

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática



Gleidson Everton de Alcântara Marques

**ENSINO DE ESFERA
POR MEIO DE APPLETS DO SOFTWARE GEOGEBRA**

BELÉM-PA
2019

Gleidson Everton de Alcântara Marques

**Ensino de Esfera
por Meio de Applets do Software Geogebra**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará, na Linha de Pesquisa Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

BELÉM-PA
2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)

Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Marques, Gleidson Everton de Alcântara

Ensino de esfera por meio de applets do software geogebra /Gleidson
Everton de Alcântara de Marques; orientador Miguel Chaquiam, 2020

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) Universidade
do Estado do Pará, 2020

1. Geometria espacial -Estudo e ensino 2. Esfera. 3. Geogebra (Software).
4. Métodos de ensino. I. Chaquiam, Miguel (orient.) II. Título.

CDD. 23º ed.516.15

GLEIDSON EVERTON DE ALCANTARA MARQUES

ENSINO DE ESFERA POR MEIO DO APPLETS DO GEOESFERA

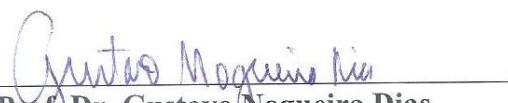
Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam

Data de aprovação: 19/12/2019

Banca examinadora

 . Orientador
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN-RN
Universidade do Estado do Pará

 Examinador Interno
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas–Educação – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-RJ
Universidade do Estado do Pará

 Examinador Externo
Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias
Doutor em Educação – Universidade Nacional de Rosário - Argentina
Escola Tenente Rêgo Barros – Comando da Aeronautica

Belém – PA
2019

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer ao senhor Deus todo poderoso, por ter me guiado, protegido e ajudado a superara as adversidades que surgiram durante todo percurso que me levou a conclusão do curso de mestrado.

Aos meus familiares, pela formação como pessoa e por terem me oportunizado acesso a uma educação de qualidade e, em especial a minha esposa, Gisele Xavier de Macedo, pelo auxílio e motivação para ingresso e para se chegar a finalização do curso. Amo a todos vocês!

A universidade do Estado do Pará disponibilizar o Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, por toda a organização de curso e pela experiência acadêmica que me foi apresentada. Foi incrível.

Aos professores do programa, José Roberto Bibas, Ana Kelly, Maria de Lurdes, Cinthia Maraday, Fábio Alves, Francisco Hermes e Pedro Sá, os quais, dentro de cada disciplina estudada, contribuíram com uma formação de excelência.

Ao meu orientador, Miguel Chaquiam, pelas contribuições quanto a estruturação e ajustes necessários para o bom desenvolvimento de pesquisa realizada.

Aos professores, Natanael Cabral e Gustavo Nogueira Dias pelas colocações diante do texto de qualificação, as quais contribuíram significativamente com o bom desenvolvimento da pesquisa e a versão final desse texto.

A secretária do curso, Glads Serra e coordenação do curso, por nos ajudarem com a demanda administrativa dos processos exigidos pelo curso.

Aos meus amigos da turma 2017, pela amizade construída, pela parceria e troca de conhecimento durante todo o curso, em especial aos amigos Renato Noleto e Thiago Jacob, que nos momentos difíceis formam pessoas sempre nos incentivaram a seguir em frente.

RESUMO

MARQUES, Gleidson Everton de Alcantara. **Ensino de Esfera por Meio de Applets do Software Geogebra.** Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

Este trabalho apresenta resultados obtidos sobre processo de ensino e aprendizagem do sólido geométrico esfera, junto a alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola da rede estadual do Pará, por meio de uma sequência didática fazendo uso de applets do software Geogebra 5.0. Para construção da sequência didática foi utilizado o modelo das Unidades Articuladas de reconstrução Conceitual (UARC) conforme proposto por Cabral (2017), considerando estudos prévios compostos por uma revisão de estudos, uma análise dos livros didáticos utilizados pelas escolas públicas e os resultados de uma pesquisa sobre ensino e aprendizagem junto a professores e alunos. As interações entre alunos e professor/alunos provenientes da aplicação da Sequência Didática foram analisadas por meio de uma combinação entre a Análise Microgenética segundo Góes (2000) e a Análise do Discurso proposta por Scott e Mortiner (2002). A análise das interações decorrentes da aplicação da Sequência Didática apontou para uma melhoria significativa na aprendizagem dos tópicos relacionados ao sólido esfera.

Palavras-chave: Ensino. Matemática. Esfera. Sequência Didática. Geogebra

ABSTRACT

MARQUES, Gleidson Everton de Alcantara. **Teaching Sphere Through Applets of The Software Geogebra.** Dissertation of the Professional Mastership in Mathematics Teaching Program – Universidade do Estado do Pará, Belem, 2020.

This work presents reflections on the teaching and learning process of the solid geometric sphere, with students of the third year of high school in a public school in the state of Pará, through a didactic sequence using applets from Geogebra 5.0 software. For the construction of the didactic sequence, the Articulated Units of Conceptual Reconstruction (UARC) was applied as a model just as proposed by Cabral (2017), considering previous studies composed of a review of studies, an analysis of textbooks used by public schools and the results of a teaching and learning research made with teachers and students. In order to analyze the results from the application of the didactic sequence, it was applied the Microgenetic Analysis of the verbal interactions of teacher / student and student/student according to Góes (2000), the Discourse Analysis according to Scott and Mortiner (2002), besides the student's development in solving questions in comparison with a control group. From the results obtained, students are expected to improve the visualization process, recognize elements and solve questions that make use of the area and volume ideas of the solid sphere and its parts.

Keywords: Mathematics Teaching. Spatial Geometry. Sphere. Didactic Sequence

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: Triângulo Didático	21
FIGURA 2: Intervenções Estruturantes de uma Sequência Didática	26
FIGURA 3: Resultado do Teste de Verificação	33
FIGURA 4: Software para o ensino de volume da esfera.....	39
FIGURA 5: Esfera de revolução	58
FIGURA 6: Superfície da esfera.....	59
FIGURA 7: Secção esférica	59
FIGURA 8: Princípio de Cavalieri	60
FIGURA 9: Clépsidra e Anticlépsidra	60
FIGURA 10: Volume da esfera.....	61
FIGURA 11: Noção intuitiva de volume	62
FIGURA 12: Área da superfície esférica	62
FIGURA 13: Área e volume da esfera por meio do cálculo.....	63
FIGURA 14: Tela do Applet GEOESFERA 1.....	70
FIGURA 15: Tela do Applet GEOESFERA 2.....	72
FIGURA 16: Tela do applet GEOESFERA 3	74
FIGURA 17: Tela do applet GEOESFERA 4	76
FIGURA 18: Tela do applet GEOESFERA 5	78
FIGURA 19: Resolução da Atividade 1 – Grupo D	87
FIGURA 20: Intervenções Avaliativas da Atividade 1 – Aluno D5	88
FIGURA 21: Resolução da Atividade 2 – Grupo A	91
FIGURA 22: Intervenção Avaliativa Aplicativa - Aluno A3	92
FIGURA 23: Resolução da Atividade 3 - Grupo B	95
FIGURA 24: Intervenção Avaliativa Restritiva - Aluno B2	96
FIGURA 25: Intervenção Avaliativa Aplicativa - Aluno B2	97
FIGURA 26: Intervenção Avaliativa Aplicativa - Aluno B2	97
FIGURA 27: Intervenção Avaliativa - Grupo E	101
FIGURA 28: Intervenção Avaliativa Restritiva - Aluno E2	102
FIGURA 29: Intervenção Avaliativa Aplicativa - Aluno E2	103
FIGURA 30: Resolução da Atividade - Grupo A.....	107
FIGURA 31: Intervenção Avaliativa Restritiva – Aluno A3	108
FIGURA 32: Intervenção Avaliativa Aplicativa - Aluno A3	108

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1: Faixa Etária x Tempo de Magistério x Formação Acadêmica	47
GRÁFICO 2: Métodos de Ensino x Formas de Avaliação	48
GRÁFICO 3: Número de alunos atendidos por turma	49
GRÁFICO 4: Dependência de Estudos x Faixa Etária	52
GRÁFICO 5: Afinidade com Matemática x Tempo Dedicado ao Estudo	52
GRÁFICO 6: Entendimento de Explicação x Avaliação do Professor x Relação do conteúdo com o dia a dia.	53
GRÁFICO 7: Métodos de ensino de esfera x Formas de avaliação	55

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1: Tipologia das Situações Didáticas	22
QUADRO 2: Considerações sobre os conteúdos de esfera nos livros analisados....	44
QUADRO 3: Dificuldade de aprendizagem segundo os professores	50
QUADRO 4: Grau de dificuldade para aprender esfera, segundo os alunos	56
QUADRO 5: Descritores do SisPAE (Ensino Médio)	67
QUADRO 6: Descritor do SAEB (Ensino Médio)	68
QUADRO 7: Competências e Habilidades da BNCC (Ensino Médio)	68
QUADRO 8: Sistematização das Atividades da SD	82

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
1. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS	15
1.1 METODOLOGIA DE PESQUISA	15
1.2 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD)	18
1.3 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS (SD)	23
1.4 UNIDADE ARTICULADA DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL (UARC)	24
1.5 ANÁLISE MICROGENÉTICA	27
1.6 ANÁLISE DE DISCURSO.....	29
2. SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE ESFERA.....	32
2.1. REVISÃO DE LITERATURA.....	32
2.1.1 Estudos Diagnósticos.....	33
2.1.2 Estudos Experimentais.....	36
2.1.3 Análise do Livro Didático	42
2.2 CONSULTA AOS PROFESSORES.....	46
2.2.1 Descrição das informações.....	46
2.3 CONSULTA AOS ALUNOS EGRESOES.....	51
2.3.1 Descrição das informações.....	51
3. ASPECTOS MATEMÁTICOS SOBRE ESFERA.....	58
3.1 ESFERA, SUPERFÍCIE ESFÉRICA E SECÇÃO ESFÉRICA.....	58
3.2 VOLUME DA ESFERA	60
3.3 ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA.....	61
3.4 ÁREA E VOLUME DA ESFERA POR MEIO DO CÁLCULO	63
3.5 FUSO ESFÉRICO	65
3.6 CUNHA ESFÉRICA	66
4. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ESFERA	67
4.1 ATIVIDADE 1 - ESFERA	69
4.2 ATIVIDADE 2 - ÁREA DA SUPERFÍCIE.....	71
4.3 ATIVIDADE 3 - VOLUME	73
4.4 ATIVIDADE 4 - FUSO ESFÉRICO	75
4.5 ATIVIDADE 5 - CUNHA ESFÉRICA	77

5. APLICAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	80
5.1 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES.....	80
5.2 ÁNALISE DOS RESULTADOS.....	81
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	109
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	113
8. ANEXOS	117
ANEXO A QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS.....	117
ANEXO B TCLE DOS ALUNOS	121
ANEXO C QUESTIONÁRIO DO PROFESSOR	122
ANEXO D OFICINA DE NIVELAMENTO.....	125
ANEXO E TESTE DE VERIFICAÇÃO DE CONHECIMENTOS PRÉVIOS.....	128

INTRODUÇÃO

Durante a educação básica fui aluno da rede particular de ensino e a minha relação com a Matemática sempre foi muito boa. Essa relação de proximidade acabou me levando ao curso de Licenciatura em Matemática da UEPA no ano de 1998. Durante o curso, em meio as diversas disciplinas cursadas, uma das que mais me atraiu a atenção foi a geometria euclidiana. Através dela, pude ter contato de modo mais formal com a matemática e, entre o estudo de teoremas e suas demonstrações, foi surgindo um gosto especial pela geometria espacial. Tais aspectos vieram a complementar os estudos feitos durante o ensino médio e me proporcionaram uma visão mais ampla sobre o tema.

No ano de 2002, logo após ter concluído o curso, foi aprovado no concurso para professor de Matemática da rede estadual de ensino, onde, desde o primeiro ano como docente, tenho trabalhado com turmas de ensino médio. Durante esses anos como docente, tenho acompanhado de perto a dificuldade dos alunos no que se trata do desenvolvimento de habilidades geométricas, principalmente no que tange a reconhecimento dos sólidos geométricos, visualização em três dimensões e na resolução de questões associadas a cálculo de área e volume dos sólidos geométricos.

Entendo que tais dificuldades podem estar associadas a forma pela qual vem se dando o ensino de geometria espacial nas escolas, sendo que, no geral, os tópicos são trabalhados de forma desvinculada da realidade do aluno, com ênfase sobre a aplicação de fórmulas aplicadas a figuras estáticas, não oferecendo ao aluno a possibilidade de experimentação e manipulação dos sólidos geométricos, pouco favorecendo a investigação matemática e a autonomia na resolução de problemas.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

“A abordagem tradicional, que se restringe à métrica do cálculo de áreas e volumes de alguns sólidos, não é suficiente para explicar a estrutura de moléculas e cristais em forma de cubos e outros sólidos, nem tampouco justifica a predominância de paralelepípedos e retângulos nas construções arquitetônicas ou a predileção dos artistas pelas linhas paralelas e perpendiculares nas pinturas e esculturas. Ensinar Geometria no ensino médio deve possibilitar que essas questões aflorem e possam ser discutidas e analisadas pelos alunos.” (BRASIL, 1997, p. 199)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, apontam ainda que o estudo da geometria deve ser capaz desenvolver a habilidades de visualização, desenho e argumentação lógica na busca de solução para problemas, para que o aluno possa utilizar as propriedades das formas geométricas e compreender o mundo que o cerca.

Para Silva (2014), o estudo de geometria deve possibilitar o desenvolvimento de habilidades que contribuam com o desenvolvimento da própria Matemática, além de servir como instrumento de tradução de informações concretas para o pensamento abstrato é necessária para a construção do conhecimento lógico-matemático do aluno.

Para Borsoi (2016), o estudo da geometria espacial, amplia-se a capacidade de abstração e se potencializa a habilidade visual, vista que nem todos os elementos que constituem um objeto nem sempre estão visíveis à primeiro momento. Trabalhado adequadamente, promove competências relacionadas a construção do pensamento dedutivo e a capacidade argumentativa. Entretanto, o desenvolver tais competências se torna difícil quando não se oferece ao aluno condições provocativas no processo de ensino e aprendizagem.

Conforme, as citações feitas anteriormente, se percebe a necessidade de um direcionamento para o ensino de geometria voltado resolução de situações práticas do cotidiano do aluno, buscando desenvolver o pensamento matemático dentro dessas situações, contudo, sem deixar de lado o devido rigor matemático.

Os Estudos realizados por Pavanello (1993), Lorenzato (1995), Almouloud et al. (2010), Homen (2013) e Silva (2016) evidenciam que cada vez mais o ensino de geometria vem perdendo espaço no currículo das escolas públicas brasileiras. Segundo esses autores, problemas relacionados a falta de consenso sobre quais tópicos devem ser abordados, formação docente precária, o pouco conhecimento dos docentes sobre as orientações para o ensino de geometria nos documentos oficiais, são alguns dos fatores que tem contribuído para o ensino deficitário em geometria. Nesse contexto, voltando o olhar ao ensino de geometria espacial, de praxe os sólidos geométricos são apresentados geralmente de forma estática, sendo dado ênfase a aplicação de fórmulas na resolução de questões. Nesse sentido, o ensino de geometria ocorre de forma mecanizada, caminhando no sentido oposto aos avanços obtidos nos estudos científicos da área, deixando, assim, de desenvolver as

habilidades relacionadas ao tema, que seriam muito mais úteis e significativas os estudantes.

Imerso nesse contexto, diante da variedade de objetos matemáticos tratados em geometria espacial e dos problemas supracitados, para o desenvolvimento dessa proposta foi necessário fazer uma seleção. Dessa forma, voltamos nossa atenção ao sólido geométrico esfera por alguns motivos em especial. A escassa a produção científica sobre tema, a diversidade de situações problema da qual o sólido faz parte, o relevante número de questões no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), assim como o baixo rendimento na resolução de problemas em geometria espacial apontados pelo Sistema Nacional de avaliação da educação básica (SAEB) e o Sistema Paraense de Avaliação da Educação (SisPAE), foram os motivadores para escolha do tema.

Nesse panorama, emergiu a necessidade de resposta para o seguinte questionamento: *Quais as contribuições que uma Sequência Didática construída a partir do no modelo das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) trazem para potencializar o processo de ensino e aprendizagem de esfera a partir da interação com applets do software Geogebra?*

Tendo em vista tal questionamento, adotou-se como objetivo geral *Analizar as potencialidades de uma sequência didática para o ensino do sólido geométrico esfera, elaborada de acordo com as unidades articuladas de reconstrução conceitual, em uma turma do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual.*

Concomitantemente, para balizar o desenvolvimento da pesquisa elencamos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar os problemas apontados no processo de ensino e aprendizagem do sólido esfera por meio de uma revisão de estudos;
- Mapear dificuldades relacionadas ao processo de aprendizagem de esfera junto a alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual em Belém do Pará, a partir de um teste de sondagem e por meio da aplicação de um questionário;
- Mapear as dificuldades relacionadas ao processo de ensino de esfera por meio de um questionário junto a professores.
- Mapear nos livros didáticos de que forma o tema esfera é apresentado, fazendo comparativo com as propostas dos documentos oficiais e os descritores dos sistemas de avaliação da qualidade da educação.

- Elaborar uma sequência didática conforme o modelo de intervenções estruturantes utilizando applets do software Geogebra 5.0, visando de amenizar os problemas apontados por alunos, professores e pela revisão de estudos.
- Identificar indícios de aprendizagem por meio da Análise Microgenética e da Análise do Discurso durante a aplicação das atividades que compõem a Sequência Didática;
- Verificar o desempenho dos alunos na resolução de questões que envolvam especificamente o sólido esfera.

Como metodologia de pesquisa optamos por uma revisão de estudos sobre geometria espacial, uma pesquisa junto alunos egressos do 3º ano do ensino médio de uma escola pública da rede estadual do Pará sobre o processo de aprendizagem e uma consulta a professores atuantes na rede pública no ensino do básico sobre aprendizagem do tema posto anteriormente. Por fim, fizemos um levantamento nos documentos oficiais (Matrizes do SisPAE, do SAEB e na BNCC) e uma análise nos livros didáticos participantes do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em vigor no ano de realização desse estudo.

Para a construção das atividades da sequência didática utilizamos o modelo da Unidade de Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) proposta por Cabral (2017). Esse modelo fundamenta-se nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky, através do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) e na Análise Microgenética da construção do conhecimento através de interações verbais conforme proposto por Góes (2000). Por fim, como parâmetro demonstrativo do desenvolvimento do aprendizado utilizamos a Análise do Discurso conforme Scott e Mortimer (2002).

Para melhor estruturação das etapas que compõem a pesquisa, este trabalho é composto por seis capítulos.

No capítulo 1 apresento os aportes teóricos que subsidiaram a nossa pesquisa: a Metodologia de Pesquisa, a Teoria das Sequências Didáticas, aspectos sobre Sequências Didáticas, UARC, Análise Microgenética e Análise do Discurso.

Os resultados de uma revisão de literatura sobre geometria espacial, na qual foi dada ênfase a pesquisas envolvendo o sólido esfera, um levantamento sobre as abordagens do tema nos livros didáticos; a análise nos documentos oficiais; os resultados obtidos em uma pesquisa de campo desenvolvida junto a 80 alunos de

uma escola pública estadual e 50 professores que atuantes na educação básica do estado do Pará apresentamos no capítulo 2.

Segue-se com os Aspectos Matemáticos, onde apresentamos conceitos relacionados e as demonstrações das fórmulas de área e volume da esfera e suas partes no capítulo 3.

No capítulo 4 apresento as atividades que compõem a *Sequência Didática* para o ensino de esfera, elaborada com a finalidade de resolver os problemas encontrados nos *Estudos Sobre Ensino e Aprendizagem*.

No capítulo 5, trago o detalhamento do processo de *Aplicação, assim como a Análise dos Resultados* obtidos, a qual se deu através de recortes de registros escritos e da Análise Microgenética interações verbais segundo Góes (2000) combinadas à Análise do Discurso conforme Scott e Mortimer (2002).

Finalizamos com o capítulo 6, que, por sua vez, apresenta as considerações finais sobre a proposta da pesquisa.

1. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresento os aportes teóricos que subsidiaram o desenvolvimento da pesquisa aqui posta. Inicialmente, apresentamos a metodologia de pesquisa, sequencialmente, trago a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, o modelo de construção de Sequências Didáticas para o ensino de Matemática conforme proposto por Cabral (2017), denominado Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC), o qual nos serviu de subsidio à construção da sequência de atividades propostas neste trabalho. Por fim, apresento a Análise Microgenética segundo Góes (2000) e a Análise do Discurso proposta por Scott e Mortimer (2002) que nos serviram como suporte para evidenciar os indícios de aprendizagem decorrentes das intervenções entre professor-aluno e aluno-aluno e da aplicação das atividades aplicadas no decorrer da pesquisa.

1.1 METODOLOGIA DE PESQUISA

Nesta seção, apresento os aspectos metodológicos que nos serviram de aporte ao desenvolvimento da presente pesquisa: Aportes Teóricos, Estudos sobre ensino e aprendizagem, Aspectos Matemáticos, Construção da Sequência Didática, Processo de Aplicação e Análise dos Resultados.

Nesse contexto, nossa pesquisa pode ser classificada como interpretativa, visto que a característica desse tipo de pesquisa consiste em uma análise contínua dos processos que a compõem (ações, eventos de ensino, aprendizagem e avaliação) sobre os indivíduos que dela fazem parte (MOREIRA, 2011).

Como *Aportes Teóricos* utilizamos a Teoria das Situações Didáticas (TDS) de Guy Brousseau, as concepções de Sequência Didática (SD), na ideia de Unidade Articulada de reconstrução Conceitual (UARC) por Cabral (2017), Análise Microgenética segundo Góes (2000) e Análise do Discurso por Scott e Mortimer (2002).

A construção dos *Estudos sobre Ensino e Aprendizagem* teve por finalidade identificar problemas decorrentes do processo de ensino e aprendizagem do objeto de matemático. Esta etapa corresponde a uma revisão de literatura sobre geometria espacial, com o objetivo de ter uma visão geral sobre o que vem sendo produzidos no

campo da educação matemática, evidenciando possíveis avanços e obstáculos encontrados; uma consulta junto a professores da rede pública de ensino, com a finalidade de mapear métodos de ensino, avaliação e possíveis obstáculos encontrados; uma consulta junto a estudantes, buscando evidenciar problemas relacionados a aprendizagem do sólido esfera; e, por fim, uma análise dos documentos oficiais e dos livros didáticos utilizados nas escolas públicas.

De posse de tais informações, destacamos os seguintes aspectos:

- A revisão de Literatura resultou da análise 12 produções, entre artigos e dissertações. As informações obtidas através dessas produções apontam como entraves processo de ensino/aprendizagem problemas como a formação docente precária, pouco interesse dos alunos no tema, a forma como o livro didático aborda o objeto matemático, que geralmente desconectado do cotidiano do aluno e apenas voltado a resolução de questões. Relacionado ao aprendizado, constatou-se problemas ligados a interpretação visual e reconhecimento dos sólidos geométricos e seus elementos, no processo dedutivo e aplicação de fórmulas.
- Na consulta realizada junto a alunos sobre a geometria espacial, constatamos que, em sua grande maioria, os alunos não têm afinidade com o tema, o consideram difícil, dedicam pouco tempo ao estudo do tema e não associam a aplicabilidade do tema no cotidiano.
- Na consulta aos professores, constatou-se que predominantemente o tema é apresentado de forma clássica (aqui entendido como: definição, seguida de exemplos e posteriormente resolução de itens) e o processo avaliativo é por meio de provas bimestrais. Relacionado às condições de trabalho, na maioria, os professores atuam com uma carga de trabalho de 40 horas semanais e atendem por turma entre 35 e 40 alunos em média.
- No Levantamento junto ao Sistema Paraense de Avaliação de Avaliação Educacional (SisPAE), Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) o sólido esfera, consta nos descritores (MPA 32) do SisPAE, (D13) do SAEB e como uma habilidade cobrada na BNCC (EM13MAT309), o que reitera a importância de tal estudo.
- A análise dos Livros didáticos mostra que o tema esfera ainda é apresentado de forma clássica, com ênfase na resolução de questões. Além disso, o livro

encontra-se em descompasso diante do proposto nos documentos oficiais (SisPAE, SAEB e BNCC, o que pode justificar os baixos índices de proficiência em exames de larga escala como o SisPAE, visto que tais livros acabam por ser o recurso didático mais usado pelos professores que atuam nas instituições públicas estaduais.

Nos *Aspectos Matemáticos* apresento algumas definições importantes, demonstrações das fórmulas para cálculo da área e volume da esfera e suas partes (Fuso Esférico e Cunha Esférica), visto que a revisão de literatura aponta a falta de aprofundamento do conteúdo matemático como um dos problemas que tem afetado o ensino de geometria no ensino básico.

Com base nos *Aportes Teóricos*, nos resultados obtidos nos *Estudos sobre Ensino e Aprendizagem* e nos *Aspectos Matemáticos* sobre esfera procedemos, segundo o modelo de Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) proposto por Cabral (2017), a *Construção Sequência Didática*. Tal construto, faz uso de applets¹ do software Geogebra² que, entre os seus recursos, possibilita visualização, manipulação e cálculo de área e volume dos sólidos geométricos associados a esfera.

A *Aplicação* das atividades propostas nessa pesquisa tem o objetivo de reconstruir conceitos de área e volume da esfera e suas partes diferente do modo clássico, explorando aspectos como: investigação, troca de informações entre os alunos, levantamento de conjecturas e sequencialmente a formalização dos aspectos observados. A aplicação da sequência didática ocorreu em uma turma de 3º ano do ensino médio, em uma escola da rede estadual de Ananindeua. Antes da aplicação da atividade foi feito um teste de conhecimento prévios, o qual apresentou resultado satisfatório, o que fez o pesquisar decidir pela aplicação da sequência didática sem a necessidade de realizar oficina sobre conhecimentos prévios.

A *Análise dos Resultados* obtidos consiste na análise minuciosa dos registros provenientes da etapa de *Aplicação* e das Intervenções Estruturantes da Sequência Didática. Os registros da aplicação ocorreram por meio da análise das gravações em áudio, nas quais a partir da combinação entre a análise microgenética das interações verbais proposta por Góes (2000) e a análise do discurso segundo Scott e Mortimer

¹ Pequenos softwares que executam tarefas específicas dentro de um programa maior.

² Software de geometria dinâmica.

(2002) apresentamos os indícios de aprendizagem decorrentes do desenvolvimento das atividades.

No tópico a seguir, apresentamos um recorte da teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, a concepção de Sequência Didática e o modelo estruturante de sequências didáticas proposto Cabral (2017), que constituem os aportes teórico para o desenvolvimento das atividades propostas na pesquisa, assim como a Análise Microgenética segundo Góes (2000) e a Análise do Discurso pelas ideias de Scott e Mortiner (2002) que subsidiaram as análises da aplicação das atividades.

1.2 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD)

Para D'Amore (2007) a Grande Didática proposta por Comenius em meados no século XVII demorou bastante tempo para ser refutada, pois conforme o pensamento desse autor um método único basta para ensinar todas as matérias... as artes, as ciências e as línguas e permaneceu válida por vários séculos. Entretanto, atualmente, é consenso que os conceitos da Didática podem e devem ser específicos. Segundo este autor, "... isso foi útil para a didática (geral) se libertar do jugo da pedagogia e para as didáticas específicas (disciplinares) chegarem a um status autônomo." (D'AMORE, 2007, p. 3)

Assim, os objetos de estudo da Didática da Matemática são

[...] o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos desta ciência, particularmente na situação escolar e universitária. Propõe-se a descrever e explicar os fenômenos relativos às relações entre seu ensino e aprendizagem. Não se reduz somente a buscar uma boa maneira de ensinar uma noção fixa, mesmo quando espera, ao finalizar, ser capaz de oferecer resultados que lhe permitam melhorar o funcionamento do ensino (ENCICLOPAEDIA UNIVERSALIS apud POMMER, 2013).

Nesse contexto, desenvolveu-se em meio a pesquisas realizadas nos Institutos de Investigação acerca do Ensino das Matemáticas (IREM), na França, no final da década de 60, durante o Movimento da Matemática Moderna. Nesse período, o pensamento cognitivo tinha forte influência da epistemologia Piagetiana e dominava os processos de ensino e aprendizagem nas ciências exatas. A Teoria das Situações Didáticas (TSD) proposta por Guy Brousseau estabeleceu um novo olhar: "uma construção que permitisse a compreensão das interações sociais de alunos, professores e conhecimentos matemáticos que ocorrem em uma sala de aula e que

condicionam o que se aprende e a forma como isso se dá.” (BROUSSEAU, 2008, p.11).

Nesse sentido, o objetivo desse teria é definir o processo de aprendizagem por meio de uma série de situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas. Estas situações consistem em caracterizar o processo de aprendizagem e apresentar parâmetros que evidenciem avanços nos comportamentos dos alunos, sendo estes relacionados a aquisição de determinado conhecimento. Desta forma, “*o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber*” (ALMOLOUD, 2007, p. 32).

Assim, a TSD comprehende que a realização, em conjunto, de uma atividade, que propicie a movimentação conhecimentos prévios através da reflexão, argumentação e do agir sobre determinado problema, potencializa processo de aprendizagem e esses avanços revelam o funcionamento do meio. Dessa forma, o meio (ao qual Broussseau define como milieus) deve ser foco de modelagem buscando da intencionalidade pedagógica do professor, sendo organizado e planejado de tal forma que proporcione desequilíbrios, assimilações e acomodações (conforme Piaget), permitindo os alunos refletir sobre suas tomadas de decisão dentro da atividade proposta, o que deve norteado por regras pré-estabelecidas. Nesse processo, o professor atua de forma oposta ao ensino clássico, atuando como orientador, a fim de que os alunos cheguem a respostas diante do que foi proposto para, posteriormente, validar a solução.

O Milieu, em uma Situação Didática, deve ser constituído de situações adidáticas. Uma situação adidática é “uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para propiciar condições favoráveis para a apropriação de um novo saber que se deseja ensinar” (ALMOLOUD, 2007, p. 33).

Para Passos e Teixeira, em uma situação adidática

o aluno deve ser sempre estimulado a esforçar-se para superar seus limites na direção de adquirir novas competências com o seu próprio esforço. Portanto, é necessário que o professor oportunize ao aluno o máximo de independência para que ele possa desenvolver seus próprios mecanismos na resolução de problemas através de suas elaborações e conceitos. O professor deverá encontrar um equilíbrio na quantidade de informações que devem ser passadas ao aluno. (PASSOS E TEIXEIRA, 2011, p. 8)

Dessa forma, cabe ao professor a elaboração e organização de atividades a fim de que os alunos cheguem a objetivos específicos. Nesse momento, assume-se o papel de orientador das ações dentro da atividade detectando avanços e fazendo possíveis ajustes de forma a conduzir os alunos construção do conhecimento desejado.

As Situações Didática são compostas por Situações Adidáticas, as quais podem ser definidas como

conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos. (BROUSSEAU, 1996, p. 50)

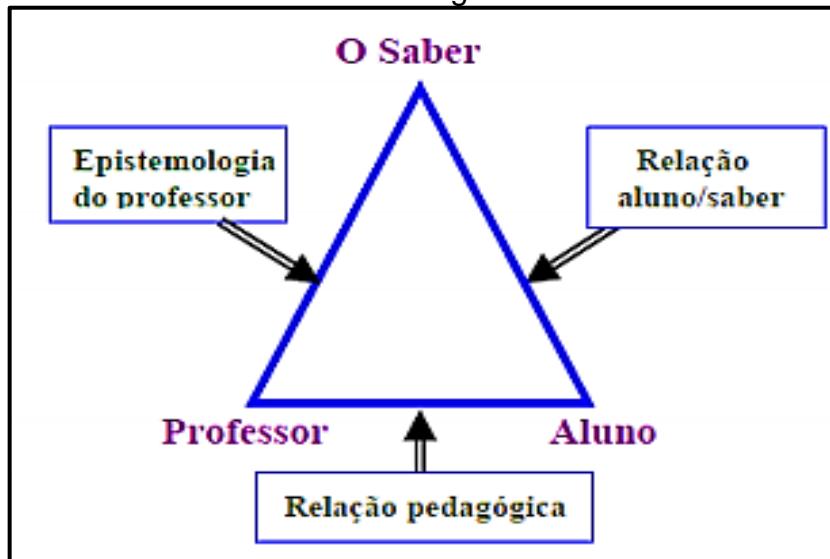
A TSD estuda as formas como certos conteúdos matemáticos, ou parte deles, podem ser apresentados aos alunos, sempre que houver por parte do professor a intencionalidade de propiciar aprendizado ao aluno. Nesses casos, temos uma situação didática envolvida e nela ficam estabelecidos uma série de acordos, descrevendo as responsabilidades de professor e alunos e a relação didática entre eles, regulamentando o chamado “Contrato Didático”, o que estabelece condições favoráveis para que ocorra o aprendizado.

