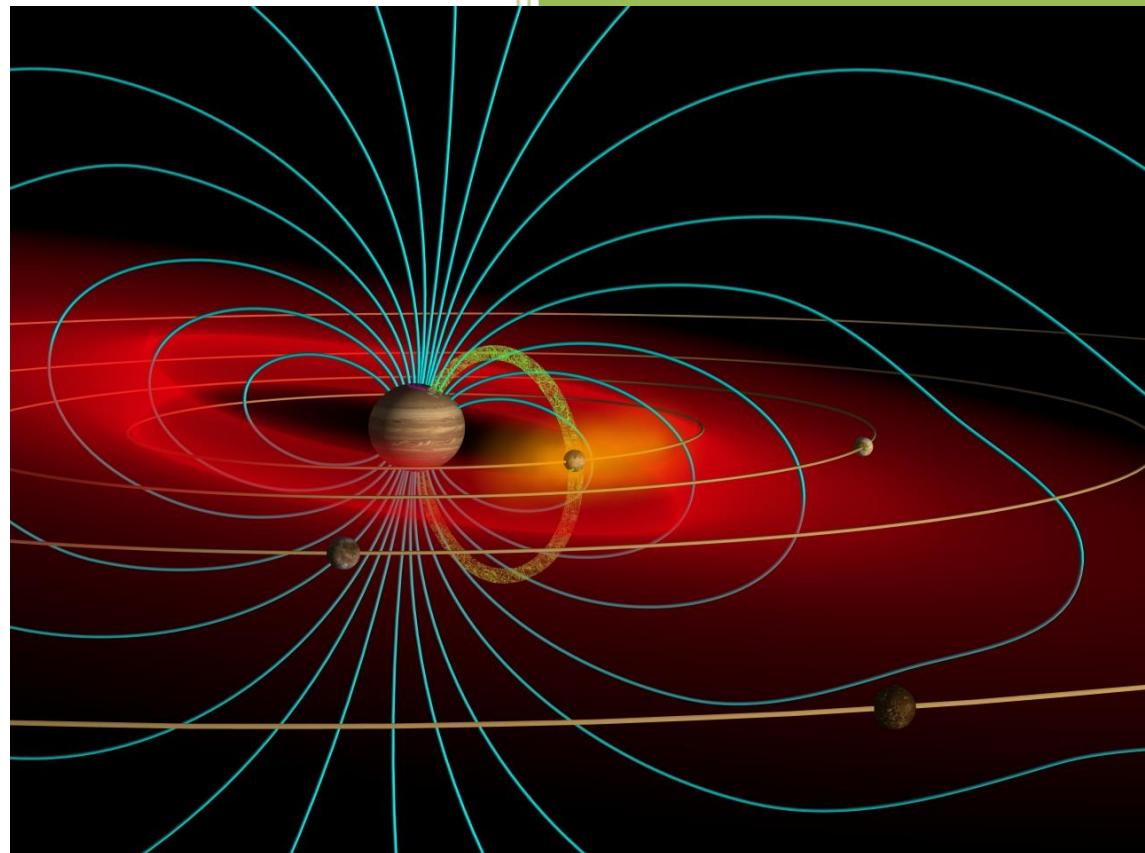


INSTITUTO FEDERAL  
SUL-RIO-GRANDENSE

2020

# Cálculo II



Graça Peraça e Rafael Montoitó

6<sup>a</sup> Edição



## PREFÁCIO

Essa apostila é baseada em livros de cálculos e materiais utilizados durante a faculdade de matemática.

Seu objetivo é facilitar o estudo, visto que todo o conteúdo do semestre está apresentado de maneira sucinta, com listas de exercícios, testes e gabaritos.

Visando a compreensão do conteúdo e a construção dos conceitos, deixamos espaços em branco para resolução de exemplos e desenvolvimento de algumas demonstrações.

Profª. Ms. Graça Peraça

## Sumário

<b>1. Introdução.....</b>	<b>6</b>
1.1 Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ .....	6
➤ Conceito de espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ : .....	6
➤ Conjunto no espaço $\mathbb{R}^n$ .....	7
<b>2 Funções vetoriais de uma variável.....</b>	<b>9</b>
2.1 Conceito de funções vetoriais .....	9
2.2 Hodógrafo de uma função vetorial .....	9
2.3 Limites e propriedades das funções vetoriais de uma variável.....	10
2.4 Continuidade das funções vetoriais de uma variável.....	11
2.5 Parametrização de curvas.....	13
2.6 Curvas .....	16
2.7 Comprimento de Arco .....	17
2.8 Integrais de Funções vetoriais de uma variável .....	19
<b>3 Funções escalares de várias variáveis.....</b>	<b>20</b>
3.1 Funções de várias variáveis .....	20
3.2 Teoria de limites .....	24
3.3 Continuidade de funções de várias variáveis .....	28
3.4 Propriedades globais de funções contínuas .....	31
3.5 Derivadas parciais .....	32
3.6 Derivadas de ordem superior .....	35
3.7 Diferenciabilidade.....	37
3.8 Diferenciação da função composta (Regra da cadeia).....	41
3.9 Derivada Direcional e Gradiente .....	42
3.10 Derivação de funções implícitas .....	47
3.11 Extremos das funções de mais de uma variável .....	50
3.12 Multiplicadores de Lagrange .....	54
<b>4 Funções de várias variáveis e integrais espaciais .....</b>	<b>56</b>
4.1 Integrais duplas .....	56
4.2 Mudança de Variável na integral dupla .....	59
4.3 Área de Superfície .....	65
4.4 Integral Tripla .....	68
4.5 Mudança de variáveis na Integral Tripla .....	70
<b>5 Campos vetoriais (funções vetoriais de várias variáveis) .....</b>	<b>75</b>
5.1 Conceito de campo vetorial .....	75
5.2 Limite e continuidade de campos vetoriais.....	76
5.3 Derivada direcional de um campo vetorial .....	76
5.4 Rotacional .....	77
5.5 Divergência .....	78
5.6 Integral curvilínea de primeira espécie .....	80
5.7 Integral Curvilínea de 2 <sup>a</sup> espécie.....	82
5.8 Integrais de linha independentes do caminho .....	84
5.9 Teorema de Green e Teoremas correlacionados .....	87
<b>6 Sequências e Séries.....</b>	<b>92</b>
6.1 Sequência numérica .....	92
6.2 Séries.....	96
6.3 Resumo dos Testes de Convergências .....	108
<b>7 Exercícios .....</b>	<b>109</b>
7.1 Lista 1 .....	109
7.2 Lista 2 .....	110
7.3 Lista 3 .....	115
7.4 Lista 4 .....	116

7.5	Lista 5 .....	117
7.6	Lista 6 .....	119
7.7	Lista 7 .....	123
7.8	Lista 8 .....	125
7.9	Lista 9 .....	127
7.10	Lista 10 .....	129
7.11	Lista 11 .....	130
7.12	Lista 12 .....	131
7.13	Lista 13 .....	133
7.14	Lista 14 .....	136
<b>8</b>	<b>Respostas.....</b>	<b>138</b>
8.1	Respostas da Lista 1 .....	138
8.2	Respostas da Lista 2 .....	138
8.3	Respostas da Lista 3 .....	140
8.4	Respostas da Lista 4 .....	142
8.5	Respostas da Lista 5 .....	143
8.6	Respostas da Lista 6 .....	144
8.7	Respostas da Lista 7 .....	146
8.8	Respostas da Lista 8 .....	146
8.9	Respostas da Lista 9 .....	147
8.10	Respostas da Lista 10 .....	148
8.11	Respostas da Lista 11 .....	148
8.12	Respostas da Lista 12 .....	148
8.13	Respostas da Lista 13 .....	149
8.14	Respostas da Lista 14 .....	151
<b>9</b>	<b>Teste seus conhecimentos.....</b>	<b>153</b>
9.1	Teste 1 .....	153
9.2	Teste 2 .....	154
9.3	Teste 3 .....	155
9.4	Teste 4 .....	157
9.5	Teste 5 .....	158
9.6	Teste 6 .....	160
9.7	Teste 7 .....	161
<b>10</b>	<b>Respostas dos testes.....</b>	<b>162</b>
10.1	Respostas do teste 1 .....	162
10.2	Respostas do teste 2 .....	163
10.3	Respostas do teste 3 .....	164
10.4	Respostas do teste 4 .....	165
10.5	Respostas do teste 5 .....	166
10.6	Respostas do teste 6 .....	166
10.7	Respostas do teste 7 .....	166
<b>11</b>	<b>Provas passadas.....</b>	<b>167</b>
11.1	Prova 1 2017/1 .....	167
11.2	Trabalho 1 2017/1 .....	168
11.3	Prova 2 2017/1 .....	169
11.4	Prova 3 2017/1 .....	170
<b>12</b>	<b>Respostas das Provas passadas .....</b>	<b>171</b>
12.1	Respostas da Prova 1 2017/1 .....	171
12.2	Respostas do Trabalho 1 2017/1 .....	171
12.3	Respostas da Prova 2 2017/1 .....	171
12.4	Respostas da Prova 3 2017/1 .....	172
<b>13</b>	<b>Apêndice.....</b>	<b>173</b>
13.1	Identidades trigonométricas .....	173

13.2	Tabela de derivadas .....	173
13.3	Tabela de integrais .....	174
13.4	Alfabeto Grego .....	174
13.5	Leituras complementares .....	175
<b>14</b>	<b>Bibliografia .....</b>	<b>176</b>

# 1. Introdução

---

## 1.1 Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$

---

➤ **Conceito de espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ :**

**Def.1.1.(a)** Para todo  $x$  do espaço  $n$  dimensional  $A^n$ ,  $X$  é o conjunto ordenado de  $n$  números reais.

$$\forall x \in A^n : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x_k \in \mathbb{R}, \forall k = \overline{1, n}$$

$x_k$  é a  $k$ -ésima coordenada. Os pontos  $x, y \in A^n$  são da forma  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  e  $x=y$  se  $x_k = y_k \quad \forall k = \overline{1, n}$

**Def.1.1(b)**  $A^n$  é chamado linear ou vetorial se nesse espaço estão introduzidas as seguintes operações:

1.  $\forall x, y \in A^n$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n); \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in A^n$$

2.  $\forall x \in A^n$ , o elemento  $ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) \in A^n, \forall a \in \mathbb{R}$

**Def.1.1(c)** Seja  $X$  um espaço ou conjunto, vamos dizer que esse espaço é métrico se  $\forall x, y \in X$  é introduzida uma função real  $\rho(x, y)$  com as seguintes condições:

1.  $\rho(x, y) \geq 0; \quad (\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$

2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \text{simetria da métrica}$

3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in X \quad \text{desigualdade triangular}$

**Exemplo 1.1.(a):**

$$\rho(x, y) = \max|x_k - y_k|$$

Vejamos as condições:

1.  $\rho(x, y) = \max|x_k - y_k| \geq 0$

$$\text{se } \rho(x, y) = 0 \Rightarrow \max|x_k - y_k| = 0 \Rightarrow x_k = y_k \quad \forall k \in \overline{1, n}$$

2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

$$\rho(x, y) = \max|x_k - y_k| = \max|y_k - x_k| = \rho(y, x)$$

3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

$$\rho(x, z) = \max|x_k - z_k| \quad \rho(z, y) = \max|z_k - y_k|$$

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) = \max|x_k - z_k| + \max|z_k - y_k|$$

$$\rho(x, y) = \max|x_k - y_k| = \max|(x_k - z_k) + (z_k - y_k)| \leq \max|x_k - z_k| + \max|z_k - y_k| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

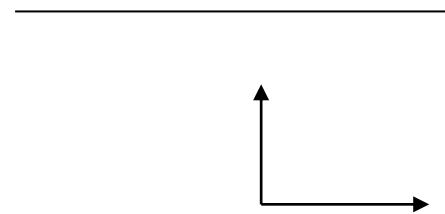
**Def.1.1.(d)** Um espaço linear n-dimensional  $A^n$ , com métrica  $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$  é chamado espaço **EUCLIDIANO** e denotado por  $\mathbb{R}^n$ .

- $n=1; \mathbb{R}^1 = \mathbb{R} \rightarrow$  eixo real

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$$

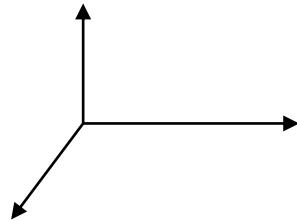
- $n=2; \mathbb{R}^2 \rightarrow$  plano real

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$



- $n=3; \mathbb{R}^3 \rightarrow$  espaço real

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$



➤ **Conjunto no espaço  $\mathbb{R}^n$**

**Def.1.1.(e) (Bola aberta)**

Seja  $a$  um ponto do espaço  $\mathbb{R}^n$  e  $r$  um número real positivo. Definimos de bola aberta com centro em  $a$  a todo  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que a distância dos pontos  $x$  até  $a$  seja menor que  $r$ .

$$a \in R^n, r \in R, r > 0 \quad B(a, r) = \left\{ \forall x \in R^n : \rho(x, a) < r \right\}$$

**Def.1.1.(f) (Bola fechada)**

Definimos de bola fechada com centro em  $a$  à todo  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que a distância dos pontos  $x$  até  $a$  seja menor ou igual que  $r$ .

$$a \in R^n, r \in R, r > 0 \quad \bar{B}(a, r) = \left\{ \forall x \in R^n : \rho(x, a) \leq r \right\}$$

**Def.1.1.(g) (Esfera)**

Definimos de esfera com centro em  $a$  a todo  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que a distância de  $x$  até  $a$  seja igual a  $r$ .

$$\text{Esfera: } S(a, r) = \left\{ \forall x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, a) = r \right\}$$

**Def.1.1.(h) (vizinhança)**

Seja  $a \in R^n, \forall r > 0$ , a bola aberta com centro em  $a$  e raio  $r$  é chamada  $r$ -vizinhança do ponto  $a$  e denotada por  $U_r(a) = B(a, r)$ .

Chamamos de  $r$ -vizinhança perfurada do ponto  $a$ , a toda  $r$ -vizinhança que não contém o ponto  $a$  e é denotada por  $U_r^0(a) = B(a, r) \setminus \{a\}$ .

**Def.1.1.(i) (ponto interior)**

Seja  $X$  um conjunto do espaço  $\mathbb{R}^n$  ( $X \subset \mathbb{R}^n$ ) e  $a$  um ponto de  $X$ . O ponto  $a$  é chamado *ponto interior do conjunto X* se existe um número  $r$  positivo tal que toda vizinhança do ponto  $a$  esteja contida no conjunto  $X$ .

**Def.1.1.(j) (ponto limite)**

Seja  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $a$  é ponto limite de  $X$  se, em qualquer vizinhança perfurada do ponto  $a$ , existe pelo menos um elemento do conjunto  $X$ .

$$\forall r > 0 : U_r(a) \cap X \neq \emptyset$$

**Def.1.1.(k) (conjunto fechado)**

Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ , o conjunto  $X$  é chamado fechado se esse conjunto contém todos os seus pontos limites.

**Def.1.1.(l) (conjunto aberto)**

Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ , o conjunto  $X$  é chamado aberto se qualquer ponto é ponto interior desse conjunto (isto é, toda vizinhança pertence a  $X$ ).

**Def.1.1.(m) (conjunto limitado)**

$X \subset \mathbb{R}^n$  é chamado limitado se  $\exists r > 0$  tal que todo conjunto esteja contido na bola fechada com centro em  $a$  e raio  $r$ .

**Def.1.1.(n) (conjunto compacto)**

$X \subset \mathbb{R}^n$  é chamado compacto se esse conjunto é limitado e fechado. Ou seja,  $X$  contém todos os seus pontos limites. Todos os pontos limites são interiores.

## 2 Funções vetoriais de uma variável

### 2.1 Conceito de funções vetoriais

#### Def.2.1.(a)

Uma função vetorial de uma variável é uma função do tipo  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Vamos trabalhar com funções que associam a cada valor de  $f$  num intervalo  $I$ , um vetor  $\vec{f}(t)$  no espaço.

Se  $\vec{f}(t)$  é um vetor no espaço  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k} = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ .

#### Exemplos

2.1.(a)  $\vec{f}(t) = (2t, t, \sin t)$ ;

2.1.(b)  $\vec{f}(t) = (2+t, 2t, t/3)$

**Domínio da função vetorial de uma variável real:** é o intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  que satisfaz todas as  $k$  coordenadas da função.

#### Exemplos

2.1.(c) Analise o intervalo de domínio da função  $\vec{g}(t) = (\sqrt{t-1}; \frac{2}{4-t^2}; 3t)$

### 2.2 Hodógrafo de uma função vetorial

#### Def.2.2

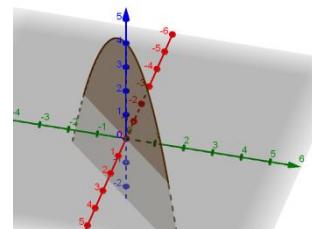
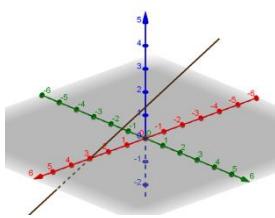
O hodógrafo de uma função vetorial  $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ ,  $\forall t \in I$ , é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm posição  $\vec{f}(t)$ . O hodógrafo representa a imagem da função vetorial.

#### Exemplo

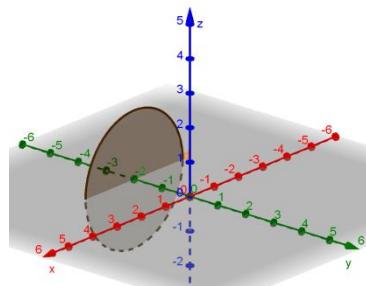
Descreva a trajetória L de um ponto móvel  $P$  cujo deslocamento é expresso por:

a)  $\vec{f}(t) = 3\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$

b)  $\vec{f}(t) = (t, t, -t^2 + 4)$



c)  $\vec{f}(t) = 2\cos t\vec{i} + -2\vec{j} + (-2\sin t)\vec{k}$



➤ Operações com funções vetoriais:

Dadas as funções  $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$  e  $\vec{g}(t) = g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}$  definidas para  $t \in I$ , são definidas as seguintes operações:

- a)  $|\vec{f}(t)| = \sqrt{(f_1(t))^2 + (f_2(t))^2 + (f_3(t))^2}$
- b)  $\vec{f}(t) \pm \vec{g}(t) = (f_1(t) \pm g_1(t))\vec{i} + (f_2(t) \pm g_2(t))\vec{j} + (f_3(t) \pm g_3(t))\vec{k}$
- c)  $\vec{f}(t) \times \vec{g}(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix} = \vec{h}(t)$
- d)  $\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = f_1(t).g_1(t) + f_2(t).g_2(t) + f_3(t).g_3(t)$
- e)  $s(t).\vec{f}(t) = s(t)f_1(t)\vec{i} + s(t)f_2(t)\vec{j} + s(t)f_3(t)\vec{k}$

### 2.3 Limites e propriedades das funções vetoriais de uma variável

**Def.2.3.(a)**

Seja  $\vec{f} = \vec{f}(t)$  uma função vetorial num intervalo aberto  $I$  que contém  $t_0$ . Dizemos que o limite de  $\vec{f}(t)$  quando  $t$  tende a  $t_0$  é  $\vec{a}$ , se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\vec{f}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$$

**Proposição:**

Seja  $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$  e  $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ .

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{a} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = a_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

**Exemplo 2.3.(a):**  $\vec{f}(t) = (t, e^t, \sqrt{t})$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t) =$$

➤ Propriedades dos limites

Sejam  $\vec{f}(t)$  e  $\vec{g}(t)$  duas funções vetoriais e  $h(t)$  uma função escalar definidas num mesmo intervalo:

Se  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{g}(t) = \vec{b}$  e  $\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = m$  então

a)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{f}(t) \pm \vec{g}(t)) = \vec{a} \pm \vec{b}$

b)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)) = \vec{a} \cdot \vec{b}$

c)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)) = \vec{a} \times \vec{b}$

d)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (h(t) \cdot \vec{f}(t)) = m \cdot \vec{a}$

## 2.4 Continuidade das funções vetoriais de uma variável

Uma função vetorial  $\vec{f}(t)$  definida num intervalo  $I$  é contínua em  $t_0$ , ponto de  $I$ , se  $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$

\*  $\vec{f}(t)$  é contínua em  $t_0$  se e somente se suas componentes são funções contínuas em  $t_0$ .

**Exemplo 2.4.(a)** Analise o intervalo de continuidade da função  $\vec{f}(t) = \left(t; e^t; \frac{1}{t}\right)$

### ➤ Derivadas das funções vetoriais de uma variável

#### Def. 2.4.(a)

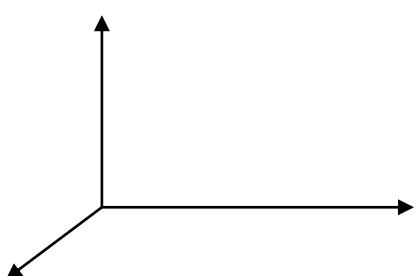
Seja  $\vec{f}(t)$  uma função vetorial. A derivada de  $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$  é a função vetorial  $\vec{f}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{f_1(t+\Delta t) - f_1(t)}{\Delta t}, \frac{f_2(t+\Delta t) - f_2(t)}{\Delta t}, \dots, \frac{f_n(t+\Delta t) - f_n(t)}{\Delta t} \right)$  para todo  $t$  em que o limite existe. Se a derivada existe em todos os pontos de um intervalo  $I$ , então dizemos que  $\vec{f}(t)$  é derivável em  $I$ .

#### Exemplos

**2.4.(b)** Derive a função  $\vec{f}(t) = t^3 \vec{i} - \operatorname{sen}(t) \vec{j} + 4\sqrt{t} \vec{k}$

**2.4.(c)** Derive a função  $\vec{g}(t) = (-t^2, e^t, \tan t)$

### ➤ Interpretação geométrica da derivada de funções vetoriais



Seja  $\vec{f}(t)$  uma função vetorial derivável em  $I$ . Quando  $t$  percorre  $I$ ,  $\vec{f}(t)$  descreve uma curva  $C$  no espaço. Dados dois pontos  $P$  e  $Q$  sobre a curva, a reta suporte do vetor  $\overrightarrow{PQ}$  é secante à curva. Quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , a reta secante se aproxima da reta tangente, originando o vetor  $\vec{f}'(t)$  tangente à curva no ponto  $P$ . O segmento orientado  $PQ$  é representado pelo vetor  $\overrightarrow{\Delta f}$ .

Denominamos de vetor tangente unitário o vetor  $\vec{u}(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{|\vec{f}'(t)|}$

### ➤ Interpretação física da derivada de função vetorial

Ao mover-se no espaço, uma partícula desenvolve uma trajetória  $C$  cuja equação é dada por  $\vec{r}(t)$  quando  $t$  varia. A velocidade instantânea desta partícula é dada pela expressão  $\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ , quando o limite existe.

Analogamente, se  $\vec{v}(t)$  é derivável, então  $\vec{v}'(t) = \vec{a}(t)$

#### **Exemplo**

**2.4.(d)** O vetor posição de uma partícula em movimento no plano é  $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{1}{t+1}\vec{j}, t \geq 0$ . Determine o vetor velocidade e o vetor aceleração em  $t = 0$  e  $t = 1$  e esboce o hodógrafo.

### ➤ Propriedades das derivadas das funções vetoriais de uma variável

Sejam  $\vec{f}(t)$  e  $\vec{g}(t)$  funções vetoriais e  $h(t)$  uma função escalar, todas deriváveis em I. Então,  $\forall t \in I$  temos:

- a)  $(\vec{f}(t) \pm \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) \pm \vec{g}'(t)$
- b)  $(h(t) \cdot \vec{f}(t))' = h(t) \cdot \vec{f}'(t) + h'(t) \cdot \vec{f}(t)$
- c)  $(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t)$
- d)  $(\vec{f}(t) \times \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) \times \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \times \vec{g}'(t)$

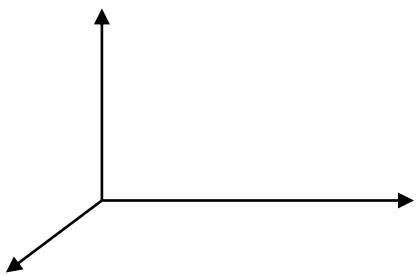
#### ➤ Derivadas sucessivas:

Seja  $\vec{f}(t)$  uma função vetorial derivável em I. Sua derivada  $\vec{f}'(t)$  é uma função vetorial definida em I. Se  $\vec{f}'(t)$  é derivável em  $t \in I$ , então sua derivada é chamada derivada segunda e indicamos  $\vec{f}''(t)$  ou  $\vec{f}^{(2)}(t)$ . Da mesma forma podemos obter  $\vec{f}'''(t), \dots, \vec{f}^{(n)}(t)$ .

#### **Exemplo**

**2.4.(e)** Calcule a terceira derivada da função  $\vec{f}(t) = e^{2t}\vec{i} + 2t^3\vec{j} + \sin t\vec{k}$

## 2.5 Parametrização de curvas

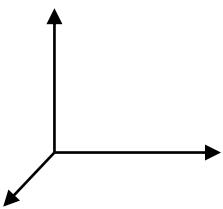


Sejam  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  e  $z = z(t)$  funções contínuas de uma variável  $t$ , definidas para  $t \in [a, b]$ . Chamamos de curva o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  determinados por esta equação. As equações  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  e  $z = z(t)$  são chamadas paramétricas de parâmetro  $t$ . Para obter uma equação vetorial de uma curva, basta considerar o vetor posição  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$  de cada ponto da curva.

### Def.2.5.(a)

Uma curva **PLANA** é uma curva que está contida num plano do espaço. Uma curva que não é plana é chamada de curva **REVERSA**.

**OBS:** Se as funções  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  forem constantes, a curva degenera-se em um ponto.

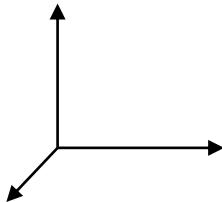


### ➤ Parametrização da reta

A equação vetorial de uma reta qualquer é dada pela função posição  $\vec{f}(t) = \vec{a} + \vec{b}t$ , onde  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são vetores constantes e  $t$  é um parâmetro real:  $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ .

A reta que passa pelo ponto A, que tem vetor posição  $\vec{a}$  e tem direção do vetor  $\vec{b}$ , apresenta as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = a_1 + b_1 t \\ y(t) = a_2 + b_2 t \\ z(t) = a_3 + b_3 t \end{cases}$$



### Exemplos

**2.5.(a)** Considere a equação vetorial  $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$ , determine as equações paramétricas e a curva.

**2.5.(b)** Determine a representação paramétrica da reta que passa pelo ponto A(2,1,-1) e tem a direção do vetor  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ .

➤ **Parametrização da circunferência**

A equação vetorial de uma circunferência qualquer de raio  $a$ , com centro na origem do plano  $xoy$ , é dada pela função  $\vec{f}(t) = a\cos t \vec{i} + a\sin t \vec{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Quando a circunferência não está centralizada na origem, temos a equação  $\vec{r}(t) = \vec{r}_o + \vec{r}_1(t)$ , onde  $\vec{r}_o = x_o \vec{i} + y_o \vec{j}$  e  $\vec{r}_1(t) = a\cos t \vec{i} + a\sin t \vec{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , cujas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x(t) = x_o + a\cos t \\ y(t) = y_o + a\sin t \end{cases}$$

**Exemplos**

**2.5.(c)** Obtenha a equação paramétrica da circunferência  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ , no plano  $z = 3$ .

**2.5.(d)** A equação vetorial  $\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\cos t \vec{j} + 3\sin t \vec{k}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , representa uma circunferência. Determine a equação cartesiana correspondente.

### ➤ Parametrização da elipse

A equação vetorial de uma elipse no plano  $xoy$ , com centro na origem, é dada pela equação  $\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + b \sin t \vec{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$ . Quando a elipse não está centralizada na origem, temos a equação  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{r}_1(t)$  onde  $\vec{r}_0 = a_o \vec{i} + b_o \vec{j}$  e  $\vec{r}_1(t) = a \cos t \vec{i} + b \sin t \vec{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$ , cuja equação paramétrica é:

$$\begin{cases} x(t) = a_o + a \cos t \\ y(t) = b_o + b \sin t \end{cases}$$

#### **Exemplo**

**2.5.(e)** Escreva a equação vetorial e a equação paramétrica da elipse  $9x^2 + 4y^2 = 36$ , no plano  $xoy$ .

### ➤ Parametrização da hélice circular

A equação vetorial de uma hélice no plano  $xoy$ , com centro na origem, é dada pela equação  $\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + t \vec{k}, t \in \mathbb{R}$ . Quando o cilindro base não estiver centralizado na origem, temos a equação  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{r}_1(t)$  onde  $\vec{r}_0 = a_o \vec{i} + b_o \vec{j}$  e  $\vec{r}_1(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + t \vec{k}$ , cuja equação paramétrica é:

$$\begin{cases} x(t) = a_o + a \cos t \\ y(t) = b_o + a \sin t \\ z(t) = t \end{cases}$$

- Se  $t > 0 \rightarrow$  sentido anti - horário
- Se  $t < 0 \rightarrow$  sentido horário.

#### **Exemplo**

**2.5.(f)** Represente graficamente a hélice circular  $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \frac{t}{2} \vec{k}, 0 \leq t \leq \frac{5\pi}{2}$ , bem como os vetores velocidade e aceleração para  $t = 2\pi$ .

## 2.6 Curvas

---

### Def.2.6.(a) (curva suave)

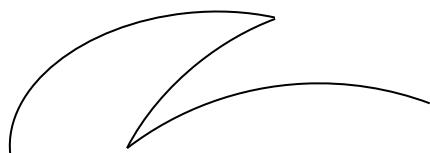
Uma curva  $\Gamma$  é chamada suave se as funções  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  contínuas, têm derivadas e, além disso,  $x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2 \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$ .

Ou ainda, podemos dizer que uma curva é suave se não contém pontos angulosos, ou seja, se em cada um de seus pontos a curva tem tangente única que varia continuamente quando se move sobre a curva.



### Def. 2.6.(b) (curva suave por partes)

A curva  $\Gamma$  é chamada suave por partes se é possível dividir essa curva em um número finito de partes de tal modo que cada parte seja uma curva suave e nos pontos de encontro das diferentes partes, essas funções  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  tenham derivadas unilaterais.



#### Exemplos

$$2.6.(a) C: \begin{cases} x = t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$

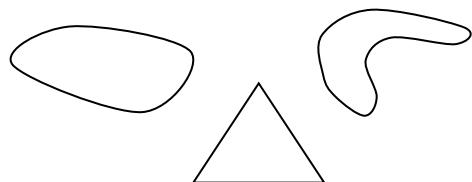
$$2.6.(b) C: \begin{cases} x = t \\ y = |\sin t| \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$

### Def. 2.6.(c) (curva simples)

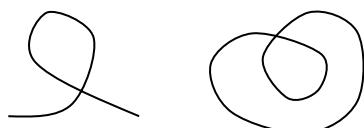
Uma curva é chamada simples se para quaisquer valores de  $t_1, t_2 \in [a,b]$ ,  $t_1 \neq t_2 \rightarrow \vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$

### Def.2.6.(d) (curva fechada)

Uma curva simples é chamada fechada se  $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ ,  $t_1 \neq t_2 \rightarrow \vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$  mas  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ .



Curvas simples fechadas



curvas que não são simples, pois possuem ponto de intersecção

### ➤ Orientação de uma curva

Seja  $C$  uma curva suave, representada por  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ,  $t \in [a, b]$ . Chamamos de sentido positivo sobre  $C$  o sentido no qual a curva é traçada quando  $t$  cresce de  $a$  até  $b$ . O sentido oposto é chamado de sentido negativo.

### ➤ Curva oposta

Uma curva orientada  $C$ , representada por  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ,  $t \in [a, b]$ , tem como curva oposta, a curva  $-C$ , de equação  $\vec{r}^-(t) = \vec{r}(a + b - t) = x(a + b - t)\vec{i} + y(a + b - t)\vec{j} + z(a + b - t)\vec{k}$ .

#### Exemplo

2.6.(c) Achar a curva oposta à curva  $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

## 2.7 Comprimento de Arco

---

### Teorema 2.7.(a) (cálculo do comprimento de arco)

Se  $C$  é uma curva suave parametrizada por  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , então

$$l = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$$

Demonstração:

Seja  $C$  uma curva dada pela equação  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ,  $t \in [a, b]$  e sejam os pontos

$P_0 = A = \vec{r}(t_0), P_1 = \vec{r}(t_1), P_2 = \vec{r}(t_2), \dots, P_{i-1} = \vec{r}(t_{i-1}), P_i = \vec{r}(t_i), \dots, P_n = B = \vec{r}(t_n)$ .  
Então o comprimento do arco de um intervalo  $\Delta t_i = |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$ . Somando-se todos os arcos de todos os intervalos, temos:

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{i=1}^n |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |[x(t_i) - x(t_{i-1})]\vec{i} + [y(t_i) - y(t_{i-1})]\vec{j} + [z(t_i) - z(t_{i-1})]\vec{k}| = \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2} \\ l &= \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} l_n; \quad \Delta t_i = |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| \end{aligned}$$

Continuação em aula

**OBS.:**

Se  $C$  é suave por partes, o comprimento do seu arco é dado por:

$$l = \int_a^{t_1} |\vec{r}'(t)| dt + \int_{t_1}^{t_2} |\vec{r}'(t)| dt + \cdots + \int_{t_{n-1}}^b |\vec{r}'(t)| dt$$

Onde  $[a, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, b]$  são subintervalos de  $[a, b]$ , nos quais a curva é suave.

**Exemplo**

**2.7.(a)** Encontre o comprimento da curva cuja equação vetorial é  $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^{\frac{2}{3}}\vec{j}$ ,  $1 \leq t \leq 4$ .

Rta.  $\frac{1}{27} \left[ (18\sqrt[3]{2} + 4)^{\frac{3}{2}} - 13\sqrt{13} \right]$

**OBS.:**

Se na integral  $l = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$ , substituirmos o limite superior por  $x$  ( $x$  é um limite variável,  $\forall x \in [a, b]$ ), obteremos uma função  $S(x)$  chamada de comprimento de arco, que possibilitará medi-lo para qualquer ponto  $c$ ,  $c \in [a, x]$ .  $S(x) = \int_a^x |\vec{r}'(t)| dt$ .

**Exemplo 2.7.(b)** Escreva a função comprimento de arco da circunferência de raio  $r$ .

**Exemplo 2.7.(c)** Escreva a função comprimento de arco da hélice circular  $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$

## 2.8 Integrais de Funções vetoriais de uma variável

---

Sejam as funções  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  integráveis num intervalo  $[a, b]$ , então:

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \int_a^b x(t) dt \vec{i} + \int_a^b y(t) dt \vec{j} + \int_a^b z(t) dt \vec{k}$$

**Exemplo 2.8.(a)** Calcule  $\int_0^2 (12t^3 \vec{i} + 4e^{2t} \vec{j} + (t+1)^{-1} \vec{k}) dt$  Rta.  $(48; 2e^4 - 2; \ln 3)$

**Exemplo 2.8.(b)** Calcule  $\int_0^2 (6t^2 \vec{i} - 4t \vec{j} + 3 \vec{k}) dt$  Rta.  $(16; -8; 6)$

**Exemplo 2.8.(c)** Calcule  $\int_{-1}^1 (-5t \vec{i} + 8t^3 \vec{j} - 3t^2 \vec{k}) dt$  Rta.  $(0, 0, -2)$

**Exemplo 2.8.(d)** Calcule  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (s \operatorname{sen} t \vec{i} - c \operatorname{ost} t \vec{j} + t \operatorname{ant} t \vec{k}) dt$  Rta.  $\left( \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right); -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2} \ln 2 \right)$

### 3 Funções escalares de várias variáveis

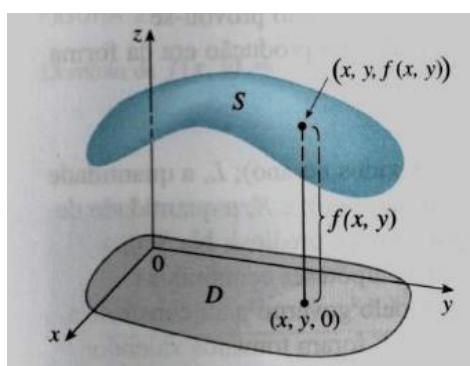
#### 3.1 Funções de várias variáveis

##### Def.3.1.(a) (função de duas variáveis)

Uma função real de duas variáveis reais é uma relação que transforma em um único número real  $z$  cada par ordenado  $(x,y)$  de números reais de um certo conjunto  $D$ , chamado de domínio da função. Se a relação  $f$  transforma no número real  $z$  o par ordenado  $(x,y)$  em  $D$ , então escrevemos  $z=f(x,y)$ .

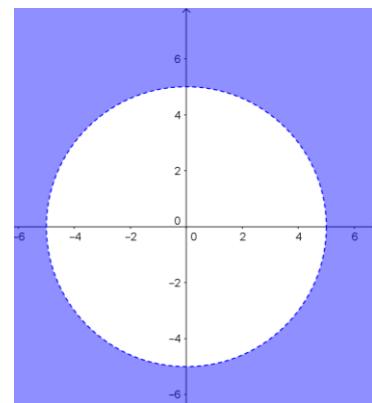
O conjunto de todos os valores possíveis de  $z$  é denominado de **IMAGEM** da função  $f$ .

Definimos o **GRÁFICO** de uma função  $f$  de duas variáveis como o conjunto de todos os pontos  $(x,y,z)$  no espaço cartesiano tridimensional, tal que  $(x,y)$  pertence ao domínio  $D$  de  $f$ , e  $z=f(x,y)$ . O domínio  $D$  pode ser representado através de um conjunto de pontos no plano  $xOy$  e o gráfico de  $f$  como uma superfície cuja projeção perpendicular ao plano  $xOy$  é  $D$ .

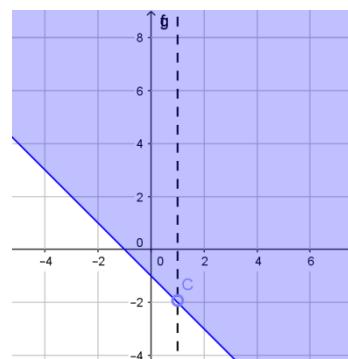


**Exemplos:**

**3.1.(a)** Qual o domínio da função  $f$  dada por  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$ ?



**3.2.(b)** Ache o domínio de definição da função cuja fórmula é  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ .



### Def.3.1.(b) (função de várias variáveis)

Uma função real  $f$  a  $n$  variáveis é uma relação que transforma em um único número real  $w$  cada  $n$ -upla ordenada  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de números reais de um certo conjunto  $D$ , chamado de Domínio da função  $f$ . Escrevemos  $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Se a relação  $f$  transforma no número  $w$  a  $n$ -upla ordenada  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  então escrevemos  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$w \rightarrow \text{varável dependente}$

$x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow \text{varáveis independentes}$

O conjunto de todos os valores possíveis de  $w$  que obtemos aplicando a relação  $f$  às  $n$ -uplas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  em  $D$ , é denominado **IMAGEM** de  $f$ .

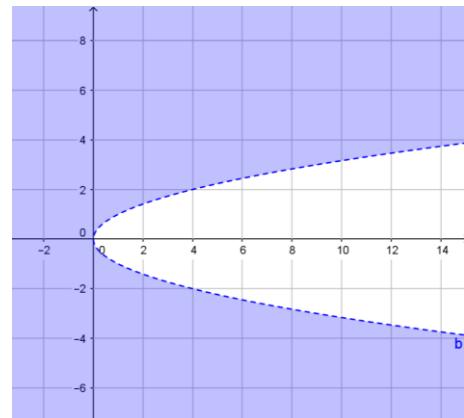
- $n=2: z=f(x,y)$
- $n=3: w=f(x,y,z)$

Se uma função  $f$  de várias variáveis está definida por uma equação ou uma fórmula, então (a não ser que esteja estipulado o contrário) entende-se por domínio de  $f$  o conjunto de todas as  $n$ -uplas de variáveis independentes para as quais a equação ou fórmula admite resposta.

\*  $n$ -upla ou êneuplas de números reais: da mesma forma que denotamos um ponto em  $\mathbb{R}$  por um número real, um ponto em  $\mathbb{R}^2$  por um par ordenado de números reais  $(x,y)$  e um ponto em  $\mathbb{R}^3$  por uma terna ordenada  $(x,y,z)$ , um ponto no espaço numérico  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ , é representado por uma  $n$ -upla de números reais  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

### Exemplo

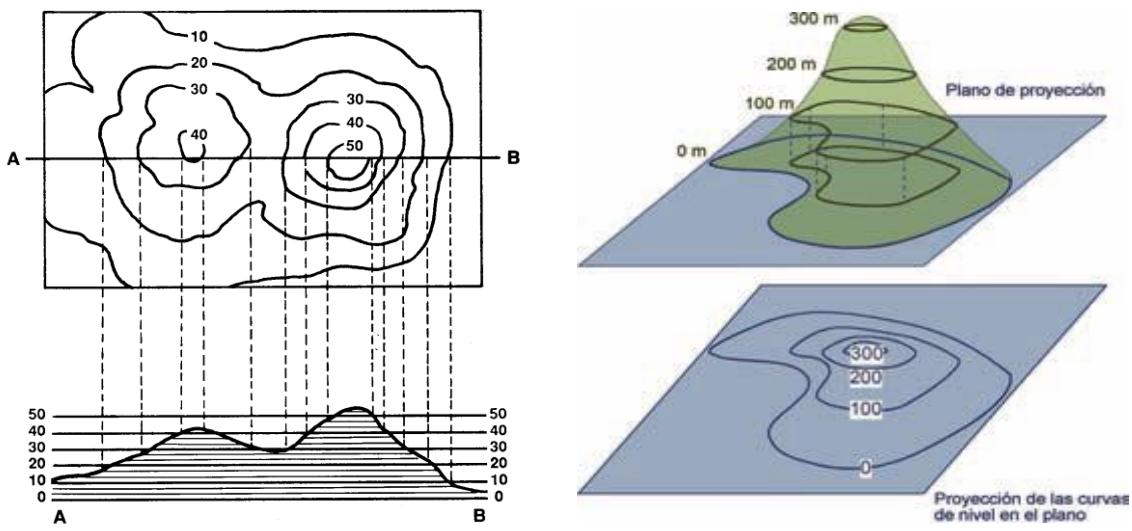
**3.1.(c)** Encontre e esboce o domínio de  $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$



### ➤ Gráficos e curvas de nível

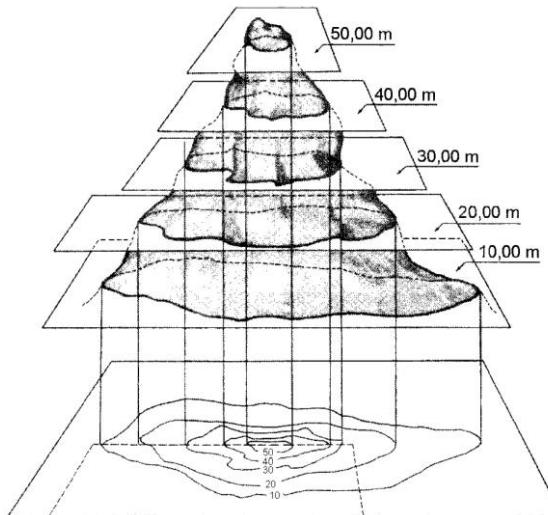
Com o auxílio de seu gráfico pode-se visualizar como uma função  $f$  de duas variáveis  $x$  e  $y$  “funciona”. O gráfico de  $f$  é o gráfico da equação  $z=f(x,y)$ . Assim, o gráfico de  $f$  é o conjunto de todos os pontos do espaço com coordenadas  $(x,y,z)$  que satisfazem a equação  $z=f(x,y)$ .

A intersecção do plano horizontal  $z=k$  com a superfície  $z=f(x,y)$  é chamada **CURVA DE CONTORNO** de altura  $k$  na superfície. A projeção vertical, no plano  $xOy$  desta curva de contorno é a **CURVA DE NÍVEL**  $f(x,y)=k$  da função  $f$ . As curvas de nível de  $f$  são simplesmente os conjuntos em que o valor de  $f$  é constante.



