



**TECNOLOGIAS COMPUTACIONAIS COMO
FERRAMENTAS PARA INSERIR CONHECIMENTOS DE
GEOMETRIA HIPERBÓLICA NO ENSINO FUNDAMENTAL**

Mestrando: Hiago Portella de Portella
Orientador: Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas



Professor, esse é o produto educacional da dissertação “Tecnologias computacionais como ferramentas para inserir conhecimentos de Geometria Hiperbólica no ensino fundamental.

As atividades introduzem ideias de Geometria Hiperbólica adaptadas ao Ensino Fundamental.



A partir do Disco de Poincaré, busca-se desenvolver um modelo de Geometria Hiperbólica, tendo como referência as noções básicas de Geometria Euclidiana através da percepção visual de alguns dos seus principais elementos.

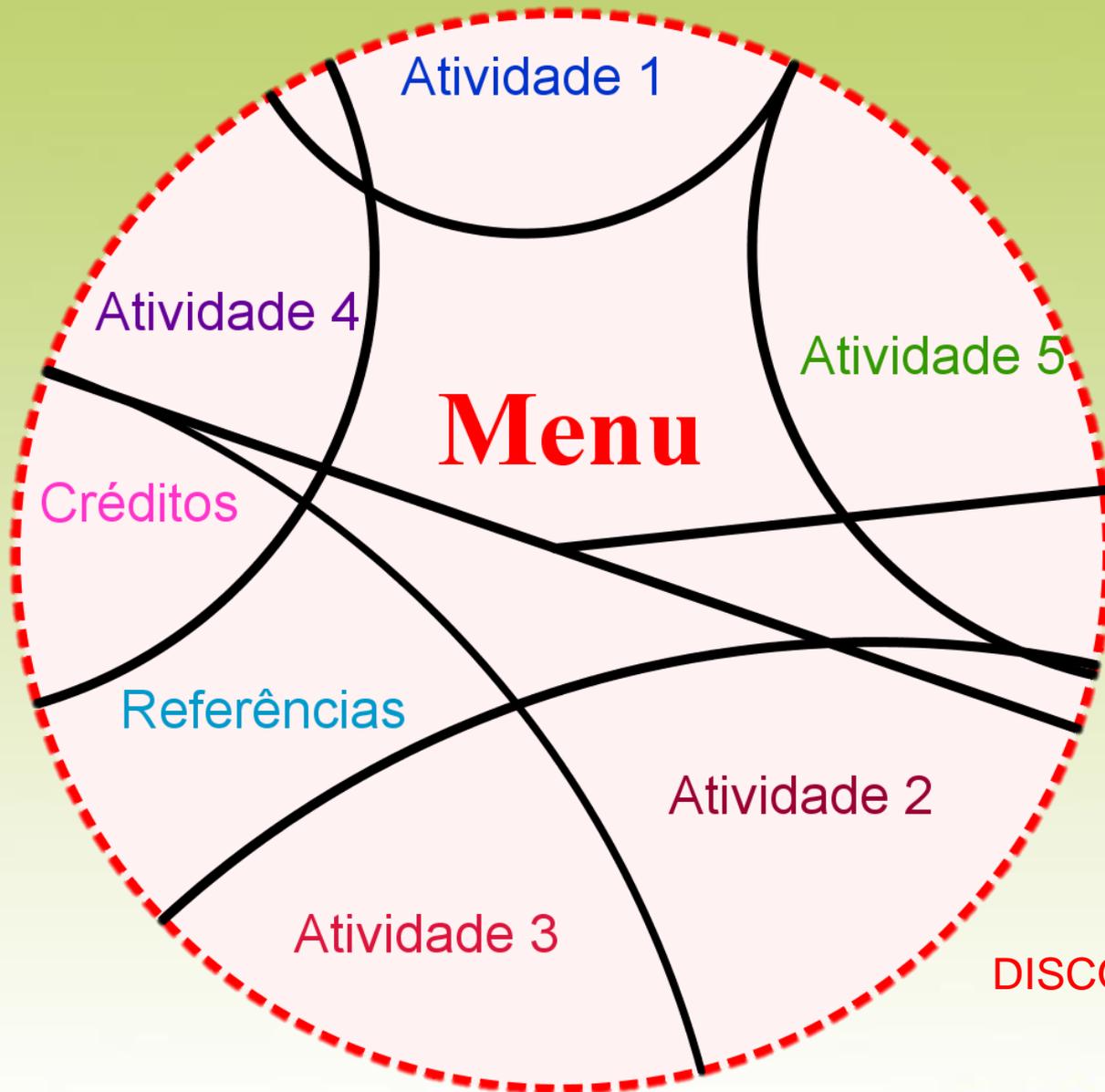
Tais atividades devem ser resolvidas no Software GeoGebra.



