoras expôs lembranças de discussões da nossa proposta de formação, a partir das situações-problema.

Foi isso que fizemos na formação, na proposta de resoluções dos problemas, e isso ampliou nossa visão para diferentes estratégias (Prof^a. Nina, 2018).



Foi realizada uma breve avaliação com o questionamento:

Como foi para vocês planejarem essa atividade no coletivo e quais foram suas principais aprendizagens?

As professoras relataram ter sido desafiador, principalmente, na hora de elaborar questionamentos que não gerassem dupla interpretação, que fossem objetivas, e nas problematizações, justificando que estavam acostumadas com a utilização do livro didático. Apontaram que a elaboração, análise e discussões coletivas foram muito boas para a reflexão e o pensar sobre suas práticas, pois enriqueceram seus olhares para as interpretações possíveis dadas pelos alunos e os modos de intervenção.

Acrescentaram que o coletivo gerou um conflito saudável que colaborou para o pensamento crítico, a interpretação, despertando seu poder de argumentação, fazendo-as romper a barreira da individualidade, favorecendo a construção do coletivo e o trabalho em equipe. Perceberam que a matemática não deve ser trabalhada com a ideia da certeza, ou seja, a ideia do acerto e erro, que é preciso usar a matemática para levantar discussões no coletivo para compreensão dos processos de soluções. Uma das professoras argumentou “O erro é uma oportunidade tremenda para a gente discutir, por que o aluno pensou isso?” (Prof^a. Nina, 2018).

Por fim, as discussões coletivas levaram o grupo de professoras a compreender que o mais importante não é a classificação do “certo” e “errado”, mas, os processos de (re)significação que os alunos vão elaborando para chegar a uma resposta. A valorização desse processo é fonte importante para as ações docentes e o resgate da escola como espaço de pensar, com vistas ao desenvolvimento de conceitos e não de procedimentos somente.



Sugestões de leituras complementares

COSTA, Sara; PONTE, João Pedro da Ponte. O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do Ensino Básico. *Revista da Educação*, v. XVI, n. 2, p. 65-100, 2008¹⁴.

SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (Orgs.). *Ler, escrever e resolver problema: habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2007.

NEVES, Iara Conceição Bitencourt; SOUZA, Jusamara; SCHAFFER, Neiva Otero; GUEDES, Paul; KLUSENER, Renita (Orgs.). *Ler e escrever compromisso de todas as áreas*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2004)

VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. *Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas*. Porto Alegre: Artmed, 2006.

¹⁴ Disponível em: [file:///C:/Users/Usuario/Downloads/08-Costa%20e%20Ponte%20\(RE\).pdf](file:///C:/Users/Usuario/Downloads/08-Costa%20e%20Ponte%20(RE).pdf)

6 Conclusões

A formação continuada apresentada neste livro evidenciou discussões coletivas sobre os conceitos da multiplicação e de proporcionalidade e, conseqüentemente, o desenvolvimento do raciocínio matemático de professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental. À luz das teorias, as práticas socializadas, e discutidas coletivamente, e a articulação com a teoria foi o contributo para o desenvolvimento profissional das professoras.

As reflexões coletivas e colaborativas, a partir de questões disparadoras, de suas percepções iniciais e de situações-problema, modificaram as formas das professoras de relacionar o saber matemático científico com os saberes da prática docente, potencializando suas capacidades no que diz respeito à capacidade em estruturar situações de aprendizagem para seus alunos.

A ação formativa despertou nas professoras interesse pelo ensino de uma Matemática reflexiva, que considera o cotidiano infantil e os processos de construção do conhecimento de seus alunos e, principalmente, o respeito a seus espaços e tempos. Seus depoimentos, ao final de cada atividade e durante a formação como um todo, apontam para indícios de mudanças de concepções.

Nos momentos de reflexão, as professoras expuseram a importância de refletir a partir da própria prática e também a partir das experiências trazidas por outros participantes do grupo, em um movimento colaborativo. Outra questão apontada pelas professoras foi o quanto elas (re)significaram saberes nas discussões em relação a conceitos básicos e fundamentais, trazendo-lhes maior segurança a práticas pedagógicas.