Fonte: <http://geographicae.wordpress.com/2007/06/09/ormas-de-relevo-e-curvas-de-nivel/>. Acessado em 29/03/2012

Fonte: <http://pontenformacatalina.blogspot.com.br/2013/06/orientacion-sobre-el-plano.html>. Acesso em 09/02/2015



Fonte: <http://ciconiastur.blogspot.com.br/2011/12/el-relieve.html>. Acessado em 29/03/2012

As curvas de nível dão uma maneira bidimensional de representar uma superfície tridimensional  $z=f(x,y)$ .

Nos gráficos acima, cada ponto da curva de nível corresponde a um único ponto na superfície que está  $k$  unidades acima ( $k>0$ , mas seriam  $k$  unidades abaixo se  $k<0$ ) considerando diferentes valores para a constante  $k$  (isto é, vários planos paralelos que interseccionam  $f$ ), obtemos um conjunto de curvas de nível chamado de **MAPA DE CONTORNO**. O conjunto de todos os valores possíveis de  $k$  é a imagem da função  $f$  e cada curva de nível  $f(x,y)=k$  no mapa de contorno consiste em pontos  $(x,y)$  do domínio de  $f$ , tendo o mesmo valor funcional  $k$ .

### Exemplo

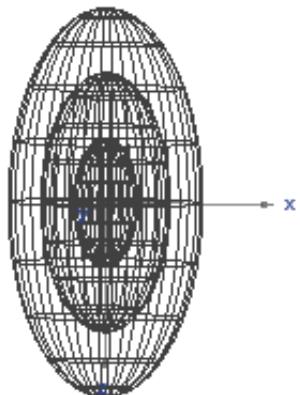
**3.1.(d)** Desenhe as curvas de nível típicas da função  $f(x,y) = x^2 - y^2$

## ➤ Gráficos e superfícies de nível

É muito difícil visualizar uma função  $f$  de três variáveis por seu gráfico, uma vez que estaríamos em um espaço de quatro dimensões. Entretanto ganhamos algum conhecimento de  $f$  desenhando suas **SUPERFÍCIES DE NÍVEL**, que são as superfícies com equação  $f(x, y, z) = k$ , onde  $k$  é uma constante. Se um ponto  $(x, y, z)$  se move ao longo de uma superfície de nível, o valor de  $f(x, y, z)$  permanece fixo.

### Exemplo

3.1.(e) Determine as curvas de superfície da função  $f(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 + z^2$



## 3.2 Teoria de limites

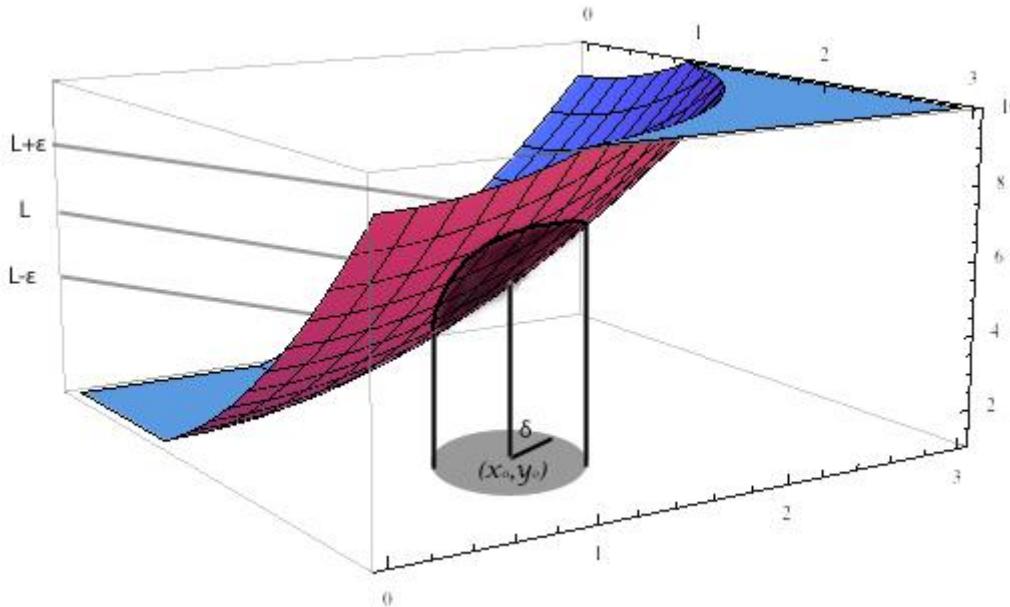
### ➤ Limite de função de duas variáveis

#### Def.3.2.(a)

Seja  $X \subseteq R^2$  e  $z = f(x, y)$  uma função definida neste conjunto. Esta função tem valores no conjunto dos números reais e o ponto  $\mathbf{a}$  ( $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$ ) é ponto limite de  $X$ .

Vamos dizer que  $f(x, y)$  tem limite  $L$  quando  $x(x = (x, y))$  tender a  $\mathbf{a}$ , se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X \cap U_{\delta}^0(a) \left( 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \right) \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon$$



### Generalizando para funções vetoriais de várias variáveis

Seja  $X \subseteq R^n$  e  $y = f(x)$  uma função definida neste conjunto. Esta função tem valores no espaço  $R^K$  e o ponto  $\mathbf{a}$  é ponto limite de  $X$ .

$$\begin{cases} X \subseteq R^n \\ y = f(x) \text{ definido no } X \\ f : X \rightarrow R^K, a \rightarrow \text{ponto limite de } X \end{cases}$$

Vamos dizer que  $f(x)$  tem limite  $A$  (ponto com  $k$  coordenadas), quando  $x$  tender a  $\mathbf{a}$ , se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X \cap U_{\delta}^0(a) \left( 0 < \rho_{R^n}(x, a) < \delta \right) \Rightarrow \rho_{R^K}(f(x), A) < \varepsilon$$

### Teorema 3.2.(a)

Seja  $X \subseteq R^n$ ,  $y = f(x)$  definida no conjunto  $X$ .  $f : X \rightarrow R^K$ ,  $a \rightarrow$  ponto limite de  $X$ .

A função  $f(x)$  tem limite  $A$  quando  $x$  tender a  $\mathbf{a}$ , onde  $A$  é ponto com coordenadas  $(A_1, A_2, \dots, A_k) \in R^K$  se, e somente se cada coordenada dessa função tem limite e esse limite é igual à coordenada correspondente do ponto  $A$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f_j(x_1, \dots, x_n) = A_j \quad \forall j = \overline{1, k}$$

## ➤ Propriedades elementares dos limites

Seja  $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  definida em  $X$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e seja  $g(x) = g(x_1, \dots, x_n)$   $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . E seja ainda,  $a$  o ponto limite de  $X$ .

1. Se  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  e  $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , então:

$$a) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$$

$$b) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$$

$$c) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) / g(x)) = A / B \quad (\text{se } B \neq 0)$$

2. Se  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $A > B$  (ou  $A < C$ ), então:

$$f(x) > B \quad (\text{ou } f(x) < C) \quad \forall x \in X \cap U_\delta(a)$$

1. Se  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\forall x \in X \quad f(x) \leq C \Rightarrow A \leq C$

2.  $\forall x \in X \subset \mathbb{R}^n \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Se  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  e  $\exists \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ , então  $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$  (Teorema de Sandwich)

3.  $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot A$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |A|$$

## ➤ Limites múltiplos e limites iterados

Vamos considerar uma função de duas variáveis  $u = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .  $E \subset \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0)$  ponto limite de  $E$

### Def.3.2.(b) (limite iterado)

Fixamos qualquer  $y \neq y_0$  tal que o ponto pertença ao conjunto  $E$ .

Consideramos  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ ,  $\forall y$  fixo  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$

Agora consideremos  $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = A$ .

Se esse limite existe, é chamado de **LIMITE ITERADO**.

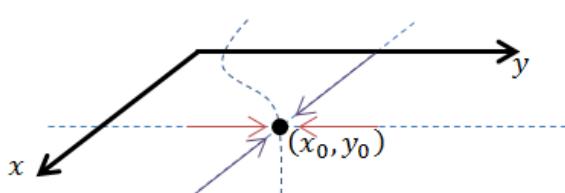
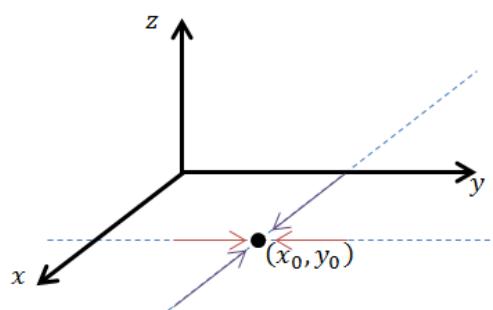
Fixamos qualquer  $x \neq x_0$  tal que o ponto pertença ao conjunto  $E$ .

Consideramos

$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ ,  $\forall y$  fixo  $\rightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \psi(x)$

Agora consideremos  $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = B$ .

Se esse limite existe, é chamado de **LIMITE ITERADO**.



**Def.3.2.(c) (limite múltiplo)**

É o limite de  $f(x, y)$ , calculado no ponto, quando ele existe.

**Afirmção:**

Se existe limite múltiplo e existe limite iterado, então este limite iterado coincide com o limite múltiplo.

Se existem os limites iterados e são iguais entre si, não garante que exista o limite múltiplo.

**Conclusão:**

Se os limites iterados existem e são diferentes, então, o limite múltiplo não existe.

**Exemplo**

**3.2.(a)** Analise a existência do limite da função  $f$  no ponto dado.

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (0,0)$$

Analisemos, primeiramente, os limites iterados:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$2) \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Vimos que os limites iterados existem e são iguais. Com esse resultado, não podemos afirmar nada ainda. Vamos calcular o limite em outra direção.

$$3) \lim_{y=x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Como o resultado do limite deu diferente dos limites iterados, podemos afirmar que não existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

**Exemplos**

$$\textbf{3.2.(b)} \quad f(x, y) = \frac{(x-1)^4 - (y-1)^4}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \quad (1,1)$$

**3.2.(c)** Utilize a definição para demonstrar a existência do limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

**3.2.(d)** Analise a existência do limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}$

### 3.3 Continuidade de funções de várias variáveis

#### **Def.3.3.(a) (função contínua no ponto)**

Seja  $X$  um conjunto no espaço  $\mathbb{R}^n$  e  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  um ponto de  $X$ . Seja a função  $y = f(x)$  definida no conjunto  $X$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Vamos dizer que a função  $f(x)$  é contínua no ponto  $x^{(0)}$  se existe o limite da função  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x^{(0)}$  e esse limite é igual ao valor da função no ponto  $x^{(0)}$ .

$$\exists \lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$$

#### **Propriedades**

Sejam  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  e  $g(x) = g(x_1, \dots, x_n)$  contínuas no ponto  $x^{(0)} \in E \subset \mathbb{R}^n$ , então:

1.  $f(x) \pm g(x)$

2.  $f(x).g(x)$  São contínuas no ponto  $x^{(0)}$

3.  $f(x)/g(x)$  ( $g(x^{(0)}) \neq 0$ )

#### **Def.3.3.(b) (função contínua no conjunto)**

Seja  $X$  um conjunto no espaço  $\mathbb{R}^n$ ,  $f(x)$  definida em  $X$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Vamos dizer que a função  $f(x)$  é contínua no conjunto  $X$  se a função  $f(x)$  é contínua em qualquer ponto desse conjunto.

#### **Exemplo**

**3.3.(a)** Verifique a continuidade de  $f$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y^2}{2x+y}, & \text{se } (x, y) \neq (1, 3) \\ 2, & \text{se } (x, y) = (1, 3) \end{cases}$$

**3.3.(b)**  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x + y}$

**Teorema 3.3.(a) (Continuidade)**

Toda função é contínua no seu domínio.

**Exemplos**

**3.3.(c)** Determine o conjunto de continuidade da função  $h(x, y) = \ln(xy - 1)$

**3.3.(d)** Determine o conjunto de continuidade da função  $h(x, y) = \frac{3x}{\operatorname{sen} y}$

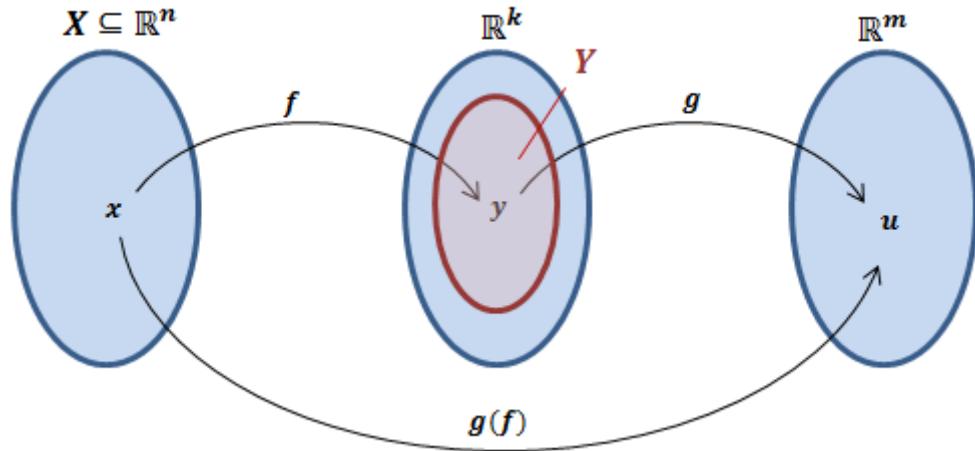
**3.3.(e)** Determine todos os pontos em que  $f$  é contínua sendo

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

### Def.3.3.(c) (função composta)

Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $y = f(x)$  definida no  $X$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Denotamos por  $Y = f(X)$  a imagem do conjunto  $X$  com transformação  $f$ .

Seja  $u = g(y)$  definida no  $Y$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Então vamos dizer que no conjunto  $X$  é definida uma função composta  $u = g(f(x)) = h(x)$  com valor no espaço  $(X \subset \mathbb{R}^n) \quad h : X \rightarrow \mathbb{R}^m$



### Teorema 3.3.(a) (continuidade da função composta)

Seja

$X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $y = f(x)$  definida no  $X$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $Y = f(X)$  ( $Y \subset \mathbb{R}^k$ ),  $u = g(y)$  definida no  $Y$

$g : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$   $u = g(f(x)) = h(x)$

Se  $f(x)$  é contínua num ponto  $x^{(0)} \in X$  e a função  $g(y)$  é contínua num ponto  $y^{(0)} = f(x^{(0)})$  (valor da função no ponto  $x^{(0)}$ ), então a função composta  $g(f(x)) = h(x)$  é contínua no ponto  $x^{(0)}$ .

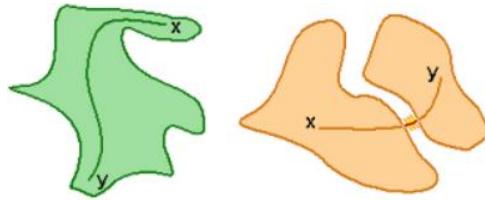
### Exemplo

**3.3.(f)** Dadas as funções  $f(x, y) = (x^2 + y^2, x)$  e  $g(x, y) = (y, y + x)$ . Verifique se a função composta  $g(f(x, y))$  é contínua no ponto  $(1, 2)$ .

## 3.4 Propriedades globais de funções contínuas

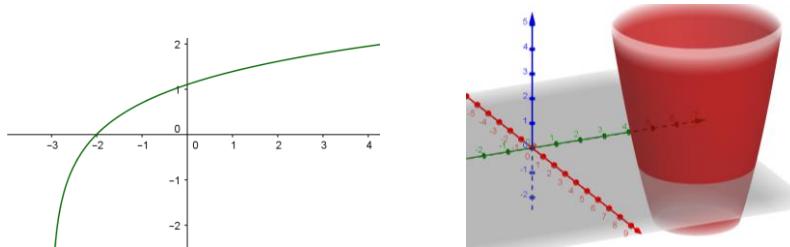
**Def.3.4.(a) (conjunto linearmente conexo)**

O conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é chamado linearmente conexo se para quaisquer pontos  $x^{(1)}, x^{(2)}$  desse conjunto, existe, pelo menos, uma curva  $\Gamma$  (gama)  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ ;  $x_j(t)$  contínuas no  $[a, b]$  tal que  $x(a) = x^{(1)}$ ,  $x(b) = x^{(2)}$

$$\forall t \in [a, b] \Rightarrow x(t) \in X$$


**Teorema 3.4.(a) (1º Teorema de Bolzano-Cauchy- existência da raíz)**

Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Se  $X$  é linearmente conexo e  $f$  é contínua no  $X$  e se  $\exists x^{(1)}, x^{(2)} \in X$  tal que  $f(x^{(1)}) \cdot f(x^{(2)}) < 0$  então existe pelo menos um  $x^{(0)} \in X : f(x^{(0)}) = 0$



**Teorema 3.4.(b) (2º Teorema de Bolzano-Cauchy)**

Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Se  $X$  é linearmente conexo e  $f$  é contínua no  $X$  e se  $\exists x^{(1)}, x^{(2)} \in X$  onde  $f(x^{(1)}) = A$ ,  $f(x^{(2)}) = B$   $A \neq B$ , então para qualquer valor  $C$  entre  $A$  e  $B$ , existe pelo menos um ponto  $x^{(0)} \in X : f(x^{(0)}) = C$

( $\mathbb{R}^2$ : teorema do valor intermediário)

**Teorema 3.4.(c) (1º Teorema de Weiertrass)**

Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto.  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Se  $f(x)$  é contínua no  $X$ , então  $Y = f(X)$ , a imagem  $Y$ , é limitada no  $\mathbb{R}^k$

**Teorema 3.4.(d) (2º Teorema de Weiertrass)**

Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto.  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Se  $f(x)$  é contínua no  $X$  então  $\exists x^{(1)}, x^{(2)} \in X$  tais que os valores de  $f(x^{(1)})$  e  $f(x^{(2)})$  são valores máximos e mínimos da função  $f$  nesse conjunto.

### 3.5 Derivadas parciais

#### Def.3.5.(a) (derivada parcial)

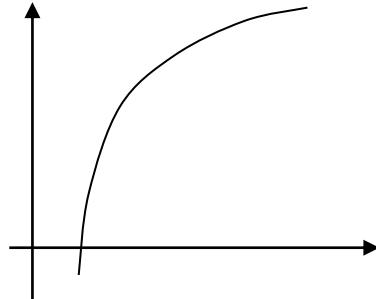
Seja  $y = f(x)$  uma função de uma variável real. Sua derivada primeira é:

(1)  $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  e pode ser interpretada como a taxa instantânea de variação

de  $y$  em relação à  $x$ . Para uma função  $z = f(x, y)$  de duas variáveis, necessita-se de uma interpretação análoga da taxa à qual  $z$  varia quando  $x$  e  $y$  variam (isolada ou simultaneamente). Vejamos:

Começa-se mantendo  $y$  fixo e fazendo  $x$  variar. A taxa de variação de  $z$  em relação à  $x$  é então denotada por  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e tem o

$$\text{valor (2)} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$



O valor desse limite, se existir, é chamado **DERIVADA PARCIAL DE  $f$  EM RELAÇÃO À  $x$** . Da mesma forma pode-se manter  $x$  fixo e fazer  $y$  variar. A taxa de variação de  $z$  em relação a  $y$  é

então a **DERIVADA PARCIAL DE  $f$  EM RELAÇÃO À  $y$** , definida como:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

- **Notações usadas para derivadas parciais:**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = D_x f(x, y) = D_1 f(x, y)$$

Observe que se o símbolo  $y$  na equação 2, for omitido, o resultado é o limite na equação 1. Isso significa que se pode calcular  $\frac{\partial z}{\partial x}$  como uma derivada simples em relação à  $x$ , simplesmente considerando-se  $y$  como uma constante durante o processo de diferenciação. Analogamente, pode-se calcular  $\frac{\partial z}{\partial y}$  como uma derivada simples, encarando-se  $y$  como a única variável e  $x$  como uma constante durante o cálculo.

#### Exemplo

$$f(x, y) = x^2 + 2xy^2 - y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y^2 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4xy - 3y^2$$

➤ Interpretação geométrica das derivadas parciais

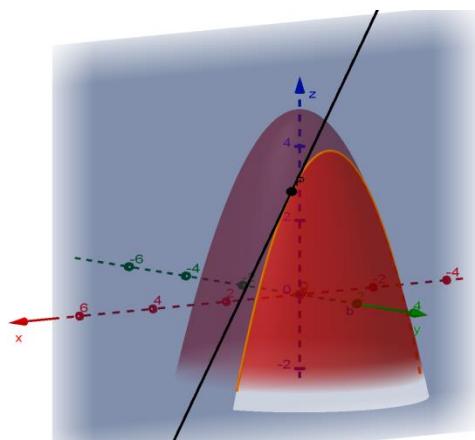


Figura 1

As derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  são os coeficientes angulares de retas tangentes a certas curvas na superfície  $z = f(x, y)$ .

A figura 1 ilustra a intersecção desta superfície com um plano vertical  $y = b$  que é paralelo a  $xOz$ . Ao longo da curva,  $x$  varia e  $y$  permanece fixo ( $y = b$ ). Consideramos um ponto  $P$  na curva ( $P(a, b, c)$ ). Passando por  $P$ , traçamos a reta tangente à curva e contida no plano. Vejamos a projeção paralela da reta tangente no plano  $xOz$ , da curva  $x$  na superfície e do ponto  $P$  (figura 2).

Pode-se agora “ignorar” a presença de  $y = b$  e considerar  $z = f(x, b)$  como uma função de única variável  $x$ . O coeficiente angular da reta tangente à curva  $x$  original por  $P$ , é igual ao coeficiente angular  $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)$  da reta tangente na figura 2.

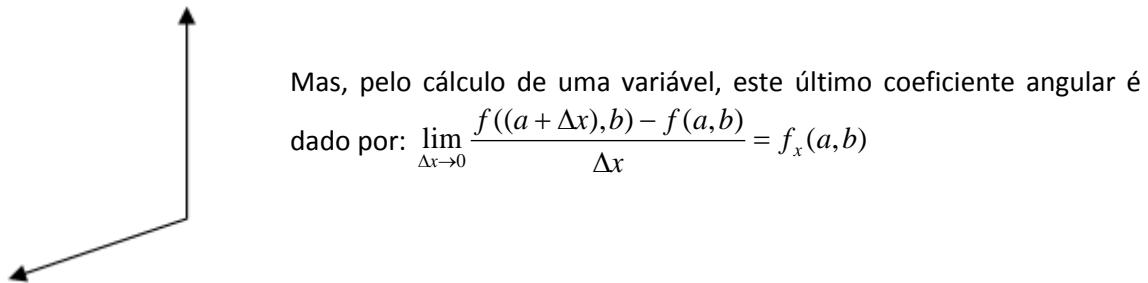


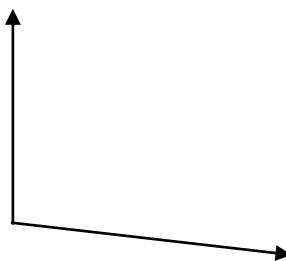
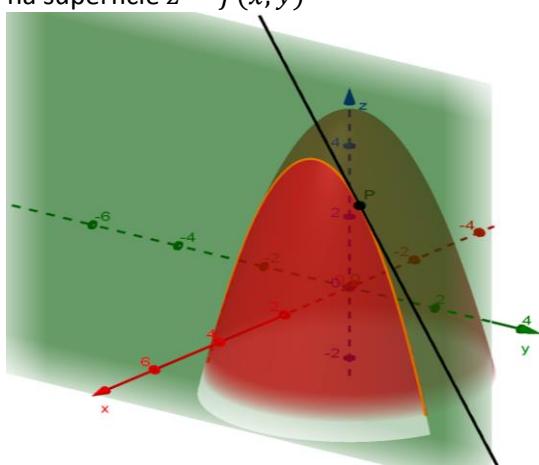
Figura 2

$$\text{Significado Geométrico de } \frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y)$$

O valor  $f_x(a, b)$  é o coeficiente angular da reta tangente, em  $P(a, b, c)$  à curva  $x$  no ponto  $P$  na superfície  $z = f(x, y)$

$$\text{Significado Geométrico de } \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$$

O valor  $f_y(a, b)$  é o coeficiente angular da reta tangente, em  $P(a, b, c)$  à curva  $y$  no ponto  $P$  na superfície  $z = f(x, y)$



## ➤ Plano Tangente

As duas retas tangentes que encontramos determinam um plano único pelo ponto  $P(a, b, f(a, b))$ .

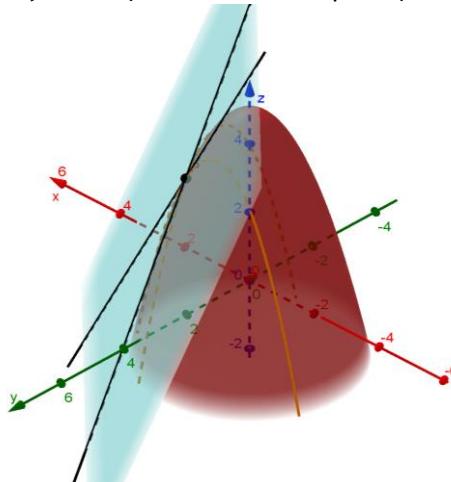
### Def.3.5.(b) (plano tangente a $z = f(x, y)$ )

Suponha-se que a função  $f(x, y)$  tenha derivadas parciais contínuas em um retângulo no plano  $xy$  contendo  $(a, b)$  em seu interior. Então o **PLANO TANGENTE** à superfície  $z = f(x, y)$  no ponto  $P(a, b, f(a, b))$  é o plano que passa por  $P$  e contém as retas tangentes às duas curvas:

$$\begin{aligned} z &= f(x, b), \quad y = b \quad (\text{curva } x) \\ z &= f(a, y), \quad x = a \quad (\text{curva } y) \end{aligned}$$

\* Equação de um plano:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (a, b, c) = \vec{n} \quad (\text{vetor normal ao plano})$$



$\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são os vetores tangentes às curvas  $x$  e  $y$  respectivamente.

Como se viu, a curva  $y$  tem coeficiente angular  $f_y(a, b)$  em  $P$  e assim, pode-se tomar  $\vec{v} = \vec{j} + f_y(a, b)\vec{k}$  como seu vetor tangente em  $P$ . A curva  $x$ , tem como coeficiente angular  $f_x(a, b)$  em  $P$  e assim, pode-se tomar  $\vec{u} = \vec{i} + f_x(a, b)\vec{k}$  como seu vetor tangente.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \text{vetor normal}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & f_y(a, b) \\ 1 & 0 & f_x(a, b) \end{vmatrix} = f_x(a, b)\vec{i} + f_y(a, b)\vec{j} - \vec{k} = \vec{n}$$

$$\vec{n} = \left( \frac{\partial z}{\partial x}(a, b), \frac{\partial z}{\partial y}(a, b), -1 \right) \text{ forma analítica}$$

Logo, a equação do plano tangente à superfície no ponto  $P$  é:

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - [z - f(a, b)] = 0$$

$$\text{ou } z - c = \frac{\partial z}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - b) \quad \text{onde } c = f(a, b)$$

\*  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  são calculadas no ponto  $(a, b)$

### Exemplo

3.5.(a) Escreva a equação do plano tangente ao paraboloide  $z = x^2 + y^2$  no ponto  $P(2, -1, 5)$

### 3.6 Derivadas de ordem superior

---

Seja a função  $u = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$ ;  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Vamos supor que  $f(x)$  tem derivadas parciais no conjunto  $X$ :  $\exists \frac{\partial f}{\partial x_k}, \forall k = \overline{1, n}$ , considerar num ponto

$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in X$ , consideramos uma  $r$ -vizinhança perfurada do ponto  $x^{(0)}$ .

$\frac{\partial f}{\partial x_k} = g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Se existe derivada parcial dessa função, então:

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = f''_{x_k x_j} = f_{x_k x_j}^2;$$

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{k_p} \partial x_{k_{p-1}}, \dots, \partial x_{k_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{k_p}} \left( \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{k_{p-1}}, \dots, \partial x_{k_1}} \right) = \frac{f^{(p)}}{x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_p}} \text{ derivada parcial de ordem } p$$

Quando  $k \neq j$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$  são as derivadas mistas, a primeira em relação a  $x_k$  e a segunda em relação a  $x_j$ .

#### Exemplo

3.6.(a) Calcule as derivadas de segunda ordem de  $f(x, y) = x^2y + \cos(x + y)$

#### ➤ Algumas propriedades das derivadas parciais

Se as funções  $f(x)$  e  $g(x)$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tem derivadas parciais, isto é:

$\exists \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}$  no ponto  $x^0 \in X$ , então temos:

$$1. \frac{\partial}{\partial x_j}(f(x) \pm g(x)) = \frac{\partial f}{\partial x_j} \pm \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

$$2. \frac{\partial}{\partial x_j}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot g + \frac{\partial g}{\partial x_j} \cdot f$$

$$3. \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}}{g^2} \quad g(x^0) \neq 0$$

- Se  $\exists \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_j}$  (derivada da função  $f(x)$  no ponto  $x^0$  em relação à variável  $x_j$ ) então  $f(x)$  é contínua no  $x^0$  em relação à variável  $x_j$ ;
- Se  $f$  tem todas as derivadas parciais em relação a cada variável, então esta função é contínua no  $x^0$  em relação a cada variável separada;
- Da existência de todas as derivadas parciais em um ponto, não segue a continuidade no conjunto de todas as variáveis.

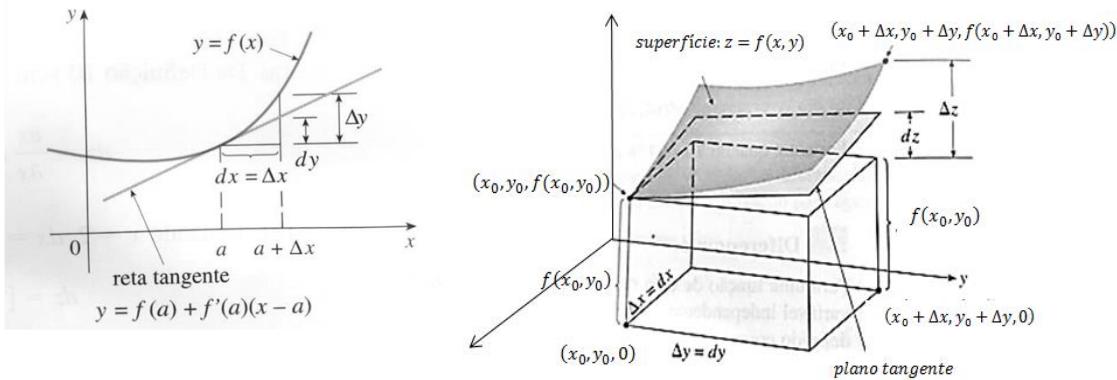
**Exemplo**

$$3.6.(b) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

## 3.7 Diferenciabilidade

### ➤ Diferencial de função de duas variáveis

**Def.3.7.(a)** Se  $f$  for uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$ , então o incremento de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$ , denotado por  $\Delta f(x_0, y_0)$  é dado por  $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ .



**Def.3.7.(b)** Se  $f$  for uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$  e o incremento de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  puder ser escrito como:

$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$ , onde  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são funções de  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , tais que  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  e  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  quando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$ , então diremos que  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ .

#### Exemplo

**3.7.(a)** Verifique que a função  $f(x, y) = 3x - xy^2$  é diferenciável para todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ .

## ➤ Diferencial de função de várias variáveis

### Def.3.7.(c) (incremento total)

Seja  $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  definida no  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\forall x^0 \in X \quad (x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) \in X$$

$$x - x^0 = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) = \Delta x \quad x = x^0 + \Delta x$$

$$\Delta f(x^0) = f(x) - f(x^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

essa diferença ( $f(x) - f(x^0)$ ) tem o nome de incremento total e é denotada por  $\Delta f(x^0)$

### Def.3.7.(d) (diferenciabilidade)

Vamos dizer que a função  $f(x)$  é diferenciável no ponto  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  se o incremento total dessa função pode ser representado da seguinte forma:

$$\Delta f(x^0) = f_{x_1}(x^0)\Delta x_1 + f_{x_2}(x^0)\Delta x_2 + \dots + f_{x_n}(x^0)\Delta x_n + \varepsilon_1\Delta x_1 + \varepsilon_2\Delta x_2 + \dots + \varepsilon_n\Delta x_n \text{ onde } \varepsilon_j \text{ são funções}$$

$$\text{que dependem de } \Delta x_j \left( \varepsilon_j = \lim_{(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow 0} (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow 0 \right) \forall j = \overline{1, n}$$

### Def. 3.7.(e) (diferenciação total)

Se  $f$  é uma função de  $n$  variáveis  $(x_1, \dots, x_n)$  e o incremento de  $f$  em  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  é escrito como  $\Delta f(x^0) = f_{x_1}(x^0)\Delta x_1 + f_{x_2}(x^0)\Delta x_2 + \dots + f_{x_n}(x^0)\Delta x_n + \varepsilon_1\Delta x_1 + \varepsilon_2\Delta x_2 + \dots + \varepsilon_n\Delta x_n$ , onde  $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \dots, \varepsilon_n \rightarrow 0$  quando  $(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)$ , então  $f$  é diferenciável em  $x^0$ .

Se  $f$  é uma função de  $n$  variáveis e  $f$  é diferenciável em  $x^0$ , então a diferencial total de  $w = f(x_1, \dots, x_n)$  é expressa por:

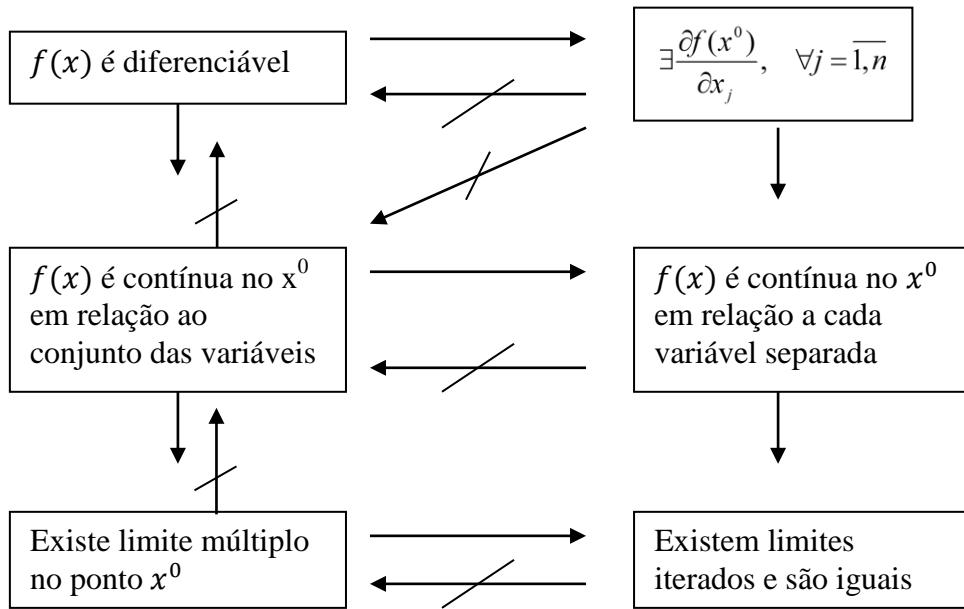
$$dw = f_{x_1}(x^0)dx_1 + f_{x_2}(x^0)dx_2 + \dots + f_{x_n}(x^0)dx_n$$

### Observações:

- 1) Se  $u = f(x)$  é diferenciável no ponto  $x^0 \in X$ , então  $f(x)$  é contínua no ponto  $x^0$ ;
- 2) Se  $f(x)$  não for contínua no  $x^0 \in X$ , então  $f$  não é diferenciável no  $x^0 \in X$ .
- 3) Se  $u = f(x)$  é diferenciável no ponto  $x^0 \in X \subset \mathbb{R}^n$ , então essa função tem todas as derivadas parciais nesse ponto;
- 4) A existência das derivadas parciais no ponto  $x^0 \in X$ , não garante que a função seja diferenciável no  $x^0 \in X$ .

**Def.3.7.(f)** Seja  $u = f(x)$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n))$  vamos dizer que essa função é diferenciável num ponto  $x^0 \in X$  ou em todo  $X$  se cada coordenada  $f_j(x_1, \dots, x_n) \forall j = \overline{1, n}$  é diferenciável no mesmo ponto  $x^0 \in X$  (ou no X).

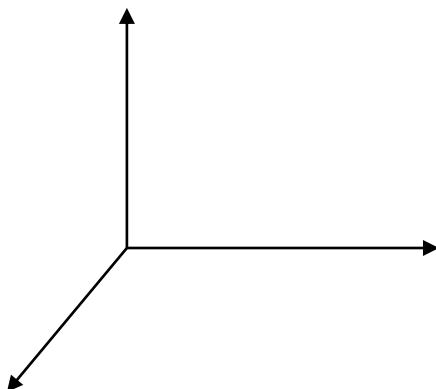
➤ Esquema



Exemplo

3.7.(b) Verifique a diferenciabilidade da função  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0,0) \end{cases}$

➤ Significado geométrico da diferencial de  $f(x, y)$



A função  $f(x, y)$ , que é diferenciável em  $(x_o, y_o)$ , possui um plano tangente nesse ponto.

➤ **Condição suficiente de diferenciabilidade da função de várias variáveis.**

**Teorema 3.7.(b)** (condição suficiente de diferenciabilidade da função)

Seja  $u = f(x)$  definida no  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e o ponto  $x^0$  é ponto interior de  $X$ .

Se  $f(x)$  tem todas as derivadas parciais numa vizinhança do ponto  $x^0$  e essas derivadas são contínuas no  $x^0$ , então essa função é diferenciável no  $x^0$ .

**Exemplos**

**3.7.(c)** Prove que  $f(x, y) = x^3 + 3xy - 5y^3$  é diferenciável  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**3.7.(d)** Seja um cone circular reto cuja altura é aumentada de 5cm para 5,01cm e o raio, diminuído de 4cm para 3,98cm. Encontre uma aproximação para a variação do volume.

**3.7.(e)** Três resistências de  $x$  ohms,  $y$  ohms e  $z$  ohms são conectadas em paralelo para dar uma resistência equivalente  $w$  tal que  $w = \frac{xyz}{xy+xz+yz}$ . Cada resistência é de 300 ohms mas está sujeita a 1% de erro. Qual é o erro máximo aproximado?

## 3.8 Diferenciação da função composta (Regra da cadeia)

### Teorema 3.8.(a)

Seja uma função  $x = g(t)$  definida no espaço  $T \subset \mathbb{R}^k$ ,  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ , denotamos por  $X = g(T)$ , a imagem do conjunto  $T$  sobre transformação  $g$  ( $X \subset \mathbb{R}^n$ ).

Seja a função  $y = f(x)$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida no conjunto  $X$ . Se a função  $g(t)$  é diferenciável no ponto  $t^0 \in T$  e a função  $f(x)$  é diferenciável no ponto  $x^0 = g(t^0)$ , então a função composta  $w = h(t) = f(g(t))$  é função diferenciável no ponto  $t^0$ .

### ➤ A regra de cadeia

#### Caso 1:

Suponha uma função  $y = f(x)$  de uma variável real, diferenciável de  $x$ . Suponha  $x = g(t)$  uma função de variável real  $t$ , diferenciável de  $t$ .

Então  $y$  é diferenciável de  $t$  e

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

#### Caso 2:

Suponha uma função  $z = f(x, y)$  de duas variáveis reais, diferenciável de  $x$  e  $y$ , onde  $x = g(t)$  e  $y = h(t)$  são funções diferenciáveis de  $t$ .

Então  $z$  é diferenciável de  $t$  e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

#### Caso 3:

Suponha uma função  $z = f(x, y)$  de duas variáveis reais, diferenciável de  $x$  e  $y$ , onde  $x = g(s, t)$  e  $y = h(s, t)$  são funções diferenciáveis de  $s$  e de  $t$ .

Então  $z$  é diferenciável de  $t$  e

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

#### Caso geral:

Suponha que  $u$  seja uma função diferenciável de  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , onde cada  $x_j$  é uma função diferenciável de  $m$  variáveis  $t_1, t_2, \dots, t_m$ . Então  $u$  é uma função de  $t_1, t_2, \dots, t_m$  e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ .

#### Exemplos

**3.8.(a)** Sejam  $w = e^{xy}$ ,  $x = t^2$  e  $y = t^3$

**3.8.(b)** Sejam  $u = xy + xz + yz$ ,  $x = rs$ ,  $y = r^2 - s^2$ ,  $z = (r-s)^2$

**3.8.(c)** A tensão  $V$ , no resistor, em um circuito elétrico simples está decrescendo lentamente à medida que a bateria se descarrega. A resistência  $R$  está aumentando com o aumento de calor do resistor. Use a Lei de Ohm ( $V=IR$ ) para achar como a corrente  $I$  está variando no momento em que  $R = 400\Omega$ ,  $I = 0,08A$ ,  $\frac{dV}{dt} = -\frac{0,01V}{s}$  e  $\frac{dR}{dt} = 0,03 \Omega/s$  (Rta: -0,000031 A/s)

### 3.9 Derivada Direcional e Gradiente

---

#### ➤ Vetor Gradiente

Seja  $w = f(x, y, z)$  definida no  $D \subset \mathbb{R}^3$ ,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . A variação no valor da função  $w$  no ponto  $P(x,y,z)$  para o ponto vizinho  $Q(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$  é dada pelo incremento  $\Delta w = f(Q) - f(P)$  (1)

$$\Delta w \approx \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \quad (2)$$

Pode-se expressar esta aproximação em termos do **VETOR GRADIENTE**  $\nabla f$  da função  $f$ , que se define como:

$$\nabla f(x, y, z) = \vec{i} f_x(x, y, z) + \vec{j} f_y(x, y, z) + \vec{k} f_z(x, y, z) \quad (3)$$

$$\text{Ou } \nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Então, a equação (2) mostra que o incremento  $\Delta w = f(Q) - f(P)$  é dado aproximadamente por

$$\Delta w = \nabla f(P) \cdot \vec{v} \quad (4)$$

onde  $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  é o vetor deslocamento de  $P$  a  $Q$ .

#### Exemplo

**3.9.(a)** Se  $f(x, y, z) = x^2 + yz - 2xy - z^2$ , então a definição do vetor gradiente na equação (3):, no ponto (2,1,3) dá:

$$\nabla f(x, y, z) = (2x - 2y)\vec{i} + (z - 2x)\vec{j} + (y - 2z)\vec{k}$$

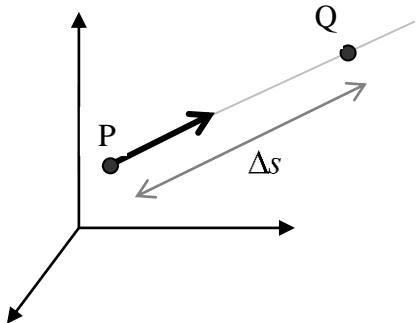
$$\nabla f(2,1,3) = (4 - 2)\vec{i} + (3 - 4)\vec{j} + (1 - 6)\vec{k} = (2, -1, -5)$$

Para calcular  $\Delta w = \nabla f(P) \cdot \vec{v}$ , sendo  $Q(1,9; 1,2; 3,1)$  então  $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (-0,1,0,2,0,1)$

$$\text{Logo, } \Delta w = (2, -1, -5) \cdot (-0,1,0,2,0,1) = -0,2 - 0,2 - 0,5 = -0,9$$

## ➤ Derivadas Direcionais

As derivadas parciais  $f_x(x, y, z)$ ,  $f_y(x, y, z)$ ,  $f_z(x, y, z)$  representam as taxas de variação de  $w=f(x,y,z)$  no ponto  $P(x,y,z)$  nas direções  $x, y$  e  $z$  respectivamente. Pode-se agora, aplicar o vetor gradiente  $\vec{\nabla}f$  para calcular a taxa de variação de  $W$  em  $P$ , em uma direção arbitrária (uma direção fica definida por um vetor unitário  $\vec{u}$ )



Seja  $Q$  um ponto do raio de  $P$  na direção de  $\vec{u}$ . A taxa média de variação de  $W$  em relação à distância entre  $P$  e  $Q$  é:

$$\frac{f(Q) - f(P)}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{\Delta w}{\Delta s} \text{ onde } \Delta s = |\overrightarrow{PQ}| = |\vec{v}| \text{ é a}$$

distância de  $P$  à  $Q$ . Então, a aproximação da equação (4)

$$\text{dá: } \frac{\Delta w}{\Delta s} = \frac{\vec{\nabla}f(P) \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \text{ mas, } \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \text{ é o vetor unitário } \vec{u} \text{ na}$$

$$\text{direção de } P \text{ a } Q. \text{ Logo: } \frac{\Delta w}{\Delta s} = \vec{\nabla}f(P) \cdot \vec{u}$$

Ao tomarmos o limite da taxa média de variação  $\frac{\Delta w}{\Delta s}$  quando  $\Delta s \rightarrow 0$ , obteremos a TAXA

$$\text{INSTANTÂNEA DE VARIAÇÃO } \frac{dw}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta s} = \vec{\nabla}f(P) \cdot \vec{u}.$$

**Def.3.9.(a) (derivada direcional)**

$D_{\vec{u}}f(P) = \vec{\nabla}f(P) \cdot \vec{u}$  é a derivada direcional de  $f$  em  $P(x, y, z)$  na direção  $\vec{u}$ .