Observações

- As expressões escritas entre aspas (“...”) referem-se aos comandos do software GeoGebra;
- Clique sobre a atividade escolhida para explorá-la.





DISCO DE POINCARÉ

Atividade 1

Objetivos

- Construir o disco de Poincaré;
- Identificar os seus elementos.



Procedimentos

- 1) Abra um novo arquivo no GeoGebra;
- 2) Construa uma circunferência c , utilizando a ferramenta “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”;
- 3) Renomeie o ponto A para O e o ponto B para P , clicando com o botão direito do *mouse* sobre os pontos em questão e selecionando a opção “Renomear”;



- 4) Mude o estilo da linha da circunferência c para tracejado e a cor para vermelho, clicando sobre a circunferência c com o botão direito do *mouse*.

- 5) A seguir, selecione a opção “Propriedades”, clique em “Cor”, escolhendo vermelho e “Estilo”, escolhendo “Tracejado”.



Disco de Poincaré, com protocolo de construção do GeoGebra e seus elementos.

GeoGebra

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

Janela de Álgebra

- Cônica
 - $c: (x + 1.42)^2 + (y - 2.3)^2 = 14.05$
- Ponto
 - $O = (-1.42, 2.3)$
 - $P = (1.28, 4.9)$

Janela de Visualização

A linha tracejada chama-se Horizonte Hiperbólico.

Plano Hiperbólico

Protocolo de Construção

N.	Nome	Definição
1	Ponto O	
2	Ponto P	
3	Círculo c	Círculo por P com centro O
4	Texto texto1	
5	Texto texto2	

Entrada:



Atividade 2

Objetivos

- Construir no disco de Poincaré retas hiperbólicas, também chamadas *h-retas*;
- Compreender e reconhecer as *h-retas*.



Procedimentos

- 1) Abra um novo arquivo no GeoGebra;
- 2) Construir o Disco de Poincaré, conforme a Atividade 1;
- 3) Determine os pontos A e B , distintos, em c , utilizando a ferramenta “Ponto”, de modo que os pontos A , B e O não sejam colineares;



- 4) Em c , determine uma reta tangente a pelo ponto no A , e uma outra reta tangente b pelo ponto B , utilizando a ferramenta “Reta Tangente”;
- 5) As retas a e b , interceptam-se num ponto C . Determine o ponto C utilizando a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”, clicando sobre as respectivas retas;
- 6) Trace uma circunferência d , com centro em C e raio CB ;



- 7) Construa e , a reta tangente a circunferência d , em A ;
- 8) Construa f , a reta tangente a circunferência d em B ;
- 9) Determine o arco AB , utilizando a ferramenta “Arco Circular”;
- 10) Esconda a circunferência d , as retas a , b , e e f e o ponto C ;



Para esconder um objeto no GeoGebra clica-se com o botão direito do *mouse*, sobre o objeto em questão e a seguir, seleciona-se a opção “Exibir Rótulo”.

O arco g obtido é denominado ***h-reta g*** ou ***reta hiperbólica g*** .



h-reta construída no Disco de Poincaré, com protocolo de construção.