Segundo Brousseau o contrato didático estabelece

[...] uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas, sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, o professor e o aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou outra, responsável perante o outro. (BROUSSEAU, 1996, p. 51)

Para modelar a TSD, Brousseau (2008) propõe o Triângulo Didático (FIGURA 1) composto por três elementos: o aluno, o professor e o saber. Estes elementos são parte de uma relação dinâmica e complexas (Relação Didática), a qual leva em consideração as interações entre aluno e professor (elementos humanos), mediadas pelo saber (elementos não humanos), que determina o modo como estas relações irão ocorrer.

FIGURA 1: Triângulo Didático



Fonte: Adaptado de Almouloud (2004, p. 32)

A partir do triângulo didático, Silva et al. (2015) justifica cada uma de seus lados de modos. O primeiro deles, ligando Saber-Professor está assiado ao processo de ensino e aprendizagem. Leva-se em conta os elementos que fazem parte do sistema didático (métodos, objetivos de ensino e posição teórica), no qual deve dar importância a forma pela qual um determinado saber é apresentado em um contexto significativo. O segundo lado corresponde a relação Saber-Aluno, onde destacam-se os conhecimentos prévios, hipóteses sobre a aquisição de um novo saber, o processo de aquisição do conhecimento ensinado. Finalizando temos lado relacionando Professor-Aluno caracterizando pelo diálogo contínuo entre essas partes, durante o processo de ensino e aprendizagem, buscando despertar comportamentos nos discentes provenientes da aquisição de um determinado saber. Nesse sentido, o professor atua tal qual um orientador no processo de aprendizagem, cuja função é organizar e propor situações culminem com a aquisição do saber por parte dos alunos.

Nesse sentido, o triângulo didático estabelece a dinâmica do processo de ensino/aprendizagem destacando o papel de cada um dos sujeitos participantes do processo e estabelecendo mecanismos para construção, desenvolvimento e avaliação.

Na TSD outro conceito importante é a noção de Devolução. Almouloud (2007) caracteriza uma Situação Didática pelo jogo de interações entre os alunos e os problemas propostos pelo professor. Quando o problema tem por objetivo estimular

uma interação que desenvolva nos alunos a autonomia para realização da tarefa, temos a chamada Devolução.

Assim, “Devolução é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (Adidática) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência”. (BROUSSEAU, 2008, p. 91).

Portanto, para que haja o bom desenvolvimento das atividades propostas se torna necessário estimular o aluno na realização das atividades propostas, dando sentido a sua realização a fim de que se tenha aprendizagem.

No que tange o processo de aprendizagem, Brousseau (2008) caracteriza e classifica as situações didáticas em 4 tipos: ação, formulação, validação e institucionalização.

QUADRO 1: Tipologia das Situações Didáticas

Situação de Ação	O aluno reflete e simula tentativas ao eleger um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação através da interação com o “milieu”, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema.
Situação de Formulação	Ocorre troca de informação entre o aluno e o “milieu”, através da utilização de uma linguagem mais adequada, sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal, podendo ocorrer ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas; os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente adequando-a às informações que devem comunicar.
Situação de Validação	Os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações); as situações de devolução, ação, formulação e validação caracterizam a situação adidática, onde o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, não revelando sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador
Situação de institucionalização	Esta fase é destinada a estabelecer convenções sociais e onde a intenção do professor é revelada. O professor, aí, retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos, definindo assim os objetos de estudo através da formalização e generalização.

Fonte: Adaptado de Passos e Teixeira (2011)

As quatro situações apresentam um componente psicológico favorável, visto que, ao inserir o aluno no processo de ensino e aprendizagem, o atribui o papel de coautor de um projeto pessoal, procura-se desenvolver a autonomia na busca de solução para problemas propostos, chegando-se a conhecimentos necessários para isso. Ao professor cabe a organização, planejamento e análise das Situações

Didáticas para validação do processo aquisição do saber, avaliando avanços e dificuldades decorrentes do processo. Nesse contexto, o erro não é considerado como evidência da falta de conhecimento, mas sim entendido como parte constituinte da aquisição de um novo saber.

Nessa pesquisa, os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas, em associação com o modelo para elaboração de Sequências Didáticas proposto por Cabral (2017) servem de aporte para construção das atividades propostas. Sobre a estrutura e construção da Sequência Didática apresentamos os elementos essenciais nos tópicos a seguir.

1.3 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS (SD)

A estruturação do termo “Sequência Didática” ocorreu em meio a estudos de realizados na Faculdade de Psicologia e Ciências da Universidade de Genebra. Inicialmente como foco sobre a produção de gêneros textuais, estes estudos estabeleceram os fundamentos teóricos, como materiais, oficinas e sequências de exercícios aplicados a qualquer área de conhecimento adotados na França a partir da década de 80, posteriormente se estendendo ao ensino de qualquer área do conhecimento.

No Brasil, a expressão sequência didática surge na década 90, em meio a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1992) inicialmente direcionando-se ao campo da linguística e posteriormente chegando à matemática.

Zabala (1998) define sequência didática como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”.

Dessa forma, entende-se que o termo “Sequência Didática” faz referência a um conjunto de atividades organizadas sequencialmente com a finalidade de promover o aprendizado de determinado conhecimento. No ensino de Matemática, parte de um planejamento detalhado, com objetivos educacionais claramente definidos e seu uso em sala de aula permite o desenvolver a habilidade investigativa, motiva descobertas a partir da troca de ideias, agrega mais sentido aos conteúdos estudados, potencializando assim o processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Zabala (1998) a construção de Sequências Didáticas, é um processo no qual planejamento e avaliação são pontos inseparáveis da prática docente. Logo, se deve considerar tanto avanços como obstáculos dentro do processo de ensino/aprendizagem a fim de que se chegue a objetivos específicos, permitindo ao professor, caso necessário, fazer ajustes dentro de cada etapa da sequência didática para atender as necessidades que possam surgir.

Dessa forma, o uso de Sequências Didáticas como metodologia, permite ao professor um olhar amplo sobre o processo, permitindo dentro do processo de ensino identificar se objetivos foram atingidos e caso contrário, fazer intervenções pontuais que possam permitir esses avanços a fim de que se chegue ao aprendizado necessário.

Cabral (2017) propõe um modelo de elaboração e estruturação de sequências didáticas para o ensino de matemática na educação básica. Para esse autor uma Sequência Didática consiste em

“um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais de natureza escrita ou oral que sistematiza as intervenções de ensino com a intencionalidade objetiva de estimular a aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de Matemática a partir da percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas.” (CABRAL, 2017, p. 12)

Partindo das ideias citadas anteriormente, o pesquisador entende uma Sequência Didática como um conjunto de atividades com intencionalidade de ensino, as quais, dependendo dos avanços ou entraves no decorrer de sua aplicação, podem ser remodeladas para que atinjam os objetivos específicos de aprendizagem. A Sequência Didática proposta nesse trabalho busca atender a essas características e estrutura-se de acordo com a construção de UARC's apresentada a seguir.

1.4 UNIDADE ARTICULADA DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL (UARC)

Considerando um objeto matemático como a área S de uma superfície, a reconstrução conceitual desse objeto consiste ao processo pelo qual esta área pode ser obtida a partir de uma unidade padrão aqui definida por Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC).

Para reconstruir um conceito matemático, deve-se escolher inicialmente uma primeira UARC, a qual o autor denomina de unidade de primeira geração (UARC-1),

a qual se tem como “ponto de partida”. Ela, eventualmente, não precisa ser um problema como de praxe, existe a flexibilidade de começar por qualquer posição dentro do objeto matemático cujo conceitos deseja-se reconstruir.

Para Cabral (2017) a escolha da UARC-1 deve levar em consideração diversos aspectos como a experiência do professor, os conhecimentos prévios dos alunos e objeto de estudo. Cabe ao professor verificar esses parâmetros e fazer a escolha.

A partir da UARC-1, o professor deve escolher uma UARC-2 (unidade Articulada de Reconstrução Conceitual de 2º geração), sob a condição de que esta esteja imediatamente conectada a UARC-1. Seguindo as mesmas condições anteriormente citadas, a medida que cada UARC de ordem superior se estabelece o conhecimento é reconstruído/revertido.

Cabral (2017) considera que a cada UARC's estabelecida o processo de aprendizagem a reconstrução conceitual é potencializada, de tal forma que, sequencialmente, em uma n-ésima UARC a reconstrução do conceito é evidenciada.

Uma UARC consiste na organização do conteúdo em quatro intervenções: Intervenção Inicial (**I_I**), quando o professor apresenta a proposta inicial a fim de que o aluno de maneira empírico-intuitiva perceba regularidades funcionais de um conceito; Intervenção Reflexiva (**I_R**), quando promove-se questionamentos relacionados a um ou mais aspectos ligados ao objeto de estudo a partir da intervenção inicial; Intervenção Exploratória (**I_E**), quando se objetiva o aprofundamento diante de resultados obtidos durante a Intervenção Reflexiva, estimula-se o aluno experimentação a fim de evidenciar tais resultados; Intervenção formalizante (**I_F**), quando de posse dos resultados obtidos pelos alunos o professor apresenta o objeto de estudo através da linguagem formal da matemática.

Durante a construção de uma UARC, o primeiro momento (Intervenção Inicial) é de fundamental importância visto que ele potencializa o espírito investigativo, propicia o surgimento de conjecturas. Elas podem ser classificadas em dois tipos: Exploração Potencial (**I_I – EP**), a qual permite ao professor promover uma série de procedimentos investigativos (simulações, experimentação, levantamento de hipóteses) que são típicos da construção do saber matemático e a Conexão Pontual (**I_I – CP**), a qual a partir de uma situação o aluno é estimulado a descobrir relações que direcionem a reconstrução de um conceito específico.

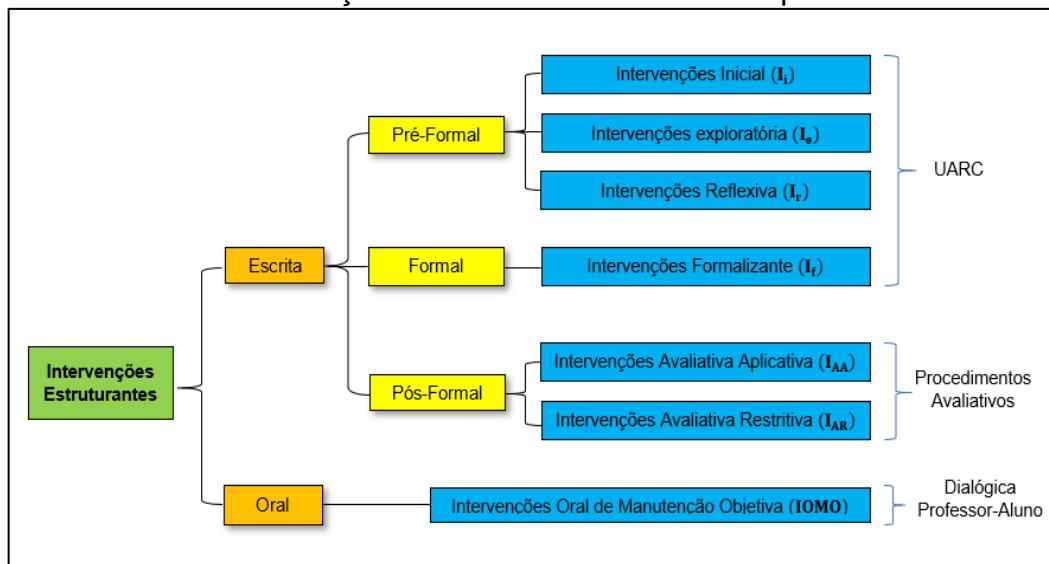
Posteriormente a consolidação de uma UARC, com a intencionalidade de verificar a aprendizagem do objeto construído, o professor poderá inserir as chamadas

Intervenções avaliativas, que são de dois tipos: Intervenção Avaliativa Restritiva (I_{AR}), que tem a finalidade de avaliar a aprendizagem de conceitos e propriedades; e a Intervenção Avaliativa Aplicativa (I_{AA}) cuja finalidade é a resolução de problemas de aplicação. Estas etapas são consideradas pós-formais visto que nelas o aluno já reconstruiu o conhecimento que deseja ser ensinado.

Finalizando, temos a Intervenção Oral de manutenção Objetiva ($IOMO$) que correspondem a momentos do diálogo entre professor e aluno, “cuja finalidade é manter os objetividade planejado, manter o foco da reconstrução pretendida pela sequência didática”. (CABRAL, 2017, p. 47). Estas intervenções, tem um caráter auxiliar, no intuito de ajustar a produção dos alunos aos objetivos da sequência, alinhar conceitos obtidos e, por fim, fixá-los.

Todo o conjunto formado pelas Intervenções que compõem uma UARC, juntamente com as intervenções Avaliativas e as Intervenções Orais de Manutenção Objetiva, compõe o que Cabral (2017) denomina de Intervenção Estruturante, conforme representado na Figura 2. Ao leitor interessado no aprofundamento das ideias aqui discutidas, recomendamos a leitura do livro do autor cujo título é “Sequências Didáticas: Estrutura e Elaboração”.

FIGURA 2: Intervenções Estruturantes de uma Sequência Didática



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

As atividades propostas neste trabalho foram construídas conforme o planejamento de ações e organização definidos por Cabral (2017). A seguir apresentamos a Análise Microgenética, conforme as ideias de Góes (2000), a qual

nos serviu de parâmetro identificar indícios de aprendizagem decorrentes das interações verbais dialógicas aluno-professor e aluno-aluno, assim como nos registros escritos provenientes das atividades desenvolvidas durante a aplicação a sequência didática.

1.5 ANÁLISE MICROGENÉTICA

Como citamos anteriormente, a utilidade da Análise Microgenética como caminho metodológico nessa pesquisa nos servirá como aporte para análise das interações e identificação das modificações entre professor/pesquisador e alunos e entre o grupo de alunos durante o desenvolvimento das atividades que compõem a Sequência Didática proposta. Nesse sentido, destaco que tal análise é fundamental importância, visto que por meio dela é possível identificar de forma precisa essas modificações, permitindo, assim, ao professor fazer intervenções, buscando auxiliar o grupo de alunos e alinhar possíveis ações a fim de que se alcancem os objetivos de cada atividade. Para tanto, nessa pesquisa tomamos como referência os trabalhos de Goes (2000) e Cabral (2004) bem como as referências citadas por esses autores.

A análise microgenética como caminho metodológico tem sido amplamente usada em pesquisas nas áreas de educação e psicologia, em especial quando os estudos se relacionam com a constituição dos sujeitos, no que diz respeito ao contexto educacional.

Para Cabral (2004) a análise microgenética é uma forma de construção de dados a qual requer atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos. Nesse contexto, consiste em uma análise orientada para o funcionamento dos sujeitos, das relações intersubjetivas e das condições sociais da situação em estudo. Trata-se, portanto, de um relato minucioso dos acontecimentos, que normalmente demanda gravação das situações analisadas em áudio e vídeo e transcrição das falas do processo de interação.

Goés (2000), referindo-se à Análise Microgenética, a justifica ser micro não simplesmente por se tratar da curta duração dos eventos em análise, e sim por ser orientada para as minúcias indiciais de aprendizagem. É genética no sentido de histórico, centrando foco sobre o movimento de ideias durante o processo de aprendizagem, explorando condições passadas e presentes para que se chegue aos objetivos específicos.

Para Goés (2000) a Análise Microgenética fundamenta-se sobre pressupostos da Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky e como percurso metodológico permite a observação das minúcias do processo de ensino e aprendizagem, e permite ao professor/pesquisador tal qual proposto por Vygotsky, configurar sua gênese social e as transformações no curso dos eventos estudados.

Sobre a construção do processo supracitado Tomio, Schroeder e Adriano (2017, apud SIEGLER E CROWLEY, 1991) consideram análise microgenética composta em três blocos a se observar. No primeiro deles, as observações abrangem todo o período do processo, desde o início da mudança até o momento em que atinge um estado relativamente estável. No segundo, a densidade das observações se acentua em relação à alteração do fenômeno e no Terceiro, o comportamento observado é submetido à análise e experimentação intensiva, buscando inferir os processos que deram origem a ambos os aspectos quantitativos e qualitativos da mudança.

Para Cabral (2004) a análise microgenética corresponde a um poderoso instrumento metodológico de investigação da construção de conhecimento quando o foco são os sujeitos em situações de ensino no ambiente escolar. Desse modo, segundo o autor, a sala de aula constitui um ambiente favorável às interações dialógicas e proporciona ao professor um ambiente propício a investigação pedagógica.

Desse modo, considero que a utilização da Análise Microgenética como instrumento metodológico torna exequível a investigação da prática docente junto ao conjunto de atividades de ensino aqui propostas. Portanto, tal ferramenta se fará presente durante todo o processo de análise buscando evidenciar processos subjetivos e os diálogos provenientes da aplicação da Sequência Didática para o ensino de Esfera alunos do 3º ano do ensino médio.

Nessa perspectiva, combinada com a Análise do Discurso de Scott e Mortimer (2002), essa metodologia tem a função de evidenciar indícios de aprendizagem durante a realização das atividades da Sequência Didática. Sobre a Análise do Discurso, faço um breve comentário no tópico seguinte.

1.6 ANÁLISE DE DISCURSO

A processo comunicativo é parte fundamental do desenvolvimento humano. É a partir dele que se constroem significados, externam-se concepções e onde pode-se perceber possíveis avanços ou retrocessos no processo de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, diversos estudos têm destacado a importância das interações discursivas em sala de aula, a considerando um espaço de comunicação, onde ocorrer a reestruturação de significados, formação de concepções e articulação de ideias construídos a partir de relações interativas do professor os alunos ou entre alunos com outros pontos diferentes.

Para Cabral (2004) a linguagem é ferramenta fundamental na mediação de processos interativos dada a importância da socialização de ideias que possibilitem o ensino e a aprendizagem dos sujeitos que a compõem. Assim, pode-se facilmente perceber dois tipos de linguagem a se destacar, a primeira delas a linguagem científica e a outra o senso comum que num processo de embate, interagem e possibilitam a construção de novos significados.

As concepções citadas anteriormente mostram a potencialidade do discurso como ferramenta catalizadora do processo de ensino e aprendizagem. Para tanto, de posse de um planejamento minucioso esse embate a linguagem informal e saber científico, quando colocados dentro de um processo estruturante de alinhamento de idéias é um fator que pode servir como indicativo do processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, como metodologia relacionada a didática, a Análise do Discurso busca pela estabilização de enunciados para que se cheguem aos conceitos formalizados pela ciência em estudo. Para tanto, a Análise do Discurso parte das interações entre professor e aluno ou dos grupos de alunos na sala de aula de forma a se obter os conceitos relativos a determinado objeto de estudo.

Nesse sentido, Scott e Mortimer (2002) propõem um modelo estruturado focado no papel do professor, cuja função é analisar as interações verbais provenientes da aplicação de uma sequência didática, onde se tem um modelo constituído por cinco aspectos interrelacionados (*Intenção do professor, Conteúdo, Abordagem Comunicativa, Padrões de Interação e Intervenção do Professor*) que são organizados em três grandes grupos denominados *Foco no Ensino, Abordagem e Ações*.

No grupo *Foco no Ensino* constam os aspectos *Intenção do professor* e *Conteúdo*. Relacionado a Intenção do professor temos seis aspectos que desdobram-se no decorrer da aplicação da sequência didática: *Elaboração de um Problema* (nesse aspecto ocorre a apresentação da situação problema e procura-se estimular os alunos a desenvolver o que é proposto), *Explorando a Visão dos Alunos* (procura-se buscar o que os alunos conhecem sobre o contexto do problema), *Introdução Conceitos Científicos* (Apresenta-se conceitos científicos no contexto social da sala de aula), *Guiando os Alunos a Aplicação das Ideias* (Oportuniza aos alunos discutir ideias científicas, em grupos ou com a sala, no decorrer da aplicação da atividade, permitindo a internalização de conceitos), *Aplicação das Ideias Científicas* (Aplica-se as ideias científicas em diversos contextos, transferindo para os alunos a responsabilidade do uso dessas ideias) e *Manutenção da Narrativa* (O professor ajusta a narrativa dos alunos ao conhecimento científico). O tópico *Conteúdo* decompõe-se em três categorias: *Descrição*, que se refere à discussão dos enunciados; *Explicação*, referindo-se a modelos teóricos; e a *Generalização*; que envolve elaborar descrições ou explicações que são independentes de um contexto específico.

O grupo *Abordagem*, engloba o aspecto Abordagem Comunicativa. Para Scott e Mortimer (2002) é o eixo principal na estrutura analítica, pois fornece a perspectiva de *como* o professor trabalha as intenções e o conteúdo do ensino através das diferentes intervenções pedagógicas provenientes dos diferentes padrões de interação.

Nesse contexto, os autores distribuem a Abordagem Comunicativa em quatro classes, as quais podem ser caracterizadas por meio das interações entre professor e alunos ou entre alunos, essas classes subdividem-se em dois grupos, sendo o primeiro deles denominado discurso *dialógico* ou *de autoridade* e o segundo discurso *interativo* ou *não-interativo*.

Para Cabral (2004) por meio da associação de dois desses grupos que surgem quatro classes de abordagens comunicativas que podem direcionar o trabalho do professor em sala de aula, bem como caracterizar interações entre alunos que participam de atividades de ensino direcionadas.

Desse modo, o discurso será ***interativo/dialógico*** quando Professor e estudante exploram ideias, formulam perguntas autênticas e consideram diferentes pontos de vista). Quando o professor considerar, na sua fala, os várias observações

feitas pelos alunos buscando similaridades e diferenças o discurso é considerado ***não-interativo/dialógico***, à medida que o professor conduzir o aluno por meio de uma sequência de perguntas e respostas para que se chegue a determinado ponto de vista específico o discurso é considerado ***interativo/de autoridade*** e, por fim, quando o professor apresenta somente um ponto de vista específico, o discurso denomina-se ***não-interativo/de autoridade***.

O terceiro e último grupo denominado Ações, trata dos aspectos *Padrões de Interação e da Intenção do Professor*. Quanto aos Padrões de Interação o mais comum é o padrão I-R-A (intervenção do professor, resposta do aluno e avaliação do professor), todavia, podem ocorrer desdobramentos desse padrão, onde ocorre alternância entre pergunta e resposta, caracterizando o debate até que se chegue ao feedback desejado. Relacionado ao aspecto *Intenção do Professor* este se subdivide em seis formas de intervenções pedagógicas: Formalização dos significados; Seleção de Significados; Destaque de Palavras-Chaves; Compartilhamento de Significados; Checando Entendimentos dos Alunos e, por fim, a Revisão dos Significados Aprendidos. Para um detalhamento maior das características de cada um desses subgrupos recomenda-se a leitura de Scott e Mortimer (2002).

Nesse contexto, elaboramos uma Sequência Didática para o ensino de Esfera, construída sobre o modelo de intervenções estruturantes de Cabral (2017) de forma que foi possível, como ferramenta dialógica, a análise das interações verbais entre professor e aluno e entre os grupos de alunos decorrentes das intervenções estruturantes previamente comentadas no texto e dos padrões discursivos citados anteriormente.

Para se ter ideia da dinâmica da construção de conceitos, durante a aplicação da sequência didática, inicialmente, teve-se atenção especial sobre palavras associadas aos elementos e a construção da esfera por meio de rotação de um semicírculo. De posse dessa elaboração por parte da maioria dos alunos, por meio da Análise Microgenética, são feitos os recortes necessários, para sequencialmente formalizar o que se deseja ensinar.

No capítulo a seguir, apresentamos os estudos prévios realizados que correspondem a uma revisão de estudos sobre geometria espacial e um levantamento junto a professores e alunos visando compreender as concepções sobre o ensino e aprendizagem dos temas relacionados ao sólido esfera.

2. SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE ESFERA

Neste capítulo apresento os resultados de duas pesquisas sobre ensino e aprendizagem de esfera. A primeira delas realizada junto a 80 alunos do 3º ano do ensino médio e a outra com 50 professores atuantes na rede pública de ensino. Nelas, além de traçar o perfil, tivemos como objetivo identificar possíveis problemas relacionados ao ensino e aprendizagem de esfera. Sequencialmente, apresento o resultado de uma revisão de estudos sobre o ensino e aprendizagem de geometria espacial e um levantamento feito nos livros didáticos utilizados no Programa nacional do livro didático (PNLD) sobre a forma como o tema esfera é apresentado. Tais estudos nos serviram de subsídio para a elaboração da sequência didática concebida com a finalidade de contribuir para a solução dos problemas detectados.

2.1. REVISÃO DE LITERATURA

Nessa seção apresento os dados de uma revisão de literatura sobre geometria espacial. Nela procuramos identificar a construção metodológica, seus resultados e as possíveis contribuições desses resultados sobre o objeto de estudo, ou seja, uma revisão de estudos sobre o ensino de geometria espacial, na que indique caminhos favoráveis ao desenvolvimento do tema, os resultados apresentados e as conclusões de cada um deles. Para sua composição, buscamos trabalhos envolvendo geometria através da palavra-chave “Geometria Espacial” em diversos repositórios de instituições brasileiras, assim como no banco de dissertações do PROFMAT, no Google Acadêmico, o no Banco Nacional de Dissertações de Teses. Durante a busca, foram encontrados diversos trabalhos sobre o tema, porém, para essa pesquisa formam utilizados um total de 12 produções, visto que, nelas foi possível identificar com clareza, os critérios metodológicos que se desejava analisar. Para uma melhor organização, os trabalhos selecionados formam agrupados em dois grupos, os quais definimos como estudos experimentais e estudos diagnósticos como destacamos a seguir.

2.1.1 Estudos Diagnósticos

Nesse tópico, faço uma análise dos trabalhos cujo finalidade analisar dificuldades decorrentes no processo de ensino e aprendizagem em geométrica espacial. A tais produções chamamos de Estudos Diagnósticos.

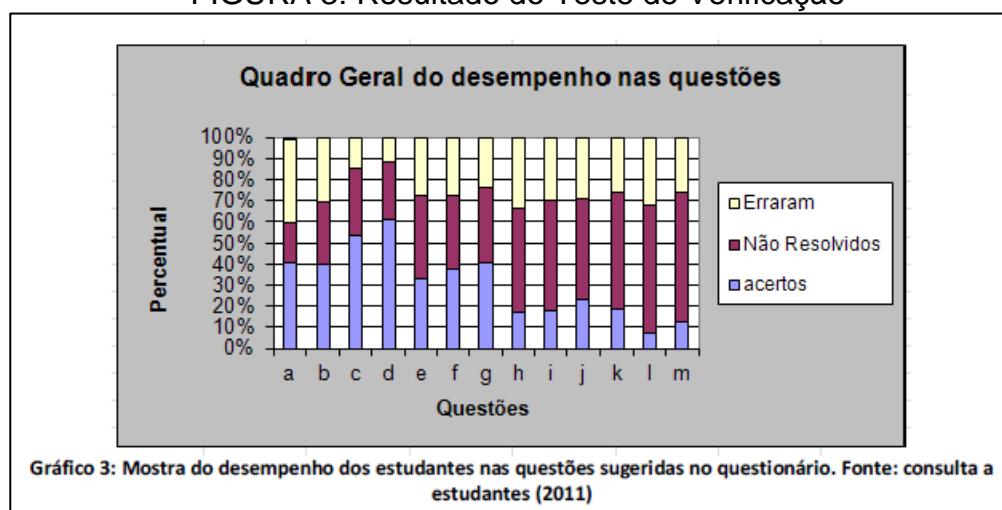
Santos (2012) fez uma pesquisa com 100 alunos e 100 professores de escolas da rede pública de ensino, buscando entender a metodologia predominante aplicada ao ensino de geometria espacial por parte dos professores e quais as concepções dos alunos sobre as barreiras relacionadas ao seu ensino e aprendizagem.

A pesquisa de Santos (2012) usou como metodologia a aplicação de um questionário junto a alunos e professores buscando informações sobre o perfil socioeducacional de cada um dos dois grupos.

Com o grupo de professores foi solicitado o preenchimento de um quadro no qual foi possível identificar o grau de dificuldade dos alunos em questões volume dos diversos sólidos geométricos. Os resultados encontrados, mostram que, relacionado ao cálculo de volume, os professores consideraram o tópico de dificuldade considerada como regular.

Juntos aos alunos Santos (2012) também aplicou um teste de verificação com 20 questões envolvendo todos os sólidos geométricos. Com o resultado da aplicação do teste, a autora montou o gráfico apresentado a seguir.

FIGURA 3: Resultado do Teste de Verificação



Fonte: Elaborado por Santos (2012)

O resultado obtido deixa claro a dificuldade dos alunos na resolução de questões envolvendo volume dos sólidos geométricos. Segundo a altura, após a

correção dos testes aplicados se pode identificar problemas relacionados a aplicação das fórmulas, na análise de resultados obtidos e na interpretação de situações problema.

A pesquisa de Lorenzato (1995) aponta que o estudo da geometria se encontra ou praticamente ausente do currículo escolar. Para o autor diversos fatores contribuem para agravar tal situação. Entre os fatores apontados, destaca-se a má formação docente e a falta de aprofundamento no estudo do tema, ou seja, para o autor o professor não se sente confortável em ensinar um tópico no qual não tem domínio pleno.

Nesse sentido, Pavanello (1993) justifica como causas para o abandono da geometria, as influências deixadas pelo movimento da matemática moderna, cuja preocupação estava voltada ao trabalho com estruturas algébricas e sobre a lógica aplicada a teoria dos conjuntos. Além disso, outro fator que fez a geometria ser deixada em segundo plano foi a criação da lei 5692/71, a qual permitiu que o professor montasse o plano de curso da disciplina matemática conforme a necessidade da clientela atendida, ou seja, a lei acabou dando a liberdade para que o docente decidesse quais os conteúdos deveriam ser priorizados em cada etapa do ensino básico. Nesse sentido, dada a má formação docente e a disposição do tema dentro dos livros didáticos, o assunto acaba por ser relegado nos ensinos fundamental e médio. Finalizando, Lorenzato (1993) sugere que devem ser feitos investimento em formação do professor e na busca de novas metodologias que tornem o ensino de geometria mais atraente aos alunos.

Moreira (2016) apresentou o resultado de uma pesquisa com alunos do 2º ano do ensino médio visando entender o processo de aprendizagem de volumes de sólidos geométricos.

Como metodologia foi aplicado um questionário a 100 alunos de uma escola pública e um teste de verificação com 10 questões sobre cálculo de volume dos diversos sólidos geométricos.

Os resultados da pesquisa apontam que, entre os alunos pesquisados a maioria encontrava-se forma da faixa etária da série e apresentavam baixa afinidade com a matemática. Outro resultado obtido a se destacar que a maioria desses alunos faz uso de poucas horas de estudo para matemática, sendo predominante o estudo na véspera de prova, e na sua maioria sem auxílio de professor particular ou do responsável.

No que se trata dos pré-requisitos e ao cálculo de volumes os resultados mostram que a maioria dos alunos considera o conteúdo como sendo de nível de dificuldade regular e que entrou em contradição ao resultado apresentado no teste aplicado o que mostra a necessidade da busca por novos métodos de ensino.

Silva (2014) buscou em sua pesquisa identificar as principais dificuldades encontradas por professores ao ensinarem geometria espacial a alunos do 2º ano do ensino médio e os resultados obtidos apontam que os docentes julgam que tal objeto do conhecimento é considerado muito difícil para os alunos.

Problemas relacionas a falta de estrutura e de material de trabalho fazem com que o conteúdo seja apresentado em sua expositiva, tendo apenas quadro e pincel, como recursos disponíveis.

Nesse contexto, é recorrente que os alunos apresentes problemas como a visualização de figuras e identificação de elementos. Relatou-se ainda que problemas com falta pré-requisitos dos alunos, a falta de habilidade para fazer desenhos e a falta de associação dos sólidos estudados com objetos do cotidiano do aluno são fatores cruciais relacionados a falta de aprendizagem dos alunos e diante de tais problemas o autor sugere o uso de materiais manipuláveis e o uso de softwares de geometria dinâmica como proposta ao ensino de tal tópico.

Costa et al. (2009) fez um comparativo entre as orientações encontradas no PCN's e o desenvolvimento de competências e habilidades desenvolvidas pelos alunos de uma escola pública federal e uma escola particular da cidade de Belém.

Os resultados obtidos mostraram o ensino desse tópico tem ocorrido de forma clássica. Em relação ao aprendizado foram encontrados problemas ligados a linguagem matemática, representação dos sólidos geométricos e seus elementos, aplicação de fórmulas e relacionar sólidos, problemas esses que são agravados pelo fato de a geometria espacial ser trabalhada desvinculada da geometria plana, a qual é considerada subtendida como um conhecimento já adquirido pelo ano no ensino fundamental.

Através análise desse grupo de produções fica clara a pouca importância dada ao ensino de geometria desde o ensino fundamental. Embora o destaque dado nos documentos oficiais como os PCN's o que o estudo aponta é que o ensino caminha na contramão do que vem sendo proposto. O estudo indica que o falta de formação adequada, bem como a falta de tempo e estrutura estão contribuindo forma negativa

na formação discente, o que merece ser visto com mais atenção, devido prejuízo causado na formação do aluno.