**Exemplo**

**3.9.(b)** Suponha que a temperatura no ponto  $(x, y, z)$ , com a distância medida em quilômetros, seja dada por  $w = f(x, y, z) = 10 + xy + xz + yz$  (em graus Celsius). Ache a taxa de variação (em graus por quilômetro) da temperatura no ponto  $P(1,2,3)$  na direção do vetor  $\vec{v} = (1, 2, -2)$

Solução:

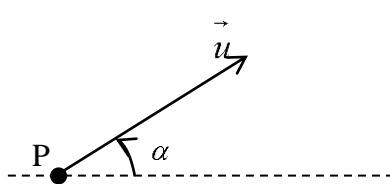
➤ **Afirmção:**

Se a função  $u = f(x, y, z)$  é diferenciável numa vizinhança do ponto  $P_0$ , então a derivada direcional dessa função existe ao longo de qualquer direção que passa por esse ponto.

➤ **Interpretação do vetor gradiente**

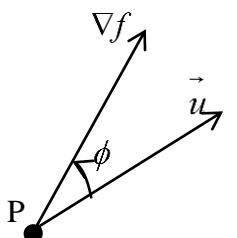
\* As fórmulas para as derivadas direcionais para as funções de duas ou mais de três variáveis, são análogas.

$$\vec{\nabla}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} \quad e \quad D_{\vec{u}}f(x, y) = \vec{\nabla}f(x, y) \cdot \vec{u} = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \vec{u} = (a, b)$$



Se  $\alpha$  é o ângulo de inclinação de  $\vec{u}$  (medido no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo), então  $a = \cos \alpha$  e  $b = \sin \alpha$  e a equação anterior fica:

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = \vec{\nabla}f(x, y) \cdot \vec{u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha$$



O vetor gradiente  $\vec{\nabla}f$  admite uma interpretação importante, que envolve a derivada direcional MÁXIMA de  $f$ . Se  $\phi$  é o ângulo entre  $\vec{\nabla}f$  no ponto  $P$  e o vetor unitário  $\vec{u}$ , então a fórmula  $D_{\vec{u}}f(P) = \vec{\nabla}f(P) \cdot \vec{u}$  fica  $D_{\vec{u}}f(P) = |\vec{\nabla}f(P)| \cdot \cos \phi$  (ver quadro abaixo) porque  $|\vec{u}| = 1$ . O valor máximo de  $\cos \phi$  é 1, quando  $\phi = 0$ . Isto ocorre quando  $\vec{u}$  é o vetor unitário particular  $\frac{\vec{\nabla}f(P)}{|\vec{\nabla}f(P)|}$  que aponta na direção do próprio vetor gradiente. Neste caso, a fórmula fica:  $D_{\vec{u}}f(P) = |\vec{\nabla}f(P)|$  e assim, o valor da derivada direcional é o

comprimento (módulo) do vetor gradiente, o que prova o seguinte teorema:

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{\vec{\nabla}f \cdot \vec{u}}{|\vec{\nabla}f| \cdot |\vec{u}|} \rightarrow \vec{\nabla}f \cdot \vec{u} \\ &= |\vec{\nabla}f| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \phi \\ \text{e como } |\vec{u}| &= 1, \quad \text{temos que} \\ \vec{\nabla}f \cdot \vec{u} &= |\vec{\nabla}f| \cos \phi \end{aligned}$$

**Teorema 3.9.(a) (significado do vetor gradiente)**

Obtém-se o valor máximo da derivada

direcional  $D_{\vec{u}}f(P)$  quando  $\vec{u}$  é o vetor na direção do vetor gradiente  $\vec{\nabla}f(P)$  ( $\vec{u} = \frac{\vec{\nabla}f(P)}{|\vec{\nabla}f(P)|}$ ).

O valor máximo da derivada direcional é  $|\vec{\nabla}f(P)|$ , que é o comprimento (módulo) do vetor gradiente. O valor mínimo da derivada direcional é  $-|\vec{\nabla}f(P)|$ .

### Teorema 3.9.(b) (vetor gradiente como vetor normal)

Suponha-se que  $F(x, y, z) = 0$  tenha derivadas parciais de primeira ordem contínuas, e seja  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  um ponto do gráfico da equação  $F(x, y, z) = 0$  com  $\nabla F(P_0) \neq 0$ .

Se  $r(t)$  é uma curva diferenciável nessa superfície com  $r(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ , então:

$\nabla F(P_0) \cdot r'(t_0) = 0$ . Assim,  $\nabla F(P_0)$  é perpendicular ao vetor tangente  $r'(t_0)$ , conforme figura:

**(Dica para demonstração:** Escreva a equação da superfície como função composta e aplique a regra da cadeia).

O vetor gradiente  $\nabla F$  é normal a toda curva na superfície  $F(x, y, z) = 0$ .

- A reta normal a uma superfície no ponto  $P_0$  é aquela que passa por  $P_0$  e tem  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  como vetor diretor. Suas equações simétricas são dadas por

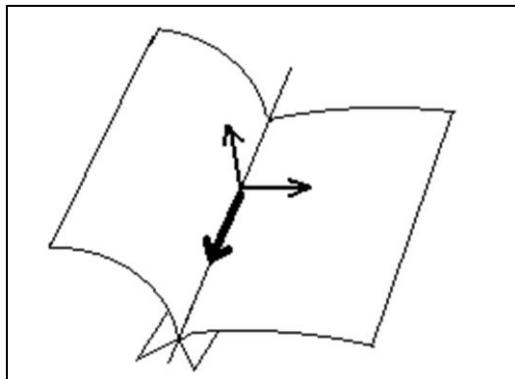
$$\frac{x - x_0}{f_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{f_z(P_0)}, \quad \text{se } f_x(P_0) \neq 0, f_y(P_0) \neq 0 \text{ e } f_z(P_0) \neq 0$$

#### Exemplo

**3.9.(c)** Escreva uma equação do plano tangente ao elipsoide  $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 45$  no ponto  $(2, -3, -1)$ :

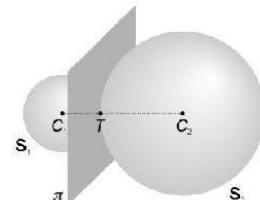
**Solução:**

A intersecção de duas superfícies  $F(x, y, z) = 0$  e  $G(x, y, z) = 0$  é, em geral, uma curva no espaço.



Pode-se representar essa curva parametricamente na vizinhança de todo ponto onde os vetores gradientes  $\nabla F$  e  $\nabla G$  não sejam paralelos. Esta curva  $C$  é normal a ambos os vetores  $\nabla F$  e  $\nabla G$ . Isto é, se  $P$  é um ponto de  $C$ , então o vetor tangente a  $C$  em  $P$  é perpendicular a ambos os vetores  $\nabla F(P)$  e  $\nabla G(P)$ . Decorre que o vetor  $T = \nabla F \times \nabla G$  é tangente à curva intersecção das superfícies  $F(x, y, z) = 0$  e  $G(x, y, z) = 0$ .

**OBS.:** se as superfícies em questão não se interseccionam mas são tangentes em um ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$ , então existe um plano neste ponto tangente às duas superfícies e é válida a relação:  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = k \cdot \nabla g(x_0, y_0, z_0)$

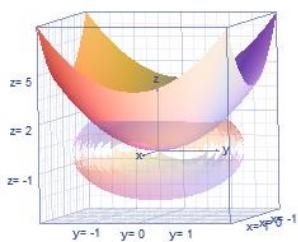


#### Exemplo

**3.9.(d)** Escreva as equações simétricas da reta tangente à curva de intersecção das superfícies  $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 49$  e  $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$  em  $P(3, -3, 3)$ .

**Exemplo**

**3.9.(e)** O ponto  $P(1, -1, 2)$  pertence ao paraboloide  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$  e ao elipsoide  $G(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 9 = 0$ .



Escreva uma equação do plano que contém  $P$ , normal à curva de intersecção dessas superfícies:

**Solução:**

➤ **Sobre derivadas de ordem superior**

**Teorema:**

Seja a função  $u=f(x,y)$ , definida no  $X \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . O ponto  $M_0 = (x_0, y_0)$  é ponto interior do conjunto  $X$ .

**Se:**

1)  $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  numa vizinhança do ponto  $M_0 \cup_r(M_0)$ ;

2) Se as derivadas mistas  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  são contínuas no ponto  $M_0$ ;

**Então essas derivadas mistas são iguais.**

**OBS.:** A mesma afirmação é verdadeira para funções de quaisquer números de variáveis e para derivadas mistas para qualquer ordem.

**3.9.(f)** Calcule as derivadas mistas da função  $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

**3.9.(g)** Calcule as derivadas mistas da função  $f(x, y, z) = x^2 y z^2$

### 3.10 Derivação de funções implícitas

#### **Teorema 3.10.(a)**

Dadas as funções  $F = F(x, y)$  e  $y = f(x)$  definidas e diferenciáveis, respectivamente em  $D \subset \mathbb{R}^2$  e  $x \in [a, b]$ . Seja  $f$  a função definida implicitamente por  $F(x, y) = 0$ , ou seja,  $F(x, f(x)) = 0$  para  $x \in [a, b]$ . Então:

$$\frac{df}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad x \in [a, b] \text{ onde as derivadas do segundo membro devem ser calculadas em } (x, f(x)) \text{ e supondo } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$$

#### **Exemplos**

**3.10.(a)** Seja  $F(x, y) = x^3 + y \cos x = 0$ , determine  $\frac{dy}{dx}$

**3.10.(b)** Calcule  $\frac{dy}{dx}$  sabendo que  $y = f(x)$  é definida implicitamente por  $F(x, y) = (3x^2 + 2y^2)^2 = 0$

#### **Teorema 3.10.(b)**

Dadas as funções  $F = F(x, y, z)$  e  $z = f(x, y)$  definidas e diferenciáveis no  $D \subset \mathbb{R}^3$  e  $S \subset \mathbb{R}^2$  respectivamente, seja  $f$  a função de  $(x, y)$  definida implicitamente por  $F(x, y, z) = 0$ , ou seja,  $F(x, y, f(x, y)) = 0$  em  $S$ . Então:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \quad \forall (x, y) \in S$$

As derivadas do segundo membro são calculadas em  $(x, y, f(x, y))$ .

#### **Exemplo**

**3.10.(c)** Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sendo  $z = f(x, y)$  definida implicitamente por  $F(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xz = 0$

Se  $z = f(x, y)$ , definida implicitamente por  $F(x, y, z) = 0$ , for diferenciável, então:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{ou seja} \quad df = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} dx - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} dy$$

**OBS:** Se  $y = h(x)$  é definida implicitamente pelo sistema de equações  $F(x, y, z) = 0$  e  $G(x, y, z) = 0$ , dos quais é possível obter a função implícita  $z = f(x, y)$  e  $z = g(x, y)$ , tal que  $H(x, y) = f(x, y) - g(x, y) = 0$ , então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

### Exemplo

**3.10.(d)** Sejam  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  e  $G(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z^2 - 1 = 0$ , calcule  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{\partial z}{\partial x}$

Se  $F(x, y, u, v) = 0$  e  $G(x, y, u, v) = 0$  onde  $u$  e  $v$  são funções implícitas de  $x$  e  $y$ , então:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

Da mesma forma define-se:  $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

**Exemplo**

**3.10.(e)** Dada  $F(x, y, u, v) = x - u^2 + v^2 = 0$  e  $G(x, y, u, v) = y - uv = 0$ , determine  $\frac{\partial u}{\partial x}$

### 3.11 Extremos das funções de mais de uma variável

#### ➤ Extremos relativos

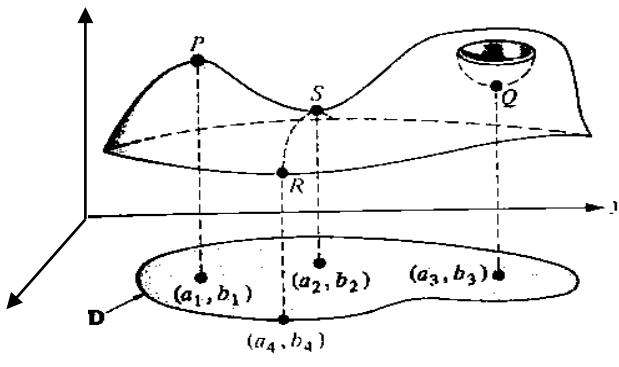


Figura 1

**a)** Uma função de duas variáveis tem um valor máximo relativo  $f(a,b)$  no ponto  $(a,b)$  se existe um disco circular de raio  $r > 0$  com centro em  $(a,b)$ , tal que se  $(x,y)$  é ponto interior desta vizinhança, então  $(x,y)$  está no domínio de  $f$  e  $f(x,y) \leq f(a,b)$ .

**b)** Uma função  $f$  de duas variáveis tem um valor mínimo relativo  $f(a,b)$  no ponto  $(a,b)$  se existe um disco circular de raio  $r > 0$  com centro em  $(a,b)$  tal que se  $(x,y)$  é um ponto interior desta vizinhança, então  $(x,y)$  está no domínio de  $f$  e  $f(x,y) \geq f(a,b)$ .

Na figura temos:  $P$ , ponto máximo relativo de  $f$ , pois  $f(a_1, b_1)$  é maior que os valores próximos de  $f(x,y)$ ;  $Q$  é o mínimo relativo de  $f$ , já que  $f(a_3, b_3)$  é menor que os valores próximos de  $f(x,y)$ ;  $S$  não é nem máximo nem mínimo relativo, pois os valores de  $f(x,y)$  aumentam quando nos aproximamos de  $P$  e diminuem quando nos aproximamos de  $R$ ;  $R$  não é ponto de mínimo relativo porque  $(a_4, b_4)$  não é centro de nenhum disco inteiramente contido em  $D$ .

**Conclusão:** Só podem ser extremos relativos de uma função, pontos interiores do domínio.

#### Teorema 3.11.(a) (Condição necessária para extremos relativos)

Seja  $(a,b)$  um ponto interior do domínio de uma função  $z = f(x,y)$  cujas derivadas parciais  $f_x(a,b)$  e  $f_y(a,b)$  existem. Então se  $z$  tem extremo relativo em  $(a,b)$  é necessário que  $f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b)$ , isto é,  $\vec{\nabla}f(a,b) = \vec{0}$ , ou seja, no ponto em que a função tem extremo relativo, seu gradiente ou não existe ou é o vetor nulo.

\* os pontos em que a função tem extremos relativos são chamados de **PONTOS CRÍTICOS**, no entanto, alguns pontos críticos podem ser somente “pontos de sela”, ou seja, pontos críticos onde a função não tem máximo nem mínimo.

#### Teorema 3.11.(b) (Teste da segunda derivada)

Seja  $(a,b)$  um ponto interior do domínio de  $f$  tal que as primeiras derivadas parciais de  $f$  existem e são contínuas em algum disco circular com centro em  $(a,b)$  contido no domínio de  $f$ . Se  $(a,b)$  é um ponto crítico de  $f$ , isto é,  $f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b)$  e

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2 \text{ então:}$$

- $\Delta$  = determinante da matriz Hessiana, desenvolvida no século XIX pelo alemão Ludwig Otto Hesse

**a)** Se  $\Delta > 0$  e  $f_{xx}(a,b) < 0$ , então  $f$  tem máximo relativo em  $(a,b)$ ;

**b)** Se  $\Delta > 0$  e  $f_{xx}(a,b) > 0$ , então  $f$  tem mínimo relativo em  $(a,b)$ ;

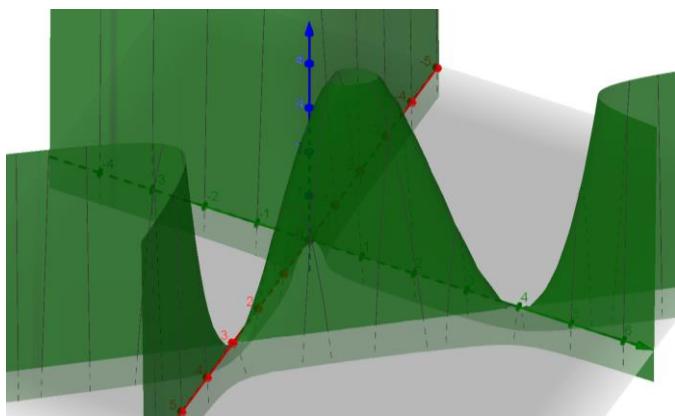
**c)** se  $\Delta < 0$ , então  $f$  tem um ponto de sela em  $(a,b)$ ;

d) se  $\Delta = 0$ , não podemos afirmar nada. Temos que utilizar outros testes.

**Exemplo**

**3.11.(a)** Determine e classifique todos os pontos críticos de  $f(x, y) = 12xy - 4x^2y - 3xy^2$ .

(0,0) sela, (0,4) sela, (3,0) sela e (1,4/3) Max relativo.



**3.11.(b)** Determine os pontos críticos de  $f(x, y) = x^4 + y^4$  e classifique-os como ponto de máximo ou mínimo relativo ou ponto de sela.

**3.11.(c)** Deseja-se construir um depósito retangular sem tampa, com volume  $V = 12m^3$ . O custo do metro quadrado de material a ser usado é de R\$ 400,00 para o fundo, R\$ 300,00 e R\$ 200,00 para os lados distintos. Determine as dimensões do depósito que minimizam os custos.

➤ **Extremos Absolutos**

**Def.3.11(a):** Uma função  $f$  de duas variáveis tem um valor máximo absoluto  $f(a, b)$  no ponto  $(a, b)$  de seu domínio  $D$  se  $f(x, y) \leq f(a, b)$  para todo ponto  $(x, y)$  em  $D$ . Analogamente,  $f$  tem um valor mínimo absoluto  $f(c, d)$  em  $(c, d)$  de seu domínio  $D$ , se  $f(x, y) \geq f(c, d)$  para todo ponto  $(x, y)$  de  $D$ .

**Teorema 3.11.(c) (existência do extremo absoluto)**

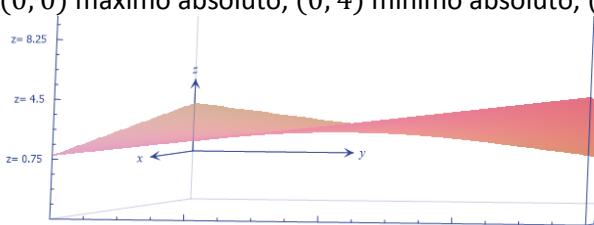
Seja  $f$  uma função de duas variáveis cujo domínio  $D$  seja compacto. Então  $f$  tem um valor de máximo absoluto e um valor de mínimo absoluto.

**Observações:**

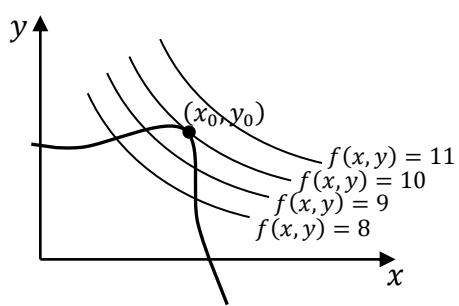
- a) Um extremo absoluto que ocorre em um ponto interior do domínio  $D$  é automaticamente um extremo relativo de  $f$ ; um extremo absoluto de  $f$  que não é um extremo relativo, localiza-se em algum ponto da fronteira de  $D$ .
- b) Na figura 1,  $P$  é ponto de máximo absoluto e também relativo, pois  $(a_1, b_1) \in D$ ;  $R$  é mínimo absoluto, mas não é mínimo relativo, pois  $(a_4, b_4)$  está na fronteira de  $D$ , mas não é ponto interior.
- c) Para localizarmos o extremo absoluto de  $f$ , primeiro encontramos todos os extremos relativos e comparamos o maior e o menor valor destes com os valores de  $f$  ao longo da fronteira de  $D$ .

**Exemplo**

- 3.11.(d)** Ache os valores máximos e mínimos atingidos pela função  $f(x, y) = xy - x - y + 3$  em pontos da região triangular  $D$  do plano  $xy$ , com vértices em  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  e  $(0,4)$ .  
 $(0; 0)$  máximo absoluto,  $(0; 4)$  mínimo absoluto,  $(1; 1)$  sela.



### 3.12 Multiplicadores de Lagrange



A figura mostra a curva da restrição juntamente com várias curvas de nível da função  $f(x, y) = z$ . Essas curvas de nível tem equação  $f(x, y) = c$ , onde  $c = 8, 9, 10$  e  $11$ .

Maximizar  $f(x, y)$  sujeita à  $g(x, y) = k$  é achar o maior valor de  $c$  tal que a curva de nível  $f(x, y) = c$  intercepte  $g(x, y) = k$ . Parece, da figura, que isso acontece quando essas curvas se tocam, ou seja, quando essas curvas têm uma reta tangente em comum (caso contrário, poderíamos aumentar o valor de “ $c$ ”). Isso significa que as retas normais no ponto  $(x_0, y_0)$ , onde as duas curvas se tocam, devem ser as mesmas. Logo, seus vetores gradientes são paralelos:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0, y_0) \text{ para algum } \lambda$$

#### **Teorema 3.12.(a) (Multiplicadores de Lagrange – um vínculo)**

Sejam  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Se o máximo (ou mínimo) de  $f$  sujeito à condição  $g(x, y) = 0$ , ocorre em um ponto  $P$  onde  $\nabla g(P) \neq 0$ , então  $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$  para alguma constante  $\lambda$ .

#### **Corolário 3.12.(a)**

Os pontos em que uma função  $f$  de duas variáveis tem extremos relativos sujeitos ao vínculo  $g(x, y) = 0$  estão incluídos entre os pontos  $(x, y)$  que satisfazem o sistema:

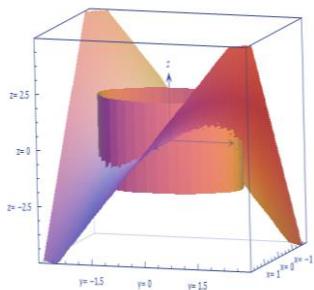
$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Se a função  $f$  for uma função de três variáveis, então o sistema fica:

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

#### **Exemplo**

**3.12.(a)** Encontre os extremos de  $f(x, y) = xy$  se  $(x, y)$  está restrito à elipse  $4x^2 + y^2 = 4$ .



**3.12.(b)** Calcule o volume da maior caixa retangular de lados paralelos aos planos coordenados que pode ser inscrita no elipsoide  $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$  (em m<sup>3</sup>).

**3.12.(c)** Encontre os pontos extremos da função  $f(x, y, z) = x + y + z$  que pertence à curva de intersecção do cilindro  $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$  com o plano  $H(x, y, z) = x + z - 1 = 0$

### Observação

Algumas aplicações podem envolver mais de um vínculo. Em particular, se  $f(x, y, z)$  estiver associada a dois vínculos  $g(x, y, z) = 0$  e  $h(x, y, z) = 0$ , então  $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g + \mu \cdot \nabla h$

$$\begin{cases} f_x = \lambda \cdot \nabla g_x + \mu \cdot \nabla h_x \\ f_y = \lambda \cdot \nabla g_y + \mu \cdot \nabla h_y \\ f_z = \lambda \cdot \nabla g_z + \mu \cdot \nabla h_z \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Analogamente, definimos o método dos multiplicadores de Lagrange para o caso de  $n$  expressões de vínculo.

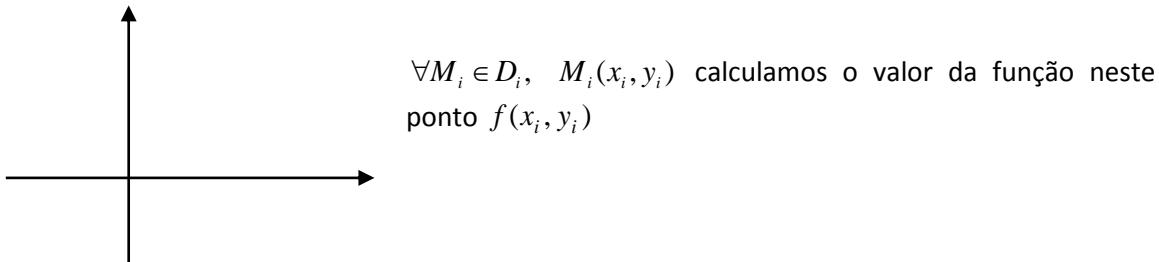
## 4 Funções de várias variáveis e integrais espaciais

### 4.1 Integrais duplas

São integrais de duas variáveis. Sua aplicação inclui o cálculo de área, volume, massa e área de superfície.

➤ **Conceito:**

Seja  $D$  um conjunto quadrável no plano (tem área),  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Vamos avaliar as regiões, no  $D$ , fechadas. Nesse conjunto, é definida uma função  $f(x, y)$ .  $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ .



Calculamos  $d_i(D_i) = \max |M_i' - M_i''| \quad \forall M_i', M_i'' \in D_i$  e anotamos por  
 $\delta = \max \{d_i(D_i)\} \quad \forall i = \overline{1, n}$   

$A(D_i) = \text{área de } D_i$	$\sum_{i=1}^n A(D_i) = \text{área de } D$	$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta A_i$
--------------------------------	---	---

**Def.4.1.(a)** Se  $\exists \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta A_i$  e esse limite é o mesmo para qualquer partição de  $D$  e para qualquer escolha dos pontos em cada parte dessa região, então esse limite é chamado **INTEGRAL DUPLA** da função  $f$  ao longo da região  $D$  e denotado por:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta A_i = \iint_D f(x, y) dA = Y$$

OBS: Se  $D$  é a região quadrável,  $f(x, y)$  é função contínua na região  $D$ , então  $\exists \iint_D f(x, y) dA = Y$

➤ **Propriedades:**

1) Se as funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  são integráveis na região  $D$ , então a função  $f(x, y) \pm g(x, y)$  também é integrável e temos a seguinte igualdade:

$$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) dA = \iint_D f(x, y) dA \pm \iint_D g(x, y) dA$$

2) Se  $f(x, y)$  é integrável na região  $D$ , então,  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $c \cdot f(x, y)$  é integrável em  $D$  e:

$$\iint_D c \cdot f(x, y) dA = c \iint_D f(x, y) dA$$

3) Se a região  $D$  é dividida em duas partes sem pontos interiores em comum:  $D = D_1 \cup D_2$  e  $f(x, y)$  é integrável, então:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$$

4)  $\iint_D dA = A(D) \quad (f(x, y) = 1)$

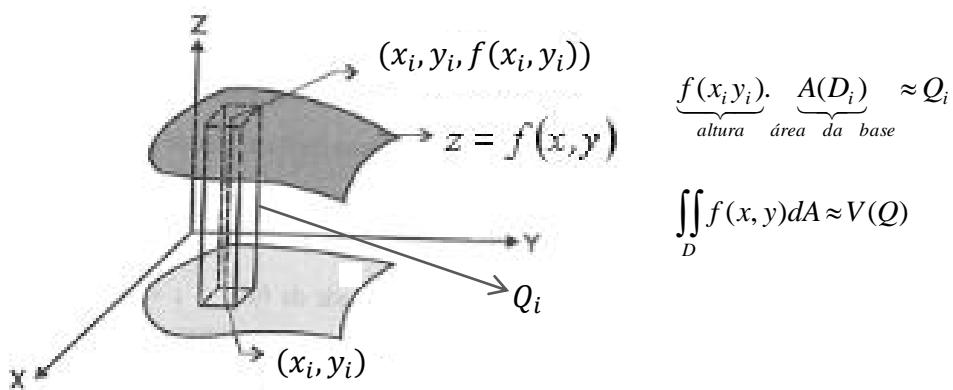
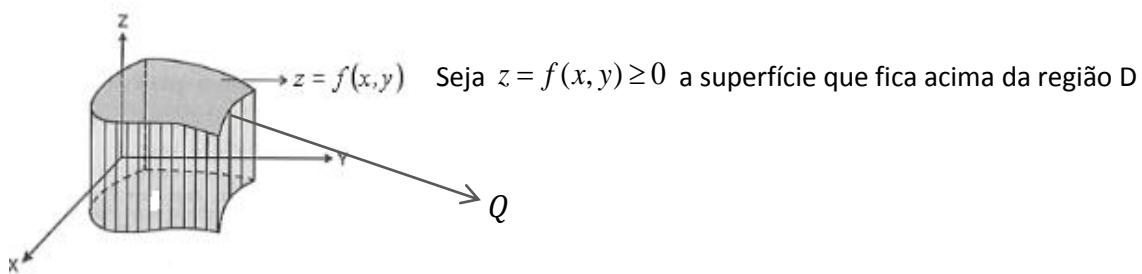
5) Seja  $f(x, y)$  integrável em  $D$  e além disso é limitada:  $\exists m, M \mid \forall (x, y) \in D$  temos

$$m \leq f(x, y) \leq M \quad \text{então} \quad m.A(D) \leq \iint_D f(x, y) dA \leq M.A(D)$$

6) Se  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  são integráveis  $\forall (x, y) \in D$ , então:

$$f(x, y) \leq g(x, y) \Rightarrow \iint_D f(x, y) dA \leq \iint_D g(x, y) dA$$

### ➤ Sentido geométrico da integral dupla



### ➤ Cálculo da Integral Dupla

1º)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (D \rightarrow \text{região retangular})$$

Seja  $f(x, y)$  contínua no  $D$

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{a \ c}^{b \ d} f(x, y) dy dx = \iint_{c \ a}^{d \ b} f(x, y) dx dy$$

Ou ainda

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

em relação a y                          em relação a x

**Exemplo**

**4.1.(a)**  $f(x, y) = 4x^3 + 6xy^2 \quad D = [1; 3] \times [-2; 1]$   
 (312 uv)

2º)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

$y_1(x), y_2(x)$  são funções contínuas no  $[a, b]$  e  $f(x, y)$  é contínua no D.

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

**Exemplo**

**4.1.(b)** Calcule  $\iint_D (6x + 2y^2) dA$ , onde D é a região limitada pela parábola  $x = y^2$  e pela reta  $x + y = 2$ . (99/2) uv

## 4.2 Mudança de Variável na integral dupla

### ➤ Integrais duplas em coordenadas polares

Em muitas situações para facilitar a descrição de regiões de integração, se faz necessária uma mudança de variáveis. Apresentaremos nesta seção a mudança de variáveis para coordenadas polares.

**Def.4.2.(a)** Uma região polar simples num sistema de coordenadas polar é uma região compreendida entre dois raios,  $\theta = \alpha$  e  $\theta = \beta$ , e duas curvas polares contínuas,  $r = r_1(\theta)$  e  $r = r_2(\theta)$ , onde as equações dos raios e das curvas polares satisfazem as seguintes condições:

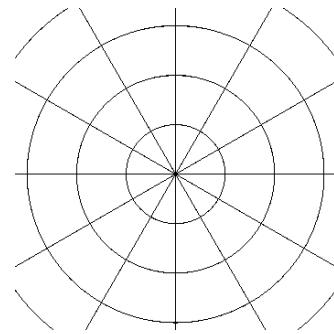
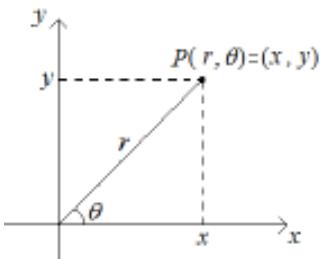
$$(a) \alpha \leq \beta \quad (b) \beta - \alpha \leq 2\pi \quad (c) 0 \leq r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$$

As coordenadas polares  $(r, \theta)$  de um ponto estão relacionadas com as coordenadas retangulares pelas equações:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$



Assim, para convertermos de coordenadas retangulares para coordenadas polares em uma integral dupla, escrevemos  $x = r\cos\theta$  e  $y = r\sin\theta$ , usamos os limites de integração apropriados para  $r$  e  $\theta$ , e substituímos  $dA$  por  $rdrd\theta$ . (mostrar)

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta)rdrd\theta$$

### Exemplo

**4.2.(a)** Calcular  $\iint_R e^{x^2+y^2} dxdy$ , sendo  $R: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16 \text{ e } x - y \leq 0\}$

$$\text{Rta. } \frac{\pi}{4}(e^{16} - e)$$

**4.2.(b)** Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelo cone de equação  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e pelo cilindro de equação  $x^2 + y^2 = 3y$ .

Rta. 6 uv

**4.2.(c)** Determine a área da figura que é externa ao círculo  $r = 3\cos\theta$  e interna à cardiode  $r = 1 + \cos\theta$ . Rta.  $\pi/4$  ua

➤ Integral dupla no plano  $uv$  (Jacobiano)

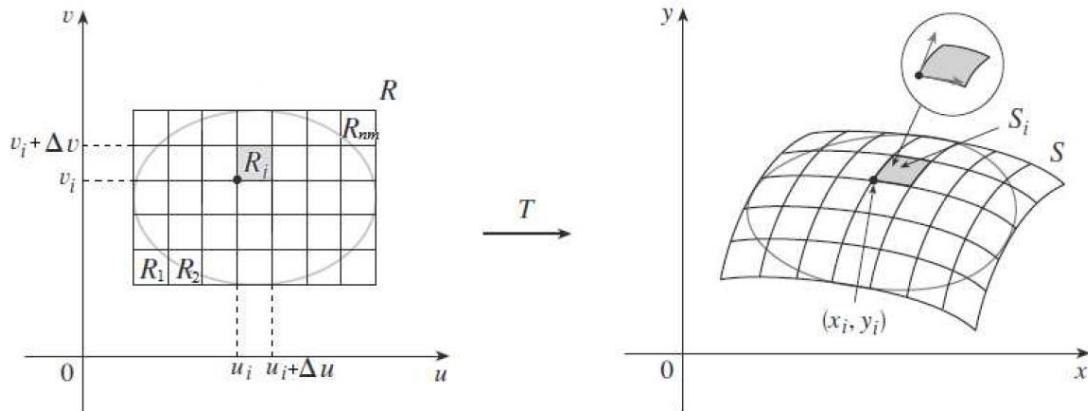
No cálculo de integrais de funções de uma variável real, um dos métodos utilizados foi o de substituição de variáveis, que é baseado na fórmula  $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du$ , onde  $g$  é uma função com derivada contínua em um intervalo  $I$  que contém  $c$  e  $d$ , e onde  $c$  e  $d$  são tais que  $g(c) = a$  e  $g(d) = b$ . Além disso, supomos  $f$  contínua na imagem de  $g$ .

Uma mudança de variáveis num subconjunto do  $\mathbb{R}^2$  é dada por uma transformação

$$T: D_{uv} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) \rightarrow (x, y) = (x(u, v), y(u, v)).$$

Como vamos trabalhar com domínios de integração, consideremos  $D_{uv}$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$ , limitado e com área.

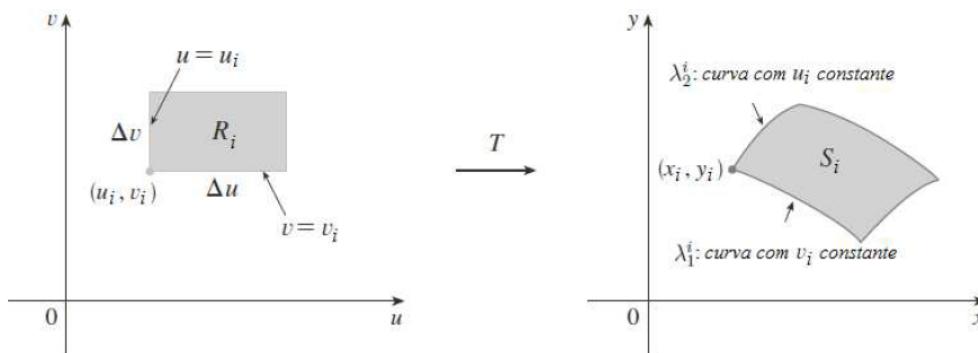
Vamos supor que  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  admitem derivadas parciais de primeira ordem contínuas, e  $T$  injetora, o que significa que não existem dois pontos com a mesma imagem.



Seja  $P_{nm} = \{R_1, R_2, \dots, R_{nm}\}$  uma partição de um retângulo que contém  $D_{uv}$  e  $S_i = T(R_i)$ , para  $i = 1, 2, \dots, nm$ .

Observe a figura a seguir, onde  $R_i$  é um “pequeno” retângulo no plano  $uv$  cujo canto inferior esquerdo é o ponto  $(u_i, v_i)$  e cujas dimensões são  $\Delta u$  e  $\Delta v$ .

A imagem de  $R$  por  $T$  é a região  $S$  no plano  $xy$ , onde em um dos pontos da fronteira está  $(x_i, y_i) = T(u_i, v_i)$ .



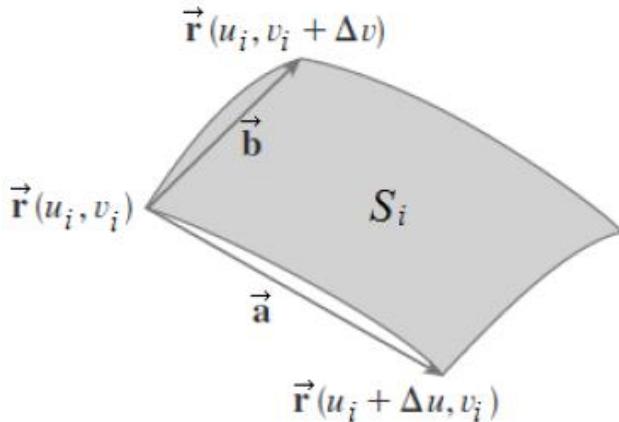
Considerando  $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j}$  o vetor posição da imagem do ponto  $(u, v)$ ,  $\lambda_1^i$  a curva de imagem, por  $T$ , do lado inferior de  $R_i$ , ou seja, correspondente a  $v = v_i$  e  $\lambda_2^i$  a curva de imagem do lado esquerdo de  $R_i$ , ou seja, correspondente a  $u = u_i$ .

Note que, podemos representar  $\lambda_1^i$  e  $\lambda_2^i$  vetorialmente por

$$\begin{aligned} \lambda_1^i: \vec{r}(u, v_i) &= x(u, v_i)\vec{i} + y(u, v_i)\vec{j}, u \in [u_i, u_i + \Delta u], \\ \lambda_2^i: \vec{r}(u_i, v) &= x(u_i, v)\vec{i} + y(u_i, v)\vec{j}, v \in [v_i, v_i + \Delta v]. \end{aligned}$$

Assim, o vetor tangente a  $\lambda_1^i$  em  $(x_i, y_i)$  é  $\vec{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_i, v_i)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_i, v_i)\vec{j}$  e o vetor tangente a  $\lambda_2^i$  em  $(x_i, y_i)$  é  $\vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_i, v_i)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_i, v_i)\vec{j}$ .

A figura a seguir, ilustra os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , secantes às curvas  $\lambda_1^i$  e  $\lambda_2^i$ , respectivamente.



Note que, podemos aproximar a região  $S_i = T(R_i)$  pelo paralelogramo determinado pelos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

$$\vec{a} = \vec{r}(u_i + \Delta u, v_i) - \vec{r}(u_i, v_i)$$

$$\vec{b} = \vec{r}(u_i, v_i + \Delta v) - \vec{r}(u_i, v_i)$$

Uma aproximação mais conveniente de  $S_i$  pode ser obtida aproximando-se esses vetores secantes por vetores tangentes, como segue:

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}(u_i + \Delta u, v_i) - \vec{r}(u_i, v_i)}{\Delta u} \cdot \Delta u \cong \vec{r}_u \cdot \Delta u$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{r}(u_i, v_i + \Delta v) - \vec{r}(u_i, v_i)}{\Delta v} \cdot \Delta v \cong \vec{r}_v \cdot \Delta v$$

Logo, podemos aproximar  $S_i$  pelo paralelogramo determinado pelos vetores  $\vec{r}_u \cdot \Delta u$  e  $\vec{r}_v \cdot \Delta v$ , cuja área é dada por

$$\Delta A \cong |\vec{r}_u \cdot \Delta u \times \vec{r}_v \cdot \Delta v| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \Delta u \Delta v,$$

onde

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \vec{k}$$

Observe que podemos reescrever a expressão acima como

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{k}$$

O determinante acima é chamado **JACOBIANO** da transformação  $T$ .

**Def.4.2(b)**

Se  $T$  for a transformação do plano  $uv$  no plano  $xy$ , definida pelas equações  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$ , então o Jacobiano de  $T$  é denotado por  $J(T)(u, v)$  ou  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  e é definido por

$$J(T)(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Com essa notação podemos obter uma aproximação da área  $\Delta A$  de  $S_i$ , como

$$\Delta A \cong |J(T)(u, v)|\Delta u \Delta v$$

Onde o Jacobiano é calculado em  $(u_i, v_i)$ .

**Observação**

Prova-se que o erro no cálculo de  $\Delta A$  tende a zero quando  $\Delta u \rightarrow 0$  e  $\Delta v \rightarrow 0$ .

Assim, considerando  $f = f(x, y)$  uma função contínua em  $D_{xy} = T(D_{uv})$ , temos:

$$\sum_{i=1}^{mn} f(x_i, y_i) A(S) \cong \sum_{i=1}^{mn} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)) |J(T)(u_i, v_i)| A(R_i).$$

Lembrando da definição de integrais dupla, por somas de Riemann, isso nos leva a pensar que

$$\int \int_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \int \int_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(T)(u, v)| du dv$$

**Teorema 4.2.(a)**

Seja  $D_{uv} \subset \mathbb{R}^2$  limitado e com área, e  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto que contém  $D_{uv}$ . Seja  $T: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  uma transformação com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em  $\Omega$ , injetora no interior de  $D_{uv}$  e com  $|J(T)(u, v)| \neq 0$  para todo  $(u, v)$  no interior de  $D_{uv}$ . Nessas condições, se  $f = f(x, y)$  é contínua em  $D_{xy} = T(D_{uv})$ , temos:

$$\int \int_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \int \int_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(T)(u, v)| du dv$$

**Exemplo**

**4.2.(d)** Calcule  $\int \int_{D_{xy}} \frac{(x+y)^9}{y-x} dx dy$ , sendo  $D_{xy}$  o domínio limitado pelas retas  $x + y = 3$ ,  $x + y = 4$ ,  $y - x = 1$  e  $y - x = 3$ . Rta.  $\frac{1}{20} \ln(3) (4^{10} - 3^{10})$

**Exemplo**

**4.2.(e)** Calcule  $\iint_{D_{xy}} \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dx dy$ , sendo  $D_{xy}$  a região triangular de vértices  $A(0,0), B(2,0)$  e  $C(1,1)$ . Rta.  $\left(1 - \frac{\sin^2}{2}\right)$

**Exemplo**

**4.2.(f)** Calcule  $\iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , sendo  $D_{xy}$  a região triangular de vértices  $A(0,0), B(1,0)$  e  $C(1,1)$ . Rta.  $\frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}{6}$

### 4.3 Área de Superfície

Seja  $S$  a superfície com a equação  $z = f(x, y)$ , onde  $f$  tem derivadas parciais contínuas.

Para simplificar a dedução da fórmula da área, vamos supor que  $f(x, y) \geq 0$  e que o domínio  $D$  de  $f$  seja um retângulo.

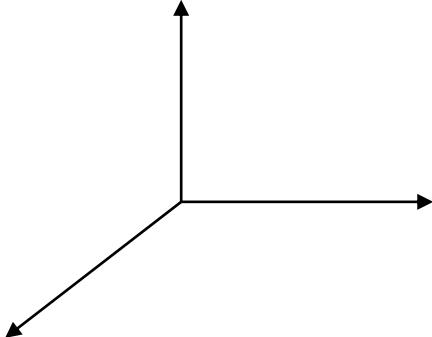


Figura 1

Vamos dividir  $D$  em retângulos pequenos  $R_{ij}$  com área  $\Delta A = \Delta x \Delta y$ . Se  $(x_i, y_i)$  é o canto de  $R_i$  mais próximo da origem, seja  $P_i(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$  o ponto de  $S$  diretamente acima dele (figura 1). O plano tangente a  $S$  em  $P_i$  é uma aproximação de  $S$  perto de  $P_i$ . Assim, a área  $\Delta T_i$  da parte desse plano tangente (um paralelogramo) que está diretamente acima de  $R_i$  é uma aproximação da área  $\Delta S_i$  da parte de  $S$  que está diretamente acima de  $R_{ij}$ . Então a soma  $\sum \Delta T_i$  é uma aproximação da área total de  $S$ , a qual parece melhorar à medida que aumentamos o número de retângulos. Portanto definimos a área de superfície de  $S$  como

$$A(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta T_i$$

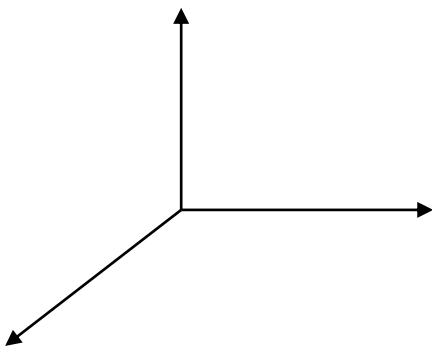


Figura 2

Tomemos os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  como os vetores que começam em  $P_i$  e correspondem aos lados do paralelogramo com área  $\Delta T_i$  (Figura 2). Então  $\Delta T_i = |\vec{a} \times \vec{b}|$ . Lembre-se que  $f_x(x_i, y_i)$  e  $f_y(x_i, y_i)$  são as inclinações das retas tangentes a  $P_i$  com direções de  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Portanto

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \Delta x \vec{i} + f_x(x_i, y_i) \Delta x \vec{k} \\ \vec{b} &= \Delta y \vec{j} + f_y(x_i, y_i) \Delta y \vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_i) \Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_i) \Delta y \end{vmatrix} = -f_x(x_i, y_i) \Delta x \Delta y \vec{i} - f_y(x_i, y_i) \Delta x \Delta y \vec{j} + \Delta x \Delta y \vec{k} = \\ &= [-f_x(x_i, y_i) \vec{i} - f_y(x_i, y_i) \vec{j} + \vec{k}] \Delta A\end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta T_i = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2 + 1} \Delta A$$

Da definição, temos:

$$A(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta T_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2 + 1} \Delta A$$

E, por definição de integral dupla podemos obter a seguinte fórmula:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2 + 1} dA$$

- Podemos estabelecer fórmulas análogas, no caso de a superfície ter projeções convenientes nos planos  $yz$  ou  $xz$ :

$$x = h(y, z) \rightarrow A(S) = \iint_D \sqrt{[h_y(y_i, z_i)]^2 + [h_z(y_i, z_i)]^2 + 1} dA$$

$$y = g(x, z) \rightarrow A(S) = \iint_D \sqrt{[g_x(x_i, z_i)]^2 + [g_z(x_i, z_i)]^2 + 1} dA$$

### Exemplos

**4.3.(a)** Determine a área de superfície da parte da superfície  $z = x^2 + 2y$  que está acima da região triangular  $T$  no plano  $xy$  com vértices  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  e  $(1,1)$ . Rta  $\frac{1}{12}(27 - 5\sqrt{5})$

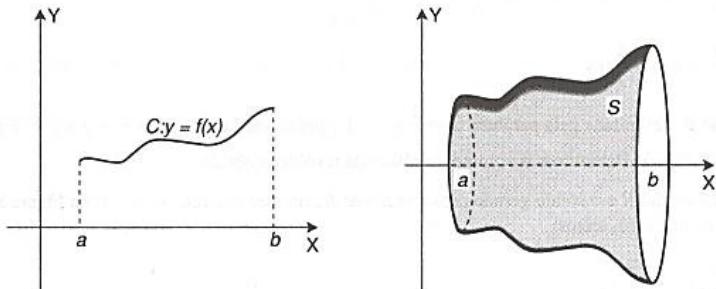
**4.3.(b)** Determine a área da parte do paraboloide  $z = x^2 + y^2$  que está abaixo do plano  $z = 9$ . Rta.  $\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1)$

### Teorema 4.3.(a)

Seja  $f$  positiva em  $[a; b]$  e  $f'$  contínua em  $[a; b]$ . Se  $A(S)$  for a medida da área da superfície de revolução obtida girando-se a curva  $y = f(x)$ , com  $a \leq x \leq b$ , em torno do eixo  $x$ , então:

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{f'(x)^2 + 1} dx$$

Dem.:



### Exemplo

**4.3.(c)** Calcule a área do paraboloide de revolução, gerada pela rotação da parte superior da parábola  $y^2 = 4px$ , com  $0 \leq x \leq h$ , em torno do eixo x.

## 4.4 Integral Tripla

---

### ➤ Problema motivador

Qual é a massa de um sólido  $D$ , cuja densidade de massa em cada ponto  $(x, y, z)$  é dada pela função  $\rho(x, y, z)$ , considerando-se  $\rho$  contínua e positiva?

Analisemos a construção da integral tripla.

Seja  $u=f(x,y,z)$  definida no conjunto  $Q \subset \mathbb{R}^3$ ;  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q$  é cubicável (tem volume).

Particionamos  $Q$ , de tal modo que cada subconjunto  $Q_i \subset Q$ , seja cubicável e  $\forall i=1, n$ , não existam pontos interiores em comum.

Tomamos qualquer ponto  $M_i(x_i, y_i, z_i) \in Q_i$  e calculamos o valor da função nesse ponto  $M_i : f(x_i, y_i, z_i)$ . Fazemos isso para todos os subconjuntos de  $Q$ .

Agora, multiplicamos o valor da função calculada no ponto  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ , pelo volume de  $Q_i$  e somamos esse resultado para todos os subconjuntos da partição feita.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \Rightarrow \text{soma integral} = \sigma(f)$$

Introduzimos o comprimento de partição  $d_i = d(Q_i) = \max \text{dist}[M'_i - M''_i] \quad \forall M'_i, M''_i \in Q_i$   
 $\delta = \max d_i, \quad \delta t(\text{comprimento da partição } \tau)$

E calculamos  $\lim_{\delta t \rightarrow 0} \sigma(f) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$

### Def.4.4.(a) (Integral Tripla)

Se  $\exists \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sigma(f) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$  e esse limite não depende nem do jeito da partição nem da escolha dos pontos em cada parte dessa região, então esse limite é chamado

**INTEGRAL TRIPLA** pela região  $Q$ , e denotada por  $\iiint_Q f(x, y, z) dV$

### ➤ Cálculo da Integral Tripla

**1º)** Se temos paralelepípedo retangular:

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; e \leq z \leq f\}$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dz dy dx = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dy dz dx = \int_c^d \int_a^b \int_e^f f(x, y, z) dz dx dy$$

### Exemplo

**4.4.(a)**  $f(x, y, z) = xy + yz$ .  $Q$  consiste nos pontos  $(x, y, z)$  do espaço tais que:  $-1 \leq x \leq 1; 2 \leq y \leq 3; 0 \leq z \leq 1$ .

Rta.  $\frac{5}{2} \text{ um}$

**2º)**

$$Q = \left\{ \forall (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 : (x, y) \in D_{xy} \text{ (região quadrável)} \text{ e } z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \right\}$$

$z_1(x, y), z_2(x, y)$  funções contínuas na região  $D_{xy}$

$f(x, y, z)$  contínua no Q

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iint_{D_{xy}} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy$$

**3º)**

$$Q = \left\{ \forall (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 : (x, z) \in D_{xz} \text{ (região quadrável)} \text{ e } y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z) \right\}$$

$y_1(x, z), y_2(x, z)$  funções contínuas na região  $D_{xz}$

$f(x, y, z)$  contínua no Q

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iint_{D_{xz}} \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy dz$$

### Exemplos

**4.4.(b)** Ache o volume do segmento oblíquo de um paraboloide delimitado pelo paraboloide  $z = x^2 + y^2$  e pelo plano  $z = y + 2$ . Rta.  $\frac{81\pi}{32} uv$

**4.4.(c)** Calcule o volume do sólido cuja base é o triângulo de vértices  $(1,1,0)$ ,  $(0,1,0)$  e  $(0,0,0)$  e é delimitado pelos planos  $z = 0$  e  $y + z = 1$ . Rta.  $\frac{1}{6}uv$

### ➤ Propriedades da Integral Tripla

1. Se as funções  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$  são integráveis na região  $Q \subset \mathbb{R}^3$ , Q é cubicável.

Então  $f \pm g$  também é integrável e

$$\iiint_Q (f(x, y, z) \pm g(x, y, z)) dV = \iiint_Q f(x, y, z) dV \pm \iiint_Q g(x, y, z) dV$$

2. Se o sólido  $Q$  for dividido em duas partes sem pontos interiores em comum:  $Q = Q_1 \cup Q_2$  e a função  $f(x, y, z)$  é uma função integrável então:

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iiint_{Q_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{Q_2} f(x, y, z) dV$$

3. Se a função  $f(x, y, z)$  é integrável no  $Q \subset \mathbb{R}^3$ , então:

$$\iiint_Q c \cdot f(x, y, z) dV = c \iiint_{Q^2} f(x, y, z) dV \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

4. Se as funções  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$  são integráveis no  $Q$  e  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in Q$ , então:

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV \leq \iiint_Q g(x, y, z) dV$$

5.  $\iiint_Q dV = V(Q)$  onde  $Q$  é qualquer sólido cubicável

### 4.5 Mudança de variáveis na Integral Tripla

O método é semelhante ao utilizado em integrais duplas, exceto pelo fato de que agora trabalharemos com transformações de regiões tridimensionais, em vez de bidimensionais.

Uma mudança de variáveis num subconjunto do  $\mathbb{R}^3$  é dada por uma transformação  $T: D_{uvw} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

Onde  $D_{uvw}$  é um subconjunto limitado e com área,  $T$  possui derivadas parciais de primeira ordem contínuas e é injetora.

#### Def.4.5.(a)

Se  $T$  for a transformação do espaço de variáveis  $uvw$  no espaço  $xyz$ , definida pelas equações  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$  e  $z = z(u, v, w)$  então o **JACOBIANO** de  $T$  é denotado por  $J(T)(u, v, w)$  ou  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$  e é definido por

$$J(T)(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

#### Teorema 4.5.(a)

Seja  $D_{uvw} \subset \mathbb{R}^3$  limitado e com volume, e  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto aberto que contém  $D_{uvw}$ . Seja  $T: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$  uma transformação com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em  $\Omega$ , injetora no interior de  $D_{uvw}$  e com  $|J(T)(u, v, w)| \neq 0$  para todo  $(u, v, w)$  no interior de  $D_{uvw}$ . Nessas condições, se  $f = f(x, y, z)$  é contínua em  $D_{xyz} = T(D_{uvw})$  e temos:

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{D_{xyz}} f(x, y, z) dV = \\ &= \int \int \int_{D_{uvw}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(T)(u, v, w)| du dv dw \end{aligned}$$

#### Exemplo

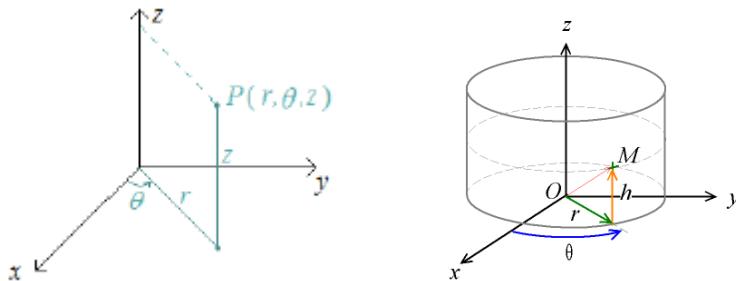
**4.5.(a)** Calcule  $\int \int \int_{D_{xyz}} (z - y)^2 xy dV$ , onde  $D_{xyz}$  é a região delimitada pelos planos  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $z = y$ ,  $z = y + 1$  e os hiperboloides  $y = \frac{2}{x}$  e  $y = \frac{4}{x}$ . Rta.  $2 \ln 3$

## ➤ Integrais Tripas em coordenadas Cilíndricas e Esféricas

As substituições em coordenadas cilíndricas e esféricas são casos especiais do método de mudanças de variáveis em integrais triplas como transformações de regiões tridimensionais.

### Coordenadas Cilíndricas

A representação em coordenadas cilíndricas de um ponto  $P$  é a terna ordenada  $(r, \theta, z)$ , onde  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares da projeção de  $P$  no plano polar e  $z$  é a distância orientada deste plano até  $P$ .



A lei da transformação  $T$  de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  para coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  é dada por:

$$T(r, \theta, z) = (x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

E o Jacobiano  $J(T)(r, \theta, z)$  é definido por

$$J(T)(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Assim, uma integral tripla retangular pode ser escrita em coordenadas cilíndricas como:

$$\int \int \int_{D_{xyz}} f(x, y, z) dV = \int \int \int_{D_{r\theta z}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

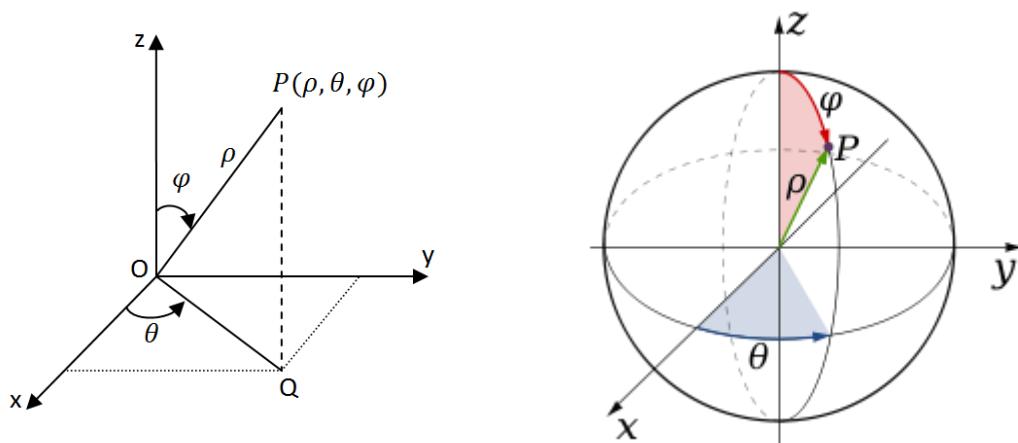
### Exemplo

**4.5.(b)** Calcule a massa do sólido de densidade  $\rho(x, y, z) = 3 - z$ , limitado pelo cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e o plano  $z = 3$ . Rta.  $\frac{27\pi}{4} u m$

### Exemplo

4.5.(c) Determine o volume do sólido  $D$  delimitado pelos paraboloides  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$ . Rta.  $162\pi uv$

### Coordenadas esféricas



Num sistema de coordenadas esféricas há um plano polar e um eixo perpendicular ao plano polar, com a origem do eixo z na origem do eixo polar. Um ponto P em coordenadas esféricas é dado pela terna ordenada  $(\rho, \theta, \varphi)$ , onde  $\rho = |\overrightarrow{OP}|$ ,  $\varphi$  é o ângulo que  $\overrightarrow{OP}$  forma com o eixo  $OZ$  positivo ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) e  $\theta$  é o ângulo das coordenadas cilíndricas.

Note que, considerando o triângulo  $OPP'$ , retângulo em  $P'$ , temos  $r = \rho \operatorname{sen} \varphi$ . Como  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \operatorname{sen} \theta$ , podemos escrever  $x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$  e  $y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$ . Assim, a lei da transformação  $T$  de coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \varphi)$  para coordenadas cartesianas é dada por:

$$T(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \varphi)$$

E, o Jacobiano  $J(T)(\rho, \theta, \varphi)$  é definido por:

$$J(T)(\rho, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \varphi$$

Logo, uma integral tripla retangular pode ser escrita em coordenadas esféricas como:

$$\int \int \int_{D_{xyz}} f(x, y, z) dV = \int \int \int_{D_{r\theta z}} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

### Exemplos

**4.5.(d)** Ache a equação cartesiana da superfície  $\rho \sin \varphi = 4$  e identifique-a.

**4.5.(e)** Escreva a equação do paraboloide  $x^2 + y^2 = z$ , em coordenadas esféricas.

**4.5.(f)** Calcule o volume do sólido  $D$  limitado acima pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  e abaixo pelo cone  $3z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ . Rta.  $\frac{64\pi}{3}uv$

**4.5.(g)** Calcule o volume do sólido delimitado abaixo pela esfera  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$  e acima pelo cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Rta.  $\frac{\pi}{3}uv$

## 5 Campos vetoriais (funções vetoriais de várias variáveis)

### 5.1 Conceito de campo vetorial

#### Def.5.1.(a) (campo vetorial)

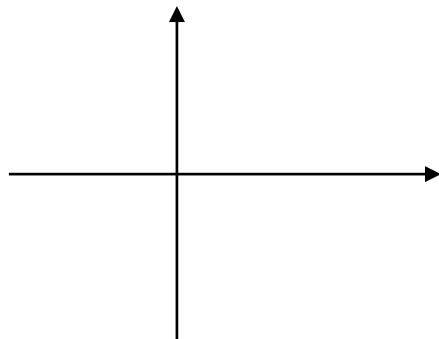
Um campo vetorial definido em uma região  $T$  do espaço, é uma função  $F$  com valores vetoriais que associa a cada ponto  $(x, y, z)$  de  $T$ , um vetor  $F(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ .

Pode-se descrever mais sucintamente o campo vetorial  $F$  em termos de suas componentes  $P, Q$  e  $R$ , escrevendo-se  $F = \langle P, Q, R \rangle$ .  $P, Q$  e  $R$  são funções escalares (com valores reais).

- Um campo vetorial no plano, é uma função  $F$ , com valores vetoriais, que associa a cada ponto  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , um vetor.
- Cada vetor é representado por uma seta de tamanho  $|F(x, y)|$ , tendo  $(x, y)$  como seu ponto inicial.

#### Exemplo

5.1.(a) Campo vetorial  $F(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$



Para cada ponto  $(x, y)$  no plano coordenado,  $F(x, y)$  é simplesmente seu vetor posição. Aponta diretamente a partir da origem e tem comprimento  $|F(x, y)| = |x\vec{i} + y\vec{j}| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ , igual à distância da origem a  $(x, y)$ .

\* Um campo de velocidade é um campo vetorial em que cada ponto está associado um vetor velocidade e um campo de forças é aquele que atribui a cada ponto, um vetor força.

#### Def. 5.1.(b) (campos vetoriais estacionários)

Chamamos campos vetoriais estacionários os campos em que os vetores são independentes do tempo.

#### Exemplo

5.1.(b) Mostre numa figura as representações, tendo como ponto inicial em  $(x, y)$ , dos vetores do campo vetorial  $F(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$  (campo de vetores velocidade associado a um rodamoinho de água em torno da origem, com velocidade angular constante, no sentido anti-horário).

## 5.2 Limite e continuidade de campos vetoriais

As funções vetoriais de várias variáveis são uma generalização das funções vetoriais de uma variável e suas propriedades e definições são análogas.

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

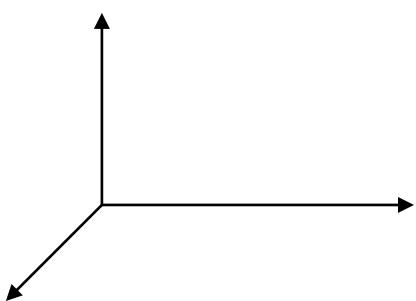
$$\text{limite: } \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} \vec{F}(x, y, z) = \vec{a} = a_i \quad (i=1,2,3)$$

Seja *continuidade*: Se  $\exists \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} \vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(x_0, y_0, z_0)$  então  $\vec{f}$  é *contínua*

*derivadas parciais*:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial Q}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial R}{\partial x}\vec{k}; \quad \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial Q}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial R}{\partial y}\vec{k}; \quad \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial Q}{\partial z}\vec{j} + \frac{\partial R}{\partial z}\vec{k}$$

## 5.3 Derivada direcional de um campo vetorial



Consideremos um campo vetorial

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Escolhemos um ponto  $P$  no espaço e uma direção em  $P$  dada por um vetor unitário  $\vec{b}$ . Seja  $C$  uma semi-reta cuja origem é  $P$  e possui a direção de  $\vec{b}$  e seja  $Q$  um ponto sobre  $C$  cuja distância de  $P$  a  $Q$  é  $S$ . A derivada direcional de um campo em um ponto  $P$  é dada por:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial S}(P) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(P) & \frac{\partial P}{\partial y}(P) & \frac{\partial P}{\partial z}(P) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(P) & \frac{\partial Q}{\partial y}(P) & \frac{\partial Q}{\partial z}(P) \\ \frac{\partial R}{\partial x}(P) & \frac{\partial R}{\partial y}(P) & \frac{\partial R}{\partial z}(P) \end{bmatrix}}_{\text{matriz jacobiana}} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial S}(P) \\ \frac{\partial Q}{\partial S}(P) \\ \frac{\partial R}{\partial S}(P) \end{bmatrix}$$

### ➤ Interpretação física da derivada direcional de um campo vetorial

Consideremos um fluido movendo-se em uma região  $D$ , em regime estacionário, isto é, a velocidade em qualquer ponto  $P(x, y, z)$  é independente do tempo. Então, a cada ponto  $P$  de  $D$  está associado um vetor  $\vec{v} = (x, y, z)$  que é a velocidade do fluido em  $P$ . A derivada direcional de  $\vec{F}$  em  $P$ , numa direção  $\vec{b}$ , expressa a variação da velocidade do fluido, em  $P$ , na direção de  $\vec{b}$ .

### Exemplo

**5.3.(a)** Determine a derivada direcional em  $P(2,1)$  do campo vetorial radial  $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ , na direção de um vetor  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ .

## 5.4 Rotacional

---

**Def.5.4.(a)** Seja  $F(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ , onde  $P, Q$  e  $R$  tem derivadas parciais em alguma região. O rotacional de  $F$  é dado por:

$$\text{rot}F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Existe uma relação entre o rotacional e a velocidade angular num escoamento. A ocorrência de um movimento de rotação de um fluido é descrita por um vetor rotacional

### ➤ Interpretação física do rotacional

O rotacional de um campo vetorial aparece em diversas situações na física, como por exemplo:

- ❖ Na análise de campos de velocidade na mecânica dos fluidos;
- ❖ Na análise de campos de forças eletromagnéticas;
- ❖ Pode ser interpretado como uma medida de movimento angular de um fluido, e a condição  $\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$ , para um campo de velocidade  $\vec{v}$ , caracteriza os chamados fluxos irrotacionais;
- ❖ A equação  $\text{rot}\vec{E} = \vec{0}$ , onde  $\vec{E}$  é a força elétrica, caracteriza que somente forças eletrostáticas estão presentes no campo elétrico.
- ❖ Quando aplicado à dinâmica de fluidos, o rotacional de um campo mede, localmente, o quanto que o campo de velocidade de um fluido está girando.

### ➤ Propriedades

Sejam  $\vec{F}$  e  $\vec{G}$  campos vetoriais e  $h$  uma força escalar, todas definidas em um domínio  $D$  ( $\vec{F}$  e  $\vec{G}$  com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em  $D$  e  $h$  diferenciável em  $D$ ). Então:

- i.  $\text{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{rot}\vec{F} + \text{rot}\vec{G}$
- ii.  $\text{rot}(h \cdot \vec{F}) = h \cdot \text{rot}\vec{F} + \nabla h \times \text{rot}\vec{F}$

### Exemplos

**5.4.(a)** Se  $F(x, y, z) = xy^2z^4\vec{i} + (2x^2y + z)\vec{j} + y^3z^2\vec{k}$ , determine  $\text{rot}\vec{F}$ .

**5.4.(b)** Um escoamento é representado pelo campo velocidade  $\vec{V} = 10x\vec{i} - 10y\vec{j} + 30\vec{k}$ . Verifique se o campo é irrotacional.

## 5.5 Divergência

### Def.5.5.(a)

Seja  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ , com  $P, Q$  e  $R$  tendo derivadas parciais em alguma região. A divergência de  $\vec{F}$  é dada por:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\boxed{\text{Fluxo} = \frac{\text{quantidade de fluido}}{\text{tempo}}}$$

### ➤ Interpretação física

O divergente de um vetor mede a variação do fluxo desse vetor.

Se  $\vec{F}$  é um campo de velocidade de um fluído ou gás, então  $\operatorname{div}\vec{F}$  informa sobre o fluxo de massa: se em um ponto  $k$ ,  $\operatorname{div}\vec{F} < 0$ , significa que há maior quantidade de massa fluindo para o ponto do que saindo dele, isto é, existe um poço em  $k$ ; agora de  $\operatorname{div}\vec{F} > 0$ , significa que flui maior quantidade de massa de  $k$  do que para  $k$ , isto é, há uma fonte em  $k$ ; e se  $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ , o que é possível para fluidos incompressíveis<sup>1</sup>, então não há poço nem fonte em  $k$ .

Da mesma forma, se  $\vec{F}$  representa o fluxo de calor e se  $\operatorname{div}\vec{F}$  em  $k$  é maior que zero, então há uma fonte de calor em  $k$ , isto é, o calor está deixando  $k$  e, assim, a temperatura em  $k$  está decrescendo. Do contrário, se  $\operatorname{div}\vec{F} < 0$ , o calor está sendo absorvido em  $k$ , ou seja, a temperatura está aumentando.

### Exemplo

5.5.(a) Um fluido escoa com velocidade uniforme  $\vec{v} = x\vec{j}$ . Mostre que todas as partículas se movem em linha reta e que o campo de velocidade representa um escoamento incompressível.

### ➤ Propriedades

Sejam  $\vec{F}$  e  $\vec{G}$  funções vetoriais definidas em um domínio  $D$  e  $h$  uma função escalar diferenciável em  $D$ . Se existe  $\operatorname{div}\vec{F}$  e  $\operatorname{div}\vec{G}$ , então:

i)  $\operatorname{div}(F \pm G) = \operatorname{div}F \pm \operatorname{div}G$

ii)  $\operatorname{div}(h.F) = h.\operatorname{div}F + \nabla h.F$

<sup>1</sup> Ver item 13.5 “Leituras Complementares: fluidos incompressíveis.”

➤ CONCLUSÕES

1)  $k=1, f : R^n \rightarrow R^1 = R$

$$y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$f$  transforma em um único número real, cada  $n$ -upla ordenada  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$

2)  $n > 1, k > 1, f : R^n \rightarrow R^k$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$$

$$y = f(x) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

$f$  transforma em  $k$ -uplas ordenadas  $(y_1, y_2, \dots, y_k) \in R^k$ , cada  $n$ -upla ordenada  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ .

3)  $n=1, k > 1, f : R \rightarrow R^k$

-

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$$

$$y = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$$

$f$  transforma cada número real em  $k$ -uplas ordenadas  $(y_1, y_2, \dots, y_k) \in R^k$ .

## 5.6 Integral curvilínea de primeira espécie

Temos uma curva  $\Gamma: \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$  onde  $t$  é um parâmetro real,  $t \in [a; b]$ ,  $\vec{r}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , é função vetorial.

Seja  $\Gamma$  uma curva suave por partes e seja a função  $f(x, y, z)$  definida na curva  $\Gamma$ . Agora começamos a construir a integral.

$$\forall \tau(\Gamma) = \{\delta_k\}_{k=1}^n \text{ (partição gerada sobre a curva)} \quad \tau[a;b] = \{t_k\}_{k=1}^n \text{ (partição no } [a;b])$$



$$x_k = x(t_k); y_k = y(t_k); z_k = z(t_k)$$

Chamaremos de  $l$  o comprimento da curva e de  $\Delta l$  a variação desse comprimento. Sendo assim,  $\Delta l_k$  indicará a variação, do comprimento da curva, no  $k$ -ésimo subintervalo da partição. Agora calculamos o comprimento de todas as partes da curva após a partição.

Escolhemos o maior deles:

$$\delta = \max\{\Delta l_k\}, \forall k = 1, n$$

Pegamos qualquer ponto sobre a curva, no  $k$ -ésimo subintervalo,  $\bar{M}_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ , e calculamos o valor da função  $f(x, y, z)$  nesse ponto. Depois multiplicamos esse valor pelo comprimento do respectivo arco.

Finalmente, somamos os resultados  $\forall \bar{M}_k, k = 1, n$

$$\sigma\tau = \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \Delta l_k$$

### Def.5.6.(a)

Seja  $\delta_\tau$  o maior comprimento de intervalo da partição,

Se  $\exists \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \Delta l_k$  e esse limite não depende nem do jeito da partição da curva

gama nem da escolha dos pontos em cada parte da curva, então esse limite é chamado de **INTEGRAL CURVILÍNEA DE 1ª ESPÉCIE** da função ao longo da curva gama e denotamos do seguinte modo:

$$\lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \Delta l_k = \int_{\Gamma} f(x, y, z) dl \approx \text{massa real } m \text{ de } \Gamma$$

- Qualquer interpretação física da integral curvilínea  $\int_{\Gamma} f(x, y, z) dl$ , depende da interpretação física da função  $f$ . Se  $f = \rho(x, y, z)$  representa a densidade linear num ponto  $(x, y, z)$  de um arame fino com o formato de  $\Gamma$ , então  $\int_{\Gamma} f(x, y, z) dl$  representará a massa  $m$  do arame.

➤ Cálculo da Integral Curvilínea de 1<sup>a</sup> espécie

$$\overrightarrow{r(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a; b]$$

$$h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$$

$$\underbrace{\Delta l_k}_{\text{comprimento do arco}} = l_{\delta\tau} \cong \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dl = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

No plano  $z(t)=0$ :

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

**Exemplos**

**5.6.(a)** Calcular a integral curvilínea  $\int_{\Gamma} xy dl$  onde  $\Gamma$  é o quarto de circunferência do primeiro quadrante parametrizado por  $x=\cos t$ ,  $y=\sin t$   $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ . Rta.  $1/2$

**5.6.(b)** Calcule  $\int_{\Gamma} 2xdl$  onde  $\Gamma$  é formada pelo arco  $C_1$  da parábola  $y = x^2$  de  $(0,0)$  a  $(1,1)$ , seguido pelo segmento de reta vertical  $C_2$  de  $(1,1)$  a  $(1,2)$ . Rta.  $\frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1) + 2$

**5.6.(c)** Calcule  $\int_{\Gamma} y \sin z dl$  onde  $\Gamma$  é a hélice circular dada pelas equações  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Rta.  $\sqrt{2}\pi$

## 5.7 Integral Curvilínea de 2<sup>a</sup> espécie

---

Seja  $\Gamma$  uma curva simples suave ou suave por partes no  $\mathbb{R}^3$  (ou  $\mathbb{R}^2$ ).

$\Gamma: \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ , funções  $x(t), y(t)$  e  $z(t)$  têm derivadas contínuas  $\forall t \in [a, b]$ .

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \neq 0$$

Seja a função  $P(x, y, z)$  definida na curva  $\Gamma$ ;

Seja  $\Delta l_k \quad \forall k = 1, n$  o comprimento do intervalo da partição da curva;

Seja  $\delta_\tau = \max \Delta l_k$  o maior comprimento de intervalo da partição;

$\forall \bar{M}_k \in \Delta l_k, \quad \bar{M}_k = (\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$  calculamos o valor da função no ponto  $\bar{M}_k$ ,  $P(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ ;

$$\text{Seja } \sigma_1 = \sum_{k=1}^n P(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot \Delta x_k.$$

### Def.5.7.(a)

Se  $\exists \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \sigma_1$  e esse limite não depende nem do jeito da partição da curva  $\Gamma$ , nem da escolha dos pontos de cada parte da curva  $\Gamma$ , então esse limite é chamado **INTEGRAL CURVILÍNEA DE 2<sup>a</sup> ESPÉCIE** da função  $P$  ao longo da curva  $\Gamma$ .

$$\lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \sigma_1 = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n P(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot \Delta x_k = \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx$$

$$\lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \sigma_2 = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Q(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot \Delta y_k = \int_{\Gamma} Q(x, y, z) dy$$

$$\lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \sigma_3 = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n R(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot \Delta z_k = \int_{\Gamma} R(x, y, z) dz$$

No caso geral temos:

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} \quad F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + \int_{\Gamma} Q(x, y, z) dy + \int_{\Gamma} R(x, y, z) dz$$

Se as funções  $P, Q$  e  $R$  são contínuas na curva  $\Gamma$  suave ou suave por partes, então a integral curvilínea de segunda espécie, existe.

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \\ & = \int_a^b [(P, Q, R)(x'(t), y'(t), z'(t))] dt \end{aligned}$$

Podemos ainda, escrever a integral na forma vetorial:

$$\int_{\Gamma} F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_{\Gamma} F \cdot dr$$

### ➤ Significado físico

Podemos definir o trabalho realizado por um campo de forças sobre uma partícula em movimento ao longo de uma curva em  $\mathbb{R}^3$  como uma integral de linha.

**Exemplo**

**5.7.(a)** Uma partícula se move ao longo de uma parábola  $y = x^2$ , do ponto  $(-1,1)$  ao ponto  $(2,4)$ . Ache o trabalho total realizado, se o movimento for causado pelo campo de forças  $F(x,y) = (x^2 + y^2)i + (3x^2y)j$ . Suponha que os arcos sejam medidos em metros e a força em Newtons.

Rta.  $\frac{363}{5}J$

**Def.5.7.(b)**

Seja  $\Gamma$  uma curva suave por partes tal que estas partes sejam  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ . Então a integral de linha  $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$  sobre  $\Gamma$ , é definida como:

$$\int_{\Gamma} F dr = \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Gamma_i} f(r(t)) dr \right).$$

**Exemplo**

**5.7.(b)** Calcule a integral de linha  $\int_{\Gamma} 4xy dx + (2x^2 - 3xy) dy$ , se a curva  $\Gamma$  consiste no segmento

de reta de  $(-3, -2)$  a  $(1, 0)$  e no arco do primeiro quadrante da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  e se for percorrida no sentido anti-horário. Rta. 25J

## 5.8 Integrais de linha independentes do caminho

Se  $A$  e  $B$  forem dois pontos de uma região aberta  $D$  no espaço, o trabalho  $\int_{\Gamma} F \cdot dr$  realizado

para mover uma partícula de  $A$  para  $B$  por um campo  $F$  definido em  $D$ , geralmente depende do caminho percorrido. Para alguns campos especiais, entretanto, o valor da integral é o mesmo para todos os caminhos de  $A$  a  $B$ . Se isso for verdade para todos os pontos  $A$  e  $B$  em  $D$ , dizemos que  $\int_{\Gamma} F \cdot dr$  é independente do caminho em  $D$ , e que  $F$  é conservativo em  $D$ .

### Def.5.8.(a) (Campos conservativos e função potencial)

O campo vetorial  $F$ , definido na região  $D$  é **CONSERVATIVO**, se existe uma função escalar  $f$  definida em  $D$ , tal que  $F = \nabla f$  em todos os pontos de  $D$ . Nesse caso,  $f$  é chamada **FUNÇÃO POTENCIAL** do campo vetorial  $F$ .

\* em algumas aplicações físicas, a função escalar  $f$  é chamada de função potencial do campo vetorial  $F$  se  $F = -\nabla f$

### Teorema 5.8.(a)

Seja  $\Gamma$  uma curva suave (ou suave por partes) contida na região  $D$  com extremidades nos pontos  $A(x_1, y_1, z_1)$  e  $B(x_2, y_2, z_2)$ . Se  $F$  for um campo vetorial conservativo em  $D$  e se  $\phi$  for uma função potencial para  $F$ , então a integral curvilínea  $\int_{\Gamma} F \cdot dr$  será independente do caminho  $\Gamma$  e  $\int_{\Gamma} F \cdot dr = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$ .

\* Para a aplicação deste teorema, é necessário saber se o vetor dado representa o gradiente de uma função, para encontrarmos a função potencial  $\phi_1$ , e para isso, temos os seguintes teoremas:

### Teorema 5.8.(b)

Sejam  $P$  e  $Q$  funções de duas variáveis  $x$  e  $y$ , definidas em  $D \subset \mathbb{R}^2$ , tais que  $P_y$  e  $Q_x$  sejam contínuas em  $D$ . Então o vetor  $P(x,y)i + Q(x,y)j$  será um gradiente em  $D$ , se e somente se  $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$  para todos os pontos de  $D$ .

### Teorema 5.8.(c)

Sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$  funções de três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  definidas em  $D_2 \subset \mathbb{R}^3$ , tais que  $P_y, P_z, Q_x, Q_z, R_x, R_y$  sejam contínuas em  $D_2$ . Então o vetor  $P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$  será um gradiente em  $D_2$  se, e somente se  $P_y(x,y,z) = Q_x(x,y,z)$ ;  $P_z(x,y,z) = R_x(x,y,z)$  e  $Q_z(x,y,z) = R_y(x,y,z)$  para todos os pontos de  $D_2$ .

**Exemplo**

**5.8.(a)** Determine uma função potencial do campo conservativo  $F(x,y) = (6xy - y^3)i + (4y + 3x^2 - 3xy^2)j$ , sendo a trajetória retilínea do ponto  $A(0,0)$  ao ponto  $B(x_1,y_1)$ , parametrizada por  $x=x_1(t)$ ,  $y=y_1(t)$  para  $0 \leq t \leq 1$

**5.8.(b)** Seja  $F(x,y) = (y^2 + 2x + 4)i + (2xy + 4y - 5)j$ , mostre que a integral  $\int_{\Gamma} F \cdot dr$  é independente do caminho e calcule seu valor de  $(0,0)$  a  $(1,1)$ . Rta. 3

**5.8.(c)** Seja  $F(x,y,z) = (4x + 2y - z)\vec{i} + (2x - 2y + z)\vec{j} + (-x + y + 2z)\vec{k}$ , mostre que a integral  $\int_{\Gamma} F \cdot dr$  é independente do caminho e calcule seu valor de  $(4,-2,1)$  a  $(-1,2,0)$ . Rta. -13

### Teorema 5.8.(e)

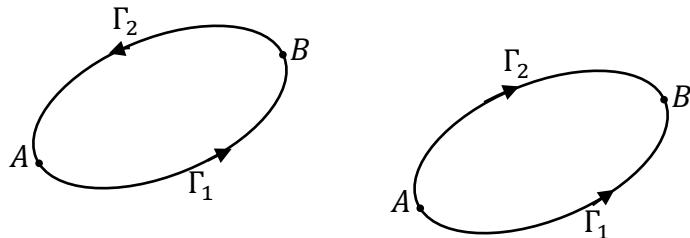
Seja  $\Gamma$  uma curva fechada suave (ou suave por partes), contida em um disco aberto  $B \subset \mathbb{R}^2$ . Se  $F$  for um campo vetorial conservativo em  $B$ , então  $\int_{\Gamma} F \cdot dr = 0$

**1º caso**) Se tivermos dois caminhos de  $A$  para  $B$ , um deles pode ser invertido para formar uma curva fechada.



Dem.:

**2º caso**) Se  $A$  e  $B$  estiverem sobre uma curva fechada, podemos inverter parte da curva para fazer dois caminhos de  $A$  a  $B$ .



Dem.:

### Exemplo

**5.8.(d)** Uma partícula movimenta-se sobre a circunferência  $r(t) = 2\cos t \hat{i} + 2\sin t \hat{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

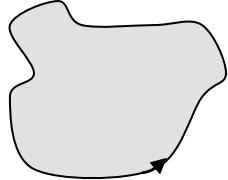
Calcule o trabalho total realizado pelo campo de forças  $F(x, y) = \left(4\ln 3y + \frac{1}{x}\right) \hat{i} + \left(\frac{4x}{y}\right) \hat{j}$

## 5.9 Teorema de Green e Teoremas correlacionados

### Teorema 5.9.(a) (Teorema de Green no plano)

Sejam  $P$  e  $Q$  funções de duas variáveis  $x$  e  $y$ , de tal modo que tenham derivadas parciais de primeira ordem, contínuas em um disco aberto  $B \subset \mathbb{R}^2$ . Se  $\Gamma$  for uma curva suave (ou suave por partes), contida inteiramente em  $B$ , e se  $D$  for a região limitada por  $\Gamma$ , então:

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$



Por convenção, no Teorema de Green, tomamos o sentido anti-horário da curva.

O Teorema de Green estabelece uma relação entre uma integral curvilínea ao longo de uma curva fechada, plana, simples ( $\Gamma$ ) e uma integral dupla usual sobre a região plana  $D$ , delimitada por  $\Gamma$ .

### Exemplos

**5.9.(a)** Aplique o Teorema de Green para calcular a integral curvilínea  $\oint (2y + \sqrt{9 + x^3})dx + (5x + e^{\arctgy})dy$ , sendo  $\Gamma$  a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$ . Rta.  $12\pi$

**5.9.(b)** Calcule a integral curvilínea  $\oint 3xydx + 2x^2dy$  onde  $\Gamma$  é a fronteira da região  $D$ , delimitada acima pela reta  $y = x$  e abaixo pela parábola  $y = x^2 - 2x$ . Rta.  $27/4$

\* No exemplo anterior, viu-se que a integral dupla é mais fácil de calcular do que a integral curvilínea. Às vezes, entretanto, a situação se inverte. A consequência seguinte, do Teorema de Green, ilustra a técnica de calcular uma integral dupla  $\iint_D f(x, y) dA$  transformando-a em uma integral curvilínea  $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy$ .

### ➤ Corolário do teorema de Green

A área  $A$  da região  $D$ , delimitada pela curva fechada simples, parcialmente suave,  $\Gamma$ , é dada por:  $A = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy$

Para verificar que a integral de linha acima calcula a área da região  $D$ , basta aplicar o teorema de Green para o campo  $F(x, y) = (-y; x)$ :

Teremos:  $P_y = -1$      $Q_x = 1$

$$\oint F dr = \iint (1 + 1) dA = 2 \iint dA \rightarrow \frac{1}{2} \oint F dr = \iint dA = A(D)$$

A integral  $\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy$  não é a única que calcula a área da região  $D$ , delimitada por  $\Gamma$ , mas é a mais simples.

### Exemplo

**5.9.(c)** Use o teorema e o corolário de Green, para calcular a integral de linha  $\oint_{\Gamma} (x^4 - 3y) dx + (2y^3 + 4x) dy$ , onde  $\Gamma$  é a elipse  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Rta.  $42\pi, 6\pi$

## ➤ A divergência e o fluxo de um campo vetorial

Considere o fluxo estacionário de uma camada delgada de fluído no plano (como uma camada de água espalhando-se pelo assoalho). Seja  $V(x, y)$  seu campo de velocidade vetorial,  $\rho(x, y)$  a densidade do fluído no ponto  $(x, y)$ . A expressão **FLUXO ESTACIONÁRIO** significa que  $V$  e  $\rho$  dependem apenas de  $x$  e  $y$  e não do tempo  $t$ . Deseja-se calcular a taxa à qual o fluído sai da região  $D$ , delimitada por uma curva fechada simples  $\Gamma$ . A integral curvilínea  $\oint_{\Gamma} F \cdot n ds$  é chamada **FLUXO DO CAMPO VETORIAL  $\vec{F}$  ATRAVÉS DA CURVA  $\Gamma$** , ou seja, o fluxo  $\phi$  de  $\vec{F}$  através de  $\Gamma$ , é dado por  $\phi = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ , onde  $\vec{n}$  é o vetor normal unitário, exterior à  $\Gamma$ .

No caso presente, do fluxo de um fluido com velocidade vetorial  $\vec{V}$ , o fluxo  $\phi$  de  $F = \rho \cdot V$ , é a taxa à qual o fluido está saindo de  $D$  através da curva de fronteira  $\Gamma$ , em unidades de massa por unidades de tempo. Mas a mesma terminologia é usada no caso de um campo vetorial arbitrário  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ . Assim é que se pode falar do fluxo de um campo elétrico ou gravitacional através de uma curva  $\Gamma$ .

A forma vetorial da integral  $\oint_{\Gamma} F \cdot n ds$  é  $\iint_D \nabla F \cdot dA$

$$\phi = \oint_{\Gamma} F \cdot n ds = \iint_D \nabla F \cdot dA = \underbrace{\iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA}_{\substack{\text{formavetoriaklo} \\ \text{teorema de Green}}} \quad \text{onde } \nabla F = \operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Vejamos:

Se  $\Gamma$  é dada pela equação vetorial  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$  para  $a \leq t \leq b$  então o versor tangente de  $\vec{r}$  é  $T(t) = \frac{x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}}{|r'(t)|}$  e o versor normal de  $\vec{r}$  é dado por  $n(t) = \frac{y'(t)\vec{i} - x'(t)\vec{j}}{|r'(t)|}$  (verifique que o produto escalar entre os vetores tangente e normal é nulo).

Então,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} F \cdot n ds &= \int_a^b (F \cdot n)(t) |r'(t)| dt = \int_a^b \left[ \frac{P(x(t), y(t))y'(t)}{|r'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t))x'(t)}{|r'(t)|} \right] |r'(t)| dt \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t))y'(t) dt - Q(x(t), y(t))x'(t) dt = \underbrace{\int_{\Gamma} P dy - Q dx}_{\substack{\text{Teorema de Green}}} = \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA \end{aligned}$$

Como o integrando na integral dupla é a divergência de  $\vec{F}$ , temos uma segunda forma vetorial do Teorema de Green:

$$\phi = \oint_{\Gamma} F \cdot n ds = \iint_D \operatorname{div} F(x, y) dA$$

## Exemplo

5.9.(d) Calcule o fluxo exterior do campo  $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y^2\vec{j}$  através do quadrado delimitado pelas retas  $x = \pm 1$  e  $y = \pm 1$ . Rta. 4

### ➤ Laplaciano

#### Def.5.9.(a): Laplaciano

Seja  $\vec{F}$  um campo vetorial definido numa região do espaço, tal que  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ . Se as derivadas parciais de segunda ordem de  $P, Q$  e  $R$  são contínuas, chamamos **LAPLACIANO** à expressão:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} F) = \nabla \cdot \nabla F = \nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$  É chamado **operador de Laplace** ou **laplaciano**, por sua relação com a equação de Laplace.

#### Def.5.9.(b) (equação de Laplace)

Se  $\nabla^2 F = 0$ , então esta expressão é chamada de **EQUAÇÃO DE LAPLACE**.

\* uma função escalar que satisfaz a equação de Laplace é chamada **FUNÇÃO HARMÔNICA**, esta função está intimamente ligada ao estudo da transferência de calor, radiação eletromagnética e outros ramos da física.

#### Exemplo de interpretação física do Laplaciano em transferência de calor

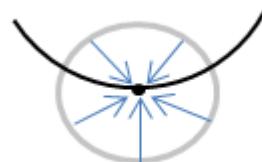
Equação de difusão do calor:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T \quad (\text{Exemplo em que não há geração de energia interna})$$

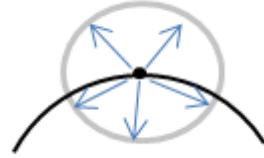
*Difusividade térmica*

(relembra o significado geométrico da segunda derivada para funções de uma variável real)

Se calcularmos o laplaciano num determinado ponto do sistema e seu resultado for positivo,  $\nabla^2 T > 0$ , temos concavidade voltada para cima, então no ponto em que estamos calculando, a temperatura é menor do que a temperatura média na vizinhança do ponto. E se a temperatura no ponto é menor do que a temperatura média da vizinhança, ocorre transferência de energia na forma de fluxo de calor, da vizinhança para o ponto. A vizinhança transmite energia para o ponto e a temperatura no ponto tende a aumentar.



Se calcularmos o laplaciano num determinado ponto do sistema e seu resultado for negativo  $\nabla^2 T < 0$ , temos concavidade voltada para baixo, então no ponto em que estamos calculando, a temperatura é maior do que a temperatura média da vizinhança do ponto. E se a temperatura no ponto é maior do que a temperatura média da vizinhança, ocorre transferência de energia na forma de fluxo de calor, do ponto para a vizinhança. O ponto transmite energia para a vizinhança e a temperatura no ponto tende a diminuir.



Se o laplaciano no ponto for nulo, não há transferência de energia.

### Exemplo

**5.9.(d)** Verifique se as funções  $f_1(x, y, z) = x^2y + e^y - z$  e  $f_2(x, y, z) = 2xy + yz$  são harmônicas.

## 6 Sequências e Séries

### 6.1 Sequência numérica

Sequência numérica é uma sucessão de números dispostos numa ordem definida. Exemplo

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots, & a_n & \dots \end{array}$$

1 é levado em  $a_1$ , 2 é levado em  $a_2$ , e assim por diante. Os números  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  são os termos da sequência. O número  $a_n$  é o enésimo termo da sequência e a sequência toda é denotada por  $\{a_n\}$ .

As sequências podem ser finitas ou infinitas.

#### Exemplos

6.1a)  $1, 3, 5, 7, 9 \rightarrow$  Sequência dos números ímpares naturais menores que 10.

6.1b)  $1, 4, 9, 16, 25, \dots \rightarrow$  Sequência dos quadrados de  $n \in N^*$ .

O termo geral pode especificar uma sequência através de uma regra ou fórmula.

$$a_n = n \rightarrow 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$a_n = 2n \rightarrow 2, 4, 6, 8, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n-1} \rightarrow -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$$

Em uma sequência podem aparecer termos repetidos.

$$a_n = 0 \rightarrow 0, 0, 0, \dots$$

$$a_n = (-1)^{n+1} \rightarrow 1, -1, 1, -1, \dots$$

**Definição:** Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros positivos. Deste modo,  $f(1)$  é o primeiro termo,  $f(2)$  é o segundo termos, etc, e em geral  $f(n)$  é chamado enésimo termo da sequência  $f$ .

#### Exemplos

6.1c)  $\left\{ \frac{n}{3n+1} \right\} = \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{4}{13}, \dots, \frac{n}{3n+1}, \dots$

6.1d)  $\{n^2 + 1\} = 2, 5, 10, \dots, n^2 + 1, \dots$

6.1e)  $\{3^n - n\} = 2, 7, 24, \dots, 3^n - n, \dots$

#### ➤ Limite de uma sequência

Seja  $L$  um número real. O **limite** da sequência  $\{a_n\}$  é  $L$ , denotado por  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , se para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $M > 0$  tal que  $|a_n - L| < \varepsilon$  sempre que  $n > M$ . Se o limite  $L$  da sequência existir, dizemos que a sequência **converge** para  $L$ . Se o limite da sequência não existir, então a sequência **diverge**.

#### Exemplos

6.1f)  $\{a_n\} = \{10^{1-n}\} = 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots, \frac{1}{10^{n-1}}, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10}{10^n} = 10 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^n} = 0 \rightarrow \text{convergente}$$

6.1g)  $\{a_n\} = \{(-1)^n\} = 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots \rightarrow \text{divergente}$

**6.1h)**  $\{a_n\} = \left\{ \frac{n}{3n+1} \right\} = \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{4}{13}, \dots, \frac{n}{3n+1}, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{3n+1}{n}} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{convergente}$$

➤ Propriedades dos limites de uma sequência.

Sejam dadas as sequências  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  que convergem, respectivamente, para os números A e B. Então:

- a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$
- b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c \cdot A$
- c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = A \pm B$
- d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = A \cdot B$
- e)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$
- f)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{c}{n^k} \right) = 0$ , sempre que k for uma constante positiva.
- g) Se  $|a| < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ ; se  $|a| > 1 \rightarrow \{a_n\}$  é divergente

**Exemplos**

**6.1i)**  $\left\{ \frac{3n^2+7n+11}{8n^2-5n+3} \right\}$

**6.1j)**  $\left\{ \frac{2^n}{3^{n+1}} \right\}$

**6.1k)**  $\left\{ \frac{n^3+5n}{7n^2+1} \right\}$

**6.1l)**  $\left\{ \frac{\ln(n)}{n} \right\}$

**6.1m)**  $\left\{ n \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2n} \right) \right\}$

➤ Sequências monótonas e limitadas

Mesmo que você não possa encontrar o limite de uma sequência particular, ainda assim pode ser útil saber se essa sequência converge. Para isso, inicialmente, vamos definir sequência monótona.

**Definição de sequência monótona:** Uma sequência é **monótona** se seus termos são não decrescentes  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$  ou se seus termos são não crescentes  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$

**Exemplos**

6.1n)  $\left\{ \frac{2n+1}{3n-2} \right\}$

6.1o)  $\left\{ \frac{n+5}{n^2+6n+4} \right\}$

6.1p)  $\left\{ \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right\}$

**Definição de sequência limitada:** Dizemos que uma sequência é limitada superiormente se existe um número  $M$  para o qual  $a_n \leq M, \forall n$  ( $M$  é chamado cota superior ou limitante superior da sequência). Uma sequência é limitada inferiormente se existe um número  $N$  para o qual  $a_n \geq N, \forall n$  ( $N$  é chamado cota inferior ou limitante inferior da sequência). Se uma sequência for limitada superior e inferiormente, dizemos que ela é limitada.

**Exemplos**

6.1q)  $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$

6.1r)  $\left\{ \frac{(-1)^n \cdot 2n}{3n+1} \right\}$

**Observação:** Se uma sequência é convergente, então ela é limitada. Se uma sequência é limitada, não necessariamente ela é convergente.

**Exemplo**

6.1s)  $\{(-1)^n \cdot 2\}$

**Teorema 1**

Toda sequência crescente limitada superiormente é convergente; analogamente, toda sequência decrescente limitada inferiormente é convergente.

**Teorema 2**

O limite de uma sequência monotonamente crescente convergente é uma cota superior; analogamente, o limite de uma sequência monotonamente decrescente convergente é uma cota inferior.

**Exemplo**

## 6.2 Séries

---

### ➤ Séries infinitas

**Definição:** Uma soma indicada de todos os termos de uma sequência infinita  $\{a_n\}$  é chamada série infinita ou simplesmente série.

É representada por  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

A soma  $S_n$  dos  $n$  termos de uma série  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  é chamada de  $n$ -ésima soma parcial, isto é:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

A sequência  $\{S_n\}$  é chamada **sequência das somas parciais da série**. Observemos que, para cada inteiro positivo  $n$ , temos:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

#### Exemplo

6.2a)  $\left\{ \frac{1}{2^{n-1}} \right\}$

**Definição:** Se a sequência  $\{S_n\}$  das somas parciais da série infinita  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  converge para um limite  $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ , dizemos que  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  converge e sua soma é  $S$ . (escrevemos  $S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ); caso contrário, dizemos que ela diverge.

#### Exemplo

6.2b)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$

### ➤ Série Geométrica

Uma série geométrica é uma série na forma

$$\sum_{k=1}^{+\infty} ar^{k-1} = a + a \cdot r + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + \cdots + a \cdot r^{n-1} + \cdots$$

Onde cada termo após o primeiro é obtido pela multiplicação de seu antecessor imediato por uma constante  $r$ , chamada **razão** da série.

Observe que uma série geométrica fica completamente especificada através de seu primeiro termo  $a$  e sua razão  $r$ .

#### Exemplos

6.2c)  $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}$

6.2d)  $a_1 = \frac{2}{3}, r = \frac{-3}{4}$

A  $n$ -ésima soma parcial  $S_n$  de uma série geométrica  $\sum_{k=1}^{+\infty} ar^{k-1}$  é dada por

$$S_n = a \left( \frac{1 - r^n}{1 - r} \right), \quad (r \neq 1)$$

Pela propriedade (g) dos limites de uma sequência, temos:

Se  $|r| < 1 \rightarrow S_n$  converge e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a \left( \frac{1 - r^n}{1 - r} \right) = \frac{a}{1 - r}$

Se  $|r| > 1 \rightarrow S_n$  diverge.

### Exemplos

Determine se as séries abaixo convergem ou divergem. Se convergirem, calcule sua soma.

6.2e)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{k-1}}$

6.2f)  $-1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \dots$

6.2g)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{3}{2} \right)^k$

### ➤ Propriedades das séries infinitas

**Teorema (propriedades lineares das séries):** Se  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  e  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  são séries convergentes, então  $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  é convergente e, sendo  $c$  uma constante qualquer,  $\sum_{k=1}^{+\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  também é convergente.

### Exemplo:

6.2h) Determinar se é convergente a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{5}{2^{k-1}} + \frac{1}{3^{k-1}} \right)$  e, se for, calcular o valor da soma.

**Teorema (condição necessária de convergência):** Se uma série infinita  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  converge, então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ . Se  $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  ou se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ , então a série é divergente.

**Exemplos:** Mostre que as séries abaixo divergem.

6.2i)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{k}$

6.2j)  $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k$

**Observação:** Atenção à lateralidade do teorema anterior: se a série é convergente, então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  mas, se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , a série poderá ou não ser convergente.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ converge} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \not\rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ converge}$$

**Exemplo**

6.2k)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln \frac{k}{k+1}$

**Teorema:** divergência de uma série de somas.

Se a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  converge e a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  diverge, então  $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  diverge.

**Exemplo:**

6.2l)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \ln \frac{k}{k+1} - \frac{1}{3^k} \right)$

**Observação:** A soma de duas séries divergentes pode originar uma série convergente.

**Exemplo:**

6.2m)  $\sum_{k=1}^{+\infty} k$  e  $\sum_{k=1}^{+\infty} -k$

➤ **Séries de termos não negativos**

Analisaremos, agora, por vários testes distintos, a convergência ou divergência das séries de termos não negativos.

**Teste da integral**

Suponhamos que a função  $f$  é contínua, decrescente e não negativa em  $[1; +\infty[$ .

i. Se  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  converge, então a série infinita  $\sum_{k=1}^{+\infty} f(x)$  converge.

ii. Se  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  diverge, então a série infinita  $\sum_{k=1}^{+\infty} f(x)$  diverge.

**Observação:** No teste da integral, não há necessidade de iniciar a série infinita em  $k = 1$ , podendo aparecer, por exemplo:

6.2n)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k^2+1} \right)$

6.2o)  $\sum_{k=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{k(\ln k)^{1/4}} \right)$

➤ **Série  $p$ :**

É uma série do tipo  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k^p} \right)$ , onde  $p$  é uma constante. Se  $p = 1$ , a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k} \right)$  é chamada harmônica e é sempre divergente.

**Convergência e divergência da série  $p$**

A série  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k^p} \right)$  converge se  $p > 1$  e diverge se  $p \leq 1$ .

**Exemplo**

6.2p)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k^3} \right)$

6.2q)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt[5]{k}} \right)$

**Teste da comparação**

Sejam dadas  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  e  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  duas séries cujos termos são não negativos e  $a_k \leq b_k, \forall k$ .

Então:

- i. Se  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  converge, então  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  converge.
- ii. Se  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  diverge, então  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  diverge.

**Exemplos:**

6.2r)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{7k^2+1} \right)$

6.2s)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{k+2}} \right)$

6.2t)  $\sum_{k=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{\ln k} \right)$

### Teste da comparação na forma do limite

Seja  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  uma série de termos não negativos e suponha que  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  é uma série de termos positivos tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ , então, ou ambas as séries convergem ou ambas divergem.

**Exemplos:**

6.2u)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{k^3+1}} \right)$

6.2v)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{7k+3}{(5k+1) \cdot 3^k} \right)$

### Teste adaptado da comparação no limite

Seja  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  uma série de termos não negativos e suponha que  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  é uma série de termos positivos.

- i. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  e  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  converge, então  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  converge.
- ii. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$  e  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  diverge, então  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  diverge.

**Exemplos:**

6.2w)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{\ln k}{k^4} \right)$

6.2x)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \right)$

➤ **Séries cujos termos mudam de sinal**

Consideremos agora testes para o estudo da convergência de séries cujos termos trocam de sinal, também chamadas de séries alternadas.

**Exemplo:**

$$6.2y) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} =$$

Série harmônica alternada.

$$6.2z) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} =$$

Série geométrica de razão  $-\frac{1}{2}$ .

➤ **Séries alternadas cujos termos decrescem em valor absoluto**

Seja  $\{a_n\}$  uma sequência de termos positivos. Então a soma parcial  $S_n$  da série alternada  $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1}a_n + \dots$  satisfaz as condições:

- i.  $0 \leq S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq S_8 \leq \dots$
- ii.  $S_1 \geq S_3 \geq S_5 \geq S_7 \geq S_9 \geq \dots$
- iii. Se  $n$  é um inteiro positivo par, então  $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ .
- iv. Se  $n$  é um inteiro positivo par, então  $0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq S_1$ .

**Exemplo**

$$6.2aa) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

**Teorema 2 (teste de Leibniz para séries alternadas):**

Se  $\{a_n\}$  é uma sequência decrescente de termos positivos com  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , então a série alternada  $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1}a_n + \dots$  é convergente. Além disso, se  $S$  é sua soma e se  $S_n$  é sua  $n$ -ésima soma parcial então:

$$0 \leq (-1)^n(S - S_n) \leq a_{n+1}$$

Observe que  $S - S_n$  é o erro envolvido quando se estima a soma  $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k$  pela  $n$ -ésima soma parcial  $S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k$ . Se  $n$  é par, então  $0 \leq (-1)^n(S - S_n) \leq S - S_n$  e  $S_n$  está se aproximando de  $S$  por baixo. Se  $n$  é ímpar, então  $0 \leq (-1)^n(S - S_n) = -(S - S_n)$  e  $S_n$  está se aproximando de  $S$  por cima. Em qualquer caso  $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ , isto é, o valor absoluto do erro de aproximação não excede o valor absoluto do primeiro termo abandonado.

**Exemplos**

**6.2bb)** Mostre que a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(k+3)}{k(k+2)}$  é convergente, encontre a soma parcial  $S_4$  e encontre um limite para o valor absoluto de erro envolvido na aproximação da soma por  $S_4$ .

**6.2cc)**  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$

**Definição: (convergência absoluta e condicional).**

- i. Se a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$  converge, dizemos que a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  é absolutamente convergente.
- ii. Se a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  é convergente, mas a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$  é divergente, dizemos que a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  é condicionalmente convergente.

**Exemplos:**

**6.2dd)**  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$

**6.2ee)**  $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k+2}$

**6.2ff)**  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$

**Teorema 3 (convergência absoluta implica convergência)**

Se uma série  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  é absolutamente convergente, então ela é convergente.

**Exemplo:**

**6.2gg)**  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^3+4}$

**Teorema 4 (teste da razão)**

Se  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  é uma série de termos não nulos, então:

- i. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \rightarrow$  a série é absolutamente convergente.
- ii. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = +\infty \rightarrow$  a série é divergente
- iii. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \rightarrow$  não podemos afirmar nada.

**Exemplos:**

**6.2hh)**  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{7^k(k+1)}$

**6.2ii)**  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} 5^k}{k!}$

**6.2jj)**  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (4k)!}{(k!)^2}$

### **Teorema 5 (teste da raiz)**

Seja dada a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ .

- i. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \rightarrow$  absolutamente convergente.
- ii. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$  ou se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \rightarrow$  divergente.
- iii. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \rightarrow$  não podemos afirmar nada.

### **Exemplos**

**6.2kk)**  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{[\ln(k+1)]^k}$

### ➤ Séries de potência (definição)

Uma série definida na forma

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x - a)^k = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots$$

É chamada **série de potência em  $x$**  ou simplesmente, **série de potência**. As constantes  $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$  são chamadas de coeficientes da série de potência e a constante  $a$  é chamada de **centro**. Uma série de potência com centro em  $a = 0$  toma a forma

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x - a)^k = c_0 + c_1(x) + c_2(x)^2 + c_3(x)^3 + \dots$$

Caracterizando um polinômio em  $x$ .

Na série de potências  $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x - a)^k$ ,  $x$  pode ser visto como uma quantidade que pode ser variada à vontade, podendo a série convergir para alguns valores e para outros não. Naturalmente, quando  $x = a$ , vemos que a série converge e sua soma é  $c_0$ .

### **Exemplo**

**6.2ll)**  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{k}{3^k} \cdot x^k =$

## ➤ Séries de Taylor e de Maclaurin

Seja a função  $f$  infinitamente diferenciável em um intervalo aberto  $J$  e seja  $a$  um número em  $J$ . Então, a série de Taylor para  $f$  em  $a$  é a série de potências  $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x-a)^k$  onde  $c_k = \frac{f^k(a)}{k!}$ ,  $\forall k \in N$ . A série de Taylor para  $a = 0$  é chamada série de Maclaurin.

### Exemplos

**6.2mm)** Encontre a série de Taylor para  $f(x) = \sin x$  em  $a = \frac{\pi}{4}$ .

**6.2nn)** Encontre a série de Maclaurin para  $f(x) = e^x$ .

**6.2oo)** Encontre a série de Taylor para  $f(x) = \cos x$  em  $a = \frac{\pi}{4}$ .

## ➤ Algumas séries de potências importantes

- a)  $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \forall x$
- b)  $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \forall x$
- c)  $\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \forall x$
- d)  $\ln(x+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)}, |x| < 1$
- e)  $\tan^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}, |x| < 1$
- f)  $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, |x| < 1$
- g)  $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k, |x| < 1$

### 6.3 Resumo dos Testes de Convergências

#### Teste da Integral ( $f$ contínua, decrescente e positiva)

- Se  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  converge  $\rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$  converge
- Se  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  diverge  $\rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$  diverge

#### Teste da Comparação

Sejam  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  e  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  séries positivas e  $a_k \leq b_k, \forall k$ :

- Se  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  converge  $\rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  converge.
- Se  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  diverge  $\rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  diverge.

#### Teste da Comparação na forma do limite

Sejam  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  e  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  séries positivas:

Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ , então ou ambas séries convergem ou ambas divergem.

#### Teste adaptado da Comparação na forma do limite

- Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  e  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  converge  $\rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  converge.
- Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$  e  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$  diverge  $\rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  diverge.

#### Teste da razão

Se  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  é uma série de termos não nulos, então:

- Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  é absolutamente convergente.
- Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = +\infty \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  é divergente.
- Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ , então nada podemos afirmar.

#### Teste da raiz

Dada a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ :

- Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ , então a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  é absolutamente convergente.
- Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ , ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ , então a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  divergente.
- Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ , então nada podemos afirmar.

#### Teste de Leibniz para séries alternadas

Se  $\{a_n\}$  é uma sequência decrescente de termos positivos com  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , então a série alternada  $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k$  converge.

### 7.1 Lista 1

---

1. Represente graficamente as seguintes bolas:

a)  $B(P_0; r)$   $P_0 = (1, 2, -1)$  e  $r = 1/3$   
 $P_0 = (1, \frac{1}{2}, 2)$  e  $r = 1$

b)  $\overline{B}(P_0; r)$   $P_0 = (-1, -1, -1)$  e  $r = 1$   
 $P_0 = (\frac{1}{2}, 2)$  e  $r = \frac{1}{2}$

2. Identifique se as inequações abaixo representam bolas abertas, fechadas ou não representam bolas; caso representem, determine  $P_0$  e  $r$ :

a)  $x^2 + y^2 - 2y + 1 < 3$

b)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x + 2y + 2z$

c)  $x^2 + y^2 \leq z^2$

d)  $x^2 + y^2 - 1 > 0$

e)  $x^2 + 4x + y^2 < 5$

f)  $x^2 + y^2 + z < 2$

## 7.2 Lista 2

---

1. Esboce o hodógrafo das seguintes funções vetoriais:

a)  $\vec{r}(t) = (4, 4\cos t, 9\sin t)$

b)  $\vec{r}(t) = (t, 3, \sin t)$

c)  $f(t) = (4, t, t^2 + 2)$

d)  $f(t) = (t, \tan t, 3) \quad \frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

e)  $f(t) = (t, |t|, 3)$ .

2. A posição de uma partícula é dada por  $r(t) = (t - 1, 2t^2 - 4t + 1)$ . Esboce a trajetória, bem como os vetores velocidade e aceleração, em  $t = 1$ . Verifique se estes vetores são perpendiculares entre si.

3. O movimento de um besouro que desliza sobre a superfície de uma lagoa é expresso

pelas funções  $x(t) = \frac{1-\cos t}{m}$  e  $y(t) = 2t + \frac{t-\sin t}{m}$ , onde  $m$  é a massa do besouro.

Determine: a equação vetorial que expressa o movimento do besouro e sua posição em  $t = 3\pi$

4. A equação  $\vec{r}(t) = (2t, 8 - 2t^2)$  descreve a trajetória de uma partícula no plano  $xoy$ .

- a) esboce a trajetória da partícula e os vetores velocidade e aceleração em  $t = 1$ ;  
b) verifique se os vetores do item a) são perpendiculares entre si

5. Sejam  $\vec{f}(t) = \left(3t, e^t, \frac{2t}{t+1}\right)$  e  $\vec{g}(t) = \left(t^2, \sqrt{t+2}, 0\right)$ , calcule:

a)  $\lim_{t \rightarrow 1} (\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))$

b)  $\lim_{t \rightarrow 2} (\vec{f}(t) \times \vec{g}(t))$

6. Sejam as funções  $\vec{f}(t) = (e^{2t}, \ln(t+1), 3t)$  e  $\vec{g}(t) = (\sin 2t, 2t + 1, (t + 1)^2)$ , calcule  $\lim_{t \rightarrow 0} [\vec{f}' \times \vec{f}''] \cdot \vec{g}$

7. Sejam as funções  $\vec{f}(t) = (e^{2t} i + \frac{\sin 2t}{2t} j)$  e  $\vec{g}(t) = 2\cos t i + 2t^2 j + k$ . Calcule

$$\lim_{t \rightarrow 0} 3\vec{f}(t) + \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\vec{f}(t) \times \vec{g}(t))$$

8. Verifique se a função  $\vec{r}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} i + \frac{t-9}{t+3} j, & t \neq 0, t \neq -3 \\ -3 j, & t = 0 \\ 7 k, & t = -3 \end{cases}$  é contínua em  $t = 0$ .

9. Verifique se a função  $f(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t}\right)i + e^{-2t}j; & t \neq 0 \\ \frac{-1}{2}i - j; & t = 0 \end{cases}$  é contínua para  $t = 0$ .

10. Calcule  $p$  de modo que a função  $\vec{f}(t) = \begin{cases} (t^2 + pt + 2)\vec{i} + 2\vec{j}; & t \neq 3 \\ 3\vec{i} + \ln e^2\vec{j}, & t = 3 \end{cases}$  seja contínua

11. Verifique se a função  $f(t) = \begin{cases} 2ti + \left(\frac{\sqrt{t+3} - \sqrt{3}}{t}\right)j; & t \neq 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}j, & t = 0 \end{cases}$  é contínua para  $t = 0$ .

12. A posição de uma partícula é dada por  $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}(t-1)\vec{i} + \frac{1}{4}(t^2 - 2t + 1)\vec{j}$ . Determine:

- a) os vetores velocidade e aceleração em  $t = 5$  s;
- b) esboce a trajetória da partícula e os vetores do item a);
- c) verifique se os vetores do item a) são perpendiculares entre si

13. Escreva a equação vetorial da curva  $12x^2 = -(y+1)^2 + 24$ ;  $z = 12$  e descreva a curva

14. Escreva a equação cartesiana e a equação vetorial da elipse que tem centro no ponto  $(-2, 3)$  e cujos valores dos semi-eixos focais são  $a = \sqrt{5}$  e  $b = 2$ .

15. Sejam  $f(t) = ti + 2t^2j + 3t^3k$ ,  $g(t) = 2ti + j - 3t^2k$ ,  $t \geq 0$

a)  $\lim_{t \rightarrow 1} (f(t) + g(t)) =$

b)  $\lim_{t \rightarrow 1} (f(t) - g(t)) =$

c)  $\lim_{t \rightarrow 1} (3f(t) - (1/2)g(t)) =$

d)  $\lim_{t \rightarrow 1} (f(t) \cdot g(t)) =$

e)  $\lim_{t \rightarrow 1} (f(t) \times g(t)) =$

f)  $\lim_{t \rightarrow 1} ((t+1) \cdot f(t)) =$

g)  $\lim_{t \rightarrow 0} (f(t) \times g(t)) =$

16. Calcule o limite e analise a continuidade das funções vetoriais abaixo, nos pontos indicados:

a)  $f(t) = \begin{cases} ti + \left(\frac{\sqrt{t+2} - \sqrt{2}}{t}\right)j, & t \neq 0 \\ \sqrt{2}j, & t = 0 \end{cases}$

$$b) \quad f(t) = \begin{cases} \frac{2}{t-1}i + \frac{4}{t-2}j - 5k, & t \neq 1, t \neq 2 \\ (0,0,0), & t = 1, t = 2 \end{cases}$$

17. Indique o intervalo de continuidade das funções vetoriais abaixo:

$$\begin{aligned} a) \quad g(t) &= \frac{1}{t}i + (t^2 - 1)j + e^t k \\ b) \quad w(t) &= (\sin t, \tan t, e^t) \\ c) \quad r(t) &= \left( e^{2t}, \frac{t^2 - 1}{t - 1}, \ln(2 + t) \right) \end{aligned}$$

18. Determine a derivada das funções vetoriais:

$$\begin{aligned} a) \quad f(t) &= (\cos^3 t, \tan t, \sin^2 t) \\ b) \quad g(t) &= (\sin t \cos t, e^{-2t}) \\ c) \quad f(t) &= e^{-t}i + e^{-2t}j + k \\ d) \quad g(t) &= \ln t i + t j + t k \\ e) \quad h(t) &= \left( \frac{5t - 2}{2t - 1}, \ln(1 - t^2), 5 \right) \end{aligned}$$

19. Determine os vetores velocidade e aceleração para qualquer instante  $t$ , bem como o módulo destes vetores instantâneo dado.

$$\begin{aligned} a) \quad r(t) &= e^t i + e^{-2t} j \quad t = \ln 2 \\ b) \quad r(t) &= \sqrt{t} i + (3t - 2)^2 k \quad t = 2 \\ c) \quad r(t) &= 2 \cos t i + 5 \sin t j + 3 k \quad t = \pi/4 \end{aligned}$$

20. Determine um vetor tangente às funções dadas, no ponto indicado:

$$\begin{aligned} a) \quad f(t) &= (t, t^2, t^3); P(-1, 1, -1) \\ b) \quad g(t) &= (t, e^t); P(1, e) \\ c) \quad h(t) &= (\sin t, \cos t, t); P(1, 0, \pi/2) \\ d) \quad p(t) &= \left( 1 - t, \frac{1}{1-t} \right); P(-1, -1) \\ e) \quad r(t) &= (2t, \ln t, 2); P(2, 0, 2) \end{aligned}$$

21. No instante  $t$ , a posição de uma partícula no espaço é dada por  $x(t) = t^2$ ,  $y(t) = 2\sqrt{t}$  e  $z(t) = 4\sqrt{t^3}$ .

- a) Escreva a equação vetorial que descreve a trajetória da partícula;
- b) Determine um vetor tangente à trajetória no ponto  $P(1, 2, 4)$ ;
- c) Determine a posição, velocidade e aceleração da partícula quando  $t = 4$ :

22. As equações abaixo descrevem a trajetória de uma partícula no espaço. Determine os vetores velocidade e aceleração no tempo dado e esboce a trajetória da partícula, bem como estes vetores:

$$\begin{aligned} a) \quad r(t) &= (t, 4, 4 - t^2); t = 0 \\ b) \quad r(t) &= \left( \frac{1}{1+t}, t \right); t = 1 \\ c) \quad r(t) &= (0, t^2, t^6); t = 0 \\ d) \quad r(t) &= (1 - t, 1 + t); t = 1 \end{aligned}$$

23. Se  $r(t)$  é o vetor posição de uma partícula em movimento, mostre que o vetor velocidade é perpendicular a ele e que o vetor aceleração é perpendicular ao vetor velocidade:

- a)  $r(t) = (\cos t, \sin t)$
- b)  $r(t) = (\cos 3t, \sin 3t)$

24. Se  $g(t) = \frac{1}{t-1}$  e  $f(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ , determine  $(g(t)f(t))'$ :

25. Esboce o gráfico da curva quando  $P(x, y)$  se move pela variação de  $t$  no intervalo dado. Determine a equação cartesiana da curva em cada item:

- a)  $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}; 0 \leq t \leq 2\pi$
- b)  $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \\ z = 2 \end{cases}; 0 \leq t \leq 2\pi$
- c)  $\begin{cases} x = 2 + 4\cos t \\ y = 3 - 2\sin t \end{cases}; 0 \leq t \leq 2\pi$
- d)  $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 4 \\ z = 2 \end{cases}; t \in \mathbb{R}$

26. Obtenha a equação cartesiana das curvas abaixo:

- a)  $r(t) = (\frac{1}{2}t, 3t + 5)$
- b)  $r(t) = (t - 1, t^2 - 2t + 2)$
- c)  $r(s) = (s^2 - 1, s^2 + 1, 2)$

27. Determine a representação paramétrica da reta que passa por A e tem direção do vetor b:

- a)  $A(1, \frac{1}{2}, 2); b = (2, -1, 0)$
- b)  $A(0, 2); b = (5, -1)$
- c)  $A(-1, 2, 0); b = (5, -2, 5)$
- d)  $A(\sqrt{2}, 2, \sqrt{3}); b = (5, 0, -3)$

28. Encontre a equação vetorial das curvas abaixo:

- a)  $x^2 + y^2 = 4; z = 4$
- b)  $y = 2x^2; z = x^3$
- c)  $2(x+1)^2 + y^2 = 10; z = 2$
- d)  $y = x^{1/2}; z = 2$
- e)  $x = e^y; z = e^x$
- f)  $y = x; z = x^2 + y^2$
- g) segmento de reta de  $A(2, 1, 2)$  a  $B(-1, 1, 3)$
- h) circunferência de  $C(2, 2)$  e  $r = 2$ , no sentido horário
- i) segmento de reta de  $C(0, 0, 1)$  a  $D(1, 0, 0)$

29. Verifique quais das curvas abaixo são suaves:

- a)  $r(t) = t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$ ;  $t \in [-1, 1]$
- b)  $r(t) = t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$ ;  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$
- c)  $r(t) = 2(t - \text{sent}) \mathbf{i} + 2(1 - \text{cost}) \mathbf{j}$ ;  $t \in [\pi, 3\pi]$
- d)  $r(t) = (3\cos^3 t, 3\sin^3 t)$ ;  $t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$
- e)  $r(t) = (2\text{cost}, 3\text{sent})$ ;  $t \in [0, 2\pi]$

30. Determine o comprimento do arco das curvas abaixo:

- a)  $r(t) = (e^t \text{cost}, e^t \text{sent}, e^t)$ ;  $0 \leq t \leq 1$
- b)  $r(t) = (2t^3, 2t, \sqrt{6} t^2)$ ;  $0 \leq t \leq 3$
- c)  $r(t) = (2\text{cost}, 4t, 2\text{sent})$ ; de  $P(2, 0, 0)$  a  $P_1(0, 2\pi, 2)$
- d)  $r(t) = y = x^{2/3}$ ,  $z = 0$ ; de  $P(0, 0, 0)$  a  $P_1(8, 4, 0)$

31. Escreva a função comprimento de arco de:

- a)  $r(t) = (\text{sen}^t \frac{1}{2}, \cos^t \frac{1}{2}, 2t)$
- b)  $r(t) = (\cos 2t, \text{sen} 2t, 4)$
- c)  $r(t) = (t, t^2)$
- d)  $r(t) = (\cos 2t, \text{sen} 2t)$ ;  $t \in [0, \pi]$
- e) hipocicloide  $r(t) = (\text{acos}^3 t, \text{asen}^3 t)$ ;  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

32. Encontre o vetor tangente unitário às curvas abaixo, nos pontos indicados:

- a)  $r(t) = (t \cos 2t, t \sin 2t)$ ;  $t \in [0, +\infty[$ ;  $t = \frac{\pi}{2}$
- b)  $r(t) = (2\text{cost}, 3\text{sent})$ ;  $t \in [0, 2\pi]$ ;  $t = \frac{\pi}{4}$
- c)  $r(t) = (t, t^2 + 1)$ ;  $t \in [0, 4]$ ;  $P(2, 5)$
- d)  $r(t) = (2\text{cost}, 2\text{sent}, 2 - 2\text{sent})$ ;  $P(0, 2, 0)$
- e)  $r(t) = (\frac{1}{2}\text{cost}, \frac{1}{2}\text{sent})$ ;  $P\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
- f)  $r(t) = (e^t \text{cost}, e^t \text{sent}, 2)$ ;  $P(1, 0, 2)$

### 7.3 Lista 3

---

1. Determinar o domínio da cada função de duas variáveis e esboçar seu gráfico.

- $f(x, y) = x + y + 1$
- $f(x, y) = 2x - 3y + 6$
- $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = 3 + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
- $f(x, y) = 10$
- $f(x, y) = x$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. Calcule cada expressão, usando as funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  definidas por:

$$f(x, y) = 5x^2 + 7xy, \quad g(x, y) = \sqrt{xy}, \quad h(x, y, z) = \frac{2xy + z}{x^2 + y^2 - z^2}$$

- $g(k, k)$
- $f(\sqrt{a}, b)$
- $h(\sin t, \cos t, 0)$

3. Especifique o domínio da função e calcule  $f(x, y)$  para os valores dados:

- $f(x, y) = \sqrt{x + y - 4}, \quad x = -4 \quad y = 16$
- $f(x, y) = x\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x = y = \frac{1}{4}$
- Se  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$  calcule e simplifique  $f(1, 2, 3, \dots, n)$

4. Desenhe o mapa de contorno do gráfico de  $z = f(x, y)$  mostrando as linhas de contorno correspondentes aos valores de  $z$  dados:

- $f(x, y) = 3x + 2y - 1 \quad z = -1, \quad z = 0, \quad z = 1, \quad z = 2$
- $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad z = 0, \quad z = 1, \quad z = 2, \quad z = 3$
- $f(x, y) = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{4}\right) - \left(\frac{y^2}{9}\right)} \quad z = 0, \quad z = 1, \quad z = \frac{1}{2}$
- $f(x, y) = x + y^2 \quad z = -1, \quad z = 0, \quad z = 2$
- $f(x, y) = xy \quad z = 0, \quad z = 1, \quad z = 2, \quad z = 3$
- $f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad z = 0, \quad z = 1, \quad z = 2, \quad z = 3$

5. Esboce algumas curvas de nível típicas da função  $f$ .

- $f(x, y) = x - y$
- $f(x, y) = x^2 - y^2$
- $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

6. Encontrar o domínio, imagem, curvas de nível e construir o gráfico das superfícies dadas:

- $f(x, y) = \sqrt{100 - 25x^2 - 4y^2}$
- $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 16}$

7. Determine o domínio de cada função vetorial:

a)  $f(x, y) = -xi + 2yj + \sqrt{5 - x^2 - y^2}k$

b)  $g(x, y) = \sqrt{x}i + \frac{y}{x}j$

c)  $h(x, y, z) = \left( \frac{1}{x}, \sqrt{y}, \frac{1}{z} \right)$

d)  $p(x, y, z) = \left( \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z} \right)$

e)  $q(x, y) = \left( \frac{1}{xy}, \sqrt{xy} \right)$

#### 7.4 Lista 4

---

1. Calcular os limites duplos e iterados

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^4 - (y-1)^4}{x^2 + (y-1)^2}$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$

d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,4)} y\sqrt[3]{x^3 + 2y}$

2. Encontrar o domínio, imagem, curvas de nível e superfície.

a)  $f(x, y) = 4x^2 + 25y^2$

b)  $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$

c)  $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + 25y^2}$

3. Estudar os limites e a continuidade da função. Se for o caso, remover a descontinuidade.

a)  $f(x, y) = \frac{\sin^2 x + \sin^2 y}{e^{2x} + e^{2y}} \quad (0,0)$

b)  $f(x, y) = \frac{x^9 y}{(x^6 + y^2)^2} \quad (0,0)$

c)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$

## 7.5 Lista 5

---

1. Seja  $w = f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ , determine  $f(-3, 4)$ ,  $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ,  $f(x+1, y-1)$  e  $f(-x, y) - f(x, -y)$
2. Seja  $g(x, y, z) = \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$ , determine  $g(1, -1, -1)$ ,  $g(-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  e  $g(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2})$
3. Determine o domínio da função  $f$  e esboce a região de  $\mathbb{R}^2$  que a representa:
  - a)  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^{-1}$
  - b)  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
  - c)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
  - d)  $f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$
  - e)  $f(x, y) = \ln(xy - 1)$
4. Determine o domínio de  $f$  e descreva a região que o representa:
  - a)  $f(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2 - z^2}$
  - b)  $f(x, y, z) = \ln(4 - x^2 - y^2) + |z|$
5. Dadas  $f(x, y) = x - y$ ,  $g(t) = \sqrt{t}$  e  $h(s) = s^2$ , ache  $(g \circ f)(5, 1)$ ,  $f(h(3), g(9))$ ,  $f(g(x), h(y))$  e  $(g \circ h)(f(x, y))$
6. Calcule o limite das funções:
  - a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{3x-2y}{x+4y}$
  - b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^4 - (y-1)^4}{x^2 + (y-1)^2}$
  - c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} \frac{3x^2 + xy - 2y^2}{(x-2)^2 + (y-3)^2}$
  - d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \arctan(y/x)$
  - e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,2)} \sqrt{\frac{1}{3x-4y}}$
  - f)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\pi/3, 1, \pi)} \frac{\sec xy + \sec yz}{y - \sec z}$
  - g)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{(e^x + e^y + e^z)^2}{e^{2x} + e^{2y} + e^{2z}}$

7. Dadas as funções abaixo, prove que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  não existe:

a)  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

b)  $f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$

c)  $f(x, y) = \frac{x^9 y}{(x^6 + y^2)^2}$

8. Determine todos os pontos em que a função é contínua:

a)  $f(x, y) = \frac{x^2}{y - 1}$

b)  $h(x, y) = \operatorname{sen}(\gamma/x)$

c)  $g(x, y) = \ln(25 - x^2 - y^2)$

d)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$

e)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 1, & x+y=0 \end{cases}$

9. Mostre que a função  $g(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2, & x^2 + 4y^2 \leq 5 \\ 3, & x^2 + 4y^2 > 5 \end{cases}$  é contínua em todos os pontos de  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  com exceção dos que estão sobre a elipse  $x^2 + 4y^2 = 5$

## 7.6 Lista 6

---

1. Calcule as derivadas parciais e o diferencial

a)  $f(x,y)=3xy-6x-y^2$

b)  $f(x, y) = \frac{x+2y}{x^2 - y}$

c)  $u = x^2y - 3xy^2 + 2yz$

d)  $u = 4xyz + \ln(2xyz)$

2. Considerando a função  $f(x,y)=3x^2+2xy-y^2$ , calcule:

a) incremento no ponto  $(1,4)$

b)  $\Delta f(1,4) \Delta x=0,03 \quad \Delta y= -0,02$

c)  $df(1,4)$

d)  $df(1,4) \Delta x= 0,03 \quad \Delta y= -0,02$

3. Considerando a função  $f(x,y)=2x^2+5xy+4y^2$ , calcule:

a)  $\Delta f(2,-1)$

b)  $\Delta f(2,-1)$  se  $\Delta x= -0,01$  e  $\Delta y= 0,02$

4. Seja  $z=\ln(x^2+xy+y^2)$  prove que  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$

5. Seja  $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$ , prove que  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$

6. Seja  $u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z$  calcule  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$  e  $du$

7. Encontre a diferencial  $dw$ :

a)  $w = 3x^2 + 4xy - 2y^3$

b)  $w = e^{(-x^2-y^2)}$

c)  $w = \sqrt{1+x^2+y^2}$

d)  $w = xye^{x+y}$

e)  $w = \operatorname{sen}(xyz)$

f)  $w = \ln(1+rs)$

g)  $w = \frac{s+t}{s-t}$

h)  $w = u^2e^{(-v^2)}$

8. Obtenha, por meio de diferenciais, uma aproximação de  $\Delta f = f(Q) - f(P)$

a)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  P(3,4), Q(2.97, 4.04)

b)  $f(x, y) = \frac{1}{1+x+y}$  P(3,6), Q(3.02, .6,05)

c)  $f(x, y, z) = e^{-xyz}$  P(1,0,-2), Q(1.02, 0.03, -2.02)

9. Calcule  $\frac{\partial w}{\partial t}$  aplicando a regra de cadeia e explicitando  $w$  como função e  $t$  antes de diferenciar.

- a)  $w = \frac{1}{u^2 + v^2}$        $u = \cos 2t$ ,       $v = \sin 2t$   
 b)  $w = \sin xyz$        $x = t$ ,       $y = t^2$ ,       $z = t^3$   
 c)  $w = \ln(u + v + z)$        $u = \cos^2 t$ ,       $v = \sin^2 t$ ,       $z = t^2$

10. Calcule  $\frac{\partial w}{\partial s}$  e  $\frac{\partial w}{\partial t}$ .

- a)  $w = p.q \sin(r)$        $p = 2s + t$        $q = s - t$        $r = st$   
 b)  $w = \sqrt{u^2 + v^2 + z^2}$        $u = 3e^t \sin(s)$        $v = 3e^t \cos(s)$        $z = 4e^t$   
 c)  $w = yz - zx + 2xy$        $x = s^2 - 2t^2$        $y = s^2 + 2t^2$        $z = 2s^2t^2$

11. Escreva uma equação do plano tangente, no ponto P, à superfície de equação dada:

- a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$       P(1,2,2)  
 b)  $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 14$       P(2,1,-2)  
 c)  $x^3 + y^3 + z^3 = 5xyz$       P(2,1,1)  
 d)  $z^3 + (x + y)z^2 + x^2 + y^2 = 13$       P(2,2,1)

12. Determine o vetor gradiente  $\nabla f$  no ponto P indicado.

- a)  $f(x, y) = 3x - 7y$ ;      P(17;39)  
 b)  $f(x, y) = 3x^2 - 5y^2$ ;      P(2;-3)  
 c)  $f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi xy\right)$ ;      P(3;-1)  
 d)  $f(x, y, z) = x^2 - 3yz + z^3$ ;      P(2,1,0)  
 e)  $f(x, y, z) = 2\sqrt{xyz}$ ;      P(3,-4,-3)  
 f)  $f(x, y, z) = (2x - 3y + 5z)^5$ ;      P(-5,1,3)

13. Determine a derivada direcional de f em P na direção do vetor  $\vec{v}$ , isto é:

determine  $D_u f(P)$  onde  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

- a)  $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ ,      P(2,1)       $\vec{v} = (1,1)$   
 b)  $f(x, y) = e^x \sin(y)$ ,      P(0,  $\pi/4$ )       $\vec{v} = (1,-1)$   
 c)  $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$ ,      P(2, -1, -2)       $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$   
 d)  $f(x, y, z) = \ln(1 + x^2 + y^2 - z^2)$ ;      P(1, -1, 1)       $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

14. Determine a derivada direcional máxima de f em P e a direção em que isso ocorre.

- a)  $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$       P(1,1)  
 b)  $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 4z^2$       P(1,5,-2)  
 c)  $f(x, y, z) = \sqrt{xy^2 z^3}$       P(2,2,2)

15. Escreva uma equação da reta (ou plano) tangente à curva (ou superfície) dada, no ponto indicado.

- a)  $2x^2 + 3y^2 = 35 \quad P(2,3)$
- b)  $x^4 + xy + y^2 = 19 \quad P(2,-3)$
- c)  $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 73 \quad P(2,2,3)$
- d)  $x^{1/3} + y^{1/3} + z^{1/3} = 1 \quad P(1,-1,1)$
- e)  $xyz + x^2 - 2y^2 + z^3 = 14 \quad P(5,-2,3)$

16. Dadas as funções, calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  e verifique que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

- a)  $f(x, y) = 6x^2 + 7xy + 5y^2$
- b)  $f(x, y) = x \cos y - y^2$
- c)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$
- d)  $f(x, y) = y \cos x - xe^{2y}$
- e)  $f(x, y) = \operatorname{sen}(2y + x)$
- f)  $f(x, y) = 5x \cosh 2y$

17. Determine as derivadas direcionais nos pontos dados, na direção do vetor unitário:

- a)  $z = 2x^2 + 3y^2 - 1 \quad P(0,0), \quad u = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
- b)  $z = x^2y + 2xy^2 \quad P(1,2) \quad u = (1/2, \sqrt{3}/2)$
- c)  $z = x \cos^2 y \quad P(2, \pi/4), \quad a = (5,1)$
- d)  $z = 7x - 3y \quad P(1,1), \quad u = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$

18. Determine o valor máximo da derivada direcional e um vetor  $\vec{u}$  na direção da derivada direcional máxima no ponto dado.

- a)  $f(x, y) = x^2 - 7xy + 4y^2 \quad P(1,-1)$
- b)  $f(x, y) = x^2 - y^2 - \operatorname{sen} y \quad P(1, \pi/2)$

19. Encontre os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os como máximo local, mínimo local ou ponto de sela.

- a)  $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2$
- b)  $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x + 4y$
- c)  $f(x, y) = xy - x - y$

20. Calcule  $\frac{dy}{dx}$  das funções implícitas

$$a) \quad F(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x-y)} = 0$$

b)  $F(x, y) = 1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy})$

c)  $F(x, y) = e^{xy} + \sin(2x - 3y) = 0$

21. Calcule  $\frac{\partial u}{\partial x}$  das funções implícitas

a)  $F(x, y, u, v) = ue^y - xy + v; \quad G(x, y, u, v) = ve^y - xv + u$

b)  $F(x, y, u, v) = x + y^3 + u^2 + v^2; \quad G(x, y, u, v) = x^3 + y + u^4 + v^4$

22. Utilize os multiplicadores de Lagrange para encontrar os pontos críticos

a)  $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad G(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

b)  $f(x, y) = x^2 - y^2 - y; \quad G(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

## 7.7 Lista 7

---

1. Calcule as derivadas parciais das funções abaixo:

a)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $f(x, y) = 7x^2 + 5x^2y + 2$

b)  $h_x, h(x, y) = \sin x \cos 7y$

c)  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $w = \frac{x^2 + y^2}{y^2 - x^2}$

d)  $f(r, \theta)$ ,  $f(r, \theta) = r^2 \cos 7\theta$

e)  $f_z(x, y, z)$ ,  $f(x, y, z) = 6xyz + 3x^2y + 7z$

f)  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $w = xy^2 + yz^2 + x^2y$

2. Encontre a deriva parcial indicada, utilizando a regra de cadeia:

a)  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $w = \sqrt{u}$ ,  $u = 3x^2 + y^2$

b)  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $w = \ln u$ ,  $u = 7x^2 + 4y^3$

c)  $h_1(x, y)$ ,  $h(x, y) = \arctan(xy)$

d)  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $w = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$

3. Verifique as igualdades abaixo com relação às funções dadas:

a)  $x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} = 5w$ , para a função  $w = x^3y^2 - 2xy^4 + 3x^2y^3$

b)  $x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = nw$ , dada a função  $w = (ax + by + cz)^n$ , onde a, b e c são constantes.

4. Encontre as derivadas parciais, utilizando a regra de cadeia:

a)  $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ ,  $z = 3x^2 - 4y^2$ ,  $x = u.v$ ,  $y = u$

b)  $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ ,  $z = 4x^3 - 3x^2y^2$ ,  $x = u \cos v$  e  $y = v \sin u$

c)  $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ ,  $w = \ln(u^2 + v^2)$ ,  $u = x^2 + y^2$  e  $v = 2x^2 + 3xy$

d)  $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s}$ ,  $u = \cosh(3x + 7y)$ ,  $x = r^2e^{-s}$  e  $y = re^{3s}$

5. Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva de intersecção entre a superfície e o plano no ponto dado:

a) superfície:  $z = 3x - 5y + 7$ , plano  $y = 2$ , no ponto A (1, 2, 0).

b) superfície:  $z = \sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}$ , plano  $y = 2$ , no ponto B(3, 2, 1)

c) superfície:  $z = e^{-x^2} \sin 3y$ , plano  $x = 1$ , no ponto C(1, 0, 0)

6. Verifique se as funções abaixo são diferenciáveis nos pontos indicados:

a)  $f(x, y) = xe^{-y}$ , em  $(x, y)$

b)  $f(x, y) = \frac{3xy}{x^3 + y^3}$ , em  $(1, 2)$

c)  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x+y} \cdot \cos e^{x^2 + y^2}$ , em  $(1, 1)$

7. A potência P consumida por uma resistência elétrica é dada por  $P = \frac{E^2}{R}$  watts, onde E

é a força eletromotriz em volts e R é a resistência em ohms. Se, em um dado instante, E = 100 volts e R = 5 ohms, aproximadamente de quanto irá variar a potência se E decrescer de 2 volts e R decrescer de 0,3 ohms?

8. As dimensões de uma caixa retangular são 5, 6 e 8 cm. Se cada dimensão aumenta em 0,01 cm, qual é aproximadamente o volume resultante?

9. Dadas as funções abaixo, calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  e verifique que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} :$$

a)  $f(x, y) = 6x^2 + 7xy + 5y^2$

b)  $f(x, y) = x \cos y - y^2$

c)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$

d)  $f(x, y) = y \cos x - x e^{2y}$

e)  $f(x, y) = \sin(x + 2y)$

f)  $f(x, y) = 5x \cosh 2y$

10. Se  $w = (Ax^2 + By^2)^3$ , onde A e B são constantes, verifique que  $\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}$

## 7.8 Lista 8

---

1. Encontre as coordenadas cartesianas dos pontos dados em coordenadas polares:

a)  $\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$

b)  $\left(4, \frac{5\pi}{8}\right)$

c)  $\left(3, \frac{13\pi}{4}\right)$

d)  $(1, 0)$

2. Encontre um par de coordenadas polares dos pontos dados em coordenadas cartesianas:

a)  $(1, 1)$

b)  $(-1, 1)$

c)  $(-1, -1)$

d)  $(1, -1)$

3. Transforme as equações abaixo para coordenadas polares:

a)  $x^2 + y^2 = 4$

b)  $x = 4$

c)  $y = 2$

d)  $y + x = 0$

e)  $x^2 + y^2 - 2x = 0$

f)  $x^2 + y^2 - 6y = 0$

4. Transforme as equações abaixo para coordenadas cartesianas:

a)  $r = \cos\theta$

b)  $r = 2\sin\theta$

c)  $r = (\cos\theta + \sin\theta)^{-1}$

d)  $r = a$  ( $a > 0$ )

5. Ache as coordenadas cartesianas dos pontos cujas coordenadas cilíndricas são dadas abaixo:

a)  $\left(4, \frac{\pi}{3}, 1\right)$

b)  $\left(3, \frac{\pi}{2}, 4\right)$

c)  $\left(5, \frac{\pi}{6}, -2\right)$

6. Ache as coordenadas cilíndricas com  $r \geq 0$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  dos pontos cujas coordenadas cartesianas são dadas:

a)  $(4, 0, 1)$

b)  $(-2\sqrt{3}, -6, 0)$

c)  $(-3\sqrt{3}, 3, 0)$

7. Ache as coordenadas cartesianas dos pontos cujas coordenadas esféricas são dadas abaixo:

a)  $\left(2, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

b)  $\left(7, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$

c)  $\left(12, \frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$

8. Ache as coordenadas esféricas com  $\rho \geq 0$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $0 \leq \phi \leq \pi$  dos pontos cujas coordenadas cartesianas são dadas:

a)  $(0, -1, 0)$

b)  $(0, 0, 5)$

c)  $(0, 0, 0)$

9. Converta as equações cartesianas em equações cilíndricas e esféricas correspondentes. Classifique a curva ou superfície encontrada:

a)  $z = 2(x^2 + y^2)$

b)  $x = 2$

c)  $x^2 + y^2 = 5z^2$

d)  $x^2 + y^2 = 25$

e)  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

10. Converta as equações cilíndricas em equações cartesianas e esféricas correspondentes. Classifique a curva ou superfície encontrada:

a)  $z = r^2$

b)  $\frac{r^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

c)  $r = 4\cos\theta$

11. Converta as equações esféricas em equações cartesianas e cilíndricas correspondentes. Classifique a curva ou superfície encontrada:

a)  $\rho = 2$

b)  $\rho\sin\phi = 3$

c)  $\phi = \pi/3$

12. Identifique as superfícies abaixo e esboce o gráfico:

a)  $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$

b)  $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 8$

c)  $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$

d)  $x^2 - 4y + z^2 = 0$

e)  $4x^2 - y^2 = z$

f)  $x^2 + y^2 = z^2$

13. Calcule a área da região limitada pela cardioide  $r = 1 - \cos\theta$ .

14. Calcule a área de interseção das regiões limitadas pelas curvas  $r = 3\cos\theta$  e  $r = 1 + \cos\theta$ .

15. Calcule a área da região limitada pela curva dada.

a)  $r = 2 - \cos\theta$

b)  $r^2 = \cos\theta$  ( $r \geq 0$ )

c)  $r = \cos 2\theta$

16. Calcule a área de interseção das regiões limitadas pelas curvas dadas em coordenadas polares.

a)  $r = 2 - \cos\theta$  e  $r = 1 + \cos\theta$

b)  $r = \sin\theta$  e  $r = 1 - \cos\theta$

c)  $r^2 = \cos\theta$  e  $r^2 = \sin\theta$  ( $r \geq 0$ )

## 7.9 Lista 9

---

1. Calcule, utilizando integrais duplas:

a)  $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3 dy dx$

b)  $\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{\sqrt{y}} dx dy$

c)  $\int_0^1 \int_{y^2}^y (\sqrt[3]{\frac{y}{x}})^{\frac{1}{2}} dx dy$

d)  $\iint_R \cos(x+y) dA$ , onde  $R$  é a região limitada pelas retas  $y = x$  e  $x = \pi$  e o eixo  $x$

e)  $\iint_R (\sqrt{\frac{y}{x}})^2 dA$ , onde  $R$  é a região limitada pelas retas  $y = x$ ,  $y = 2$  e a hipérbole  $xy = 1$

f) a área da região no plano  $x0y$ ; limitado pelas curvas  $x^2$  e  $y = 4x - x^2$

g) a área da região no plano  $x0y$  limitado pelas curvas  $x^2 + y^2 = 16$  e  $y^2 = 6x$

2. Calcule as integrais duplas, utilizando coordenadas polares:

a)  $\iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$ ;  $R: x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$

b)  $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ ;  $R: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq \sqrt{3} x$

c)  $\iint_R (x - y) dx dy$ ;  $R: x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$

d)  $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy dx$

e)  $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$

3. Ache o volume do sólido:

a) Que está no primeiro octante, limitado pelo parabolóide  $z = 1 - r^2$  e pelo cilindro  $r = 1$

b) Que é formado pela parte inferior da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  e pela parte externa do cilindro  $x^2 + y^2 = 9$

c) Formado pelo cone  $z^2 = x^2 + y^2$ , pelo cilindro de  $r = 2$ , acima do plano  $x0y$ .

4. Ache a área da superfície:

a) Delimitado ao plano  $2x + y + z = 4$  pelos planos  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  e  $y = 1$

b) No plano  $36x + 16y + 9z = 144$ , delimitada pelos planos coordenados

c) Da parte do gráfico de  $z - 5x - y^2 = 2$  que está sobre a região triangular do plano  $x0y$  que tem vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 4, 0)$  e  $(2, 4, 0)$

5. Calcule, utilizando integrais triplas:

a)  $\int_1^2 \int_y^2 \int_0^{y^2 \ln x} ye^z dz dx dy$

b)  $\int_0^{\pi/2} \int_z^{\pi/2} \int_0^{xz} \cos \frac{y}{z} dy dx dz$

c) o volume do sólido delimitado pela curva  $z + x^2 = 4$  e pelos planos  $y + z = 4$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$

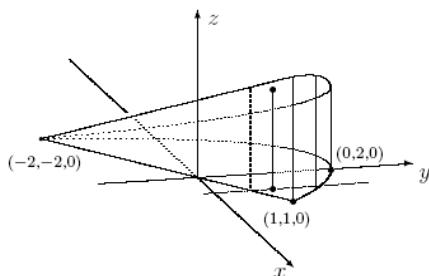
d) o volume do sólido cuja base é o triângulo de vértices  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 0)$  e é delimitado pelos planos  $z = 0$  e  $y + z = 1$

6. Calcule as integrais triplas, utilizando coordenadas cilíndricas:
- $\iiint_S \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , onde  $S$  é o sólido de primeiro octante limitado pelos planos coordenados, pelo plano  $z = 4$  e pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 25$
  - $\iiint_S (\sqrt{x^2 + y^2})^{-1} dx dy dz$ , onde  $S$  é o sólido limitado pelos planos  $z = 4$  e  $z = 1$  e pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 16$
7. Calcule, em coordenadas esféricas:
- a massa da parte superior de uma esfera com centro na origem e raio  $a$ , se a densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao centro da esfera.
  - o volume do sólido delimitado acima pela esfera  $\rho = 2$  e abaixo pelo cone  $\phi = c$ ,  $0 < c < \pi/2$

## 7.10 Lista 10

---

1. Calcule a área entre a parábola  $y=x^2$  e a reta  $y=x+2$ .
2. Ache o volume da região  $B \subset \mathbb{R}^3$ , limitada pelos planos coordenados  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  e  $x+y+z=1$ .
3. Determine o volume do sólido cuja base é a região do plano  $xy$  delimitada pela parábola  $y=2-x^2$  e pela reta  $y=x$  e cuja parte superior está contida no plano  $z=x+2$ .



4. Desenhe a região de integração referente à integral  $\int_{-1}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} dy dx$
5. Encontre o volume do sólido limitado pelos gráficos  $x^2+y^2=9$  e  $y^2+z^2=9$ .
6. Calcule  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$ , onde  $D$  é o domínio do plano  $xy$  limitado por  $x^2+y^2=4$  e  $x^2+y^2=9$ .
7. Determine o volume compreendido entre as superfícies  $z=8-x^2-y^2$  e  $z=x^2+3y^2$ .
8. Utilize coordenadas cilíndricas para calcular  $\iiint_R 4xy ds$  onde  $R$  é a região cilíndrica  $x^2+y^2 \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .
9. Utilize coordenadas esféricas para calcular  $\iiint_B z^2 ds$  onde  $B$  é a região  $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ .
10. Calcule o volume do sólido  $V$  limitado pelo paraboloide  $z=4-x^2-y^2$  e pelo plano  $xy$ . Sugestão: utilize coordenada polar.
11. Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro  $x^2+y^2=4$  e os planos  $y+z=4$  e  $z=0$ .
12. Calcule a integral tripla  $\iiint_G 12xy^2z^3 dv$ , na caixa retangular  $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$
13. Seja  $G$  a cunha do primeiro octante seccionada do sólido cilíndrico  $y^2 + z^2 \leq 1$  pelos planos  $y=x$  e  $x=0$ . Calcule  $\iiint_G z dv$ .
14. Calcule o volume do tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano  $2x+3y+6z=12$

## 7.11 Lista 11

---

Calcule as integrais abaixo nas regiões indicadas, utilizando uma mudança adequada de variáveis (método do Jacobiano):

1.  $\iiint_G \frac{e^{x-y+z}}{x+y-z} dV$ ;  $G$  é a região compreendida entre os planos  $0 \leq x - y + z \leq 1$ ,  $1 \leq x + y - z \leq 2$  e  $0 \leq z \leq 1$ .
2.  $\iint_R \frac{x-2y}{2x+y} dA$ ;  $R$  é a região retangular envolvida pelas retas  $x - 2y = 1$ ,  $x - 2y = 4$ ,  $2x + y = 1$  e  $2x + y = 3$ .
3.  $\iint_R (x - y)e^{x^2-y^2} dA$ ;  $R$  é a região retangular envolvida pelas retas  $x+y = 0$ ,  $x + y = 1$ ,  $x - y = 1$  e  $x - y = 4$ .
4.  $\iint_R \frac{y-4x}{y+4x} dA$ ;  $R$  é a região envolvida pelas retas  $y = 4x$ ,  $y = 4x + 2$ ,  $y = 2 - 4x$ ,  $y = 5 - 4x$ .
5.  $\iiint_G (z - y)^2 xy dV$ ;  $G$  é a região compreendida pelas superfícies  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $z = y$ ,  $z = y + 1$ ,  $xy = 2$ ,  $xy = 4$ .
6.  $\iint_R \operatorname{sen}(xy) dA$ ;  $R$  é a região compreendida pelas curvas  $xy = \pi$ ,  $xy = 2\pi$ ,  $xy^4 = 1$ ,  $xy^4 = 2$ .
7.  $\iint_R xy dA$ ;  $R$  é a região do primeiro quadrante compreendida pelas hipérboles  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $x^2 - y^2 = 4$  e os círculos  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $x^2 + y^2 = 16$ .

## 7.12 Lista 12

---

1. Represente graficamente os campos vetoriais abaixo:
  - a)  $\mathbf{F}(x, y) = -x \vec{i} - y \vec{j}$
  - b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$
  - c)  $\mathbf{F}(x, y) = -y \vec{i} + x \vec{j}$
  - d)  $\mathbf{F}(x, y) = 2 \vec{i}$
  - e)  $\mathbf{F}(x, y) = 2 \vec{i} + \vec{j}$
  
2. Seja D um sólido esférico de raio r. A temperatura em cada um dos pontos é proporcional à distância do ponto até a superfície da esfera.
  - a) Usando coordenadas cartesianas, determine a função que define o campo de temperatura;
  - b) Determine as superfícies isotermas do campo de temperatura em D, isto é, onde a temperatura é constante.
  
3. Um tanque tem a forma de um paralelepípedo retângulo cuja base tem dimensões 1mX2m e cuja altura é 1,5m. O tanque está cheio de uma substância com densidade variável. Em cada ponto, a densidade proporcional à distância do ponto até a superfície superior do tanque:
  - a) Determine a função que define o campo de densidade;
  - b) Determine as superfícies onde a densidade é constante.
  
4. Calcule  $\lim_{r \rightarrow r_0} \vec{f}(x, y, z)$ , sendo:
  - a)  $\mathbf{F}(x, y, z) = \left( x^2 + y^2, \frac{xy}{z}, \frac{x-2}{x^2-4} \right); \vec{r}_0 = (2, 1, 1)$
  - b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x, \frac{\sin y}{y}, x + y + z); \vec{r}_0 = (1, 0, 1/2)$
  - c)  $\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{x+y}{x-y}, x^2, \sqrt{z} \right); \vec{r}_0 = (2, 1, 4)$
  
5. Determine os pontos em que as funções são contínuas:
  - a)  $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy} \vec{i} + \ln xz \vec{j} + 2 \vec{k}$
  - b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{x}{x-y}, \frac{z}{x}, z \right)$
  - c)  $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|}, \text{ onde } \vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$
  
6. Encontre a derivada direcional de P nos campos vetoriais dados, na direção do vetor  $\vec{a} = 2 \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ :
  - a)  $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x \vec{i} + 5y \vec{j} + 4 \vec{k}; \mathbf{P}(1, 1, 2)$

- b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + z\vec{k}; \mathbf{P}(0, 0, 0)$
- c)  $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x+y}\vec{i} + e^{x-y}\vec{j} + 2\vec{k}; \mathbf{P}(1, 1, 0)$
7. Seja  $\vec{v}(x, y, z)$  o campo de velocidade de um fluido em movimento. Determine a variação de  $u$  no ponto e na direção indicados:
- a)  $\vec{v}(x, y, z) = (2x, 2y, -\frac{1}{2}z); \mathbf{P}(1, 1, 2); \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
- b)  $\vec{v}(x, y, z) = (-x^2, -y^2, z^2); \mathbf{P}(0, 0, 1); \vec{a} = \vec{i} - 2\vec{k}$
8. Encontre a divergência e o rotacional dos campos vetoriais abaixo:
- a)  $\mathbf{F}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$
- b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (xyz^3, 2xy^3, -x^2yz)$
- c)  $\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), (x, y) \neq (0, 0)$
9. Verifique se o campo dado é irrotacional:
- a)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz})$
- b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + \cos yz, -xy \sin yz, -xy \sin yz)$
- c)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$
10. Um fluido escoa em movimento uniforme com velocidade  $\vec{v}$  dada. Verifique se  $\vec{v}$  representa um possível fluxo incompressível:
- a)  $\vec{v} = z^2 \vec{i} + x \vec{j} + y^2 \vec{k}$
- b)  $\vec{v} = 2 \vec{i} + x \vec{j} - \vec{k}$
- c)  $\vec{v} = 2xy \vec{i} + x \vec{j}$

## 7.13 Lista 13

---

1. Calcule as integrais de linha:

- $F(x, y, z) = -yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$  e  $C$  é a elipse  $x^2 + 9y^2 = 36$  no plano  $z = 2$
- $\int_C x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz$  e  $C$  é o arco da hélice circular dada por  $R(t) = (4\cos t, 4\sin t, 8t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$
- $\int_C zdx + ydy - xdz$  e  $C$  é a intersecção das superfícies  $y + z = 8$  e  $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$  (considere os dois possíveis sentidos da curva)
- $F(x, y) = |x|\vec{i} + y\vec{j}$  e  $C$  é o quadrado de vértices  $(-1, -1), (-1, 1), (1, 1)$  e  $(1, -1)$
- $\int_C (3x^2 - 6y)dx + (3x + 2y)dy$  e  $C$  é a parábola  $y = x^2$ , do ponto  $(0, 0)$  ao ponto  $(1, 1)$ .

2. Calcule o trabalho (em Joules):

- Realizado por  $F(x, y) = (x+2)^{-1}\vec{i} + (y+3)^{-1}\vec{j}$  para deslocar uma partícula em linha reta do ponto  $A(3, 4)$  até o ponto  $B(-1, 0)$
- Realizado por  $F(x, y, z) = x\vec{i} + 2z\vec{k}$  para deslocar uma partícula ao longo da linha poligonal que une os pontos  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 1, 1)$  e  $D(1, 1, 1)$ , no sentido de  $A$  para  $D$

3. Mostre que o valor da integral de linha é independente do caminho e calcule-o utilizando o teorema da função potencial:

- $\int_C ydx + xdy$  entre os pontos  $(1, 4)$  e  $(3, 2)$
- $\int_C e^x \operatorname{sen} y dx + e^x \cos y dy$ , de  $A(0, 0)$  até  $B(2, \pi/2)$
- $\int_C (2xy^2 - y^3)dx + (2x^2y - 3xy^2 + 2)dy$ , de  $(-3, -1)$  até  $(1, 2)$
- $\int_C (x^2 - y)dx - (x - 3z)dy + (z + 3y)dz$ , de  $(-3, 1, 2)$  até  $(3, 0, 4)$

4. Calcule a integral de linha, utilizando o teorema de Green:

- $\oint_C (x+y)dx + xydy$ ;  $C$  é a curva fechada delimitada pelo eixo  $x$ , pela reta  $x = 2$  e pela curva  $4y = x^3$
- $\oint_C (-x^2 + x)dy$ ;  $C$  é a curva fechada delimitada pela reta  $x - 2y = 0$  e pela parábola  $x = 2y^2$
- $\oint_C \cos ydx + \cos xdy$ ,  $C$  é o retângulo com vértices  $(0, 0)$ ,  $(\pi/3, 0)$ ,  $(\pi/3, \pi/4)$ ,  $(0, \pi/4)$
- $\oint_C (\operatorname{sen}^4 x + e^{2x})dx + (\cos^3 y - e^y)dy$ ;  $C$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$

5. Calcule o valor da área da região dada, utilizando o teorema da área:

- A região limitada pelos gráficos  $y = x^2$  e  $y = \sqrt{x}$

- b) Região limitada pelo hipociclóide que tem  $x=a\cos^3 t$  e  $y=a\sin^3 t$  ( $a \geq 0, 0 \leq t \leq 2\pi$ ) como equações paramétricas
6. Utilize o teorema de Green para encontrar o trabalho total realizado pelo campo de forças  $\vec{F}(x, y) = (3x + y)\vec{i} + (4x - 5y)\vec{j}$  para mover um objeto no sentido anti-horário, uma volta em torno da elipse  $x^2 + y^2 = 16$  (suponha que o arco seja medido em metros e a força em Newtons)
7. Calcule a integral curvilínea  $\int_C 2xy ds$ , onde C é o quarto de círculo do primeiro quadrante parametrizado por  $x=\cos t$  e  $y=\sin t$  com  $0 \leq t \leq \pi/4$ .
8. Calcule a integral curvilínea  $\int_C ydx + 2xdy$  sendo C:
- O segmento de reta no plano, de A(1,1) a B(2,4);
  - A trajetória plana de A(1,1) a B(2,4) ao longo do gráfico da parábola  $y=x^2$ .
9. Determine uma função potencial para os campos vetoriais dados:
- $F(x,y)=(2x+3y)i+(3x+2y)j$
  - $F(x,y)=(3x^2+2y^2)i+(4xy+6y^2)j$ ;
  - $F(x,y,z)=(2x-y-z)i+(2y-x)j+(2z-x)k$
10. Aplique o teorema de Green para calcular a integral  $\oint_C Pdx + Qdy$  ao longo da curva fechada C especificada:  $P=x+y^2$ ,  $Q=y+x^2$ , C é o quadrado de vértices (1,1) e (-1,-1)
11. Calcule a área da região indicada, aplicando o corolário do teorema de Green: A região delimitada por  $y=x^2$  e por  $y=x^3$
12. Esboce o gráfico de cada curva abaixo, indicando a orientação positiva.
- $\vec{r}(t) = (t, 1-t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$
  - $\vec{r}(t) = (2t, t^2)$ ,  $-1 \leq t \leq 0$
  - $\vec{r}(t) = (1/t, t)$ ,  $1 \leq t < \infty$
  - $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$
13. Calcule as integrais de linha ao longo do caminho indicado:
- $\int_C 2ydx - 3xdy$ ; C:  $x = 1 - t$ ,  $y = 5 - t$ ;  $0 \leq t \leq 1$
  - $\int_{(-1;1)}^{(1;1)} xydx - y^2 dy$ ; ao longo da parábola  $y = x^2$ .
  - $\int_{(3;-1)}^{(4;-2)} \frac{y}{x} dx - \frac{x}{y} dy$ ; ao longo da reta  $y = 2 - x$ .
  - $\oint_D ydx + 2xdy$ ; D:  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $-y \leq x \leq y$ ,  $y \geq 0$
  - $\int_C xydl$ ; C:  $x = t$ ,  $y = t$ ;  $0 \leq t \leq 1$
  - $\int_C x^2 dl$ ; C:  $x = \cos 2t$ ,  $y = \sin 2t$ ;  $0 \leq t \leq 2\pi$
  - $\int_C ydx + 2xdy$ ; C é o triângulo de vértices (0,0), (1,0) e (1,1)
14. Calcule,  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , nos seguintes casos:
- $\vec{F} = (x^2 + y^2; 3xy^2)$ ; C é o círculo  $x^2 + y^2 = 9$ .
  - $\vec{F} = (3x^2 - 8y^2; 4y - 6xy)$ ; C é a fronteira da região D:  $x + y \leq 2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

c)  $\vec{F} = (xy; -y; 1);$

$C$  é o segmento de reta ligando a origem ao ponto  $A(1,1,1)$

d)  $\vec{F} = (y^2; x^2); C$  é o arco de parábola  $x = t, y = t^2, z = 0, 1 \leq t \leq 2.$

15. Com o auxílio do Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

a)  $\oint_C (senx + 4xy)dx + (2x^2 - cosy)dy;$

$C$  é um contorno simples, fechado e regular.

b)  $\oint_C 2dx + (x^2 - ytgy)dy; C: (x - 1)^2 + y^2 = 1.$

c)  $\oint_C x^2dx + xydy; C$  é a cardioide  $r = 1 + \cos\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

16. Verifique se o campo é conservativo e no caso afirmativo, encontre a função potencial.

a)  $\vec{F}(x, y) = (x; y)$

b)  $\vec{F}(x, y) = (3x^2y; x^3)$

c)  $\vec{F}(x, y) = (2xe^y + y; x^2e^y + x - 2y)$

d)  $\vec{F}(x, y, z) = (x; y; z)$

e)  $\vec{F}(x, y) = (y^2 - 3x; 2xy + cosy)$

f)  $\vec{F}(x, y, z) = (2xy^3; x^2y^3; 3x^2yz^2)$

g)  $\vec{F}(x, y, z) = (3y^4z^2; 4x^3y^2; -3x^2y^2)$

h)  $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2 + 8xy^2; 3x^3y - 3xy; -4y^2z^2 - 2x^3z)$

17. Em cada caso abaixo calcule a integral de linha indicada, observando que a mesma independe do caminho.

a)  $\int_{(0,-1)}^{(1,2)} (2y - x)dx + (2x + y^2)dy$

b)  $\int_{(-2,0)}^{(4,\pi/4)} tgydx + xsec^2ydy$

c)  $\int_{(0,2)}^{(1,0)} \frac{2ydx + 2xdy}{(xy+1)^2}$

d)  $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz$

e)  $\int_{(2,0,1)}^{(0,\pi,3)} (e^x seny + yz)dx + (e^x cosy + zseny + xz)dy + (xy - cosy)dz$

f)  $\int_C (e^x seny)dx + (e^x cosy)dy,$

$C$  é uma curva suave da origem ao ponto  $(1; \frac{\pi}{2})$

## 7.14 Lista 14

---

1. Determine se cada sequência converge ou diverge. Se convergir, calcule seu valor.

a)  $\left\{ \frac{100}{n} \right\}$

b)  $\left\{ \frac{n^3 - 5n}{7n^3 + 2n} \right\}$

c)  $\left\{ \frac{5n^2}{3n+1} \right\}$

d)  $\left\{ \frac{2n^2 + n}{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}$

e)  $\left\{ \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right\}$

f)  $\left\{ \frac{\ln(1/n)}{\ln(n+4)} \right\}$

g)  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} - n} \right\}$

h)  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$

2. Diga se cada sequência é crescente, decrescente ou não-monótona e também se é limitada superior ou inferiormente. Indique se é convergente ou divergente.

a)  $\left\{ \frac{2n+1}{3n+2} \right\}$

b)  $\left\{ 3^n - n \right\}$

c)  $\left\{ (-1)^{n^2} \right\}$

d)  $\left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} \right\}$

e)  $\left\{ 1 - \frac{2^n}{n} \right\}$

f)  $\left\{ \frac{\operatorname{sen}(n\pi/4)}{n} \right\}$

3. Calcule os cinco primeiros termos de cada série e os cinco primeiros termos da sequência  $\{S_n\}$ . Determine uma fórmula simples para a enésima soma parcial  $S_n$  em função de  $n$  e, se a série for convergente, calcule o valor limite da série.

a)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

b)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

4. Encontre o termo inicial e a razão de cada série geométrica. Determine se a série converge ou diverge e, se convergir, calcule seu valor.

a)  $1 + \frac{2}{7} + \frac{4}{49} + \frac{8}{343} + \dots$

b)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^k$

c)  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

d)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k-1}}{4^{k+1}}$

e)  $0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots$

f)  $\sum_{k=1}^{+\infty} 5^{-k}$

5. Mostre que as séries abaixo divergem

a)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{5k+7}$

b)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{5k}{12k+5}\right)$

c)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k^2 + 5k}{7k^2 + 13k + 2}$

d)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{4}\right)$

e)  $\sum_{k=1}^{+\infty} k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

6. Utilize as propriedades lineares das séries para calcular as somas abaixo

a)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{4}\right)^k \right]$

b)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{-1}{3}\right)^{k+1} \right]$

c)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{k(k+1)} - \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \right]$

d)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{2^k + 3^k}{6^k} - \frac{1}{7^{k+1}} \right]$

7. Determine se as séries convergem ou divergem, utilizando o teste da integral.

a)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 \sqrt{k}}$

b)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k^2}{k^3 + 16}$

c)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1000}{n} \right)^2$

$$d) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k}$$

$$e) \sum_{j=1}^{+\infty} j e^{-j}$$

$$f) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \sqrt{\ln k}}$$

8. Use o teste da comparação direta com uma série p ou com uma série geométrica para determinar se a série dada converge ou diverge.

$$a) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{k^4 + 3k + 1}$$

$$b) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k 5^k}$$

$$c) \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j+1}{(j+2)7^j}$$

$$d) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8}{\sqrt[3]{k+1}}$$

9. Use o teste da comparação no limite com uma série p ou com uma série geométrica para determinar se a série dada converge ou diverge.

$$a) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 + 5}}$$

$$b) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$c) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{1+k^3}$$

10. Determine se a série converge ou diverge. Use o teste de Leibniz para séries alternadas sempre que ele se aplicar.

$$a) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

$$b) \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{k^3 + 2}$$

$$c) \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k+7}$$

$$d) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln(k+2)}$$

11. Obtenha a soma dos n primeiros termos, dê um limite em valor absoluto para o erro envolvido nesta aproximação e determine se a aproximação é por cima ou por baixo.

$$a) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{3k-1}; n=5$$

$$b) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}; n=4$$

$$c) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k 5^k}; n=3$$

12. Determine se as séries são absolutamente convergente ou divergente, utilizando o teste da razão ou o teste da raiz.

$$a) \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{5^k}{k 4^k}$$

$$b) \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{7^k}{(3k)!}$$

$$c) \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^4}{(1,02)^k}$$

$$d) \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1+e^k}{2^k}$$

$$e) \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left( \frac{k}{3k+1} \right)^k$$

$$f) \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^k}{(2k+1/k)^k}$$

13. Determine a série de Taylor (ou Maclaurin) para a função dada, no ponto indicado.

$$a) f(x) = \sin x ; a = \frac{\pi}{6}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x} ; a = 2$$

$$c) f(x) = e^x ; a = 4$$

$$d) f(x) = e^{-x^2} ; a = 0$$

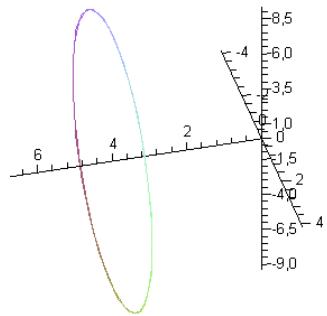
## 8 Respostas

### 8.1 Respostas da Lista 1

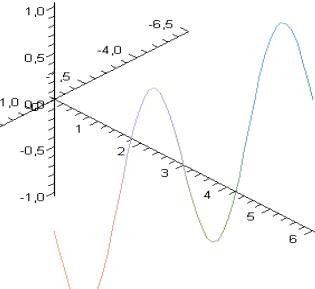
- 2.a) Bola aberta  $P_0(0,1), r = \sqrt{3}$   
 2.b) Bola fechada  $P_0(1,1,1), r = \sqrt{3}$   
 2.c) Não representa bola  
 2.d) Não representa bola  
 2.e) Bola aberta  $P_0(-2,0), r = 3$   
 2.f) Não representa bola

### 8.2 Respostas da Lista 2

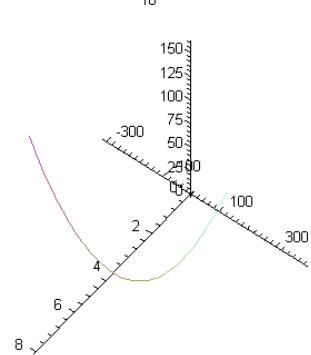
1.a)



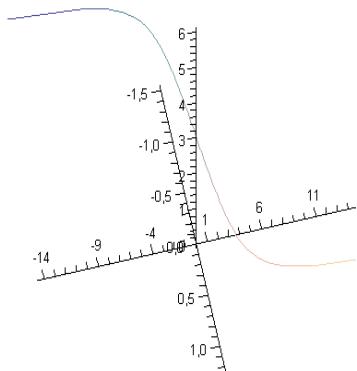
1.b)



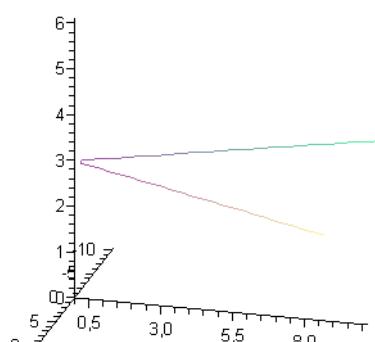
1.c)



1.d)



1.e)



2.  $\vec{v}(1) = (1,0), \vec{a}(1) = (0,4)$

São perpendiculares

5.a)  $6 + 2e\sqrt{3}$

5.b)  $\left(-\frac{8}{3}, \frac{16}{3}, 12 - 4e^2\right)$

3.  $\vec{r}(t) = \left(\frac{1-\cos t}{m}\right)\vec{i} + \left(2t + \frac{t-\sin t}{m}\right)\vec{j}$

$\vec{r}(3\pi) = \left(\frac{2}{m}, 6\pi + \frac{3\pi}{m}\right)$

4.a)  $\vec{v}(1) = (2, -4), \vec{a}(1) = (0, -4)$

4.b) não são perpendiculares.

6. 6

7.  $\left(3,3 - e^\pi, \frac{e^\pi \pi^2}{2}\right)$

8. Não é contínua em  $t=0$

9. Não é contínua em  $t=0$

10.  $p = \frac{-8}{3}$

11. Não é contínua em  $t=0$

12.a)  $\vec{v}(5) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ,  $\vec{a}(5) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$       12.c) Não são perpendiculares.

13.  $\vec{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t) \vec{i} + (\sqrt{24} \sin t - 1) \vec{j} + 12 \vec{k}$

14.  $\vec{r}(t) = (\sqrt{5} \cos t - 2) \vec{i} + (2 \sin t + 3) \vec{j}$

15.a)  $(3,3,0)$

15.b)  $(-1,1,6)$

15.c)  $\left(2, \frac{11}{2}, \frac{21}{2}\right)$

15.d) -5

15.e)  $(-9,9,-3)$

15.f)  $(2,4,6)$

15.g)  $(0,0,0)$

16.a)  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) \neq f(0) \rightarrow f$  não é contínua no  $t = 0$

16.b)  $\nexists \lim_{t \rightarrow 1} f(t)$  e  $\nexists \lim_{t \rightarrow 2} f(t) \rightarrow f$  não é contínua no  $t = 1$ , nem no  $t = 2$

17.a)  $g$  é contínua  $\forall t \in R | t \neq 0$

17.b)  $w$  é contínua  $\forall t \in R | t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

17.c)  $r$  é contínua  $\forall t \in R | t > -2$  e  $t \neq 1$

18.a)  $f'(t) = (-3 \cos^2 t \sin t, \sec^2 t, 2 \sin t \cos t)$

18.b)  $g'(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t, -2e^{-2t})$

18.c)  $f'(t) = (-e^{-t}, -2e^{-2t}, 0)$

18.d)  $g'(t) = \left(\frac{1}{t}, 1, 1\right)$

18.e)  $h'(t) = \left(\frac{-1}{(2t-1)^2}, \frac{-2t}{1-t^2}, 0\right)$

19.a)  $\vec{v}(t) = (e^t, -2e^{-2t}), |\vec{v}(t)| = 2,06$ ,  $\vec{a}(t) = (e^t, 4e^{-2t}), |\vec{a}(t)| = \sqrt{5}$

19.b)  $\vec{v}(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, 0, 18t - 12\right), |\vec{v}(t)| \approx 24$ ,  $\vec{a}(t) = \left(\frac{-1}{4\sqrt[4]{t^3}}, 0, 18\right), |\vec{a}(t)| \approx 18$

19.c)  $\vec{v}(t) = (-2 \sin t, 5 \cos t, 0), |\vec{v}(t)| \approx 3,8$ ,  $\vec{a}(t) = (-2 \cos t, -5 \sin t, 0), |\vec{a}(t)| \approx 3,8$

20.a)  $(1; -2; 3)$

20.b)  $(1; e)$

20.c)  $(0; -1; 1)$

20.d)  $(-1; 1)$

20.e)  $(2; 1; 0)$

21.a)  $(t^2, 2\sqrt{t}, 4\sqrt{t^3})$     21.b)  $(2, 1, 6)$     21.c)  $(16, 4, 32); (8, \frac{1}{2}, 12); \left(2, \frac{-1}{16}, \frac{3}{2}\right)$

22.a)  $(1, 0, 0); (0, 0, -2)$     22.b)  $\left(\frac{-1}{4}, 1\right), \left(\frac{1}{4}, 0\right)$     22.c)  $(0, 0); (2, 0)$     22.d)  $(-1, 1); (0, 0)$

23. Demonstração

24.  $\left(\frac{-1}{(t-1)^2}, \frac{t^2-2t}{(t-1)^2}\right)$

25.a)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

25.b)  $x^2 + y^2 = 16 ; z = 2$

25.c)  $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

25.d)  $y = (x-1)^2 + 4$

26.a)  $y = 6x + 5$     26.b)  $y = x^2 + 1$     26.c)  $y = x + 2; z = 2$  ( $x \geq -1$ )

27.a)  $(1 + 2t, \frac{1}{2} - t, 2)$       27.b)  $(5t, 2 - t)$   
 27.c)  $(-1 + 5t, 2 - 2t, 5t)$  27.d)  $(\sqrt{2} + 5t, 2, \sqrt{3} - 3t)$

28.a)  $(2\cos t, 2\sin t, 4)$ ,  $t \in [0; 2\pi]$       28.b)  $(t, 2t^2, t^3)$   
 28.c)  $(-1 + \sqrt{5}\cos t, \sqrt{10}\sin t, 2)$ ,  $t \in [0; 2\pi]$       28.d)  $(t, \sqrt{t}, 2)$ ,  $t \geq 0$   
 28.e)  $(t, \ln t, e^t)$ ,  $t > 0$       28.f)  $(t, t, 2t^2)$       28.g)  $(2 - 3t, 1, 2 + t)$ ,  $t \in [0; 1]$   
 28.h)  $(2 + 2\cos t, 2 - 2\sin t)$ ,  $t \in [0; 2\pi]$       28.i)  $(t, 0, 1 - t)$ ,  $t \in [0; 1]$

29.a) não      29.b) sim      29.c) não      29.d) sim      29.e) sim

30.a)  $\sqrt{3}(e - 1)$  30.b) 60      30.c)  $\sqrt{5}\pi$       30.d)  $\frac{8}{27}[10\sqrt{10} - 1]$

31.a)  $\frac{\sqrt{17}}{2}x$       31.b)  $2x$       31.c)  $\frac{1}{4}[2x\sqrt{4x^2 + 1} + \ln|\sqrt{4x^2 + 1} + 2x|]$   
 31.d)  $2x$       31.e)  $\frac{3a}{2}(\sin x)^2$

32.a)  $\left(\frac{-1}{\sqrt{1+\pi^2}}, \frac{-\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}\right)$       32.b)  $\left(\frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$       32.c)  $\left(\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$   
 32.d)  $(-1, 0, 0)$       32.e)  $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$       32.f)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

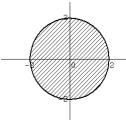
### 8.3 Respostas da Lista 3

---

1.a)  $D(f) = R^2$

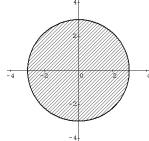
1.b)  $D(f) = R^2$

1.c)  $D(f) = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$



1.d)  $D(f) = R^2$

1.e)  $D(f) = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq 9\}$



1.f)  $D(f) = R^2$

1.g)  $D(f) = R^2$

1.h)  $D(f) = R^2$

2.a)  $|k|$

2.b)  $5a + 7b\sqrt{a}$

2.c)  $2\sin t \cos t$

3.a)  $D(f) = \{(x, y) \in R^2 | x + y - 4 \geq 0\}$   $f(-4, 16) = 2\sqrt{2}$

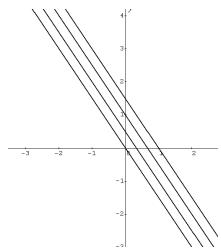
3.b)  $D(f) = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$   $f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{14}}{16}$

3.c)  $D(f) = R^n$   $f(1, 2, \dots, n) = \frac{n^2+n}{2}$

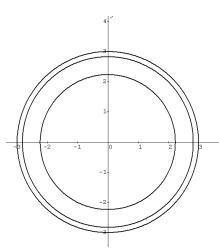
4.a)

4.b)

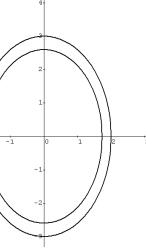
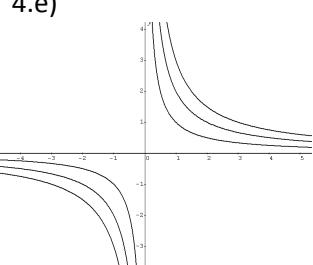
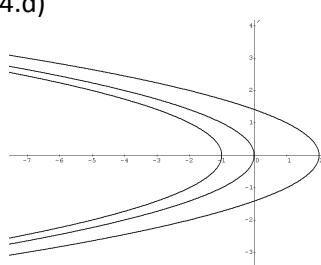
4.c)



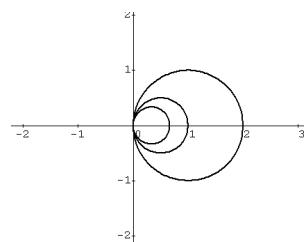
4.d)



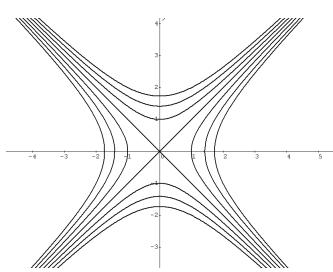
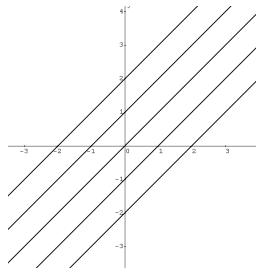
4.e)



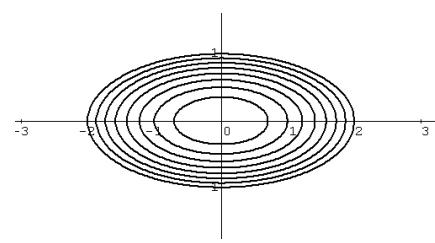
4.f)



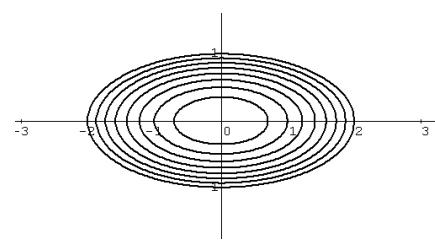
5.a)



5.b)

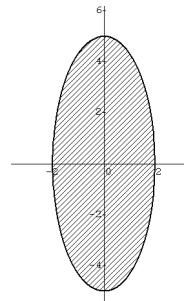


5.c)



6.a)  $D(f) = \{(x, y) \in R^2 | 25x^2 + 4y^2 \leq 100\}$ ,  $Im(f) = [0; 10]$

Gráfico da região de domínio:



Mapa de contorno:

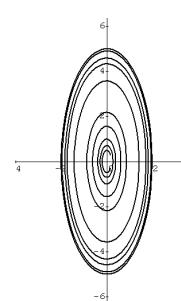
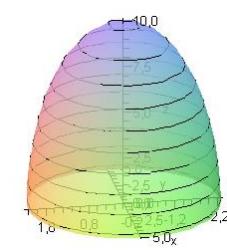


Gráfico da função:



6.b)  $D(f) = R^2$ ,  $Im(f) = [0; +\infty[$

Gráfico da região de domínio:

Todo o plano

Mapa de contorno:

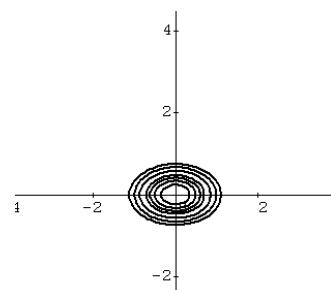
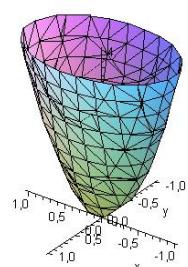
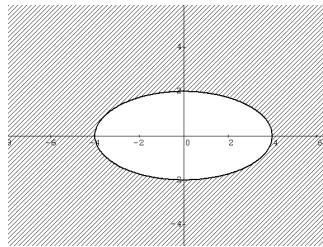


Gráfico da função:



6.c)  $D(f) = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + 4y^2 \geq 16\}, Im(f) = [0; +\infty[$

Gráfico da região de domínio:



Mapa de contorno:

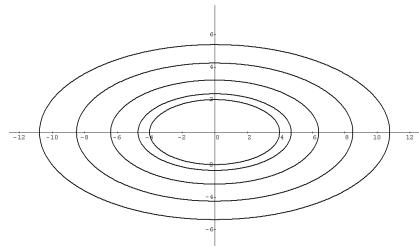
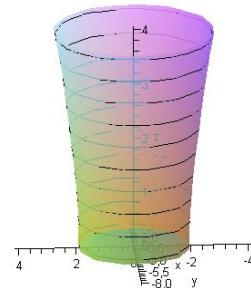


Gráfico da função:



7.a)  $D(f) = \{(x, y) \in R^2 | 5 - x^2 - y^2 \geq 0\}$

7.b)  $D(g) = \{(x, y) \in R^2 | x > 0\}$

7.c)  $D(h) = \{(x, y, z) \in R^3 | x \neq 0, y \geq 0 \text{ e } z \neq 0\}$

7.d)  $D(p) = \{(x, y, z) \in R^3 | x \neq 0, y \neq 0 \text{ e } z \neq 0\}$

7.e)  $D(q) = \{(x, y) \in R^2 | xy > 0\}$

#### 8.4 Respostas da Lista 4

1.a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y) = 0$

1.b)  $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

1.c)  $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

1.d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,4)} f(x,y) = 0$

2.a)  $D(f) = R^2, Im(f) = [0, +\infty[$

Gráfico da região de domínio

Todo o plano

Mapa de contorno

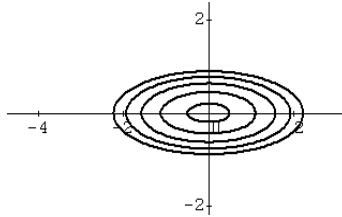
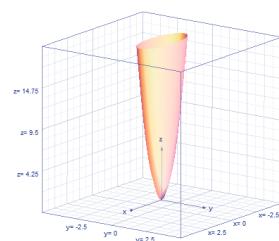


Gráfico da função



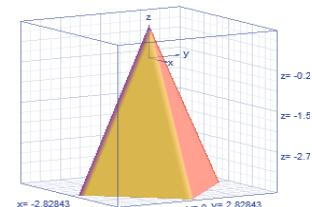
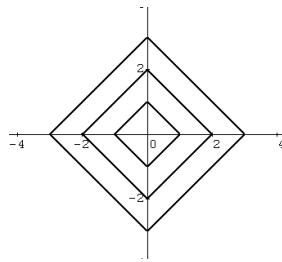
2.b)  $D(f) = R^2, Im(f) = ]-\infty; 1]$

Gráfico da região de domínio

Mapa de contorno

Gráfico da função

Todo o plano



$$2.c) D(f) = R^2, Im(f) = [0; +\infty[$$

Gráfico da região de domínio

Todo o plano

Mapa de contorno

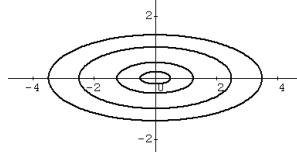
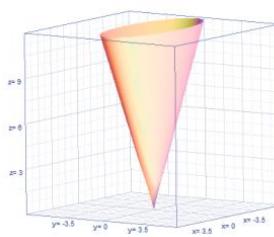


Gráfico da função



$$3.a) \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \rightarrow f \text{ é contínua no } (0,0)$$

$$3.b) \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \rightarrow f \text{ não é contínua no } (0,0)$$

$$3.c) \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \rightarrow f \text{ não é contínua no } (0,0)$$

## 8.5 Respostas da Lista 5

$$1) \frac{-1}{7}, 5, \frac{x+y}{x-y+2}, 0$$

$$2) 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$$3.a) D(f) = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \neq 1\}$$

$$3.b) D(f) = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$3.c) D(f) = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$3.d) D(f) = \{(x, y) \in R^2 / y \neq \pm x\}$$

$$3.e) D(f) = \{(x, y) \in R^2 / xy > 1\}$$

$$4.a) D(f) = \{(x, y, z) \in R^3 / x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 16\}, \text{ elipsoide}$$

$$4.b) D(f) = \{(x, y, z) \in R^3 / x^2 + y^2 < 4\}, \text{ cilindro C}(0, 0) \text{ e } r = 2$$

$$5.a) 2 \quad 5.b) 6 \quad 5.c) \sqrt{x} - y^2 \quad 5.d) |x - y|$$

$$6.a) -4$$

$$6.b) 0$$

$$6.c) 0$$

$$6.d) \frac{\pi}{4}$$

6.e)  $\frac{1}{2}$

6.f)  $\frac{1}{2}$

6.g) 3

7. Mostrar que, em direções diferentes temos limites diferentes; logo, o limite múltiplo não existe.

8.a) contínua  $\forall (x, y)$  que não esteja sobre a reta  $y = 1$

8.b) contínua  $\forall (x, y)$  que não esteja sobre o eixo y

8.c) contínua  $\forall (x, y)$  que está dentro da circunferência de raio 5

8.d) contínua  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$

8.e) contínua  $\forall (x, y) \in R^2$

## 8.6 Respostas da Lista 6

---

1.a)  $df = (3y - 6)dx + (3x - 2y)dy$

1.b)  $df = \left( \frac{-x^2 - y - 4xy}{(x^2 - y)^2} \right) dx + \left( \frac{2x^2 + x}{(x^2 - y)^2} \right) dy$

1.c)  $du = (2xy - 3y^2)dx + (x^2 - 6xy + 2z)dy + (2y)dz$

1.d)  $du = \left( 4yz + \frac{1}{x} \right) dx + \left( 4xz + \frac{1}{y} \right) dy + \left( 4xy + \frac{1}{z} \right) dz$

2.a)  $\Delta f(1,4) = 3(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 14\Delta x - 6\Delta y + 2\Delta x\Delta y$

2.b)  $\Delta f(1,4) = 0,5411$

2.c)  $df(1,4) = 14dx - 6dy$

2.d)  $df(1,4) = 0,54$

3.a)  $\Delta f(2, -1) = 2(\Delta x)^2 + 4(\Delta y)^2 + 3\Delta x + 2\Delta y + 5\Delta x\Delta y$

3.b)  $\Delta f(2, -1) = 0,0108$

6.  $du = \left[ z \left( xy + \frac{x}{y} \right)^{z-1} \left( \frac{y^2+1}{y} \right) \right] dx + \left[ z \left( xy + \frac{x}{y} \right)^{z-1} \left( \frac{xy^2-x}{y^2} \right) \right] dy + \left[ \left( xy + \frac{x}{y} \right)^z \ln \left( xy + \frac{x}{y} \right) \right] dz$

7.a)  $dw = (6x + 4y)dx + (4x - 6y^2)dy$

7.b)  $dw = (-2xe^{-x^2-y^2})dx + (-2ye^{-x^2-y^2})dy$

7.c)  $dw = \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right) dx + \left( \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right) dy$

7.d)  $dw = (ye^{x+y} + xye^{x+y})dx + (xe^{x+y} + xye^{x+y})dy$

7.e)  $dw = (yzcosxyz)dx + (xzcosxyz)dy + (ycosxyz)dz$

7.f)  $dw = \left( \frac{s}{1+rs} \right) dr + \left( \frac{r}{1+rs} \right) ds$

7.g)  $dw = \left( \frac{-2t}{(s-t)^2} \right) ds + \left( \frac{2s}{(s-t)^2} \right) dt$

7.h)  $dw = (2ue^{-v^2})du + (-2u^2ve^{-v^2})dv$

8.a)  $df(3,4) = 0,014$

8.b)  $df(3,6) = -0,0007$

8.c)  $df(1,0,-2) = 0,06$

9.a)  $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$

9.b)  $\frac{\partial w}{\partial t} = 6t^5 \cos t^6$

9.c)  $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{2t}{1+t^2}$

10.a)  $\frac{\partial w}{\partial t} = q\sin(r) - p\sin(r) + pq\cos(r), \frac{\partial w}{\partial s} = 2q\sin(r) + p\sin(r) + pq\cos(r)$

10.b)  $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{3ue^t \sin(s)}{\sqrt{u^2+v^2+z^2}} + \frac{3ve^t \cos(s)}{\sqrt{u^2+v^2+z^2}} + \frac{4ze^t}{\sqrt{u^2+v^2+z^2}}, \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{3ue^t \cos(s)}{\sqrt{u^2+v^2+z^2}} - \frac{3ve^t \sin(s)}{\sqrt{u^2+v^2+z^2}} + 0$

10.c)  $\frac{\partial w}{\partial t} = (-z+2y)(-4t) + (z+2x)(4t) + (y-x)(4s^2t), \frac{\partial w}{\partial s} = (-z+2y)(2s) + (z+2x)(2s) + (y-x)(4st^2)$

11.a)  $\pi: x + 2y + 2z - 9 = 0$     11.b)  $\pi: x + y - 2z - 7 = 0$   
 11.c)  $\pi: x - y - z = 0$                 11.d)  $\pi: 5x + 5y + 11z - 31 = 0$

12.a)  $\vec{\nabla}f(17,39) = (3, -7)$                   12.b)  $\vec{\nabla}f(2, -3) = (12, 30)$   
 12.c)  $\vec{\nabla}f(3, -1) = \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8}, \frac{-3\sqrt{2}\pi}{8}\right)$       12.d)  $\vec{\nabla}f(2, 1, 0) = (4, 0, -3)$   
 12.e)  $\vec{\nabla}f(3, -4, -3) = \left(\frac{12}{6}, \frac{-9}{6}, \frac{-12}{6}\right)$     12.f)  $\vec{\nabla}f(-5, 1, 3) = (160, -240, 400)$   
 13.a)  $D_u f(2, 1) = \frac{16}{\sqrt{2}}$                   13.b)  $D_u f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = 0$   
 13.c)  $D_u f(2, 1, -2) = -\frac{1}{6}$                   13.d)  $D_u f(1, -1, 1) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

14.a)  $D_{u_{\max}} f(1, 1) = \sqrt{170}$       14.b)  $D_{u_{\max}} f(6, 10, -16) = \sqrt{392}$       14.c)  $D_{u_{\max}} f(2, 2, 2) = \sqrt{56}$   
 A derivada direcional máxima ocorre na direção do vetor gradiente.

15.a)  $r: y = -\frac{4}{9}x + \frac{35}{9}$                   15.b)  $r: y = \frac{29}{4}x - \frac{35}{2}$   
 15.c)  $\pi: 6x + 8y + 15z - 73 = 0$   
 15.d)  $\pi: x + y + z - 1 = 0$                   15.e)  $\pi: 4x + 23y + 17z - 25 = 0$

16.a)  $f_x(x, y) = 12x + 7y$ ,  $f_{xx}(x, y) = 12$ ,  $f_{xy}(x, y) = 7 = f_{yx}(x, y)$ ,  $f_y(x, y) = 7x + 10y$ ,  
 $f_{yy}(x, y) = 10$   
 16.b)  $f_x(x, y) = \cos y$ ,  $f_{xx}(x, y) = 0$ ,  $f_{xy}(x, y) = -\sin y = f_{yx}(x, y)$ ,  $f_y(x, y) = -x \sin y - 2y$ ,  $f_{yy}(x, y) = -x \cos y - 2$   
 16.c)  $f_x(x, y) = 3x\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $f_{xx}(x, y) = 3\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{3x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $f_{xy}(x, y) = \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$   
 $f_{yx}(x, y) = 3y\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $f_{yy}(x, y) = 3\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{3y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$   
 16.d)  $f_x(x, y) = -y \sin x - e^{2y}$ ,  $f_{xx}(x, y) = -y \cos x$ ,  $f_{xy}(x, y) = -\sin x - 2e^{2y} =$   
 $f_{yx}(x, y)$ ,  $f_y(x, y) = \cos x - 2xe^{2y}$ ,  $f_{yy}(x, y) = -4xe^{2y}$   
 16.e)  $f_x(x, y) = \cos(2y + x)$ ,  $f_{xx}(x, y) = -\sin(2y + x)$ ,  $f_{xy}(x, y) = -2\sin(2y + x) =$   
 $f_{yx}(x, y)$ ,  $f_y(x, y) = 2\cos(2y + x)$ ,  $f_{yy}(x, y) = -4\sin(2y + x)$   
 16.f)  $f_x(x, y) = 5\cosh(2y)$ ,  $f_{xx}(x, y) = 0$ ,  $f_{xy}(x, y) = 10\sinh(2y) = f_{yx}(x, y)$ ,  $f_y(x, y) =$   
 $10x\sinh(2y)$ ,  $f_{yy}(x, y) = 20x\cosh(2y)$

17.a)  $D_u f(0, 0) = 0$                   17.b)  $D_u f(1, 2) \approx 13,79$       17.c)  $D_u f\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = 0,098$   
 17.d)  $D_u f(1, 1) \approx 4,56$

18.a)  $D_{u_{\max}} f(1, -1) \approx 17,49$       18.b)  $D_{u_{\max}} f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) \approx 3,72$

19.a)  $P(0, 1)$  ponto de mínimo relativo      19.b)  $P(-1, -1)$  ponto de mínimo relativo  
 19.c)  $P(1, 1)$  ponto de sela

20.a)  $-\frac{\cos(2y)}{\cos(2x)}$

**Dica:** usar transformação  $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

e  $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

20.b)  $\frac{-y}{x}$                   20.c)  $\frac{-(ye^{xy} + 2\cos(2x-3y))}{xe^{xy} - 3\cos(2x-3y)}$

21.a)  $\frac{ye^y - xy - vue^v - v}{e^{v+y} - xe^v - ue^{v-1}}$

21.b)  $\frac{-4v^3 + 6vx^2}{8uv^3 - 8vu^3}$

22.a)  $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  e  $P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  → Pontos de mínimo absoluto

$P_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  e  $P_4(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  → Pontos de máximo absoluto

22.b)  $P_1\left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{-1}{4}\right)$  e  $P_2\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{-1}{4}\right)$  → Pontos de máximo absoluto,  
 $P_3(0,1)$  → Ponto de mínimo absoluto

## 8.7 Respostas da Lista 7

---

1.a)  $14x + 10xy$

1.b)  $\cos x \cos 7y$

1.c)  $\frac{4xy^2}{(y^2 - x^2)^2}$

1.d)  $2r \cos 7\theta$

1.e)  $6xy + 7$

1.f)  $y^2 + 2xy$

2.a)  $\frac{3x}{(3x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$

2.b)  $\frac{14x}{7x^2 + 4y^3}$

2.c)  $\frac{y}{1+x^2y^2}$

2.d)  $\frac{-3x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}}$

4.a)  $6xv + 8y, 6xu$

4.b)  $(12x^2 - 6xy^2)\cos v - 6x^2yv\cos u, (12x^2 - 6xy^2)(-usenv) - 6x^2ysenu$

4.c)  $\frac{4ux + 8xv + 6yv}{u^2 + v^2}, \frac{4uy + 6xv}{u^2 + v^2}$

4.d)  $6re^{-r}\sinh(3x+7y) + 7e^{3s}\sinh(3x+7y), -3r^2e^{-s}\sinh(3x+7y) + 21re^{3s}\sinh(3x+7y)$

5.a) 3

5.b) -6

5.c)  $\frac{3}{e}$

6.a) diferenciável

6.b) diferenciável

6.c) diferenciável

7) 40 watts

8) 1,  $18 \text{ cm}^3$

9.a) 12, 10, 0    9.b) 0, -x cos y - 2, -sen y

9.c)  $3\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{3x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 3\sqrt{x^2 + y^2} +$

$\frac{3y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

9.d) -ycos x,  $-4xe^{2y}, -\sin x - 2e^{2y}$

9.e)  $-\sin(x + 2y), -4\sin(x + 2y), -2\sin(x + 2y)$

9.f) 0,  $20x\cosh 2y, 10\sinh 2y$

## 8.8 Respostas da Lista 8

---

1.a)  $(1; -\sqrt{3})$     1.b)  $(-1,5307; 3,6955)$     1.c)  $\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}; \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$     1.d)  $(1; 0)$

2.a)  $\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$     2.b)  $\left(\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$     2.c)  $\left(\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4}\right)$     2.d)  $\left(\sqrt{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$

3.a)  $r = 2$       3.b)  $4 = r\cos\theta$     3.c)  $2 = r\sin\theta$     3.d)  $\theta = \frac{3\pi}{4} + K\pi$   
 3.e)  $r = 2\cos\theta$     3.f)  $r = 6\sin\theta$

4.a)  $x^2 - x + y^2 = 0$       4.b)  $x^2 + y^2 - 2y = 0$   
 4.c)  $x + y = 1$       4.d)  $x^2 + y^2 = a^2$   
 5.a)  $(2; 2\sqrt{3}; 1)$       5.b)  $(0; 3; 4)$       5.c)  $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}; -2\right)$   
 6.a)  $(4; \pi; 1)$       6.b)  $\left(4\sqrt{3}; \frac{4\pi}{3}; 0\right)$       6.c)  $\left(6; \frac{5\pi}{6}; 0\right)$

7.a)  $\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$       7.b)  $(0; 0; -7)$       7.c)  $(-9; \frac{\sqrt{3}}{3}; -6)$   
 8.a)  $\left(1; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$       8.b)  $(5; \theta; 0)$       8.c)  $(0; \theta; \varphi)$

9.a)  $z = 2r^2$ ,  $\cos\varphi = 2\rho\sin^2\varphi$ , paraboloide  
 9.b)  $r\cos\theta = 2$ ,  $\rho = 2\cos\varphi\sec\theta$ , Reta  
 9.c)  $r^2 = 5z^2$ ,  $\tan\varphi = \sqrt{5}$ , cone  
 9.d)  $r = 5$ ,  $\rho\sin\varphi = 5$ , circunferência  
 9.e)  $r^2 = 1 + z^2$ ,  $\rho^2(2\sin^2\varphi - 1) = 1$ , Hiperboloide

10.a)  $z = x^2 + y^2$ ,  $\rho = \cos\varphi\csc^2\varphi$ , paraboloide  
 10.b)  $\frac{x^2+y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ ,  $\rho^2(9\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi) = 36$ , elipsoide  
 10.c)  $y^2 + (x - 2)^2 = 4$ ,  $\rho\sin\varphi = 4\cos\theta$ , circunferência

11.a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $r^2 + z^2 = 4$ , elipsoide (esfera)  
 11.b)  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $r = 3$ , circunferência  
 11.c)  $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ ,  $3z^2 = r^2$ , Cone

12.a) elipsoide  
 12.b) hiperboloide de uma folha – eixo y  
 12.c) hiperboloide de duas folhas – eixo z  
 12.d) paraboloide – eixo y  
 12.e) paraboloide hiperbólico – eixo z  
 12.f) cone – eixo z

13)  $\frac{3\pi}{2}ua$       14)  $\frac{5\pi}{4}ua$   
 15.a)  $\frac{9\pi}{2}ua$       15.b)  $1u.a$       15.c)  $\frac{\pi}{2}ua$   
 16.a)  $\frac{5\pi}{2} - 3\sqrt{3}ua$       16.b)  $\frac{\pi-2}{2}ua$       16.c)  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}ua$

## 8.9 Respostas da Lista 9

---

1.a) 42	1.b) $\frac{1}{2}$	1.c) $\frac{1}{5}$	1.d) -2
1.e) $\frac{9}{4}$	1.f) $\frac{8}{3}$	1.g) $\frac{16\pi}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}$	
2.a) $\frac{4\pi}{3}$	2.b) $\frac{\pi}{9}(2\sqrt{2} - 1)$	2.c) 0	2.d) $\pi - \frac{\pi}{e^9}$
			2.e) $\frac{\pi}{10}a^5$

3.a)  $\frac{\pi}{8}$

3.b)  $\frac{128}{3}\pi$

3.c)  $\frac{16}{3}\pi$

4.a)  $\sqrt{6}$

4.b)  $2\sqrt{1633}$

4.c)  $\frac{1}{24}(270\sqrt{10} - 26\sqrt{26})$

5.a)  $\frac{47}{24}$

5.b)  $\frac{\pi}{2} - 1$

5.c)  $\frac{128}{5}$

5.d)  $1/6$

6.a)  $\frac{250\pi}{3}$

6.b)  $24\pi$

7.a)  $\frac{ka^4\pi}{2}$

7.b)  $\frac{16\pi}{3}(1 - \cos c)$

### 8.10 Respostas da Lista 10

1)  $\frac{9}{2}uv$

2)  $\frac{1}{6}uv$

3)  $\frac{27}{4}uv$

5) 144

6)  $\frac{38}{3}\pi$

7)  $8\pi\sqrt{2}$

8) 0

9)  $\frac{4}{15}\pi$

10)  $8\pi$

11)  $16\pi$

12) 648

13)  $\frac{1}{8}$  14) 8

### 8.11 Respostas da Lista 11

1)  $\frac{1}{2}(1-e)\ln 2$

2)  $\frac{3}{2}\ln 3$

3)  $\frac{1}{2}(e^4 - e - 3)$

4)  $\frac{1}{4}\ln\frac{5}{2}$

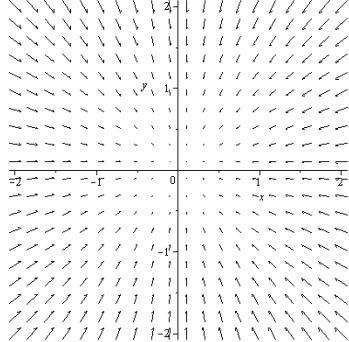
5)  $2\ln 3$

6)  $-\frac{2}{3}\ln 2$

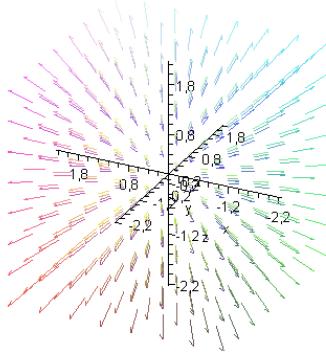
7)  $\frac{105}{8}$

### 8.12 Respostas da Lista 12

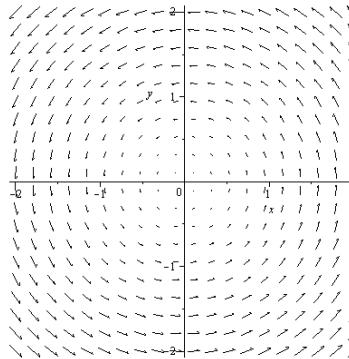
1.a)



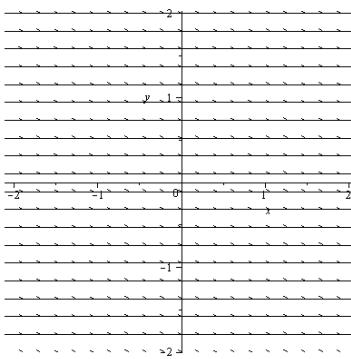
1.b)



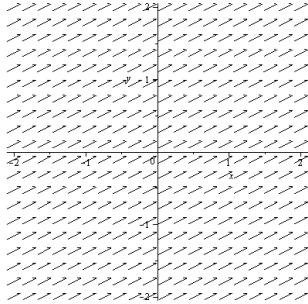
1.c)



1.d)



1.e)



2.a)  $T(x, y, z) = (r - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})k$

2.b)  $r = k_2 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \text{esferas}$

3.a)  $D(x, y, z) = (1,5 - z)k$

3.b)  $z = 1,5 - \frac{k_1}{k} \rightarrow \text{planos paralelos à base.}$

4.a)  $(5; 2; \frac{1}{4})$

4.b)  $(e; 1; \frac{3}{2})$

4.c)  $(3; 4; 2)$

5.a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xz > 0\}$

5.b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \neq y \text{ e } x \neq 0\}$

5.c)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$

6.a)  $(\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{-5\sqrt{6}}{6}; 0)$

6.b)  $(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{6})$

6.c)  $(\frac{\sqrt{6}}{6}e^2; \frac{\sqrt{6}}{2}; 0)$

7.a)  $(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{-\sqrt{3}}{6})$

7.b)  $(0; 0; \frac{-4\sqrt{5}}{5})$

8.a)  $\text{div}(F) = 2e^x \cos y, \text{rot}(F) = (0, 0, 2e^x \sin y)$

8.b)  $\text{div}(F) = yz^3 + 6xy^2 - x^2y, \text{rot}(F) = (-x^2z, xy(3z^2 + 2z), 2y^3 - xz^3)$

8.c)  $\text{div}(F) = 0, \text{rot}(F) = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$

9.a) irrotacional

9.b) rotacional

9.c) irrotacional

10.a) incompressível    10.b) incompressível    10.c) compressível ( $y > 0 \rightarrow$  fonte,  $y < 0 \rightarrow$  poço)

### 8.13 Respostas da Lista 13

1.a)  $48\pi$

1.b)  $\frac{4096\pi^3}{3}$

1.c)  $\pm 8\sqrt{2}\pi$

1.d) 0

1.e) 2

2.a)  $\ln\left(\frac{3}{35}\right)$

2.b)  $\frac{3}{2}$

3.a) 2

3.b)  $e^2$

3.c) -4

3.d) 15

4.a)  $-\frac{3}{7}$

4.b)  $-\frac{1}{5}$

4.c)  $\frac{\pi}{24}(5 - 4\sqrt{2})$

4.d) 0

5.a)  $\frac{1}{3}$

5.b)  $\frac{3a^2}{8}\pi$

6.  $48\pi$

7. 0,5

8.a)  $\frac{23}{2}$

8.b)  $\frac{35}{3}$

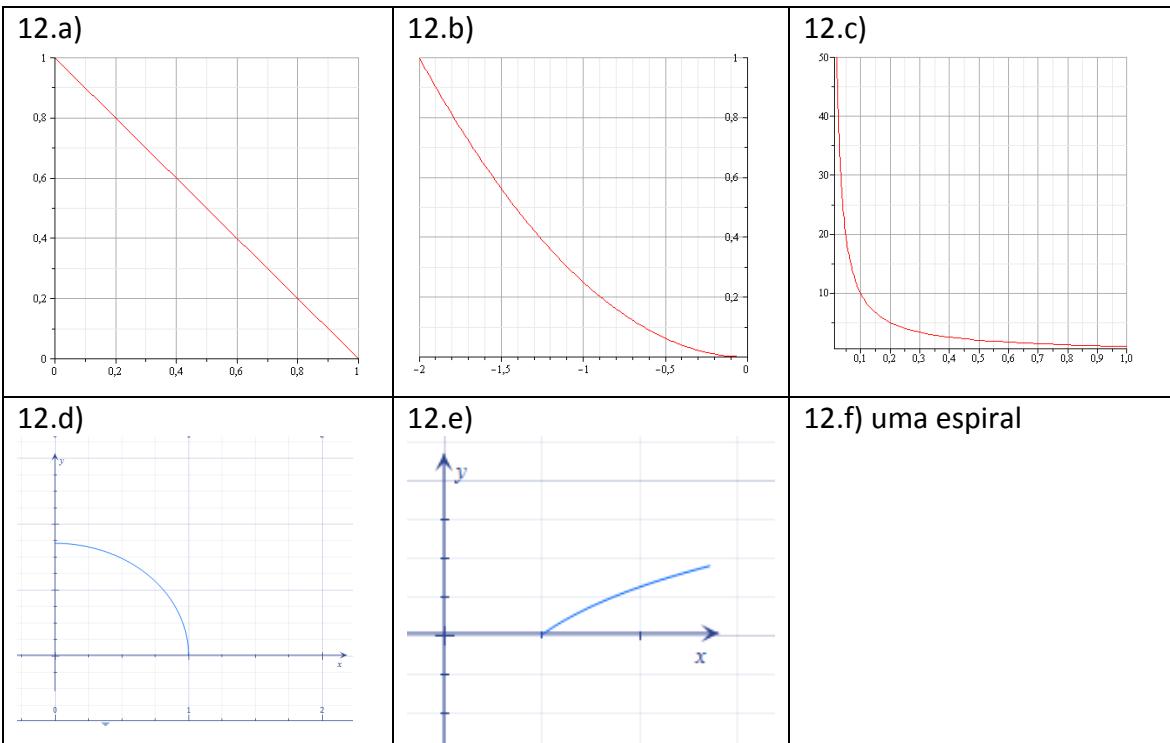
9.a)  $x^2 + 3xy + y^2 + k$

9.b)  $x^3 + 2xy^2 + 2y^3 + k$

9.c)  $x^2 - xy - xz + y^2 + z^2 + k$

10. 0

11.  $\frac{1}{12}$



13.a)  $-\frac{15}{2}$

13.b) 0

13.c)  $\ln\left(\frac{4}{9}\right) - 2$

13.d)  $\frac{\pi}{4}$

13.e)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

13.f)  $2\pi$

13.g)  $\frac{1}{2}$

14.a)  $\frac{243\pi}{4}$

14.b)  $\frac{40}{3}$

14.c)  $\frac{5}{6}$

14.d)  $\frac{137}{10}$

15.a) 0

15.b)  $2\pi$

15.c) 0

16.a)  $\emptyset(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$

16.b)  $\emptyset(x, y) = x^3y + C$

16.c)  $\emptyset(x, y) = x^2e^y + xy - y^2 + C$

16.d)  $\emptyset(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C$

16.e)  $\emptyset(x, y) = xy^2 - \frac{3}{2}x^2 + \operatorname{sen}y + C$

16.f) não conservativo

16.g) não conservativo

16.h) não conservativo

17.a)  $\frac{13}{2}$       17.b) 4      17.c) 0      17.d) 3      17.e) 4      17.f) e

### **8.14 Respostas da Lista 14**

---

1.a) converge para 0    1.b) converge para  $1/7$     1.c) diverge    1.d) converge para  $\pi$   
 1.e) converge para 0    1.f) converge para -1    1.g) diverge    1.h) converge para "e"

2.a) converge para  $2/3$ ; monotonamente crescente, limitada entre  $3/5$  e  $2/3$

2.b) divergente, monotonamente crescente, limite inferior = 2

2.c) não monótona, divergente, limitada entre -1 e 1

2.d) não monótona, divergente, limitada entre -1 e 1

2.e) monotonamente decrescente, limite superior = -1, divergente

2.f) não monótona, limitada entre  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , convergente para 0

3.a)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, \frac{1}{63}, \frac{1}{99}; \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}$ ;  $S_n = \frac{n}{2n+1}$  converge para  $\frac{1}{2}$

3.b)  $\frac{3}{4}, \frac{5}{36}, \frac{7}{144}, \frac{9}{400}, \frac{11}{900}; \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \frac{24}{25}, \frac{35}{36}$ ;  $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$  converge para 1

4.a) converge para  $7/5$     4.b) diverge    4.c) diverge

4.d) converge para  $\frac{1}{4}$     4.e) converge para 1    4.f) converge para  $\frac{1}{4}$

5. todos os valores dos limites são diferentes de zero

5.a) 1/5    5.b)  $\ln(5/12)$     5.c) 3/7    5.d) oscila    5.e) 1

6.a) 5/6    6.b) 23/12    6.c) -3    6.d) 31/21

7. (quando convergem, estão indicados os valores da integral imprópria)

7.a) 3; convergente    7.b) divergente    7.c) 1000000; convergente

7.d) divergente    7.e) 2/e; convergente    7.f) divergente

8. (as séries utilizadas para a comparação estão indicadas)

8.a) converge;  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$     8.b) converge;  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{5^k}$     8.c) converge;  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{7^j}$     8.d) diverge;  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$

9. (as séries utilizadas para a comparação estão indicadas)

9.a) diverge;  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$     9.b) converge;  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$     9.c) diverge;  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$

10. (em todas é possível usar o teste de Leibniz) Convergem a, b e d; c diverge

11.a)  $S_5 = \frac{1249}{3080}$ , estimado por cima com erro menor que  $1/17$

11.b)  $S_4 = \frac{115}{144}$ , estimado por baixo, com erro menor que  $1/25$

11.c)  $S_3 = -\frac{137}{750}$ , estimado por baixo, com erro menor que 1/2500

12. (os resultados dos limites estão indicados)

12.a) 5/4; divergente

12.b) 0; absolutamente convergente

12.c) 1/1,02; absolutamente convergente

12.d) e/2; divergente

12.e) 1/3; absolutamente convergente

12.f) 1/2; absolutamente convergente

$$13.a) \sum_{k=0}^{+\infty} C_k \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2 \cdot 2!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{2 \cdot 4!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 + \dots$$

$$13.b) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-2)^k}{2^{k+1}}$$

$$13.c) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^4}{k!} (x-4)^k$$

$$13.d) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$$

## 9 Teste seus conhecimentos

---

### 9.1 Teste 1

---

1. Conceitue função vetorial de uma variável e dê dois exemplos (um com imagem no  $\mathbb{R}^3$  e outro com imagem no  $\mathbb{R}^4$ ).
2. Esboce o hodógrafo da função vetorial  $\vec{r}(t) = \cos(2t)\vec{i} + \sin(2t)\vec{j} + \left(\frac{t}{2}\right)\vec{k}$  para  $0 \leq t \leq 4\pi$  e represente os vetores velocidade e aceleração para  $t = \frac{3\pi}{2}$  (Tome pontos a cada  $\frac{\pi}{2}$ ).
3. Verifique a continuidade de  $\vec{f}(t)$  para  $t = 0$  e para  $t = 1$ .

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(3t)}{t}\vec{i} + \frac{t(1-e^t)}{\sqrt{t+1}-1}\vec{j} + \frac{t^2-9}{t^2-4t+3}\vec{k}, & t \neq 0, t \neq 1, t \neq 3 \\ 3\vec{i} - 3\vec{k} & t = 0 \\ \sin 3\vec{i} + (1-e)(\sqrt{2}+1)\vec{j} - \vec{k}, & t = 1 \text{ e } t = 3 \end{cases}$$

4. Verifique se a curva  $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}t - \sec t, \sin t + \cos t)$  é suave para  $t \in [0; \pi]$ .
5. Determine a função comprimento de arco para a curva  $\vec{r}(t) = \left(e^{3t} \sin \frac{t}{3}; e^{3t} \cos \frac{t}{3}\right)$  e calcule o comprimento para  $t \in [0; 1]$ .

6. Verifique se a função abaixo é contínua para  $t = 0$ .  $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}\vec{i} + \frac{t^2-4}{t+2}\vec{j}; & t \neq 0; t \neq -2 \\ e^t\vec{i} - \frac{2\sqrt{t+1}}{t^2+1}\vec{j}; & t = 0 \\ |\ln t|\vec{i}; & t = -2 \end{cases}$

7. A trajetória de uma partícula é dada por  $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (t^2 - 4)\vec{j}$ ,  $-2 \leq t \leq 3$ . Determine o vetor velocidade para  $t = 1$  e esboce a trajetória da partícula e o vetor velocidade.

## 9.2 Teste 2

---

1. Analise a existência do limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ . Se existir calcule-o, caso contrário mostre que não existe.
2. Determine o domínio e a imagem da função  $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2-y^2}}$ . Esboce o gráfico do domínio.
3. Esboce todas as famílias de curvas de nível típicas da função  $f(x,y) = xy$
4. Analise a existência do limite. Se existir calcule-o, caso contrário mostre que não existe.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^4 + y^2)^3}$$

5. Na função abaixo, encontre o domínio e faça seu gráfico, a imagem, faça o mapa de contorno e o gráfico da superfície indicando a parte que representa a função:

$$f(x,y) = \sqrt{1 - 2x^2 - y^2}$$

6. Analise a existência do limite. Se existir calcule-o, caso contrário mostre que não existe.
7. Represente graficamente o domínio da função f dada por  $f(x,y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$ .
8. Esboce todas as famílias de curvas de nível típicas da função  $f(x,y) = 2y^2 - x^2$

### 9.3 Teste 3

---

1. Determine a derivada direcional da função  $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + 2xy^2 - 3yz$  no ponto  $P(-1, 0, 3)$ , na direção do vetor  $\vec{u} = (1, -1, 2)$ . Qual seu valor máximo? Qual a relação entre derivada direcional e derivadas parciais?
2. Encontre uma equação para o plano tangente e encontre as equações paramétricas da reta normal ao cone elíptico  $x^2 + 4y^2 = z^2$  no ponto  $P(3, 2, 5)$  pertencente ao cone.
3. Determine a equação do plano tangente e da reta normal à superfície  $z - e^{3y} \sin 3x = 0$ , no ponto  $P(\pi/6, 0, 1)$ .
4. Explique a relação existente entre derivadas parciais e derivadas direcionais.
5. Determine a derivada direcional da função  $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$  no ponto  $P(-1, 2, 4)$ , na direção do vetor  $\vec{u} = (2, 1, -2)$ . Qual seu valor máximo? Dê uma interpretação geométrica para essa derivada.
6. Seja  $\theta$  o ângulo entre os lados iguais de um triângulo isósceles e seja  $x$  o comprimento destes lados. A taxa de crescimento de  $x$  é  $\frac{1}{2}$  metro por hora e a taxa de crescimento de  $\theta$  é  $\frac{\pi}{90}$  radianos por hora. Calcule a taxa de crescimento da área quando  $x=6$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .
7.
  - (a) O que significa dizer que  $f$  é contínua no ponto  $(x_0, y_0)$ ?
  - (b) Escreva as expressões para as derivadas parciais  $f_x(x_0, y_0)$  e  $f_y(x_0, y_0)$  como limites.
  - (c) Qual a interpretação geométrica para  $f_x$  e  $f_y$ ?
  - (d) Defina o vetor gradiente de uma função de duas variáveis e explique o significado geométrico do gradiente.
8. Determine a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície  $e^{x+y+z} + xyz = 3$  com o plano  $y = -1$ , no ponto  $P(-1, -1, 2)$ .
9. A água está fluindo para dentro de um tanque em formato de cilindro circular reto, a uma taxa de  $\frac{4}{5}\pi m^3/min$ . O tanque está aumentando de tal forma que se mantenha cilíndrico, com o raio crescendo a uma taxa de  $0,2cm/min$ . Quão rápido está se elevando a superfície da água quando o raio for  $2m$  e o volume da água no tanque for de  $20\pi m^3$ ?
10.
  - (a) O que significa dizer que  $f$  é diferenciável no ponto  $(x_0, y_0)$ ? Qual a relação entre diferenciabilidade e continuidade?
  - (b) Escreva as expressões para as derivadas parciais  $f_{xx}(x_0, y_0)$  e  $f_{yy}(x_0, y_0)$  como limites.
  - (c) Qual a relação existente entre o vetor gradiente de uma função de duas variáveis em um ponto e seu mapa de contorno? Exemplifique.

11. Discuta a diferenciabilidade da função  $f$  na origem, sendo  $f$  definida por  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy^3}{2x^4+2y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
12. A altura de um cone circular reto está decrescendo a uma taxa de 15cm/min e o raio crescendo a uma taxa de 6cm/min. Determine a taxa de variação do volume no instante em que a altura é 50cm e o raio é 15cm.
13. A temperatura em um ponto  $(x,y)$  de uma placa de metal plana é  $T$  graus Celsius e  $T(x,y) = 4x^2 + 2y^2$ .
- Trace um esboço do mapa de contorno da função  $f$  mostrando as curvas de nível definidas em 12, 8, 4, 1 e 0. Explique o que este mapa representa.
  - Determine a direção na qual a temperatura decresce mais rapidamente em  $Q(0,2)$  e a taxa de variação de  $f$  nesta direção.
14. Um circuito elétrico simples consiste em um resistor  $R$  e uma força eletromotriz  $V$ . Em certo instante,  $V$  é 80 volts e aumente à taxa de 5 volts/min, enquanto  $R$  é 40 ohms e decresce à razão de 2 ohms/min. Use a lei de Ohm,  $I = \frac{V}{R}$ , e uma regra da cadeia, para achar a taxa à qual a corrente  $I$  (em ampéres) varia.

## 9.4 Teste 4

---

1. Uma caixa retangular sem tampa deve ter um volume de 12 metros cúbicos. Encontre as dimensões da caixa que terá área de superfície mínima. (utilize o método de multiplicadores de Lagrange)
2. Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para calcular a área máxima do retângulo que pode ser inscrito em um quarto da circunferência de raio 4 (utilize as medidas no primeiro quadrante).
3. Um contêiner (na forma de um sólido retangular) deve ter um volume de 480 metros cúbicos. A base custará R\$ 5,00 por metro quadrado para ser construída, e os lados e o topo custarão R\$ 3,00 por metro quadrados para serem construídos. Use os multiplicadores de Lagrange para encontrar as dimensões de um contêiner deste volume que tenha custo mínimo.
4. Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com arestas paralelas aos eixos coordenados, inscritos no elipsoide  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ .
5. Encontre o volume da maior caixa retangular fechada no primeiro octante que tenha três faces nos planos coordenados e um vértice no plano  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ , onde  $a > 0, b > 0$  e  $c > 0$ .
6. Considere a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3x - 9y + 2$ :
  - (a) Encontre os pontos críticos desta função, se existirem, classifique-os.
  - (b) Encontre a equação do plano tangente à superfície  $z = f(x, y)$  no ponto  $P(2,1, -1)$ .
7. Determine os extremos absolutos da função  $f$  dada por  $f(x, y) = -xe^y + x^2 + e^y$  sobre o conjunto fechado e limitado  $R$ : região retangular com vértices  $(0,0)$ ,  $(0,2)$ ,  $(3,2)$  e  $(3,0)$ .
8. Determine o volume máximo da caixa retangular com três faces nos planos coordenados e um vértice no primeiro octante sobre o plano  $2x + y + 6z = 6$ .
9. Seja a função  $z = (x^2 + y^2)\sin xz$ , sabendo que  $z$  é uma função de  $x$  e  $y$  determine  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

## 9.5 Teste 5

---

1. Encontre o volume do sólido no primeiro octante, limitado superiormente por  $z = x^2 + 3y^2$ , inferiormente pelo plano  $xy$  e lateralmente pelo cilindro  $y = x^2$  e pelo plano  $y = x$ .
2. Use uma integral dupla para calcular a área da região no interior do círculo  $\rho = 3\cos\theta$  e no exterior da cardioide  $\rho = 1 + \cos\theta$ .
3. Ache a área interna ao círculo  $\rho = \sin\theta$  e externa ao cardióide  $\rho = 1 - \cos\theta$ .
4. Use integração tripla para calcular o volume do sólido limitado superiormente pelo cilindro parabólico  $z = 4 - y^2$  e limitado inferiormente pelo parabolóide elíptico  $z = x^2 + 3y^2$ .
5. Encontre o volume do sólido limitado pelo hiperbolóide  $z^2 = a^2 + x^2 + y^2$  e a parte superior do cone  $z^2 = 2(x^2 + y^2)$ .
6. Utilize uma mudança de variáveis apropriada para calcular a área da elipse  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ .
7. Calcule a área da parte do plano  $x + y + z = a$  que fica no interior do cilindro  $x^2 + y^2 = b^2$ .
8. Calcule  $\iint_R xydxdy$ , utilizando mudança de variáveis, onde R é a região no primeiro octante limitada pelas curvas  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y^2 - 9 = -x^2$ ,  $x^2 = 1 + y^2$  e  $y^2 = x^2 - 4$ .
9. Encontre a área de superfície da parte do cilindro parabólico  $z = y^2$  que fica acima do triângulo com vértices em  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  e  $(1,1)$  no plano  $xy$ .
10. Escreva a integral  $I = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz dy dx$  em coordenadas esféricas e calcule-a.
11. Ao se estabelecer a integral dupla que dará o Volume V sob o paraboloide  $z = x^2 + y^2$  e acima de uma certa região R do plano  $xy$ , chegou-se a seguinte expressão:  
$$\iint_{R'} (x^2 + y^2) dxdy + \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dxdy. Desenhe a região R.$$

12. Encontre o volume do sólido T limitado pela superfície  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2z(x^2 + y^2)$ .
13. Calcule a integral a seguir, utilizando as mudanças de variáveis adequadas:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$$

14. Determine o volume da região delimitada acima pela superfície de equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  e abaixo pela superfície de equação  $z = x^2 + y^2$ .
15. Determine a área do paraboloide  $z = 9 - x^2 - y^2$  que está acima do plano  $z=5$ .
16. Determine o volume  $V$  do sólido  $D$  limitado pelos planos  $z = 6$  e  $z = 2y$  e pelos cilindros  $y = x^2$  e  $y = 2 - x^2$ .
17. Calcule  $\iint_D (x^2 - y^2) \cos(x - y) dx dy$ , onde  $D$  é o domínio dado pelo paralelogramo de vértices  $A(0,0)$ ,  $B(1,1)$ ,  $C(2,0)$  e  $D(3,1)$ .
18. Determine o volume do sólido situado no 1º octante limitado por  $x^2 + z = 1$  e  $y^2 + z = 1$ .
19. Converta as seguintes integrais para coordenadas polares
- a)  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy dx$       b)  $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^0 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$
20. Determine o volume do sólido que está abaixo do parabolóide  $z = 2 + x^2 + y^2$ , acima do plano  $xy$  e dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ . Além disso, o sólido está no 1º octante.
21. Utilize uma mudança de variável adequada para calcular a integral  $\iint_R \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)} dA$  onde  $R$  é a região triangular envolvida pelas retas  $y=0$ ,  $y=x$  e  $x + y = \pi/4$ .
22. Use uma transformação apropriada para calcular a integral  $\int_0^{2/3} \int_y^{2-2y} (x + 2y) e^{y-x} dx dy$  escrevendo-a como uma integral sobre uma região  $G$  no plano  $uv$ .
23. Determine o volume do elipsóide de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  utilizando mudança de variável.

## 9.6 Teste 6

---

1. Determine a área da parte da superfície  $z = xy$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .
2. Utilize integral tripla para calcular o volume do tetraedro limitado pelos planos  $x + 2y + z = 2$ ,  $x = 2y$ ,  $x = 0$  e  $z = 0$ .
3. Utilize integrais triplas para calcular o volume do sólido, no primeiro octante, que é formado pelo cilindro  $y^2 + z^2 = 1$  e pelos planos  $x = 0$  e  $y = x$ .
4. Utilize coordenadas cilíndricas para calcular  $\iiint_E (x^3 + xy^2) dV$ , onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do paraboloide  $z = 1 - x^2 - y^2$ .
5. Utilize coordenadas esféricas para calcular o volume do sólido que está dentro da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , acima do plano  $xy$  e abaixo do cone  $z^2 = x^2 + y^2$ .
6. Utilize mudança de variável adequada para calcular a integral  $\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$ , onde R é a região trapezoidal com vértices  $(1,0)$ ,  $(2,0)$ ,  $(0,2)$  e  $(0,1)$ .
7. Encontre a área de superfície gerada pela rotação do arco  $y = \frac{1}{3}x^3$ , de  $x = 0$  a  $x = 3$  em torno do eixo x.

## 9.7 Teste 7

---

1. Atribua V para uma sentença verdadeira e F para uma falsa. Justifique tanto as sentenças verdadeiras quanto as falsas.

Um fluido escoa com velocidade uniforme  $\vec{v} = -y\vec{i}$ .

- a) ( ) Todas as partículas se movem em linha reta.
  - b) ( ) O campo velocidade representa um escoamento incompressível.
  - c) ( ) O fluxo de  $\vec{v}$  é irrotacional.
2. Integre o campo vetorial  $F(x, y, z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$  ao longo da cúbica enrolada  $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ , de  $(-1, 1, -1)$  até  $(1, 1, 1)$ .
  3. A força  $F(x, y) = \frac{1}{2}(y\vec{i} - x\vec{j})$  é aplicada continuamente em um objeto que percorre uma elipse em posição normal. Calcule o trabalho realizado durante a órbita e a área da elipse. Encontre uma relação entre o trabalho e a área.
  4. Mostre que a integral de linha  $\int_{\Gamma} (4x + 2y)dx + (2x - 2y)dy$  é independente do caminho e calcule a integral, se  $\Gamma$  for qualquer curva seccionalmente suave, de  $(4, -2)$  a  $(-1, 2)$ .
  5. Um fio em forma de um quarto de circunferência  $C: r(t) = a(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j})$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  tem densidade de massa variável  $\rho(x, y) = k(x + y)$ , onde  $k$  é uma constante positiva. Encontre a massa total do fio.
  6. Utilizando o teorema de Green, calcule a integral  $\oint_{\Gamma} 3ydx + 5xdy$ , onde  $\Gamma: (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ .
  7. Esboce a região  $R$  limitada pelas curvas  $xy = 4$  e  $x + y = 5$  e use o corolário do teorema de Green para encontrar a área de  $R$ .

## 10 Respostas dos testes

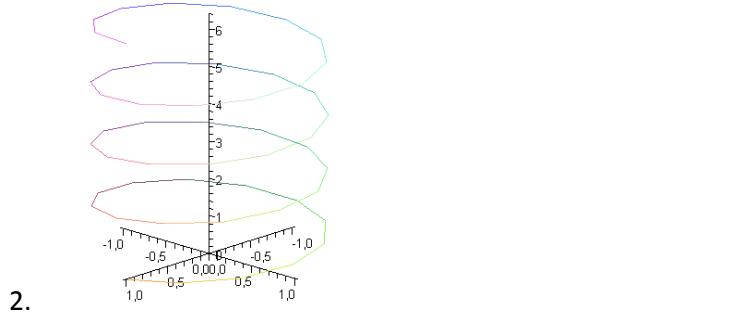
---

### 10.1 Respostas do teste 1

---

- Uma função vetorial de uma variável é uma função do tipo  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^K$ . Essas funções associam a cada valor real do intervalo  $I$ , um vetor  $\vec{f}(t)$  no espaço  $\mathbb{R}^K$ .

Exemplo:  $\vec{f}(t) = (t; 1 - t; t^2)$ ,  $\vec{f}(t) = (\ln(t); 1; t; 2t^3)$

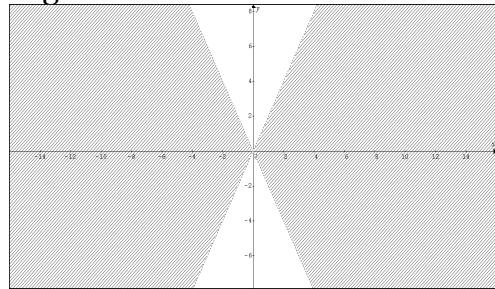


- $f$  é contínua para  $t=0$  e não é contínua para  $t=1$ .
- Para  $t = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$ ,  $\vec{r}'(t) = 0$  logo, a curva não é suave nesse intervalo.
- $S(x) = \frac{\sqrt{82}}{9} (e^{3x} - 1)$ ,  $l = \frac{\sqrt{82}}{9} (e^3 - 1)$
- Contínua
- $v(1) = (2,2)$

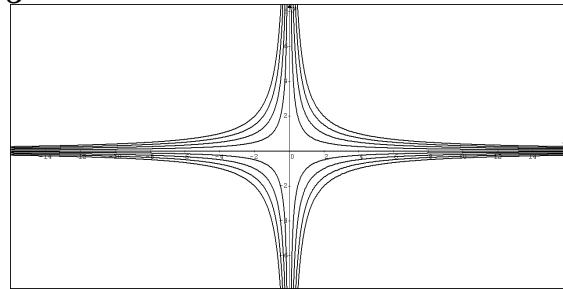
## 10.2 Respostas do teste 2

1.  $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$
2.  $D(f) = \{(x, y) \in R^2 | 4x^2 > y^2\}, Im(f) = ]0, +\infty[$

Região de domínio



3.



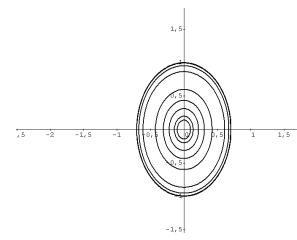
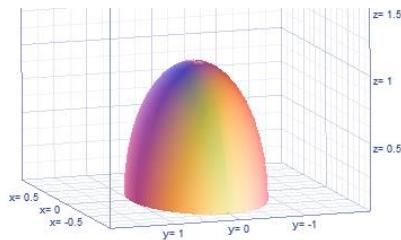
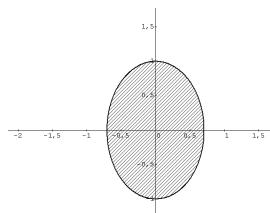
4.  $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

5.  $D(f) = \{(x, y) \in R^2 | 1 - 2x^2 - y^2 \geq 0\}, Im(f) = [0,1]$

Região de domínio

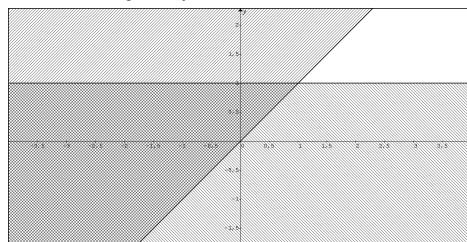
Gráfico da função

Mapa de contorno

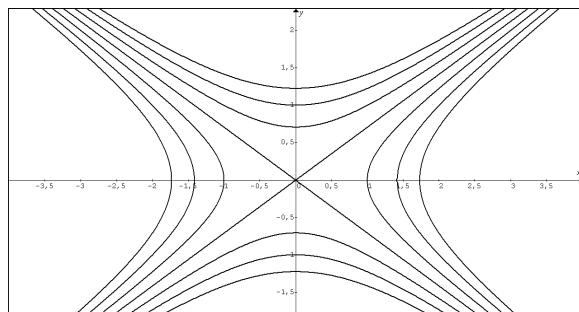


6. Usar definição

7. A intersecção (parte mais forte)



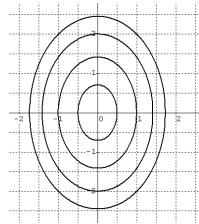
8.



### 10.3 Respostas do teste 3

1.  $D_u f(P) = \frac{8}{\sqrt{6}}, D_{u_{\max}} f(P) = \sqrt{82}$ . As derivadas parciais são as derivadas direcionais calculadas nas direções dos vetores na base canônica ortonormal.
  2.  $\pi: 3x + 8y - 5z = 0, r: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + 8t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$
  3.  $\pi: 3y - z + 1 = 0, r: \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$
  4. Ver resposta da questão 2.
  5.  $D_u f(P) = \frac{-44}{171}, D_{u_{\max}} f(P) = \sqrt{\frac{644}{3249}}$
  6.  $\frac{dA}{dt} \cong 2,57 m^2/h$
  7. a) que possui limite nesse ponto, que é definida nesse ponto e que o valor do limite é igual ao valor da função nesse ponto. b)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}, \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 - \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$ . c)  $f_x(P)$  representa o coeficiente angular da reta que tangencia a curva  $x$  (curva de intersecção da superfície  $z=f(x,y)$  com o plano  $y=y_0$ ) no ponto P, em relação ao eixo ox.  $f_y(P)$  Representa o coeficiente angular da reta que tangencia a curva  $y$  (curva de intersecção da superfície  $z=f(x,y)$  com o plano  $x=x_0$ ) no ponto P, em relação ao eixo oy. d) Vetor que possui suas componentes sendo as derivadas parciais da função f. É um vetor normal à superfície  $z=f(x,y)$  num ponto P.
  8.  $r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 \\ z = 2 + \frac{t}{2} \end{cases}$
  9.  $0,19 m/min$
  10. a) que podemos escrever seu incremento da seguinte forma:  $\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$ , sempre que  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  e  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  quando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$ . Se f é diferenciável no ponto P então f é contínua no mesmo ponto. b)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_x(x_0 + \Delta x, y_0) - f_x(x_0, y_0)}{\Delta x}, \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_y(x_0, y_0 - \Delta y) - f_y(x_0, y_0)}{\Delta y}$ . c) O vetor grad(f) é ortogonal às curvas de nível de f, no ponto dado. Ex:  $f(x, y) = x^2 + y^2$
- 
11. A função não é contínua no ponto dado logo, não é diferenciável.
12.  $1875\pi \text{ cm}^3/\text{min}$

13.

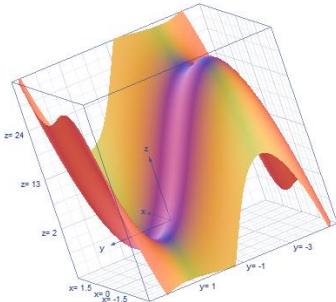


Este mapa representa as faixas de variação da temperatura.  
Exemplo: entre as curvas obtidas para  $z=0$  e  $z=1$  temos a  
primeira faixa de temperatura que varia de  $0^{\circ}\text{C}$  a  $1^{\circ}\text{C}$ . b)  
 $D_{u_{\min}} f(Q) = -8^{\circ}\text{C}/u.m.$  e ocorre na direção do vetor  
gradiente, porém em sentido contrário.

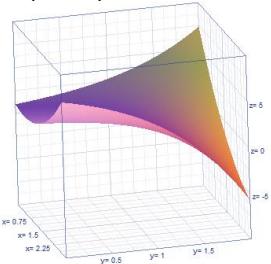
14.  $0,225 \text{ A/s}$

#### 10.4 Respostas do teste 4

1.  $2\sqrt[3]{3}m, 2\sqrt[3]{3}m, e \sqrt[3]{3}m$
2.  $8 u.a.$
3.  $2\sqrt[3]{45}m, 2\sqrt[3]{45}m, e \frac{8}{3}\sqrt[3]{45}m$
4.  $\frac{2\sqrt{3}}{3} u.c, \sqrt{3}u.c, \frac{4\sqrt{3}}{3}u.c$
5.  $\frac{abc}{27} u.v.$
6. a)  $P_1(1, -3)$ ponto de sela,  $P_2(1, 1)$ ponto de mínimo relativo,  
 $P_3(-1, -3)$ ponto de máximo relativo,  $P_4(-1, 1)$ ponto de sela



7.  $P(1, \ln(2))$ ponto de sela,  $P(0, 2)$ ponto de máximo absoluto,  
 $P\left(\frac{e^2}{2}, 2\right)$ ponto de mínimo absoluto



8.  $\frac{2}{3} u.v.$
9.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x\operatorname{sen}(xz)+x^2z\cos(xz)+y^2z\cos(xz)}{1-x^3\cos(xz)-xy^2\cos(xz)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y\operatorname{sen}(xz)}{1-x^3\cos(xz)-xy^2\cos(xz)}$

## 10.5 Respostas do teste 5

---

1.  $\frac{11}{70}uv$

2.  $\pi ua$

3.  $\frac{4-\pi}{4}$

4.  $4\pi uv$

5.  $\frac{2\pi a^3}{3}(\sqrt{2}-1)uv$

6.  $ab\pi ua$

7.  $b^2\pi\sqrt{3} ua$

8.  $\frac{15}{8}$

9.  $\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1) ua$

10.  $\frac{4}{3}\pi(e-1)$

12.  $\frac{2\pi}{15} uv$

13.  $\frac{1}{4}(e-e^{-1})$

14.  $\frac{(8\sqrt{2}-7)\pi}{6} uv$

15.  $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)ua$

16.  $\frac{32}{3}uv$

17.  $4\sin 2 + 5\cos 2 - 1$

18.  $\frac{1}{2}uv$

19.

a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 e^{\rho^2} \rho d\rho d\theta$

b)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^2 \rho \rho d\rho d\theta$

20.  $4\pi uv$

21. U

22.  $\frac{1}{3} + e^{-2}$

23.  $\frac{4\pi}{3}abc uv$

## 10.6 Respostas do teste 6

---

1.  $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$     2.  $\frac{1}{3}$     3.  $\frac{1}{3}$     4.  $\frac{2}{35}$     5.  $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$     6.  $\frac{3\sin 1}{2}$     7.  $\frac{\pi}{9}(82\sqrt{82}-1)$

## 10.7 Respostas do teste 7

---

1-a.(V)

1-b.(V)  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ . Logo, o escoamento é incompressível.

1-c.(F)  $\text{rot } \vec{v} = (0,0,1)$ . Logo, o fluxo não é irrotacional.

2. 10/7

3.  $\omega = -ab\pi$ , Área= $ab\pi$ . Relação: Área=| $\omega$ |

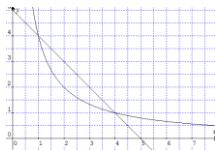
4. -18

5.  $2ka^2 um$

6.  $2\pi$

7.

$A = \left( \frac{15}{2} - 4\ln 4 \right) ua$



## 11 Provas passadas

---

### 11.1 Prova 1 2017/1

---

**Questão 1.** A curvatura de uma curva é calculada por  $k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$ . Considere a curva  $C: \vec{r}(t) = 2t\vec{i} + \frac{4\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}\vec{j} - t^2\vec{k}$ .

- (1,0) Calcule a curvatura da curva no ponto  $(2; \frac{4\sqrt{2}}{3}; -1)$
- (1,0) Escreva a função comprimento de arco para a curva C.

**Questão 2.** A curva abaixo recebe o nome de “Lágrima” e possui equação  $C: r(t) = (2a\cos t - a\sin 2t, b\sin t, bs\int t)$ ,  $ab \neq 0$ .



- (1,0) A curva C é simples ou não simples? Por quê?
- (1,0) A curva é suave no intervalo de  $[0, \pi]$ ? Mostre.

**Questão 3.** (1,0) Mostre que a equação do plano tangente ao elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  pode ser escrita como  $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$ .

**Questão 4.** (1,0) Investigue a continuidade da função  $f(x, y) = \begin{cases} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)y, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  no ponto  $(0, 0)$ .

**Questão 5.** (0,8) A fórmula do tamanho do lote de Wilson, utilizada na economia, afirma que a quantidade mais econômica  $Q$  de bens (rádio, sapatos, vassouras, o que quer que seja) para uma loja pedir é dada pela expressão  $Q(K, M, h) = \sqrt{\frac{2KM}{h}}$ , onde  $K$  é o custo do pedido,  $M$  é o número de itens vendidos por semana e  $h$  é o custo de estocagem semanal para cada item. Determine a expressão para o cálculo do diferencial total da função  $Q$ .

**Questão 6.** Uma placa fina de metal está situada no plano  $xy$ . A temperatura  $T$  (em °C) no ponto  $(x, y)$  é inversamente proporcional ao quadrado de sua distância até à origem.

- (0,5) Expresse  $T$  como função de  $x$  e  $y$ .
- (0,6) Indique o domínio e a imagem da função.
- (0,5) Esboce um conjunto representativo das curvas de nível.
- (0,4) Suponha que a temperatura no ponto  $(1,2)$  seja  $50^\circ$ . Qual é a temperatura no ponto  $(4,3)$ ?

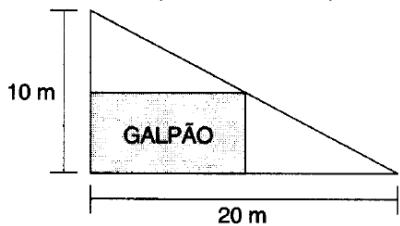
**Questão 7.** (0,6 cada) Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras (V) ou falsas (F). Se forem verdadeiras, explique-as; se forem falsas, reescreva-as de modo a ficarem verdadeiras.

- ( ) Todo espaço linear n-dimensional é euclidiano.
- ( ) No ponto de tangência entre duas superfícies há um plano tangente a ambas cujo vetor normal pode ser a subtração dos gradientes (quando distintos) de cada superfície.

## 11.2 Trabalho 1 2017/1

**Questão 1.** Uma placa metálica circular com um metro de raio está colocada com centro na origem do plano  $xy$  e é aquecida de modo que a temperatura num ponto  $(x, y)$  é dada por  $T(x, y) = 64(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 5)$  graus, onde  $x$  e  $y$  estão em metros. Encontre a maior e a menor temperatura na placa.

**Questão 2.** Um galpão retangular deve ser construído num terreno com a forma de um triângulo, conforme a figura a seguir. Determinar a área máxima possível para o galpão. (Dica: represente o esquema no plano cartesiano). Utilize Lagrange.



**Questão 3.** Projete uma caixa retangular de leite com largura  $x$ , comprimento  $y$  e altura  $z$ , que contenha  $512 \text{ cm}^3$  de leite. Os lados da caixa custam  $3 \text{ centavos/cm}^2$  e o topo e o fundo custam  $5 \text{ centavos/cm}^2$ . Ache as dimensões da caixa que minimizem o custo total. Qual é esse custo? (Não utilize Lagrange).

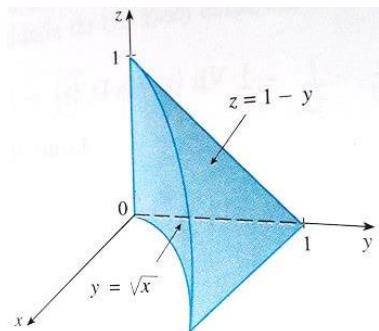
**Questão 4.** A equação  $x + z + (y + z)^2 = 6$  define  $z$  implicitamente como função de  $x$  e de  $y$ , numa vizinhança do ponto  $(5; -1,1)$ . Calcule  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  e  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  no ponto  $(5, -1,1)$ .

**Questão 5.** Dadas as equações  $F(x, y, u, v) = xy^2 + xzu + yv^2 = 3$  e  $G(x, y, u, v) = u^3yz + 2xv = 2$ . Sabendo que  $u = u(x, y, z)$  e  $v = v(x, y, z)$ , determine  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

### 11.3 Prova 2 2017/1

**Questão 1.** A área de uma figura é calculada pela soma das integrais  $\int_0^1 \int_{\frac{\sqrt{3}x}{3}}^{\sqrt{3}x} dy dx + \int_1^{\sqrt{3}} \int_{\frac{\sqrt{3}x}{3}}^{\sqrt{4-x^2}} dy dx$ . Esboce a região que delimita essa área e calcule-a, utilizando uma nova integral composta de apenas um fator.

**Questão 2.** Escreva duas integrais triplas equivalentes para calcular o volume da figura abaixo. Calcule-as.



**Questão 3.** Calcule  $\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dV$ , sabendo que  $W$  é a região delimitada pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  e pelos cones  $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$  e  $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ .

**Questão 4.** Calcule  $\iint_D (2x - y) \tan(y - x) dA$ , sabendo que  $D$  é a região delimitada por  $y = 2x - 1$ ,  $y = 2x - 2$ ,  $y = x + 2$  e  $y = x + 3$

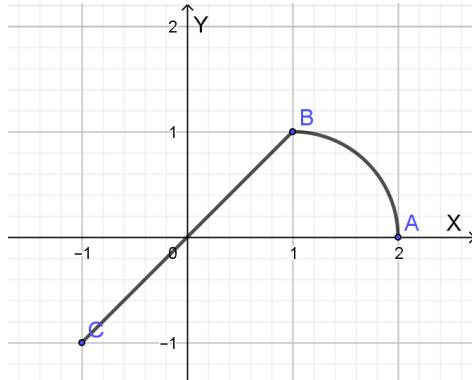
**Questão 5.** Encontre a área da superfície gerada pela rotação em torno do eixo  $y$  da parte da curva  $y = x^2$  entre  $x = 1$  e  $x = 2$ .

**Questão 6.** Calcule a área que fica acima da limaçon  $r = 2 - \sin(t)$  e dentro da cardioide  $r = 1 + \sin(t)$ .

## 11.4 Prova 3 2017/1

---

**Questão 1.** (1,0) Dado o campo  $F(x, y) = (x^2, 2xy)$ , calcule o trabalho necessário para deslocar uma partícula do ponto  $A$  ao ponto  $C$ , passando por  $B$ .



**Questão 2.** (1,0) Calcule a integral  $\int_{\Gamma} (3y - \sqrt{z})dl$  onde  $\Gamma$  é o arco da parábola  $z = y^2$ , no plano  $x = 1$ , entre os pontos  $A(1, 0, 0)$  e  $B(1, 2, 4)$ .

**Questão 3.** (1,0) Utilize o teorema de Green para calcular  $\oint(y + e^x \ln y)dx + \frac{e^x}{y}dy$ , sabendo que a região de integração é limitada pelas curvas  $y = x^2$  e  $y = 8 - x^2$

**Questão 4.** (1,0) Dado o campo  $F(x, y, z) = \frac{2}{x^2+y^2+z^2}(x, y, z)$ , mostre que ele é independente do caminho e calcule  $\int_A^B F dr$  onde  $A(-1, -1, -1)$  e  $B(2, 2, 2)$ .

**Questão 5.** (0,5 cada) Tomando como referência o campo do exercício 4, determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando-as em ambos os casos.

- a)  $F$  é contínuo no  $\mathbb{R}^3$ .
- b)  $\operatorname{div} F(1, 0, 1) = 1$ .
- c) Vetores paralelos terão mesmo módulo.

**Questão 6.** (1,0 cada) Aplique algum teste conveniente para verificar a convergência ou divergência das séries abaixo:

- a)  $\sum_{k=1}^{\infty} 2ke^{-k}$
- b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

**Questão 7.** (1,5) Teste a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2+1}$  para convergência ou divergência e, se possível, estime sua soma pela quinta soma parcial, indicando se aproximação é por cima ou por baixo.

**Questão 8.** (1,0) Encontre a série de Maclaurin para  $f(x) = (1+x)^k$  onde  $k$  é um número real.

## 12 Respostas das Provas passadas

---

### 12.1 Respostas da Prova 1 2017/1

---

1a)  $\frac{\sqrt{2}}{16}$       1b)  $S(x) = x^2 + 2x$

2a) Simples e fechada      2b) Não suave no  $t = \frac{\pi}{2}$

3) Demonstração

4) Não existe limite no  $(0,0)$ , logo não é contínua no  $(0,0)$ .

5)

6a)  $T(x, y) = \frac{k}{x^2+y^2}$       6b)  $D(f) = \{(x, y) \in R^2 / (x, y) \neq (0,0)\}$

$Im(f) = ]0; +\infty[$  se  $k > 0$  e  $]-\infty; 0[$  se  $k < 0$

6c) Conjunto de circunferências concêntricas com centro na origem.

6d)  $T(4,3) = 10^\circ C$

7a) Apenas os que possuem uma métrica definida para ser Euclidiano.

7b) Os gradientes são colineares e como a subtração gera um vetor colinear a ambos, sim pode ser.

### 12.2 Respostas do Trabalho 1 2017/1

---

1) Ponto interior  $P_1\left(-\frac{1}{8}; -\frac{3}{8}\right)$  ponto de mínimo relativo

Fronteira:  $P_2\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  ponto de máximo absoluto,  $P_3\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); P_4(1; 0)$

O ponto  $P_1\left(-\frac{1}{8}; -\frac{3}{8}\right)$  é também mínimo absoluto.

2) Área máxima =  $50m^2$

3)  $x \cong 6,75 cm, y \cong 6,75 cm$  e  $z \cong 11,24 cm$  Custo  $\cong R\$ 13,66$

4)  $\frac{\partial z}{\partial x}(P) = -1 \quad \frac{\partial z}{\partial y}(P) = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(P) = 2$

5)  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{6xu^2y^2+3u^2v^2y-xu^3z}{2x^2-6u^2y^2v}$

### 12.3 Respostas da Prova 2 2017/1

---

1)  $\frac{\pi}{3}ua$

2)  $\frac{1}{12}uv \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} dx dz dy$

3)  $\frac{\pi}{3}(e^{64} - 1)(\sqrt{3} - 1)$

4)  $\frac{3}{2}(\ln(\cos 2) - \ln(\cos 3)) \cong 0,001143$

5)  $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})ua$

6)  $3\sqrt{3} - \pi \cong 2,05 ua$

## **12.4 Respostas da Prova 3 2017/1**

---

- 1)  $\omega = -\frac{8}{3}J$
- 2)  $\frac{1}{6}(17\sqrt{17} - 1)$
- 3)  $-\frac{64}{3}$
- 4)  $\ln(4)$
- 5) a) não é contínuo na origem;      b) verdadeiro; c) Falso (verificar  $(1,0,0)$  e  $(2,0,0)$ )
- 6) a) convergente      b) convergente
- 7) convergente (T. Leibniz)  $|S - S_5| < 0,0069$  por cima
- 8)  $\frac{1}{0!} + \frac{k}{1!}x + \frac{k}{2!}(k-1)x^2 + \frac{k}{3!}(k-1)(k-2)x^3 + \cdots + \frac{k}{k!}(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot (k-n+1)$

## 13 Apêndice

---

### 13.1 Identidades trigonométricas

---

1.  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2.  $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
3.  $\cosec^2 x = 1 + \cot^2 x$
4.  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
5.  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
6.  $\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$
7.  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
8.  $\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$
9.  $\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$

### 13.2 Tabela de derivadas

---

c=constant, u=f(x)

1.  $y = c \Rightarrow y' = 0$
2.  $y = x \Rightarrow y' = 1$
3.  $y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$
4.  $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$
5.  $y = u \cdot v \Rightarrow y' = v \cdot u' + u \cdot v'$
6.  $y = u/v \Rightarrow y' = (v \cdot u' - u \cdot v')/v^2$
7.  $y = u^\alpha \Rightarrow y' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$
8.  $y = a^u \Rightarrow y' = a^u \ln a \cdot u'$
9.  $y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot u'$
10.  $y = \log_a u \Rightarrow y' = (u'/u) \log_a e$
11.  $y = \ln u \Rightarrow y' = (u'/u)$
12.  $y = u^v \Rightarrow y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$
13.  $y = \sin u \Rightarrow y' = \cos u \cdot u'$
14.  $y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u \cdot u'$
15.  $y = \tan u \Rightarrow y' = \sec^2 u \cdot u'$
16.  $y = \cot u \Rightarrow y' = -\cosec^2 u \cdot u'$
17.  $y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \cdot \tan u \cdot u'$
18.  $y = \cosec u \Rightarrow y' = -\cosec u \cdot \cot u \cdot u'$
19.  $y = \operatorname{arc} \sin u \Rightarrow y' = u'/\sqrt{1-u^2}$
20.  $y = \operatorname{arc} \cos u \Rightarrow y' = -u'/\sqrt{1-u^2}$
21.  $y = \operatorname{arc} \tan u \Rightarrow y' = u'/(\sqrt{1+u^2})$
22.  $y = \operatorname{arc} \cot u \Rightarrow y' = -u'/(\sqrt{1+u^2})$
23.  $y = \operatorname{arc} \sec u \Rightarrow y' = u'/|u|\sqrt{u^2-1}$
24.  $y = \operatorname{arc} \cosec u \Rightarrow y' = -u'/|u|\sqrt{u^2-1}$
25.  $y = \operatorname{senh} u \Rightarrow y' = \cosh u \cdot u'$
26.  $y = \cosh u \Rightarrow y' = \operatorname{senh} u \cdot u'$
27.  $y = \tanh u \Rightarrow y' = \operatorname{sech}^2 u \cdot u'$
28.  $y = \coth u \Rightarrow y' = -\operatorname{cosech}^2 u \cdot u'$
29.  $y = \operatorname{sech} u \Rightarrow y' = -\operatorname{sech} u \cdot \tanh u \cdot u'$
30.  $y = \operatorname{cosech} u \Rightarrow y' = -\operatorname{cosech} u \cdot \coth u \cdot \operatorname{tanh} u \cdot u'$
31.  $y = \operatorname{arg} \operatorname{senh} u \Rightarrow y' = u'/\sqrt{u^2+1}$
32.  $y = \operatorname{arg} \cosh u \Rightarrow y' = u'/\sqrt{u^2-1}$
33.  $y = \operatorname{arg} \tanh u \Rightarrow y' = u'/(\sqrt{1-u^2})$
34.  $y = \operatorname{arg} \coth u \Rightarrow y' = u'/(\sqrt{1-u^2})$
35.  $y = \operatorname{arg} \operatorname{sech} u \Rightarrow y' = -u'/u\sqrt{1-u^2}$
36.  $y = \operatorname{arg} \operatorname{cosech} u \Rightarrow y' = -u'/|u|\sqrt{1+u^2}$

### 13.3 Tabela de integrais

---

1.  $\int du = u + C$
2.  $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
3.  $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C$
4.  $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
5.  $\int e^u du = e^u + C$
6.  $\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$
7.  $\int \cos u du = \sin u + C$
8.  $\int \operatorname{tgu} du = \ln|\sec u| + C$
9.  $\int \operatorname{cotgu} du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
10.  $\int \operatorname{cosecu} du = \ln|\operatorname{cosecu} - \operatorname{cotgu}| + C$
11.  $\int \operatorname{secu} du = \ln|\operatorname{secu} + \operatorname{tgu}| + C$
12.  $\int \operatorname{sec}^2 u du = \operatorname{tgu} + C$
13.  $\int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{cotgu} + C$
14.  $\int \operatorname{secu} \cdot \operatorname{tgu} du = \operatorname{secu} + C$
15.  $\int \operatorname{cosecu} \cdot \operatorname{cotgu} du = -\operatorname{cosecu} + C$
16.  $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \frac{u}{a} + C$
17.  $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc tg} \frac{u}{a} + C$
18.  $\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc sec} \left| \frac{u}{a} \right| + C$
19.  $\int \operatorname{sen} u du = \operatorname{cosh} u + C$
20.  $\int \operatorname{cosh} u du = \operatorname{sen} u + C$
21.  $\int \operatorname{sech}^2 u du = \operatorname{tgh} u + C$
22.  $\int \operatorname{cosech}^2 u du = -\operatorname{cotgh} u + C$
23.  $\int \operatorname{sechu} \cdot \operatorname{tgh} u du = -\operatorname{sechu} u + C$
24.  $\int \operatorname{cosechu} \cdot \operatorname{cotgh} u du = -\operatorname{cosechu} u + C$
25.  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$
26.  $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$
27.  $\int \frac{du}{u \sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{u} \right| + C$

### 13.4 Alfabeto Grego

---

A	B	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ
α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ
alfa	beta	gama	delta	épsilon	zeta	eta	teta	iota	Capa	lambda	mi

N	Ξ	O	Π	P	Σ	T	Υ	Φ	X	Ψ	Ω
ν	ξ	ο	π	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω
ni	csi	ômicron	pi	rô	sigma	tau	ípsilon	fi	qui	psi	ômega

### **13.5 Leituras complementares**

---

Links com exemplos de aplicações do cálculo nas Engenharias Elétrica e Química.

- Funções de duas variáveis, derivas e integrais.  
<http://conferencias.utfpr.edu.br/ocs/index.php/sicite/2012/paper/view/718/616>  
  
<http://www.usp.br/massa/pessoal/riveros/tutorial/intro.pdf>
- Fluídos incompressíveis.  
[http://www.hottopos.com/regeq2/sao\\_os\\_liquidos\\_incompressiveis.htm](http://www.hottopos.com/regeq2/sao_os_liquidos_incompressiveis.htm)
- Campos escalares e vetoriais...  
[http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CDMQFjAC&url=http%3A%2F%2Fwww.feng.pucrs.br%2Fdecastro%2Fpdf%2FA\\_C1.pdf&ei=Or7iUpG7EsSrkAfynYHYCw&usg=AFQjCNGd2ldHSaKaD2lOb1JjnVhj1TY8Tw&bvm=bv.59930103,d.eW0](http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CDMQFjAC&url=http%3A%2F%2Fwww.feng.pucrs.br%2Fdecastro%2Fpdf%2FA_C1.pdf&ei=Or7iUpG7EsSrkAfynYHYCw&usg=AFQjCNGd2ldHSaKaD2lOb1JjnVhj1TY8Tw&bvm=bv.59930103,d.eW0)  
  
<http://www.lemma.ufpr.br/wiki/images/0/0b/MecFlu-v3-8cap.pdf>
- Equações de Laplace e Poisson, integrais de linha...  
[http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CDQFjAC&url=http%3A%2F%2Fwww.feis.unesp.br%2FHome%2Fdepartamentos%2Fengenhariaeletrica%2Fpos-graduacao%2F218-dissertacao\\_elson\\_borges.pdf&ei=xMXiUtChGcOnkQeDt4CoBA&usg=AFQjCNH3vkzDaAbpXjwWaibb06EgqqEkQ&bvm=bv.59930103,d.eW0](http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CDQFjAC&url=http%3A%2F%2Fwww.feis.unesp.br%2FHome%2Fdepartamentos%2Fengenhariaeletrica%2Fpos-graduacao%2F218-dissertacao_elson_borges.pdf&ei=xMXiUtChGcOnkQeDt4CoBA&usg=AFQjCNH3vkzDaAbpXjwWaibb06EgqqEkQ&bvm=bv.59930103,d.eW0)

## **14 Bibliografia**

---

- LARSON, HOSTETLER e EDWARDS. Cálculo, v.2. McGraw-Hill. São Paulo, 2006.
- LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica, v.2. Harbra. São Paulo, 1994.
- MUNEM, Mustafa e FOULIS, David. Cálculo, v.2. LTC. Rio de Janeiro, 1982.
- SALAS, HILLE e ETGEN. Cálculo, v.2. LTC. Rio de Janeiro, 2005.
- STEWART, James. Cálculo, v.2. Cengage Learning. São Paulo, 2008.
- BOURCHTEIN, Lioudmila. Apostila de cálculo 3. Pelotas, 2001.
- MENESES, Lisiane. Apostila de cálculo 3. Pelotas, 2011.