The screenshot displays the GeoGebra interface with the following components:

- Algebra Window (Janela de Álgebra):**
 - Cônica:**
 - c: $(x + 1.82)^2 + (y - 3.04)^2 = 14.88$
 - d: $(x - 2.7)^2 + (y - 5.29)^2 = 10.58$
 - g: 5.66
 - Ponto:**
 - A = (-0.29, 6.58)
 - B = (1.93, 2.13)
 - C = (2.7, 5.29)
 - O = (-1.82, 3.04)
 - P = (-3.68, 6.42)
 - Reta:**
 - a: $1.53x + 3.54y = 22.86$
 - b: $3.75x - 0.91y = 5.29$
 - e: $-2.98x + 1.29y = 9.36$
 - f: $-0.77x - 3.16y = -8.21$
- Visualization Window (Janela de Visualização):** Shows a dashed red circle representing the boundary of the Poincaré disk. A solid black arc labeled 'g' connects points A and B. Points O, P, and C are also visible.
- Construction Protocol (Protocolo de Construção):**

N.	Nome	Definição
1	Ponto O	
2	Ponto P	
3	Círculo c	Círculo por P com centro O
4	Ponto A	Ponto sobre c
5	Ponto B	Ponto sobre c
6	Reta a	Tangente a c passando por A
7	Reta b	Tangente a c passando por B
8	Ponto C	Ponto de interseção de a, b
9	Círculo d	Círculo por B com centro C
10	Reta e	Tangente a d passando por A
11	Reta f	Tangente a d passando por B
12	Arco g	ArcoCircular[C, A, B]

Atividade 3

Objetivos

- Criar uma nova ferramenta no GeoGebra, denominada Disco de Poincaré;
- Construir o Disco de Poincaré a partir da ferramenta própria, existente no GeoGebra.

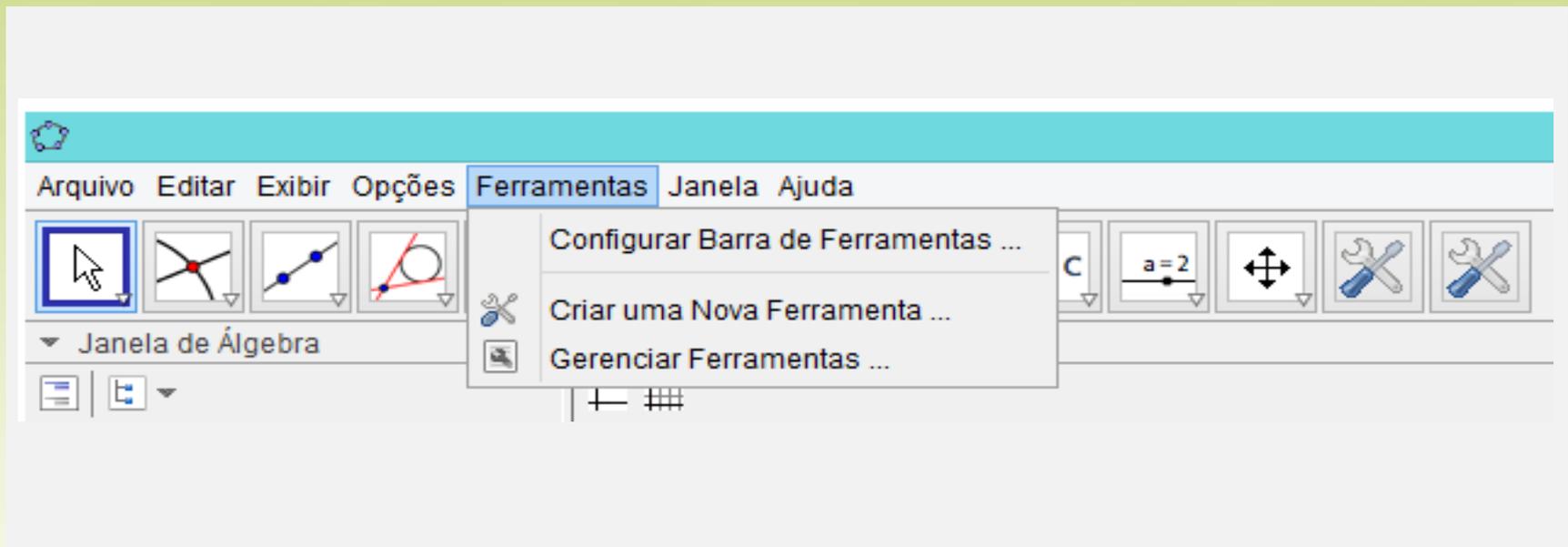


Procedimentos

- 1) Construa uma circunferência c de centro O passando pelo ponto A ;
- 2) Mude o estilo da linha da circunferência c para tracejado e a cor para vermelho, para indicar o horizonte hiperbólico;