2.1.2 Estudos Experimentais

Aos trabalhos cujo objetivo foi desenvolver metodologias para o ensino e a aprendizagem do sólido esfera classificamos como estudos experimentais.

Possani (2012) apresentou os resultados da dissertação intitulada “Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular” e teve como objetivo responder ao seguinte problema de pesquisa: De que forma uma sequência de didática que envolve a Geometria Dinâmica pode intervir nos processos de ensino e aprendizagem do volume do icosaedro regular?

Para tanto, o autor construiu uma Sequência Didática composta por nove atividades fazendo uso do software de geometria dinâmica, Calques 3D. As atividades desenvolvidas com polígonos regulares, prismas regulares, pirâmides, finalizando com icosaedro. Em cada uma delas, formam explorados os elementos de cada figura apresentada, bem como a construção, de modo informal, das fórmulas para cálculo de área e volume. A aplicação da Sequência Didática ocorreu com duplas de alunos, no laboratório de informática de uma escola particular de São Paulo, com alunos da instituição de ensino. Os resultados da aplicação da Sequência didática mostraram que através da interação com o Calques 3D e a resolução de cada atividade proposta, os alunos conseguiram chegar a uma dedução informal da fórmula para cálculo de área dos polígonos regulares, do volume do prisma regular, da pirâmide e Icosaedro regular.

Possani (2012) cita que nas primeiras atividades houve certa demora na execução e conclusão devido os alunos ainda não estarem familiarizados com o software. Todavia, o uso do software como ferramenta foi um facilitador na construção dos conceitos, na percepção das propriedades envolvidas e para elaboração das fórmulas desejadas.

Fernandes (2015) analisou os impactos de uma sequência didática para o ensino de área de volume juntos a 31 alunos do 2º ano de uma escola pública de Capinzal do norte, estado do Maranhão, segundo o apporte teórico da Teoria da Aprendizagem Significativa.

Antes de iniciais as atividades da sequência didática Possani (2015) aplicou um questionário socioeducacional e um teste de verificação 8 questões do Exame Nacional do Ensino Médio junto a turma pesquisada, o qual revelou que os alunos estavam em um padrão abaixo do adequado no que tange a conhecimentos básicos de geometria plana e geometria espacial.

No primeiro encontro de sua pesquisa, o autor dividiu a turma em grupos e solicitou uma pesquisa sobre os sólidos geométricos, seus elementos e as fórmulas, os resultados obtidos formam apresentados em seminários e com eles formam construídos mapas mentais para cada sólido apresentado.

No segundo encontro, a atividade proposta consistiu na construção dos sólidos geométricos usando material manipulável. Nessa etapa, cada grupo responsável pela construção de um sólido, fazendo uma apresentação final para a turma dando destaque aos elementos encontrados.

No terceiro encontro, foram apresentados os sólidos por meio do software Poly e, posteriormente, aplicado de um teste de validação com 7 questões. Com os resultados do teste o Fernandez (2015) montou o quadro a seguir.

Pela produção e resultado do teste de validação, Fernandez (2015) afirma ter ocorrido aprendizagem significativa dos conceitos de área e volume dos sólidos geométricos junto aos alunos envolvidos na pesquisa. O autor destaca também, que o uso da metodologia diferenciada, fazendo uso de materiais manipuláveis e uso do software Poly gerou um atrativo a mais na realização das atividades e contribuiu para facilitar a formalização dos resultados.

Ritter (2011) apresentou uma pesquisa sobre habilidades de visualização de sólidos espaciais a partir de planificações fazendo uso do software de geometria dinâmica CALQUES 3D. O trabalho procurou responder ao questionamento: Seria viável uma proposta de ensino usando geometria dinâmica, para melhorar a capacidade de visualização de formas espaciais?

Para isso, foi aplicado um teste de verificação qual o resultado mostrou que os alunos analisados não apresentavam conhecimento satisfatório em tópicos geometria plana e geometria espacial.

A pesquisa ocorreu 32 alunos do 3º ano de uma escola da rede particular da cidade de Novo Hamburgo no Rio Grande do Sul, por meio de uma Sequência Didática composta por 5 atividades elaboradas conforme a Teoria da Construção do Pensamento Geométrico de Van Heile, na qual foi trabalhado utilizando-se o software

Calques 3D para construção dos sólidos geométricos, visualização em perspectiva e resolução de questões de questões sobre área e volume.

Após execução das atividades da Sequência Didática, Ritter (2011) aplicou um teste de verificação, no qual constatou uma melhora significativa na resolução de questões envolvendo as habilidades de visualização e cálculo de área e volume e nesse sentido, muito se deve a utilização do software Calques 3D devido as possibilidades oferecidas ao desenvolvimento dessas habilidades.

A dissertação de Santos (2012) intitulada “O ensino de volumes de sólidos por atividades” objetivou investigar as potencialidades do ensino de volumes de sólidos geométricos por atividades fazendo uso de tecnologias computacionais e utilizou como metodologia a engenharia didática e fundamentou-se na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau. O estudo buscou investigar se o desenvolvimento de atividades utilizando redescoberta, relacionadas ao estudo de volumes de sólidos geométricos, tendo como suporte um software pode contribuir para o ensino e aprendizagem das fórmulas e das propriedades dos sólidos geométricos.

A pesquisa foi desenvolvida com duas turmas de 3º ano de uma escola pública estadual de Belém, tendo sido esta escolhida pelo fato de o professor responsável pelas turmas já ter trabalhado o tema geometria espacial previamente e por possuir um laboratório de informática que contemplava a proposta de desenvolvimento das atividades propostas pela pesquisadora.

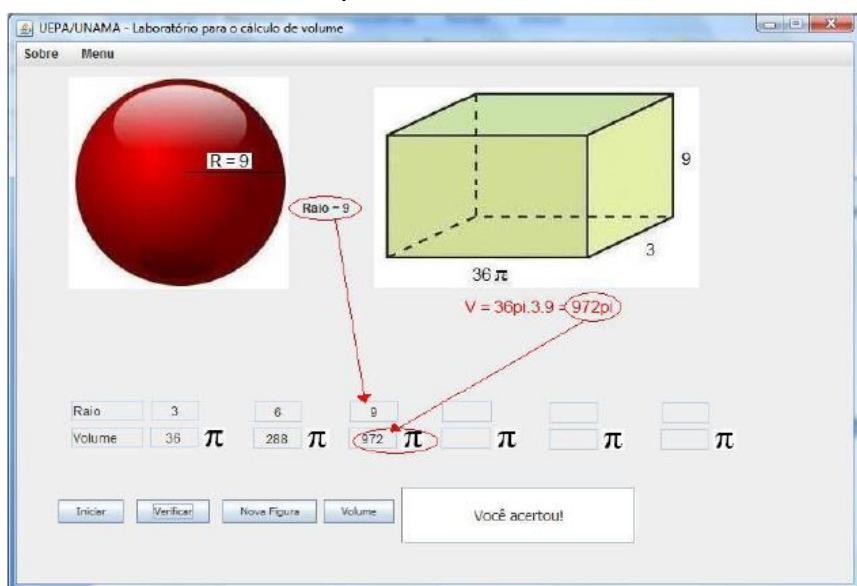
Na primeira fase da pesquisa, foi feito um levantamento de como o objeto de conhecimento geometria espacial vinha sendo ensinado pelos professores, assim como as concepções dos alunos acerca de conhecimentos prévios e das dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem sobre o tema, o qual será discutido no Item 1.2 de nosso texto. Nesse momento a autora realizou um teste composto por 5 blocos de questões, todas relacionadas ao cálculo de volumes de sólidos geométricos, com o objetivo de avaliar competências e habilidades relacionadas ao tema. No bloco 3 de questões, na questão de nº 11, relacionada ao cálculo do volume da esfera, o índice de acertos foi 19% o que mostrou as dificuldades relacionadas a esse sólido.

De posso dos resultados obtidos, na fase seguinte, forma planejadas 5 sessões didáticas, cujo objetivo é encontrar uma maneira de calcular o volume dos sólidos geométricos. Para isso, foi construído um software denominado “SOFTWARE PARA

ENSINO DE VOLUMES” que, a partir de inserção de algumas informações, fornecer o valor do volume dos sólidos geométricos em estudo.

Aqui volto a minha atenção, a atividade relacionada ao sólido “ESFERA”, por ser esse sólido objeto de estudo de minha dissertação. Em tal atividade, solicitava-se que alguns valores para o raio fossem inseridos no programa e o valor do volume da esfera era apresentado ao aluno até a 3^a inserção, desse ponto em diante o aluno deveria inserir novos valores e preencher, com base nas observações feitas anteriormente, preencher os valores de raio e volume e clicar em um botão que verificava se o valor do volume estava correto ou não, sem exibida na tela do programa tal mensagem.

FIGURA 4: Software para o ensino de volume da esfera



Fonte: Elaborado por Santos (2012)

A autora relata, analisando a produção dos alunos que nessa atividade, embora os se tenha conseguido chegar na fórmula para o cálculo do volume da esfera, muitos dos alunos apresentaram dúvidas para se chegar a relação, necessitando que fosse feita diversas intervenções no decorrer do trabalho.

No final das atividades, sempre era feita a formalização dos estudos ocorridos e sempre ocorria a resolução de uma lista de exercícios com conteúdos relacionados as atividades.

Na fase final do trabalho, aplicou um pós-teste com 13 questões, onde pode comprovar uma melhoria significativa na interpretação e resolução dos exercícios

apresentados, o que mostra o ensino por atividades como uma proposta viável ao desenvolvimento dos tópicos geometria espacial para o cálculo de volumes.

Luna (2009) desenvolveu uma pesquisa visando estudar a construção e aplicação de um plano de ensino e aprendizagem de geometria espacial, dentro de uma perspectiva construtivista junto a professores e alunos. A pesquisa de caráter qualitativo, se deu com 3 professores e 104 alunos do 2º ano do ensino médio atendidos de uma escola pública do estado de São Paulo.

Para coleta de informações, observou-se desde o processo de desenvolvimento das trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA), a interação entre professor e aluno no processo de aplicação das THA, assim como os resultados obtidos após sua aplicação junto aos alunos. Como objetos de coleta de informações, também se fez uso de uma entrevista com os professores participantes acerca de suas concepções metodológicas e vivências profissionais, assim como a aplicação de um questionário com objetivo de levantar dados sobre a formação acadêmica e sobre atividades de formação complementares na área de geometria.

Para Luna (2009), uma THA consiste em “definir os objetos de aprendizagem dos estudantes, tarefas matemáticas que serão usadas para promover a aprendizagem e levantamentos hipotéticos sobre o processo de aprendizagem dos estudantes”.

A pesquisa transcorreu mediante 5 atividades de aplicação das THA's e constatou que as atividades construídas dentro de um planejamento, fazendo uso de ferramentas tecnológicas que estimulem a curiosidade de aluno somada a intervenções do professor em classe podem maximizar o aprendizado em geometria espacial.

A autora em suas considerações finais que embora o trabalho desenvolvido tenha se mostrado muito produtivo, a aplicação dos métodos desenvolvidos ainda esbarra em fatores como a falta de tempo dos professores para elaborar e planejar as THA's e resistência por parte dos professores em adotar novas metodologias de ensino, onde o predomínio é o tradicional.

Conforme os dados obtidos nessa categoria, percebemos a grande contribuição que o uso de materiais manipuláveis e o uso de softwares de geometria dinâmica como o GEOGEBRA e o POLY podem dar ao ensino e a aprendizagem de geometria espacial. Embora, grande parte não tenha sido colocada nesse material, usando-se para critério de eliminação a metodologia quase igual, foram diversas as

dissertações que apontaram para êxito nos resultados obtidos fazendo uso de tais materiais. Por fim, observou-se a importância da mudança da forma de apresentação do conteúdo, que apresentada de forma aplicada ao dia-a-dia do aluno, de tal forma que eles busquem o conhecimento, acabou por estimular a autonomia e despertou o gosto pela descoberta, apontando assim o caminho para produção de novos trabalhos que tenham por interesse desenvolver metodologias de ensino e aprendizagem na área de geometria.

Machado (2010) investigou as potencialidades do ensino de tópicos geometria espacial aplicados a construção civil em ambientes de aprendizado informatizados com uma turma de 2º ano do ensino médio de uma escola da cidade de uma escola estadual da região metropolitana de Minas Gerais.

O autor descreve que sua pesquisa teve caráter quantitativo e teve sua base teórica fundamentada na informática educacional. Para obtenção de dados fez uso de um pré-teste, um pós-teste com questões relacionadas a geometria plana e espacial, aplicação de questionários a professores e alunos, cujo objetivo central foi obter informações acerca da metodologia para desenvolver o conteúdo e das concepções dos alunos sobre o conteúdo ensinado.

A metodologia de trabalho da pesquisa consistiu em um trabalho conjunto entre o pesquisador e o professor responsável pela turma. Solicitava-se que os alunos fizessem uma pesquisa prévia sobre os tópicos que seriam abordados, o professor responsável pela turma apresentava o tópico através de uma aula expositiva e após a finalização de cada encontro, num total de 6, os alunos desenvolviam atividades em laboratório de informática, fazendo uso dos softwares de geometria dinâmica SKATUCHUP e GEOGEBRA, atividades essas que tinham como objetivo, criar habilidades de visualização, reconhecimento de elementos e cálculo de área e volumes.

Os resultados obtidos mostraram que o uso de softwares de geometria dinâmica aumenta de forma significativa o interesse pelo estudo da geometria. As pesquisas realizadas pelos alunos para o desenvolver das atividades reforçaram o entendimento de pré-requisitos e contribuíram para a melhoria do aprendizado, fato que foi evidenciado no questionário avaliativo.

De posse dos resultados apresentados nas produções citadas anteriormente, entende-se que o ensino de geometria espacial se torna mais atrativo quando se faz uso de metodologias diferente do ensino convencional, em especial por meio do uso

de tecnologia. Assim, diante do potencial apresentado, quanto a manipulação de figuras, processo de visualização e elaboração das fórmulas e o impacto desses fatores sobre a resolução de questões, entendo que o uso de softwares de geometria dinâmica pode contribuir de forma significativa para o ensino do tema. Nesse sentido, na busca por sanar as dificuldades apontadas nos estudos diagnósticos comentados anteriormente e diante do leque de possibilidades, escolhemos o software Geogebra 5.0 como suporte as atividades da Sequência Didática para ensino de esfera, a qual apresento posteriormente.

2.1.3 Análise do Livro Didático

Nesta seção buscou-se analisar o ensino de esfera na principal ferramenta didática usada pelo professor, o livro didático. Para tanto, reunimos um grupo de quatro livros, todos pertencentes ao programa nacional do livro didática (PNLD), onde destacamos as formas de abordagem do tema esfera em cada um deles.

O primeiro livro analisado foi o “Matemática: Contexto e Aplicações – Volume 3” de autoria de Luiz Roberto Dante, edição do ano de 2016. A apresentação do tema esfera começa por meio de uma definição, onde são caracterizados seus elementos e se introduz de forma intuitiva a noção de superfície esférica. Posteriormente, o autor apresenta de forma direta as fórmulas para cálculo da área da superfície esférica fazendo a associação a área do círculo máximo. A fórmula para cálculo volume é apresentada e posteriormente demostrada meio da anticlépsidra e através do método de Arquimedes, nesse momento também surge o conceito de secção esférica e a fórmula para cálculo de sua área. O autor finaliza o capítulo apresentando demonstração do volume da esfera por meio da decomposição da esfera em infinitas pirâmides de base poligonal e altura R. Na sequência da construção dos conteúdos temos uma seção com três questões resolvidas e uma lista com 15 questões discursivas. Não se tem na construção do conteúdo uma parte dedicada a fuso esférico e nem a cunha esférica. Entretanto, destacamos a questão nº45 da página 88 traz exatamente as ideias de fuso e cunha esférica que não foram trabalhados anteriormente.

A segunda obra tem como título “Conexões com a Matemática – Volume 2”, é de autoria coletiva e organizado pela editora Moderna, edição de 2013. Em uma

primeira seção, o conteúdo introduzido comparando-se o sólido esfera a objetos do cotidiano e sequencialmente apresentam-se a definição de esfera, de superfície esférica e esfera por meio de revolução e secção esférica. A seção finaliza com 3 exercícios resolvidos e 4 de fixação de conceitos. Na segunda seção, as fórmulas para cálculo da área da superfície esférica e do volume são apresentadas, sem serem demonstradas, finaliza-se a seção com 2 questões resolvidas. Por fim, a última seção é dedicada ao cálculo da área do fuso esférico e do volume da cunha esférica terminando assim com 4 questões discursivas. O capítulo termina com uma lista de 24 exercícios complementares envolvendo os corpos redondos e um teste de autoavaliação com 10 questões, onde no final o aluno através do preenchimento de um quadro pode verificar quais os tópicos necessita revisitar para melhorar o desempenho.

O terceiro livro analisado foi “Matemática - Interação e Tecnologia – Volume 3”, autoria de Rodrigo Ralestri, ano 2016. Nessa obra, o autor introduz o sólido esfera por meio de comparação com objetos do cotidiano e sequencialmente apresenta a definição matemática de esfera e apresenta os seus elementos. O volume da esfera é apresentado e a demonstração é feito por meio da anticlépsidra, em meio a esta demonstração o autor introduz a noção de secção esférica e apresenta a fórmula para o cálculo de sua área. Segue-se exposição de 4 questões resolvidas e uma lista com 9 questões discursivas. Finalizando, apresenta-se a área da superfície esférica por meio da decomposição da esfera em pirâmides de base triangular e altura R, seguido de 4 questões resolvidas e uma lista com 7 questões discursivas. Neste livro, não temos uma parte dedicada ao ensino de fuso esférico e cunha esférica e nem questões propostas que envolvam o tema.

A quarta e última obra analisada tem como título “Matemática: Ciência e Aplicações”, os autores são Gelson Iezzi, Oswaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, ano de 2016. Assim como nas outras obras analisadas apresenta os tópicos de esfera comparando com objetos do cotidiano e a partir disso trás as definições matemáticas de esfera, superfície esférica e secção esférica. O volume da esfera é apresentado por meio da anticlépsidra e a fórmula da área da esfera é demonstrada por meio da aproximação dos volumes de duas esferas concêntricas de raios diferentes, finaliza-se a seção com uma questão de exemplo e uma lista com 20 questões discursivas. A última seção, trata do fuso esférico e da cunha esférica, terminando com 5 questões discursivas o tema em questão.

Destaco que a intenção ao avaliar cada obra não é a de destacar qual o melhor livro, visto que a escolha de cada um deles parte diretrizes que variam de escola para escola e de acordo com as concepções de cada professor. Todavia, entende-se que independentemente desses fatores tal escolha se dá com o objetivo de potencializar o aprendizado dos alunos.

Diante do exposto, o que podemos destacar é que, em todas as obras analisadas, o conteúdo transcorre da maneira tradicional, onde apresenta-se conceitos seguidos de algumas questões resolvidas e no final de cada seção questões de aprofundamento. Em duas das obras analisadas, Matemática – Contexto e Aplicações e Matemática – Interação e Tecnologia, observa-se a ausência dos tópicos fuso esférico e cunha esférica e outra característica que diferencia cada uma das obras analisadas é o nível das questões ao final de cada tópico e o nº de questões direcionadas a vestibulares e ao ENEM. Tais elementos podem ser resumidos através do quadro a seguir.

QUADRO 2: Considerações sobre os conteúdos de esfera nos livros analisados

AUTOR E ANO	TÍTULO DO LIVRO	ALGUMAS CONSIDERAÇÕES
Luiz Roberto Dante (2016)	Matemática: Contexto e Aplicações Volume 3	Neste livro priorizou-se a construção dos conceitos matemáticos, porém deixou-se lado tópicos importantes como fuso esférico e cunha esférica. O livro apresenta uma variedade grande de questões contextualizadas, entretanto não se procurou aproximar as questões das propostas no ENEM.
Vários Autores (2013)	Conexões com a Matemática Volume 2	Neste livro abordou-se o conteúdo tanto relacionado com o mundo que cerca o aluno quanto em todos os aspectos matemáticos necessários, como ponto a favor apresenta uma grande variedade de questões propostas contextualizadas e para aprofundamento. Entre elas, vemos grande número de questões de vestibular e do ENEM.
Rodrigo Balestri (2016)	Matemática: Interação e Tecnologia Volume3	Neste livro o autor obedeceu a explanação do conteúdo matemático formal, contextualizou as questões e o conteúdo, utilizou imagens para a melhor compreensão do aluno. Entretanto, embora o livro traga questões com a resolução passo a passo, o nº de questões de vestibular e do ENEM apresentam-se em baixo número, um dos diferenciais do livro são algumas atividades na quais se faz uso de calculadora a fim de aferir resultados.
Gelson Iezzi, Oswaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida (2016)	Matemática: Ciência e Aplicações Volume 2	Neste livro, os autores priorizarem o conteúdo matemático formal e o ensino contextualizado, apresentam-se demonstrações das fórmulas e existe uma grande quantidade questões propostas, nota-se a preocupação em apresentar questões de vestibulares e do ENEM, porém tais questões aparecem um número reduzido. O livro traz curiosidades e alguns desafios no final do capítulo o que é um ponto positivo, pois pode despertar o interesse do aluno que deseje se aprofundar no estudo do tema.

Fonte: Elaborado pelo Autor (2019)

A análise feita sobre os livros didáticos citados anteriormente mostra o ensino de esfera, em geral, ocorrer de maneira convencional, ou seja, é dado ênfase a definições e, sequencialmente, são apresentadas as fórmulas para cálculo de área e volume, o que geralmente não é suficiente para o entendimento dos alunos.

Nas obras analisadas, embora haja preocupação com a contextualização em algumas questões propostas, ainda se tem uma grande quantidade de questões fora desse padrão, o que tende contribuir para que o ensino de forma mecanizado e sem sentido prático na vida do aluno.

2.2 CONSULTA AOS PROFESSORES

Nesta seção disponibilizo os dados de uma pesquisa realizada junto a professores do ensino básico referente ao ensino do sólido geométrico esfera. Nela, apresento aspectos como: processo metodológico, formas de avaliação, condições de trabalho, perfil docente, entre outros. Para obtenção das informações apresentadas foi feito um levantamento com 50 professores da rede pública atuantes no ensino básico. A coleta das informações ocorreu por meio de um formulário eletrônico do Google, o qual teve 12 perguntas fechadas sobre os aspectos citados anteriormente, além de 10 questões de múltipla escolha sobre tópicos relacionados ao sólido geométrico, nas quais foi solicitado a avaliação de cada uma delas em relação ao seu nível de dificuldade. Para melhor entendimento e organização das informações obtidas, os resultados formam arrumados em termos de porcentagem e apresentados por meio de gráficos conforme apresento a seguir.

2.2.1 Descrição das informações

Aqui apresento as informações de caráter sócio educacional relevantes ao desenvolvimento da pesquisa aqui proposta. Dados como formação acadêmica, métodos para apresentação do objeto de conhecimento e formas de avaliação, quantidade de alunos atendidos por turma, jornada de trabalho, entre outros, nos serviram de baliza para um melhor entendimento da relação do professor com o sólido geométrico esfera e de que forma ele vem sendo tratado diretamente na sala de aula.

Na amostra em questão, vemos que a moda das idades é de 26 a 35 anos de idade, o que comparado a dissertação de Santos (2012), onde fui feito um levantamento similar, observa-se que com relação a faixa etária dos professores atuantes no ensino médio está relativamente próxima a encontrada pela autora (cerca de 54% na mesma faixa etária). Portanto, com relação a esse aspecto não ocorrendo mudanças significativas.

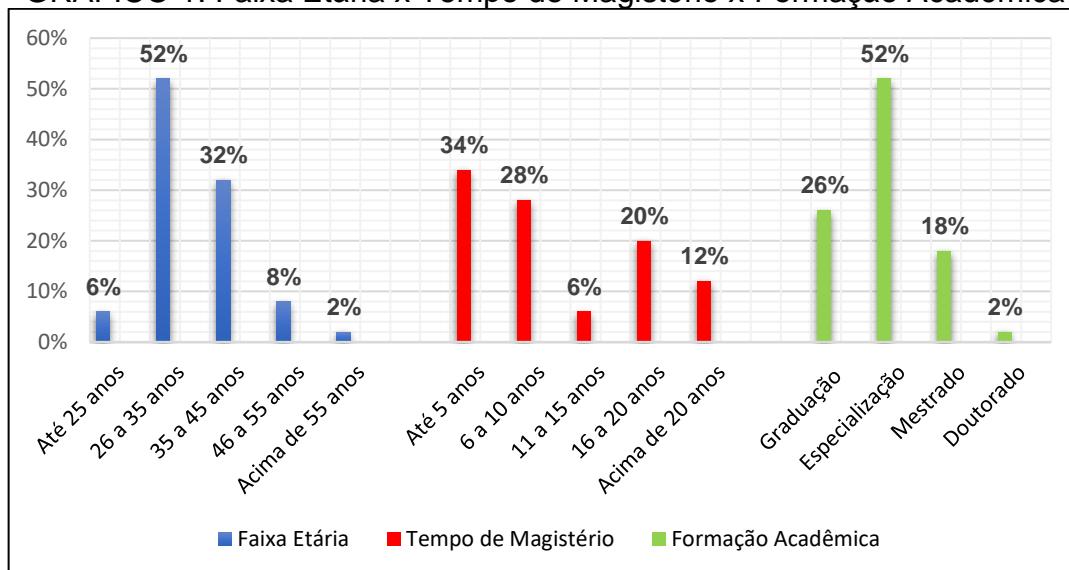
Sobre o tempo de atuação no magistério destacam-se as faixas até 5 anos com 34% e 6 a 10 anos com 28% dos professores consultados. O resultado apresentado

mostra-se como um fato positivo visto que, em sua maioria são professores em fase de inicial de carreira e encontram-se nas fases de exploração e diversificação.

Huberman (2000) classifica o tempo de atuação docente em três fases. A fase de 01 a 03 anos, o autor denomina fase de exploração; de 04 a 06 anos, denomina fase de estabilização e 07 a 25 anos o autor denomina de fase de diversificação. A fase de exploração é uma fase de entusiasmo e adequação com a carreira docente; nas fases de diversificação e experimentação ocorrerem o desenvolvimento do potencial docente, busca-se a diversificação de métodos e práticas de ensino.

A respeito da formação acadêmica perguntamos: Qual o seu nível de formação acadêmica? E encontramos como resposta predominantes graduação (26%) e especialização (52%). O nível acadêmico do professor é outro fator de destaque positivo, pois segundo Carmo et al. (2014) a qualificação do professor é fator que tem forte influência na melhoria de desempenho dos alunos. Conforme o autor, quando consideradas avaliações de larga escala, como é o caso do SisPAE e Prova Brasil, a melhor de desempenho dos alunos está correlacionada a melhor formação acadêmica do professor. Resumidamente informações encontram-se resumidas no gráfico a seguir.

GRÁFICO 1: Faixa Etária x Tempo de Magistério x Formação Acadêmica



Fonte: Elaborado pelo Autor (2017)

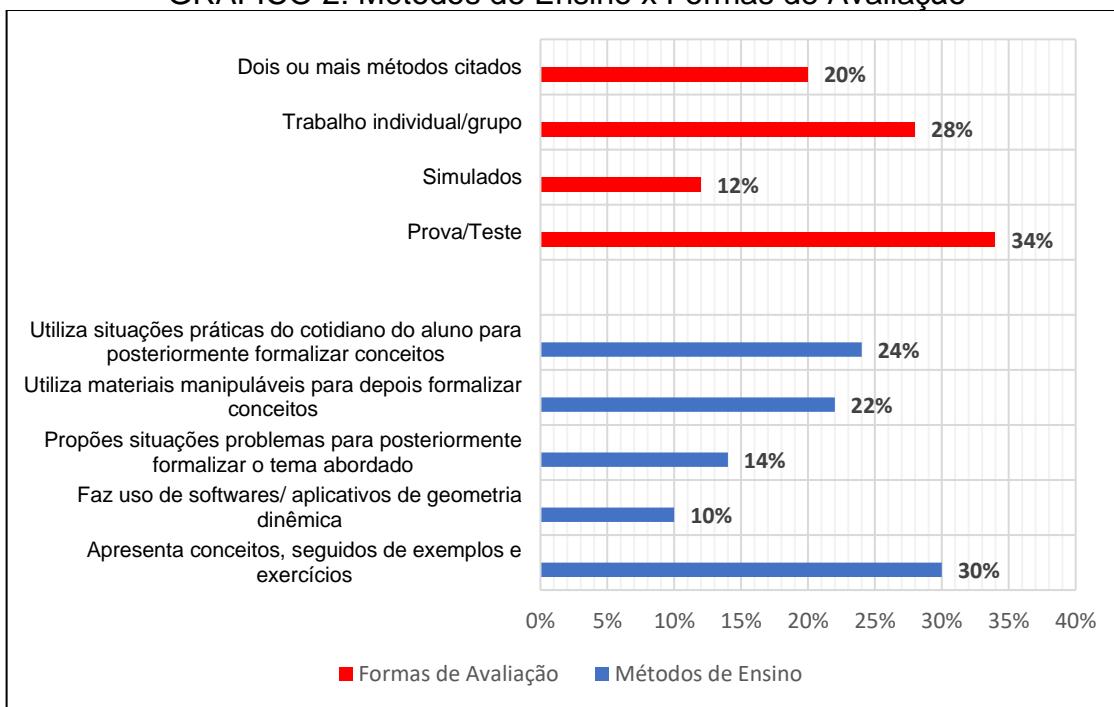
Quanto a método usado para o ensino de geometria espacial, tem-se predominância da apresentação de conceito, seguido de exemplos e exercícios ocorre

com maior frequência (30%). Entretanto, já podemos observar que o domínio do método clássico vem dando espaço a outros métodos de ensino (ver GRÁFICO2)

Relacionado ao método de ensino com maior frequência Skovsmose (2007, apud FAUSTINO E PASSOS, 2014) o denomina de paradigma do exercício. Nele, o ensino encontra-se centrado no professor; o aluno é passivo do processo ensino e aprendizagem; se dá maior importância a resolução de questões do livro didático ou a lista elaborada pelo professor; os problemas apresentam uma única resposta e são resolvidos por meio de algoritmos trabalhados em outras questões apresentadas como exemplo. Neste contexto, o aluno pouco desenvolve o seu senso crítico e a autonomia, e não se desenvolve a capacidade de lidar com erros durante o processo de aprendizagem.

A respeito do processo de avaliação perguntamos: quais os instrumentos que você utiliza para avaliar a aprendizagem dos seus alunos? A maioria esmagadora respondeu que entre as opções apresentadas faz uso de duas ou mais formas de avaliação. Todavia, ainda se pode observar a utilização da prova escrita em 24% das observações, o que corrobora com o estudo realizado por Gatti (2003) junto a professores do ensino médio, no qual ficou evidenciado a importância da prova escrita como principal método avaliativo, mesmo considerados outras formas de avaliação.

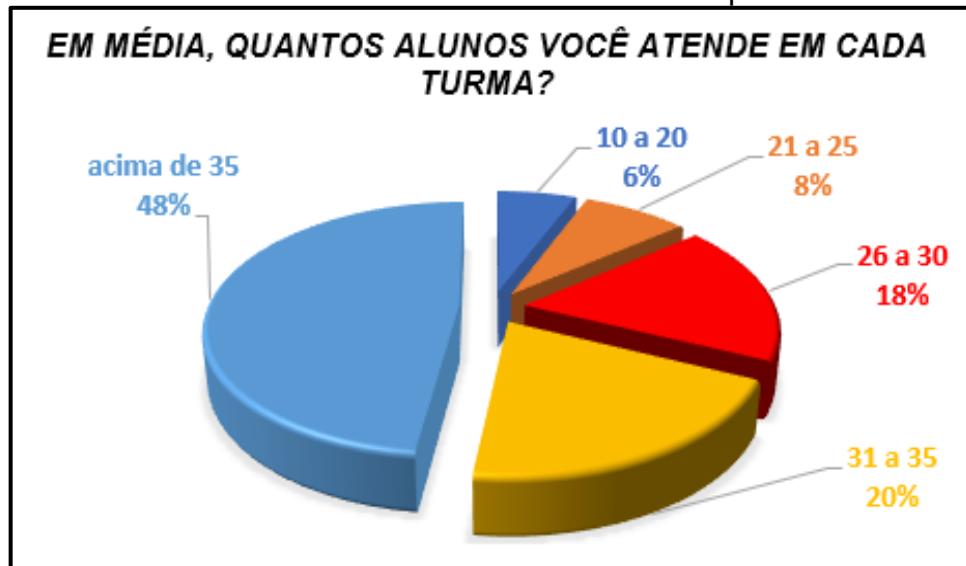
GRÁFICO 2: Métodos de Ensino x Formas de Avaliação



Fonte: Elaborado pelo Autor (2017)

Sobre a quantidade de alunos atendidos por turma nas aulas de matemática as respostas revelaram que, em média, as turmas apresentam em sua maioria a média de 35 alunos, o que pode ser considerado um nº elevando de alunos e pode estar comprometendo a qualidade do processo de ensino e aprendizagem.

