



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE DO  
PARANÁ**

***Campus Cornélio Procópio***

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO**

---

**ANDRÉ DE LIMA TAQUE**

## **PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL**

**UMA UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE  
SIGNIFICATIVA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA E  
ESPACIAL**

---

**CORNÉLIO PROCÓPIO – PR  
2020**

ANDRÉ DE LIMA TAQUE

## **PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL**

**UMA UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE  
SIGNIFICATIVA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA E  
ESPACIAL**

**A POTENTIALLY MEANINGFULL TEACHING UNIT AS  
POSSIBILITY FOR TEACHING PLANE AND SPATIAL  
GEOMETRY**

Produção Técnica apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Orientador: Prof. Dr. Rudolph dos Santos Gomes Pereira  
Coorientador: Prof. Dr. Armando Paulo da Silva

Ficha catalográfica elaborada pelo autor, através do  
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UENP

TT175p  
tu Taque, André de Lima  
Uma Unidade de Ensino Potencialmente  
Significativa para o ensino de Geometria Plana e  
Espacial / André de Lima Taque; orientador Rudoplh  
dos Santos Gomes Pereira; co-orientador Armando  
Paulo da Silva - Cornélio Procópio, 2020.  
69 p. :il.

Produção Técnica Educacional (Mestrado  
Profissional em Ensino) - Universidade Estadual do  
Norte do Paraná, Centro de Ciências Humanas e da  
Educação, Programa de Pós-Graduação em Ensino, 2020.

1. Ensino. 2. Aprendizagem Significativa. 3.  
Unidade de Ensino Potencialmente Significativo. 4.  
Geometria Plana e Espacial. 5. Maquete de casa. I.  
Pereira, Rudoplh dos Santos Gomes, orient. II.  
Silva, Armando Paulo da, co-orient. III. Título.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Esboço de ponto, reta e plano.....	26
<b>Figura 2:</b> Primeira parte ilustrativa do teorema.....	27
<b>Figura 3:</b> Segunda parte ilustrativa do teorema.....	28
<b>Figura 4:</b> Construção do plano segundo o teorema 1.....	29
<b>Figura 5:</b> Construção do plano segundo o teorema 2.....	30
<b>Figura 6:</b> Construção do plano segundo o teorema 3.....	31
<b>Figura 7:</b> Exemplo de escala gráfica.....	32
<b>Figura 8:</b> Exemplo de escala gráfica nos mapas.....	33
<b>Figura 9:</b> Planos paralelos entre si ou coincidentes.....	37
<b>Figura 10:</b> Planos paralelos.....	37
<b>Figura 11:</b> Imagem ilustrativa da hipótese de planos perpendiculares.....	38
<b>Figura 12:</b> Exemplo de diedro.....	38
<b>Figura 13:</b> Exemplo de secção do diedro.....	39
<b>Figura 14:</b> Exemplo de secção reta de um diedro.....	39
<b>Figura 15:</b> Exemplo de diedros adjacentes.....	40
<b>Figura 16:</b> Exemplo de diedro opostos pela aresta.....	41
<b>Figura 17:</b> Exemplo de bissetor de um diedro.....	41
<b>Figura 18:</b> Triedro, setor triedral ou ângulo sólido de três arestas.....	42
<b>Figura 19:</b> Elementos do triedro.....	43
<b>Figura 20:</b> Triedro tri-retângulo.....	43
<b>Figura 21:</b> Imagem para demonstração de relações entre faces.....	44
<b>Figura 22:</b> Imagem ilustrativa para demonstração.....	45
<b>Figura 23:</b> Esboço de uma projeção ortogonal de um ponto.....	46
<b>Figura 24:</b> Projeção ortogonal de uma figura sobre o plano.....	47
<b>Figura 25:</b> Projeção ortogonal da reta no plano.....	47
<b>Figura 26:</b> Projeção ortogonal de uma reta não perpendicular ao plano.....	48
<b>Figura 27:</b> Projeção de um segmento de reta sobre um plano.....	48
<b>Figura 28:</b> Prisma convexo.....	52
<b>Figura 29:</b> Prisma ilimitado.....	53
<b>Figura 30:</b> Prisma limitado.....	53
<b>Figura 31:</b> Prisma Hexagonal.....	54
<b>Figura 32:</b> Secção do prisma e sua altura.....	55
<b>Figura 33:</b> Prisma reto, prisma oblíquo, prisma regular.....	56
<b>Figura 34:</b> Paralelepípedos.....	56
<b>Figura 35:</b> Romboedros.....	57

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1:</b> Dez passos para construir mapas conceituais. ....	13
<b>Quadro 2:</b> Quadro sintético dos passos para construção da UEPS. ....	15
<b>Quadro 3:</b> Orientações para o primeiro encontro. ....	17
<b>Quadro 4:</b> Orientações para o segundo e terceiro encontro. ....	20
<b>Quadro 5:</b> Orientações para o quarto, quinto e sexto encontro. ....	34
<b>Quadro 6:</b> Orientações para o sétimo e oitavo encontro. ....	50
<b>Quadro 7:</b> Quadro explicativo para o professor relativo ao nono encontro, ....	59

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AS	Aprendizagem Significativa
DP	Diferenciação Progressiva
PPGEN	Programa de Pós-Graduação em Ensino
RI	Reconciliação integrativa
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa
UENP	Universidade Estadual do Norte do Paraná
UEPS	Unidade de Ensino Potencialmente Significativa

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>6</b>
<b>2 REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>	<b>7</b>
2.1 UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA – UEPS .....	8
2.2 MAPA CONCEITUAL .....	11
<b>3 PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL .....</b>	<b>15</b>
3.1 PRIMEIRO PASSO: PLANEJAMENTO E CRIAÇÃO DE ATIVIDADE INICIAL PELO PROFESSOR .....	16
3.2 SEGUNDO PASSO: USO DE UMA ATIVIDADE PARA IDENTIFICAR OS CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS.....	16
3.3 TERCEIRO PASSO: USO DE UMA ATIVIDADE DE NÍVEL DE COMPLEXIDADE BAIXA E O USO DE ORGANIZADOR PRÉVIO SE NECESSÁRIO.....	19
3.4 QUARTO PASSO: INTRODUÇÃO A CONCEITOS FUNDAMENTAIS LEVANDO EM CONTA A DIFERENCIAÇÃO PROGRESSIVA (DP) .....	34
3.5 QUINTO PASSO: APROFUNDAMENTO DOS CONCEITOS – NÍVEL DE COMPLEXIDADE DA ATIVIDADE É MAIS ALTA QUE A ANTERIOR.....	49
3.6 SEXTO PASSO: RETOMADA DOS CONCEITOS LEVANDO EM CONTA A RECONCILIAÇÃO INTEGRATIVA (RI).....	58
3.7 SÉTIMO PASSO: AVALIAÇÃO DA AS NA UEPS .....	58
3.8 OITAVO PASSO: AVALIAÇÃO DA UEPS .....	60
<b>4 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>62</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>63</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>65</b>
<b>APÊNDICE B .....</b>	<b>68</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O presente material apresenta a Produção Técnica Educacional desenvolvida a partir dos resultados da pesquisa: “Uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa como possibilidade de ensino de Geometria Plana e Espacial”, do Programa de Pós-Graduação em Ensino (PPGEN) – Mestrado Profissional, da Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP).

A pesquisa foi realizada com alunos do 2º ano do Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio e a criação deste Produto emergiu com objetivo de proporcionar atividades para que o processo de aprendizagem do aluno seja significativo na disciplina de Matemática.

Para a elaboração deste Produto Técnico Educacional alguns aspectos estiveram entrelaçados, dentre eles: a definição dos conceitos; acesso aos referenciais teóricos que tratam da aprendizagem do aluno de forma significativa; a definição do formato do Produto Técnico Educacional e a sua implementação em sala de aula.

Neste sentido, essa Unidade de Ensino Potencialmente Significativa foi planejada de modo a contemplar: atividades introdutórias que visam identificar os conhecimentos prévios dos alunos, que na teoria de Ausubel (2003) servem como subsunçores e podem auxiliar na criação de “pontes” entre conhecimentos existentes na estrutura cognitiva dos alunos e os novos conhecimentos, por meio de atividades com níveis de complexidade crescentes de modo a facilitar a promoção da diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, para que se torne possível a aprendizagem significativa.

Esse Produto Técnico Educacional também contempla a indicação de materiais que podem funcionar como organizadores prévios, para quando os conhecimentos prévios necessários ao tratamento dos conceitos está ausente ou não se manifesta nos registros dos alunos.

As atividades propostas neste material encontram-se após o referencial teórico, o qual aborda a Unidade de Ensino Potencialmente Significativa de Moreira (2011b) e o mapa conceitual, proporcionando assim, maior compreensão no desenvolvimento das atividades. Para um aprofundamento em relação a Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel (2003), a Aprendizagem Significativa



Crítica de Moreira (2011b) e seus termos científicos, sugere se a leitura do referencial teórico da dissertação que pode ser encontrada no *link*: <<https://uenp.edu.br/mestrado-ensino-dissertacoes/ppgen-dissertacoes-defendidas-3-turma-2018-2019>>.

Esse trabalho foi composto por quatro atividades. A primeira consiste em construir mapa conceitual para coletar informações a respeito dos conhecimentos prévios dos alunos; a segunda atividade, chamada de “Colocando a mão na massa” e foi subdividida em três fases para contemplar a diferenciação progressiva; a terceira atividade consiste no professor fazer a sistematização dos conceitos apresentados aos alunos de modo a contemplar a reconciliação integrativa, já a quarta e última consiste em desenvolver uma atividade avaliativa, no qual é proposto novamente a construção do mapa conceitual.

Tais atividades foram idealizadas para o ensino de paralelismo e perpendicularismo entre planos, diedro, projeção ortogonal no plano, triedro, pirâmide, paralelepípedo e romboedro. O desenvolvimento das atividades estão atreladas à construção de maquete para que os alunos possam perceber e por em prática todos os conceitos ensinados, almejando que a aprendizagem de tais conceitos possam ser significativa. Em relação a carga horária, definiu-se para o desenvolvimento desta Unidade de Ensino Potencialmente Significativa nove encontros, cada encontro com duração de aproximadamente duas aulas.

Espera-se que esta Unidade de Ensino Potencialmente Significativa possa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de conceitos relacionados a Geometria Plana e Espacial. Destaca-se ainda, que este material é passível de adaptação de acordo com a situação de ensino e suas particularidades.

O próximo tópico é responsável por explorar o referencial teórico para o delineamento deste Produto Técnico Educacional.

## **2 REFERENCIAL TEÓRICO**

A seguir é apresentado o referencial teórico utilizado como alicerce para elaboração dessa Produção Técnica Educacional, apresentando a Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) criada por Moreira (2011b) e em seguida o mapa conceitual.

## 2.1 UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA – UEPS

A Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) é definida por Moreira (2011b) como sequência de atividades, fundamentada por meio da Teoria de Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel. O autor elenca seis tópicos que sustentam a construção da UEPS – objetivo, filosofia, marco teórico, princípios, aspectos sequenciais (passos) e aspectos transversais.

Moreira (2011b) ao idealizar uma UEPS, objetivou desenvolver unidades de ensino potencialmente facilitadoras da AS de tópicos específicos de conhecimento declarativo ou procedimental. Na filosofia, o autor parte da premissa de que não há ensino sem aprendizagem e que o ensino é o meio para chegar a uma aprendizagem que se finda ao acontecer.

Para estabelecer as ideias ou teorias que guiam todo o processo de construção da UEPS, Moreira (2011b) apresenta o marco teórico utilizado por ele, sendo eles: a TAS de Ausubel (1968, 2000); as visões clássica e contemporâneas de Moreira (2000, 2005, 2006), Moreira e Masini (1982, 2006), Masini e Moreira (2008), Valadares e Moreira (2009); a Teoria da Educação de Joseph D. Novak, (1977) e de D. B. Gowin (1981); a Teoria Interacionista Social de Lev Vygotsky (1987); à Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1990); a Teoria dos Modelos Mentais de Philip Johnson-Laird (1983) e a Teoria da Aprendizagem Significativa Crítica escrita por Moreira (2005).

O marco teórico utilizado por Moreira (2011b) ajuda a entender a criação dos princípios que sustentam a UEPS. O primeiro princípio elencado pelo autor aponta o conhecimento prévio como a variável que mais influencia a AS; o segundo princípio leva em consideração os pensamentos, sentimentos e ações integrados no aprendiz; o terceiro princípio está relacionado à pré-disposição do aluno, no qual ele decide se quer aprender significativamente determinado conhecimento; o quarto princípio aponta que os organizadores prévios mostram a relacionalidade entre novos conhecimentos e conhecimentos prévios.

O quinto princípio leva em consideração as situações-problema, estas que dão sentido a novos conhecimentos, devem ser criadas para despertar a intencionalidade do aluno para a aprendizagem significativa. São situações que podem funcionar como organizadores prévios (sexto princípio), e irão dar sentido ao conceito, a novos conhecimentos, o sentido está na relação entre o aluno, a situação

e objeto de representação (MOREIRA, 2002).

No sétimo princípio, Moreira (2012) sinaliza que as situações-problema a serem utilizadas na implementação da UEPS, devem ser propostas em níveis crescentes de complexidade. No oitavo princípio o autor explica que, frente a uma nova situação, o primeiro passo para resolvê-la é construir na memória de trabalho (local onde é construído e manipulado os modelos mentais<sup>1</sup>), um modelo mental funcional (que serve para algo), que é um análogo estrutural dessa situação. No nono princípio, Moreira (2011b) baseado na TAS de Ausubel, ressalta que a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora devem ser levadas em conta na organização do ensino; o décimo princípio diz que na avaliação de uma AS, o professor deve fazê-la de forma que busque suas evidências.

O décimo primeiro princípio é um complemento ao princípio anterior, em que o papel do professor é o de provedor de situações-problema, cuidadosamente selecionadas; de organizador do ensino e mediador da captação de significados<sup>2</sup> por parte do aluno, e avaliador da sequência de atividade aplicada, evidenciando a ocorrência ou não da diferenciação progressiva e reconciliação integrativa de conteúdos e conhecimentos, e o mais importante, a evidência de uma possível AS.

No décimo segundo princípio, Moreira (2011b) sinaliza que a interação social<sup>3</sup> e a linguagem (sistema de signos), defendida na teoria de Lev Vygotsky (1987) são fundamentais para a captação de significados. No décimo terceiro princípio, Moreira (2011b) aponta que um episódio de ensino envolve uma relação triádica entre aluno, docente e materiais educativos, cujo objetivo é, levar o aluno a captar e compartilhar significados que são aceitos no contexto da matéria de ensino. No décimo quarto princípio complementa o princípio anterior, assim, a relação triádica poderá ser quadrática na medida em que o computador não for usado apenas como material educativo.

O décimo quinto princípio é aquele em que a aprendizagem deve ser significativa e crítica, afim de amenizar a ocorrência de uma aprendizagem memorística (MOREIRA, 2011b). No décimo sexto princípio Moreira (2011b) sinaliza

---

<sup>1</sup>Modelo mental é uma representação interna de informações que corresponde analogamente com aquilo que está sendo representado (MOREIRA, 2004, p.3).

<sup>2</sup>Captação de significados – Termo utilizado por Moreira (1997a) ao abordar a teoria de aprendizagem de D. B. Gowin.

<sup>3</sup>Segundo Moreira (1997a), a interação social implica um mínimo de duas pessoas intercambiando significados.

que a Aprendizagem Significativa Crítica é estimulada pela busca de respostas (por meio de questionamento) ao invés da memorização de respostas conhecidas, pelo uso da diversidade de materiais e estratégias instrucionais.

As situações-problema e as estratégias de ensino diferenciadas podem constituir os passos para a construção de uma UEPS. Nessa perspectiva Moreira (2011b) descreve oito etapas (passos), contendo explicações que servem como base para a construção de uma UEPS sintetizadas da seguinte forma:

- I. Escolher um tópico ou conteúdo específico; ter uma visão geral de como será a UEPS (relacionado ao planejamento);
- II. verificar os conhecimentos prévios do aprendiz, criando ou utilizando situações que possibilite ao aprendiz externar-los;
- III. apresentar uma situação-problema com nível introdutório (considerando os conhecimentos prévios), que pode funcionar como organizador prévio, levando a fugir de exercício de aplicação rotineira de algum algoritmo;
- IV. levar em conta a diferenciação progressiva ao apresentar o conhecimento a ser ensinado/aprendido, fazendo uso de exemplos e desenvolver estratégias de ensino;
- V. retomar os aspectos mais gerais estruturantes, contudo o nível de complexidade é mais alto em relação à primeira apresentação;
- VI. retomar as características mais relevantes do conteúdo em questão, agora em uma perspectiva integradora, ou seja, buscando a reconciliação integrativa;
- VII. avaliar a aprendizagem por meio da UEPS. Esta deve ser feita ao longo de sua implementação. Em relação a avaliação esta deverá ser feita de forma somativa individual após o sexto passo na qual deverão ser propostas questões/situações que impliquem compreensão que evidenciem captação de significados e, idealmente, alguma capacidade de transferência;
- VIII. O êxito da UEPS somente será considerada se a avaliação do desempenho dos alunos fornecer evidências de aprendizagem significativa, ou seja, captação de significados,

compreensão, capacidade de explicar, de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema (capacidade de transferência).

Apesar de Moreira (2011b) apresentar oito passos para construir uma UEPS, nada impede que sejam feitas adaptações nas etapas. O importante é que essas possíveis adaptações estejam de acordo com os princípios da UEPS, estabelecidos por Moreira (2011b).

Uma vez abordado os aspectos sequenciais, Moreira (2011b) aborda alguns aspectos transversais. O primeiro diz respeito aos passos da UEPS, os materiais e as estratégias de ensino destes passos devem ser diversificados, privilegiando o questionamento em relação às respostas prontas, estimulando o diálogo e a crítica dos alunos.

O segundo aspecto aponta que existem momentos que os próprios alunos poderão propor situações-problema relativas a algum tópico específico, funcionando para eles como uma tarefa de aprendizagem.

O terceiro aspecto retrata a flexibilidade da UEPS em relação às atividades, apesar de privilegiar as atividades colaborativas, há momentos em que as atividades poderão ser individuais.

Após serem apresentadas as especificidades de uma UEPS, será apresentado o conceito de mapa conceitual, um instrumento que pode ser utilizado como um meio de coletar informações em relação aos conhecimentos prévios dos alunos, e que também pode atuar como um instrumento avaliativo para buscar evidências de possível aprendizagem significativa.

## 2.2 MAPA CONCEITUAL

O mapa conceitual foi criado e desenvolvido em meados da década de 1970 do século passado por Joseph D. Novak e seus colaboradores na Universidade de Cornell nos Estados Unidos. Segundo Moreira (1997b) o mapeamento conceitual é uma técnica muito flexível, e desse modo, pode ser utilizado em diversas situações para diferentes finalidades: instrumento de análise do currículo, técnica didática, recurso de aprendizagem, apresentações em geral e como instrumento de avaliação.

Moreira (1997b) define os mapas conceituais como:

[...] diagramas indicando relações entre conceitos, ou entre palavras que usamos para representar conceitos. [...] Embora normalmente tenham uma organização hierárquica e, muitas vezes, incluam setas, tais diagramas não devem ser confundidos com organogramas ou diagramas de fluxo [...] Mapas conceituais são diagramas de significados, de relações significativas; de hierarquias conceituais, se for o caso. Isso também os diferencia das redes semânticas que não necessariamente se organizam por níveis hierárquicos e não obrigatoriamente incluem apenas conceitos. [...]. Muitas vezes utiliza-se figuras geométricas, elipses, retângulos, círculos -- ao traçar mapas de conceitos, mas tais figuras são, em princípio, irrelevantes [...] (MOREIRA, 1997b, p. 1-2).

A utilização de mapas conceituais pode se dar em diferentes contextos, seja para sintetizar informações, explicar um conjunto de informações, e no contexto educacional, podendo ser utilizado como instrumento para evidenciar a aprendizagem dos alunos de determinado bloco de conteúdos. Moreira (2010) sinaliza que uma das características do uso de mapas conceituais é que sua análise é essencialmente qualitativa.

No que diz respeito ao mapa conceitual como instrumento na avaliação da Aprendizagem Significativa (AS), este permite obter informações em relação ao tipo de estrutura que o aluno vê para um dado conjunto de conceitos. Segundo Moreira (2006), por meio dos mapas conceituais, a principal ideia é avaliar o que o aluno sabe em termos conceituais, permitindo perceber como o aluno estrutura, hierarquiza, diferencia, relaciona, discrimina e integra conceitos de um determinado conteúdo.

Moreira (2011a) explica que não se deve esperar que o aluno apresente um mapa conceitual correto, por ser uma construção individual e idiossincrática, o importante não é se o mapa está correto ou não, mas se o mapa apresenta evidências de uma AS do conceito por parte do aluno. É importante que na construção de um mapa conceitual, os conceitos não podem ser apenas listados, mas devem ser relacionados entre si por conectores que geralmente são verbos.

Moreira (2010) corrobora dizendo que os mapas conceituais não são auto explicativos, portanto, devem ser sempre explicados pelo autor que ao fazê-lo, explicita e externaliza o seu entendimento em relação a determinados assuntos, sendo este o maior valor de um mapa conceitual. Alguns modelos de mapas conceituais podem ser encontrados em Moreira (2010).

Na literatura, Moreira (2010) apresenta alguns passos para a

construção de um mapa conceitual. O Quadro 1 exibe os dez passos elencados por Moreira.

**Quadro 1:** Dez passos para construir mapas conceituais.

**Como construir um mapa conceitual**

1. Identifique os conceitos-chave do conteúdo que vai mapear e ponha-o sem uma lista. Limite entre 6 e 10 números de conceitos.
2. Ordene os conceitos, colocando o(s) mais geral(is), mais inclusivo(s), no topo do mapa e, gradualmente, vá agregando os demais até contemplar o diagrama de acordo com o princípio da diferenciação progressiva. Algumas vezes é difícil identificar os conceitos mais gerais, mais inclusivos; neste caso é útil analisar o contexto no qual os conceitos estão sendo considerados ou ter uma ideia da situação em que tais conceitos devem ser ordenados.
3. Se o mapa se refere, por exemplo, a um parágrafo de um texto, o número de conceitos fica limitado pelo próprio parágrafo. Se o mapa incorpora também o seu conhecimento sobre o mesmo assunto, além do contido no texto, conceitos mais específicos podem ser incluídos no mapa.
4. Conecte os conceitos com linhas e rotule essas linhas com uma ou mais palavras-chaves que expliquem a relação entre os conceitos. Os conceitos e as palavras-chave devem sugerir uma proposição que expresse o significado da relação.
5. Setas podem ser usadas quando se quer dar um sentido a uma relação. No entanto, o uso de muitas setas acabam por transformar o mapa conceitual em um diagrama de fluxo.
6. Evite palavras que apenas indiquem relações triviais entre os conceitos. Busque relações horizontais cruzadas.
7. Exemplos podem ser agregados ao mapa, embaixo dos conceitos correspondentes. Em geral, os exemplos ficam na parte inferior do mapa.
8. Geralmente, o primeiro intento de mapa tem simetria pobre e alguns conceitos ou grupos de conceitos acabam mal situados em relação a

- outros que estão mais relacionados. Nesse caso, é útil reconstruir o mapa.
9. Talvez neste ponto você já comece a imaginar outras maneiras de fazer o mapa, outros modos de hierarquizar os conceitos. Lembre-se que não há um único modo de traçar um mapa conceitual. À medida que muda sua compreensão sobre as relações entre os conceitos, ou à medida que você aprende, seu mapa também muda. Um mapa conceitual é um instrumento dinâmico, refletindo a compreensão de quem o faz no momento em que o faz.
  10. Compartilhe seu mapa com os colegas e examine os mapas deles. Pergunte o que significam as relações, questione a localização de certos conceitos, a inclusão de alguns que não lhe parecem importantes, a omissão de outros que você julga fundamentais. O mapa conceitual é um bom instrumento para compartilhar, trocar e “negociar” significados.

**Fonte:** Moreira ( 2010, p. 30-33).

Em relação ao ensino da construção de mapas conceituais, o professor pode optar por algumas estratégias para o seu ensino em sala de aula. Uma das opções consiste em construir um tutorial ou manual ensinando os passos para a sua construção. Outra opção consiste em utilizar vídeo-aula disponível na *internet*, como por exemplo, o vídeo disponível no *link*: <<https://www.youtube.com/watch?v=RThwilejKw0>> acesso: 5 de set. 2019.

De acordo com Moreira (2010), em primeiro lugar é preciso fazer os alunos captarem o significado de mapa conceitual, e para que isso ocorra, o professor pode fazer uso de dois ou três exemplos e construir com os alunos, criando um mapa conceitual colaborativo de um determinado tema escolhido pelo professor ou alunos. Este autor ainda explica que o professor deve ter uma presença marcante, e que seu papel é de mediador na negociação e da construção dos mapas conceituais dos alunos.

A construção do mapa conceitual pode ser feita de maneira manual, com uso de folha de sulfite A4, lápis e borracha, ou ainda, por uso de *software*, específicos, como por exemplo, o *Cmap Tools*, disponível para *download* no *link* <<http://cmap.ihmc.us/download/>>.

O mapa conceitual como instrumento de avaliação na AS, apesar de



ter a função de verificar ou avaliar uma possível AS, não é capaz de gerá-la. Neste sentido, é importante construir estratégias que priorizem uma AS.

### 3 PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL

A Produção Técnica Educacional abordada nesse trabalho é parte integrante da Dissertação de Mestrado Intitulada: UMA UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA COMO POSSIBILIDADE DE ENSINO DE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL, disponível em < <https://uenp.edu.br/mestrado-ensino-dissertacoes/ppgen-dissertacoes-defendidas-3-turma-2018-2019>>. Para maiores informações, entre em contato com o autor: André de Lima Taque pelo e-mail: andretaqui@gmail.com.

Esta Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) para o ensino de Geometria Plana e Espacial, conta com nove encontros de 2 aulas cada, composta por atividades que envolvem a construção de maquete de casa. A UEPS está estruturada conforme o Quadro 2.

**Quadro 2:** Quadro sintético dos passos para construção da UEPS.

Passo 1	Planejamento e criação de atividade inicial;
Passo 2	Uso de atividade inicial – identificação dos conhecimentos prévios
Passo 3	Uso de atividade introdutória com nível de complexidade baixa;
Passo 4	Introdução a conceitos fundamentais levando em conta a DP
Passo 5	Aprofundamento dos conceitos – nível de complexidade da atividade mais alta que a anterior
Passo 6	Retomada dos conceitos levando em conta a reconciliação integrativa (RI)
Passo 7	Avaliação da AS na UEPS
Passo 8	Avaliação da UEPS

**Fonte:** O autor (2020).

Na sequência apresenta-se a descrição de cada passo apresentado no Quadro 2.

### 3.1 PRIMEIRO PASSO: PLANEJAMENTO E CRIAÇÃO DE ATIVIDADE INICIAL PELO PROFESSOR

O primeiro passo a ser executado pelo professor nessa UEPS consiste em fazer o planejamento para implementá-la. O Planejamento envolve a distribuição do tempo para cada atividade, a escolha dos materiais a serem usados, conhecer seu público alvo, e principalmente, a escolha de um tópico ou conceito específico, assim o planejamento proporciona ao professor uma visão geral da UEPS. É neste sentido que propomos trabalhar conceitos de Geometria Plana e Geometria Espacial e outros que possam emergir ao desenvolver atividades relacionadas a construção de maquete desta UEPS.

Para contemplar este passo, dentro da Geometria Plana e Geometria Espacial apresentamos um material para o ensino de:

- Paralelismo e perpendicularismo entre planos;
- Diedros;
- Projeção ortogonal no plano;
- Triedros;
- Prismas;
- Paralelepípedos e romboedros.

O segundo passo consiste em fazer uso de uma atividade para identificar quais são os conhecimentos prévios dos alunos.

### 3.2 SEGUNDO PASSO: USO DE UMA ATIVIDADE PARA IDENTIFICAR OS CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS

O segundo passo consiste em colocar o planejamento e a atividade inicial em prática. Ao adentrar em sala de aula o professor deverá apresentar e explicar o modo que ocorrerá a aula com o uso da UEPS.

Depois da apresentação inicial, o professor deve apresentar aos alunos a atividade inicial da UEPS, cujo o objetivo é identificar os conhecimentos prévios dos mesmos em relação aos conceitos de Geometria Plana e Geometria Espacial, atividade previamente construída, para que os alunos possam externá-los.

A atividade inicial deve possibilitar aos alunos externar seus conhecimentos prévios de forma subjetiva, nada que seja muito específico, e que

não direcione o aluno a uma resposta esperada pelo professor, então é neste sentido que apresenta-se a atividade para o primeiro encontro.

**Quadro 3:** Orientações para o primeiro encontro.

<b>Primeiro encontro</b>	
<b>Atividade</b>	Construção de um mapa conceitual
<b>Objetivo</b>	Identificar os conhecimentos prévios dos alunos
<b>Tempo previsto</b>	2 aulas
<b>Tema para construção do mapa</b>	Geometria Plana e Espacial
<b>Material a ser entregue aos alunos</b>	Folha impressa com a atividade (tutorial de como construir um mapa conceitual), folha de sulfite em branco, lápis e borracha
<b>Forma de realização</b>	Individual
<b>Instruções para o professor</b>	<p>1º Entregar aos alunos a atividade inicial impressa;</p> <p>2º Ler com os alunos o tutorial de como construir um mapa conceitual;</p> <p>3º De acordo com Moreira (2010), em primeiro lugar é preciso fazer os alunos captarem o significado de mapa conceitual e para que isso aconteça o professor deverá fazer uso de um exemplo e construir com os alunos, criando um mapa conceitual colaborativo de um determinado tema, sendo que este fica a critério do professor ou alunos escolherem;</p> <p>4º Observação: caso os alunos apresentem dificuldades em construir o mapa conceitual, o professor poderá construir um segundo mapa conceitual, para melhorar a familiarização;</p> <p>5º Após a familiarização dos alunos com a construção, solicitar aos alunos para construírem</p>

	<p>um mapa conceitual com o tema Geometria Plana e Espacial em uma folha de sulfite em branco;</p> <p>6º Estipular tempo para que os alunos construam o mapa conceitual, sugerimos uma aula;</p> <p>7º O professor deve orientar os alunos para não esquecerem dos conectivos entre os conceitos, e ao finalizar o mapa conceitual, não deixar de explicar em forma de texto o seu mapa conceitual;</p> <p>8º Recolher os mapas conceituais construídos pelos alunos após o tempo estipulado pelo professor.</p> <p>9º Dez minutos antes de terminar a aula o professor deverá comentar com os alunos a respeito da próxima aula e atividade a qual envolve o início da construção da maquete, solicitando aos alunos que tragam um material para fazer a base da maquete, de preferência um material que seja rígido, como por exemplo, papelão, placa de isopor ou papel paraná. No caso de utilizar papelão, os alunos terão que fazer as devidas emendas para que se tenha uma área maior para desenvolver a atividade. A placa de isopor e o papel paraná possuem um tamanho bom para se utilizar na atividade.</p>
<p><b>Sugestão para o professor</b></p>	<p>O professor pode optar por trabalhar com os alunos o uso de um <i>software</i> específico para construção de mapas conceituais, chamado de <i>Cmap Tools</i>, disponível para <i>download</i> em <a href="http://cmap.ihmc.us/download/">http://cmap.ihmc.us/download/</a>, ou na versão <i>on-line</i> , pelo <i>link</i> <a href="https://cmapcloud.ihmc.us/">https://cmapcloud.ihmc.us/</a>. No entanto é necessário levar os alunos ao</p>

	laboratório de informática para que cada aluno tenha acesso individual aos computadores para desenvolver a atividade pelo <i>software</i> .
--	---

**Fonte:** O autor (2020).

O Quadro 3, apresentou as orientações para a primeira atividade a ser desenvolvida em sala de aula, tratando-se da construção do mapa conceitual. A atividade inicial envolvendo a construção do mapa conceitual encontra-se no Apêndice A, para que o professor possa imprimir e utilizá-la em sala de aula.

Após o desenvolvimento da atividade inicial, e o professor com as atividades desenvolvidas pelos alunos em mãos, o mesmo poderá analisar os mapas conceituais identificando os conhecimentos prévios que cada aluno possui a respeito da Geometria Plana e Espacial.

O passo para coletar os conhecimentos prévios dos alunos se faz importante para a construção dos próximos passos, os quais envolvem propor atividade de nível introdutório e ir crescendo para níveis de maior complexidades.

### 3.3 TERCEIRO PASSO: USO DE UMA ATIVIDADE DE NÍVEL DE COMPLEXIDADE BAIXA E O USO DE ORGANIZADOR PRÉVIO SE NECESSÁRIO

O terceiro passo consiste em desenvolver uma segunda atividade de nível de complexidade baixa, levando em consideração os conhecimentos prévios apresentado nos mapas conceituais construídos pelos alunos.

Ao analisar os mapas conceituais dos alunos, espera-se que os mesmos apresentem alguns subsunçores como, área das figuras planas, perímetro, quais são as figuras geométricas planas, quais são as especificidades de cada figura plana, quais os conceitos de retas paralelas, concorrentes, perpendiculares, conceito de figura plana, conceito de semelhanças de triângulos, classificação de ângulos, conceito de entes geométricos, regra de três simples, razão e proporção, conceito de escala, conversão de unidades de medidas, teorema de Pitágoras.

Para contemplar o terceiro passo da UEPS será proposta uma atividade chamada **“Colocando a mão na massa”**. Esta atividade está subdividida em três fases: construção do esboço da planta baixa, construção e edificação das paredes, construção da cobertura da casa e seu madeiramento. O Quadro 4 detalha a segunda atividade a ser desenvolvida pelos alunos do terceiro passo da UEPS.

**Quadro 4:** Orientações para o segundo e terceiro encontro.

<b>Segundo e terceiro encontro</b>	
<b>Atividade de nível de complexidade baixa</b>	“Colocando a mão na massa” – Fase 1 – construindo o esboço da planta baixa da maquete.
<b>Objetivos</b>	Trabalhar a os conhecimentos prévios dos alunos em relação a Geometria Plana; Desenvolver uma atividade de nível de complexidade baixa .
<b>Tempo previsto</b>	4 aulas.
<b>Conceitos envolvidos/ subsunçores para atividade</b>	Paralelismos entre retas, perpencularismo entre retas, área, perímetro, regra de três simples, razão e proporção, construção geométrica, reta, segmento de reta, semi reta, figuras geométricas planas, conversão de unidades de medidas, teorema de Pitágoras.
<b>Material para os alunos</b>	Folha impressa com a atividade.
<b>Materiais que poderão ser utilizados pelos alunos</b>	Papelão, placa de isopor, papel paraná, lápis ou lapiseira, borracha, régua, compasso, caneta .
<b>Forma de realização</b>	Em grupo – A formação dos grupos e sua quantidade dependerá da quantidade de alunos em sala, a sugestão é que cada grupo tenha no mínimo três integrantes.
<b>Instruções para o professor</b>	1º Inicialmente o professor deve definir o número de integrantes em cada grupo e subdividí-los; 2º Entregar aos alunos a atividade impressa e ler com eles as instruções gerais da atividade, assim como as instruções para a primeira fase da atividade; a segunda e terceira fase devem ser trabalhadas no quarto e quinto passo das UEPS; 3º Na TAS o professor tem o papel de facilitador

	<p>da AS, no desenvolver da UEPS, este ganha mais alguns papéis, como o de provedor de atividades, mediador da captação de significado por parte dos alunos e organizador do ensino (MOREIRA, 2011b). Neste sentido o professor deverá questionar os alunos a respeito do conceito de planta baixa, se já tiveram contato com alguma, quais seriam os seus componentes, se são construídas sem seguir alguma norma, direcionando questionamentos que estimulem os alunos a chegar ao uso e conceito de escala. Caso algum ou alguns alunos apresentem dificuldades no conceito de escala e como construí-la o professor deverá apresentar uma aula envolvendo o conceito de escala. Na sequência da atividade apresentamos um material que poderá ser utilizado como organizador prévio caso os alunos apresentem alguma dificuldade relacionada a aprendizagem do conceito de escala e conceitos relacionados a entes geométricos;</p> <p>4º Minutos antes de finalizar a aula, solicitar aos alunos de forma individual que pesquisem a respeito dos conceitos de noções primitivas, axiomas, definição, postulado, teorema, proposição, lema, corolário, hipótese, demonstração e tese; esta pesquisa tem o papel de organizador prévio para o ensino dos conceitos da próxima fase;</p> <p>5º Além disso, solicitar aos grupos que tragam material para iniciar a fase dois da atividade “ Colocando a mão na massa”. A segunda fase</p>
--	--

	<p>está relacionada a construção e edificação das paredes, por isso o material poderá ser papelão, isopor, papel paraná, materiais que de certa forma são mais fáceis de cortar e manusear, além disso solitar ferramentas para cortar estes materiais e cola para fixar as paredes no esboço da planta baixa.</p>
<p><b>Como relacionar a elaboração do esboço da planta baixa com os conceitos da Geometria Plana?</b></p>	<p>Por meio de questionamentos escritos ou até mesmo por questionamento oral aos alunos; aos passos que os alunos construírem o esboço da planta baixa o professor deverá questionar o que é um ponto, o que é uma reta, o que é um plano. Questionar os alunos se conseguem identificar no momento da construção esses elementos, além disso o professor deverá questionar o que são retas paralelas, retas concorrentes, retas concorrentes perpendiculares e em que momentos da construção do esboço da planta baixa é possível encontrar esses conceitos. Uma questão interessante a ser trabalhada é como provar a perpendicularidade entre duas retas no esboço da planta baixa. Deve se questionar também a relação da escala na construção e qual o conceito envolvido ao utilizar escala, qual a sua função e importância. Dentro da função da escala quais são os conceitos envolvidos (razão e proporção). Questionar qual a área da casa total, o de cada quarto, propor uma situação-problema em qual envolve a revestimento do chão da casa com piso com o objetivo de estimar qual a quantidade mínima de piso de um determinado tamanho deverá ser comprado. São</p>



	<p>por meio desses questionamentos que o professor poderá promover a relação da construção do esboço da planta baixa com os conceitos envolvidos aos construí-la. Além disso o professor poderá captar por meio do questionamento quais são as dificuldades dos alunos em relação aos conceitos envolvidos e promover uma possível reconciliação integradora, por meio do organizador prévio apresentado após atividade 2.</p>
--	--

**Fonte:** O autor (2020).

Após a abordagem do Quadro 3 com as explicações para o segundo e terceiro encontro, nos próximos parágrafos, será efetuada uma discussão a respeito dos organizadores prévios e sua função na ausência de subsunçores na estrutura cognitiva dos alunos.

O professor deve analisar os mapas conceituais construídos pelos alunos e verificar se os alunos apresentam subsunçores adequados para introduzir conceitos da Geometria Plana até chegar a Geometria Espacial. Os conceitos relacionados a Geometria Plana são subsunçores para a aprendizagem de conceitos da Geometria Espacial.

O professor, ao notar a ausência dos subsunçores citados anteriormente, deverá desenvolver uma atividade que possa atuar como organizador prévio a fim de tornar os subsunçores adequados na estrutura cognitiva dos alunos.

Uma atividade caracterizada como organizador prévio pode ser desenvolvida da seguinte forma: O professor poderá solicitar aos alunos uma pesquisa a respeito do tema, apresentar uma aula como uso de vídeo aula, utilizar *data show* para apresentar os conceitos envolvidos e apresentando algumas figuras ilustrativas. Essas são algumas das opções que o professor pode recorrer na ausência de subsunçores pelos alunos, mas nada impede que o professor opte pela utilização de outras formas de organizadores prévios.

No segundo parágrafo do terceiro passo foram citados alguns dos subsunçores esperados que os alunos apresentem, e baseado nesses subsunçores apresenta-se a atividade do terceiro passo a ser desenvolvida pelos alunos. Esta atividade trabalha basicamente os conhecimentos prévios dos alunos em relação a

Geometria Plana, caracterizada como uma atividade de nível complexidade baixa, que de certa forma, é um preparativo para a introdução do conhecimento (declarativo ou procedimental) que se pretende ensinar (MOREIRA, 2011b).

Na sequência apresenta-se a atividade “Colocando a mão na massa” – Construindo a maquete, contendo as instruções gerais e a primeira fase – esboço da planta baixa – a ser desenvolvida pelos alunos.

### **ATIVIDADE “COLOCANDO A MÃO NA MASSA” – INSTRUÇÕES GERAIS E PRIMEIRA FASE – CONSTRUÇÃO DO ESBOÇO DA PLANTA BAIXA**

Chegou o momento de colocar a “mão na massa”. O grupo deverá construir uma maquete de casa em um terreno de medida 10 metros por 20 metros. A área de construção da casa é de no mínimo 70m<sup>2</sup> e deve possuir condições mínimas para a sobrevivência do ser humano. A casa a ser construída deverá ser do tipo térreo, ter uma cobertura de telhado no qual o número de caída de água seja menor ou igual a quatro. Construa o madeiramento do telhado que sustenta a cobertura e deixe-a móvel para que se possa ver o madeiramento do telhado. A imaginação, a criação e o uso de materiais para construir a maquete são por conta de vocês. Tudo o que será desenvolvido pelo grupo deverá ser sistematizado em um relatório final contendo:

- fotos;
- passos;
- pensamentos do grupo em cada etapa da construção;
- dificuldades;
- facilidades;
- cálculos utilizados;
- definições dos conceitos matemáticos utilizados;
- ferramentas utilizadas;
- materiais utilizados.

O relatório deverá ser redigido e impresso para ser entregue ao professor no final da apresentação da maquete pelo grupo.

A **atividade da primeira fase** da construção da maquete consiste em:

- 1º Escolher um material para servir de base para a construção

- do esboço da planta baixa;
- 2º Criar o esboço da planta baixa ou utilizar alguma como modelo, a escolha ou criação fica por conta de cada grupo desde que atenda as instruções iniciais;
  - 3º Após a escolha do esboço de planta baixa, construa-a no material da base escolhida, utilizando as ferramentas solicitadas (compasso, régua, lápis ou lapiseira, borracha e caneta).

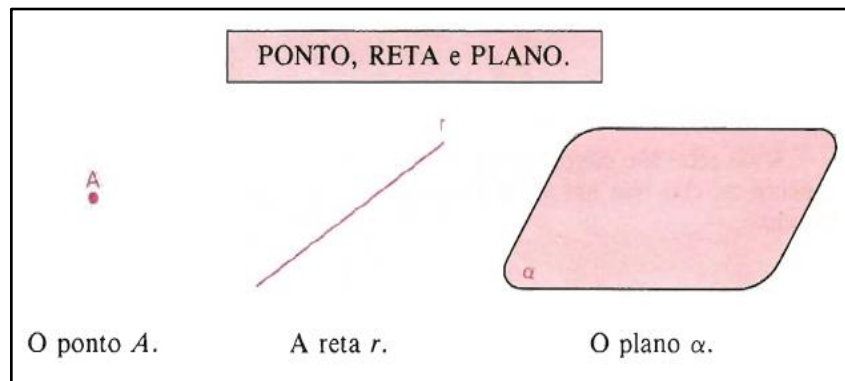
### **MATERIAL QUE PODERÁ ATUAR COMO ORGANIZADOR PRÉVIO PARA A REVISÃO DOS CONCEITOS ENVOLVIDOS NO ESBOÇO DA PLANTA BAIXA DA MAQUETE**

Este material apresentado poderá ser utilizado como organizador prévio caso os alunos apresentem algumas dificuldades aos conceitos envolvidos ao construir o esboço da planta baixa. Nem todos os conceitos estão apresentados neste organizador prévio, portanto o professor fica livre para fazer as devidas adaptações de acordo com suas necessidades, e em relação a outros conceitos que poderão emergir ao desenvolver a atividade do terceiro passo – fase 1.

#### **Entes geométricos**

Dolce e Pompeo (1993) dizem que as noções geométricas são estabelecidas por meio de definições. Em particular, as primeiras definições, os conceitos primitivos da Geometria, são dotadas sem definição. Segundo estes autores os entes como ponto, reta e plano, podem ser adotados sem definir os conceitos, no qual temos um conhecimento intuitivo decorrente da experiência e da observação.

**Figura 1:** Esboço de ponto, reta e plano.



**Fonte:** Dolce e Pompeo (1993, p.1).

**Postulado de existência descrito por Dolce e Pompeo (1993) diz que:**

- a) Existe reta e em uma reta, bem como fora dela, há infinitos pontos;
- b) Existe plano e em um plano, bem como fora dele, há infinitos pontos.

**Postulado da determinação de acordo com os autores citados anteriormente consiste em:**

- a) Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.
- b) Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

### **Postulado da inclusão**

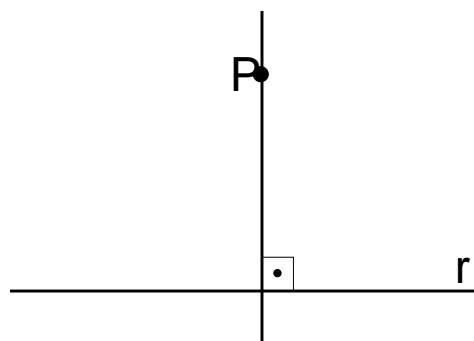
Dolce e Pompeo (1993) dizem que se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então eles estão contidos no plano. Na linguagem matemática simbólica  $(A \neq B, r = AB, A \in \alpha, B \in \alpha) \Rightarrow r \subset \alpha$ .

## Retas concorrentes

Segundo Dolce e Pompeo (1993) duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum. Na linguagem matemática simbólica  $s \cap u = \{P\}$ . Segundo Gerônimo e Franco (2006), há um teorema relacionado a perpendicularidade entre retas e que diz que por um ponto fora de uma reta passa uma única reta perpendicular a reta dada. A demonstração deste teorema é relevante para a construção da planta baixa da maquete e é apresentada no próximo parágrafo.

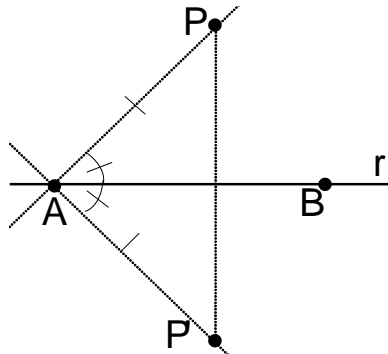
Demonstração do teorema no que diz respeito a existência: Seja  $r$  uma reta qualquer e  $P$  um ponto fora dela dado. Considere dois pontos  $A$  e  $B$  quaisquer de  $r$ , que existem pelo axioma de existência. Trace a reta  $AP$ . Se ela for perpendicular a  $r$ , a existência estará demonstrada, caso contrário, no semiplano contrário ao de  $P$ , em relação a reta  $r$ , trace uma semi-reta com origem  $A$  e que forma um ângulo com  $r$  congruente a  $\widehat{PAB}$ . Marque um ponto  $P'$  nessa semi-reta de tal modo que  $AP'$  seja congruente a  $AP$ . Assim teremos que  $AP \cong AP'$  e  $\widehat{PAB} \cong \widehat{P'AB}$ , donde o triângulo  $PAP'$  é isósceles e  $AB$  é bissetriz do ângulo  $\widehat{PAP'}$ . Logo, temos que  $AO$  é altura de  $APP'$  em relação a  $PP'$ . Portanto  $PP'$  é a perpendicular a  $r$  procurada (GERONIMO e FRANCO, 2006).

**Figura 2:** Primeira parte ilustrativa do teorema.



**Fonte:** Gerônimo e Franco (2006, p. 69).

**Figura 3:** Segunda parte ilustrativa do teorema.



**Fonte:** Gerônimo e Franco (2006, p. 69).

Em caso de unicidade: Se existissem duas perpendiculares a reta  $r$  passando por  $P$ , teríamos um triângulo com dois ângulos retos, que é um absurdo.

Em relação a retas concorrentes a demonstração por existência é pertinente à construção da planta baixa pois, quando é usado o compasso para determinar retas concorrentes de  $90^\circ$  um dos processos feitos pelo compasso é o mesmo descrito no caso de existência do teorema.

### Retas paralelas

De acordo com Dolce e Pompeo (1993), duas retas são paralelas se, e somente se, ou são coincidentes ou são coplanares e não tem ponto comum. Na linguagem matemática simbólica  $(a \subset \alpha, b \subset \alpha, \text{ e } a \cap b = \emptyset) \Rightarrow a \parallel b$ . O postulado das paralelas, o 5º Postulado de Euclides diz que, se uma linha reta, encontrando-se com outras duas retas, fizer os ângulos internos da mesma parte menores que dois retos, estas duas retas, produzidas ao infinito concorrerão para a mesma parte dos ditos ângulos internos (DOLCE e POMPEO, 1993).

### Determinação de um plano

Existem quatro modo de determinar planos:

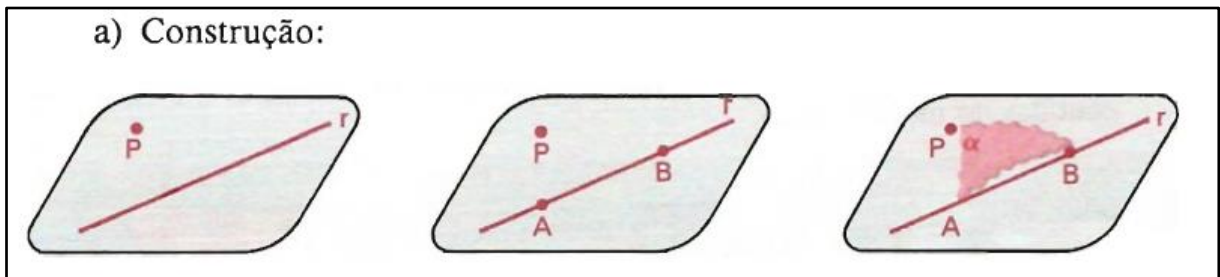
- 1º Por três pontos não colineares (postulado);
- 2º Por uma reta e um ponto fora dela;
- 3º Por duas retas concorrentes;
- 4º Por duas retas paralelas distintas.

Dolce e Pompeo (1993) descrevem três teoremas cujas as demonstrações são divididas em duas partes, por existência e unicidades; os teoremas são:

Teorema 1: Se uma reta e um ponto são tais que o ponto não pertence à reta, então eles determinam um único plano que os contém. Na linguagem matemática simbólica a hipótese é  $(P \notin r) \Rightarrow \text{tese } (\exists! \alpha \mid P \in \alpha \text{ e } r \subset \alpha)$ .

A construção do plano em relação ao teorema 1 está representada pela Figura 4.

**Figura 4:** Construção do plano segundo o teorema 1.



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 4).

Em uma reta  $r$  é tomado dois pontos distintos  $A$  e  $B$ . Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $P$ , não sendo colineares ( $A, B \in r$  e  $P \notin r$ ) determinam o plano  $\alpha$ . A prova que  $\alpha$  é plano de  $r$  e  $P$  apresentada a seguir:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = (A, B, P) \Rightarrow P \in \alpha, \\ \alpha = (A, B, P) \\ A \neq B; A, B \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \subset \alpha$$

Logo, existe pelo menos o plano  $\alpha$  construído por  $r$  e  $P$ , sendo indicado por  $\alpha = (r, P)$  com a notação (1).

No caso de unicidade, provar que  $\alpha$  é o único plano determinado por  $r$  e  $P$ . Supondo que existissem  $\alpha$  e  $\alpha'$  por  $r$  e  $P$ , teria se:

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha = (r, P); A, B \in r) \Rightarrow \alpha = (A, B, P) \\ (\alpha' = (r, P); A, B \in r) \Rightarrow \alpha' = (A, B, P) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

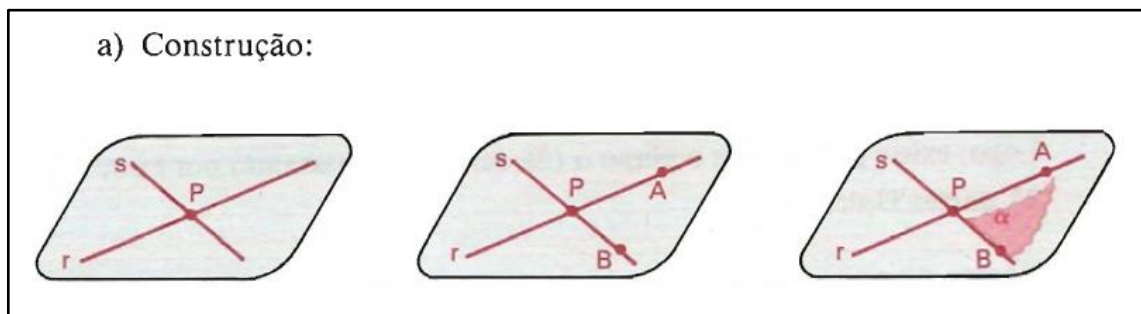
Logo, não existe mais que um plano  $(r, P)$ , com notação de (2).

É possível concluir que em relação ao caso de existência (1) e de unicidade (2)  $\Rightarrow (\exists! \alpha \mid P \in \alpha \text{ e } r \subset \alpha)$ .

Teorema 2: Se duas retas são concorrentes, então elas determinam um único plano que as contém. Na linguagem matemática simbólica a hipótese é  $(r \cap s = \{P\}) \Rightarrow tese (\exists! \alpha \mid r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha)$ .

A construção do plano em relação ao teorema 2 está representada pela Figura 5.

**Figura 5:** Construção do plano segundo o teorema 2.



**Fonte:** Dolce e Pompeo (1993, p. 5).

Em  $r$  tomar o ponto  $A$  e um ponto  $B$  em  $s$ , ambos distintos de  $P$ . Os pontos  $A, B$  e  $P$ , não sendo colineares ( $A, P \in r$  e  $B \notin r$ ), determinam um plano  $\alpha$ . A prova que  $\alpha$  é o plano de  $r$  e  $s$  é apresentada a seguir:

$$\begin{aligned} (\alpha = (A, B, P); A, P \in r; A \neq P) &\Rightarrow r \subset \alpha \\ (\alpha = (A, B, P); B, P \in s; B \neq P) &\Rightarrow s \subset \alpha \end{aligned}$$

Logo, existe pelo menos o plano  $\alpha$  construído, passando por  $r$  e  $s$ , sendo indicado por  $\alpha = (r, s)$ , com notação (1).

No caso de unicidade, supondo que existissem  $\alpha$  e  $\alpha'$ , por  $r$  e  $s$  concorrentes, teria se:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha = (r, s); A, P \in r; B \in s) &\Rightarrow \alpha = (A, B, P) \\ (\alpha' = (r, s); A, P \in r; B \in s) &\Rightarrow \alpha' = (A', B', P) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

Logo, não existe mais que um plano  $(r, s)$ , com notação de (2).

É possível concluir em que em relação ao caso de existência (1) e unicidade (2)  $\Rightarrow (\exists! \alpha \mid r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha)$ .



Teorema 3: Se duas retas são paralelas entre si e distintas, então elas determinam um único plano que as contém. Na linguagem matemática simbólica a hipótese é  $r \parallel s, r \neq s \Rightarrow \text{tese } (\exists! \alpha \mid r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha)$ .

Partindo da premissa que a existência do plano  $\alpha = (r, s)$  é consequência da definição de retas paralelas, pois:

$$(r \parallel s, r \neq s) \Rightarrow (\exists \alpha \mid r \subset \alpha, s \subset \alpha \text{ e } r \cap s = \emptyset).$$

Logo, existe pelo menos o plano  $\alpha$  (da definição), passando por  $r$  e  $s$ , com notação (1).

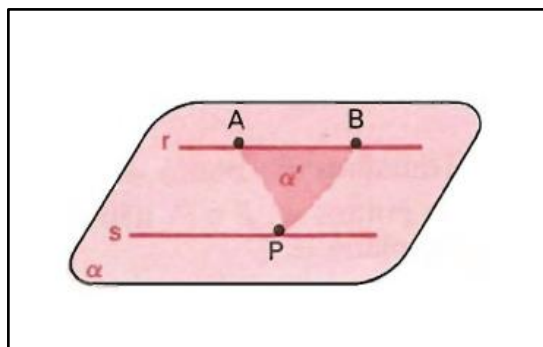
No caso de unicidade deste teorema, supondo que  $r$  e  $s$  passam por dois planos  $\alpha$  e  $\alpha'$ , provar que eles coincidem. Se existe  $\alpha$  e  $\alpha'$ , por  $r$  e  $s$  paralelas e distintas, tomando  $A$  e  $B$  distintas em  $r$  e  $P$  em  $s$ , tem se:

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha = (r, s); A, B \in r; P \in s) \Rightarrow \alpha = (A, B, P) \\ (\alpha' = (r, s); A, B \in r; P \in s) \Rightarrow \alpha' = (A, B, P) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

Logo, não existe mais que um plano  $(r, s)$ , com notação de (2).

É possível concluir em relação ao caso de existência (1) e unicidade (2)  $\Rightarrow (\exists! \alpha \mid r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha)$ .

**Figura 6:** Construção do plano segundo o teorema 3.



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 6).

Segundo Dolce e Pompeo (1993), uma figura é todo conjunto de pontos, sendo que uma figura é plana quando seus pontos pertencem a um mesmo plano, e os pontos são ditos coplanares; caso contrário, tem se uma figura que é chamada de figura reversa e os pontos, não coplanares.

## Conceito de escala

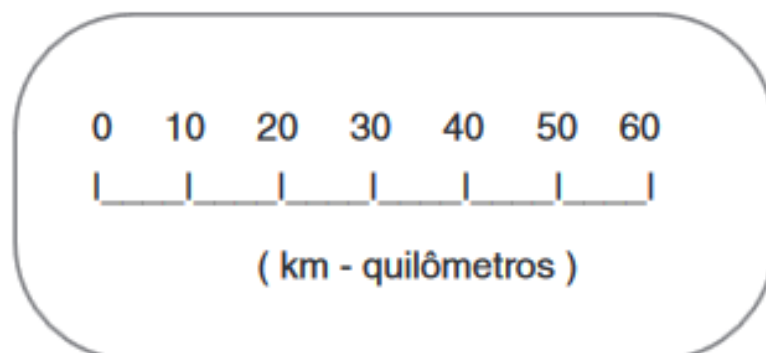
Na literatura Biembengut e Hein (2011) sinalizam que a escala é um processo utilizado para reduzir ou aumentar um desenho sem alterar a forma. Para Levy e Ramos (s/a) as escalas correspondem a técnicas utilizadas para elaborar figuras ou objetos com dimensões diferentes, mas com as mesmas proporções.

Carvalho e Araújo (2008) entendem a escala como uma relação matemática existente entre as dimensões (tamanho) verdadeiras de um objeto e sua representação (mapa). Essa relação deve ser proporcional a um valor estabelecido.

Tipos de escalas existentes:

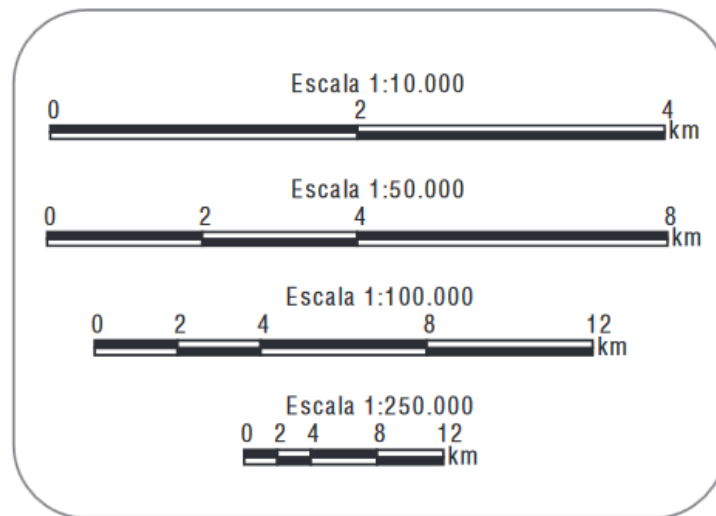
- **Escala Gráfica:** é a representação gráfica de várias distâncias do terreno sobre uma linha reta graduada no papel. Ela é constituída de um segmento à direita da referência chamada de escala primária. Essa escala consiste também em um segmento à esquerda da origem, o qual é chamado de talão ou escala de fracionamento, que por sua vez é dividido em submúltiplos da unidade escolhida, graduados da direita para a esquerda (CARVALHO e ARAÚJO, 2008).

**Figura 7:** Exemplo de escala gráfica.



**Fonte:** Carvalho e Araújo (2008, p. 2).

**Figura 8:** Exemplo de escala gráfica nos mapas.



**Fonte:** Carvalho e Araújo (2008, p.3).

- **Escala Numérica:** A escala numérica é representada por uma fração, na qual o numerador corresponde à distância no mapa (1cm), e o denominador corresponde à distância real, aquela que nós medimos no terreno (CARVALHO e ARAÚJO, 2008, p.4).

Exemplo: 
$$\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}} \rightarrow \frac{\text{distância no mapa, planta baixa}}{\text{distância real}} \rightarrow \frac{1 \text{ (cm)}}{100 \text{ (cm)}} \rightarrow$$

1: 100, lê-se um para cem.

Tipos de escalas numéricas:

- Escala de redução: (1:2, 1:4, 1:250...), o desenho é sempre menor que o próprio objeto. Existem infinitas escalas de redução. É o desenhista que escolhe a escala mais apropriada para usar.
- Escala natural: (1:1), o desenho é do mesmo tamanho do objeto real.
- Escala de ampliação: (2:1, 3:1, 5:1, 20:1...), os desenhos elaborados com uso de escalas de ampliação são maiores que o próprio objeto.

Após ser apresentado o material que poderá atuar como organizador prévio e apresentar a atividade a ser desenvolvida no terceiro passo da UEPS, será

apresentada a atividade proposta que contempla o quarto passo da UEPS.

### 3.4 QUARTO PASSO: INTRODUÇÃO A CONCEITOS FUNDAMENTAIS LEVANDO EM CONTA A DIFERENCIAÇÃO PROGRESSIVA (DP)

No quarto passo, a atividade deverá levar em conta o processo da DP ao apresentar o conhecimento a ser ensinado e aprendido, e também, deverá ter nível de complexidade crescente. Neste sentido, a atividade proposta para este passo possui nível de complexidade maior do que a atividade anterior, visto que trabalhará a mudança do plano bidimensional para o plano tridimensional, ou seja, a construção da maquete se inicia com o esboço de planta baixa e passa pela construção e edificação de seus componentes adquirindo as características de um objeto tridimensional.

Portanto, a atividade do quarto passo “Colocando a mão na massa”, **segunda fase**, consiste em construir e edificar as paredes da maquete no esboço da planta baixa com a sua devida escala e espaços destinados as janelas e portas.

Ao decorrer da sua construção, o professor pode estimular o aluno a utilizar o compasso para construir paredes com ângulos de  $90^\circ$ , revisando alguns passos da construção geométrica envolvendo construção de ângulos. O material a ser utilizado para a construção das paredes fica a critério do grupo, desde que seja um material de fácil manipulação.

#### Quadro 5: Orientações para o quarto, quinto e sexto encontro.

Quarto, quinto e sexto encontro	
<b>Atividade de nível de complexidade baixa</b>	“Colocando a mão na massa” – Fase 2 – Construção e edificação das paredes da maquete.
<b>Objetivos</b>	Ensinar os conceitos de paralelismo entre planos; perpendicularismos entre plano, diedros, triedros e projeção ortogonal sobre um plano; Desenvolver com os alunos uma atividade de nível de complexidade mais alta que a anterior; Relacionar a edificação das paredes com os conceitos a ser ensinados.

<b>Tempo previsto</b>	6 aulas.
<b>Conceitos a ser ensinados</b>	paralelismo entre planos; perpendicularismos entre plano; diedros; projeção ortogonal sobre um plano; Triedros.
<b>Material para os alunos</b>	Folha impressa com a atividade.
<b>Materiais que poderão ser utilizados pelos alunos</b>	Papelão, placa de isopor, papel paraná, cola quente, cola instantânea, estilete, tesoura, lápis ou lapiseira, borracha, régua, compasso, caneta.
<b>Forma de realização</b>	Em grupo .
<b>Instruções para o professor</b>	Após a construção do esboço da planta baixa, o professor deverá iniciar a sua aula apresentando os conceitos planejados para este encontro: 1º Iniciar pelo conceito de paralelismo entre planos até chegar ao conceito de projeção ortogonal; 2º Solicitar que os alunos desenvolvam a atividade “Colocando a mão na massa” fase 2 – Construção e edificação das paredes; 3º Após o término das construções das paredes e suas edificações, o professor deve questionar os alunos relacionando os conceitos trabalhados no início dessa fase com a atividade desenvolvida.
<b>Como relacionar a construção e edificação das paredes com os conceitos da Geometria Espacial?</b>	A forma de relacionar os conceitos ensinados e a construção da fase 2 da maquete, assim como na fase 1, ocorre por meio de questionamentos escritos ou até mesmo por questionamento oral aos alunos. A primeira questão está relacionada a paralelismo entre planos, ou seja, em qual momento da construção desta fase é possível

	<p>observar a existência de tal conceito. A segunda questão envolve o conceito de perpendicularismo entre planos, em qual momento da construção é possível perceber o uso deste conceito. A terceira questão diz respeito ao conceito de diedro; qual momento da construção é possível perceber o uso deste conceito, além disso levantar a questão em relação ao tipo de diedro existente na edificação das paredes. A quarta questão está relacionada ao conceito de triedro. Em que momento da edificação é possível encontrar triedros e qual o tipo existente. A quinta questão diz respeito a projeção ortogonal, em qual momento da edificação das paredes é possível perceber tal conceito.</p> <p>O professor pode ainda optar por solicitar aos alunos para construir um relatório ao final da aula de forma individual, questionando quais foram os conceitos ensinados na aula, qual seria a relação da construção e edificação das paredes com os conceitos ensinados na aula, em que momento da edificação das paredes é possível perceber o uso desses conceitos.</p>
--	--

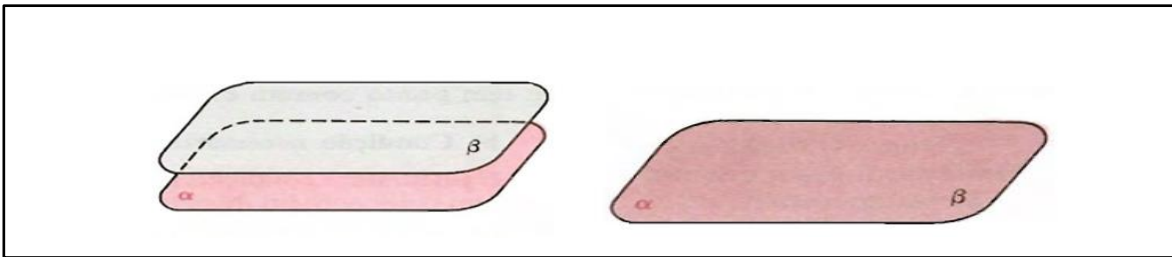
**Fonte:** O autor (2020).

No Quadro 5, apresentou-se a explicação para o professor em relação ao quarto, quinto e sexto encontro, bem como a indicação dos conceitos matemáticos que podem ser utilizados na realização da atividade, e a seguir serão apresentados as definições dos conceitos indicados no Quadro 5.

## Paralelismo entre planos

Segundo Dolce e Pompeo (1993), dois planos são paralelos se, e somente se, eles não têm ponto em comum ou são iguais (coincidentes). Em uma linguagem matemática simbólica  $\alpha \parallel \beta \leftrightarrow (\alpha \cap \beta = \emptyset \text{ ou } \alpha = \beta)$ .

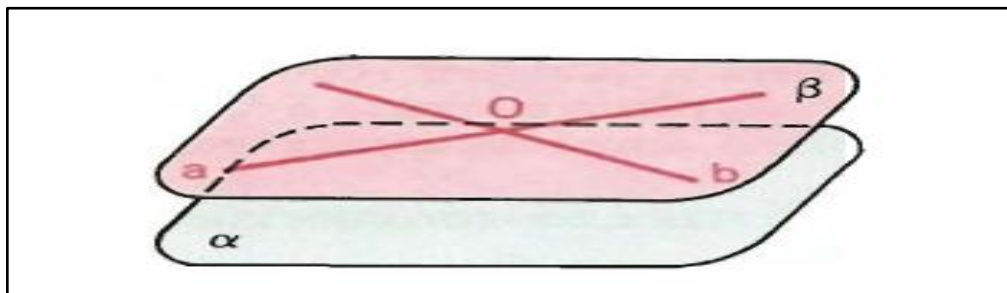
**Figura 9:** Planos paralelos entre si ou coincidentes.



Fonte : Dolce e Pompeo (1993)

De acordo com Dolce e Pompeu (1993) uma condição necessária e suficiente para que dois planos distintos sejam paralelos é que um deles contenha duas retas concorrentes, ambas paralelas ao outro. Em uma linguagem matemática simbólica a hipótese é  $(a \subset \beta, b \subset \beta; a \cap b = \{O\}; a \parallel \alpha, b \parallel \alpha) \Rightarrow (tese)\alpha \parallel \beta$ .

**Figura 10:** Planos paralelos.



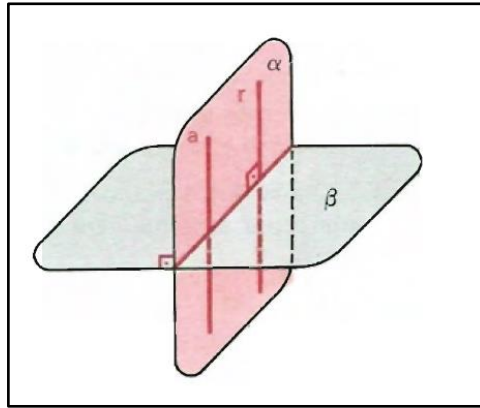
Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 26)

## Planos perpendiculares

Dolce e Pompeo (1993) dizem que um plano  $\alpha$  é perpendicular a um plano  $\beta$  se, e somente se,  $\alpha$  contém uma reta perpendicular a  $\beta$ . A existência de um plano perpendicular ao outro se baseia na existência de uma reta perpendicular a

um plano. Em uma linguagem matemática simbólica a hipótese é  $(\alpha \perp \beta, i = \alpha \cap \beta, r \subset \alpha, r \perp i) \rightarrow (tese) r \perp \beta$ .

**Figura 11:** Imagem ilustrativa da hipótese de planos perpendiculares.



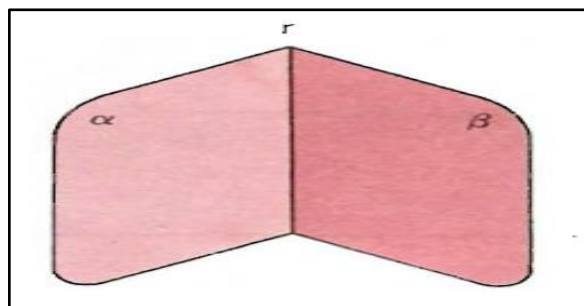
**Fonte:** Dolce e Pompeo (1993).

Uma condição necessária e suficiente para que dois planos secantes sejam perpendiculares é que toda reta de um deles, perpendicular à interseção, seja perpendicular ao outro.

### Diedros

Dolce e Pompeo (1993) definem ângulo diedro ou diedro ou ângulo diédrico é a união de dois semiplanos de mesma origem não contidos em um mesmo plano. A origem comum dos semiplanos é a aresta do diedro e os dois semiplanos são as faces dos diedros. Assim,  $\alpha$  e  $\beta$  são dois semiplanos de mesma origem  $r$  distintos e não opostos. Na linguagem matemática simbólica o diedro pode ser escrito da seguinte forma  $\alpha r \beta = \alpha \cup \beta$  (DOLCE; POMPEO, 1993).

**Figura 12:** Exemplo de diedro.



**Fonte:** Dolce e Pompeo (1993)

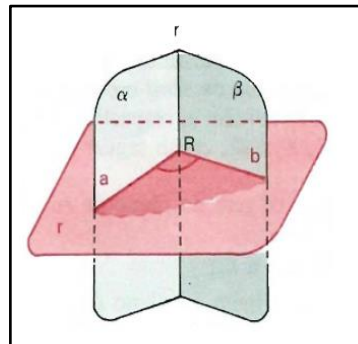


Um diedro é dito nulo quando suas faces são coincidentes, já o diedro raso é aquele em que suas faces estão em semiplanos opostos.

### Secção do diedro

A secção de um diedro é a intersecção do diedro com um plano secante à aresta. Uma secção de um diedro é um ângulo plano. Na Figura 13  $aRb$  ou  $ab$  é a secção de  $arb$  (Dolce e Pompeo, 1993).

**Figura 13:** Exemplo de secção do diedro.

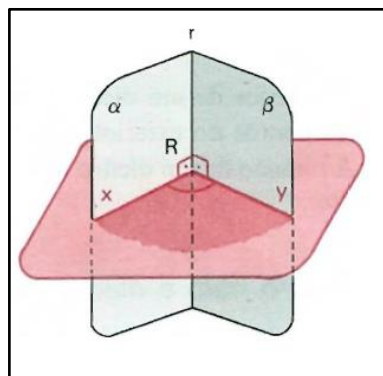


Fonte: Dolce e Pompeo (1993).

### Secção reta ou secção normal

A secção reta ou secção normal de um diedro é uma secção cujo plano é perpendicular à aresta do diedro. Na Figura 14, se  $xy$  é secção reta do diedro  $d$  aresta  $r$ , então o plano  $(xy)$  é perpendicular a  $r$ , isto é,  $x \perp r$  e  $y \perp r$ .

**Figura 14:** Exemplo de secção reta de um diedro.



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 82).

### Diedro reto

Um diedro é reto se, e somente se, sua secção normal é um ângulo reto.

### Diedro agudo

Um diedro é agudo se, e somente se, sua secção normal é um ângulo agudo.

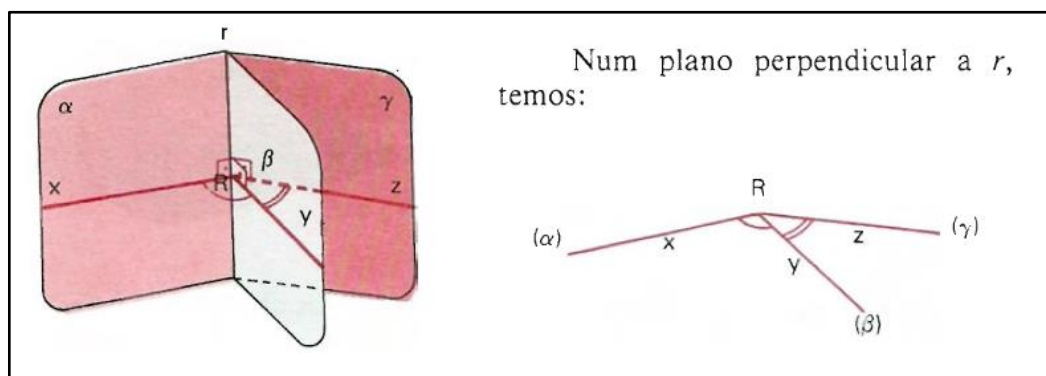
### Diedro obtuso

Um diedro é obtuso se, e somente se, sua secção normal é um ângulo obtuso.

### Diedros adjacentes

Dois diedros são adjacentes se, e somente se, as secções normais são ângulos adjacentes.

**Figura 15:** Exemplo de diedros adjacentes.

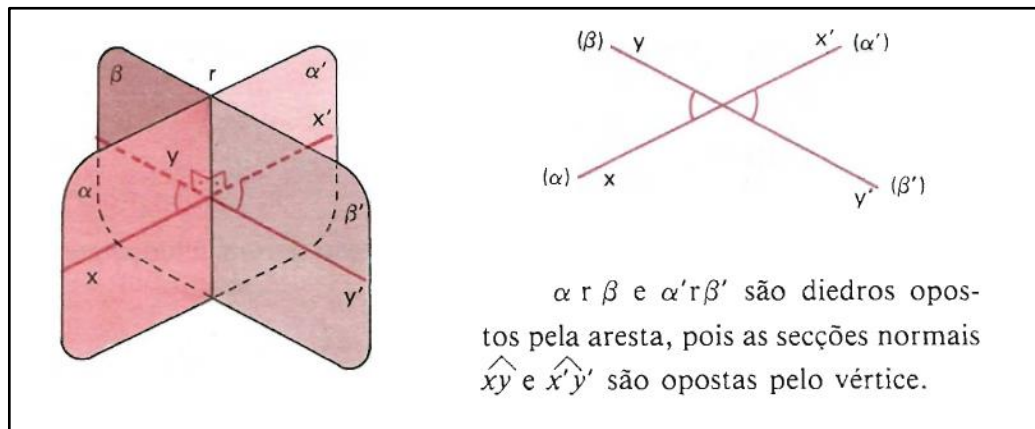


Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 83).

### Diedros opostos pela aresta

Dois diedros são opostos pela aresta se, somente se, as secções normais são ângulos opostos pelo vértice.

**Figura 16:** Exemplo de diedro opostos pela aresta.

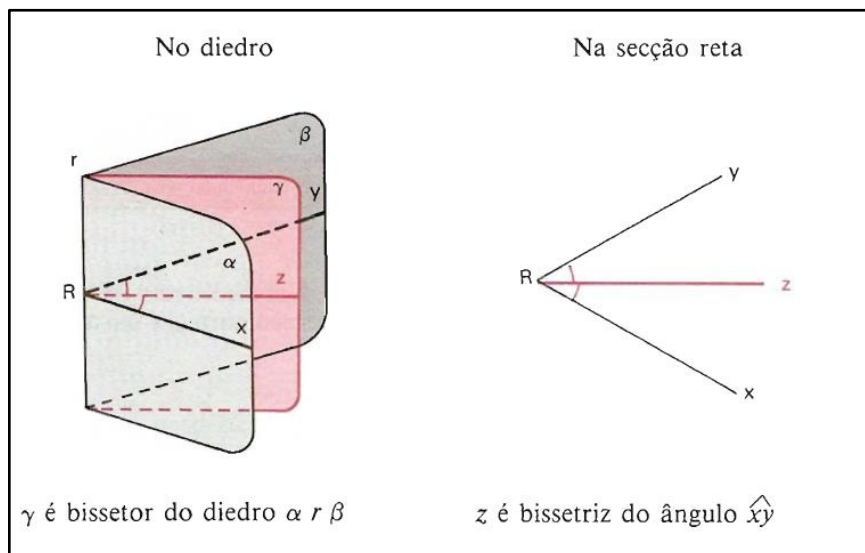


Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p.84).

### Bissetor do Diedro

Um semiplano é bissetor de um diedro se, e somente se, ele possui origem na aresta do diedro e o divide em dois diedros adjacentes e congruentes.

**Figura 17:** Exemplo de bissetor de um diedro.



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 85).

### Medida de um diedro

Dolce e Pompeo (1993) descrevem que a congruência entre dois diedros é dada pela congruência de suas secções retas, a secção reta do diedro

soma, é a soma das secções retas dos diedros parcelas; a desigualdades entre dois diedros é dada pela desigualdade entre suas secções retas, pode se provar que “todo diedro é proporcional à respectiva secção reta”, sendo assim, a medida de um diedro é a medida de sua secção reta. Como exemplo, um diedro de  $30^\circ$  é um diedro cuja secção normal mede  $30^\circ$ .

Dois diedros são ditos diedros complementares se, e somente se, suas secções normais forem complementares, ou seja, a soma de suas medidas for igual a  $90^\circ$ . Dois diedros são suplementares se, e somente se, a soma de suas medidas for igual a  $180^\circ$  (Dolce e Pompeo, 1993).

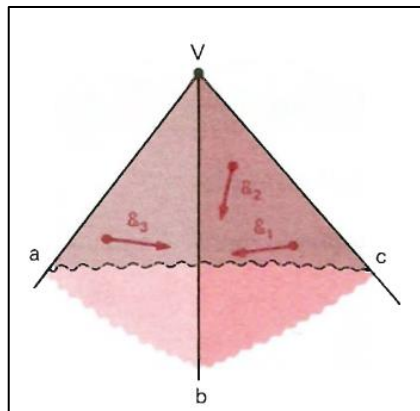
### Triedros

Dada três semirretas  $V_a$ ,  $V_b$ ,  $V_c$ , de mesma origem  $V$ , não coplanares, consideremos o semi-espacos  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , e  $\varepsilon_3$  como segue:  $\varepsilon_1$ , com origem no plano  $(bc)$  e contendo  $V_a$ ;  $\varepsilon_2$ , com origem no plano  $(ac)$  e contendo  $V_b$ ;  $\varepsilon_3$ , com origem no plano  $(ab)$  e contendo  $V_c$  (DOLCE e POMPEO, 1993).

O triedro determinado por  $V_a$ ,  $V_b$  e  $V_c$  é a intersecção dos semi-espacos  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$ . Então,  $V(a, b, c) = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3$ .

Sob outra orientação, o ente definido acima é chamado de setor triedral ou ângulo sólido de três arestas. Segundo essa orientação, o triedro é a reunião dos três setores angulares definidos por  $V_a$ ,  $V_b$  e  $V_c$  (DOLCE; POMPEO, 1993).

**Figura 18:** Triedro, setor triedral ou ângulo sólido de três arestas.



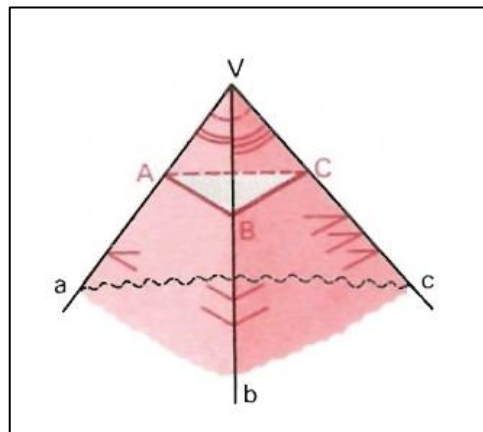
**Fonte:** Dolce e Pompeo, 1993, p.101.

### Elementos do Triedro segundo Dolce e Pompeo (1993)

$V$  é o vértice,  $V_a$ ,  $V_b$  e  $V_c$  são as arestas.  $aVB$ ,  $aVc$  e  $bVc$  ou  $ab$ ,  $ac$  e  $bc$  são faces ou ângulos de face.  $di(a)$ ,  $di(b)$ ,  $di(c)$  são diedros do triedro; cada um deles é determinado por duas faces do triedro.

O triângulo  $ABC$  com um único vértice em cada aresta é uma secção do triedro.

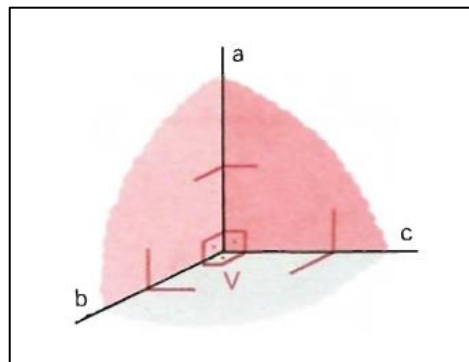
**Figura 19:** Elementos do triedro.



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 102).

Um triedro notável é aquele cujas faces são ângulos retos e cujos diedros são diedros retos. Esse triedro é chamado triedro tri-retângulo.

**Figura 20:** Triedro tri-retângulo.



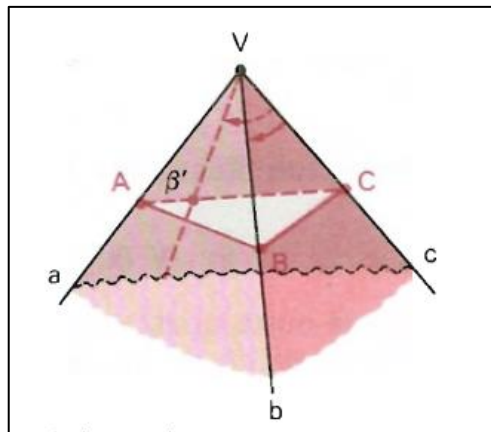
Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p.102).

**Teorema:** Em todo triedro, qualquer face é menor que a soma das outras duas (DOLCE e POMPEO, 1993).

Demonstração:

Supondo que  $ac$  é a maior face do triedro  $V(a,b,c)$ , vamos provar que  $ac < ab + bc$  (*tese*). Para isso construímos em  $ac$  um ângulo  $b'c$  tal que  $b'c \equiv bc$  (1).

**Figura 21:** Imagem para demonstração de relações entre faces.



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 102).

Tomando-se um ponto  $B$  em  $b$  e um ponto  $B'$  em  $b'$ , tais que  $VB \equiv VB'$ , e considerando uma secção  $ABC$ , como indica a Figura 9, temos:

1. Da congruência dos triângulos  $B'VC$  e  $BVC$ , vem que  $B'C \equiv BC$ ;

2. No Triângulo  $ABC$ ,  $AC < AB + BC \Rightarrow AB' + B'C < AB + BC \Rightarrow AB' < AB$ . De  $AB' < AB$  decorre considerando os triângulos  $B'VA$  e  $BVA$ , que  $ab' < ab$  (2). Somando as relações (2) e (1), temos:  $ab' + b'c < ab + bc \Rightarrow ac < ab + bc$ . Sendo a maior face menor que a soma das outras duas, conclui-se que qualquer face de um triedro é menor que a soma das outras duas.

Observação:

Se,  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  são as medidas das faces de um triedro, temos que  $f_1 < f_2 + f_3$  (1).

$$\left. \begin{array}{l} f_2 < f_1 + f_3 \Leftrightarrow f_2 - f_3 < f_1 \\ f_3 < f_1 + f_2 \Leftrightarrow f_3 - f_2 < f_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow |f_2 - f_3| < f_1 \quad (2)$$

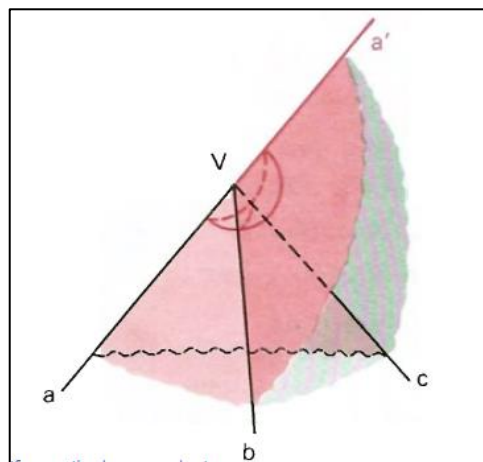
De (1) e (2) vem que:  $|f_2 - f_3| < f_1 < f_2 + f_3$

**Teorema:** A soma das medidas em graus das faces de um triedro qualquer é menor que  $360^\circ$ .

Demonstração:

Seja  $ab$ ,  $ac$  e  $bc$  as medidas das faces de um triedro  $V(a, b, c)$ , provemos que:  $ab + ac + bc < 360^\circ$  (*tese*). Para isso, consideremos a semi-reta  $Va'$  oposta a  $Va$ ; observemos que  $V(a', b, c)$  é um triedro e  $bc = ba' + ca'$  (1).

**Figura 22:** Imagem ilustrativa para demonstração.



Fonte: Dolce e Pompeu (1993, p. 103).

Os ângulos  $ab$  e  $ba'$  são adjacentes e suplementares, o mesmo o mesmo ocorrendo com  $ac$  e  $ca'$ . Então:

$$\begin{array}{l}
 ab + ba' = 180^\circ \\
 ac + ca' = 180^\circ
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} ab + ba' = 180^\circ \\ ac + ca' = 180^\circ \end{array}} \right\} +$$

$$\Rightarrow ab + ac + \underbrace{ba' + ca'}_{(1)} = 360^\circ \Rightarrow ab + ac + bc < 360^\circ$$

Resumo:

1º Em qualquer triedro: Cada face é menor que a soma das outras duas e a soma das medidas (em graus) das faces é menor que é menor que  $360^\circ$ .

2º Uma condição necessária e suficiente para que  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$ , sejam medidas (em graus) das faces de um triedro é:

$$0^\circ < f_1 < 180^\circ, 0^\circ < f_2 < 180^\circ \text{ e } 0^\circ < f_3 < 180^\circ$$

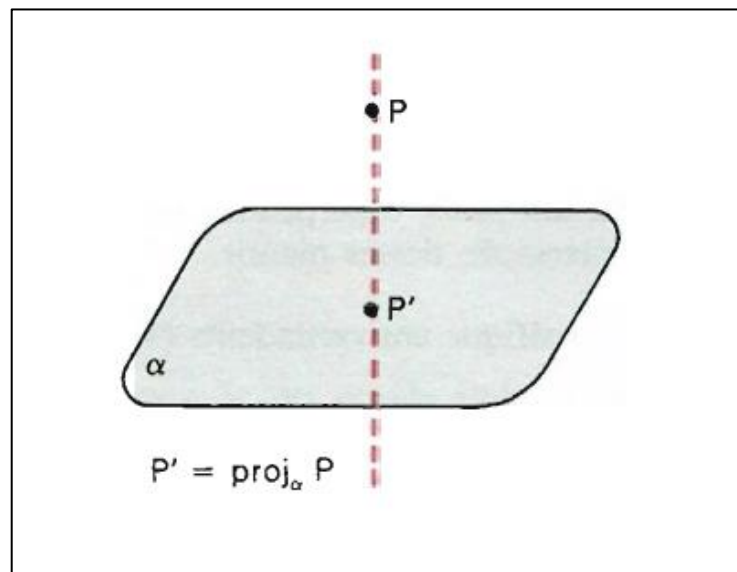
$$f_1 + f_2 + f_3 < 360^\circ \text{ e } |f_2 - f_3| < f_1 < f_2 + f_3$$

### Projeção ortogonal sobre um plano

#### Projeção de um ponto

Chama-se de projeção ortogonal de um ponto sobre um plano ao pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto. O plano é dito como plano de projeção e a reta é dita como reta projetante do ponto (DOLCE; POMPEO, 1993).

**Figura 23:** Esboço de uma projeção ortogonal de um ponto.



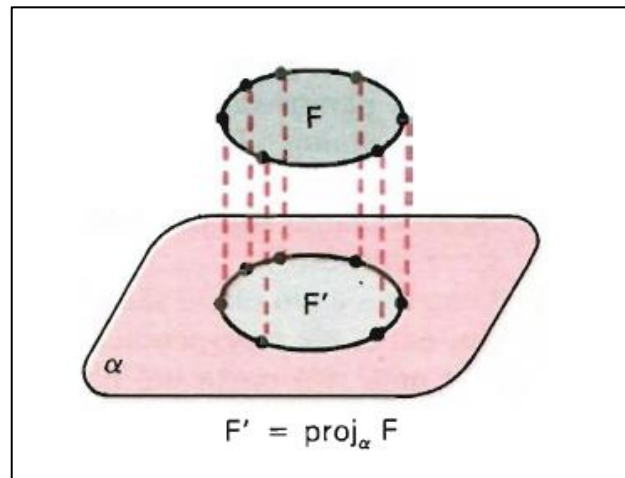
**Fonte:** Dolce e Pompeo (1993, p. 52).

#### Projeção de uma figura

Dolce e Pompeo (2019), definem projeção ortogonal de uma figura sobre um plano ao conjunto das projeções ortogonais dos pontos dessa figura sobre o plano.



**Figura 24:** Projeção ortogonal de uma figura sobre o plano.



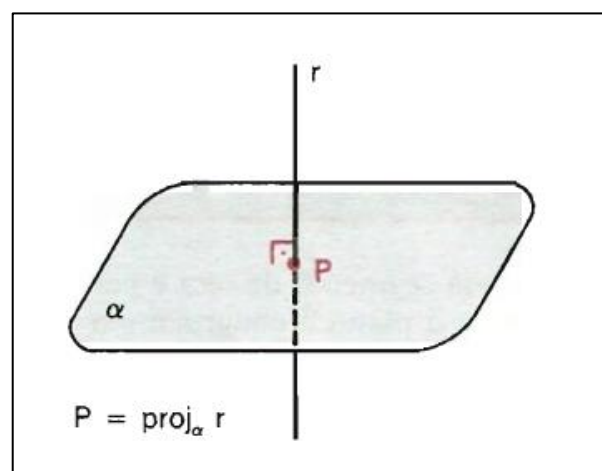
**Fonte:** Dolce e Pompeo (1993, p. 52)

### Projeção de uma reta

Com base na informação anterior, temos:

Se a reta é perpendicular ao plano, sua projeção ortogonal sobre o plano é o traço da reta no plano.

**Figura 25:** Projeção ortogonal da reta no plano.

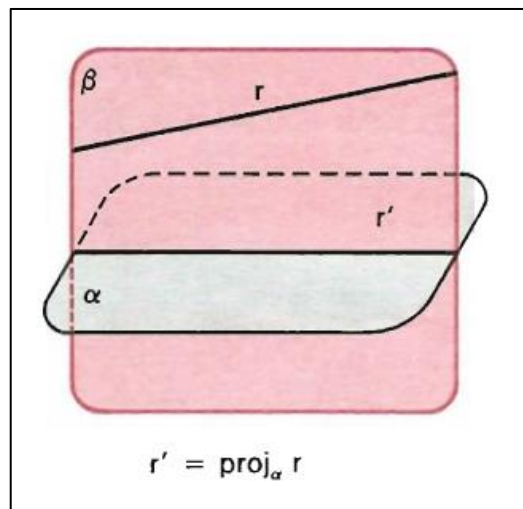


**Fonte:** Dolce e Pompeo (1993, p. 53).

Se a reta não é perpendicular ao plano, temos a particular definição:

Chama-se de projeção ortogonal de uma reta  $r$ , não perpendicular a um plano  $\alpha$ , sobre esse plano, ao traço em  $\alpha$ , do plano  $\beta$ , perpendicular a  $\alpha$ , conduzido por  $r$ . Assim,  $\alpha$  é o plano projeção e  $\beta$  e o plano projetante de  $r$ .

**Figura 26:** Projeção ortogonal de uma reta não perpendicular ao plano.

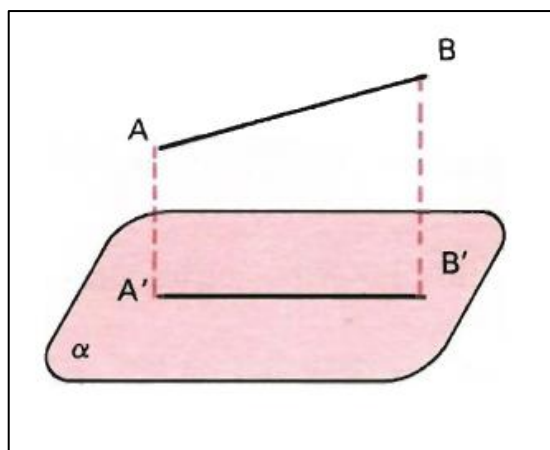


**Fonte:** Dolce e Pompeo (1993, p. 53).

#### Projeção de um segmento de reta

Chama-se de projeção ortogonal sobre um plano  $\alpha$  de um segmento  $AB$ , contido em uma reta não perpendicular a  $\alpha$ , ao segmento  $A'B'$  onde  $A' = \text{proj}_\alpha A$  e  $B' = \text{proj}_\alpha B$ .

**Figura 27:** Projeção de um segmento de reta sobre um plano.



**Fonte:** Dolce e Pompeo (1993, p. 53).

Os conceitos apresentados acima são sugestões e devem estar relacionados com o desenvolvimento da atividade “Colocando a mão na massa”, fase que envolve a construção e a edificação das paredes. Dentre as diversas

maneira de realizar essa relação, uma sugestão é que o professor trabalhe questionando os alunos no momento do desenvolvimento da atividade, por exemplo, no momento em que o grupo construir e edificar uma das paredes da maquete, o professor poderá questionar qual ou quais são os conceitos envolvidos naquele momento e quais as especificidades de tais conceitos, além disso o professor deve encontrar uma maneira que leve o aluno a fazer questionamentos.

### 3.5 QUINTO PASSO: APROFUNDAMENTO DOS CONCEITOS – NÍVEL DE COMPLEXIDADE DA ATIVIDADE É MAIS ALTA QUE A ANTERIOR

O quinto passo relaciona-se a **terceira fase** da atividade "Colocando a mão na massa", que consistiu em fazer a construção do telhado da casa. O nível de complexidade é maior do que na atividade anterior, pois trabalha com objetos tridimensionais cujas faces são maiores que três, e que possivelmente poderão formar sólidos geométricos, estes possuem especificidades maiores que objetos com número de faces inferiores a três.

Essa atividade, caracteriza-se complexa, também por estimular os alunos a utilizarem e relacionarem um maior número de conceitos matemáticos e além disso, exige maior dedicação por parte do aluno no seu desenvolvimento.

A **terceira fase** da construção da maquete tem como objetivo a construção do madeiramento do telhado e sua cobertura. A escolha do material para fazer o madeiramento e cobertura fica por conta do grupo. Os alunos podem fazer uma pesquisa na internet para ver como são construídos os madeiramentos e coberturas. É importante destacar que existem algumas especificidades que o madeiramento do telhado terá, por exemplo, qual a distância entre os caibros<sup>4</sup>, distância entre as tesouras<sup>5</sup>. Vale lembrar que a cobertura deve ser móvel para que se possa ver o madeiramento.

---

<sup>4</sup> De acordo com Flach (2012), caibro é definido como peças de madeira de pequena seção transversal na direção da vertente, que se apoiam nas terças e dão sustentação às ripas ou sarrafos.

<sup>5</sup> Flach (2012) define tesoura como viga principal em treliça, cuja função é transferir o carregamento do telhado aos pilares ou paredes da edificação.

**Quadro 6:** Orientações para o sétimo e oitavo encontro.

<b>Sétimo e oitavo encontro</b>	
<b>Atividade de nível de complexidade baixa</b>	“Colocando a mão na massa” – Fase 3 – Construção do telhado e a cobertura.
<b>Objetivos</b>	Ensinar o conceito de prisma e suas especificidades; Ensinar o conceito de paralelepípedo e romboedros; Desenvolver com os alunos a terceira fase da atividade “Colocando a mão na massa”, a construção do telhado e cobertura; Relacionar a construção do telhado com os conceitos a serem ensinados.
<b>Tempo previsto</b>	4 aulas.
<b>Conceitos a ser ensinados</b>	prisma; paralelepípedo; romboedro;
<b>Material para os alunos</b>	Folha impressa com a atividade.
<b>Materiais que poderão ser utilizados pelos alunos</b>	Papelão, placa de isopor, papel paraná, cola quente, cola instantânea, estilete, tesoura, lápis ou lapiseira, palito de churrasco, borracha, régua, compasso, caneta.
<b>Forma de realização</b>	Em grupo.
<b>Instruções para o professor</b>	Após a edificação das paredes da maquete, o professor deverá iniciar a sua aula apresentando os conceitos planejados para este encontro: 1º Iniciar pelo conceito de prisma e suas especificidades até chegar ao conceito de romboedro; 2º Solicitar que os alunos desenvolvam a atividade “Colocando a mão na massa” fase 3 – Construção do telhado e cobertura;

	<p>3º Após o término da construção do telhado e da cobertura, o professor deve questionar os alunos a respeito dos conceitos ensinados no início dessa fase com a atividade desenvolvida.</p>
<p><b>Como relacionar a construção do madeiramento do telhado e a cobertura da casa com os conceitos da Geometria Espacial?</b></p>	<p>A forma de relacionar os conceitos ensinados e a construção da fase 3 da maquete, ocorre por meio de questionamentos escritos direcionados aos alunos. A primeira questão está relacionada ao conceito de prisma, ou seja, no momento do desenvolvimento desta fase é possível observar a existência de prisma? Caso exista, qual seria o tipo de prisma? A segunda questão envolve o conceito de paralelepípedo e voltando o olhar para a maquete como um todo, em qual momento da maquete é possível relacionar esse conceito? Caso haja a relação, qual o tipo de paralelepípedo existente entre planos? Em qual momento da construção é possível perceber o uso deste conceito? E para finalizar, qual momento do desenvolvimento da atividade é possível perceber o uso do conceito de romboedro e qual o tipo existente?</p> <p>Ainda há a possibilidade de o professor pedir um relatório no final da aula solicitando ao aluno que incorpore no relatório estes questionamentos trazendo suas respectivas respostas.</p>

**Fonte:** O autor (2020).

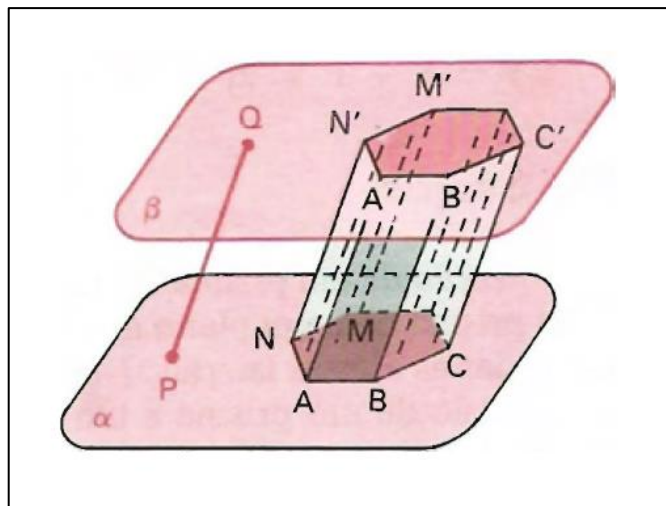
O Quadro 6, contém explicações para o professor em relação ao sétimo e oitavo encontro, bem como a indicação dos conceitos matemáticos que podem ser utilizados na realização da atividade e a seguir serão apresentados as definições dos conceitos indicados no Quadro x.

## Prisma

### Conceito

Considere um polígono convexo (região convexa)  $ABCDMN$  situado em um plano  $\alpha$  e um segmento de reta  $PQ$ , cuja reta suporte intercepta o plano  $\alpha$ . Chama-se de prisma (ou prisma convexo) a união de todos segmentos congruentes e paralelos a  $PQ$ , com extremidade nos pontos do polígono e situados em um mesmo semi-espço dos determinados por  $\alpha$  (DOLCE; POMPEO, 1993).

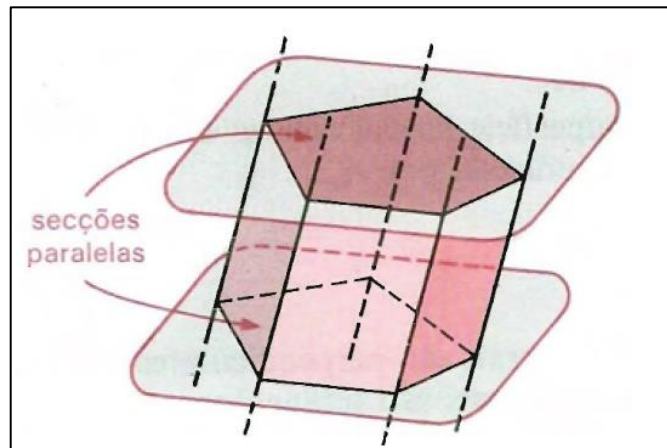
**Figura 28:** Prisma convexo.



**Fonte:** Dolce e Pompeo (1993, p. 139).

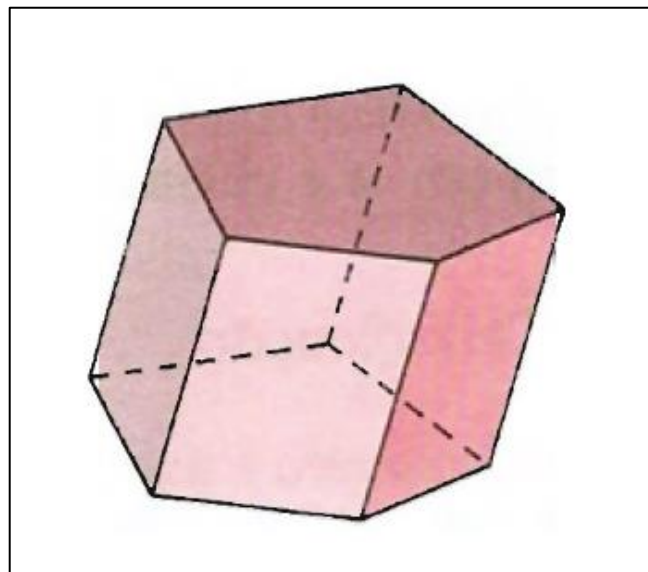
O prisma convexo limitado, prisma convexo definido ou prisma convexo ainda pode ser definido como a união da parte do prisma convexo ilimitado, compreendida entre os planos de suas secções paralelas e distintas, com essas secções.

**Figura 29:** Prisma ilimitado.



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 139).

**Figura 30:** Prisma limitado.



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 139).

### **Natureza do prisma**

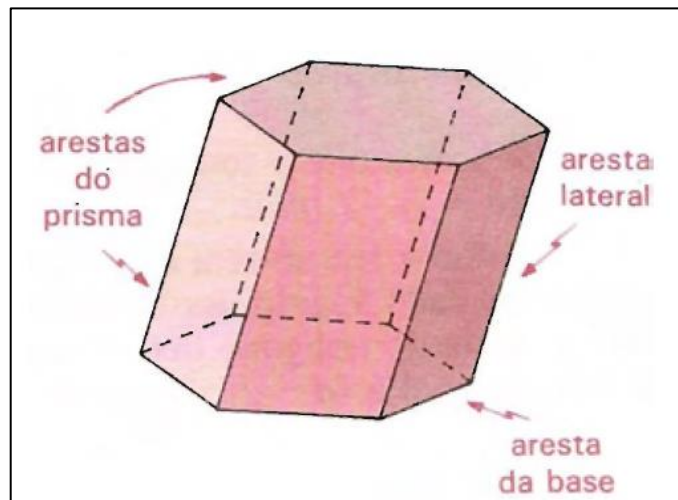
Um prisma será triangular, quadrangular, pentagonal e assim por diante, conforme a base for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono e assim por diante.

## Elementos do Prisma

O prisma possui:

- 2 bases congruentes (secções citadas acima);
- $n$  faces laterais (paralelogramo);
- $(n + 2)$  faces;
- $n$  arestas laterais,
- $3n$  arestas,  $3n$  diedros;
- A altura do prisma é a distância  $h$  entre os planos da base
- Para o prisma é válida a relação de Euler:  $V - A + F = 2n - 3n + (n + 2) = 2 \Rightarrow V - A + F = 2$

**Figura 31:** Prisma Hexagonal.



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 140).

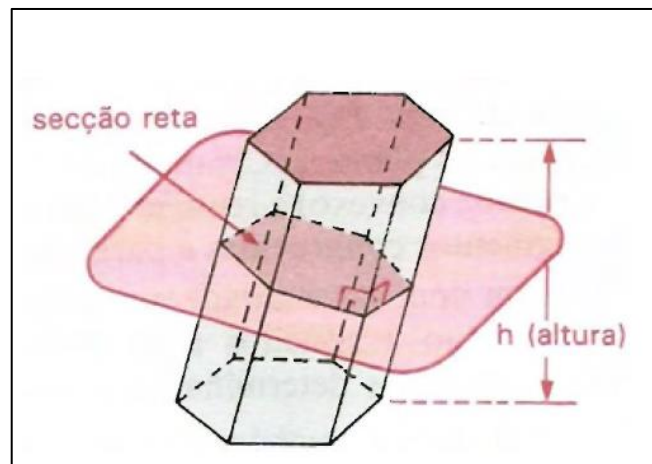
## Secções do prisma

Secção do prisma é a interseção do prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais. Observe que a secção de um prisma é um polígono com vértice em cada aresta lateral.

Secção reta ou secção normal é uma secção cujo plano é perpendicular às arestas laterais.



**Figura 32:** Secção do prisma e sua altura.



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p.140).

### Superfícies do Prisma

Superfície lateral é a união das faces laterais. A área desta superfície é chamada área lateral e indicada normalmente por  $Al$ . A superfície total é a união da superfície lateral com as bases. A área desta superfície é chamada área total e normalmente indicada por  $At$ .

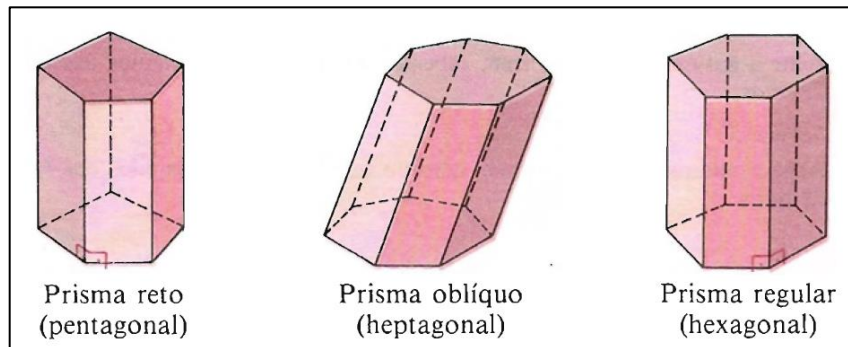
### Classificação do prisma

Prisma reto é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Em um prisma reto as faces laterais são retângulos.

Prisma oblíquo é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases.

Prisma retangular é um prisma reto cuja bases são polígonos regulares.

**Figura 33:** Prisma reto, prisma oblíquo, prisma regular.



**Fonte:** Dolce e Pompeo (1993).

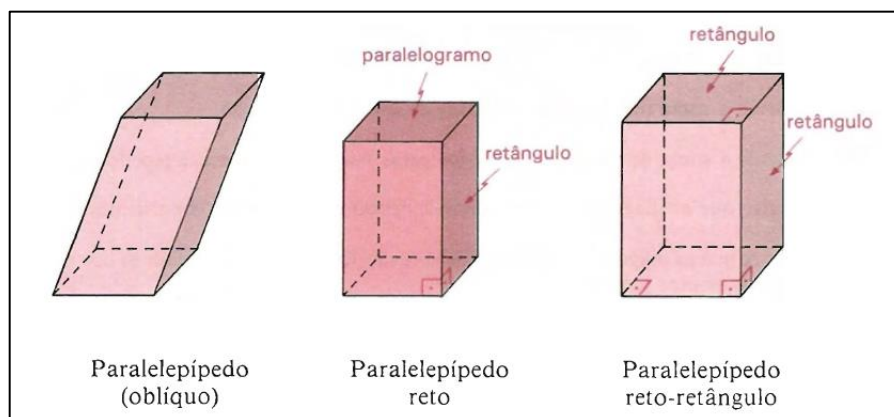
### Paralelepípedos e romboedros

Paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo é a união de seis paralelogramos.

Paralelepípedo reto é um prisma reto cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo reto é a união de quatro retângulos (faces laterais) com dois paralelogramos (bases).

Paralelepípedo reto-retângulo ou paralelepípedo retângulo ou ortoedro é um prisma reto cujas bases são retângulos. A superfície total de um paralelepípedo retângulo é a união de seis retângulos.

**Figura 34:** Paralelepípedos.



**Fonte:** Dolce e Pompeo (1993, p. 143).

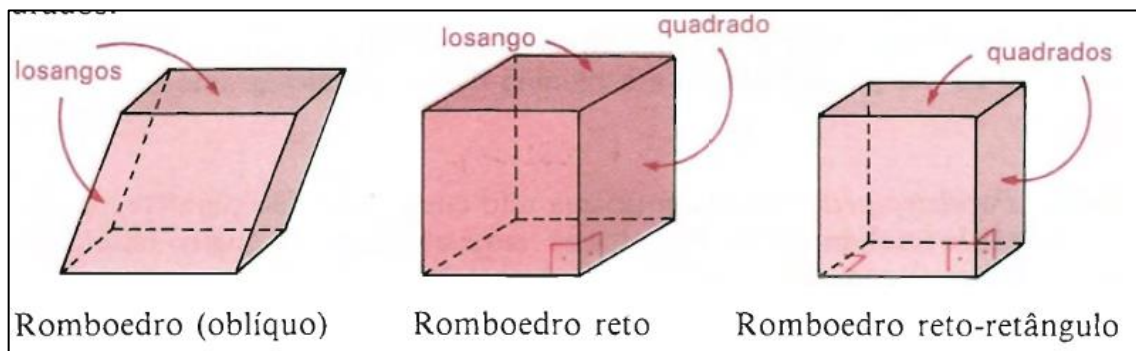
Cubo é paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes.

Romboedro é um paralelepípedo que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro é a união de seis losangos.

Romboedro reto é um paralelepípedo reto que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de romboedro reto é a reunião de quatro quadrados (faces laterais) com dois losangos (bases).

Romboedro reto-retângulo ou cubo é um romboedro reto cujas bases são quadrados. A superfície de um romboedro reto é a união de seis quadrados.

**Figura 35:** Romboedros.



**Fonte:** Dolce e Pompeo (1993, p.144).

O conceito de prisma, paralelepípedo, romboedro apresentados acima, são sugestões de conceitos a serem trabalhados, e devem estar relacionados com o desenvolvimento da atividade “Colocando a mão na massa”, fase que envolve a construção do madeiramento do telhado e a sua cobertura. O item do Quadro 5 que aborda como relacionar a construção do madeiramento e a sua cobertura descreve uma maneira de fazer a relação entre os conceitos e o desenvolvimento da atividade.

Para finalizar a construção da maquete, caso haja tempo disponível, os grupos poderão trabalhar no acabamento da maquete com uso de diversos materiais de acordo com a escolha do grupo como por exemplo, as pinturas das paredes internas e externas, janelas e portas.

### 3.6 SEXTO PASSO: RETOMADA DOS CONCEITOS LEVANDO EM CONTA A RECONCILIAÇÃO INTEGRATIVA (RI)

Sexto passo tem como objetivo retomar os aspectos mais gerais estruturantes. A atividade mantém o processo de diferenciação progressiva e ao finalizar esse passo, deve-se sistematizar os conceitos envolvidos, retomando as características mais relevantes dos conceitos ensinados, agora em uma perspectiva integradora, ou seja, buscando a reconciliação integrativa.

É nesse momento que o professor faz a sistematização dos conceitos, oportunizando os alunos a levantarem questionamentos, dúvidas, desfazer confusões entre conceitos que possam emergir. Essa sistematização pode ser feita por meio de uma aula expositiva com uso do quadro negro e giz, ou por meio de uma aula que utilize *slides* e o projetor multimídia para a apresentação.

Independente do caminho que o professor escolher, o importante é que ele interaja com os alunos e os estimulem a levantar questionamentos, além disso, o professor deve trazer questionamentos pertinentes no momento da sistematização dos conceitos.

Feita a retomada dos conceitos levando em conta a RI, o próximo passo será desenvolver uma atividade avaliativa com os alunos.

### 3.7 SÉTIMO PASSO: AVALIAÇÃO DA AS NA UEPS

O sétimo passo trabalhou com o momento de buscas de evidências de AS do aluno, ou seja, o desenvolvimento de uma atividade avaliativa específica.

De acordo com Moreira (2011a), a avaliação da aprendizagem por meio da UEPS, será feita ao longo de sua implementação, de forma somativa individual após o sexto passo no qual deverão ser propostas questões ou situações que impliquem compreensão, que evidenciem captação de significados e, idealmente, alguma capacidade de transferência dos conceitos aprendidos para uma nova situação.

Neste passo e neste material, o professor deve solicitar aos alunos a construção de um mapa conceitual final para verificar se houve ou não evidências de AS. Ressalta-se que a construção deste mapa conceitual nesse passo, tem objetivo diferente do mapa conceitual construído no início da UEPS, cujo o objetivo era

identificar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito dos conceitos Geometria Plana e Espacial.

O Quadro 7 contém algumas instruções para o professor referente ao nono encontro.

**Quadro 7:** Quadro explicativo para o professor relativo ao nono encontro,

<b>Nono encontro</b>	
<b>Atividade avaliativa da AS</b>	Construção de um mapa conceitual com o tema Geometria plana e Espacial
<b>Objetivo do professor</b>	Solicitar aos alunos a construção de um mapa conceitual para que se possa buscar evidências da AS dos alunos.
<b>Tempo previsto</b>	2 aulas.
<b>Material para os alunos</b>	Folha impressa com a atividade (a mesma do início).
<b>Forma de realização</b>	Individual.
<b>Instruções para o professor</b>	<p>Após os passos anteriores composto por atividades relacionados a conceitos da Geometria Plana e Espacial, chegou o momento de realizar uma avaliação para buscar evidências de aprendizagem significativa ou não e para isso o professor deve:</p> <p>1º Entregar novamente a folha com tutorial de construção de mapa conceitual e revisar com os alunos de que forma é construído o mapa conceitual;</p> <p>2º Solicitar aos alunos que construam um mapa conceitual com o tema Geometria Plana e Espacial;</p> <p>3º Estipular tempo para os alunos construírem o mapa, sugere-se a duração de uma aula no mínimo;</p> <p>4º Recolher os mapas conceituais construídos</p>

	após o tempo estipulado.
--	--------------------------

**Fonte:** O Autor (2020).

No Quadro 7 apresenta-se a explicação para o professor em relação ao nono encontro, contudo vale lembrar que até chegar nesse momento da avaliação o professor já deve ter coletado outras informações para que se possa verificar uma possível AS no decorrer da implementação da UEPS. A utilização de um mapa conceitual é uma maneira de finalizar a UEPS, sendo uma atividade que não leva o aluno a dar respostas previamente planejadas.

Neste sentido, o mapa conceitual é um instrumento que pode ser utilizado para avaliar uma AS, contudo há outras maneira de avaliar. Como sugestão, apontamos a construção de relatórios em relação as atividades desenvolvidas no decorrer dos encontros ou até mesmo solicitar aos alunos que apresentem suas maquetes relacionando-a aos conceitos aprendidos em sala de aula, nesta apresentação o professor poderá fazer diversos questionamentos.

A forma de avaliar uma AS pode ser flexível e cabe ao professor optar pela melhor forma para que os alunos possam externar evidências da AS. O oitavo passo, é o momento em que o professor busca as evidências de uma AS, por meio da avaliação realizada com os alunos.

### 3.8 OITAVO PASSO: AVALIAÇÃO DA UEPS

Segundo Moreira (2011b) a UEPS somente será considerada exitosa se a avaliação do desempenho dos alunos fornecer alguma evidências de AS, seja ela por: captação de significados; compreensão; capacidade de explicar, de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema.

Neste sentido, de maneira qualitativa, a UEPS deve ser avaliada por meio de todos os dados oferecidos pelos alunos ao participarem do desenvolvimento de cada atividade, enfatizando o processo de aprendizagem e não ao material construído, neste caso a maquete.

Neste momento avaliativo, o professor poderá comparar os mapas conceituais construídos pelos alunos no início da implementação da UEPS, mesmo que o objetivo inicial era identificar os conhecimentos prévios, com o mapa final e buscar as evidências de uma AS.

As evidências presentes no mapa conceitual avaliativo podem ser percebidas pelo professor pelo modo e tipos de conectores utilizados pelos alunos para ligar os conceitos, pelo aumento de números de conceitos que poderão existir, pelos exemplos utilizados, a organização estrutural dos conceitos tornando possível perceber a existência da diferenciação progressiva e reconciliação integrativa.

Se pelo mapa conceitual o professor perceber que os alunos ainda apresentam dificuldades em determinados conceitos, faz-se necessário que o mesmo retome os conceitos ensinados, almejando promover a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa, para que os alunos aprendam significativamente.

Ao executar-se o oitavo passo chega-se ao final desta UEPS. No próximo tópico foram tecidas algumas considerações finais em relação a este Produto Técnico Educacional.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este Produto Técnico Educacional contendo uma UEPS foi estruturado de acordo com os passos apresentado por Moreira (2011b), para que o objetivo deste material fosse alcançado. Tal objetivo consistiu em propor atividades para que o processo de aprendizagem do aluno seja significativa na disciplina de Matemática, em especial a aprendizagem de conceitos relacionados a Geometria Plana e Espacial.

No que diz respeito a atividade inicial que buscou identificar os conhecimentos prévios dos alunos, considerou-se o mapa conceitual como a ferramenta mais adequada, visto que a mesma não direciona o aluno para uma resposta direta e trivial.

No momento que são iniciadas as atividades a serem desenvolvidas com a construção da maquete, ressalta-se que o objetivo não está na maquete em si, mas sim no relacionamento dos conceitos da Geometria Plana e Espacial com a sua construção, ou seja, não levando em consideração a maquete mais bonita ou perfeita, mas sim, que os alunos aprendam significativamente os conceitos envolvidos.

Para melhor organização dos passos percorridos, montou-se quadros explicativos para o professor a fim de relacionar o desenvolvimento das atividades e aos conceitos a serem trabalhados em cada atividade. Após o desenvolvimentos das atividades propostas, apresentou-se um direcionamento para os dois últimos passos da UEPS, a avaliação.

A maneira em que se encontra estruturado este material, acredita-se que possa assumir um caracter de material potencialmente significativo, possibilitando contribuir para o ensino de conceitos da Geometria Plana e Espacial e para aprendizagem dos alunos de forma significativa de tais conceitos na disciplina de Matemática.

Espera-se que este Produto Técnico Educacional além do caracter potencialmente significativo, possa ofertar ao professor uma alternativa pedagógica, no qual o mesmo poderá fazer adaptações sempre que achar necessário, podendo ser adaptado de acordo com a sua situação em sala de aula, desde considere os princípios da UEPS.



## REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva**. Portugal: Paralelo Editora, 2003.

AUSUBEL, D. P. **Education psychology: a cognitive view**. Nova York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. Ed. São Paulo: Contexto, 2011.

CARVALHO, E. A.; ARAÚJO, P. C. **Leituras cartográficas e interpretações estatísticas I: geografia**. Natal – RN: EDUFRRN, 2008.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da matemática elementar 10: Geometria espacial**. 5. ed. São Paulo: Atual, 1993.

FLACH, F. S. **Estruturas para telhados: Análise técnica de soluções**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre: RS. 2012. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/65439/000864069.pdf>>. Acesso em; 21 jun 2020.

GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S. **Geometria Plana e Espacial: Um estudo axiomático**. Maringá, 2006.

GOWIN, D. B. **Educating**. Ithaca, NY, Cornell University Press, 1981.

JOHNSON-LAIRD, P.N. **Mental models**. Cambridge, MA, Harvard University Press, 1983.

LEVY, D. P. C.; RAMOS E. M. **Desenho Geométrico**. Disponível em:< <https://docplayer.com.br/20673338-Matematica-graduacao-desenho-geometrico-denize-piccolotto-carvalho-levy-evandro-de-morais-ramos.html>>. Acesso em: 04 jul. 2019.

MOREIRA, M. A. Aprendizaje significativo crítico. **Indivisa: Boletín de estudios e investigación**, Espanha, n. 6, p. 83-102, 2005. Disponível em:< <http://moreira.if.ufrgs.br/apsigcritport.pdf>>. Acesso em 28 mar. 2019.

MOREIRA, M. A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v.7, n. 1, p.7-29, Mar. 2002. Disponível em:<

<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/141212/000375268.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 10 jun. 2019.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa**: um conceito subjacente.1997(a). Disponível em: < <http://moreira.if.ufrgs.br/apsigsubport.pdf>>. Acesso em: 11 jun. 2018.

MOREIRA, M. A. **Mapas conceituais e aprendizagem significativa**. 1997(b). Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/~moreira/mapasport.pdf>>. Acesso em: 15 mar. 2019.

MOREIRA, M. A. **Mapas conceituais e aprendizagem significativa**. São Paulo: Centauro, 2010.

MOREIRA, M. A. Modelos mentais. 2004. Disponível em: < <http://moreira.if.ufrgs.br/modelosmentaisport.pdf>>. Acesso em: 28 dez. 2019.

MOREIRA, M. A. **O que é afinal, aprendizagem significativa?** 2012. Disponível em:< <https://www.if.ufrgs.br/~moreira/oqueeafinal.pdf>>. Acesso em: 10 mar. 2019.

MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem**. 2. ed. ampl. São Paulo: EPU, 2011(a).

MOREIRA, M. A. Unidades de enseñanza potencialmente significativas - UEPS. **Aprendizagem Significativa em Revista**, Porto Alegre, v. 2, n. 1, p.43-63, ago. 2011(b). Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/asr/?go=artigos&idEdicao=2>>. Acesso em: 13 mar. 2019.

NOVAK, J. D. **Uma teoria de educação**. São Paulo: Pioneira, 1981. Trad. M. A. Moreira original A Theory of education, Cornell University Press, 1977.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels**. Recherches en Didactique des Mathématiques, 1990.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

## APÊNDICE A

### CONSTRUINDO UM MAPA CONCEITUAL

#### MAPA CONCEITUAL

O mapa conceitual foi criado e desenvolvido em meados da década de 1970 do século passado por Joseph Novak e seus colaboradores na Universidade de Cornell, Estados Unidos. Segundo Moreira (1997) o mapeamento conceitual é uma técnica muito flexível e em razão disso pode ser usado em diversas situações, para diferentes finalidades: instrumento de análise do currículo, técnica didática, recurso de aprendizagem, apresentações em gerais.

De acordo com Moreira (1997) os mapas conceituais podem ser definidos como:

[...] diagramas indicando relações entre conceitos, ou entre palavras que usamos para representar conceitos. [...] Embora normalmente tenham uma organização hierárquica e, muitas vezes, incluam setas, tais diagramas não devem ser confundidos com organogramas ou diagramas de fluxo [...] Mapas conceituais são diagramas de significados, de relações significativas; de hierarquias conceituais, se for o caso. Isso também os diferencia das redes semânticas que não necessariamente se organizam por níveis hierárquicos e não obrigatoriamente incluem apenas conceitos. [...]. Muitas vezes utilizam-se figuras geométricas, elipses, retângulos, círculos - ao traçar mapas de conceitos, mas tais figuras são, em princípio, irrelevantes [...] (MOREIRA, 1997, p.1-2).

#### Quadro 1: Dez passos para construir mapas conceituais

##### Como construir um mapa conceitual

1. Identifique os conceitos-chave do conteúdo que vai mapear e ponha-o sem uma lista. Limite entre 6 e 10 números de conceitos.
2. Ordene os conceitos, colocando o(s) mais geral(is), mais inclusivo(s), no topo do mapa e, gradualmente, vá agregando os demais até contemplar o diagrama de acordo com o princípio da diferenciação progressiva. Algumas

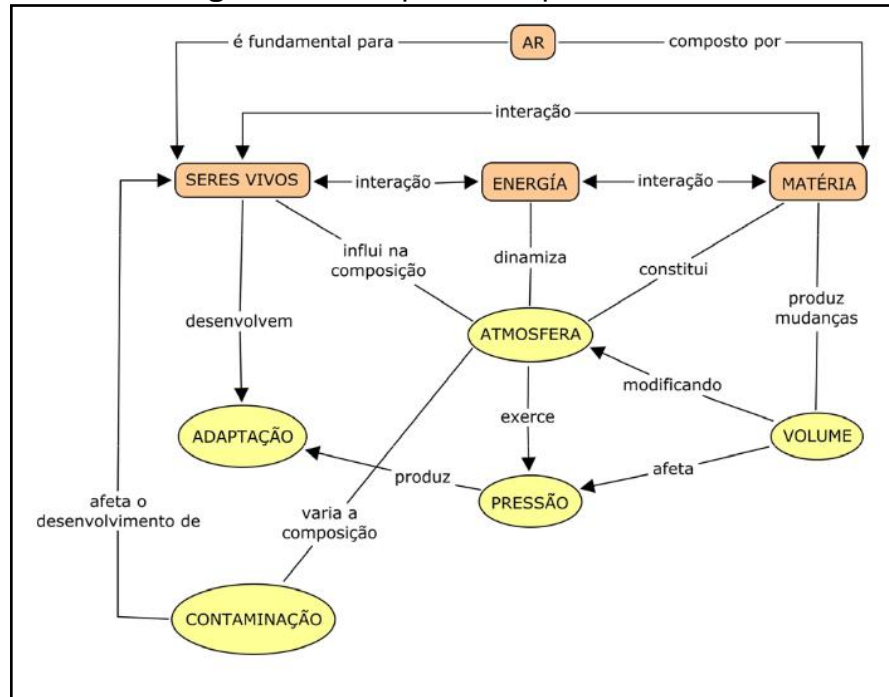
vezes é difícil identificar os conceitos mais gerais, mais inclusivos; neste caso é útil analisar o contexto no qual os conceitos estão sendo considerados ou ter uma ideia da situação em que tais conceitos devem ser ordenados.

3. Se o mapa se refere, por exemplo, a um parágrafo de um texto, o número de conceitos fica limitado pelo próprio parágrafo. Se o mapa incorpora também o seu conhecimento sobre o mesmo assunto, além do contido no texto, conceitos mais específicos podem ser incluídos no mapa.
4. Conecte os conceitos com linhas e rotule essas linhas com uma ou mais palavras-chaves que expliquem a relação entre os conceitos. Os conceitos e as palavras-chave devem sugerir uma proposição que expresse o significado da relação.
5. Setas podem ser usadas quando se quer dar um sentido a uma relação. No entanto, o uso de muita setas acaba por transformar o mapa conceitual em um diagrama de fluxo.
6. Evite palavras apenas indiquem relações triviais entre os conceitos. Busque relações horizontais cruzadas.
7. Exemplos podem ser agregados ao mapa, embaixo dos conceitos correspondentes. Em geral, os exemplos ficam na parte inferior do mapa.
8. Geralmente, o primeiro intento de mapa tem simetria pobre e alguns conceitos ou grupos de conceitos acabam mal situados em relação a outros que estão mais relacionados. Nesse caso, é útil reconstruir o mapa.
9. Talvez neste ponto você já comece a imaginar outras maneiras de fazer o mapa, outros modos de hierarquizar os conceitos. Lembre-se que não há um único modo de traçar um mapa conceitual. À medida que muda sua compreensão sobre as relações entre os conceitos, ou à medida que você aprende, seu mapa também muda. Um mapa conceitual é um instrumento dinâmico, refletindo a compreensão de quem o faz no momento em que o faz.
10. Compartilhe seu mapa com os colegas e examine os mapas deles. Pergunte o que significam as relações, questione a localização de certos conceitos, a inclusão de alguns que não lhe parecem importantes, a omissão de outros que você julga fundamentais. O mapa conceitual é um

bom instrumento para compartilhar, trocar e “negociar” significados.

Fonte: Moreira (2010, p. 30-31)

Figura 1: Exemplo de mapa conceitual



Fonte: Moreira (1997, p. 3)

Ao final da construção do mapa conceitual ainda existe um complemento que deve ser feito. O autor do mapa deverá explicar o seu mapa conceitual em forma de texto para que aquele que olhe o mapa seja capaz de entender a forma como os conceitos foram organizados, pensados e ligados. Uma explicação por vídeo de como se fazer um mapa conceitual pode ser assistida acessando o *link* <<https://www.youtube.com/watch?v=RThwilejKw0>>.

## APÊNDICE B

### “Colocando a mão na massa” – instruções gerais

Chegou o momento de colocar a “mão na massa”. O grupo deverá construir uma maquete de casa em um terreno de medida 10 metros por 20 metros. A área de construção da casa é de no mínimo 70m<sup>2</sup> e deve possuir condições mínimas para a sobrevivência do ser humano. A casa a ser construída deverá ser do tipo térreo, ter uma cobertura de telhado no qual o número de caídas de água seja menor ou igual a quatro. Construa o madeiramento do telhado que sustenta a cobertura e deixe-a móvel para que se possa ver o madeiramento do telhado. A imaginação, a criação e o uso de materiais para construir a maquete são por conta de vocês. Tudo o que será desenvolvido pelo grupo deverá ser sistematizado em um relatório final contendo:

- fotos;
- passos;
- pensamentos do grupo em cada etapa da construção;
- dificuldades;
- facilidades;
- cálculos;
- definições de conceitos matemáticos utilizados
- ferramentas utilizadas;
- materiais utilizados;

O relatório deverá ser redigido e impresso pelo grupo para ser entregue ao professor no final da apresentação da maquete pelo grupo.

A atividade da **primeira fase** da construção da maquete consiste em:

1º Escolher um material para servir de base para a construção do esboço da planta baixa.

2º Criar o esboço da planta baixa, a escolha fica por conta de cada grupo desde que atenda as instruções iniciais;

3º Após a escolha do esboço de planta baixa, construa-a no material da base escolhida, utilizando as ferramentas solicitadas (compasso, régua, lapiseira, borracha e caneta).

A **segunda fase** da construção da maquete consiste na construção das paredes com os espaços destinados as janelas e portas. Para sua construção dê ênfase para a utilização do compasso para construir retas perpendiculares e retas paralelas. O material a ser utilizado fica a critério do grupo

A **terceira fase** da construção da maquete tem como objetivo a construção do madeiramento do telhado e sua cobertura. A escolha do material para fazer o madeiramento e cobertura fica por conta do grupo. Vocês podem optar por fazer uma pesquisa na internet para ver como são construídos os madeiramentos e coberturas para que possam usar como exemplo ou modelo para a sua maquete. Fiquem atentos em algumas especificidades que o madeiramento do telhado deva ter, por exemplo, qual a distância entre os caibros, tesouras, entre outras. Lembrando que a cobertura deve ser móvel para que se possa ver o madeiramento.