3) Selecione a ferramenta “Criar uma Nova Ferramenta” na Barra de Ferramentas, na opção “Ferramentas”, conforme a figura;



4) Abrirá a seguinte caixa:

Criar uma Nova Ferramenta

Objetos Finais | **Objetos Iniciais** | Nome e Ícone

Selecione os objetos na construção ou escolha-os de uma lista

< Voltar | Próximo > | Cancelar



- 5) Escolhe-se como objeto final: círculo c : círculo por A com centro em O ;
- 6) Escolhe-se como objeto inicial: os pontos O e A ;
- 7) Clique no ícone “Nome e Ícone” e nomeia a ferramenta criada como “Disco de Poincaré”, a seguir, conclua esse item clicando no ícone “concluído”;



8) Retorne a barra de ferramentas e selecione a opção “Gravar configurações”, para gravar no Software a nova ferramenta. Escreva Disco de Poincaré no item “Nome da ferramenta” e seguir clique em “fechar”.



Dessa forma, está criada a nova ferramenta “Disco de Poincaré” no software GeoGebra.

GeoGebra

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

Janela de Álgebra

Janela de Visualização

Cônica

$c: (x + 3.04)^2 + (y - 5.12)^2 = 7.33$

Ponto

$A = (-2.84, 2.42)$

$O = (-3.04, 5.12)$

Gerenciar Ferramentas

Ferramentas

Disco de Poincaré: Ponto, Ponto

Apagar Abrir Gravar Como ... Compartilhar ...

Nome e Ícone

Nome da ferramenta: Disco de Poincaré

Nome do comando: DiscodePoincaré

Ajuda da ferramenta

Exibir na Barra de Ferramentas

Ícone ...

Fechar

Entrada:



Atividade 4

Objetivos

- Criar uma nova ferramenta no GeoGebra denominada *h-reta*;
- Construir no Disco de Poincaré, a partir de uma ferramenta própria, retas hiperbólicas.



Procedimentos

- 1) Desenhe o Disco de Poincaré, utilizando a ferramenta criada na atividade anterior;
- 2) Marque dois pontos C e D no interior do disco;
- 3) Utilize a ferramenta “Inversão”, clique no ponto C e no disco pontilhado, para criar o ponto refletido C', do ponto C;



- 4) Construir uma circunferência d , passando pelos pontos C , C' e B , utilizando a ferramenta “Círculo definido por Três Pontos” (por construção essa circunferência é ortogonal a c);



- 5) Construir o arco correspondente a reta hiperbólica, ou seja, a *h-reta*. Para isso, marque os pontos de intersecção, D e E, utilizando a ferramenta “Intersecção de Dois Objetos”, clicando nas duas circunferências;