GRÁFICO 3: Número de alunos atendidos por turma



Fonte: Elaborado pelo Autor (2017)

Conforme os resultados apresentados no GRÁFICO 3 podemos ver que a situação na qual o professor se encontra é desfavorável ao processo de ensino e de aprendizagem dado que em tal situação o professor encontra-se impossibilitado de interagir e oferecer a orientação devida a cada aluno, o que torna quase impossível compreender o desenvolvimento educacional dos discentes. Nesse contexto, Basseto et al (2017) afirmam que

o número de alunos atendidos por turma é uma variável importante dentro do processo de ensino e aprendizagem, pois em classe menores além da interação aluno-professor facilitada, ocorrer avaliação de forma mais completa e contínua e existe maior flexibilidade nas estratégias de ensino. (p. 3)

Buscando entender as dificuldades apresentadas durante a resolução de questões perguntamos: quais os principais problemas encontrados por seus alunos na resolução de questões de geometria espacial?

Sobre o grau de dificuldade para aprender esfera o quadro a seguir, apresenta no entendimento dos professores, a situação dos alunos quando são apresentados os tópicos relacionados ao sólido esfera. Nele, também consideramos o percentual de

professores que costumam ensinar cada tópicos, do total analisado solicitamos que respondessem sobre o grau de dificuldade para os alunos entenderem cada um dos tópicos apresentados no quadro, chegando-se aos resultados expostos a seguir.

QUADRO 3: Dificuldade de aprendizagem segundo os professores

Conteúdo	Você costuma ensinar este tópico?		Nível de Dificuldade do Aluno para Aprender				
	Sim	Não	Muito fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito difícil
Área Círculo e Comprimento da Circunferência	60%	40%	70%	20%	10%	-	-
Definição de Esfera e seus elementos	100%	0%	22%	58%	14%	6%	-
Área da Secção esférica	60%	40%	-	21%	36%	42%	-
Área da Superfície Esférica	100%	0.0%	8%	15%	34%	43%	-
Volume da Esfera	100.0%	0.0%	6%	6%	36%	42%	10%
Área do Fuso Esférico	40%	60%	14%	14%	14%	58%	-
Volume da Cunha Esférica	40%	60%	5%	15%	20%	60%	-

Fonte: Elaborado pelo Autor (2017)

Os dados obtidos deixam a entender que os tópicos relacionados ao sólido esfera, na concepção dos professores consultados, para entendimento do aluno, encontra-se em uma escala de dificuldade variando entre fácil e regular, portanto, o que deveria coincidir com um bom desempenho dos alunos quando submetidos a resolução de questões relacionadas ao tema. Essa associação será feita na seção seguinte quando analisarmos os resultados dos alunos em um teste de verificação. Destaca-se também que o nível de formação dos professores vem crescendo, o que deveria causar um impacto positivo na formação do aluno, entretanto percebe-se que a carga de trabalho excessiva e o grande nº de alunos atendidos por classe tem direcionado ao ensino de forma convencional, tendo corrido a avaliação de aprendizagem por meio de provas/testes, deixando-se assim de avaliar o desenvolvimento do aluno dentro de todo o processo gerando dessa forma um problema no desenvolvimento do tema.

2.3 CONSULTA AOS ALUNOS EGRESSOS

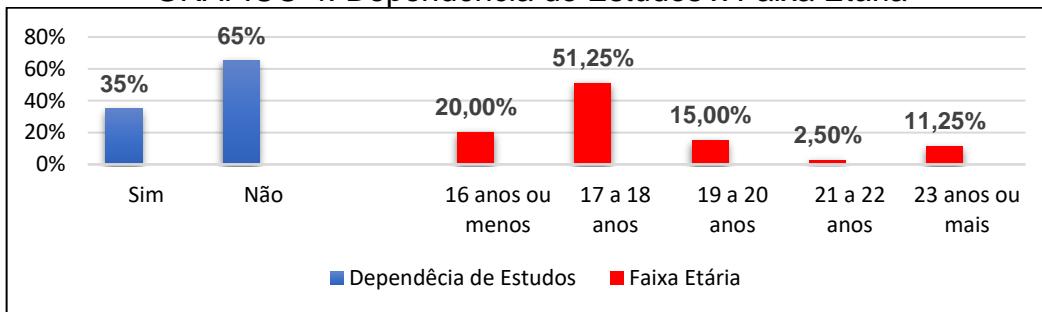
Nessa seção, apresentamos os resultados de uma pesquisa feita junto a 100 alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola pública da rede estadual de ensino do estado do Pará, localizada em Ananindeua. Tal pesquisa teve como objetivo investigar aspectos sociais, processos didáticos e metodológicos usados por professores, além das dificuldades no processo de aprendizagem do sólido geométrico esfera. Para levantamento de informações foi aplicado um questionário com 20 perguntas de múltipla escolha (APÊNDICE B) e um teste composto por 10 questões objetivas (APENDICE C).

A aplicação dos instrumentos ocorreu no período de 21 a 25 de junho de 2017, junto a turmas do 3º ano do ensino médio, nos turnos da manhã, tarde e noite, totalizando 5 turmas. Antes da aplicação da pesquisa, fizemos contato prévio com a direção da escola e com o professor responsável pelas turmas. A participação dos estudantes se deu de forma voluntária, conforme o Termo de Livre Consentimento e Esclarecimento que consta no apêndice B. Para melhor organização e tabulação das informações obtidas, recorremos ao uso de planilhas do Excel. Os resultados obtidos formam arrumados em termos de porcentagem e são apresentados em grupos conforme os gráficos em destaque na seção a seguir.

2.3.1 Descrição das informações

Relacionado a idade dos alunos, na amostra analisada, se tem um número expressivo de alunos com distorção série/idade, esse fato pode estar relacionado a quantidade de alunos que já realizaram ou estão realizando dependência de estudos (ver GRÁFICO 4). Essa distorção pode estar associada a outros fatores como, a afinidade pela matemática, tempo de dedicado aos estudos, entre outros, os quais serão discutidos na sequência.

GRÁFICO 4: Dependência de Estudos x Faixa Etária

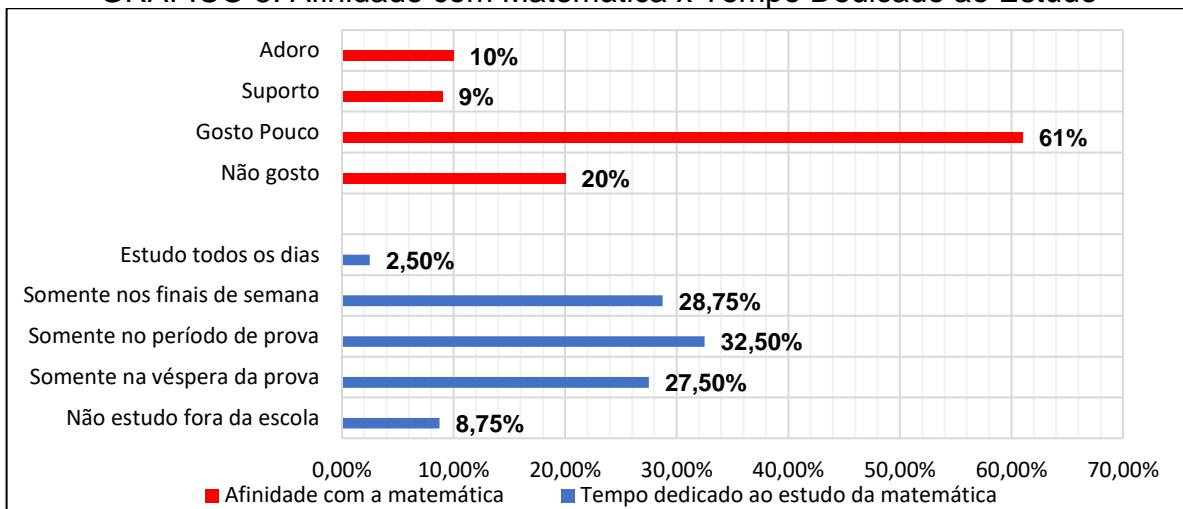


Fonte: Elaborado pelo Autor (2017)

Com relação a afinidade com matemática as respostas mostram que a maioria dos alunos aponta não gostar ou gostar pouco da disciplina. Essa informação, associada ao pouco tempo dedicado ao estudo da disciplina e a falta de assimilação das explicações dadas nas aulas justificam o baixo rendimento dos alunos da amostra no teste de conhecimentos básicos sobre o sólido esfera.

Quanto ao tempo dedicado ao estudo de matemática forma da escola observou-se que em predominância os alunos responderam estudar apenas na véspera da prova, somente no período de prova ou apenas nos finais de semana conforme indicado no GRÁFICO 5.

GRÁFICO 5: Afinidade com Matemática x Tempo Dedicado ao Estudo



Fonte: Elaborado pelo Autor (2017)

Fazendo uma comparação entre os resultados do GRÁFICO 2 da página 46 e dados dos GRÁFICOS 4 e 5 apresentados acima percebe-se que o impacto negativo do ensino clássico sobre o processo de ensino e aprendizagem. Pode-se ver claramente que os alunos não tem motivação para o estudo da matemática, que somado ao sistema de avaliação de aprendizagem, que ocorre predominantemente

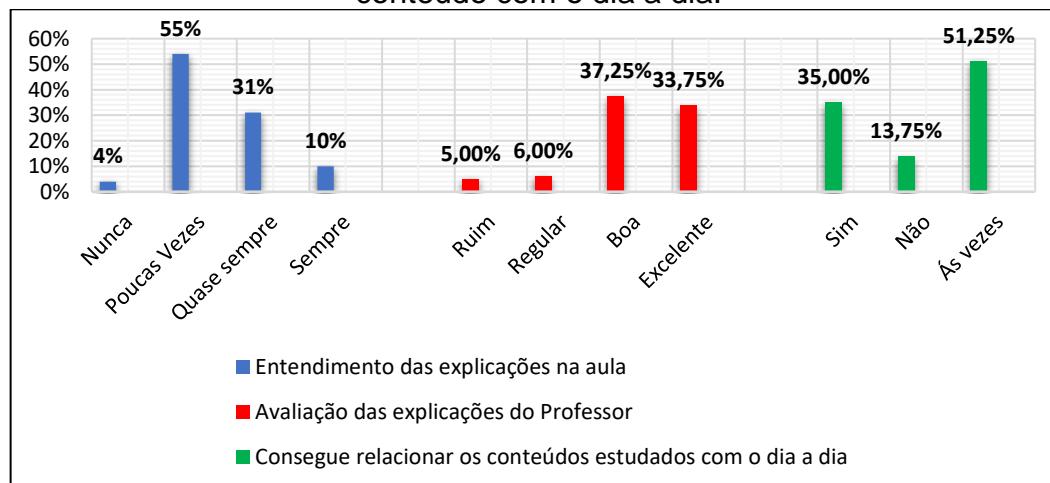
por meio de Prova/Teste, contribui com resultados não satisfatório quanto a proficiência para avanço as séries seguintes e pode explicar a porcentagem elevada de alunos que ficaram em dependência de estudos.

Quando perguntamos: você consegue entender as explicações dadas na aula de matemática? As respostas mostraram que uma ligeira maioria entre os alunos que disseram entender às vezes ou nunca, que somadas correspondem a 59% dos alunos consultados.

Sobre a qualidade das aulas fizemos a pergunta: como você avalia as explicações dadas pelo seu professor de matemática? Os resultados mostraram que no geral, na amostra em estudo existe uma predominância quanto a qualidade das explicações serem regular, boa ou excelente. Entretanto, esta informação não corrobora as respostas da pergunta apresentada no Gráfico 3 apresentado anteriormente, indo no sentido contrário de que em grande parte das explicações dadas os alunos alegam não ter o entendimento.

Outro dado relevante a pesquisa diz respeito a associação entre os conteúdos trabalhados em aula e a relação deles com a aplicabilidade na vida dos alunos. Com relação a isto existe predominância entre as respostas sim e às vezes, o que representa um percentual de 86,25% da amostra. Dentro dessa prática, o aluno deixa de ser investigado, a fazer descobertas e a aula acaba consolidando a ideia de que a matemática é mera aplicação de fórmulas e que dentro de alguns exercícios não fazem sentido algum, o que acaba acarretando perguntas do tipo: Para que eu devo estudar isso? Qual a aplicação disso na minha vida?

GRÁFICO 6: Entendimento de Explicação x Avaliação do Professor x Relação do conteúdo com o dia a dia.



Fonte: Elaborado pelo Autor (2017)

Embora as informações do GRÁFICO 5 mostrem que os alunos consideram como boa ou Excelente a explicação do professor, não se faz relação entre o que se estuda e sua aplicação prática. Tal problema ocorre, predominantemente, por conta ensino ocorrer de modo convencional, onde pouco se explora esses aspectos. A esse respeito os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam que

não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (BRASIL, 1997, p. 43)

Relacionado a metodologia utilizada para apresentar os tópicos de esfera, na amostra analisada, observa-se que a grande maioria das aulas seguem o modelo clássico, ou seja, Iniciam com a definição seguida de exemplos e exercícios com 63,75% e que dentre as outras metodologias utilizadas se destacou o uso da história do tem para depois explorar os conceitos com 13,25% das respostas.

Segundo Boeri e Vioene (2009)

É essencial também, que o educador saiba que “ensinar não é transferir conhecimentos”, ou seja, o educando não é um depositário de informações, que deverão ser memorizadas e repassadas tal qual aprendeu. Ensinar é sim proporcionar condições para a construção dos conhecimentos pelos alunos, de forma crítica, consciente, estimulando a autonomia, a reflexão, a discussão, o raciocínio. (BOERI e VIOENE, 2009, p. 13)

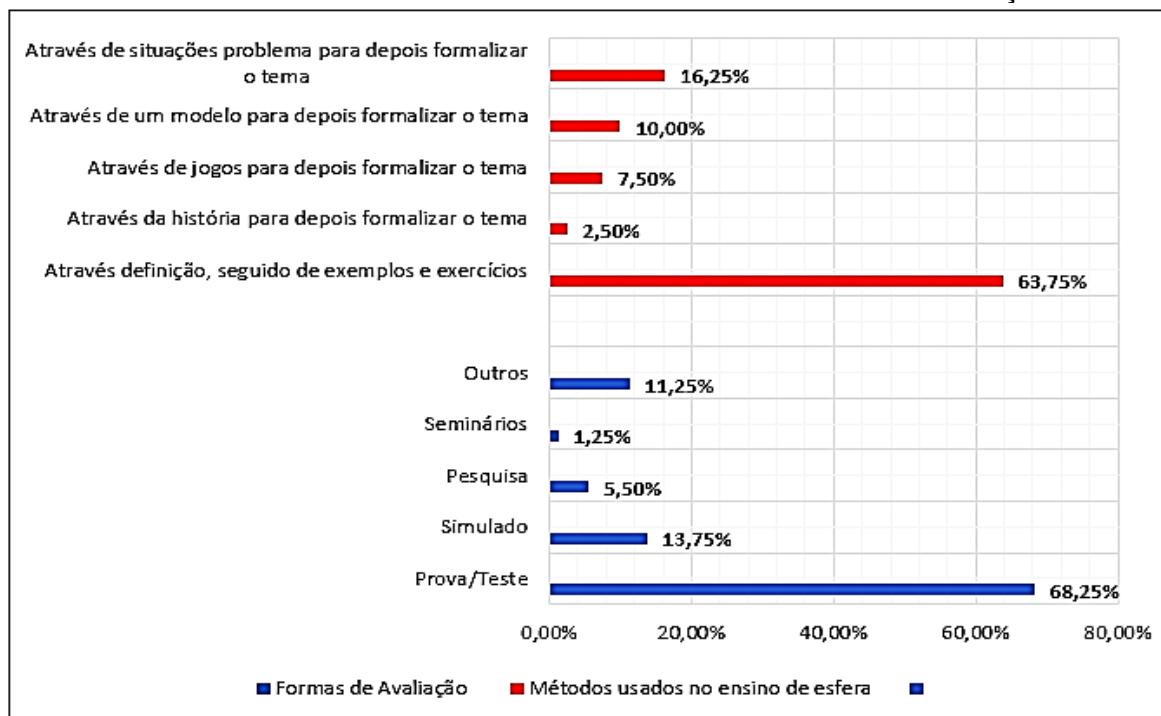
As informações encontradas na pesquisa evidenciam que o ensino de esfera ainda tem o professor como centro do processo de ensino. Ao aluno cabe entender conceitos expostos pelo professor e aplicá-los para resolver questões apenas. Neste contexto, se perdem várias motivações para o estudo da geometria: o aluno deixa de desenvolver o aspecto investigativo, a criatividade, a autonomia e o gosto pela descoberta, o que passa a sensação de que geometria é apenas um emaranhado de fórmulas.

Sobre avaliação de aprendizagem, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2004) nos orientam que

a avaliação deve estar centrada tanto no julgamento dos resultados apresentados pelos alunos quanto na análise do processo de aprendizado. O processo de avaliação não se limita a instrumentos com perguntas que exigem apenas operações cognitivas simples como a memorização. A formação de indivíduos treinados apenas para memorizar frases e responder a perguntas com respostas determinadas é incompatível com o desenvolvimento de cidadãos socialmente inseridos e com espírito crítico aguçado, um dos objetivos da educação. (BRASIL, 2006, p. 40)

Ligado ao processo de avaliação, encontramos como maioria esmagadora o uso de Prova/Teste e Simulados como instrumentos utilizados, o que corresponde a um percentual de 82%. O que mostra que o processo de avaliação de aprendizagem tem se dado de forma pontual, contrariando o proposto no documento citado anteriormente.

GRÁFICO 7: Métodos de ensino de esfera x Formas de avaliação



Fonte: Elaborado Pelo Autor (2017)

Buscando entender quais tópicos relacionados ao sólido esfera e o grau de dificuldade de aprendizagem de cada um deles elaboramos o quadro a seguir. Nele, também apresentamos uma coluna na qual foi possível identificar se na amostra consultada os sujeitos tiveram ou não contato objeto de matemático. Quanto ao grau de dificuldade apresentado em cada tópico forma contabilizadas as informações apenas dos alunos que disseram ter visto determinado tema.

As informações a seguir reafirmam os resultados apontados por Pavanello (1993), onde se destaca que o ensino de geometria vem sendo deixado em segundo plano nas escolas públicas brasileiras por diversos motivos já comentados anteriormente.

No QUADRO 4 a seguir, apresento os resultados do questionário sobre grau de dificuldade encontrado pelos alunos ao estudar os tópicos relacionados ao sólido esfera. As informações sobre o grau de dificuldade fazem referência apenas aos alunos que responderam “sim” quanto a terem estudado os tópicos analisados.

QUADRO 4: Grau de dificuldade para aprender esfera, segundo os alunos

Conteúdo	Você estudou?			Grau de dificuldade				
	Sim	Não	Não informou	Muito fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito Difícil
Área Círculo e Comprimento da Circunferência	44%	53%	3%	41%	35%	23%	6%	3%
Esfera e seus elementos	45%	53%	2%	6%	10%	51%	16%	17%
Secção esférica	42%	51%	7%	3%	3%	35%	29%	25%
Área da superfície da esfera	42%	53%	5%	3%	2%	44%	21%	30%
Volume da esfera	41%	56%	3%	2%	3%	40%	32%	23%
Cunha esférica	44%	53%	7%	1%	1%	38%	21%	39%
Fuso esférico	41%	54%	5%	5%	1%	32%	29%	33%

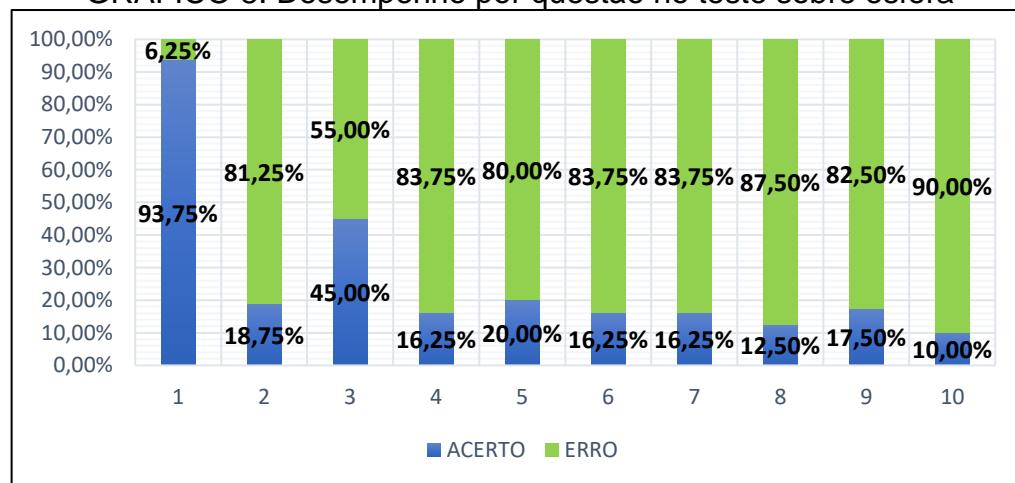
Fonte: Elaborado pelo Autor (2017)

Destaco que a grande maioria dos alunos, responderam que não haviam estudado os tópicos de geometria plana considerados fundamentais ao desenvolvimento da geometria espacial e nem os relacionados ao sólido esfera, confirmando maior parte dos resultados já apresentados junto aos professores. Nos tópicos considerados pré-requisitos de geometria espacial nota-se que a maioria responde ter estudado, entretanto os números mostram que tal conteúdo gira em torno dos graus de dificuldade Regular, Difícil ou Muito Difícil o que corrobora com os estudo apresentado por Costa et al. (2009) que elenca como principais dificuldades o uso das ideias de área e volume, o reconhecimento de elementos dos sólidos geométricos e processo de visualização dos sólidos.

Além das informações do QUADRO 4, apresento o resultado do teste de conhecimentos, incluso no apêndice C, composto por 10 questões de múltipla escolha sobre o reconhecimento de elementos, cálculo de área e volume da esfera e suas partes.

O percentual de erros/acertos em cada um dos Itens apresenta-se no GRÁFICO 8 a seguir.

GRÁFICO 8: Desempenho por questão no teste sobre esfera



Fonte: Elaborado pelo Autor (2017)

Os resultados da aplicação do teste confirmaram os resultados da revisão de estudos, em relação a problemas de reconhecimento de elementos, visualização de sólidos e dificuldades de resolução de problemas que envolvam a ideia de área e volume da esfera e suas partes e reafirmam as ideias de Pais (2006, apud Moraes, 2018, p. 78) segundo as quais a Geometria Métrica, especialmente no cálculo de volume de sólidos geométricos é considerado de difícil entendimento porque necessita de visualização e, geralmente no ensino tradicional, o professor utiliza-se apenas de configurações geométricas, ou seja, desenhos geométricos para apresentar aos alunos e propiciar melhor entendimento do assunto, limitando esse entendimento, resultando num trabalho mecânico, limitado e que não estimula a reflexão.

3. ASPECTOS MATEMÁTICOS SOBRE ESFERA

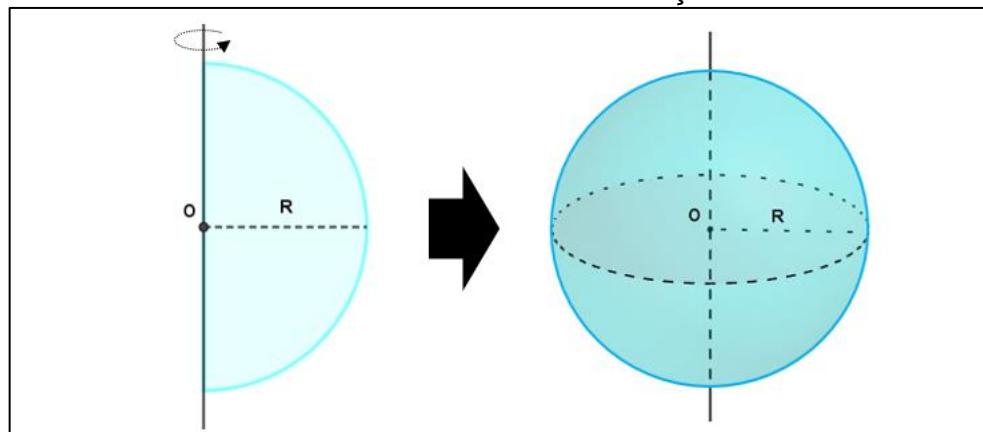
São diversas as situações nas quais fazemos o uso da geometria espacial. O cálculo do consumo mensal de água de uma residência, o projeto a construção de estruturas na engenharia civil e coordenadas fornecidas por um gps fazem uso dessa parte da matemática.

Nesse capítulo, apresento alguns aspectos relevantes relacionados ao sólido geométrico esfera, visto que por meio dos levantamentos feitos na dissertação que gerou esse produto, encontramos informações que apontam para uma formação superficial relacionada ao tema e pouca produção disponível para acesso a professores da área que desejem desenvolver o tema através de uma metodologia diferenciada. Nesse sentido, apresenta-se algumas definições e as demonstrações das fórmulas relacionadas ao sólido via tópicos abordados no ensino médio e, a título de aprofundamento, através do uso de cálculo diferencial e integral. Para tanto, as ideias aqui apresentadas foram inspiradas nas produções de Lima et al. (2005), Dolce (2009), Piskunov (2000) e Medeiros (2014).

3.1 ESFERA, SUPERFÍCIE ESFÉRICA E SECÇÃO ESFÉRICA.

Segundo Dolce (2009) denomina-se esfera o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo de centro O e raio R em torno de um eixo que contém o seu diâmetro.

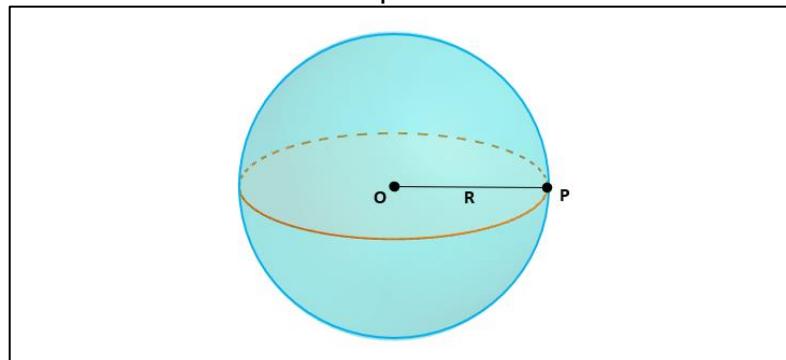
FIGURA 5: Esfera de revolução



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

Considere um ponto O e um número real $R > 0$, denomina-se de superfície esférica de centro O e raio R o conjunto de pontos P do espaço tais que a distância $OP = R$. (DOLCE, 2009, p. 250)

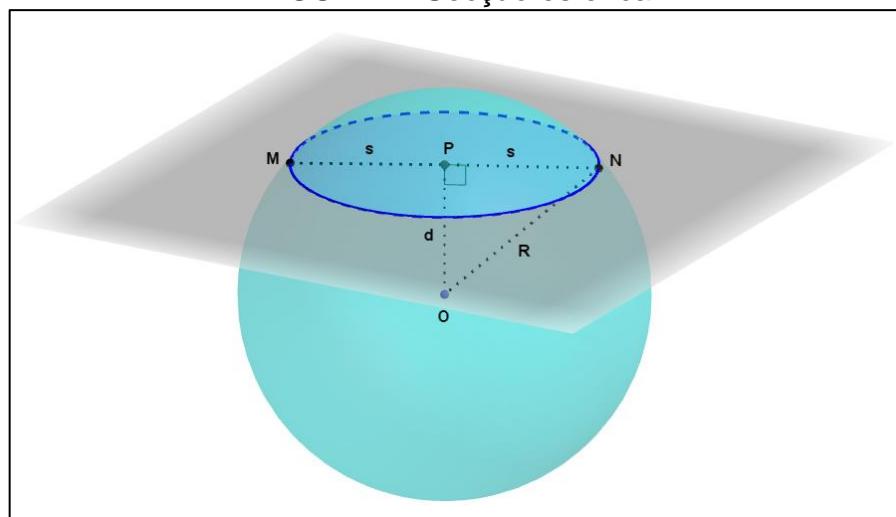
FIGURA 6: Superfície da esfera



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

Denomina se de secção esférica a área da região determinada por um plano secante a esfera. (DOLCE, 2009, p. 251)

FIGURA 7: Secção esférica



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

Toda secção esférica é um círculo. Se o plano secante passa pelo centro da esfera a secção esférica corresponde ao círculo máximo da esfera.

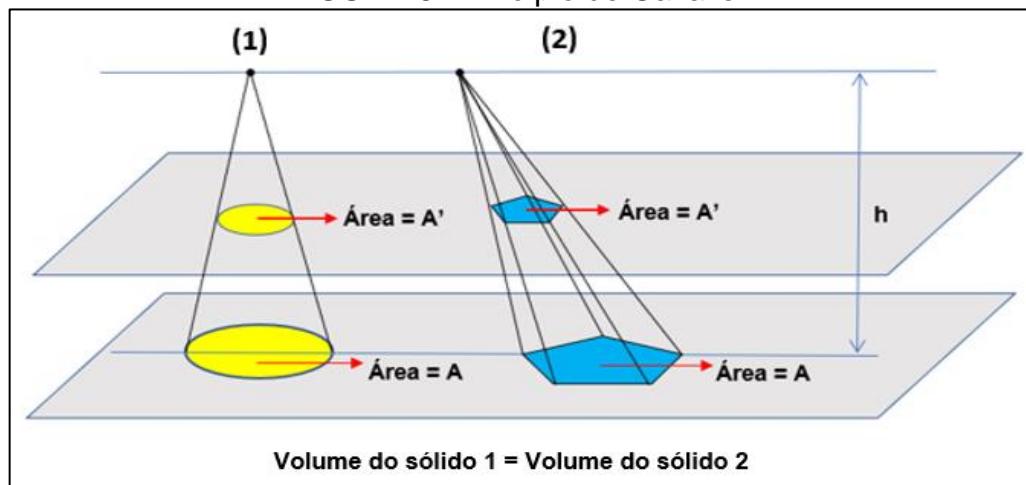
Sendo R o raio da esfera, d a distância entre o centro da esfera e o centro da secção esférica e s o raio da secção esférica, aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle OPN$ temos:

$$R^2 = s^2 + d^2 \Rightarrow s^2 = R^2 - d^2$$

3.2 VOLUME DA ESFERA

O Princípio de Cavalieri afirma que se dois sólidos de mesma altura têm suas bases sobre um plano α e quando seccionados por outro plano paralelo a esse plano α as secções determinadas sobre esses sólidos possuem áreas iguais, então os sólidos têm o mesmo volume.

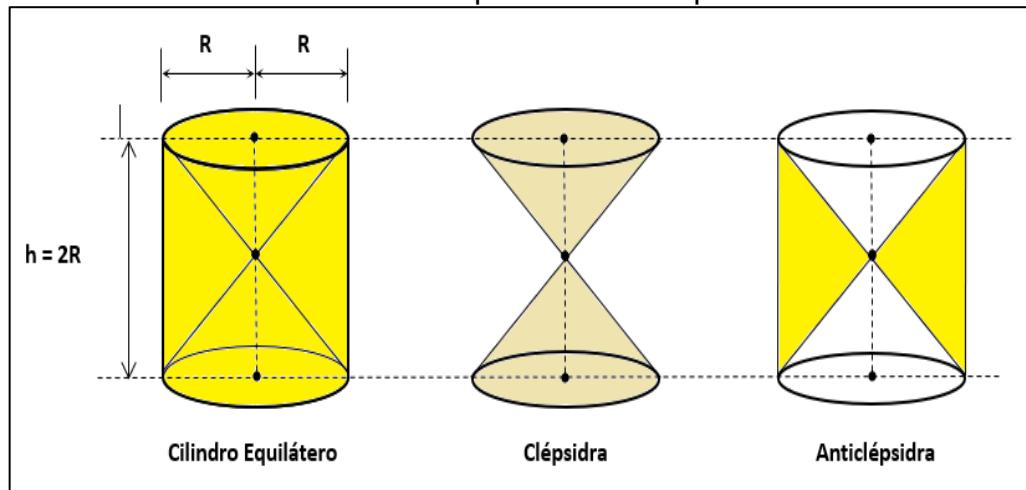
FIGURA 8: Princípio de Cavalieri



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

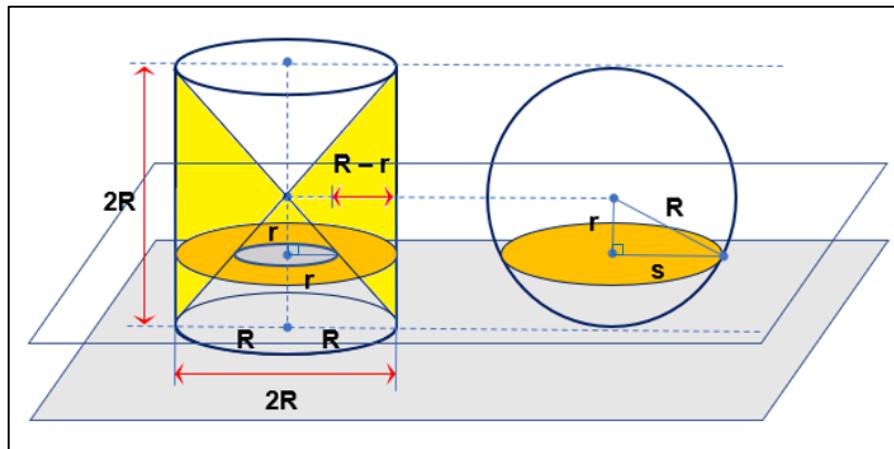
Segundo Medeiros (2014) o sólido determinado pela união de cones de mesma altura cujas bases coincidem com as bases de um cilindro de raio R chama-se *clépsidra*. Por outro lado, sólido geométrico formado pela região interna ao cilindro e externa a clépsidra chama-se de *anticlépsidra*.