Na função de pesquisadoras da linha de formação de professores, destacamos nosso crescimento pessoal e profissional a partir da formação organizada em comunidades colaborativas, nas quais potencializamos a participação ativa e participativa dos envolvidos em ações de investigação de conceitos matemáticos.

Por fim, propomos a novos pesquisadores a ampliação dessa investigação a partir de diferentes conceitos matemáticos, como forma de ensinar aos professores envolvidos o pensar sobre suas práticas, o refletir sobre suas atitudes, de modo a tomarem decisões estratégicas, com criticidade da realidade, sendo capazes, sobretudo, de também formarem estudantes críticos e reflexivos.

Referências

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content Knowledge For Teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 2008, v. 59 (5), p. 389-407.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. Mathematics for teaching as shared, dynamic participation. *For the Learning of Mathematics*, v. 29, n. 3, p. 37-43, 2009.

DAVIS, Brent. Subtlety and complexity of mathematics teachers' disciplinary knowledge. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12, Seoul, Korea, 2012. *Anais...* Seoul, Korea: ICME, 2012.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, v. 82, n. 2, p. 245-265, 2013.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. *The Math Teachers Know*: profound understanding of Emergent Mathematics. New York: Routledge, 2014.

GIRALDO, Victor; RANGEL, Letícia; MENEZES, Fábio; QUINTANEIRO, Wellerson. *(Re)construindo saberes para o ensino a partir da prática*: investigação de conceito e outras ideias. Laboratório de Práticas Matemáticas para o ensino. RIPEM, 2017.

GIRALDO, Victor. Formação de professores de matemática: para uma abordagem problematizada. *Revista Ciências e Cultura*, v. 70, n. 1, p. 37-42, jan./mar. 2018.

GURGEL, Thaís. Multiplicação e divisão já nas séries iniciais. *Revista Nova Escola*, set. 2009. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/2662/multiplicacao-e-divisao-ja-nas-series-iniciais>. Acesso em: 11 nov. 2017.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. *Parâmetros curriculares Nacionais*, v. 3 Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglioni. *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental*: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. 159 p.

NUNES, Terezinha *et al.* *Educação matemática*: números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2009.

PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (Org) *et al.* *O Ensino de proporcionalidade no 1º Grau*. Universidade Federal do Espírito Santo: LEACIM – Laboratório de Ciências e Matemática, 1994.

PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela; PEREIRA, Rúbia Carla; FREITAS, Rony Cláudio de Oliveira. A transposição didática na perspectiva do saber da formação do professor de matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 20, n. 10, p.30, 2018.

PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela; CADE, Nelson Victor Lousada; GIRADO, Victor. Uma matemática problematizada para o ensino de equações diofantinas lineares na formação inicial de professores. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 2019.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia*: saberes necessários à prática educativa. 13. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

PONTE, João Pedro da. Formação do professor de Matemática: perspectivas atuais. In: PONTE, J. P. (org). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. Lisboa: UIDEF, 2014, p. 343 – 360.

SHULMAN, Lee S. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, feb. 1986, p. 4-14. Published by: American Educational Research Association. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1175860>. Acesso em: 21 ago. 2018.

SILVESTRE, Ana Isabel. *O desenvolvimento do raciocínio proporcional: percursos de aprendizagem de alunos do 6º ano de escolaridade*. Tese orientada pelo Prof. Doutor João Pedro Mendes da Ponte, especialmente elaborada para a obtenção do grau de doutor em Educação (Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa Instituto de Educação, Lisboa, 2012. 368 f.

SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (Orgs.). *Ler, escrever e resolver problema: habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2007.

SPINILLO, Alina Galvão. As relações de primeira-ordem em tarefas de proporção: uma outra explicação quanto às dificuldades das crianças. *Psicologia*: teoria e pesquisa, 2(9), p. 349-364, 1993.

VERGNAUD, Gérard. *A criança, a matemática e a realidade*: problemas do ensino de matemática na escola elementar. Tradução: Maria Lucia Faria Moro. ed. rev. Curitiba: Ed. da UFPR, 2014. 322p.