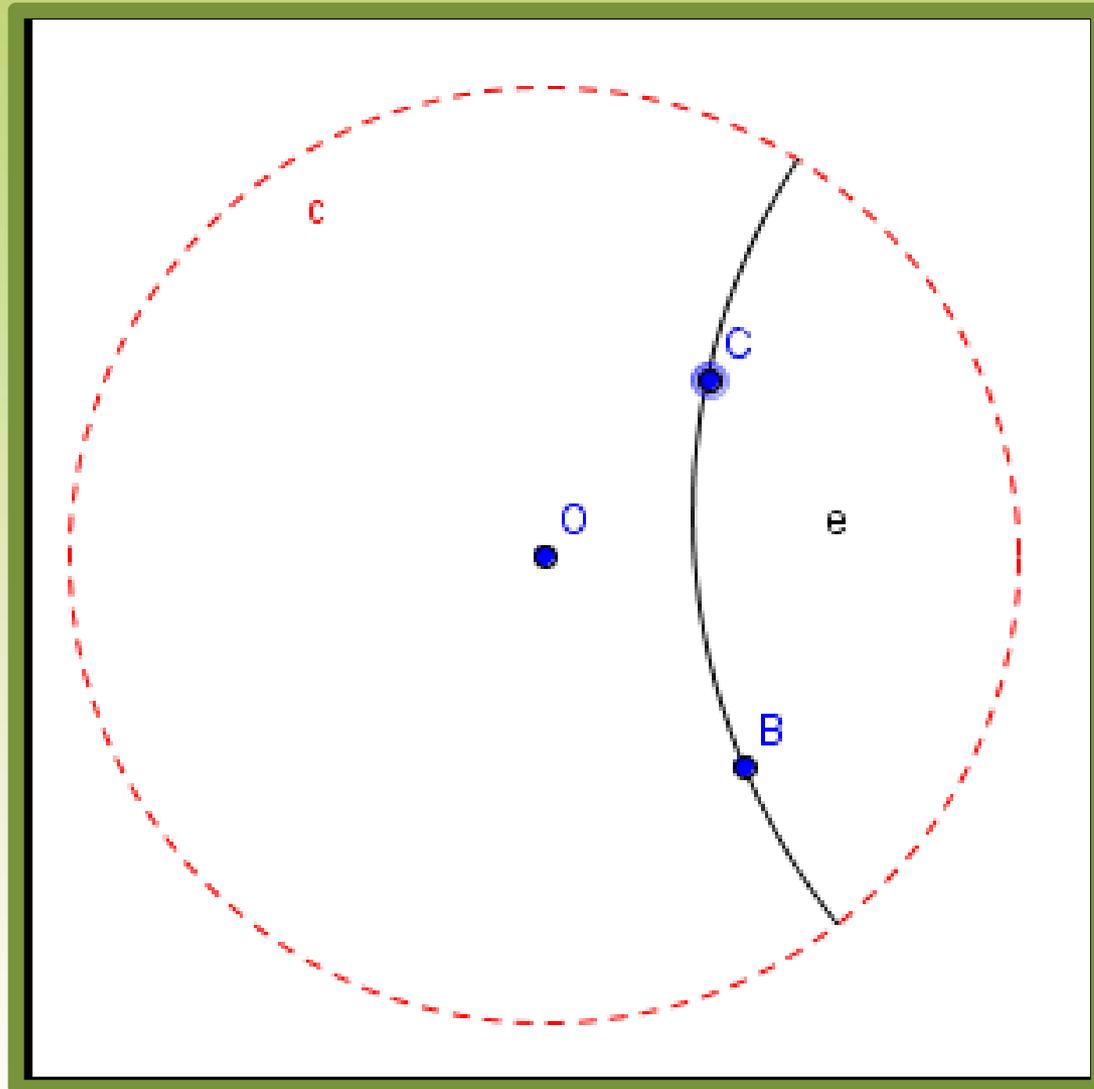
- 6) Para garantir que o arco fique no interior do disco, deve-se determinar a reta mediatriz *a*, dos pontos D e E utilizando a ferramenta “Mediatriz”;



- 7) Determinar o ponto G , de intersecção da mediatriz e a circunferência ortogonal construída, utilizando a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”, clicando na circunferência d e na reta mediatriz a ;
- 8) Utilizando a ferramenta “Arco circuncircular”, clique nos pontos D , E e G para construir o arco correspondente a reta hiperbólica, ou seja, a h -reta e ;
- 9) Esconda os pontos A , B , C' , D , E e G a reta mediatriz a e a circunferência ortogonal d .



Disco de Poincaré com a *h*-reta e desenhada.



Para criar a nova ferramenta *h-reta*:

- 10) A partir da *h-reta* construída, utilize a ferramenta “Criar uma nova ferramenta”, para automatizar a construção de *h-retas* no GeoGebra;



- 11) Escolher como objeto final: arco da circunferência ortogonal d ao horizonte hiperbólico (**arco e : arco circuncircular E, G, D**);
- 12) Escolher como objeto inicial: o Disco de Poincaré (**círculo passando por A com centro em O**) e os **pontos B e C** ;
- 13) Clique no ícone “Nome e Ícone” e nomeia a ferramenta criada como “*h-reta*”, a seguir, conclua esse item clicando no ícone “concluído”;



14) Retorne a barra de ferramentas e selecione a opção “Gravar configurações”, para gravar no Software a nova ferramenta. Escreva *h-reta* no item “Nome da ferramenta” e seguir clique em “fechar”.



Dessa forma, está criada a nova ferramenta “*h-reta*”.

The screenshot shows the GeoGebra interface with a geometric construction. The main workspace displays a dashed red circle *c* with center *O*. A solid black arc *e* is drawn between points *E* and *D* on the circle. A solid black line *a* is drawn perpendicular to the chord *ED* at its midpoint. Point *B* is the intersection of line *a* and the arc *e*. Point *C* is on the circle, and *C'* is its reflection across line *a*. A dashed red circle *d* is centered at *C'* and passes through *C*. Point *F* is the intersection of line *a* and circle *d*. Point *G* is the intersection of line *a* and the arc *e*.

The Algebra Panel (left) shows the following objects:

- Cônica
 - c*: $(x + 3.06)^2 + (y - 5.02)^2 = 7.33$
 - d*: $(x - 1.39)^2 + (y - 4.73)^2 = 12.59$
 - e* = 4.63
- Ponto
 - A* = (-2.86, 2.32)
 - B* = (-2, 3.7)
 - C* = (-1.8, 6.28)
 - C'* = (-0.15, 7.93)
 - D* = (-1.28, 7.06)
 - E* = (-1.56, 2.77)
 - F* = (4.94, 4.51)
 - G* = (-2.15, 4.96)
 - O* = (-3.06, 5.02)
- Reta
 - a*: $-0.28x - 4.3y = -20.72$

The Visualization Panel (right) shows the following objects:

- h reta* (highlighted): Ponto, Ponto, Círculo

The List of Objects Panel (bottom right) contains the following table:

N.	Nome	Definição
1	Ponto <i>O</i>	
2	Ponto <i>A</i>	
3	Círculo <i>c</i>	DiscoPoincaré[<i>O</i> , <i>A</i>]
4	Ponto <i>B</i>	
5	Ponto <i>C</i>	
6	Ponto <i>C'</i>	Reflexão (ou Inversão) de <i>C</i> em
7	Círculo <i>d</i>	Círculo por <i>C'</i> , <i>C</i> , <i>B</i>
8	Ponto <i>D</i>	Ponto de interseção de <i>c</i> , <i>d</i>
8	Ponto <i>E</i>	Ponto de interseção de <i>c</i> , <i>d</i>
9	Reta <i>a</i>	Mediatriz de <i>ED</i>
10	Ponto <i>F</i>	Ponto de interseção de <i>d</i> , <i>a</i>
10	Ponto <i>G</i>	Ponto de interseção de <i>d</i> , <i>a</i>
11	Arco <i>e</i>	ArcoCircuncircular[<i>E</i> , <i>G</i> , <i>D</i>]



Atividade 5

Objetivos

- Utilizar as ferramentas criadas nas duas atividades anteriores;
- Comparar o paralelismo de retas nas Geometrias Euclidiana e Hiperbólica.



Procedimentos

1. Com a ferramenta “*Disco de Poincaré*” construa um disco no GeoGebra;
2. Com a ferramenta “*h-reta*” construa uma *h-reta d* no Disco de Poincaré;
3. Determine um ponto E no interior do Disco de Poincaré, não coincidente com nenhum dos pontos anteriores;



4. Com a ferramenta “*h-reta*”, construa seis *h-retas* no Disco de Poincaré, passando pelo ponto E, de modo que não interceptem a *h-reta d*.

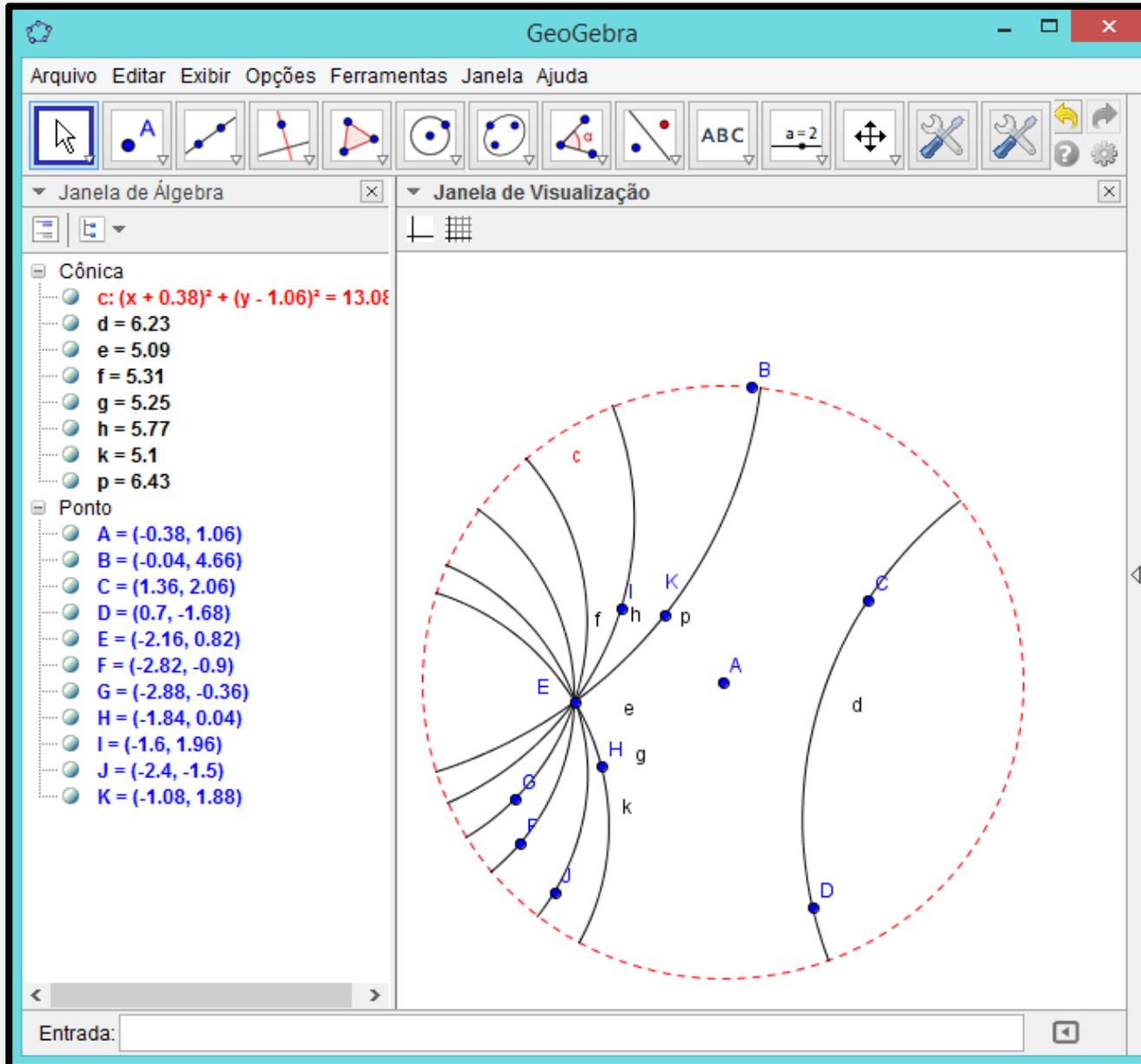


Questiona-se:

- a) Dadas uma h -reta d e um ponto E que não pertence a ela, quantas h -retas passam por E e não interceptam a h -reta d , dada?
- b) O que pode-se afirmar da posição das seis h -retas construídas em relação a h -reta d ?



Construção referente a atividade 5



O aluno deve concluir que pode-se traçar infinitas *h*-retas por E, e que as *h*-retas que passam pelo ponto E são todas paralelas a *h*-reta d.



Referências

- GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M. O.; FRANCO, V. S. **Geometria Euclidiana plana: um estudo com o software GeoGebra.** Maringá: Eduem, 2010.



Créditos

Autor:

Hiago Portella de Portella
hiagoportella@yahoo.com.br

Orientador:

Professor Dr. José Carlos Pinto Leivas
jcleivas@yahoo.com.br

Editoração

Maria do Carmo B. Trevisan
mctrevisan7@gmail.com

**Coordenação do Mestrado Profissionalizante em Ensino de
Física e de Matemática**

Professora Dra. Taís Dorow