FIGURA 9: Clépsidra e Anticlépsidra



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

FIGURA 10: Volume da esfera



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

Considerando um cilindro equilátero ($h = 2r$) e uma esfera de raio r apoiados sobre mesmo plano (FIGURA 10). A interseção do plano paralelo a base do cilindro com a anticlépsidra corresponde a uma coroa circular cuja área é dada por $A_{\text{coroa}} = \pi(R^2 - r^2)$ e a interseção desse mesmo plano com a esfera corresponde a área de secção esférica de raio s , a qual é calculada por $A_{\text{secção esférica}} = \pi s^2$. Entretanto, pelo teorema de Pitágoras temos que $s^2 = R^2 - r^2$, ou seja, $A_{\text{secção esférica}} = \pi(R^2 - r^2)$.

Dessa forma, pelo princípio de Cavalieri o volume da esfera é igual ao volume da anticlépsidra gerada a partir do cone equilátero.

Dessa forma, concluímos que

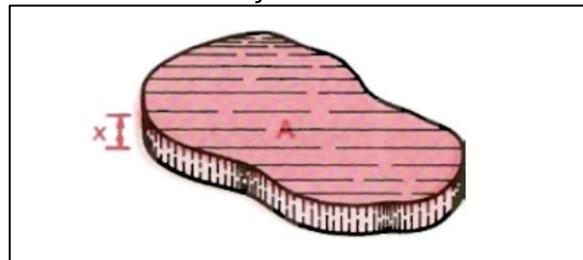
$$\begin{aligned} V_{\text{esfera}} &= V_{\text{anticlēpsidra}} = V_{\text{cilindro equilátero}} - 2 \cdot V_{\text{cone}} \\ V_{\text{esfera}} &= \pi \cdot R^2 \cdot (2R) - 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot R^2 \cdot R}{3} \right) = 2\pi \cdot R^3 - \frac{2\pi \cdot R^3}{3} \\ V_{\text{esfera}} &= \frac{4\pi \cdot R^3}{3} \end{aligned}$$

3.3 ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Considere o sólido delimitado por duas regiões planas (bases) paralelas de área igual a A , cuja altura é x unidades.

Segundo Dolce (2009), sendo V o volume do sólido descrito acima, a área de sua base pode ser obtida através da razão $\frac{V}{x}$ quando x é suficientemente próximo de zero.

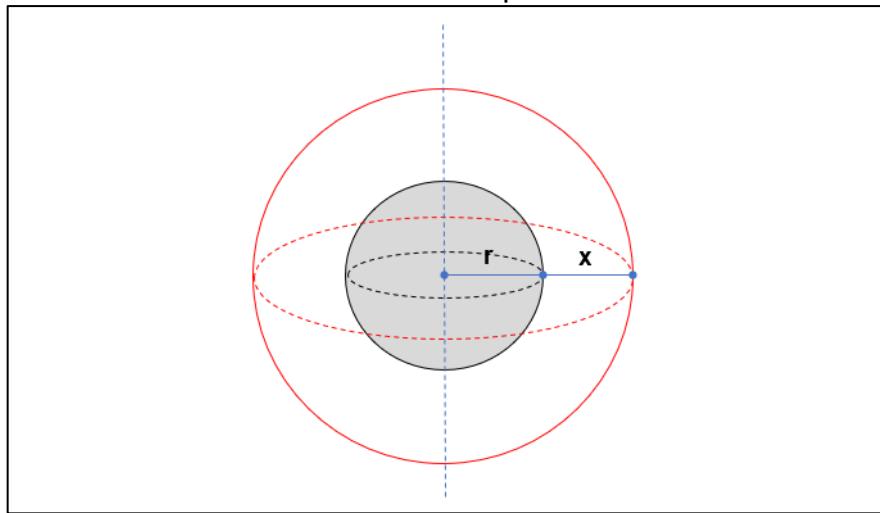
FIGURA 11: Noção intuitiva de volume



Fonte: Adaptado de Dolce (2005)

Através dessa noção podemos determinar o valor da área da superfície esférica conforme o lema a seguir.

FIGURA 12: Área da superfície esférica



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

Tomando por base a ideia intuitiva volume, considere duas esferas concêntricas de raios r e $(x + r)$ conforme a FIGURA 11.

Dessa forma, os volumes das esferas maior e menor são dados por

$$V_{\text{menor}} = \frac{4\pi r^3}{3} \text{ e } V_{\text{maior}} = \frac{4\pi(r+x)^3}{3}$$

O volume do sólido gerado pela diferença entre o volume V da esfera maior e da menor é dado por:

$$V = V_{\text{esfera maior}} - V_{\text{esfera menor}} = \frac{4\pi(x+r)^3}{3} - \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$V = \frac{4\pi}{3}[(x+r)^3 - r^3] = \frac{4\pi}{3} \cdot [x^3 + 3x^2r + 3xr^2 + r^3 - r^3]$$

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot [x^3 + 3x^2r + 3xr^2]$$

$$V = \frac{4\pi x}{3} \cdot [x^2 + 3xr + 3r^2]$$

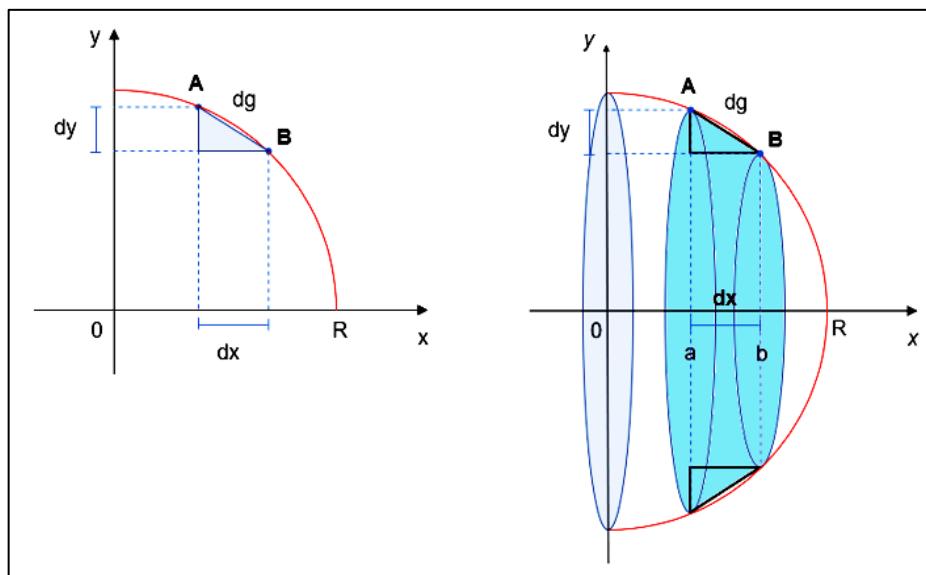
$$A_{\text{superfície esférica}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{V}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\pi}{3} \cdot [x^2 + 3xr + 3r^2]$$

$$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2$$

3.4 ÁREA E VOLUME DA ESFERA POR MEIO DO CÁLCULO

As fórmulas para cálculo da área da superfície e do volume da esfera também pode ser obtida quando tomamos por meio do cálculo diferencial e integral.

FIGURA 13: Área e volume da esfera por meio do cálculo



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

Para isso, considere o arco de circunferência de centro na origem e raio R , dado pela função $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ definida no intervalo $[0, R]$, onde destacamos o segmento \overline{AB} de comprimento infinitesimal dg conforme a figura a seguir.

Se rotacionamos o segmento \overline{AB} entorno do eixo x obtemos um tronco de cone, cuja área lateral infinitesimal dA é dada por $dA = \pi \cdot dg \cdot (f(a) + f(b))$. Como dg é infinitesimal, os valores de $f(a)$ e $f(b)$ se tornam “suficientemente próximos” para todo valor de x no intervalo $[a, b]$, de tal forma que, $f(a) = f(b) = f(x)$ (PISKUNOV, 2000, p. 490). Deste modo, podemos obtermos que $dA = 2\pi \cdot dg \cdot f(x)$ (I).

Pelo gráfico apresentado na FIGURA 12, através do teorema de Pitágoras, obtemos:

$$dg = \sqrt{dy^2 + dx^2} = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} dx = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} dx \quad (\text{II})$$

Substituindo (II) em (I), encontramos $dA = 2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{\left(f'(x)\right)^2 + 1} dx$ (III).

Como $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, então $f'(x) = \frac{(-x)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ e substituindo tudo em (III) obtemos:

$$dA = 2\pi \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{(-x)}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2 + 1} dx = 2\pi \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{R^2 - x^2} + 1} dx$$

$$dA = 2\pi \cdot R \cdot dx$$

A área do sólido delimitado pelo gráfico é encontrada somando-se as áreas dos troncos de cone assim obtidos no intervalo $[0, R]$, ou seja

$$AL = \int_0^R dA = \int_0^R 2\pi \cdot R \cdot dx = 2\pi \cdot R \cdot R - 2\pi \cdot R \cdot 0 = 2\pi \cdot R^2$$

Dessa forma, o gráfico delimita a área da superfície de metade de uma esfera obtida com sua rotação em torno do eixo x. Logo para se obter a área da superfície da esfera inteira basta multiplicar AL por 2. Portanto, $A_{\text{superfície Esférica}} = 2 \cdot AL = 4\pi \cdot R^2$.

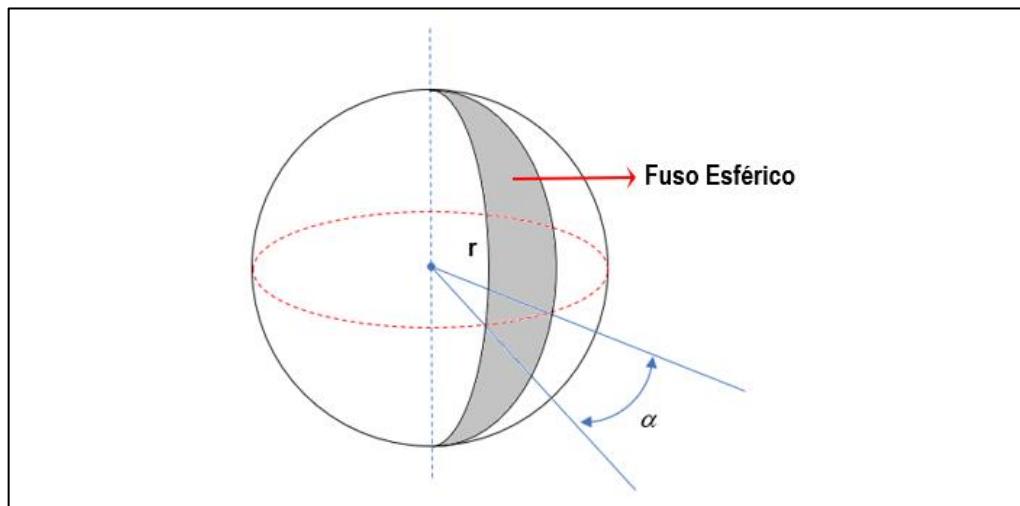
Conhecida a área, o volume da esfera pode ser encontrado por

$$V = \int_0^R A dA = \int_0^R 4\pi R^2 dA = \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

3.5 FUSO ESFÉRICO

Chama-se de fuso esférico (FIGURA 14) a área da superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência, segundo um ângulo α , em torno de um eixo que contém seu diâmetro.

FIGURA 14: Fuso esférico



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

Sendo r o raio da semicircunferência e α o ângulo de rotação em torno do eixo que contém o diâmetro, a área do fuso esférico é diretamente proporcional ao ângulo de giro e pode ser obtida pela proporção a seguir.

- Se α estiver em graus, temos

$$\frac{A_{\text{superf. esférica}}}{A_{\text{fuso esférico}}} = \frac{360^\circ}{\alpha} \Rightarrow A_{\text{fuso esférico}} = \frac{(4\pi r^2) \cdot \alpha}{360} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90} \quad (\alpha \text{ em graus})$$

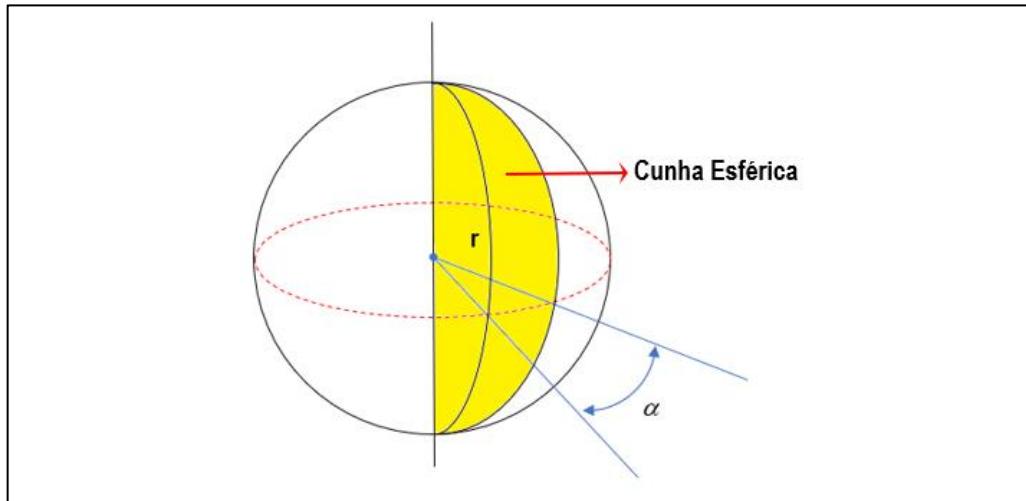
- Se α estiver em radianos, temos

$$\frac{A_{\text{superf. esférica}}}{A_{\text{fuso esférico}}} = \frac{2\pi}{\alpha} \Rightarrow A_{\text{fuso esférico}} = \frac{(4\pi r^2) \cdot \alpha}{2\pi} = 2r^2\alpha \quad (\alpha \text{ em radianos})$$

3.6 CUNHA ESFÉRICA

Chama-se Cunha esférica (FIGURA 15) ao sólido gerado pela rotação de semicírculo, sob um ângulo α , em torno de um eixo que contém o seu diâmetro.

FIGURA 15: Cunha esférica



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

Assim como o fuso esférico, o volume da cunha esférica também é diretamente proporcional ao ângulo de giro α e pode ser obtido por meio das proporções a seguir.

- Se α estiver em graus, temos

$$\frac{V_{\text{cunha}}}{V_{\text{esfera}}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right) \cdot \alpha}{360} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270} \quad (\alpha \text{ em graus})$$

- Se α estiver em radianos, temos

$$\frac{V_{\text{cunha}}}{V_{\text{esfera}}} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right) \cdot \alpha}{2\pi} = \frac{2r^3 \alpha}{3} \quad (\alpha \text{ em radianos})$$

4. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ESFERA

Conforme já mencionado no capítulo introdutório, o ensino de geometria espacial tem ocorrido de tal forma que se privilegia a memorização de fórmulas e as figuras geométricas são apresentadas prontas, impossibilitando o aluno de levantar conjecturas, verificar propriedades, desenvolver a habilidade de visualização além de entender o processo de construção das fórmulas. Este aspecto tende a comprometer a aprendizagem, principalmente quando se trata da esfera, que em geral é o último dos sólidos a ser apresentado.

Nessa seção, apresento uma proposta de sequência didática para o ensino de esfera e suas partes (fuso e cunha esférica), a qual foi construída a partir dos levantamentos preliminares feitos e estruturada conforme a concepção de sequência didática proposto por Cabral (2017), definida como Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC). Este construto corresponde a um conjunto de cinco atividades, cada uma correspondente a uma UARC a ser estabelecida. Em cada atividade proposta, destacamos o objetivo, o material utilizado e os procedimentos a serem seguidos.

Tal sequência, foi criada com a finalidade de atender alunos do ensino médio dentro da proposta dos PCNs onde se enfatiza que, ensinar geometria não se resume a apresentar das fórmulas de área e volume. Deve-se explorar atividades de ensino e aprendizagem que permitam os alunos explorar propriedades e construir o conhecimento (BRASIL, 2002).

Assim, na construção das atividades procuramos atender os descritores propostos nas matrizes do SisPAE e do SAEB, assim como trabalhar com a habilidade elencada pela BNCC. Tais elementos aparecem em destaque no quadro a seguir.

No Quadro 8, observa-se na matriz de referência do SisPAE para o ensino médio, o descritor previsto no qual se destaca a resolução de problemas de relacionados aos conceitos de área e volume da esfera e suas partes.

QUADRO 5: Descritores do SisPAE (Ensino Médio)

Descriptor	Tema: Espaço e Forma
MPA 32	Resolver problemas que envolvam relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) da esfera e de suas partes.

Fonte: Matriz de Referência do SisPAE (2016)

No Quadro 9, por sua vez, temos o descritor relacionado ao sólido esfera na Matriz de Referência do SAEB encontra-se ligado ao tema Grandezas e Medidas, o qual também enfatiza a importância do trabalho ligado ao cálculo de área e volume.

QUADRO 6: Descritor do SAEB (Ensino Médio)

Descriptor	Tema: Grandezas e Medidas
D13	Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

Fonte: Matriz de Referência do SAEB (2017)

Por fim, no Quadro 10, temos a habilidade proposta pela BNCC no qual o tema geometria espacial encontra-se inserido na Competência Específica 3, conforme apresento na sequência.

QUADRO 7: Competências e Habilidades da BNCC (Ensino Médio)

Competência Específica 3	Habilidade (EM13MAT309)
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística – para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.

Fonte: BNCC (2018)

Novamente, aparece a importância do estudo dos corpos redondos, citando cilindro e cone, entretanto o sólido esfera aparece implicitamente como composição desses dois sólidos.

No intuito de verificar os conhecimentos prévios dos alunos, para o bom andamento das atividades propostas, disponibilizamos um teste com 10 questões envolvendo conhecimentos básicos de geometria, o qual deve ser aplicado antes da realização da atividade. Desta forma, o professor constatando êxito por parte da turma, recomenda-se a realização direta aplicação das atividades propostas. Caso contrário, se propõe a aplicação de uma oficina de conhecimentos prévios, a qual pode ocorrer através de uma aula expositiva dialogada com foco nos tópicos que os alunos mais apresentaram dificuldade no teste.

4.1 ATIVIDADE 1 - ESFERA

Objetivo: Identificar o sólido esfera e seus elementos a partir da rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o seu diâmetro.

Material: Ficha da atividade, Caneta e computador com applet “GEOESFERA1”

Procedimento:

[I₁] No aplicativo GEOESFERA1, clique sobre o botão iniciar rotação, observe os pontos que surgem durante a rotação do semicírculo e anote a distância de cada um deles ao ponto central O no quadro a seguir.

Ponto	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Distância									

[I_E] Qual a figura observada ao final da rotação?

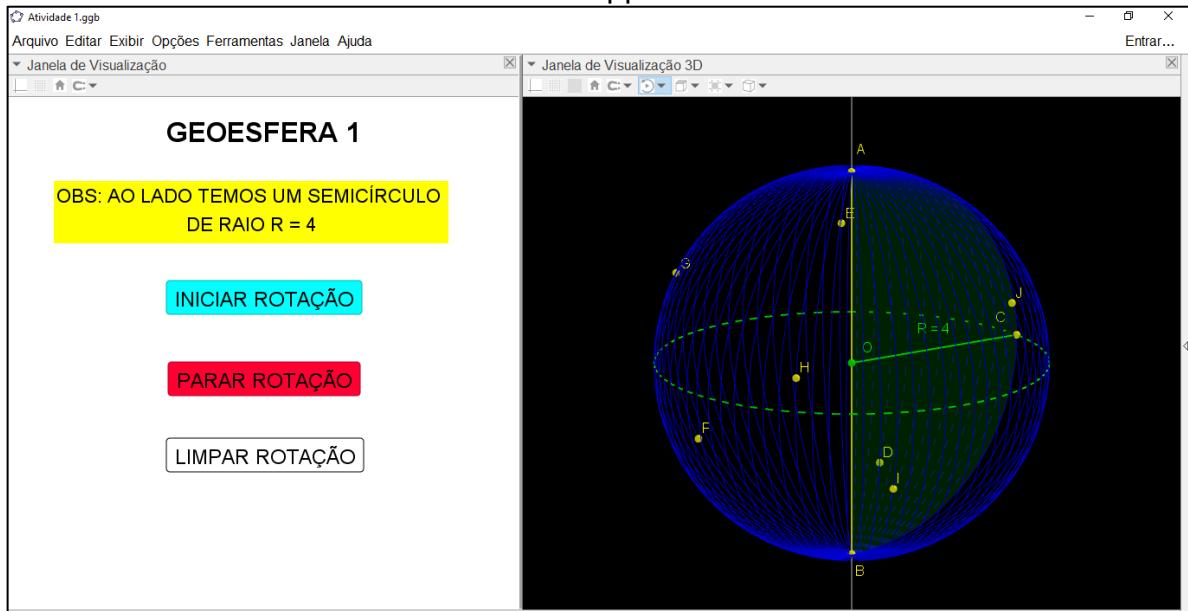
[I_E] Qual a distância de cada um dos pontos (A, B, C, D, ..., I) ao centro O?

[I_R] A distância de cada ponto (A, B, C, D, ..., I) ao centro O corresponde a qual elemento do semicírculo?

[I_R] A distância entre os pontos A e B na figura obtida na rotação equivale a qual elemento do semicírculo?

[I_F] Esfera é o sólido geométrico delimitado por todos os pontos que estão a mesma distância R ($R > 0$) de um ponto central. Tal distância é denominada raio da esfera e o ponto central é chamado de centro da esfera.

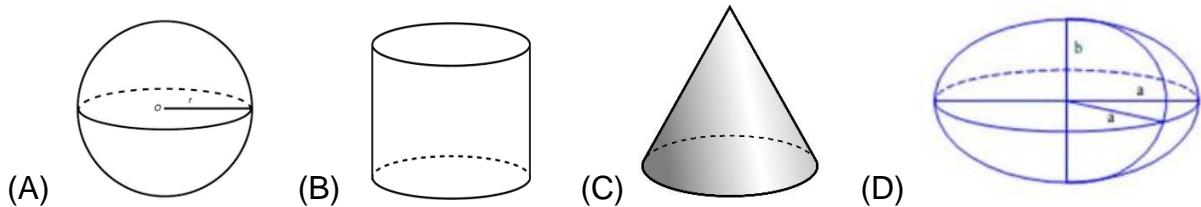
FIGURA 14: Tela do Applet GEOESFERA 1



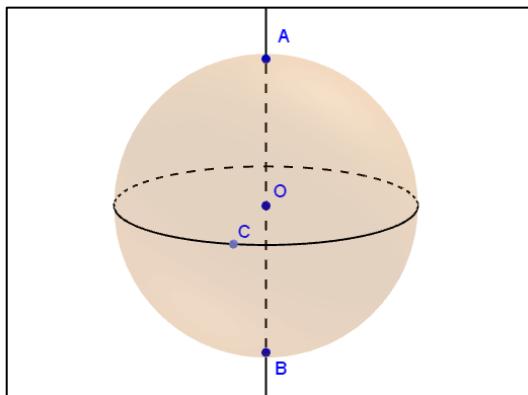
Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

(Aqui consolida-se a UARC1)

[I_{AR}] Qual dos sólidos geométricos a seguir representa uma **ESFERA**?



[I_{AA}] (UEG- Adaptada) Na figura a seguir são dados uma esfera de centro O, uma reta que contém O e intercepta superfície esférica nos pontos A e B e um ponto C na superfície esférica.



Em relação aos pontos mostrados na figura é sempre verdade que

- (A) A distância \overline{OC} é menor do que a distância \overline{OA} .
- (B) A distância \overline{OC} é menor do que a distância \overline{OB} .
- (C) A distância \overline{OA} é maior do que a distância \overline{OB} .
- (D) As distâncias \overline{OA} , \overline{OB} e \overline{OC} são iguais.

4.2 ATIVIDADE 2 - ÁREA DA SUPERFÍCIE

Objetivo: Descobrir a relação entre o raio da esfera e a área da superfície esférica.

Material: Roteiro da Atividade, Papel, Caneta e computador com o Aplicativo “GEOESFERA2”.

Procedimento:

[I₁] Insira o valor do raio R da esfera no aplicativo GEOESFERA 2 e complete cada linha do quadro abaixo com os valores do Raio ao Quadrado (R^2) e da Área da Superfície Esférica fornecidos pelo aplicativo.

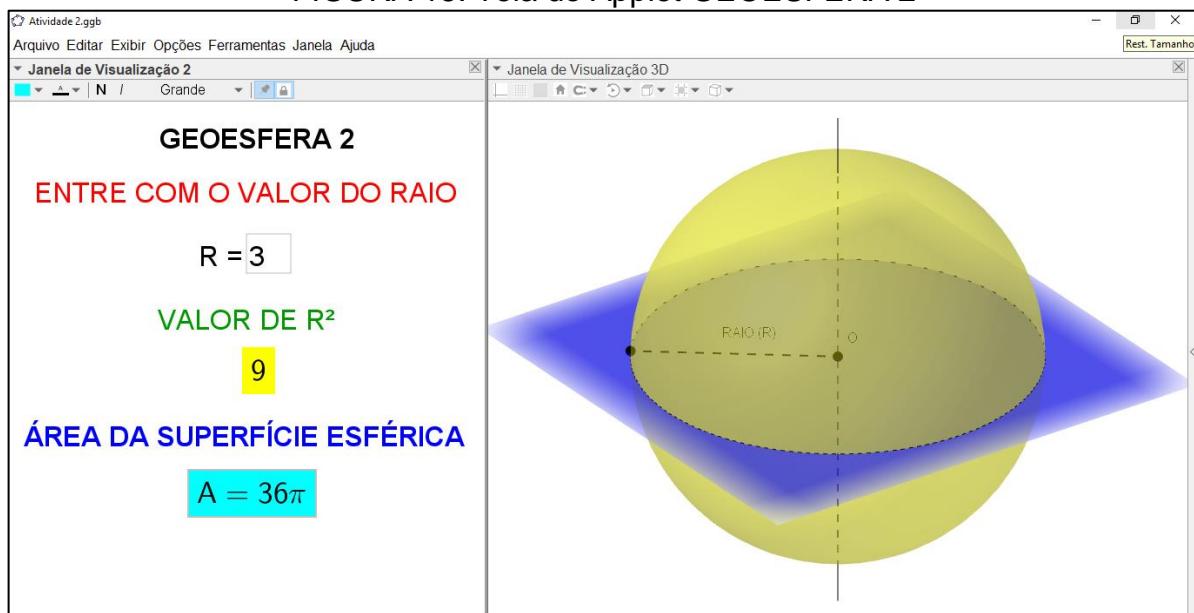
Raio (R)	Raio ao Quadrado (R^2)	Área Da Superfície Esférica (A)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

[I_E] Observando os valores obtidos em cada linha do quadro, o que ocorrer com o valor da área da Área da Superfície Esférica (A) quando aumenta o valor do Raio (R)?

[I_R] Em cada linha do quadro, a partir dos valores do Raio ao Quadrado (R^2), como podemos obter o valor da Área da Superfície Esférica (A)?

[I_F] A Área da Superfície Esférica é dada por $A = 4\pi R^2$

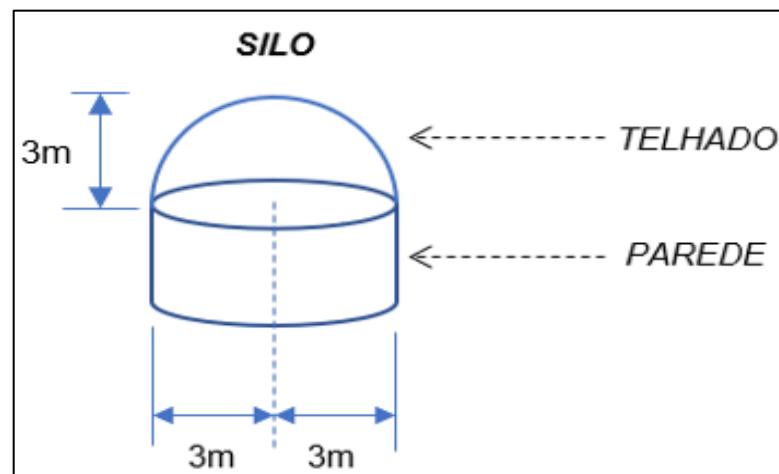
FIGURA 15: Tela do Applet GEOESFERA 2



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

(Temos a consolidação da UARC 2)

[I_{AA}] Para armazenar grão são usadas estruturas chamadas de silos, tal estrutura é formada pela junção de dois sólidos geométricos.



Considerando $\pi = 3$, qual o valor, em m^2 , da área correspondente ao telhado do silo?

4.3 ATIVIDADE 3 - VOLUME

Objetivo: Descobrir a relação entre o raio e o volume da esfera.

Material: Roteiro da atividade, papel, caneta e computador com o aplicativo “GEOESFERA 3”.

Procedimento:

[I_I] Insira o valor do raio R no aplicativo GEOESFERA 3 e preencha o quadro a seguir com os valores de R³ e do volume da esfera (V) fornecidos pelo aplicativo.

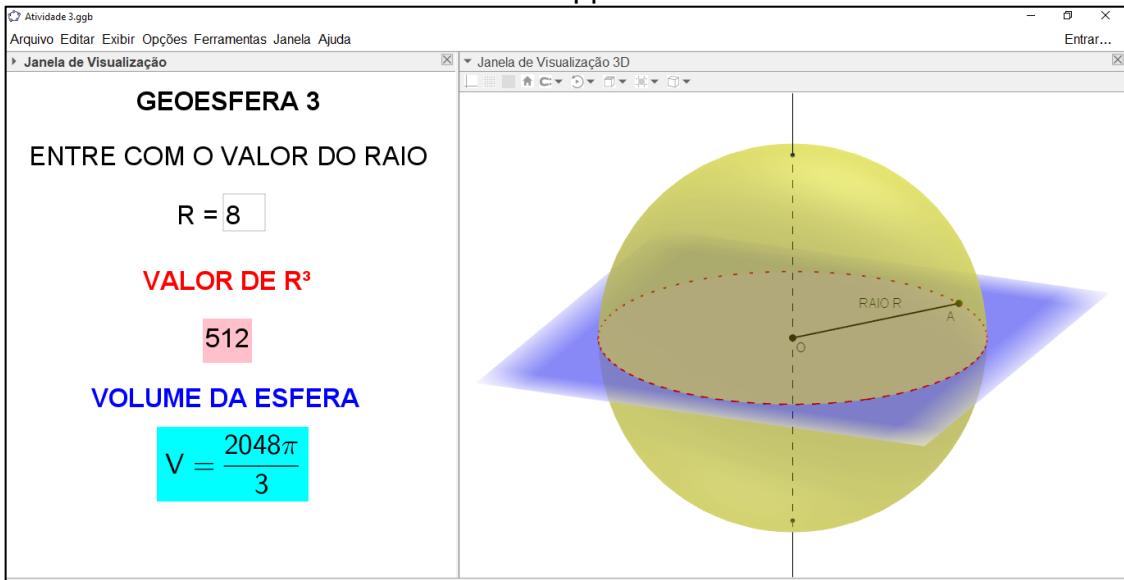
Raio (R)	Raio ao Cubo (R ³)	Volume da Esfera (V)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

[I_E] O que ocorre com o valor do volume da esfera (V) a medida que aumenta o valor do raio (R)?

[I_R] Comparando os valores de R³ e os valores obtidos para o volume da esfera, qual a relação observada?

[I_F] O volume da esfera é dado por $V_{\text{esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$.

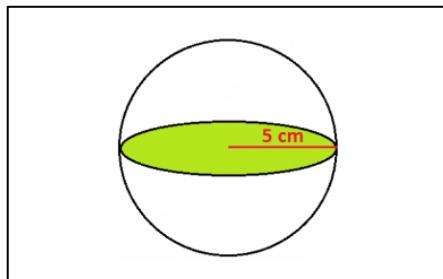
FIGURA 16: Tela do applet GEOESFERA 3



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

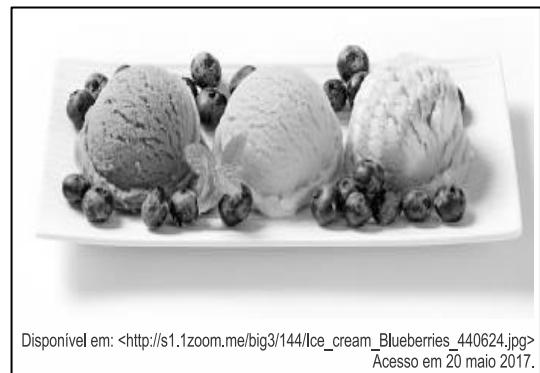
(Temos a consolidação da UARC 3)

[I_{AR}] Observe a figura a seguir.



