Contribuições para o ensino de triângulos com o uso do tratado *The Trigonall Sector* e o instrumento setor trigonal

Michele de Souza Moraes
Marisa da Silva Dias

Apoio:

Universidade Estadual Paulista – UNESP
Faculdade de Ciências
Programa de Mestrado Profissional – Docência para a Educação Básica

Supervisão geral:

Prof.ª Dr.ª Marisa da Silva Dias

Elaboração:

Michele de Souza Moraes

Design do material:

Éder Geraldo Moraes

Ilustrações:

Imagens elaboradas e fotografadas pela autora

Moraes, Michele de Souza.

Contribuições para o ensino de triângulos com o uso do tratado *The Trigonal Sector* e o instrumento setor trigonal / Michele de Souza Moraes ; orientadora: Marisa da Silva Dias. – Bauru : UNESP, 2017
27 f. : il.

Produto educacional elaborado como parte das exigências do Mestrado Profissional em Docência para a Educação Básica da Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru
Disponível em: www.fc.unesp.br/posdocencia

1. História da matemática. 2. Ensino de matemática. 3. Setor trigonal. I. Dias, Marisa da Silva. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências. III. Título.

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Este material apresenta contribuições para o ensino dos triângulos na educação básica, tal produção destina-se a professores de Matemática que buscam relacionar a história e o ensino de matemática.

Este livreto é um recorte da dissertação *Setor Trigonal: contribuições de uma atividade didática na formação de conceitos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática* [1], de Michele de Souza Moraes, sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Marisa da Silva Dias, do programa de pós-graduação Docência para a Educação Básica da Faculdade de Ciências – Universidade Estadual Paulista (UNESP). Desse modo, para melhor compreensão dessa produção sugerimos a leitura da dissertação citada, uma vez que o livreto é o produto final, sendo parte integrante da pesquisa.

As contribuições que serão descritas partiram da pesquisa realizada com um grupo de estudantes do ensino médio (1ª e 2ª séries) de uma escola estadual, entretanto existe a possibilidade de adaptações para outros níveis de ensino que apresente em sua proposta curricular o ensino dos triângulos, como por exemplo, 8º e 9º anos. A finalidade desse livreto não é relatar o desenvolvimento dessa intervenção, mas sim, fornecer contribuições para a elaboração de uma atividade didática, sobre os triângulos, que vise a formação de conceitos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática.

A atividade é baseada em um tratado intitulado *The Trigonall Sector* publicado em 1650 por John Chatfeilde, o documento traz a descrição do instrumento chamado Setor Trigonal e algumas representações que relacionam os triângulos e razões trigonométricas. Esse instrumento não existe hoje, porém consideramos uma oportunidade aos estudantes de realizarem um *diálogo* com as produções de conhecimento do passado, que refletem nos nossos dias.

Destacaremos algumas potencialidades didáticas a partir de seis descrições apresentadas no tratado com o uso do instrumento setor trigonal. Cabe ressaltar que o documento analisado trata-se de uma tradução para o português do original (inglês arcaico), sendo assim, a escrita se difere da utilizada atualmente, assim como, alguns termos matemáticos, como veremos posteriormente. O tratado, traduzido,

[1] Disponível em: http://www.fc.unesp.br/#!/pos-graduacao/mestrado-doutorado/mestrado-profissional-em-docencia-para-a-educacao-basica/dissertaes-e-produtos/dissertacoes-e-produtos/

não será disponibilizado na íntegra, uma vez que a tradução não foi publicada, desse modo, quando utilizamos trechos traduzidos do tratado indicamos ao final o termo tradução livre, esses foram extraídos da dissertação mencionada.

2 O INSTRUMENTO SETOR TRIGONAL

A fim de contextualizar historicamente, apontaremos brevemente algumas considerações sobre o uso de instrumentos matemáticos no século XVI, assim como a apresentação e reprodução do instrumento setor trigonal.

2.1 Instrumentos matemáticos

Dias e Saito (2014) destacam que muitos instrumentos matemáticos ganharam destaque a partir do século XVI, quando a busca por instrução em geometria e aritmética mais prática foi necessária para o desenvolvimento de técnicas de navegação, agrimensura, artilharia, entre outras. Além disso, as pessoas que possuíam conhecimento para a construção e manipulação desses instrumentos eram os artesãos e os *praticantes de matemáticas* (estudiosos que se interessavam por questões mais práticas da matemática).

O instrumento setor trigonal "permite estabelecer diferentes relações entre os lados, os ângulos e as alturas de triângulos retângulos" (DIAS; SAITO, 2014, p. 1230).

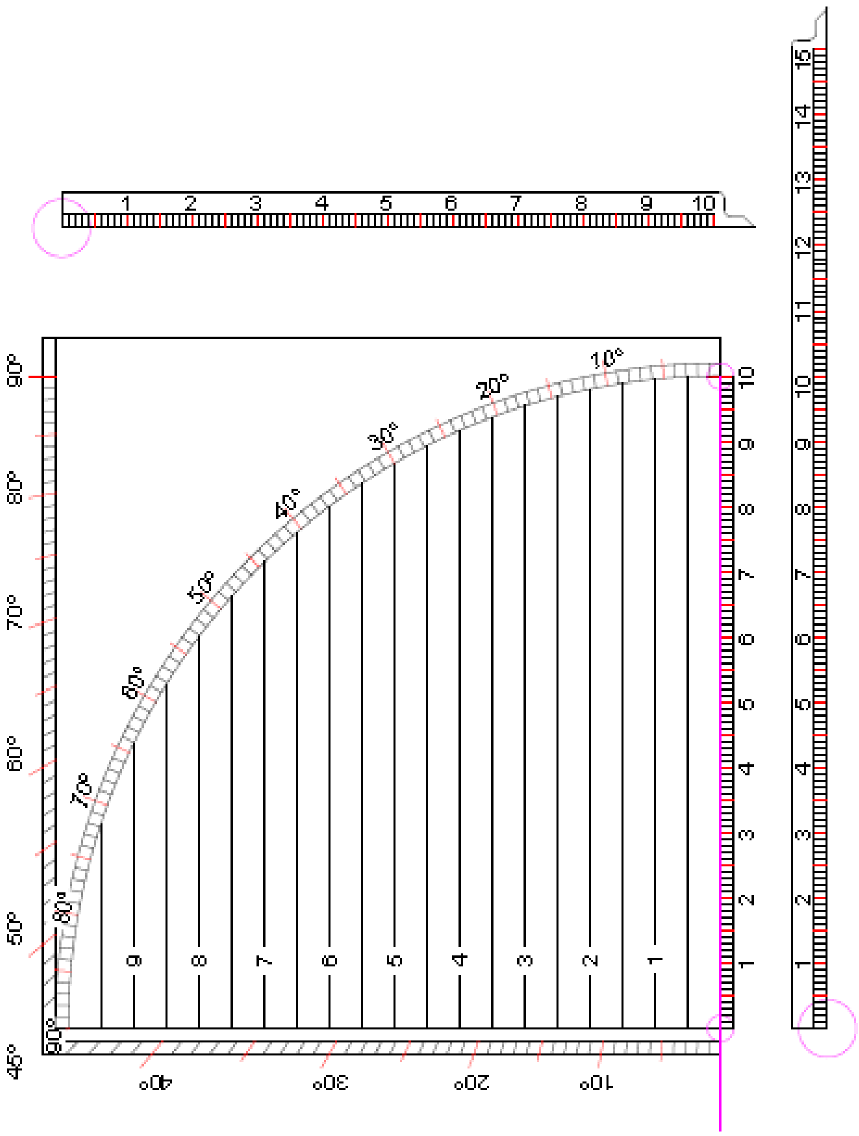
O uso do tratado é uma proposta para aproximar história da matemática do ensino e aprendizagem da matemática (DIAS; SAITO, 2014), além disso, o documento se afigura "como potencial recurso para elaboração de propostas didáticas que contemplem a formação do conceito matemático" (DIAS; SAITO, 2014, p. 1228).

Desse modo, o uso do tratado e do instrumento setor trigonal traz conhecimentos que estão agregados a eles, que por sua vez, faz com que os conceitos que são ensinados aos estudantes tenham significado e não sejam transmitidos como algo pronto, acabado e descontextualizados.

2.2 Reprodução do instrumento setor trigonal

O documento que apresenta a descrição do instrumento setor trigonal também traz seu molde, esse foi reproduzido em um programa de computador (*Corel Draw*) de modo que as marcações presentes no instrumento ficassem mais nítidas para a utilização com estudantes. A seguir temos a reprodução da imagem do molde do instrumento. Ao final do livreto disponibilizaremos esse molde para que o professor possa imprimi-lo.

Molde do instrumento



O autor do tratado relata que:

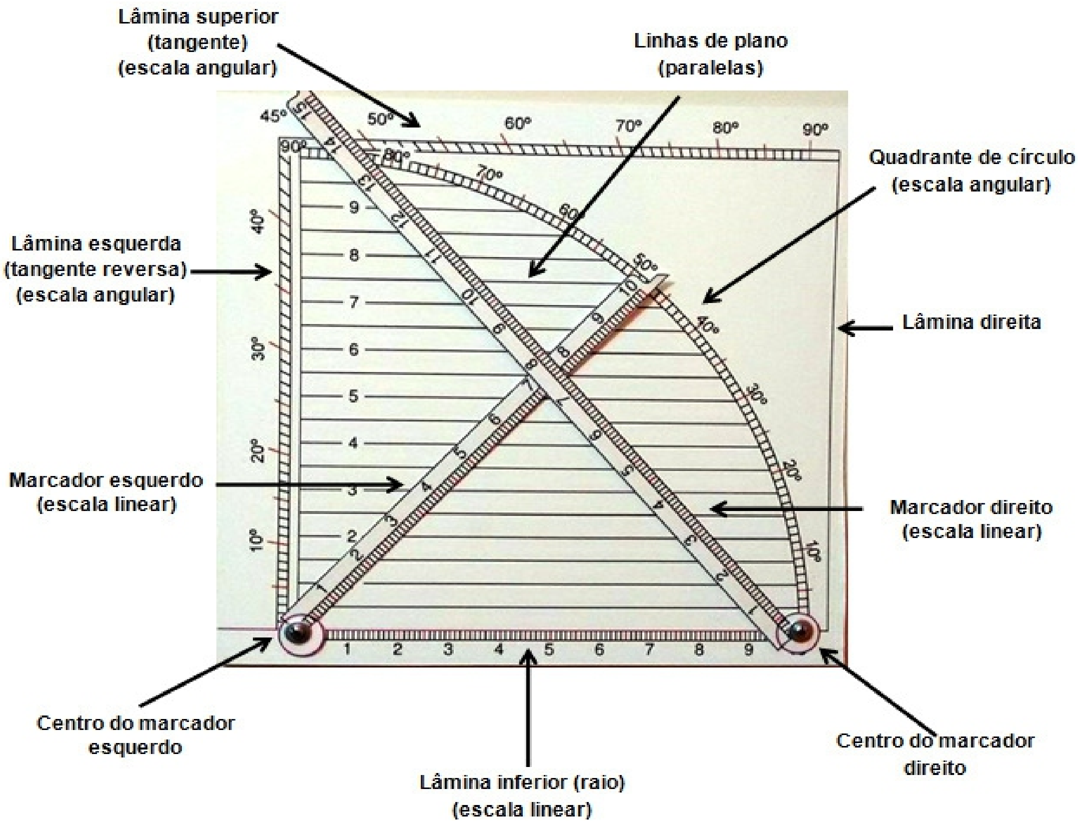
> **Ele consiste de uma placa quadrada de metal, ou de madeira, em cujos lados são fixadas lâminas, ou longos filetes, que se projetam um pouco além da placa nas beiradas dos lados. Além disso, contém dois marcadores que são fixados em duas extremidades de um dos lados da placa. Estes marcadores movem-se em torno de seus respectivos centros (ou extremidades) e podem ser aplicados um sobre o outro de modo a cruzarem-se e a formarem um ângulo entre si. Este ângulo deverá completar 180*gr*. juntamente com os outros dois ângulos formados pelos dois marcadores e o Raio, isto é, o lado do quadrado que contém os dois centros em que são fixados os marcadores (CHATFEILDE, 1650, p. 1, tradução livre).**

No tratado o autor descreve que o instrumento consiste em uma placa quadrada de metal ou de madeira, porém por uma questão de custo e praticidade realizamos os seguintes procedimentos para a reprodução do instrumento:

Aumentamos as dimensões do molde;
Imprimimos 25 instrumentos em uma folha de papel adesivo;
Colamos a folha adesiva com os moldes em uma placa de PS (Poliestireno) de 2m x 1 m;
Cortamos os moldes do instrumento e para prender os marcadores furamos o espaço destinado a eles como uma furadeira e os prendemos com parafusos e porcas, deixando-os móveis.

As informações explicitadas pelo autor e a imagem do instrumento presente no documento nos dão noções de como poderia ser a montagem do setor trigonal no encaixe de suas partes. A imagem a seguir mostra o instrumento montado e com a descrição de suas partes, conforme nomenclatura usada no tratado.

Instrumento setor trigonal, com suas partes



O princípio do funcionamento desse instrumento são as representações de triângulos, razão pela qual o setor recebe seu nome, isto é, "trigonal" no sentido de que os dois marcadores móveis podem ser ajustados para formar três ângulos (DIAS; SAITO, 2014).

Nota-se que algumas partes do instrumento estão na escala linear (lâmina inferior e os dois marcadores) e outras na escala angular (lâmina esquerda, lâmina superior e quadrante de círculo). Para a escala linear na época não havia uma padronização para a medida de comprimento, por isso, no tratado o autor utiliza o termo “partes” para se referir a um comprimento linear, já para a escala angular o autor utilizada o símbolo “*gr*” (graus). Os dois marcadores devem ser fixados de modo que permita movê-los.

3 POTENCIALIDADES DIDÁTICAS NO USO DO INSTRUMENTO SETOR TRIGONAL

Nesse tópico apresentaremos algumas representações descritas no tratado *The Trigonall Sector* que utilizam ou não o instrumento setor trigonal. Além disso, apresentaremos trechos do tratado traduzido para que o professor possa ter contato com a linguagem matemática utilizada no século XVI.

3.1 Representar qualquer triângulo retângulo sendo dois de seus ângulos conhecidos.

A descrição inicial dessa representação refere-se à classificação dos triângulos de acordo com seus lados e ângulos.

Todos os tipos de triângulos são distinguidos de duas formas.
Em primeiro lugar, por seus lados e, desse modo, são chamados. 1 Equilátero, que tem todos os lados iguais. 2 Isósceles, que tem somente dois lados iguais e o terceiro lado diferente. 3 escaleno, isto é, triângulos cujos lados não são iguais.
Em segundo lugar, por seus ângulos, e eles são, 1 Retângulo, que contém um ângulo reto. 2 Obtusângulo, em que um dos ângulos é obtuso ou maior que um ângulo reto, que é superior a 90 *gr*. 3 Acutângulo, em que todos os ângulos são inferiores a 90 *gr*. Note-se que três ângulos de cada triângulo são iguais a dois ângulos retos, que é 180 *gr*. (CHATFEILDE, 1650, p. 7, tradução livre).

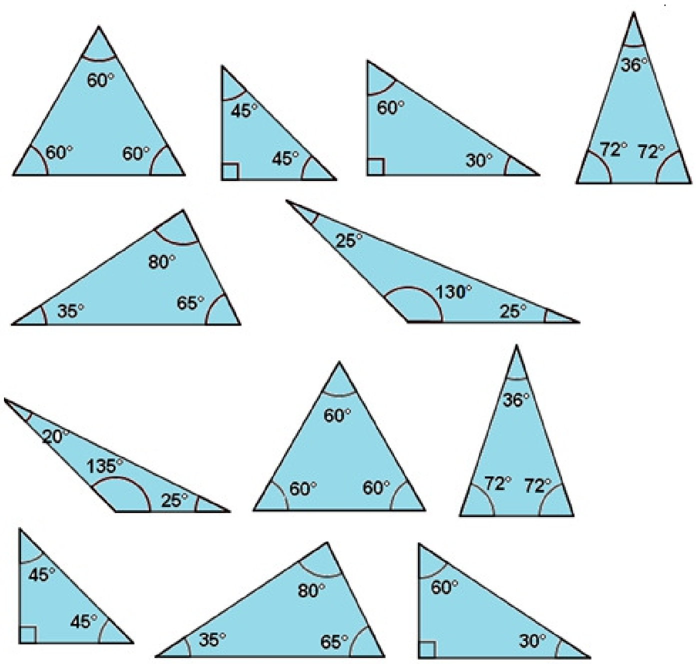
O trecho acima é a tradução do documento original e podemos observar que a estrutura textual se difere da que utilizamos atualmente, assim como alguns termos matemáticos que não são usuais em livros didáticos, como, por exemplo, o uso de *gr.* para representar graus (“°”) ou o termo *igual* para representar congruente. As terminologias presentes no tratado pode mediar discussões e reflexões acerca da constituição da linguagem matemática historicamente, além disso, o professor pode dialogar com os estudantes sobre o entendimento que tiveram ao ler o trecho acima, se já ouviram falar sobre esses tipos de triângulos, o que entenderam ao ler a última frase do trecho, por exemplo.

Com o intuito de familiarizar os estudantes com termos que são abordados no tratado, elaborou-se um quadro e doze triângulos relacionando a classificação dos triângulos quanto aos lados e os ângulos.

Modelo do quadro

		Quanto aos lados		
		Equilátero	Isósceles	Escaleno
Quanto aos ângulos	Acutângulo			
	Retângulo			
	Obtusângulo			

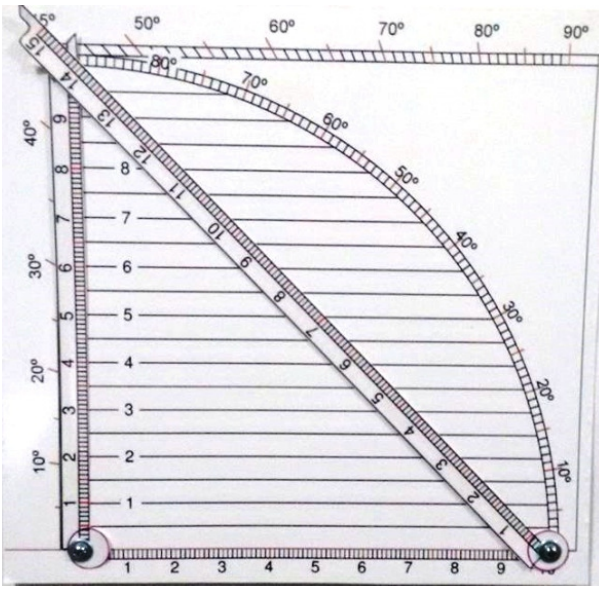
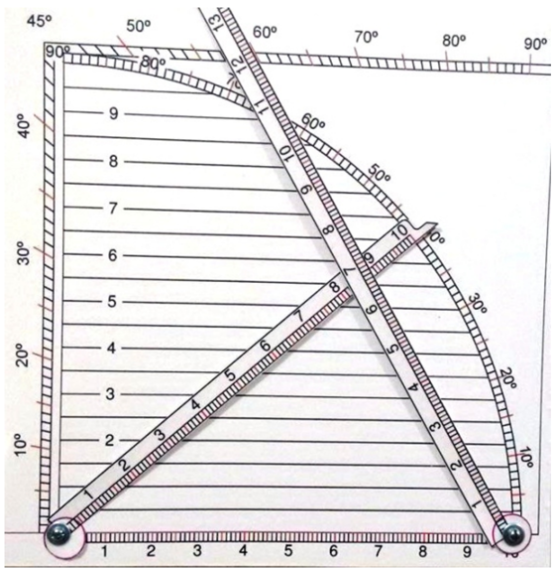
Sugestão de triângulos



Os estudantes devem observar e classificar os triângulos segundo a relação entre seus lados e ângulos. Assim, pode recortar as figuras e colá-los no campo adequado, assim como justificar cada escolha. Intencionalmente foram fornecidos uma quantidade de figuras de triângulos maior do que os espaços em branco do quadro, para não induzir os estudantes que cada campo deva ser preenchido com uma figura.

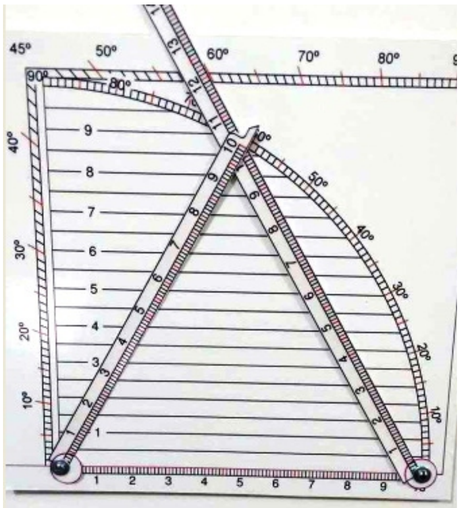
Os estudantes podem compartilhar verbalmente suas escolhas e justificativas para o preenchimento do quadro, além disso, não existe triângulo retângulo equilátero e obtusângulo equilátero, desse modo, o professor pode analisar como o estudante relacionou as informações presentes no tratado com a situação proposta, ou seja, mobilização de conhecimento.

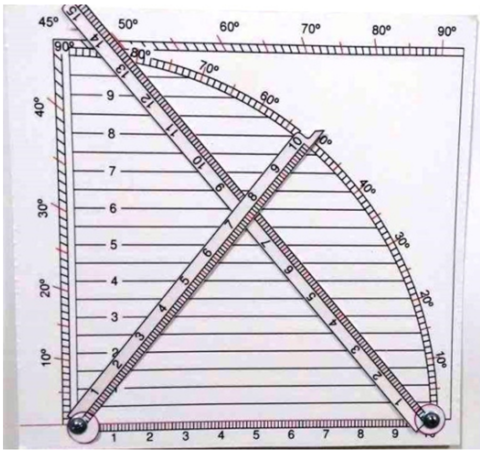
Após as discussões sobre o quadro sugerimos que os estudantes apresentem os triângulos no instrumento setor trigonal ou até mesmo exemplos diferentes dos citados.

Triângulo isósceles retângulo	**Triângulo escaleno acutângulo**
	

O tratado descreve a classificação de diferentes triângulos, entretanto, daremos destaque ao triângulo isósceles, que segundo o documento *tem somente dois lados iguais e o terceiro lado diferente*. A definição de triângulo isósceles nos livros didáticos atuais, bem como na estrutura da matemática atual, é apresentada como o triângulo que possui dois lados congruentes sem mencionar o terceiro. Logo, o triângulo equilátero também é isósceles, diferentemente da descrição de triângulo isósceles apresentada no tratado. Desse modo, o professor também pode refletir sobre o processo de construção de um significado, que também é histórico e nem sempre permanece do mesmo modo.

Essa discussão ocorreu durante a aplicação da atividade didática com estudantes do ensino médio. Foi solicitado que representassem um triângulo isósceles acutângulo, um dos estudantes apresentou um triângulo equilátero, diferentemente dos outros colegas que apresentaram triângulos somente com dois ângulos congruentes. Os estudantes argumentaram que tal triângulo (equilátero) não poderia ser considerado isósceles acutângulo, já que um dos lados deveria ser diferente, considerando o descrito no tratado. Essa situação foi propícia para discussão sobre o papel das definições matemáticas.





3.2 Representar qualquer triângulo retângulo

Na obra *The Trigonall Sector* o autor descreve a representação de qualquer triângulo retângulo com a finalidade de mostrar como encontrar a tangente e a secante de qualquer ângulo.

Gire o marcador esquerdo em direção da lâmina da Tangente, pois, desse modo, ele faz um ângulo reto com o Raio. Em seguida, gire o marcador direito em direção ao grau do outro ângulo conhecido na linha Tangente e, assim, os dois marcadores e o raio resultarão num Triângulo, com as proporções dos lados entre si.

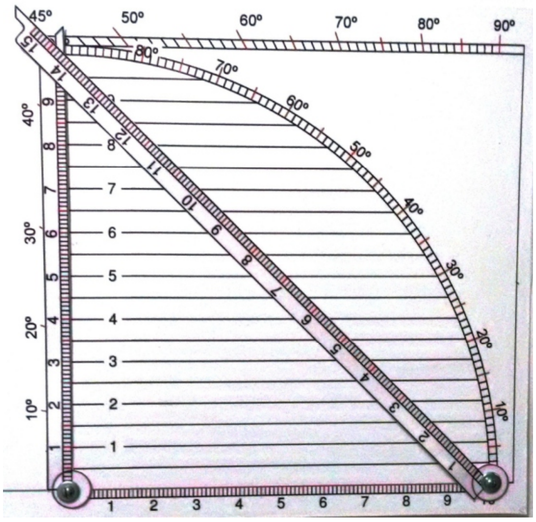
Suponhamos que os dois ângulos conhecidos sejam 90 e 45, a distância entre os centros, o Raio, terá 100 partes, então o marcador direito deverá cortar o marcador esquerdo, também, em 141 partes.

Um desses lados é o Raio, o segundo uma Tangente de 45, que é sempre igual ao Raio, o terceiro, a Secante de 45, que é uma linha traçada a partir do centro através

da borda do círculo até encontrar a tangente (CHATFEILDE, 1650, p. 8, tradução livre).

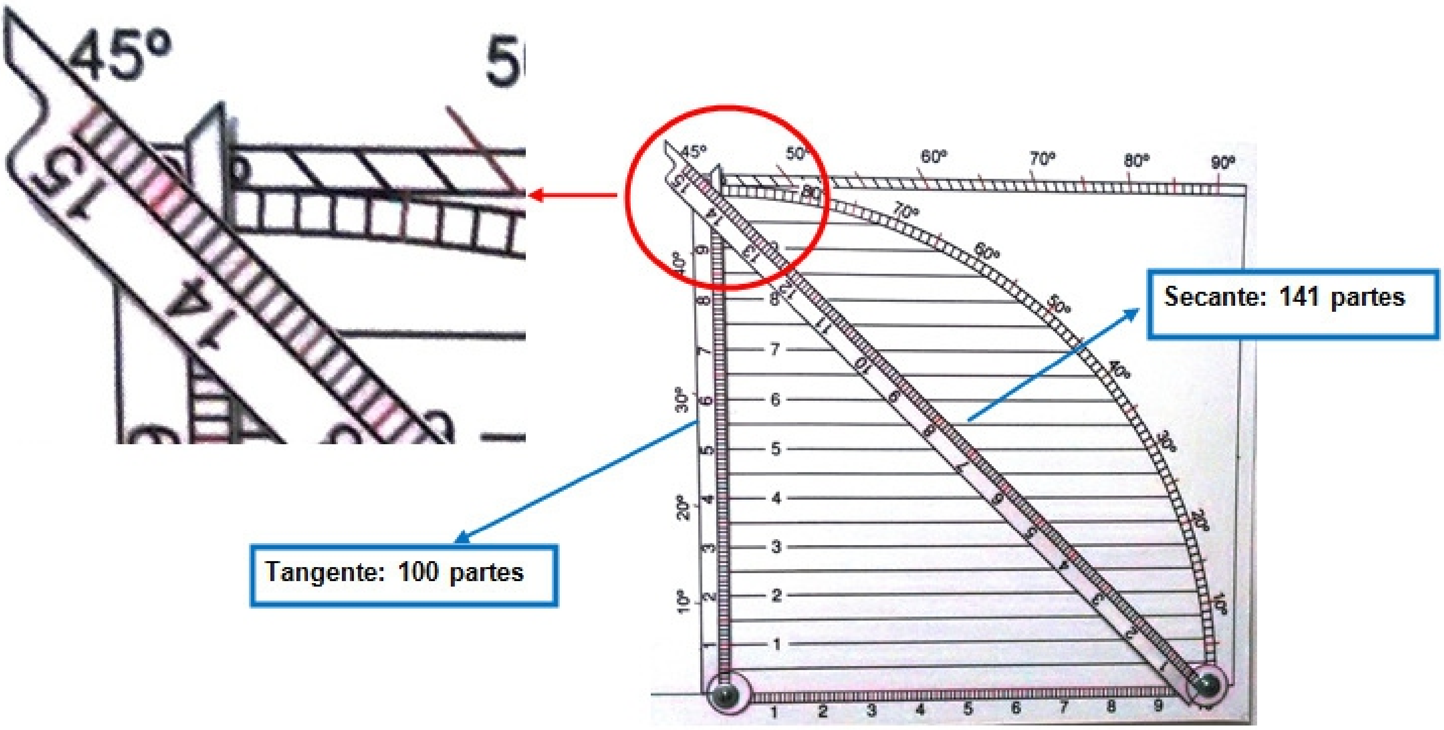
Segundo a descrição do autor, com o instrumento é possível representar um triângulo retângulo posicionando os marcadores nas escalas angulares correspondentes aos ângulos de 90° e 45°, como mostra a imagem a seguir.

Representação de um triângulo retângulo, com os ângulos de 90° e 45°, no setor trigonal



Na imagem acima temos a representação do triângulo descrito no tratado. A tangente e a secante do ângulo de 45 graus são determinadas com o encontro dos dois marcadores. O marcador esquerdo sobrepõe à lâmina esquerda, formando ângulo de 90° com o raio (na base do instrumento da figura). Com o movimento do marcador direito é possível representar ângulos de 0° a 90° com o raio do instrumento. A medida dos ângulos é dada pela escala angular (lâminas esquerda e superior) e a medida dos lados do triângulo, tangente e secante pela escala linear.

Segundo as orientações do autor, o valor da tangente de 45° coincide com o marcador esquerdo (cateto do triângulo), e da secante de 45° com o marcador direito (hipotenusa do triângulo). Ou seja, as medidas da tangente e da secante são fornecidas pelas escalas que estão sobre os marcadores no instrumento. As razões que determinam a tangente e a secante ficam como subentendidas, como veremos adiante.



O autor utiliza a escala linear, conforme convém, unidade ou subunidades. Sendo assim, o raio do instrumento pode ser dividido em 10 partes ou 100 partes.

Se o raio for dividido em 100 partes temos a secante de 45 graus como 141 partes do marcador e a tangente 100 partes.

Em linguagem atual, a proporção para a secante e para tangente de 45° fica representada do seguinte modo:

Tangente de 45°

$$tg\,45° = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ ângulo\ de\ 45°}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ ângulo\ de\ 45°\,(\text{Raio})} = \frac{1}{1} = \frac{10}{10} = \frac{100}{100}$$

Secante de 45°

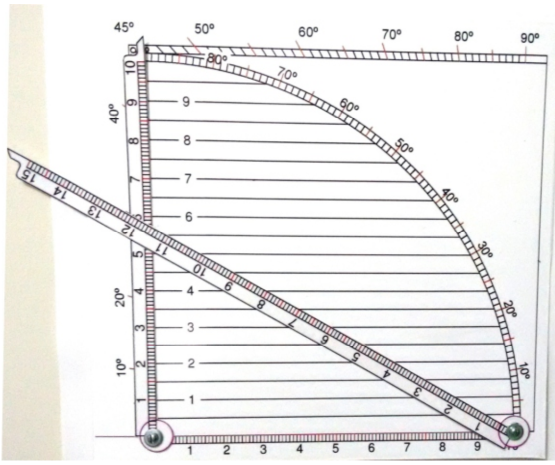
$$\sec 45° = \frac{medida\ da\ hipotenusa\ ao\ ângulo\ de\ 45°}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ ângulo\ de\ 45°\,(Raio)} = \frac{1{,}41}{1} = \frac{14{,}1}{10} = \frac{141}{100}$$

Do ponto de vista didático, podemos explorar algumas ideias relacionadas à representação descrita. Nos livros didáticos, as relações trigonométricas no triângulo retângulo normalmente iniciam-se pelo seno, cosseno e tangente e as outras relações são definidas pelos seus inversos algebricamente. A representação no setor trigonal permite abordar a tangente e a secante sem utilizar nenhum recurso algébrico.

A ilustração fixada no instrumento (imagem anterior) representa um triângulo retângulo isósceles, considerando o raio do instrumento 100 partes, temos a secante de 45° igual a 141 partes, já a medida da tangente de 45° coincide com a medida do raio do instrumento. Desse modo, para o triângulo retângulo representado, temos que $\sec 45° = \sqrt{2}$ e a $tg\, 45° = 1$.

Mostraremos outra representação de um triângulo retângulo e a medida da tangente e secante de 30°.

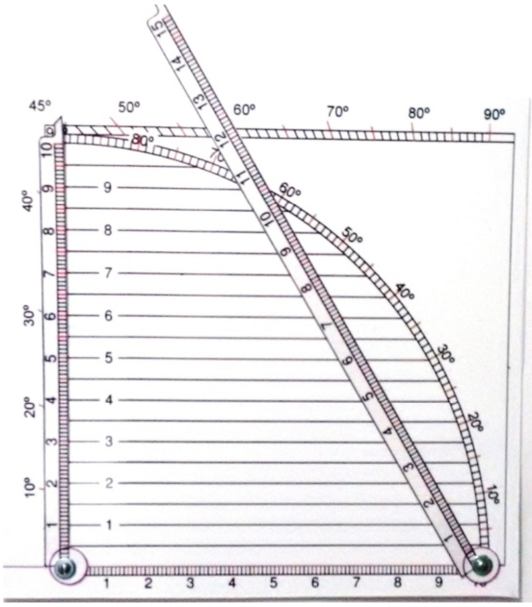
Representação de um triângulo retângulo, com os ângulos de 90° e 30°, no setor trigonal



Se considerarmos o raio do instrumento sendo dividido em 10 partes, teremos a medida da tangente de 30° igual a 5,7 partes e a medida da secante como 11,5 partes. Fazendo a proporção do raio em 100, teremos 57 partes para a tangente e 115 partes para a secante. Destacamos aqui o potencial didático de trabalhar com as proporções.

O tratado traz ainda a representação da tangente e secante para ângulos maiores que 45°, já que se o marcador do lado esquerdo forma um ângulo reto com o raio e o outro marcador ficar em 60°, por exemplo, não haverá interseção dos marcadores, como mostra a figura a seguir.

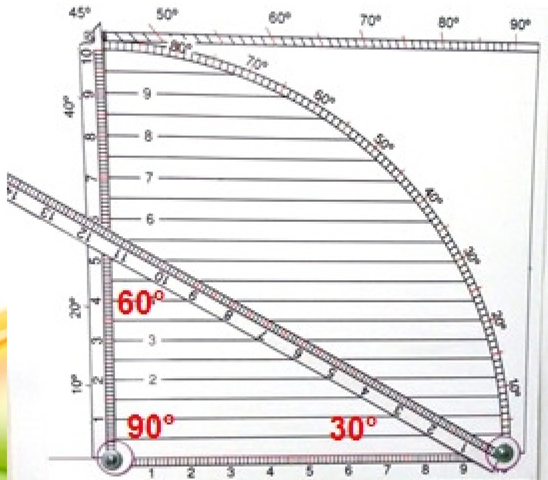
Representação de um triângulo de 90° e 60° no setor trigonal



Se um dos ângulos for maior que 45° não é possível a representação do triângulo como vínhamos fazendo, já que os marcadores não se interseccionam. Nesse caso, as orientações do autor são:

> **[...] se um dos ângulos conhecidos estiver acima de 45: e o outro 90 *gr*, então coloque o marcador na tangente de seu complemento para 90 e, em seguida, deverão as partes sobre o marcador do lado esquerdo representar o Raio, e o Raio do Instrumento representará a tangente, e o marcador do lado direito representará a secante (CHATFEILDE, 1650, p. 8, tradução livre).**

Vamos exemplificar a construção de um triângulo com os ângulos de 90° e 60° segundo as orientações do autor. Sendo assim, o marcador do lado esquerdo formará um ângulo reto com o raio do instrumento. Como o marcador direito não interseciona o esquerdo em 60° (vide figura anterior), utilizaremos o complementar deste que é 30°. Logo, a representação formará um triângulo com os ângulos de 90° e 30°. Entretanto, o terceiro ângulo possui a medida

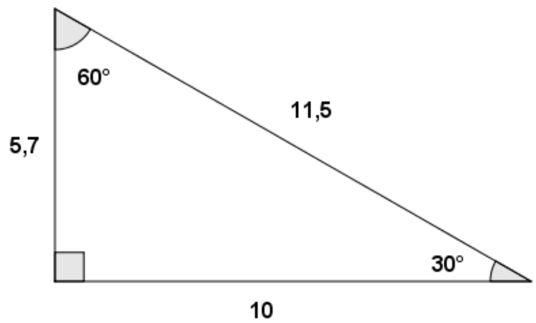


de 60° (pois, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°).

Para encontrarmos a medida da Tangente de 60° (imagem anterior) as instruções do tratado indicam que devemos fazer as proporções entre o raio do instrumento e o marcador esquerdo (no ponto que intercepta o marcador direito) (CHATFEILDE, 1650).

Para a secante de 60° deve-se fazer as proporções do marcador direito para o marcador esquerdo (no ponto em que se interceptam) (CHATFEILDE, 1650) . Assim, considerando o raio do instrumento sendo 100, usaremos as proporções para encontramos a Tangente e a Secante de 60°.

Na linguagem atual temos:



Tangente de 60°

$$tg\,60° = \frac{cat.\,oposto\,ao\,ângulo\,de\,60°}{cat.\,adj.\,ao\,ângulo\,de\,60°}$$

$$tg\,60° = \frac{100}{57}$$

Secante de 60°

$$\sec 60° = \frac{hipotenusa}{cat.adj.\text{ao ângulo }60°}$$

$$\sec 60° = \frac{115}{57}$$

Assim, para diferentes ângulos é possível encontrar a tangente e a secante correspondente. Podemos observar que mesmo não conhecendo as relações trigonométricas da tangente e secante é possível encontrar suas respectivas medidas utilizando o instrumento. Porém, para a educação básica o professor pode explorar as proporções e discutir as relações trigonométricas, e como já foi discutido anteriormente, a secante é apresentada nos livros didáticos como a inversa do cosseno. Com o uso do setor, a secante é abordada no triângulo retângulo como sendo a razão entre as medidas da hipotenusa e do cateto adjacente do respectivo ângulo.

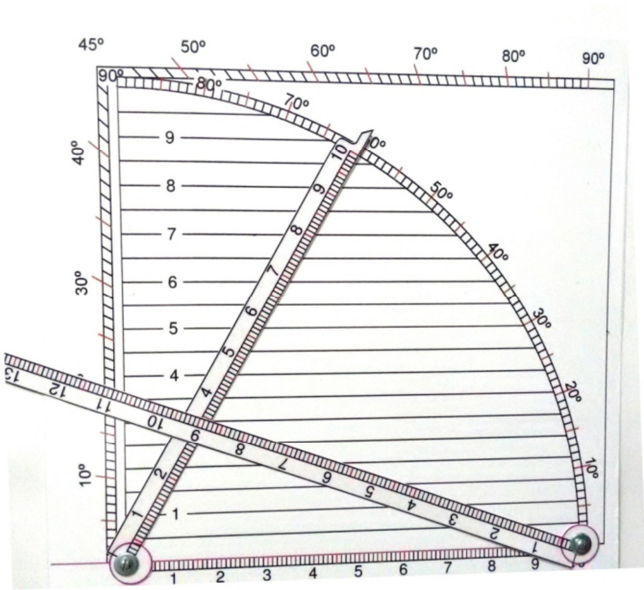
3.3 Representar qualquer triângulo obtuso

Nessa representação, o autor traz instruções de como representar um triângulo obtusângulo por meio do instrumento.

> **Suponhamos que os dois ângulos conhecidos sejam 60 e 100 *gr*. esse triângulo deve necessariamente ser obtuso, porque 100 *gr*. é maior do que 90 *gr*., e porque nenhum dos marcadores pode formar um ângulo maior do que 90 *gr*., portanto, o ângulo obtuso deve ser encontrado na intersecção de dois marcadores, desse modo, para encontrar este triângulo, faço assim: adicione os dois ângulos conhecidos e eles farão 160: substraia deste 180, e assim restará 20, que é o terceiro ângulo, portanto, para representar isso, coloque um marcador em 20 *gr*. e o outro em 60 *gr*. e onde eles se cruzarem, a intersecção, formará um ângulo de 100 *gr*., porque todos os três ângulos devem fazer exatamente 180 *gr*. e os marcadores, assim aplicados, darão o triângulo procurado, e as divisões dos marcadores, juntos em suas intersecções com o raio, mostrarão as proporções dos três lados da mesma, como nos exemplos anteriores (CHATFEILDE, 1650, p. 11, tradução livre).**

O instrumento possui uma limitação em indicar diretamente com os marcadores um ângulo obtuso, já que a escala angular do instrumento varia de 0° a 90°. Nesse caso, utilizamos a relação da soma dos ângulos internos de um triângulo, já que conhecemos dois ângulos (100° e 60°) e não havendo a possibilidade de construir um triângulo com vértices nos centros dos marcadores, então somam-se os ângulos dados ($100° + 60° = 160°$) e encontramos o suplementar (20°) que será a medida do terceiro ângulo, assim, os marcadores formarão um triângulo com ângulos internos de 20°, 60° e 100°, sendo que o último não está indicado pelas escalas do instrumento, a imagem a seguir ilustra tal situação.

Representação de um triângulo obtusângulo por meio do instrumento setor trigonal



Uma potencialidade didática é a abordagem diferenciada do conceito da soma dos ângulos internos de um triângulo, não apenas para descobrir um terceiro ângulo sendo dois deles conhecidos em um exercício. Mas, como esse conhecimento é imprescindível para a abrangência do uso do instrumento.

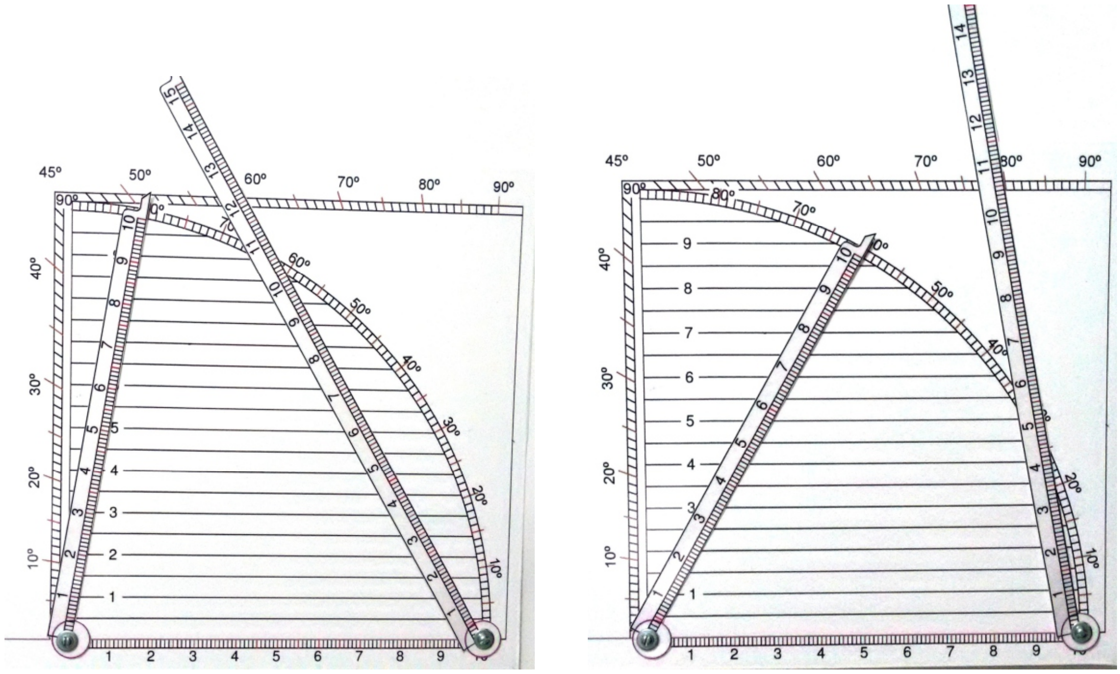
3.4 Representar qualquer triângulo acutângulo

Por semelhante modo ao anterior, o tratado dá instruções para a representação de qualquer triângulo acutângulo.

Isto é feito apenas aplicando-se os marcadores nos graus dos ângulos conhecidos na linha tangente e no quadrante.
Mas, se qualquer dos ângulos estiver acima de 60 ***gr.*** **então ele deve ser suprido, colocando-se um dos marcadores no complemento de ambos, adicionados em conjunto, até 180** ***gr.*****, suponhamos que os dois ângulos agudos conhecidos sejam de 60 e 80: os marcadores ao serem aplicados a esses graus na Tangente e no Quadrante não se encontrarão para se cruzarem, portanto, coloque um marcador em 60, e o outro em 40** ***gr.*** **que é o complemento da soma de ambos, 140 para 180, e assim você**

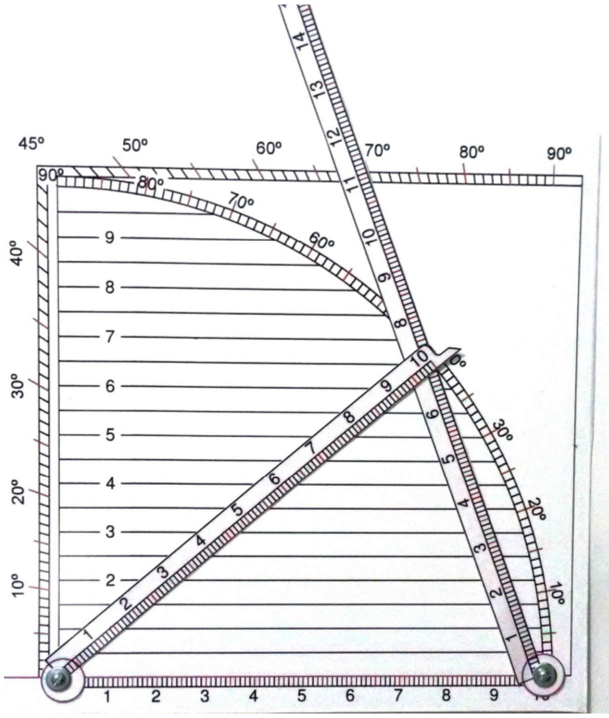
terá o Triângulo procurado, a proporção de seus lados é encontrada da forma como dito anteriormente (CHATFEILDE, 1650, p. 12, tradução livre).

Representações dos ângulos 60° e 80° com vértices nos centros dos marcadores



A construção dos triângulos acutângulos se dá por meio da utilização dos marcadores de forma direta na medida dos ângulos internos indicados. Entretanto, o autor aponta para o fato que se um dos ângulos for maior que 60° deve-se proceder da mesma maneira da representação dos triângulos obtusângulos, utilizando a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo. Todavia, ao analisarmos o instrumento, percebemos que essa limitação apresentada pelo autor não tem validade para todos os ângulos. Tomemos como exemplo um triângulo acutângulo sendo conhecidas as medidas de dois ângulos, 70° e 40°.

Representação de um triângulo acutângulo de 70° e 40° com vértices nos centros dos marcadores



Destacamos como potencial didático para o ensino, o fato de que a representação dos ângulos internos nos centros dos marcadores é limitada para alguns exemplos, entretanto, pode-se articular a soma dos ângulos internos de um triângulo com a representação no instrumento, como já foi explorado. Além disso, também pode-se explorar o fato de que o comprimento do marcador esquerdo, por possuir a mesma medida do raio do instrumento, faz com que seu movimento ao percorrer a escala forme triângulos acutângulos isósceles.

3.5 Encontrar o conteúdo de qualquer um desses triângulos

Nesse tópico, o autor dá instruções para encontrarmos a área de triângulo.

Para efetuar isto, a perpendicular deve ser conhecida que, multiplicada pela metade da base, o produto dará a Área.
Eu mostrei antes como encontrar as proporções de todos os lados, e assim, por conseguinte, o comprimento da base; a perpendicular também pode ser encontrada

com grande facilidade: pois, quando você aplicou os marcadores um contra o outro, assim como o Triângulo foi representado por eles, assim lançando seu olho diretamente nessa interseção e abaixo dos marcadores entre as linhas paralelas, assim você deverá encontrar a distância da base, ou o com primento da perpendicular: que multiplicado como dito anteriormente, dará a Área.

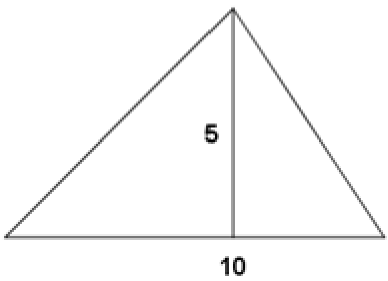
Ou para fazer com o instrumento, eu digo assim

Como 1 para o multiplicador, Assim, o multiplicando, para o produto.

Supondo então que a perpendicular seja 5, e a base 10: cuja metade é 5, que deve ser multiplicado pela perpendicular.

Eu aplico 10 no marcador do lado esquerdo, (que também pode ser contado para 1 ou 100 ou 1000: como a ocasião exigir) até 5, entre os paralelos, em seguida, procurando por 5, sobre o dito marcador, eu o encontro diretamente reunidos com 25 entre os paralelos, que é o número procurado (CHATFEILDE, 1650, p. 13, tradução livre)

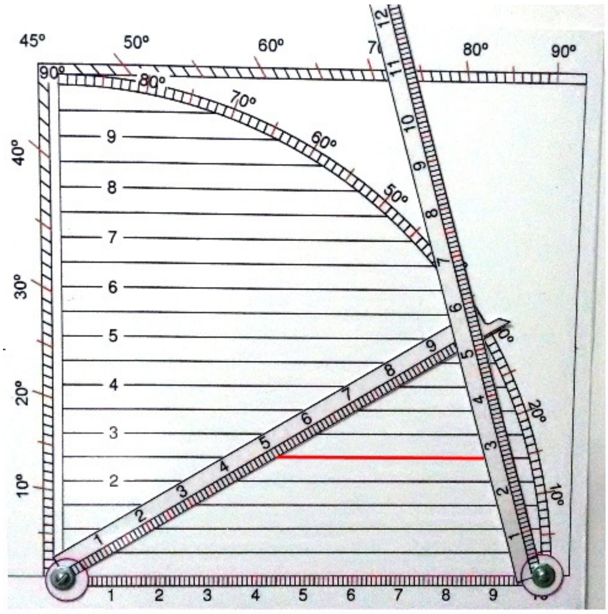
O autor explica como encontrar a área realizando o cálculo aritmético e apenas observando os dados fornecidos pelo próprio documento. Para o primeiro modo devemos conhecer a medida da base e da altura de um triângulo, em seguida multiplicamos a altura pela metade da medida da base.



$$A = \textit{metade da base} \times \textit{altura}$$
$$A = 5 \times 5$$
$$A = 25$$

Para encontrarmos a área do triângulo acima por meio do instrumento, devemos colocar o marcador esquerdo sobre os paralelos, nesse caso no paralelo 5, em seguida localizamos 5 sobre o marcador esquerdo, esse estará sobre 25 nos paralelos, que é a área. Veja a figura a seguir.

Área de um triângulo usando o instrumento setor trigonal



Como um potencial didático pode-se refletir sobre a *perpendicular* (que é a altura do triângulo), assim como o *conteúdo* do triângulo (que está relacionado com a área). Além disso, pode-se explorar a generalização de uma relação que determine a área de qualquer triângulo baseando-se nas instruções fornecidas pelo instrumento. Cabe ressaltar que encontrar a área de um triângulo pelo instrumento está vinculado à base do triângulo sendo sempre igual ao raio (medida fixa).

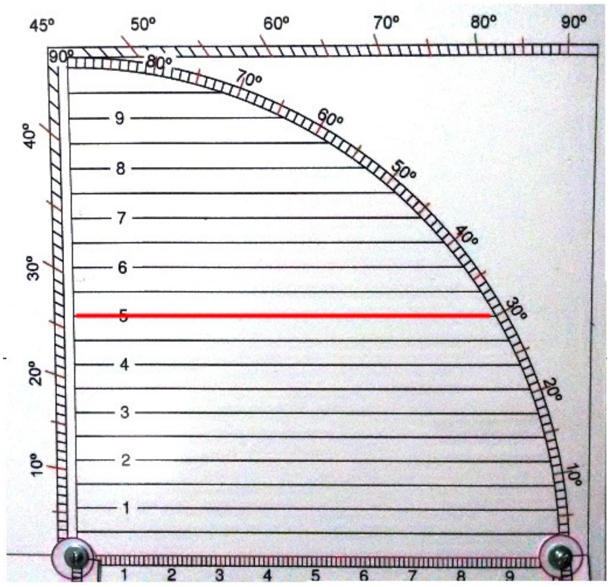
3.6 Encontrar o comprimento de uma linha de senos para qualquer grau

O tratado dá instruções sobre como encontrar o comprimento de uma linha de senos.

Não há mais necessidade de encontrar isso, mas olhar para o grau no quadrante; então, observando, entre os paralelos, apenas reunindo com o grau: você deverá encontrar ali as partes procuradas. Por exemplo, se eu soubesse o comprimento do Seno de 30 *gr*. lançando meu olho sobre o arco de círculo, onde é cortado com o grau de 30: eu o encontro reunindo exatamente na intersecção do paralelo de 5: ou 5000. Concluo então que se o Raio é 10000, o seno de 30 *gr*. deve ser necessariamente 5000.

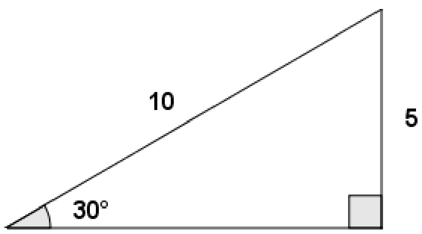
O uso desta linha eu também me remeto aos escritos de outros porque é tão comumente tratado e conhecido de todos (CHATFEILDE, 1650, p. 13, tradução livre).

Representação do seno de 30° pelo instrumento setor trigonal



Pelas orientações do autor, observamos que para encontrar a medida do seno de 30° não será necessário usar os marcadores, uma vez que estes não são mencionados nessa representação. Basta localizar o ângulo no quadrante e por meio do paralelo (que fornece a altura) que parte da representação desse ângulo, tem-se o seu seno. Observa-se um conhecimento tácito, pois não menciona a razão que define o seno, ela fica subentendida.

Lembramos que essa leitura no instrumento é devido o raio de 10. Em um triângulo retângulo, perceberemos a validade das instruções presentes no tratado. A seguir, apresentamos a relação na linguagem atual.



$$sen30° = \frac{5}{10}$$
$$sen30° = 0,5$$

É possível fazer o uso dos múltiplos como já abordados em outros momentos.

Como potencialidade didática, o professor pode explorar as proporções dos lados do triângulo retângulo e refletir com os estudantes sobre a relação trigonométrica do seno. Além disso, os outros ângulos do quadrante não encontram os paralelos em medidas exatas (como foi observado com o seno de 30°), desse modo, para outros encontramos valores aproximados, já que na época era comum o uso de tabelas com os valores com maior precisão (CASTILLO, 2016).

Assim, nessa articulação, acreditamos que a história da matemática favoreça a ampliação dos conceitos ensinados aos estudantes, uma vez que ela permite uma articulação entre a construção do conhecimento e o seu contexto, r essaltando os processos que levaram o homem a constituir o conhecimento como herança cultural da humanidade.

Temos como hipótese que por meio desse instrumento, temos a possibilidade de relacionar conceitos matemáticos com o propósito didático, fazendo dessa forma, a contextualização da matemática no processo histórico e cultural, de tal forma que o estudante tenha conhecimento dos usos da matemática em determinado período histórico.

REFERÊNCIAS

CASTILLO, A. R. M. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso do báculo (*cross-staff*) em *A Boke Named Tectonicon* de Leonard Digges**. 2016. 121 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2016.

CHATFEILDE, J. ***The Trigonall Sector***. London: Robert Leyborn, 1650.

DIAS, M. da S.; SAITO, F. Algumas potencialidades didáticas do “setor trigonal” na interface entre história e ensino de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, p. 1227-1253, 2014.

MORAES, M. de S. **Contribuições para o ensino de triângulos com o uso do tratado *The Trigonall Sector* e o instrumento setor trigonal.** 2017. Dissertação (mestrado). Programa de pós-graduação Docência para a Educação Básica. Universidade Estadual Paulista. UNESP – Campus Bauru.

MOLDE DO INSTRUMENTO