Qual o valor, em cm³, do seu volume?

[I_{AA}] (IFPE) Maria Carolina resolveu sair um pouco do seu regime e foi saborear uma deliciosa sobremesa composta por **3** bolas de sorvete e **27** uvas, conforme a imagem. Suponha que as bolas de sorvete e as uvas tenham formatos esféricos e que Maria Carolina comeu toda a sua sobremesa.



Disponível em: <http://s1.1zoom.me/big3/144/Ice_cream_Blueberries_440624.jpg>
Acesso em 20 maio 2017.

Usando $\pi = 3$ sabendo que os raios de cada bola de sorvete têm 4 cm e, de cada uva, 1 cm, podemos afirmar que ela consumiu, nessa sobremesa, em centímetros cúbicos, um total de

- (A) 108. (B) 768. (C) 876. (D) 260.

4.4 ATIVIDADE 4 - FUSO ESFÉRICO

Objetivo: Descobrir a relação entre o raio e ângulo de giro com a área do fuso esférico.

Material: Roteiro da atividade, papel, caneta e computador com o aplicativo “GEOESFERA 4”.

Procedimento:

[I_i] Insira os valores do raio (R) e do ângulo de giro (em graus) no aplicativo GEOESFERA 4 e complete o quadro a seguir com os valores do raio ao quadrado (R^2), do ângulo de rotação (em radianos) e da área do fuso esférico (A), a seguir responda os itens.

RAIO (R)	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (α) (EM GRAUS)	R^2	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (α) (EM RADIANOS)	ÁREA DO FUSO ESFÉRICO (A)
1	30			
2	30			
3	30			
1	45			
2	45			
3	45			
1	60			
2	60			
3	60			

[I_E] Aumentando o valor do Raio (R), o que ocorre com o valor da Área do Fuso Esférico (A)?

[I_E] Aumentando Ângulo de Rotação (α), o que se observa em relação a Área do Fuso Esférico (A)?

[I_R] Observando os valores do quadro, utilizando os valores de R^2 e do ângulo de (α) (em radianos), como podemos obter o valor da Área do Fuso Esférico (A)?

[I_F] A área do Fuso Esférico corresponde a parte da Área da Superfície Esférica que é obtida quando rotacionamos uma semicircunferência de raio R, através de um ângulo α , em torno de seu diâmetro. A Área do Fuso esférico pode ser encontrada por $A = 2 \cdot \alpha \cdot R^2$.

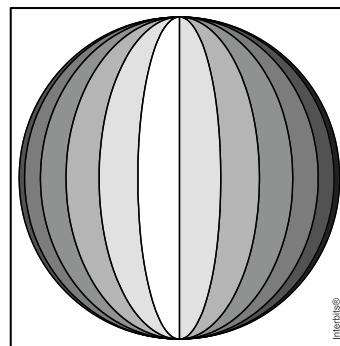
FIGURA 17: Tela do applet GEOESFERA 4



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

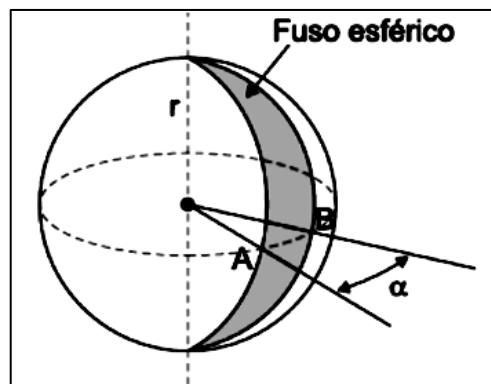
(Temos a consolidação da UARC 4)

[I_{AR}] (UDESC) Uma bola esférica é composta por 24 faixas iguais, como indica a figura.



- A área de cada uma das faixas, corresponde a área de um(a)
- (A) setor circular.
 - (B) segmento circular.
 - (C) esfera.
 - (D) fuso esférico.

[I_{AA}] Um observador colocado no centro de uma esfera de raio 5 m vê o arco AB sob um ângulo α de 72° , como mostra a figura.



Isso significa que a área, em m^2 , do fuso esférico determinado por α é igual a

- (A) 20π
- (B) 15π
- (C) 10π
- (D) 5π

4.5 ATIVIDADE 5 - CUNHA ESFÉRICA

Objetivo: Descobrir a relação entre o raio, ângulo de giro e a área do fuso esférico

Material: Roteiro da atividade, papel, caneta e computador com o aplicativo “GEOESFERA 3”.

Procedimento:

[I] Insira os valores do raio (R) e do ângulo de giro (em grau) no aplicativo GEOESFERA 5 e complete o quadro com os valores do raio ao quadrado (R^3), do ângulo de rotação (em radianos), do Volume da Cunha Esférica (V) e responda aos itens.

RAIO	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (EM GRAUS)	R^3	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (EM RADIANOS)	VOLUME DA CUNHA ESFÉRICA (V)
1	30			
2	30			
3	30			
1	45			

2	45			
3	45			
1	60			
2	60			
3	60			

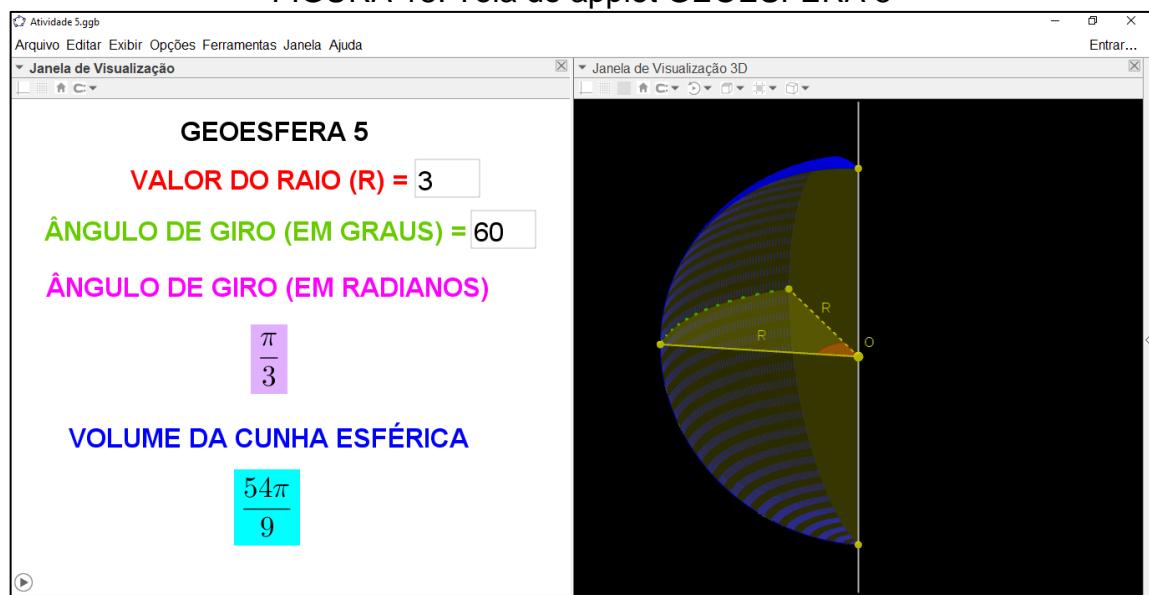
[I_E] Aumentado o valor do Raio (R), o que se observa em relação ao Volume da Cunha (V)?

[I_E] Aumentado o valor do Ângulo de Rotação (α), o que se observa em relação ao Volume da Cunha (V)?

[I_R] Observando os valores do quadro, utilizando os valores de R^3 e do ângulo de (α) (em radianos) em cada linha, como se pode obter o valor do volume da cunha esférica (V)?

[I_F] Cunha Esférica é o sólido gerado pela rotação de semicírculo de raio R, através de um ângulo α , em torno de um eixo que contém o seu diâmetro. O volume da Cunha Esférica pode ser encontrado por $V = \frac{2 \cdot \alpha \cdot R^3}{3}$.

FIGURA 18: Tela do applet GEOESFERA 5



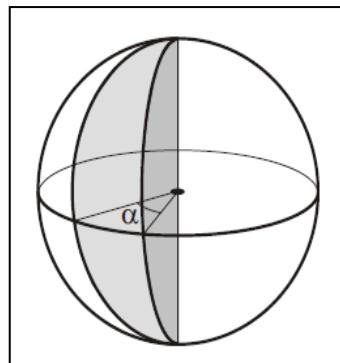
Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

(Temos a consolidação da UARC 5)

[I_{AR}] Qual o valor, em cm³, do volume da cunha esférica determinada por um ângulo de 36° e raio igual a 5 cm?

- (A) $\frac{25\pi}{3}$ (B) $\frac{50\pi}{3}$ (C) $\frac{100\pi}{3}$ (D) $\frac{125\pi}{3}$

[I_{AA}] A figura a seguir representa uma fatia de uma melancia perfeitamente esférica de raio R = 10 cm. Se o valor do ângulo α é de 30°, qual o valor do volume, em cm³, ocupado por essa fatia?



- (A) $\frac{2000\pi}{9}$ (B) $\frac{1000\pi}{9}$ (C) $\frac{500\pi}{9}$ (D) $\frac{250\pi}{9}$

5. APLICAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste Capítulo, descrevo como ocorreu o processo de aplicação Sequência Didática para ensino de esfera e a análise dos resultados provenientes de tal aplicação.

5.1 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

A aplicação da atividade ocorreu junto uma turma de 3º ano do ensino médio de uma escola pública estadual de ensino do estado do Pará, localizada na cidade de Ananindeua, em uma turma de 30 alunos. Antes da execução das atividades, o pesquisador teve um contato prévio com o professor regente da turma e com a direção da escola, no qual se apresentou o projeto e, dado o aceite da direção, ficou acertado a data de aplicação junto a turma. A escola foi escolhida pela boa relação do pesquisador com o professor regente e por apresentar laboratório de informática em funcionamento, o que veio a facilitar o transcorrer das atividades. A turma, na qual as atividades forma aplicadas, foi escolhida por apresentar um número reduzido de alunos e pelo fato de já terem estudado Trigonometria, Geometria Plana (Estudo de Área das Figuras Planas) e com a parte que precede o estudo de Esfera (Prismas, Pirâmide, Cilindro e Cone).

Como citado anteriormente, antes da aplicação da Sequência Didática aplicamos um teste de verificação junto a turma. No dia da aplicação, tivemos os 29 alunos presentes e como os resultados foram satisfatórios, decidi não haver a necessidade de desenvolver da oficina de conhecimentos prévios, procedendo-se assim a aplicação direta da Sequência Didática.

A aplicação de Sequência Didática ocorreu em dois encontros, respectivamente nos dias 14 e 21 de junho de 2019. No primeiro encontro aplicamos as três primeiras atividades, onde usamos 4 tempos de aula (45 minutos cada) e no segundo as 2 últimas, outros 2 tempos de aula. Durante em aplicação contamos com a participação integral dos 25 alunos, os quais foram divididos em 5 grupos, A (A1,A2, A3, A4, A5), B (B1, B2, B3, B4, B5), C (C1,C2, C3, C4, C5), D (D1, D2, D3, D4, D5), E (E1,E2, E3, E4, E5) e em cada um deles os alunos participantes foram identificados pela sequência número/letra, facilitando a identificação nas transcrições que compõem a análise.

Ao final de cada atividade, aplicamos, sequencialmente, as intervenções avaliativas que nos serviu para aferir o aprendizado dos conceitos estudados.

Todos registros que circunscrevem a execução das atividades citadas anteriormente apresentamos a seguir.

5.2 ÁNALISE DOS RESULTADOS

Nessa seção, foram analisados os dados provenientes da execução das atividades que compõem a Sequência Didática para o ensino de Esfera. Tal análise tem o intuito de verificar os indícios de aprendizagem decorrentes da utilização dessa metodologia, indicando interações verbais e intervenções nas quais os alunos conseguiram se apropriar dos conhecimentos relacionados ao conteúdo estudado.

Para que a análise se tornasse exequível, se fez necessário a coleta dos dados por meio de recursos de gravação em áudio, com o auxílio do gravador de smartphones. Os áudios aqui transcritos têm a intenção de verificar o exato momento no qual o aluno se apropria dos conhecimentos propostos em cada atividade. Nesse contexto, para uma melhor organização, foi feita a transcrição, em ordem cronológica das falas de alunos e do professor, as quais foram agrupados segundo as categorias a seguir.

Turno: Fala individual de cada aluno ou do professor, registrados em ordem numérica, mantendo-se a ordem dos diálogos.

Segmento: Conjunto de turnos, nos quais se chaga a objetivos específicos de aprendizagem dentro de cada atividade.

Episódio: Conjunto de Segmentos que compõem uma atividade por completo.

Os turnos transcritos nesse capítulo correspondem apenas a momentos que têm associação com as atividades, ou seja, conversas paralelas e outros diálogos que não tiveram relação com a proposta foram desconsiderados, dado o propósito de tal análise. Portanto, foram realizados recortes em intervalos específicos de cada intervenções estruturantes, nos quais se procurou perceber avanços no processo de aprendizagem dos alunos.

Vale ressaltar que os áudios produzidos para essa análise poderiam gerar várias outras informações relevantes, entretanto devido a problemas de ruído ou por má gravação alguns trechos, para alguns grupos os respectivos áudios precisaram ficar de fora da análise. Todavia, o material coletado se mostrou suficiente para compor a análise do experimento, não comprometendo a análise dos resultados. A saber, considerou-se na transcrição apenas os áudios dos grupos A e B, visto que nesses grupos tivemos melhor qualidade na captação de informações e pelo fato de nesses grupos termos conseguido o registro completo de todas as atividades.

O quadro a seguir descreve a forma que foram separados e sistematizados os turnos durante a transcrição e os objetivos dentro de cada atividade proposta.

QUADRO 8: Sistematização das Atividades da SD

Episódio	Descrição	Segmento	Objetivos	Turnos
1	Conceituar esfera a partir da rotação de um semicírculo. Fazer com que o aluno reconheça seus elementos comparando com os elementos do semicírculo.	1	Reconhecer a esfera através da rotação do semicírculo em torno do seu diâmetro.	01 – 07
		2	Identificar os elementos da esfera.	11 – 51
2	Descobrir de maneira informal a fórmula para o cálculo da área da superfície esférica.	3	Determinar a área da superfície da esfera conhecido o valor raio.	52 – 91
3	Descobrir de maneira informal a fórmula pra cálculo do volume da esfera	4	Determinar o volume da esfera conhecido o valor do raio.	92 – 124
4	Descobrir de maneira informal a fórmula para cálculo da área do fuso esférico.	5	Determinar a área do fuso esférico conhecido o raio e o ângulo de giro	125 – 161
5	Descobrir de maneira informal a fórmula para cálculo do volume da Cunha esférica	6	Determinar volume da cunha esférica conhecido o raio e o ângulo de giro	162 – 206

Fonte: Adaptado de Bezerra (2018)

Para produção dos resultados empregamos como proposta metodológica a Análise Microgenética segundo Góes (2000) combinado com a Análise do Discurso conforme proposto por Scott e Mortimer (2002).

EPSÓDIO 1

SEGMENTO I

Reconhecer a esfera a partir da rotação de um semicírculo em torno do diâmetro.

Turnos de 01 - 10

O professor inicia a atividade explicando os procedimentos da atividade 1 e dando orientações de como manusear o applet GEOESFERA1. Em seguida, solicita aos alunos que se dividam em grupos de 6 pessoas para realização da atividade 1. Mesmo momento, para fins de familiarização, deixou-se os alunos por um tempo em contato com a situação didática proposta, posteriormente o professor circula verificando o desenvolvimento da atividade. O objetivo dessa atividade era possibilitar, através de visualização e manipulação do sólido geométrico esfera, a reconstrução de conceitos e, pela possibilidade de se fazer rotação do círculo em torno de um eixo contendo o diâmetro, compreender a geração de uma esfera por meio desse processo.

Ressaltamos que, por se tratar de uma atividade diferenciada das realizadas tradicionalmente nas aulas dessa turma, o uso do computador foi um fato que estimulou o interesse e motivou a turma na realização da tarefa proposta. Entretanto, o desenvolver dessa atividade demandou um pouco mais de tempo do que o planejado devido a seu formato.

GRUPO A

- (01) Professor – Nessa atividade o que vocês devem abrir o aplicativo GEOESFERA1. Nele tem um botão que faz o semicírculo que aparece na tela rotacionar, outro que para a rotação e o de limpar que faz voltar ao que era inicialmente. Vão aparecer que se forma uma figura em 3D e vão surgir alguns pontos durante a rotação. De acordo com a posição que eles aparecem, vocês podem responder as perguntas e preencher o quadro que está na atividade.
- (02) A1 – Nessa pergunta aqui ele quer saber qual a figura que se forma quando o semicírculo dá a volta completa.
- (03) A3 – **Fica uma bola fechada.**
- (04) A4 – É uma bola?
- (05) A2 – **Legal, é uma bola mesmo.**
- (06) Professor – Vocês fizeram a figura que forma quando completa a rotação?
- (07) A1 – **É uma bola.**

- (08) Professor – É quase isso, em geometria espacial essa bola chamamos de esfera.
- (09) A4 – Verdade é uma esfera mesmo, igual àquela que usa quando joga peteca.
- (10) Professor – Isso mesmo.

Nesse segmento, inicialmente a abordagem foi do tipo **não interativa/de autoridade** visto que o professor explica os procedimentos necessários para o desenvolvimento da atividade (Turno (01)). No decorre da atividade nota-se a passagem para discurso **interativo/dialógico** sendo que os alunos discutem ideias e apresentam diferentes pontos de vista. Por fim, observa-se a interação professor aluno do tipo **interativo/de autoridade**, visto a intencionalidade do professor em alinhar os conceitos apontados pelos alunos ao conceito científico. O principal padrão encontrado no recorte analisado é do tipo I-R-A (Iniciação do professor, Resposta do Aluno, Avaliação do Professor) e percebe-se que os alunos A1, A2 e A3 chegam a construção do conhecimento de uma linguagem própria, sendo necessário o professor fazer a intervenção fazendo os devidos ajustes ao objeto matemático, conforme podemos destacar nos turnos (03), (05), (07) e (09).

SEGMENTO II

Reconhecer os elementos da esfera

Turnos: 11 – 51

Nessa segunda parte de atividade 1, os alunos deveriam reconhecer o raio e diâmetro da esfera comparando tais conceitos com os elementos do semicírculo que rotacionava em torno do diâmetro. No desenvolver dessa etapa foi necessário o professor explicar as possibilidades movimentação oferecidas pelo applet que estava em uso, o que veio a facilitar a resolução dos itens que faltam na tarefa.

GRUPO A

- (11) A1 – Tem que clicar em nesse botão iniciar, observar a rotação do semicírculo e anotar a distância dos pontos ao ponto central.

- (12) A2 – Não é o diâmetro?
- (13) A1 – Aaa está aqui. Tem o ponto A, B, C . . . Aí ele quer a distância até o meio.
- (14) A3 – Mas a distância não vai ser sempre a mesma?
- (15) A4 – Provavelmente vai ser igual essa distância deles.
- (16) A1 – Em todos esses pontos a distância eu acho que a distância vai dar 4.
- (17) A2 – Eu acho que varia. Olha os pontos C e D, o D tá lá embaixo e o C tá em baixo
- (18) A3 – Por onde passa o semicírculo é 4.
- (19) A2 – Faz a rotação aí de novo.
- (20) A1 – Está vendo, daqui ao centro vai ser 4.**
- (21) A2 – E esse ponto F, ele tá bem lá atrás.
- (22) A3 – É que aqui é 3D, entendeu? É só ver de cima, tá tudo em cima da circunferência.
- (23) A2 – É mesmo, mexendo na figura dá para ver agora.
- (24) A1 – Quando forma o 3D, se movimentar da para ver que todos os pontos estão na parede
- (25) A3 – Aaa é a distância é a mesmo.
- (26) A4 – Pois é, isso mesmo vai dar tudo 4.**
- (27) Professor – Vocês olharam os pontos que aparecem, entenderam o que acontece com a distância?
- (28) A3 – A distância vai dar sempre 4.**
- (29) Professor – E na parte verde, se comparar com o semicírculo, lembra alguma coisa?
- (30) A1 – Não é o raio?
- (31) Professor – Isso mesmo.
- (32) Professor – E se você observar de A até B, qual a distância?
- (33) A3 – De A para B é 8. O centro tá aqui, de A para o centro é 4 e de B para o centro é 4 também, por isso é 8.**
- (34) Professor – E como se chama isso no círculo, o dobro do raio?
- (35) A3 – Diâmetro, né?
- (36) A4 – O nome é diâmetro.**
- (37) Professor – Isso aí. Em uma esfera os nomes são os mesmos do círculo, raio e diâmetro.

GRUPO B

- (38) *B1 – É pra achar a distância entre esses pontos e o ponto O.*
- (39) *B2 – põe pra girar aí.*
- (40) *B3 – A distância de A e B pro centro, o que é mesmo isso???*
- (41) *B1 – É o raio, é a mesma distância.***
- (42) *B4 – Então de A até B é diâmetro.*
- (43) *B1 – e os outros pontos?*
- (44) *B2 – Eu acho que a distância é diferente, tá mais próximo do centro*
- (45) *B3 – É tudo igual, estão na mesma distância, é o raio também.***
- (46) *B2 – Girando dá pra ver, essa figura engana.*
- (47) *Professor – Sobre as distâncias desses, alguma ideia?*
- (48) *B4 – É tudo igual ao 4***
- (49) *Professor – Certo, e de A pra B?*
- (50) *Grupo – Diâmetro.***
- (51) *Professor – Isso aí.*

Observa-se na parte inicial desse segmento que o discurso é **interativo/dialógico** havendo discussão de vários pontos de vista entre os alunos de ambos os grupos analisados e por meio de algumas intervenções do professor se torna **interativo/de autoridade** como pode-se verificar nos turnos 30 a 38 e nos turnos 48 a 52. Em ambos os grupos analisados as interações predominantes da forma I-R-A e de forma pontual observa-se indícios de aprendizagem nos turnos (20), (26), (28), (33), (36), (41), (45), (48) e (50), contemplando o objetivo da UARC1.

Os estudantes dos grupos analisados conseguiram através da interação com o Aplicativo GEOESFERA 1, identificar o sólido gerado na rotação facilmente, entretanto, quando foi solicitado a distância entre os pontos que surgiram na tela e suas respectivas distâncias entre os centro, inicialmente houve divergência de opinião quanto ao resultado, chegando os alunos a um consenso sobre a resposta após a manipulação do sólido gerado dentro do aplicativo. Quanto as definições de raio e diâmetro da esfera as IOMOs foram de fundamental importância para para reconstrução dos conceitos fazendo a associação deles com os elementos do semicírculo.

A figura apresentada a seguir corresponde a resolução da atividade junto ao grupo A e conforme podemos observar a mesma os indícios de aprendizagem gerado pela atividade contribuindo assim com o fechamento da UARC 1.

FIGURA 19: Resolução da Atividade 1 – Grupo D

[I] No aplicativo GEOESFERA1, clique sobre o botão iniciar rotação, observe os pontos que surgirão durante a rotação do semicírculo e anota a distância de cada um deles ao ponto central O no quadro a seguir.

Ponto	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Distância	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

[I_e] Qual a figura observada na rotação?

Esfera

[I_r] Qual a distância de cada um dos pontos (A, B, C, D, ..., I) ao ponto central O?

É o raio, que mede 4

[I_r] A distância de cada um dos pontos observados (A, B, C, D, ..., I) coincide com que elemento do semicírculo?

O elemento do semicírculo é chamado de raio

[I_r] A distância de cada um os pontos A e B coincide com que elemento do semicírculo?

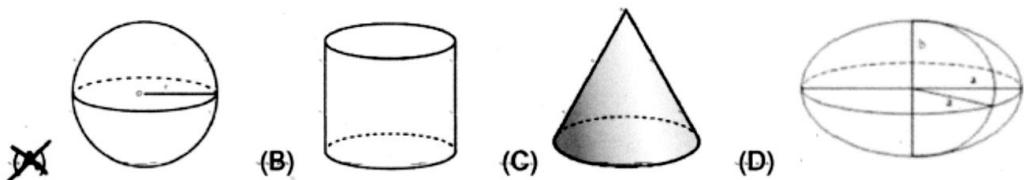
A distância dos pontos A e B sera denominado de Diâmetro que mede 8 o dobro do Raio.

Fonte: Protocolo de Pesquisa (2019)

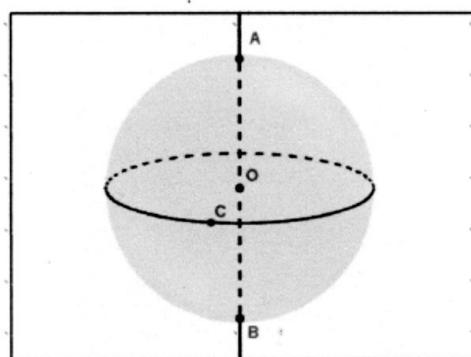
Destaco também que, após a formalização dos conceitos prosseguimos com a aplicação da intervenção avaliativa da atividade. Tal intervenção teve o caráter de aferir se os alunos conseguiriam identificar o sólido esfera e através de uma figura em 3D reconhecer a distância entre pontos sobre a figura.

FIGURA 20: Intervenções Avaliativas da Atividade 1 – Aluno D5

[I_{AR}] Qual dos sólidos geométricos a seguir representa uma **ESFERA**?



[I_{AA}] (UEG- Adaptada) Na figura a seguir são dados uma esfera de centro O, uma reta que contém O e intercepta superfície esférica nos pontos A e B e um ponto C na superfície esférica.



Em relação aos pontos mostrados na figura é sempre verdade que

- (A) A distância \overline{OC} é menor do que a distância \overline{OA} .
- (B) A distância \overline{OC} é menor do que a distância \overline{OB} .
- (C) A distância \overline{OA} é maior do que a distância \overline{OB} .
- (D) As distâncias \overline{OA} , \overline{OB} e \overline{OC} são iguais.

Fonte: Protocolo de Pesquisa (2019)

Conforme, as resoluções apresentadas, ressalto que, a organização proposta na SD, mostrou-se potencialmente favorável, junto aos estudantes, para elaboração dos conceitos e contribuiu de forma eficaz com o desenvolvimento da habilidade de visualização do sólido estudado na atividade.

EPISÓDIO 2

SEGMENTO III

Determinar a área da superfície da esfera conhecido o valor raio

Turnos 52 – 91

O objetivo desse segmento é descobrir de modo informal, orientados por meio de Intervenções exploratórias e intervenções reflexivas, uma maneira de calcular a área da superfície esférica através de informações fornecidas pelo GEOESFERA2. No início da atividade o professor orientou os grupos sobre manuseio e possibilidades do aplicativo e explicou como utilizar as informações encontradas para resolver o que está sendo proposto. Os diálogos correspondentes a atividade dispomos a seguir.

GRUPO A

- (52) Professor – Aqui nós vamos usar o aplicativo GEOESFERA2. No quadro, que vem na atividade, vocês têm alguns valores para o raio da esfera. Esses valores devem ser inseridos no aplicativo e quando vocês clicarem no botão calcular vai surgir os valores para preencher cada linha do quadro. Feito isso, tentem responder as perguntas que vem a seguir.
- (53) A1 – tu estás percebendo o que está dando multiplicando.
- (54) A2 – o que?
- (55) A1 – olha só, 4 vezes 1 dá 4, vezes 1 da 4 vezes π dá 4π . Então eu acho que é multiplicado.
- (56) A3 – Mas vai dar certo nos outros? Dá né?
- (57) A4 – Bora ver nessa linha aqui, 2 vezes 4 dá 8, vezes 2 dá 16, daí vem o π no final.
- (58) A3 – É mesmo, tem que multiplicar. Acho que vai dar certo nos outros também.
- (59) A1 – O valor da área está aumentando.
- (60) A2 – É multiplicado o raio vezes 4?
- (61) A1 – É o raio ao quadrado vezes 4 vezes π .
- (62) A2 – Vezes π ?
- (63) A3 – Eu coloquei isso aqui: “raio ao quadrado vezes 4 vezes π .”
- (64) Professor – Que tal, perceberam alguma coisa em relação aos valores que vocês estão preenchendo? O que acontece com a área se aumentar o raio?
- (65) A1 – Aumenta
- (66) A4 – Fica maior se aumentar o raio.
- (67) Professor – Certo.
- (68) Professor – Se isso acontece, deve ter alguma relação entre o raio e a área, alguém percebeu alguma coisa, comparando os valores do quadro?
- (69) A3 – A gente fez o raio ao quadrado vezes 4 e vezes π e tá dando certo.

- (70) A1 – Por exemplo, nessa linha aqui, o raio é 1, 1 ao quadrado da 1, vezes 4 da 4 e vezes π dá 4π .
- (71) Professor – Isso vale em todas as linhas?
- (72) A4 – Vale, em todas dá a mesma coisa.
- (73) Professor – Então tem um padrão para descobrir a área da superfície da esfera, qual é?
- (74) A1 – Raio ao quadrado vezes 4 vezes π .

GRUPO B

- (75) B1 – Coloca os valores do raio aí.
- (76) B2 – Olha aí, com 1 da 4, com 4 dá 16, com 9 da 36, com 16 dá 64, com 25 dá 100.
- (77) B3 – Se aumentar o raio, a área também aumenta.
- (78) Professor – O que vocês têm que fazer é comparar os valores de R^2 com o valor da área?
- (79) Professor – A primeira pergunta é o que acontece com a área se aumenta o raio?
- (80) Grupo – Aumenta**
- (81) Professor – Então deve ter alguma relação entre o valor do raio e a área da esfera, vocês chegaram a alguma conclusão? Tem alguma coisa em comum entre eles?
- (82) B4 – Todos tem o π .**
- (83) Professor – Mais alguma coisa?
- (84) B2 – O raio ao quadrado**
- (85) Professor – Ainda falta alguma coisa pra bater os resultados, alguém sabe?
- (86) B1 – caramba mano, tem que multiplicar o R^2 por 4**
- (87) Professor – Além disso o que tem no final de todos os resultados?
- (88) Grupo – Tem que ter π .**
- (89) Professor – Boa galera, é esse o caminho. Qual seria a fórmula da área da esfera?
- (90) B1 – Vai ser $4R^2\pi$.**
- (91) Professor – Registrem isso.**

Neste recorte vemos que os alunos, ao interagirem com a atividade, exploram diferentes pontos de vista em buscar de um padrão para os dados obtidos no

aplicativo, o que caracteriza o discurso como **interativo/dialógico** e gradualmente através da intervenção do professor passa a **interativo/de autoridade**. No grupo A analisados nota-se inicialmente o padrão I-R-A, conforme pode ser visto nos turnos (64) a (67), assim como padrão de interação I-R-F (Iniciação do Professor – Resposta do Aluno – Feedback do professor) registrados nos turnos (68) a (74). Por outro lado, ao analisarmos o grupo B percebemos a predominância do discurso **interativo/de autoridade** com o padrão de interação do tipo I-R-F (ver turnos (81) a (90)). Nesse segmento, podemos destacar os indícios de aprendizagem dos grupos nos turnos (55), (57), (59), (61), (65), (69), (70), (74), (80), (82), (84), (86), (88) e (90), chegando-se à construção da UARC2.

Além disso, conforme colocado anteriormente nas transcrições feitas, observamos que alguns grupos chegaram à elaboração informal do conceito de forma autônoma e em outros foi necessário que as IOMOs se fizessem presentes na reconstrução do conceito matemático. Todavia, vale destacar que a estruturação da atividade contribuiu para que os alunos chegassem os objetivos propostos.

FIGURA 21: Resolução da Atividade 2 – Grupo A

[I₁] Insira o valor do raio R da esfera no aplicativo GEOESFERA 2, e complete cada linha do quadro abaixo com os valores do Raio ao Quadrado (R^2) e da Área da Superfície Esférica fornecidos pelo aplicativo.

Raio (R)	Raio ao Quadrado (R^2)	Área Da Superfície Esférica (A)
1	1	4π
2	4	16π
3	9	36π
4	16	64π
5	25	100π
6	36	144π
7	49	196π
8	64	256π

[I₂] Observando os valores obtidos em cada linha do quadro, o que ocorre com o valor da Área da Superfície Esférica (A) quando aumenta o valor do Raio (R)?

Quando o raio da esfera aumenta a área também aumenta.

[I₃] Em cada linha do quadro, a partir dos valores do Raio ao Quadrado (R^2), como podemos obter o valor da Área da Superfície Esférica (A)?

Poderemos obter o valor da área multiplicando por 4π .

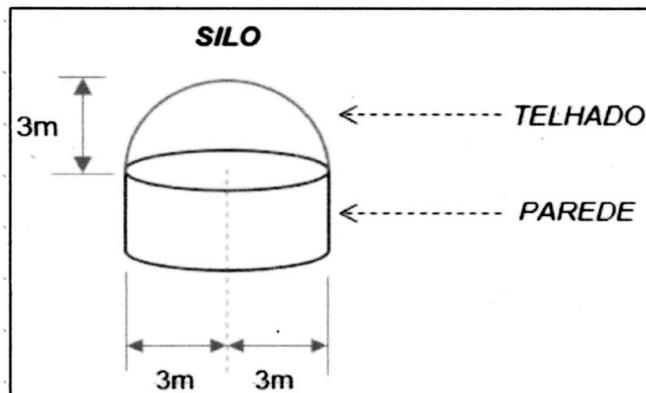
Conclusão: concluímos que a fórmula da área da superfície esférica é o raio ao quadrado, multiplicado por 4π

Os resultados obtidos nesse segmento, me permite afirmar que objetivo da atividade foi alcançado, conforme destaca-se na conclusão do grupo presente na figura 20.

Vale destacar também a produção dos alunos na intervenção avaliativa restritiva dessa atividade, onde foi exigido dentro de situação problema a aplicação da fórmula obtida dentro de um contexto específico como apresentamos na Figura 21.

FIGURA 22: Intervenção Avaliativa Aplicativa - Aluno A3

[IAA] Para armazenar grão são usadas estruturas chamadas de silos, tal estrutura é formada pela junção de dois sólidos geométricos.



Considerando $\pi = 3$, qual o valor, em m^2 , da área correspondente ao telhado do silo?

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot \pi \cdot R^2 \\ A &= 4 \cdot 3 \cdot 3^2 \\ A &= 12 \cdot 9 \\ A &= 108 \end{aligned}$$

Fonte: Protocolo de Pesquisa (2019)

Diante do exposto, pode-se novamente afirmar que atividade se mostrou potencialmente como caminho para elaboração da ideia de área da superfície esférica juntos aos estudantes.

EPISÓDIO 3

SEGMENTO IV

Determinar o volume da esfera conhecido o valor do raio.

Turnos: 92 – 124

Assim como na atividade anterior, essa atividade tem por finalidade que os alunos encontrem uma maneira informal para calcular o volume da esfera. Para tanto se faz necessário a associação entre os valores do raio da esfera e os resultados obtidos no aplicativo GEOESFERA 4, onde por meio de Interações Exploratórias e Interações Reflexivas o aluno é conduzido a busca de regularidades para construção da fórmula do volume. No inicio da atividade o professor explicou o funcionamento básico do aplicativo e de que maneira deveriam ser trabalhados os dados obtidos. Os diálogos provenientes das interações apresentamos a seguir.

GRUPO A

- (92) A1 – É igual a anterior, só que tem coisa a mais para preencher na tabela.
- (93) A2 – A pergunta é o que ocorrer com o volume se aumentar o raio?
- (94) A3 – Ele aumenta 4 vezes
- (95) A4 – Não, ele é elevado ao cubo.
- (96) A2 – o valor do raio que é ao cubo?
- (97) Professor – Para chegar em uma conclusão é preciso vocês observarem os valores dos resultados que foram calculados e colocados em cada linha.
- (98) A1 – Dá para perceber que o raio é elevado ao cubo.
- (99) Professor – Vocês já compararam isso com o valor que deu no volume que tá dando no aplicativo? Tem mais alguma coisa?
- (100) A2 – No caso, eu pego o raio ao cubo e multiplico por 4.
- (101) Professor – Não está faltando nada?
- (102) Professor – Compara os resultados.
- (103) A3 – Todos tem 3 em baixo, então tem que dividir por 3 e no final a gente põe o π .
- (104) A4 – Caramba dá certo mesmo, nos outros funciona também.
- (105) Professor – Show, isso mesmo. Então vocês podem me dizer como calcula o volume de uma esfera?
- (106) Grupo – É 4 vezes o π , vezes o raio ao cubo, isso tudo dividindo com 3.

(107) Professor – Para formalizar isso, devemos escrever a fórmula do volume, que

$$\text{nesse caso é } V = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}.$$

GRUPO B

(108) B1 – Olha aí galera, por 1 está dando $\frac{4\pi}{3}$.

(109) B1 – 2 ao cubo é 8, vezes 4 dá 32.

(110) B2 – É por 4 mesmo.

(111) B1 – 27 vezes 4, dá quanto? 108?

(112) B3 – A única coisa que eu estou vendo é que está dividindo por 3.

(113) B4 – Está dando 108.

(114) B4 – 8 vezes 4 dá 32, 27 vezes 4 dá 108.

(115) B1 – Então é só dividir por 3 e multiplicar o π .

(116) B2 – Interessante, 1 vezes 4 é 4 dividindo por 3 e vezes π , $\frac{4\pi}{3}$.

(117) B4 – Com 4 está dando 64, vezes dá 256, agora divide por 3 e vezes π .

(118) B5 – Então é isso a fórmula. Eleva ao cubo, vezes 4, divide por 3 e vezes π . (falando do raio)

(119) Professor – Perceberam alguma regularidade nos valores da tabela para encontrar o volume?

(120) Grupo – Todas as linhas multiplicam por 4 e divide por 3.

(121) Professor – Não está faltando nada?

(122) Grupo – O π , todos tem π .

(123) Professor – Certo. E como vocês acham que é a fórmula do volume da esfera?

(124) Grupo – 4 vezes π , vezes R^3 dividido por 3.

Nesse segmento, em ambos os grupos analisados observou-se inicialmente os alunos discutindo diferentes pontos de vista o que caracteriza o discurso como **interativo/dialógico** e a partir da intervenção do professor, gradualmente torna-se **interativo/de autoridade** visto que se busca a estabilização na construção dos conceitos pretendidos por meio de uma sequência de perguntas e respostas. Quanto ao padrão de interação observa-se em predominância o padrão I-R-A (Turnos 119 a 124) no grupo B e no grupo A o padrão I-R-F. Vale destacar que nesse segmento, nos

grupos analisados os alunos conseguiram de forma autônoma chegar à padronização informal da fórmula para cálculo do volume, sendo necessário apenas pequenos ajustes por parte do professor. Revelaram-se indícios de aprendizagem nos turnos (98), (100), (103), (106), (114), (115), (116), (118), (120), (122) e (124), consolidando, assim, a UARC 3.

FIGURA 23: Resolução da Atividade 3 - Grupo B

[I_i] Insira o valor do raio R no aplicativo "GEOESFERA 3" e preencha o quadro a seguir com os valores de R^3 e do volume da esfera (V) fornecidos pelo aplicativo.

Raio (R)	Raio ao Cubo (R^3)	Volume da Esfera (V)
1	1	$V = \frac{4\pi}{3}$
2	8	$V = \frac{32\pi}{3}$
3	27	$V = \frac{108\pi}{3}$
4	64	$V = \frac{256\pi}{3}$
5	125	$V = \frac{500\pi}{3}$
6	216	$V = \frac{864\pi}{3}$
7	343	$V = \frac{1372\pi}{3}$
8	512	$V = \frac{2048\pi}{3}$

[I_e] O que ocorre com o valor do volume da esfera (V) a medida que aumenta o valor do raio (R)?

O valor do volume da unidade aumenta conforme o valor do raio.

[I_r] Comparando os valores de R^3 e os valores obtidos para o volume da esfera (V), qual a relação observada?

Conclusão:

O valor obtido através da fórmula: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

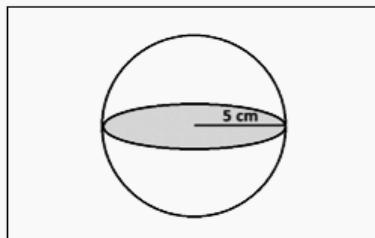
Fonte: Protocolo de Pesquisa (2019)

Novamente, os resultados revelam a potencialidade do instrumento na elaboração do conceito estudado. Dando destaque para Intervenção Reflexiva (Figura 22) e os recortes já apontados nas transcrições, indica-se que houve indícios de aprendizagem no segmento apresentado.

A figura a seguir, reforçando o que já foi citado anteriormente, apresento os resultados de Intervenções Avaliativas ligadas ao conceito de volume da esfera.

FIGURA 24: Intervenção Avaliativa Restritiva - Aluno B2

[I_{AR}] Observe a figura a seguir.



Qual o valor, em cm^3 , do seu volume?

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \\ V &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 \\ V &= \frac{4 \cdot \pi \cdot 125}{3} \\ V &= \frac{500 \pi}{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Fonte: Protocolo de Pesquisa (2019)

Na intervenção da figura 23, na qual se exigiu a aplicação direta da fórmula do volume podemos ver que a construção do conceito contribuiu para a resolução da questão, o que mostra a ideia do conceito discutido na atividade foi fixado corretamente.

Nas duas intervenções seguintes, solicitamos que a fórmula do volume fosse empregada em duas situações contextualizadas, nas quais além da fórmula propriamente dita exigiu-se as outras ideias como adição de volumes e comparação do volume de dois sólidos geométricos como indicamos nas Figuras 24 e 25.

FIGURA 25: Intervenção Avaliativa Aplicativa - Aluno B3

[I_{AA}] (IFPE) Maria Carolina resolveu sair um pouco do seu regime e foi saborear uma deliciosa sobremesa composta por 3 bolas de sorvete e 27 uvas, conforme a imagem abaixo. Suponha que as bolas de sorvete e as uvas tenham formatos esféricos e que Maria Carolina comeu toda a sua sobremesa.

$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

$V = 4 \cdot 3 \cdot 4^3$

$V = 4 \cdot 4^3$

$V = 4 \cdot 64$

$V = 256$

$V = 256 \cdot 3$

$V = 768$

$V = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot 27$

$V = 4 \cdot \frac{9}{108}$

$V = 4 \cdot 9$

$V = 36$

$V = 36 \cdot 27$

$V = 972$

$V = 972 + 768$

$V = 1740$

VALOR TOTAL $\rightarrow 1740$

Disponível em: <http://s1.1zoom.me/big3/144/ice_cream_Blueberries_440624.jpg>
Acesso em 20 mar 2017.

Usando $\pi = 3$ sabendo que os raios de cada bola de sorvete têm 4 cm e, de cada uva, 1 cm, podemos afirmar que ela consumiu, nessa sobremesa, em centímetros cúbicos, um total de

(A) 108. (B) 768. (C) 876. (D) 260.

Fonte: Protocolo de Pesquisa (2019)

FIGURA 26: Intervenção Avaliativa Aplicativa - Aluno B3

[I_{AA}] (ENEM) Um artista plástico construiu, com certa quantidade de massa modeladora, um cilindro circular reto cujo diâmetro da base é 24 cm e cuja altura é 15 cm. Antes que a massa secasse, ele resolveu transformar aquele cilindro em uma esfera.

Volume da esfera: $V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi r^3}{3}$

Analisando as características das figuras geométricas envolvidas, conclui-se que o raio R da esfera assim construída é igual a:

(A) 15 (B) 12 (C) 24 (D) $3\sqrt[3]{60}$ (E) $6\sqrt[3]{10}$

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi \cdot 12^2 \cdot 15$

$V = 36 \cdot 15 \cdot \pi$

$V = 36 \cdot 15 \cdot 3$

$V = 540 \cdot 3$

$V = 1620$

$\frac{4\pi r^3}{3} = 1620$

$4\pi r^3 = 1620 \cdot 3$

$4 \cdot 3 r^3 = 1620 \cdot 3$

$12 r^3 = 1620$

$r^3 = 135$

$r = \sqrt[3]{135}$

$r = 3\sqrt[3]{60}$

$r = 6\sqrt[3]{10}$

Fonte: Protocolo de Pesquisa (2019)

Observando a produção dos alunos nas questões supracitadas, entende-se que elas revelaram que o conteúdo aprendido a partir atividade 3 potencializou as resoluções, revelando-se eficaz no ensino e aprendizagem do volume da esfera.

EPISÓDIO 4

SEGMENTO V

Determinar a área do fuso esférico conhecidos o raio e o ângulo de giro

Turnos: 125 – 161

Nesse segmento, a partir dos valores do raio da e do ângulo de giro, e por meio da interação entre o aplicativo GEOESFERA 4, buscamos através de Interação Exploratórias e Interações Reflexivas que os discentes percebessem por meio da observação de regularidades a relação entre esses valores e os valores apresentados pelo aplicativo. No início da atividade o professor explicou que o aplicativo funciona como uma calculadora e nele existe a possibilidade de manipulação da figura gerada. Os turnos gerados revelam que avanços na elaboração dos conceitos trabalhados na atividade.

GRUPO A

- (125) A1 – Olha aí galera, toda vez vai multiplicado pelo mesmo número.
- (126) A2 – Cuidado que agora tem o ângulo aí e aumenta de 15 em 15.
- (127) A3 – Com 30º está dando 3 em baixo.
- (128) A4 – Tá dando 2, 8 e 18 sempre, mas por quê?
- (129) A1 – Galera, eu acho que muda só o ângulo.
- (130) A2 – Engraçado é que muda só o ângulo e isso aqui 2, 8 e 18 é invariável.
- (131) A1 – Aqui na frente ficam os três a mesma coisa, trocando o ângulo muda o final.
- (132) A3 – Presta atenção aqui no final. Aqui é 1 e no final deu 2; aqui é 4 e no final deu 8; aqui é 9 e no fim 18.
- (133) A3 – É duas vezes o valor da coluna do raio ao quadrado.
- (134) A4 – Agora faz sentido.
- (135) Professor – E aí galera, conseguiram descobrir alguma coisa? Já sabem como calcular a área da figura?
- (136) Grupo – É o dobro do raio ao quadrado.

- (137) Professor – Vocês têm certeza? Não tá faltando nada? E esses valores no final, o que significa?
- (138) A1 – Caramba, é mesmo. Isso não é o ângulo em radianos?
- (139) Professor – Isso mesmo.
- (140) Professor - Então com faz pra calcular a área da figura?
- (141) Grupo – O dobro de raio ao quadrado vezes ângulo.
- (142) Professor – Sim, mas não vão esquecer que é o ângulo em radianos.

GRUPO B

- (143) B1 – Põe 30° aí e bora ver os valores.
- (144) B2 – tá dando $\frac{2\pi}{6}$, com 1; $\frac{8\pi}{6}$ com o 2 e $\frac{18\pi}{6}$ com o 3. Anota os valores.
- (145) B3 – Agora vê com o 45° .
- (146) B4 – Está dando a mesma coisa.
- (147) B5 – Olha aí. O nº de cima não vai mudar. Tá dando 2, 8 e 18, só falta vê o próximo.
- (148) B1 – $\frac{2\pi}{4}$, $\frac{8\pi}{4}$ e $\frac{18\pi}{4}$ tá dando.
- (149) B2 – Está dando igual mesmo, só altera o valor que aparece em baixo.
- (150) Professor – Que tal, conseguiram perceber alguma coisa?
- (151) B4 – Os números da frente são a mesma coisa em todos.
- (152) Professor – E se comparar o valor do resultado com o valor do ângulo em radianos?
- (153) B4 – Está aparecendo no resultado. Aqui o $\frac{\pi}{6}$, aqui o $\frac{\pi}{4}$ e nesse outro aqui o $\frac{\pi}{3}$.
- (154) Professor – E se a gente comparar a terceira coluna (coluna do R^2) com o resultado?
- (155) B1 – Eu acho que eu já entendi. É sempre multiplicada por 2 o valor de R^2 .
- (156) Professor – Confere se vale nos outros valores, olha os resultados.
- (157) B1 – Olha aqui, 2 vezes 1 da 2, com o ângulo da $\frac{2\pi}{6}$. No outro, 2 vezes 4 dá 8 com o ângulo da $\frac{8\pi}{6}$ e nos outros é igual.

- (158) Professor – Então, observando os valores que a gente tem em cada linha e o valor que nos encontramos no resultado, o que se conclui?
- (159) B3 – O valor da coluna de R^2 fica multiplicado por 2 e, no caso, é só colocar o valor do ângulo no final.
- (160) B1 – Então o valor da área fica 2 vezes o R^2 vezes o ângulo de rotação.
- (161) Professor – Perfeito.

Nesse segmento, observa-se que inicialmente o discurso caracteriza-se como **interativo/dialógico** visto a necessidade dos alunos de apresentar argumentos em busca da padronização que é resposta de uma das respostas da atividade e a partir do momento em que o professor faz a intervenção ocorre a mudança para **dialógico/de autoridade** (turnos 152 a 161). Quanto ao padrão de interação, encontramos o padrão I-R-P-R-A caracterizando os 2 grupos analisados. Destacam-se os indícios de aprendizagem ocorridos nos turnos (133), (136), (138), (141), (151), (153), (155), (157), (159) e (160), onde encontramos a construção informal para cálculo da área do fuso esférico fechando assim a construção da UARC 4.

FIGURA 27: Intervenção Avaliativa - Grupo E

[I_E] Insira os valores do raio (R) e do ângulo de giro (em graus) no aplicativo GEOESFERA 4 e complete o quadro a seguir com os valores do raio ao quadrado (R^2), do ângulo de rotação (em radianos) e da área do fuso esférico (A), a seguir responda os itens.

RAIO (R)	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (α) (EM GRAUS)	R^2	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (α) (EM RADIANOS)	ÁREA DO FUSO ESFÉRICO (A)
1	30	3	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$
2	30	4	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{6}$
3	30	9	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{18\pi}{6}$
1	45	3	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{4}$
2	45	4	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{8\pi}{4}$
3	45	9	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{18\pi}{4}$
1	60	3	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
2	60	4	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$
3	60	9	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{18\pi}{3}$

[I_E] Aumentando o valor do Raio (R), o que ocorre com o valor da Área do Fuso Esférico (A)?

Aumenta o raio, aumenta a Árv de Fuso Esférico

[I_E] Aumentando Ângulo de Rotação (α), o que se observa em relação a Área do Fuso Esférico (A)?

Aumentando o ângulo de rotação aumenta a Árv de F. E

[I_R] Observando os valores do quadro, utilizando os valores de R^2 e do ângulo de (α) (em radianos), como podemos obter o valor da Área do Fuso Esférico (A)?

Com o dobro do raio mais o valor do ângulo de rotação.
 $2 \cdot R^2 \cdot \alpha$

Fonte: Protocolo de Pesquisa (2019)

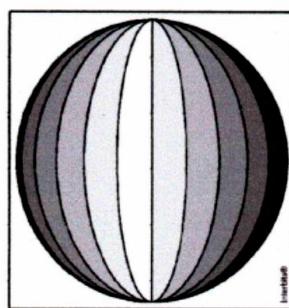
Nesse segmento, o conjunto de interações, além dos turnos já expostos nas transcrições feitas, apontam para os indícios de aprendizagem da atividade. Portanto, a entende-se tal construção é contribui de forma considerável ao desenvolvimento do objeto em estudo.

Buscando Aferir o aprendizado da atividade, tivemos o desenvolvimento de Intervenções Avaliativas, como apresenta-se nas figuras a seguir.

Na primeira delas, Aplicativa Restritiva, procuramos avaliar se os alunos conseguiriam identificar um fuso esférico em uma situação específico, e como pode-se observar, entende-se que a manipulação do sólido no aplicativo durante a atividade contribuiu para que essa habilidade fosse desenvolvida.

FIGURA 28: Intervenção Avaliativa Restritiva - Aluno E2

[I_{AR}] (UDESC) Uma bola esférica é composta por 24 faixas iguais, como indica a figura.



- A área de cada uma das faixas, corresponde a área de um(a)
- (A) setor circular.
(B) segmento circular.
(C) esfera.
 (D) fuso esférico.

Fonte: Protocolo de Pesquisa (2019)

Na segunda, Avaliativa Aplicativa, solicitou-se aplicação da fórmula para cálculo da área do fuso, e conforme podemos ver na resolução apresentada, aparecem indícios de aprendizagem da referida fórmula.

FIGURA 29: Intervenção Avaliativa Aplicativa - Aluno E2

[AA] Um observador colocado no centro de uma esfera de raio 5 m vê o arco AB sob um ângulo α de 72° , como mostra a figura.

Qual o valor a área, em m^2 , do fuso esférico determinado por α ?
(Sugestão: Use a fórmula obtida na atividade anterior)

$$\frac{2 \cdot 5^2 \cdot 72\pi}{180} = \frac{50 \cdot 72\pi}{180} = \frac{3600\pi}{180} = 20\pi$$

Fonte: Protocolo de Pesquisa (2019)

EPISÓDIO 5

SEGMENTO VI

GRUPO A

Determinar volume da cunha esférica conhecido o raio e o ângulo de giro

Turnos: 162 – 206

Nesse segmento, assim como no anterior, a partir dos valores do raio e do ângulo de giro, em associação com o uso do aplicativo GEOESFERA 5, através de Intervenções Exploratórias e Intervenções reflexivas buscamos que os alunos chegassem a uma elaboração informal para cálculo do volume da cunha esférica. No início o professor explicou de que forma funciona o aplicativo e como deveriam ser trabalhadas as informações obtidas. Mais uma vez, os turnos revelaram a viabilidade do uso desse instrumento na elaboração dos conceitos como apresentamos a seguir.

(162) Professor – *Essa outra atividade segue o mesmo roteiro da atividade anterior, vocês devem colocar os valores que aparecem em cada linha no aplicativo e anotar os valores encontrados no resultado e responder as perguntas que vem na sequência.*

- (163) A1 – Abre aí o aplicativo para colocar os valores.
- (164) A2 – Os valores do raio ao cubo são 1, 8 e 27, só repetir nas outras linhas.
- (165) A3 – Nesse aqui acontece a mesma coisa da outra atividade, multiplica essa coluna de raio ao cubo por 2.
- (166) A1 – E o ângulo de rotação? Olha só, o π não variou.
- (167) A2 – Esses 3 primeiros são $\frac{\pi}{6}$ no final, igual ao ângulo de giro.
- (168) A4 – Na resposta tá dando 18 em baixo.
- (169) A1 – Nos próximos todos os três são $\frac{\pi}{4}$.
- (170) A4 – Os resultados os mesmos, só que tá dando 12 em baixo.
- (171) A2 – Só muda em baixo. Aqui é 12, o outro 16 e o próximo eu não sei.
- (172) A3 – Eu acho que já entendi. No caso o nº de baixo fica 3 vezes.
- (173) A2 – Será que vale em todos? E esse ângulo de giro?
- (174) A3 – Quando eu fiz tive que levar em consideração o ângulo.
- (175) Professor – No que vocês pensaram? Algum padrão?
- (176) A3 – O raio ao cubo multiplica por 2, aí tem o ângulo, mas em baixo é 3 vezes.**
- (177) Professor – Multiplicar por 3 em baixo é o mesmo que multiplicar por uma fração de denominador 3. Que fração seria?
- (178) A2 – É $\frac{1}{3}$ certo?**
- (179) Professor – Por quê?
- (180) A3 – Senão mudaria o de cima, quer ver. Multiplica por 1 e depois divide por 3.**
- (181) Professor – Está certo, é isso aí.
- (182) A1 – Então a fórmula é 2 vezes raio ao cubo, vezes ângulo e vezes $\frac{1}{3}$.**
- (183) Professor – É essa a fórmula mesmo, só que o valor do ângulo usado tem que está em radiano.

GRUPO B

- (184) B1 – Vai dar 1, 8 e 27 os valores ao cubo.
- (185) B3 – Vai na ordem.
- (186) B2 – Calma que eu estou perdida.

- (187) *B1 - $\frac{2\pi}{18}$, $\frac{16\pi}{18}$ e $\frac{54\pi}{18}$ que tá dando nos resultados.*
- (188) *B4 – É igual ao anterior, só que em cima dobra o valor e em baixo fica multiplicado por 3.*
- (189) *B3 – Como assim?*
- (190) ***B5 – Esse valor aqui (falando do R^3) sempre dobra e esse aqui de baixo fica por 3, no caso, triplicou.***
- (191) *B2 - Legal, é dobrado e triplicado?*
- (192) *B1 – Menina, na parte de cima é dobrado e na parte de baixo é triplicado.*
- (193) *B4 – Isso, é quase o mesmo padrão.*
- (194) *Professor – Ei, que tal aí? Deixa eu dar uma olhada no que vocês fizeram. O que acontece com volume se aumentar o raio?*
- (195) ***Grupo – Aumenta.***
- (196) *Professor – E se aumentar o ângulo de giro?*
- (197) ***Grupo – também aumenta.***
- (198) *Professor – E olhando para os valores do R^3 e do ângulo em radianos, dá para perceber como se chega aos resultados encontrados?*
- (199) ***B1 – R^3 multiplica por 2, dobra.***
- (200) *Professor – E esse número em baixo?*
- (201) *B3 – Triplica.*
- (202) ***B5 – Em relação ao R^3 dobra, mas em relação ao ângulo triplica.***
- (203) ***B4 – Seria o dobro de R^3 e vezes o ângulo multiplicado por $\frac{1}{3}$.***
- (204) *Professor – E como serie a fórmula então?*
- (205) ***B1 – 2 vezes R^3 vezes o α (falando do ângulo de giro) vezes $\frac{1}{3}$.***
- (206) *Professor – Show, é isso aí.*

Nesse segmento, observa-se que no momento inicial o discurso caracteriza-se como **não interativo/de autoridade** dado que o professor apresenta um ponto de vista específico dando detalhes da atividade e com o desenvolver da atividade torna-se **interativo/dialógico** dado os diferentes pontos de vista em discussão pelos alunos e por fim, a partir da intervenção do professor passa a ser do tipo **interativo/de autoridade** considerando que o professor considera o ponto de vista de seu alunos na construção do conceito desejado. No turnos observados encontra-se o padrão

discursivo I-R-P-R-A (Iniciação do Professor – Resposta – Pergunta – Resposta – Avaliação) Nessa atividade observa-se a construção informal da fórmula para cálculo do volume da cunha, o que caracteriza os indícios de aprendizagem nos turnos (176), (178), (180), (182), (190), (195), (197), (199), (202), (203) e (205)

A seguir apresento os registros escritos da atividade 5 do Grupo A, onde se tem fortes evidências das contribuições junto a aprendizagem dos alunos no tema estudado. Portanto, entende-se que, assim como as atividades apresentadas anterior, tal construção colaborou de forma significativa com o processo de ensino e aprendizagem do tema.

FIGURA 30: Resolução da Atividade - Grupo A

Procedimento:

[I] Insira os valores do raio (R) e do ângulo de giro (em grau) no aplicativo GEOESFERA 5 e complete o quadro com os valores do raio ao quadrado (R^3), do ângulo de rotação (em radianos), do Volume da Cunha Esférica (V) e responda aos itens.

RAIO	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (EM GRAUS)	R^3	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (EM RADIANOS)	VOLUME DA CUNHA ESFÉRICA (V)
1	30	1	$\pi/6$	$2\pi/18$
2	30	8	$\pi/6$	$16\pi/18$
3	30	27	$\pi/6$	$54\pi/18$
1	45	1	$\pi/4$	$2\pi/12$
2	45	8	$\pi/4$	$16\pi/12$
3	45	27	$\pi/4$	$54\pi/12$
1	60	1	$\pi/3$	$2\pi/9$
2	60	8	$\pi/3$	$16\pi/9$
3	60	27	$\pi/3$	$54\pi/9$

[I_E] Aumentando o valor do Raio (R), o que se observa em relação ao Volume da Cunha (V)?

Aumentando o valor do raio, aumenta o valor da cunha.

[I_E] Aumentando o valor do Ângulo de Rotação (α), o que se observa em relação ao Volume da Cunha (V)?

Aumentando o valor do ângulo de rotação, aumenta o valor da cunha.

[I_R] Observando os valores do quadro, utilizando os valores de R^3 e do ângulo de (α) (em radianos) em cada linha, como se pode obter o valor do volume da cunha esférica (V)?

Quanto maior o valor do cubo, maior o ângulo de rotação para fixar.

$$2 \cdot R^3 \cdot \alpha / 3$$

Fonte: Protocolo de Pesquisa (2019)

Nesse segmento, juntamente com turnos que apontam os indícios de aprendizagem, ocorreu o desenvolvimento de duas outras Intervenções Avaliativas.

A saber, na primeira delas, onde exigimos apenas a aplicação da fórmula para cálculo do volume, o registro mostra avanços em relação a essa habilidade (ver Figura 30).

FIGURA 31: Intervenção Avaliativa Restritiva – Aluno A3

[I_{AR}] Qual o valor, em cm³, do volume da cunha esférica determinada por um ângulo de 36° e raio igual a 5 cm?

(Sugestão: Use a fórmula encontrada na atividade anterior)

(A) $\frac{25\pi}{3}$

(B) $\frac{50\pi}{3}$

(C) $\frac{100\pi}{3}$

(D) $\frac{125\pi}{3}$

$$V = 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot a$$

$$V = 2 \cdot 5^3 \cdot \frac{36\pi}{180}$$

$$V = 2 \cdot 125 \cdot \frac{36\pi}{180}$$

$$V = \frac{250 \cdot 6\pi}{3}$$

$$V = \frac{250 \cdot \pi}{3 \cdot 5}$$

$$V = \frac{50\pi}{3}$$

Fonte: Protocolo de Pesquisa (2019)

Na outra, onde se tem uma situação mais elaborada, observamos que o desenvolvimento da atividade 5 contribuiu para a construção da fórmula, evidenciando assim os indícios de aprendizagem.

FIGURA 32: Intervenção Avaliativa Aplicativa - Aluno A3

[I_{AA}] figura a seguir representa uma fatia de uma melancia perfeitamente esférica de raio R = 10 cm. Se o valor do ângulo α é de 30°, qual o valor do volume, em cm³, ocupado por essa fatia?

(Sugestão: Use a fórmula encontrada na atividade anterior)

(A) $\frac{2000\pi}{9}$

(B) $\frac{1000\pi}{9}$

(C) $\frac{500\pi}{9}$

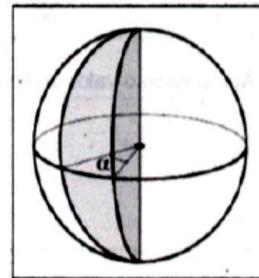
(D) $\frac{250\pi}{9}$

$$V = 2 \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 30^\circ$$

$$V = 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{30}{3}$$

$$V = \frac{2.000}{3} \cdot \frac{\pi}{6}$$

$$V = \frac{2.000\pi}{18} = \frac{1000\pi}{9}$$



Fonte: Protocolo de Pesquisa (2019)

De posse dos resultados das Intervenções Avaliativas e as análises feitas sobre as interações verbais foi possível observar, de maneira geral, que os alunos desenvolveram de forma satisfatória as atividades propostas na sequência didática, se evidenciando os indícios de aprendizagem. Além disso, como já foi citado anteriormente, à medida que as atividades forma sendo desenvolvidas percebeu-se sua realização em tempo cada vez menor. Com isso considero a Sequência Didática aqui desenvolvida como validada.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse momento descrevo minhas considerações finais sobre a pesquisa desenvolvida nesse trabalho. Para tanto, julgo ser importante retomar a questão de pesquisa e apresentar os resultados que apontam no sentido de que ela foi respondida e teve os objetivos que balizaram seu desenvolvimento alcançados.

A saber, a questão de pesquisa levantada foi: *Quais as potencialidades que uma sequência didática construída a partir da concepção de Intervenções Estruturantes pode exercer sobre o processo de ensino e aprendizagem de esfera a partir da interação com applets do software Geogebra?* a qual teve seus procedimentos balizados pelo objetivo de *analisar as potencialidades de uma sequência didática para o ensino do sólido geométrico esfera, elaborada de acordo com as unidades articuladas de reconstrução conceitual, em uma turma do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual.*

Nesse contexto, as bases teóricas da pesquisa nos proporcionaram um aprofundamento no que se trata da Teoria das Situações Didáticas, Sequências Didáticas, Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual, Análise Microgenética e Análise do Discurso, o que foi fundamental para o desenvolvimento da pesquisa, visto que nos deram o devido esclarecimento sobre a estruturação, desenvolvimento e análise das informações reveladas dentro do processo de ensino e aprendizagem.

A consulta realizada junto a aluno egressos do 3º ano do ensino médio em uma escola pública estadual do município de Ananindeua, revelou a predominância do método tradicional de ensino, ou seja, baseado na apresentação do conteúdo de forma expositiva e dando ênfase a resolução de questões, que os alunos têm dedicado pouco tempo ao estudo da matemática, tem pouco entendimento sobre os temas tratados e, além disso, segundo o quadro de dificuldades respondido por eles, tópicos relacionados ao cálculo de área e volume da esfera foram considerados de dificuldade elevada.

Na consulta aos professores, os dados obtidos nos questionários revelaram uma melhora na formação acadêmica, entretanto, os a jornada de trabalho e o número de alunos atendidos em sala de aula são excessivos. No que tange ao processo de ensino e aprendizagem de geometria espacial, as aulas ocorrem de forma expositiva não dialogada, não é comum a investigação de conhecimentos prévios, a prática do que foi ensinado se dá por meio da resolução de listas de questões, o processo

avaliativo predominante é o uso da prova escrita e não é feito uso de tecnologia no ensino.

Quanto ao quadro de dificuldades, os temas que forma elencados foram julgados com grau de dificuldade que variou entre regular e difícil, havendo tópicos que foram julgados como fácil ou muito fácil. Vale ressaltar que fazendo um comparativo houve divergência em relação a opinião apresentada pelos alunos com relação ao quadro correspondente.

A revisão de estudos, corroborou com as informações obtidas e apontou no sentido de que o uso de novas metodologias de ensino aplicadas ao ensino de geometria espacial tende a amenizar os problemas apresentados. Pela análise realizada, pude constatar que há uma boa produção científica relacionada ao ensino de geometria espacial, entretanto, relacionada pontualmente ao sólido esfera ainda há uma enorme escassez. Buscando atender a essa demanda, decido pela elaboração de uma Sequência Didática contemplasse especificamente o sólido esfera e contribuísse na resolução dos principais problemas encontrados nas publicações analisadas, ou seja, dando destaque ao desenvolvimento da habilidade de visualização e cálculo de área e volume da esfera e suas partes.

Quanto ao livro didática, forma analisadas 4 coleções que fazem parte do programa nacional do livro didática do governo federal e fazendo um comparativo com é proposto nos documentos oficiais, observou-se nas coleções analisadas um descompasso com tais orientações dos documentos oficiais. É de praxe que o livro apresente o tema de forma direta, tendo foco na apresentação de fórmulas e resolução de questões, ou seja, deixa-se de lado o desenvolvimento de uma série de habilidades que podem ser afloradas no ensino de geometria espacial, o que mostra a necessidade da criação de novas metodologias de ensino.

A fundamentação matemática tratou particularmente das definições e das demonstrações das fórmulas para cálculo de área e volume da esfera e suas partes. Nela procuramos apresentar as demonstrações de maneira acessível, entretanto, sem perder o devido rigor exigido pela matemática. Ao leitor que com devido aprofundamento das ideias matemáticas, também disponibilizamos as demonstrações via cálculo diferencial e integral. Minha intenção nessa parte foi disponibilizar um material completo sobre o sólido para professor em atividade na sala de aula e para alunos de licenciatura necessitem lidar com o tema de maneira formal.

A Sequência Didática foi construída a partir dos levantamentos feitos inicialmente e foi estruturado conforme proposto por Cabral (2017) associado as contribuições de Góes (2000) e Scott e Mortimer (2002) no que se trata da Análise Microgenética e Análise do discurso, respectivamente, que nos serviram de lente junto processo de análise das interações dialógicas ocorridas.

O processo de construção da SD foi um momento especial na minha carreira profissional, visto que foi necessário deixar de lado antigas concepções e tomar posse de um novo aporte teórico, que veio muito a contribuir com a minha prática pedagógica.

Durante a aplicação da SD, o primeiro momento, notamos uma certa desorientação dos alunos por se tratar de um modelo de ensino diferenciado do habitual. Um ponto que foi motivador foi uso do computador como ferramenta para execução das atividades, que pelas possibilidades apresentadas nos aplicativos aguçou a curiosidade, melhorou a visualização e fez com que os alunos discutissem diferentes pontos de vista entre si. Além disso, o recorte nas interações verbais analisadas mostra que a utilização do instrumento metodológico favoreceu a autonomia na construção do objeto matemático e teve impacto positivo na realização das tarefas propostas.

Um aspecto favorável a se destacar é que o modelo de SD construído por meio das UARC's favoreceu a mobilização de conhecimentos prévios que orientado por meio das IOMO's contribuiu na assimilação do que estava sendo ensinado.

As contribuições da Análise Microgenética de Goés (2000) e a Análise do discurso segundo Scott e Mortimer (2002) foram cruciais por nos permitirem um olhar pontual sobre os indícios de aprendizagem e sobre a padronização deles dentro de todo processo.

Conforme apresentado no capítulo 5, houve avanços na visualização de figuras em 3 dimensões, na construção das fórmulas e resolução de questões.

Diante dos resultados obtidos, não restam dúvidas de que os objetivos traçados foram alcançados, e consequentemente, a questão de pesquisa respondida em sua totalidade.

É importante destacar as contribuições que o Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) da Universidade do Estado do Pará (UEPA) deixa sobre a minha prática docente. Por meio das disciplinas, das orientações dos professores e da produção exigida durante todo o curso foi obtido um

amadurecimento acadêmico que tem um reflexo fundamental sobre a minha prática docente.

Como desdobramentos futuros dessa pesquisa, recomenda-se a reaplicação da SD junto turmas que apresentem as mesmas características da turma analisada para reafirmar os resultados obtidos. Nessa pesquisa, ficaram de lado, tópicos como calota esférica, anel esférico além de inscrição e circunscrição, dessa forma, cabe uma elaboração de proposta similar a apresentada completando essas lacunas. Além disso, seria interessante aplicação da SD com um grupo de alunos do 3º ano de uma escola da rede particular de ensino dadas as físicas e o suporte tecnológico que elas podem oferecer, para possíveis confrontos de resultados, tendo em vista identificar aspectos favoráveis ao processo de ensino e aprendizagem.

Por fim, recomendo a elaboração de Sequências Didáticas segundo a concepção de Cabral (2017), voltando olhar a outros objetos matemáticos, dada a relevâncias dos resultados obtidos nessa pesquisa pra área de Educação Matemática.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULLOUD, Sacco Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Editora UFPR, 2007.

BALESTRI, R. **Matemática: Interação e Tecnologia**. 2ª. ed. São Paulo: Leya, v. 3, 2016.

BASSETTO, Camila Fernanda.; FERREIRA, Eric Chibana.; AGUIAR, Renato Forte. **Relação entre desempenho educacional e quantidade de alunos: uma análise empírica regional com dados do SARESP**. Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação, Araraquara, v. 12, n. 4, p. 2072-2087, out./dez. 2017.

BEZERRA, Aluzimara Nogueira. A isomeria nos azulejos de Belém: Uma proposta de ensino. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

BOERI, Camila Nicola; VIONE, Márcio Tadeu. **Abordagens em educação matemática**. Domínio Público, v.1, 2009. Disponível em: <<http://livros01.livrosgratis.com.br/ea000661.pdf>>. Acesso em: 02/05/2018

BORSOI, Caroline. **Geogebra 3D no Ensino Médio: uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN+ Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de Ensino Médio. **Orientações Curriculares do Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB, 2004.

BROUSSEAU, Guy. **Fundamentos e métodos da didática da matemática**. In: BRUN, Jean. Didáctica das matemáticas. Coleção Horizontes Pedagógicos. Lisboa: Instituto Piaget. 1996.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdo e métodos de ensino**. Rio de Janeiro, RJ: ATICA, 2008. 128 p. (Educação em Ação). ISBN 978-85-0811-966-0. 30, 31, 32

CABRAL, Natanael Freitas. **O Papel das Interações Professor-aluno na Construção da Solução Lógico-aritmética Otimizada de um jogo com regras.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemáticas), Universidade Federal do Pará, Belém, 2004.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas: estrutura e elaboração.** Pará: SBEM, 2017.

CARMO, Erinaldo Ferreira et al. **Um estudo da relação entre a adequação na formação docente e o desempenho escolar no Ensino Médio regular.** Educação e Fronteiras On-Line, v. 4, n. 12, p. 24-37, 2014.

COSTA, A. C., BORMEJO A. P., MORAES, M.S. **Análise do ensino de geometria espacial.** Anais do X encontro Gaúcho de Educação Matemática. 2009.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática.** 2 ed., Campinas: Ed. Da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

D'AMORE, Bruno. **Epistemologia, didática da matemática e práticas de ensino.** Boletim de Educação Matemática, v. 20, n. 28, 2007.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto e Aplicações: Ensino Médio.** 3^a. ed. São Paulo: Ática, v. 3, 2016.

DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos de Matemática Elementar 10: geometria espacial, posição e métrica.** 6^a ed. São Paulo: Atual, 2009.

EDITORAS MODERNA. **Conexões com a Matemática.** 2^a. ed. São Paulo: Moderna, v. 2, 2013.

FAUSTINO, Ana Carolina; PASSOS, Carmen Lúcia Brancaglion. **Cenários para investigação e resolução de problemas: reflexões para possíveis caminhos.** Revista Educação e Linguagens, v. 2, n. 3, 2014.

FERNANDES, Lacorderio Tavares. **Aprendizagem significativa: uma proposta de ensino e aprendizagem da geometria euclidiana espacial no ensino médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

GATTI, Bernadete A. **O professor e a avaliação em sala de aula.** Estudos em avaliação educacional, n. 27, p. 97-114, 2003.

GÓES, Maria Cecília Rafael. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: Uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade.** Cadernos Cedes, ano XX, SciELO Brasil, n. 50, 2000. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v20n50/a02v2050.pdf>>. Acesso em: 12 de Nov. 2016.

HOMEN, Priscila Maggi. **Concepções de professores dos anos iniciais do ensino fundamental sobre o ensino de geometria: uma análise pós-construtivista.** Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013

HUBERMAN, A. M. **O Ciclo de Vida Profissional de Professores.** In: NÓVOA, Antônio. Vida de professores. Portugal: Porto editora, 2000.

IEZZI, G. **Matemática: ciência e aplicações.** 9^a. ed. São Paulo: Sariava, v. 2, 2016.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** Educação Matemática em Revista. SBEM. N.4, p. 313, 1995.

LEONARDO, F. M. D. **Conexões com a Matemática.** 2^a. ed. São Paulo: Moderna, v. 2, 2013.

LUNA, Maria de Fátima Aleixo de. **Estudo das trajetórias hipotéticas de aprendizagem de geometria espacial para o ensino médio na perspectiva construtivista.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

MACHADO, Ronaldo Asevedo. **O ensino de geometria espacial em ambientes educacionais informatizados: um projeto de ensino de prismas e cilindros para o 2º ano do ensino médio.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

MEDEIROS, Leonardo Andrade. **Área e volume da esfera.** Dissertação (Mestrado em Álgebra; Análise matemática; Ensino de matemática; Geometria e topologia; Matemática aplicada) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

MORAES, Ideny E. S. Q. **O Ensino de Volumes de Sólidos Geométricos por atividades.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

MOREIRA, Daniel Monteiro da Silva. **Aprendizagem de geometria espacial, Cálculo de Volumes segundo os Alunos do 2º ano do ensino médio.** Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. 2016.

MORTIMER, E. F.; SCOTT, P. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino.** *Investigações em ensino de ciências*, v. 7, n. 3, p. 283–306, 2002.

PASSOS, Claudio Manso; TEIXEIRA, Paulo Magalhaes. **Um pouco da teoria das situações didáticas (TSD) de Guy Brousseau.** In: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2011.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências.** Revista Zatetiké - Ano 1 - n.1, 1993.

PEREIRA, Maria Regina de Oliveira. **A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono do seu ensino.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

PISKUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral**, vol. 1. Livraria Lopes da Silva Editora, 2000.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares.** 72 p. [SI]: Virtual Book, 2013.

POSSANI, Jose Fernando. **Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

RITTER, Andréa Maria. **A visualização no ensino de geometria espacial: uma possibilidade com o Calques 3D.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

SAMPAIO, R. F.; MANCINI, M.C. (2006, Janeiro/Fevereiro) **Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica.** Revista Brasileira de Fisioterapia, São Carlos, v. 11, n. 1, p. 83-89. ISSN:1413-3555

SANTOS, Waldiza Lima Salgado **O ensino de volume de sólidos por atividades.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2012.

SILVA, N. A.; FERREIRA, MVV; TOZZETTI, K. D. **Um estudo sobre a situação didática de Guy Brousseau.** In: CONGRESSO NACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES. 2015.

SILVA, Rosângela de Araújo. **As dificuldades do professor no ensino da geometria espacial nas escolas estaduais no município de Santa Cruz.** Anais do IV encontro de iniciação à docência da UEPB. 2014.

TOMIO, Daniela; SCHROEDER, Edson; ADRIANO, Graciele Alice Carvalho. **A análise microgenética como método nas pesquisas em educação na abordagem histórico-cultural.** Reflexão e Ação, v. 25, n. 3, p. 28-48, 2017.

VIVIAN, Nanci Miksza. **Análise dos Padrões discursivos de um professor de Ciências do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar.** Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Penso, 1998.

8. ANEXOS

ANEXO A QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
 CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
 PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE
 MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno (a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1. Qual a sua idade?

- 16 anos
- 17 anos
- 18 anos
- 19 anos ou mais

02. Qual o seu gênero?

- Masculino
- Feminino

03. Qual a sua série?

- 1º ano
- 2º ano
- 3º ano

04. Você já ficou em dependência em matemática?

- sim
- não

05. Você gosta de Matemática?

- Gosto muito
- Gosto
- Gosto pouco
- Não gosto

05. Qual a escolaridade do seu responsável masculino?

- Superior

- () Médio
- () Fundamental
- () Fundamental incompleto
- () Não estudou

06. Qual a escolaridade da sua responsável feminina?

- () Superior
- () Médio
- () Fundamental
- () Fundamental incompleto
- () Não estudou

07. Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?

- () Professor particular
- () Alguém da família
- () Ninguém
- () Outros

08. Com que frequência você estuda matemática fora da escola?

- () Todo dia
- () Somente nos finais de semana
- () Somente no período de prova
- () Somente na véspera da prova
- () Não estudo fora da escola.

09. Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?

- () Sempre
- () Às vezes
- () Poucas vezes
- () Nunca

10. Quais formas de atividades e/ou trabalho o seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?

- () Provas/Simulado
- () Testes semanais
- () Seminários
- () Pesquisas
- () Outra forma de Avaliação

11. Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática?

- () Motivado
- () Tranquilo
- () Preocupado
- () Indiferente

12. As aulas de Matemática despertam seu interesse em aprender os conteúdos ministrados?

- () Sim
- () Não
- () Poucas vezes

13. Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia?

- () Sim
- () Não
- () Poucas vezes

14. Seu professor de matemática demonstra domínio do conteúdo ministrado?

- () Sim
- () Não

15. Como você avalia as explicações do seu professor de matemática?

- () Ruim
- () Regular
- () Boa
- () Excelente

16. Qual o principal recurso usado pelo professor para apresentar os conteúdos de geometria espacial?

- () Quadro Branco.
- () Livro Didático.
- () Slides com o conteúdo.
- () Fichas com o conteúdo.
- () Dois os mais desses recursos.

17. Em qual série você estudou geometria espacial?

- () 1º ano
- () 2º ano
- () 3º ano

18. Quando foi ministrado o assunto geometria espacial, você chegou a estudar sobre sólido geométrico ESFERA?

- () Sim
- () Não

19. Quando você estudou ESFERA, a maioria das aulas

- () Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios.
- () Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos.

- () Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto.
 () Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo.
 () Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

20. Para praticar o conteúdo de ESFERA seu professor costumava

- () Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos.
 () Apresentar jogos envolvendo o assunto.
 () Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático.
 () Não propunha questões de fixação.
 () Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

Com base na experiência de quando você estudou o sólido geométrico ESFERA, preencha o quadro a seguir.

Conteúdos	Você estudou?		Nível de Dificuldade para Aprender				
	Sim	Não	Muito fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito difícil
Área Círculo e Comprimento da Circunferência							
Esfera e seus elementos							
Secção esférica							
Área da superfície da esfera							
Volume da esfera							
Cunha esférica							
Fuso esférico							

ANEXO B TCLE DOS ALUNOS



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA**

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada Diagnóstico do ensino de Esfera, sob a responsabilidade dos (as) pesquisadores Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kely Martins da Silva e orientando Gleidson Everton de Alcantara Marques, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa pretendemos traçar um diagnóstico do Ensino de Esfera a partir da opinião dos estudantes. A sua colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da mesma.

Ressaltamos que em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Você não terá gasto ou ganho financeiro por sua participação. Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o ensino de esfera

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: Maria de Lourdes Silva Santos e/ ou Ana Kely Martins da Silva e orientando por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: (91) 4009-9501

Belém, _____ de _____ 2017.

Assinatura do pesquisador

Eu, _____
aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Participante da pesquisa

ANEXO C QUESTIONÁRIO DO PROFESSOR



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
 CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
 PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) Professor (a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

01. Qual seu grau de formação acadêmica?

- Graduação
- Especialização
- Mestrado
- Doutorado

02. Você possui graduação em?

- Licenciatura em Matemática
- Outros

03. Qual o seu tempo de serviço como professor?

- Menos de 1 anos
- 1 a 5 anos
- 6 a 10 anos
- 11 a 15 anos
- Mais de 15 anos

04. Em quantas escolas você trabalha:

- 1
- 2
- 3
- 4 ou mais

05. Qual a sua carga de trabalho semanal?

- Abaixo de 20 hs
- 20 a 30 hs
- 31 a 40 hs
- acima de 40 hs

06. Em média, quantos alunos você atende por turma?

- Abaixo de 20
- 20 a 30

- () 31 a 40
() Acima de 40

07. Durante a sua graduação, você alguma disciplina na qual estudou Geometria Espacial?

- () sim
() não

08. Nos últimos 2 anos, você participou de alguma formação sobre o ensino de geometria espacial?

- () sim
() não

09. Você costuma investigar os conhecimentos prévios dos alunos antes de apresentar os conteúdos de geometria espacial relacionados a ESFERA?

- () sim
() não

10. Quantas aulas você gasta para ensinar os tópicos relacionados a ESFERA?

- () 1
() 2
() 3
() 4 ou mais

11. Quando você ensina Geometria Espacial (Esfera), as suas aulas começam: (Marque mais de uma opção caso julgue necessário)

- () Pela definição seguida de exemplos e exercícios
() Com uma situação problema para depois introduzir o assunto
() Com a criação de um modelo para situação e em seguida analisando o modelo
() Com jogos para depois sistematizar os conceitos
() Utilizando ferramentas tecnológicas para resolver problemas

12. Para que os alunos pratiquem os conteúdos ministrados, você costuma

- () Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos
() Apresentar jogos envolvendo o assunto
() Mandar resolver os exercícios do livro didático
() Não propor questões de fixação
() Mandar os alunos procurarem questões sobre o assunto para resolver

13. Quais os principais instrumentos você utiliza para avaliar o aprendizado de seus alunos? (Marque mais de uma opção caso julgue necessário)

- () Prova Escrita
() Seminários
() Resolução de Listas de Questões
() Pesquisas
() Outros instrumentos

14. Quais os principais problemas encontrados por seus alunos a resolução de questões de geometria espacial? (Marque mais de uma opção caso julgue necessário)

- () Visualização dos sólidos geométricos
- () Reconhecimento de elementos dos sólidos geométricos
- () Uso inadequado de fórmulas
- () Dificuldade de desenhar a imagem de um sólido a partir de dados fornecidos em uma questão

15. Como você avalia o conhecimento de seus alunos seus alunos em relação ao sólido geométrico ESFERA?

- () Muito Bom
- () Bom
- () Regular
- () Ruim
- () Muito Ruim

Com base em sua experiência como docente, sobre o ensino do sólido esfera, preencha o quadro a seguir.

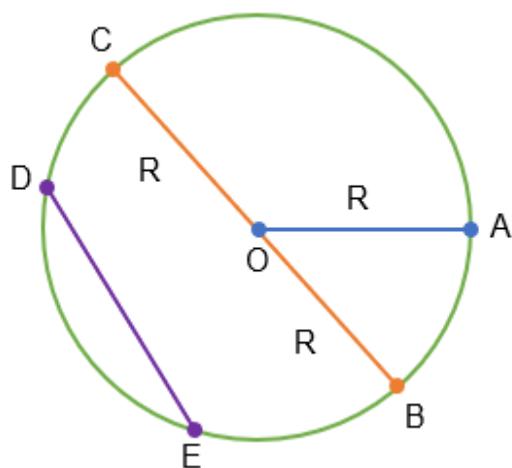
Conteúdos	Você ensina?		Nível de Dificuldade do Aluno para Aprender				
	Sim	Não	Muito fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito difícil
Área Círculo e Comprimento da Circunferência							
Esfera e seus elementos							
Secção esférica							
Área da superfície da esfera							
Volume da esfera							
Cunha esférica							
Fuso esférico							

ANEXO D OFICINA DE NIVELAMENTO

CÍRCULO E CIRCUNFERÊNCIA

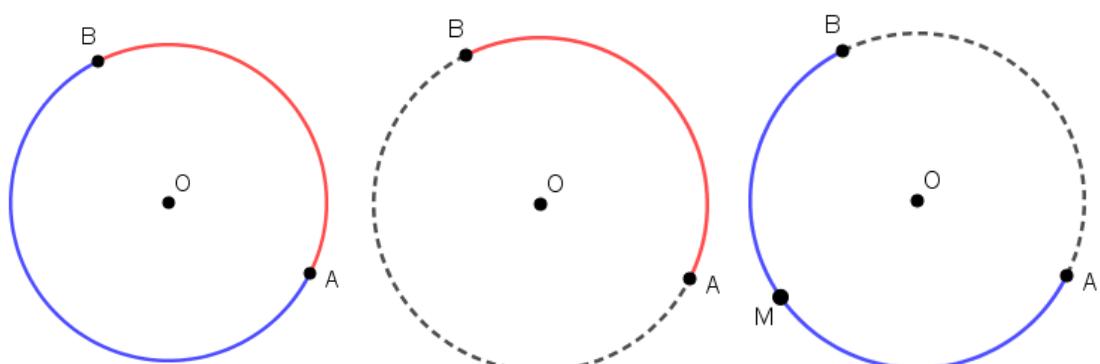
Chama-se de circunferência a linha formada por todos os pontos de um plano que estão a uma mesma distância R de um ponto fixo O desse plano.

Na circunferência a seguir, temos os seguintes elementos:



- ✓ O é centro da circunferência.
- ✓ \overline{DE} é uma corda;
- ✓ $\overline{OA} = R$ é um dos raios;
- ✓ $\overline{BC} = 2R$ é o diâmetro da circunferência.

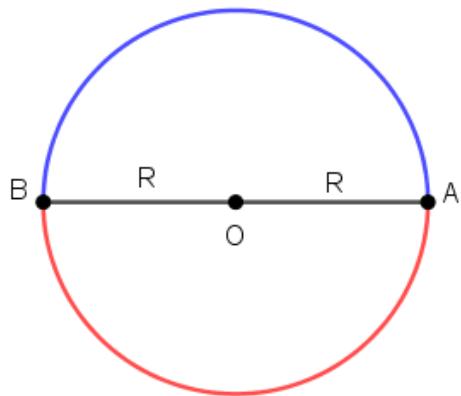
Considere dois pontos distintos sobre a circunferência. Esses pontos dividem a circunferência em duas partes chamadas de arcos de circunferência.



$Arco AB = Arco Menor$

$Arco BMA = Arco Maior$

Quando os pontos A e B são os extremos do diâmetro, cada arco será chamado de **semicircunferência**.

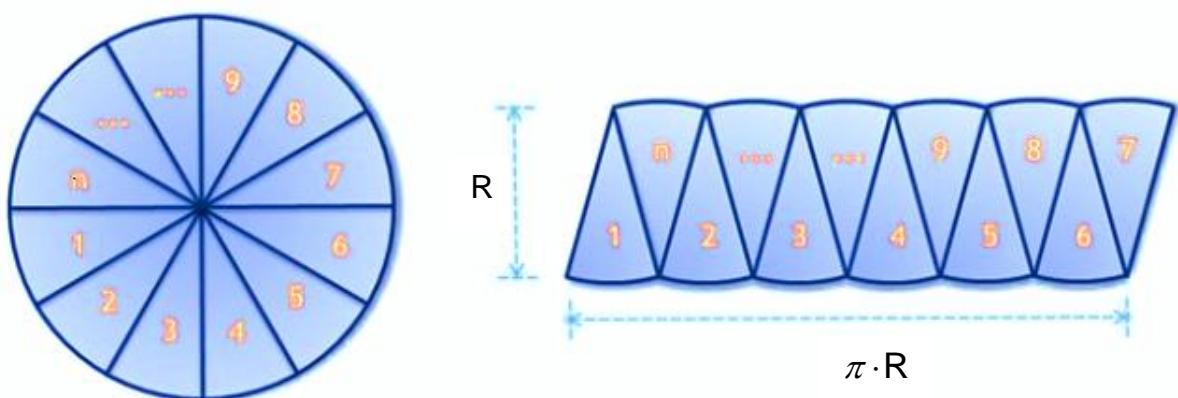


Em uma circunferência, a razão entre o valor do comprimento (C) e do diâmetro (d) é constante e aproximadamente igual 3,14. Essa constante é representada pela letra grega π (lê-se: Pí). Assim, considerando uma circunferência de raio R , seu comprimento é dado por

$$\frac{C}{d} = \pi \text{ ou } \frac{C}{2R} = \pi \text{ ou } C = 2\pi R$$

ÁREA DO CÍRCULO

Chama-se de círculo, a região do plano delimitada por uma circunferência. Considere um círculo dividido em n regiões iguais conforme a figura a seguir.

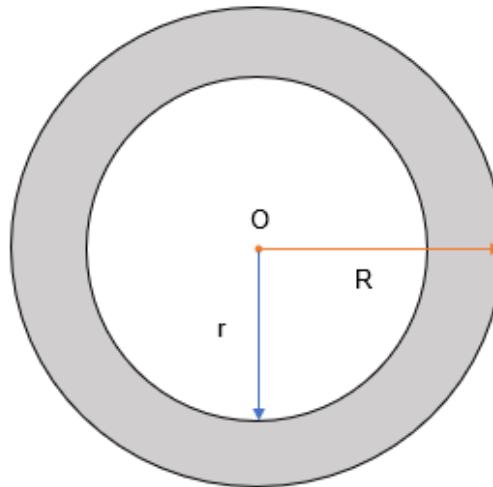


Arrumando essas n regiões como na figura, temos que a área da região pode ser calculada como a área de um paralelogramo ($A_{\text{paralelogramo}} = \text{base} \times \text{altura}$). Assim, a área do círculo é dada por

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot R \cdot R \text{ ou } A_{\text{círculo}} = \pi R^2$$

ÁREA DA COROA CÍRCULAR

Chama-se coroa circular a região limitada por dois círculos concêntricos.



Sendo R o raio do círculo maior e r o raio do círculo menor, a área da coroa circular é dada por

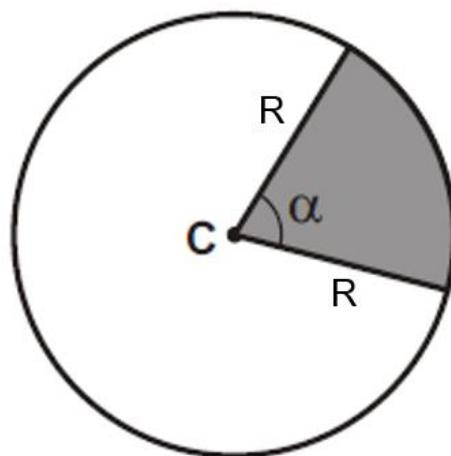
$$A_{\text{coroa}} = A_{\text{maior}} - A_{\text{menor}}$$

$$A_{\text{coroa}} = \pi \cdot R^2 - \pi r^2$$

$$A_{\text{coroa}} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

ÁREA DO SETOR CÍRCULAR

Chama-se setor circular a região do círculo delimitada por dois raios e um arco da circunferência.



Devido a proporcionalidade, a área do setor circular pode ser obtida de 2 formas:

a) Em função do comprimento do arco (ℓ)

Comprimento do Arco	Área
$2\pi R$	πR^2
ℓ	A_{setor}

Portanto, temos

$$\frac{A_{setor}}{\ell} = \frac{\pi \cdot R^2}{2 \cdot \pi \cdot R} \Rightarrow A_{setor} = \frac{\ell \cdot R^2}{2}$$

b) Em função do ângulo central α

Ângulo Central	Área
360°	πR^2
α	A_{setor}

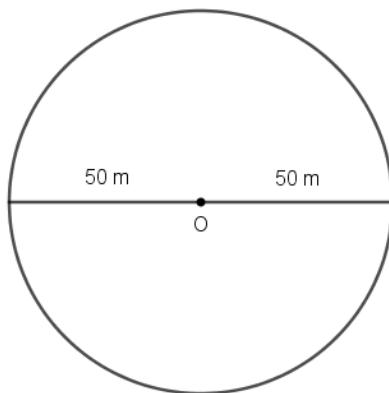
Portanto, temos

$$\frac{A_{setor}}{\pi \cdot R^2} = \frac{\alpha}{360} \Rightarrow A_{setor} = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot R^2}{360}$$

Caso o valor do ângulo central esteja em radianos, devemos lembrar que π radianos = 180° . Assim, substituindo na fórmula temos acima, obtemos

$$A_{setor} = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot R^2}{360} = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot R^2}{2 \cdot \pi} \Rightarrow A_{setor} = \frac{\alpha \cdot R^2}{2}$$

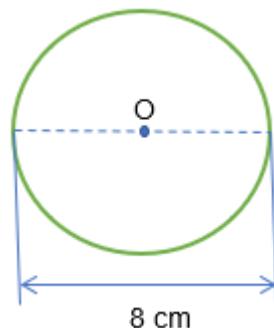
01. Na figura a seguir, temos uma praça circular de centro O, cujas as dimensões são dadas em metros.



A partir dos dados observados, responda aos itens:

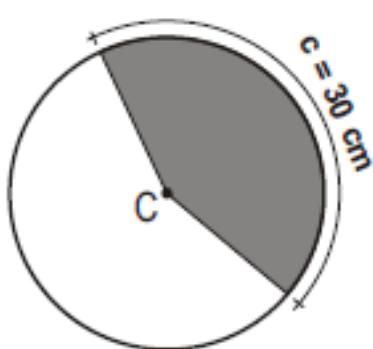
- Quanto vale o diâmetro dessa praça?
- Qual o valor, em m^2 , da área ocupada pela praça?

02. Qual área do círculo de centro O dado na figura?



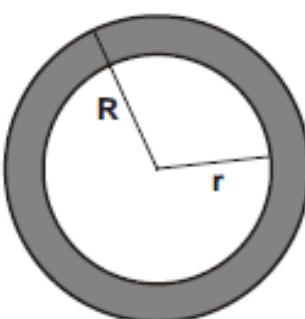
03. Determine o valor das áreas sombreada de cada figura a seguir:

a)



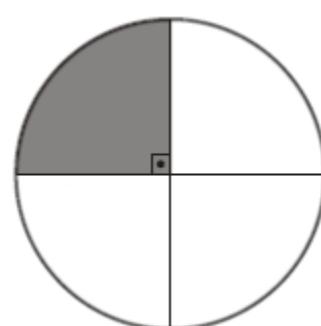
$$R = 5$$

b)



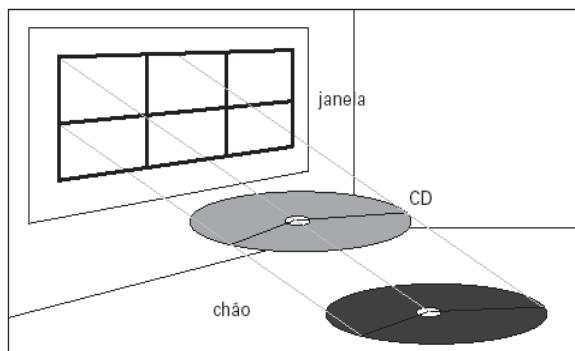
$$R = 8 \quad e \quad r = 4$$

c)



$$R = 4$$

04. Na figura estão indicados três raios de sol, um CD de músicas (círculo com um furo circular no meio) paralelo ao chão e a sombra do CD projetada no chão.

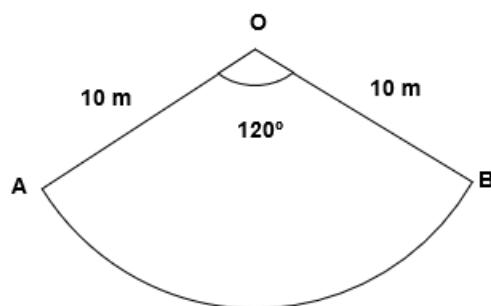


Sabendo-se que o diâmetro do CD mede 12 cm e que o diâmetro do furo mede 2 cm. Qual o valor da área da sombra? (Considere $\pi = 3$)

05. Uma pizza perfeitamente circular, foi dividida em 10 fatias iguais. Carlos comeu 2 desses pedaços. Sabendo que o raio da pizza era de 30 cm. Qual a área, em cm^2 , das fatias consumidas por Carlos?

06. Miguel costuma praticar caminhada todas as manhãs como forma de manter a saúde. Em um determinado dia, Miguel resolveu praticar essa atividade em uma praça com formato circular cujo raio era de 10 metros. Se Miguel, nesse dia, contornou a praça 5 vezes em sua caminhada. Qual a distância total que ele percorreu?

07. Na figura, o local onde será realizado um show. Para garantir a segurança do público presente o corpo de bombeiros necessita determinar a área total desse local a partir dos dados presentes na planta baixa do local (ver figura a seguir).



Qual a área do local onde vai ocorrer o show?



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem