Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Tonival de Sarges Corrêa

Natanael Freitas Cabral

O ensino de matrizes por meio de Sequências Didáticas integrado ao ensino tradicional

Belém
2019

Tonival de Sarges Corrêa

Natanael Freitas Cabral

O ensino de matrizes por meio de Sequências Didáticas integrado ao ensino tradicional

Produto Educacional apresentado como requisito necessário para obtenção de título de Mestre em Ensino de Matemática para Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para ensino de matemática no ensino médio.

Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral

Belém
2019

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

CORRÊA, Tonival de Sarges e CABRAL, Natanael Freitas. O ensino de matrizes por meio de Sequências Didáticas integrado ao ensino tradicional. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2019.

ISBN:

Ensino de Matemática; Ensino por atividades; Ensino de Matrizes.

RESUMO

CORRÊA, T. S. **O ensino de matrizes por meio de Sequências Didáticas integrado ao ensino tradicional.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Abaetetuba, 2019.

Este estudo tem como objetivo investigar a aprendizagem de alunos do Ensino Médio sobre dificuldades no assunto Matrizes. A pesquisa aqui realizada se classifica como exploratória e descritiva quanto aos fins, e pesquisa bibliográfica e de campo quanto aos meios. Foi realizada inicialmente uma pesquisa bibliográfica, considerando-se que a partir das pesquisas e documentos já existentes sobre as dificuldades de aprendizagem nas aulas Matemática, mais especificamente no ensino de Matrizes foi possível contribuir no estudo aqui proposto. A pesquisa de campo foi realizada em uma sala de aula do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Abaetetuba. Para coleta de dados foi aplicado um questionário composto por 07 questões voltadas para as dificuldades de aprendizagem nas aulas de Matemática, enfocando o ensino de Matrizes. Para análise dos dados foi realizada uma abordagem quantitativa, utilizando, de estatística descritiva. No decorrer do estudo pretende-se destacar a complexidade do conteúdo sobre Matrizes e as dificuldades enfrentadas por muitos alunos, constatando-se que os alunos acreditam que a sequência didática pode melhorar seu desempenho na aprendizagem de Matrizes, destacando-se a necessidade de contextualizar a realidade dos mesmos.

Palavras-Chave: Matemática. Ensino de Matemática. Sequência Didática. Matrizes.

ABSTRACT

CORRÊA, T. S**. Matrix teaching through Didactic Sequences integrated with traditional teaching.**Dissertation (Professional Masters in Mathematics Teaching) - University of the State of Pará, Belém, 2018.

This study aims to investigate the learning of high school students about difficulties in Matrix subjects. The research carried out here is classified as exploratory and descriptive in terms of purposes, and bibliographical and field research on means. A bibliographical research was carried out initially, considering that from the researches and already existent documents on the difficulties of learning in the Mathematics classes, more specifically in the teaching of Matrices it was possible to contribute in the study proposed here. Field research was conducted in a high school classroom of a state school in the municipality of Abaetetuba. For data collection, a questionnaire composed of 07 questions focused on learning difficulties in Mathematics classes was applied, focusing on Matrix teaching. To analyze the data, a quantitative approach was used, using descriptive statistics. In the course of the study, we intend to highlight the complexity of the content about Matrices and the difficulties faced by many students. It is verified that the students believe that the didactic sequence can improve their performance in learning Matrices, highlighting the need to contextualize the their reality.

Keywords: Math. Teaching Mathematics. Didactic Sequence. Matrices.

AGRADECIMENTOS

É com grande satisfação que materializo este sonho, finalizando mais uma etapa de minha vida com essa conquista, dedico-a, primeiramente à Deus, por conceder a persistência e forças necessárias ao longo desse processo, pela força em todos os momentos de nossas vidas, por meio da fé para enfrentarmos o desafio de alcançar nossos sonhos, à Nossa Senhora de Nazaré que concretizou essa graça, à minha mãe Valdete de Sarges Corrêa que nunca mediu qualquer esforço em incentivar nosso processo de educação.

Reafirmo que, toda conquista no âmbito educacional e profissional na área da matemática devo à ela, à minha esposa Selma Araújo da Silva Corrêa que desde nossa união esteve comigo apoiando e incentivando nossa caminhada. Aos meus irmãos Toniette, Toniane e Tomaz, meu pai falecido Antônio e amigos que contribuíram com essa vitória, que apoiaram e incentivaram a pesquisa, sem os quais ficaria difícil alcançar todos os objetivos na caminhada. Aos colegas de classe pelo companheirismo e persistência ao longo do nosso processo de formação, ao corpo docente do mestrado profissional em ensino de matemática pelos ensinamentos, a oportunizar a vivência de uma educação voltada para melhorar o processo de ensino-aprendizagem. Agradeço a paciência e dedicação de todos. E a todos que contribuíram com essa grande realização.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática no ensino básico tem papel crucial na formação do pensamento e raciocínio dos alunos, além do que, é um mecanismo que auxilia em suas vidas, nas tarefas das mais variadas formas, entretanto, ela também é vista como uma disciplina difícil de ser ensinada por parte de professores e assimilada por parte dos alunos. Na pesquisa realizada por Novello et al. (2009) foi verificado que o ensino de Matemática tem se caracterizado pela repetição, memorização de fórmulas e reprodução de algoritmos, o que torna o processo monótono.

A transmissão de conteúdo pelos professores com base no quadro e pincel e nos livros didáticos prevalece como metodologia, o que torna o estudante um sujeito passivo em seu próprio processo de aprendizagem. Os resultados têm sido o desempenho insatisfatório dos alunos nas avaliações e quando colocados diante da resolução de problemas matemáticos. Como bem afirma Sanchez (2004 p. 174) as dificuldades apresentadas são multifacetadas:

> Dificuldades em relação ao desenvolvimento cognitivo e à construção da experiência matemática; do tipo da conquista de noções básicas e princípios numéricos, da conquista da numeração, quanto à prática das operações básicas, quanto à mecânica ou quanto à compreensão do significado das operações. Dificuldades na resolução de problemas, o que implica a compreensão do problema, compreensão e habilidade para analisar o problema e raciocinar matematicamente. Dificuldades quanto às crenças, às atitudes, às expectativas e aos fatores emocionais acerca da matemática. Questões de grande interesse e que com o tempo podem dar lugar ao fenômeno da ansiedade para com a matemática e que sintetiza o acúmulo de problemas que os alunos maiores experimentam diante do contato com a matemática. Dificuldades relativas à própria complexidade da matemática, como seu alto nível de abstração e generalização, a complexidade dos conceitos e algoritmos. Atrasos cognitivos generalizados ou específicos. Problemas linguísticos que se manifestam na matemática; dificuldades de atenção e motivacionais; dificuldades na memória, etc. Dificuldade originada no ensino inadequado ou insuficiente seja porque à organização do mesmo não está bem sequenciado, ou não se proporcionam elementos de motivação suficientes; seja porque os conteúdos não se ajustam às necessidades e ao nível de desenvolvimento do aluno, ou não estão adequados ao nível de abstração, ou não se treinam as habilidades prévias; seja porque a metodologia é muito pouco motivadora e muito pouco eficaz. (SANCHEZ, 2004 p. 174)

As dificuldades surgem à medida que aumentam as situações vivenciadas em sala de aula pelo aluno. Nesse momento, percebe-se então a notória importância desses saberes básicos para um bom aproveitamento do aluno ao longo da educação básica e fundamental a disciplina de Matemática. Com isso, deve-se lembrar que as dificuldades de aprendizagem no ensino da Matemática podem ser decorrentes da forma de transmissão dos conteúdos pelos professores que, em muitos casos, não apresentam nenhum sentido para os alunos, tornando-se um processo enfadonho e cansativo.

Acredita-se que o ensino predominante permeado de conservadorismos pode ser um fator relevante, uma vez que os professores ensinam através de definições e exercícios de fixação, da maneira como muitos livros didáticos trazem. Autores como Sanches (2002) e D'Ambrósio (1999) defendem que para se obter uma aprendizagem mais significativa dos assuntos de matemática, é imprescindível que saibamos manipular a natureza dos conteúdos de matemática.

Nas respectivas ordens citadas acima, o primeiro autor ainda enfatiza a importância do conhecimento expressivo dos conceitos, princípios, procedimentos e estratégias em resolver problemas de matemática. Enquanto D'Ambrósio (1999) enfatiza a importância em recuperar a presença de ideias matemáticas em todas as ações humanas devido à necessidade de descobrir que há uma forma matemática de estar no mundo.

Enfocando no ensino da álgebra, pode-se dizer que se caracteriza pela possibilidade de fazer com que o aluno desenvolva sua capacidade de abstração e generalização, todavia, na maioria das vezes se caracteriza como uma disciplina mecanizada e sem importância para o mundo fora da escola. Sobre o assunto, Lins (2004) elucida que há:

> Um grande estranhamento entre a matemática da escola, dita oficial e a matemática da rua, da vida real, o que justifica o fracasso de tantos em relação à matemática escolar, não por não conseguirem aprender, mas por apresentarem como que um sintoma de recusa em se aproximar das coisas estranhas da sala de aula. (LINS, 2004, p. 109)

Deste modo, acaba sendo entendido como um mero cálculo com letras, fazendo com que o processo de ensino e aprendizagem não tenha resultados positivos. Nas palavras de Santomé (2002, p. 161): "Em muitas ocasiões os conteúdos são contemplados pelo alunado como fórmulas vazias, sem sequer a compreensão de seu sentido". Provavelmente esse seja o motivo que tenha feito com que o estudo da álgebra acaba se tornando rotineiro, fazendo com que os alunos não tenham sucesso no aprendizado.

O fato é que a construção da linguagem algébrica, na maioria das vezes, não tem relação com o cotidiano dos alunos, se limitando à prática de resolver problemas e cálculos mecanizados. Dessa forma, acredita-se que modificar essa prática de ensino é fator fundamental para reduzir as dificuldades do processo de ensino e aprendizagem. Dentre os conteúdos algébricos, as matrizes se apresentam como uma das mais complexas sob o ponto de vista do alunado. Fator que pode ser percebido por experiência própria deste pesquisador, no decorrer de sua história enquanto professor e enquanto aluno.

Desde a época, enquanto aluno do antigo Convênio Ciências Exatas (CE), quando este discente se deparou pela primeira vez com o assunto, não conseguiu uma compreensão significativa de tal tópico da Matemática, supondo que essa falta de aprendizagem se deu por diversos motivos, entre os quais pode-se destacar: falta de dedicação com o assunto, falta de livros didáticos, situação econômica que não garantia a compra de tais livros, ausência do estado com relação à educação, entre outros.

Quando aprovado para o curso de Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Federal do Pará, Campus de Abaetetuba, novamente reencontrou as Matrizes inseridas nas disciplinas básicas e específicas do curso, tais como: Fundamentos de Matemática 2 (FM2), Álgebra Linear e Cálculo Diferencial e Integral. Já com certo nível de maturidade no assunto, pois além de estudar no ensino normal, estudava para passar no vestibular, teve um vislumbre de como se dava a essência e as aplicações de uns dos assuntos mais importantes da Matemática que engloba os ensinos Médio e Superior, com aplicações nas mais variadas áreas de conhecimento, identificando sua presença não somente na Matemática, mas, também, na Engenharia, Biologia, etc.

Assim, o conteúdo de Matrizes começou a intrigar este pesquisador desde cedo, fazendo-o perceber como ele era importante, percebendo que a Educação Básica não demonstra seu real significado de aplicação, o que faz parecer ser um conteúdo desnecessário e complexo.

Enquanto professor, nesses dezesseis anos lecionando como parte do quadro efetivo estadual nos ensinos Fundamental II e Médio, deparou-se com alunos apresentando dificuldades semelhantes, as quais este mestrando sentiu que provavelmente esse problema era decorrente do próprio processo de ensino e aprendizagem do assunto, que é apresentado de acordo com o livro didático utilizado pela escola, com suas definições, propriedades, exemplos de aplicação e listas de exercícios para assimilação do mesmo. Ou seja, de forma mecanizada, sem contextualizar ao cotidiano do aluno ou mesmo fazê-los entender o porquê de estudar Matrizes.

É nesse sentido que justifica-se a escolha por essa temática, buscando-se, por meio de uma Sequência Didática, trazer subsídios para o ensino de Matrizes, considerando uma turma de 2º (segundo) ano do Ensino Médio. Faz-se importante mencionar que trata-se de uma assunto de relevância social, considerando que envolve a busca de estratégias para a promoção de um ensino de qualidade, um direito de todos os estudantes. Considera-se para efeito de objetivo a interceptação e análise da promoção metodológica determinada por uma sequência didática e a descrição deste acontecimento dentro de uma lógica psicopedagógica projetada para a proximidade do cotidiano dos alunos, conhecida pela própria vivência ao longo dos anos, com um povo rico em cultura.

Trata-se, ainda, de um estudo de relevância profissional, visto que pode trazer subsídio para professores de Matemática aprimorarem a forma de ensino do conteúdo de Matrizes, tornando a aprendizagem dos alunos mais significativa e interessante, sendo de total relevância o método reproduzido.

A partir disso, foram traçados como objetivos específicos: Aplicar um questionário socioeconômico com alunos do 2º ano do Ensino Médio, com vistas a traçar seu perfil; analisar a percepção de aluno do 2º ano do Ensino Médio sobre dificuldades na aprendizagem de Matrizes; e selecionar atividades a serem incluídas na sequência didática proposta, considerando sua contribuição para uma aprendizagem significativa.

Com tudo, seu capítulo 1 de pressupostos metodológicos dispões das principais informações destacadas em outros trabalhos acadêmicos sobre a percepção da sequência didática e os processos de análise dos dados apontando para a perspectiva da engenharia didática, fazendo jus conhecimentos científicos na realização de um projeto preciso.

Já o segundo capítulo segue o objetivo de trabalhar as análises preliminares das práticas de ensino de matemática no ensino médio dentro do contexto de Matrizes, destacando o ensino de matemática como um todo no ensino médio, numa perspectiva nacional, as tecnologias empregadas nas aulas, o ensino de matrizes concluindo sua síntese através da disposição dos resultados discutindo-os e que se confere uma conclusão.

O terceiro capítulo corresponde a análise da concepção e prosseguimentos da sequência didática estabelecida na proposta de ensino de Matrizes, destacando o rigor matemático e as principais operações com Matrizes e descrição de todos os princípios inerentes a esta.

O capítulo quatro faz jus às seis atividades elaboradas no intuito de perpassar os principais objetivos esperados, o material empregado e os seus respectivos procedimentos de implementação.

O capítulo cinco acarreta a essência da descrição da experiência, muito importante para a elaboração de um trabalho conciso, completo. Restaura o momento perpassado e fortalece a concepção do trabalho aplicado em sua prática.

O sexto capítulo destaca os indicativos de aprendizagem das atividades perpassadas, estabelecendo orientações através de comentários interpolados pela descrição e apresentação destes indícios.

Nas considerações finais compreende a síntese da proposta, estabelecendo suas principais avaliações da experiência promovida em razão do conhecimento gerado e emitido no cotidiano de muitos alunos e professor, na tentativa de finalizar a proposta de maneira clara e precisa das dificuldades encontradas para a realização da sequência devido à falta de interesse por parte dos estudantes principalmente no que diz respeito à finalização das atividades.

1 PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Esta pesquisa consta de uma sequência didática que será aplicada numa turma de 2º ano do ensino médio em uma escola estadual do município de Abaetetuba.

1.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste item destaca-se a importância de uma boa elaboração de sequência didática para aprimoramento do processo de ensino e aprendizagem. No caso deste estudo, tem-se a busca de trazer o conteúdo de matrizes de forma significativa para alunos do 2º ano do Ensino Médio, replicando algumas atividades propostas por Santos (2008) que podem ser encontradas no tópico sobre o ensino de Matrizes: revisão do estado da arte, poderão ser observadas mais a diante.

Zabala (1998) destaca que uma sequência didática compreende os princípios e métodos utilizados pelos professores para permitir a aprendizagem dos alunos. Essas estratégias são determinadas em parte no assunto a ser ensinado e em parte pela natureza do aprendiz.

Por essa razão, compreende-se que sugestões para projetar e selecionar os métodos de ensino devem levar em conta não só a natureza do assunto, mas também a forma como os alunos aprendem e o contexto em que vivem, buscando demonstrar a utilidade dos conteúdos em seu cotidiano. Na escola de hoje, a tendência é que os docentes busquem incentivar a criatividade de seus alunos.

Conforme Cristóvão (2002) é um fato conhecido que o avanço humano vem através do raciocínio e que esse raciocínio e pensamento original aumentem a criatividade. Por isso, as abordagens para o ensino podem ser amplamente classificadas como centradas nos professores e centradas no aluno. Na abordagem centrada no professor para a aprendizagem, os professores são a principal figura da autoridade neste modelo.

Como lembra Cristóvão (2007) os alunos são vistos como "vasos vazios" cujo principal papel é receber passivamente informações (através de palestras e instruções diretas) com o objetivo final de testes e avaliações. Assim, é o papel principal dos professores transmitir o conhecimento e a informação aos seus alunos.

Ou seja, o papel principal do professor é capacitar e facilitar a aprendizagem dos alunos e a compreensão geral do material.

Todavia, ao contrário desse papel predominante do professor e dessa concepção de alunos como “vasos vazios”, neste estudo pretende-se considerar que alunos de Ensino Médio já trazem consigo uma bagagem teórica e de vivência em seu meio social que precisam ser consideradas, demonstrando que o conteúdo a ser aprendido não é apenas um conjunto de símbolos matemáticos que em nada contribuirão para suas vidas, afastando-se do tradicional modelo de ensino com conceitos distorcidos, linguagem de difícil entendimento, poucas contextualizações e muitos exercícios repetitivos, o que torna inadequado o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos alunos.

Faz-se importante mencionar que a aprendizagem do aluno é medida através de formas de avaliação formal e informal, incluindo projetos grupais, carteiras de estudantes e participação em classe. Ensino e avaliações estão conectados; a aprendizagem do aluno é medida continuamente durante a instrução do professor (SILVA; BERNARDI, 2009). Por essa razão, os métodos de ensino comumente utilizados podem incluir participação em turma, demonstração, recitação, memorização ou combinações destes. Um dos principais meios de se obter todas essas características no processo de ensino, segundo Cristovão (2007) está em uma sequência didática adequada ao tipo de aula e seus respectivos alunos.

Diante disso, a sequência didática proposta nesta pesquisa busca uma aprendizagem significativa dos alunos, buscando o seu interesse na aprendizagem do conteúdo de Matrizes, partindo do pressuposto que, para tanto, eles precisam conhecer a importância e a aplicação desse conteúdo no mundo real, deixando que ele perceba que mais do que um conteúdo de teórico de cálculos vazios, as Matrizes se configuram como um dos mais importantes conceitos matemáticos. Nesse sentido, a sequência didática proposta seguirá o cronograma apresentados no Quadro 1.

Quadro 2 - Cronograma de atividades para aplicação da sequência didática

Encontro	Atividade	Tempo	Datas
1º	**Questionário Socioeconômico**	**45 min**	**22/02/2018**
2º	**Atividade 1 -** Conceito de matriz.	**20 min**	**10/05/2018**
3º	**Atividade 2 –** Conceito de adição de matrizes.	**20 min**	**10/05/2018**
4º	**Atividade 3 –** Conceito de multiplicação de um escalar por uma matriz.	**20 min**	**10/05/2018**
5º	**Atividade 4 –** Conceito de multiplicação de matrizes.	**20 min**	**10/05/2018**
6º	**Atividade 5 –** conceito de transposta de uma matriz.	**20 min**	**10/05/2018**
7º	**Atividade 6 –** conceito de matriz Inversa.	**20 min**	**10/05/2018**

Fonte: Dados primários da pesquisa, 2018.

Para a construção da sequência didática sobre o Ensino de Matrizes, adotamos os seguintes tópicos: Definição de matrizes, conceituação formal de matrizes, classificação de matrizes e operações com matrizes (adição, multiplicação de um escalar por uma matriz e multiplicação de matrizes). Adotaremos uma sequência composta de 6 atividades envolvendo os tópicos mencionados, sendo que cada atividade da sequência conterá cerca de 5(cinco) questões sociais e contextualizadas.

Além disso, foi utilizado um questionário estruturado por meio do qual buscou-se traçar o perfil dos alunos do 2º ano do Ensino Médio que participaram desta pesquisa, bem como para verificar sua percepção sobre as dificuldades de aprendizagem no conteúdo de Matrizes.

1.2 PROCESSO DE ANÁLISE DOS DADOS: ENGENHARIA DIDÁTICA

De acordo com Artigue (1988), o termo engenharia didática é empregado para o trabalho didático comparável ao do engenheiro que se apoia em seus conhecimentos científicos para realizar um projeto preciso, contudo encontra-se obrigado a utilizar objetos mais complexos do que os empíricos da ciência, enfrentando na prática problemas que a ciência não quer ou ainda não tomou para si. A autora destaca ainda características gerais da engenharia didática. Primeiramente a caracteriza por um esquema baseado na concepção, na realização, na observação e na análise de sequência de ensino. A engenharia didática pode ser distinguida em micro-engenharia e em macro-engenharia. A micro-engenharia tem em vista o estudo de determinado assunto levando em consideração a complexidade dos acontecimentos de sala de aula. A macro-engenharia compõe a complexidade da micro-engenharia com os acontecimentos relacionados ao ensino/aprendizagem, tornando-se assim mais difícil de ser realizada.

Outras características citadas pela autora Artigue (1988) são as pesquisas baseadas nas experimentações em sala de aula, pelo registro em que se situa e pelo método de validação que lhe são associados, sendo a realização desta metodologia em quatro fases: análises preliminares; concepção e análise a priori; experimentação; análise posteriori e validação. Desta maneira, a primeira fase trata-se das análises preliminares que são feitas através de considerações acerca do quadro teórico didático e dos conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o tema em questão. Essas análises são feitas, principalmente, para fundamentar o entendimento de engenharia, sendo aprofundadas no decorrer do trabalho e podem acontecer ou não, dependendo do objetivo da pesquisa, este que também determinará a profundidade dessa análise. Na segunda fase, a concepção e análise a priori, o pesquisador se baseia nas análises preliminares para delimitar o número de variáveis relacionadas ao sistema sobre o qual o ensino pode atuar, as chamadas variáveis de comando.

Tendo em vista facilitar a análise de uma engenharia, a autora distingue dois tipos de variáveis de comando:

> Macro – didáticas ou globais: relativas à organização global da engenharia; Micro – didáticas ou locais: relativas à organização de uma sessão ou de uma fase, umas e outras, podendo ser variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático visado pelo ensino. (ARTIGUE, 1988, p. 288).

De acordo com a consideração acima, pode-se afirmar que a validação constitui uma originalidade dentro da engenharia didática, pois é fundamentalmente interna, instaurada a partir dessa fase. A autora ressalta ainda que:

> O objetivo da análise a priori é determinar no que as escolhas feitas, permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso ela vai se basear em hipóteses e são essas hipóteses cuja validação estará, em princípio indiretamente em jogo, na confrontação entre análise a priori e a análise a posteriori a ser operada na quarta fase (ARTIGUE, 1988, p. 293).

Desta forma, entende-se os princípios capazes de dar significado às análises sob um determinado objetivo, deliberando, com isso, o possível controle dos comportamentos, porém baseados em hipóteses norteadoras sob uma perspectiva que divide as análises em etapas como as citadas anteriormente.

A análise a priori suporta uma parte descritiva e outra previsível, de acordo com Artigues (1988), trata-se de uma análise focada na situação adidática que se quis estabelecer. Após essa fase inicia-se a análise a posteriori, esta que incide na última fase e se baseia nos dados recolhidos pela experimentação. Ainda nessa fase é realizado o tratamento dos dados relacionados à análise posteriori. A validação das hipóteses levantadas no início da engenharia resulta do confronto entre as análises a priori e posteriori.

Com a transcrição dessas fases que esquematizam a engenharia didática, a autora deixa transparecer os novos caminhos abertos por essa metodologia às práticas educativas em sala de aula, tendo a própria prática de ensino como objeto de investigação, deixando-a sujeita a modificações na medida em que são observados os resultados.

Pode-se dizer que trata-se de uma metodologia de pesquisa que tem como objetivo analisar as situações didáticas e caracteriza-se por sua forma peculiar de organização dos procedimentos metodológicos do estudo em educação matemática que considera a dimensão teórica e a experimental.

Assim, fica evidente a relevância da engenharia didática como uma metodologia facilitadora e adequada para organizar a pesquisa no contexto da didática, vale ressaltar a contribuição dessa proposta metodológica na formação do professor, assim como para a produção do conhecimento do mesmo, em razão da reflexão e das dificuldades e dos empecilhos enfrentados.

2 ANÁLISES PRELIMINARES: AS PRÁTICAS DE ENSINO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO E O CONTEÚDO DE MATRIZES

O presente tópico do trabalho vem com o intuito de perpassar as informações adquiridas e interpretadas da pesquisa, que envolvem a percepção das práticas de ensino de matemática no ensino médio e o conteúdo de matrizes dentro das análises preliminares.

2.1 ENSINO DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

No Brasil, o Ensino Médio, é a última etapa da educação básica no Brasil, com duração mínima de 3 (três) anos e com um público regular formado geralmente por adolescentes com idades entre 14 e 17 anos. De acordo com o art. 35 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), Lei n. 9.394/06, dentre seus objetivos, visa consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos durante o Ensino Fundamental. Objetiva também relacionar a teoria com a prática de fundamentos científicos e tecnológicos, bem como preparar o educando para exercer profissões técnicas.

As disciplinas a serem estudadas ainda seguem o padrão do Ensino Fundamental, podendo também haver inclusão de outras disciplinas que estejam no contexto social da escola. Assim como no Ensino Fundamental o estudante deve receber estímulos para trabalhar o raciocínio, o professor deve buscar transmitir para os estudantes o conhecimento, de forma que estes possam experimentar o que aprenderam, e não somente memorizar. (BRASIL, 2000). Dentro desse âmbito, é notório que a junção de diferentes áreas, podem enriquecer o contexto com que estas estejam se transmitindo e participando.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (2000), ao fim do Ensino Médio, o estudante deve estar apto a participar da sociedade de forma crítica e produtiva, por isso é fundamental que o método de ensino adotado pela escola seja dinâmico e condizente com a realidade dos alunos. Concluindo esta etapa, o aluno sairá da educação básica e iniciará a educação superior.

> A LDBEN 9394/96 traz um aspecto relevante: a inclusão do Ensino Médio como educação básica, e consagra, em seu artigo 4º, a progressiva extensão da obrigatoriedade e gratuidade ao Ensino Médio. Outros dois aspectos são ressaltados: a continuidade de estudos e a preparação para o trabalho, destacando-se assim, a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos do ensino fundamental com vistas ao prosseguimento dos estudos, o desenvolvimento da cidadania, do pensamento crítico e a preparação para o trabalho tendo a qualificação como opção para esta etapa de ensino. (SANTOS; ALMEIDA, 2014, p. 2).

O ensino e aprendizagem no Ensino Médio, a partir da LDBEN nº 9.394 de 1996, foram redefinidos com uma nova forma de transmitir os conteúdos e educar os alunos nesse período do colegial, deixando de ser apenas um simples estágio introdutório, passando a abranger o desenvolvimento integral e pleno do educando.

Assim, percebe-se que a LDB não se limita apenas à transmissão de conteúdos para os alunos, mas sim à formação do cidadão, colocando o professor como um educador, que mais do que ensinar as teorias em sala de aula deve visar o aluno como um todo, como um cidadão de direitos em formação.

Para que as diretrizes da LDB pudessem ser implementadas, foram criados os PCN, visando orientar escolas e professores acerca do ensino e aprendizagem em suas áreas de domínio. No caso do Ensino Médio, o último PCN desenvolvido, data do ano 2000, sendo elaborado com o objetivo de renovar o ensino tradicional, pautado no professor como detentor de todo o conhecimento e mero transmissor de conteúdo. De acordo com o documento, o papel da educação na sociedade tecnológica é destacado:

> Não se pode mais postergar a intervenção no Ensino Médio, de modo a garantir a superação de uma escola que, ao invés de se colocar como elemento central de desenvolvimento dos cidadãos, contribui para a sua exclusão. Uma escola que pretende formar por meio da imposição de modelos, de exercícios de memorização, da fragmentação do conhecimento, da ignorância dos instrumentos mais avançados de acesso ao conhecimento e da comunicação [...] Todo conhecimento é socialmente comprometido e não há conhecimento que possa ser aprendido e recriado se não se parte das preocupações que as pessoas detêm. O distanciamento entre os conteúdos programáticos e a experiência dos alunos certamente responde pelo desinteresse e até mesmo pela deserção que constatamos em nossas escolas. Conhecimentos selecionados a priori tendem a se perpetuar nos rituais escolares, sem passar pela crítica e reflexão dos docentes, tornando-se, desta forma, um acervo de conhecimentos quase sempre esquecidos ou que não se consegue aplicar, por se desconhecer suas relações com o real. (BRASIL, 2000, p. 22)

Pode-se perceber nos trechos citados dos PCN que há uma posição contrária aos modelos tradicionais de ensino, propondo um ensino sintonizado com as diretrizes propostas pela LDB, dando ênfase para a necessidade de se trabalhar a interdisciplinaridade, tendo a competência como um dos conceitos centrais:

> Não há o que justifique memorizar conhecimentos que estão sendo superados ou cujo acesso é facilitado pela moderna tecnologia. O que se deseja é que os estudantes desenvolvam competências básicas que lhes permitam desenvolver a capacidade de continuar aprendendo. (BRASIL, 2000, p. 14)

Nesse contexto, os PCN têm como principal objetivo dar diretrizes a serem seguidas pelas escolas para que seus alunos desenvolvam competências, promovendo uma visão holística do aluno enquanto cidadão, e não apenas como estudante. Deve-se também destacar os chamados PCN^{+}, que estabelecem algumas orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, havendo uma proposta mais detalhada, com um volume para cada área do conhecimento, as quais: Ciências Humanas e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; e Linguagens, Códigos e suas Tecnologias.

De acordo com Krawczyk (2011), o Ensino Médio, apesar de representar geralmente os três últimos anos da educação básica, talvez sejam os mais discutidos de toda a vida escolar, provocando os debates mais controversos, considerando os índices de evasão escolar e os questionamentos sobre a qualidade do ensino. As controvérsias sobre essa etapa do ensino acabam dificultando a definição de políticas educacionais a serem seguidas.

Seguindo o mesmo raciocínio dito acima, Abramovay e Castro (2003) destacam que, possivelmente, a principal dificuldade encontrada para a definição de políticas para o Ensino Médio seja a falta de identidade, considerando que essa etapa do ensino divide-se em preparar o indivíduo para a formação profissional e prepará-lo para conseguir o acesso ao Ensino Superior, além da formação cidadã.

> O cenário do Ensino Médio brasileiro tem apresentado complexidade crescente, com importantes mudanças qualitativas e quantitativas que articulam tanto dificuldades quanto avanços nas estratégias e ações nesse nível de ensino, gerando processos inclusivos, exclusivos e de seleção educacional e social. Esse cenário possui um forte potencial de análise para poder captar e compreender os pontos de conflito e tensão que impedem

> democratizar o Ensino Médio e torná-lo, de fato, um direito de cidadania. (KRAWCZYK, 2009 p. 1).

Assim, o Ensino Médio – mesmo com essa designação de médio – não deve mais ser visto como da escola do meio e, assim como da escola que conclui a terceira e última etapa de todo o longo processo da educação básica.

> Não podemos ser econômicos em ideias, nem em ações, nas mudanças, na formação e no orçamento. As exigências colocadas pela configuração socioeconômica do Brasil, caracterizada por extrema desigualdade e concentração de renda, somada à grave situação educacional do Ensino Médio, nos apresentam um conjunto enorme de desafios que, com certeza, não se esgotam neste texto. [...] A construção da escola média, no Brasil, passa pela adoção de políticas que visam reverter o quadro de desigualdade educacional construindo, por exemplo, projetos educacionais para o campo, para jovens e adultos e para o ensino noturno. (KRAWCZYK, 2009, p. 34).

Assim, o debate sobre o Ensino Médio implica a reflexão a respeito das vivências e dos aprendizados dos alunos nessa etapa, com foco na efetiva ampliação de sua formação cultural, seu senso ético e amadurecimento socioafetivo, sua autonomia intelectual. Também é necessário pensar sobre sua experiência de aprendizagem concreta nesse nível de ensino e o seu significado.

Para Frigotto (2009, p. 29), a maior problemática do Ensino Médio está na falta de destaque aos alunos, com metodologias vagas. Nas palavras do autor, “[...] metodologias para jovens sem rosto, sem grupo social, sem particularidades culturais e geográficas e que idiotizam o professor, transformando-o em mero reprodutor de fórmulas, destruindo o que define sua profissão [...]”

De maneira geral, os conteúdos curriculares do Ensino Médio devem estimular a disposição dos alunos para a participação, pois a afirmação de vontades, impressões e preferências dos jovens quase sempre é positiva e significativa no seu processo de aprendizagem. Daí a importância da ênfase nas vivências sociais, no convívio, no trabalho em grupo, no movimento de aspectos éticos. Isso tudo pode sinalizar, por um lado, que a escola precisa acolher essa demanda, essa necessidade dos jovens e, por outro lado, pode caracterizar-se como demonstração para os professores das diferentes disciplinas, indicando como conduzir o seu trabalho específico.

Assim, o aprendizado das ciências humanas, das linguagens e códigos em geral, da matemática e das ciências da natureza são momentos importantes para se promover o convívio solidário, a participação dos jovens e a problematização de aspectos éticos, estéticos, entre outros.

Nesse sentido, trabalhar com o contexto é muito recomendado. No Ensino Médio, e em qualquer outro nível e/ou modalidade de ensino, o foco deve ser a efetiva e significativa aprendizagem do aluno. Então, outra recomendação é que aquilo que será ensinado faça a ponte com o mundo fora da escola, ou seja, mesmo no interior de uma disciplina, é possível e recomendável sugerir tarefas de observação, relato e síntese que, depois, podem ser discutidas e problematizadas em sala de aula.

A Matemática está incluída na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, sendo considerada sua aprendizagem fundamental para o desenvolvimento da condição de cidadania do aluno do Ensino Médio. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Matemática no Ensino Médio possui um valor formativo, tendo como função ajudar a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo do aluno, desempenhando, também, um papel instrumental, visto que serve para a vida cotidiana do aluno, bem como para muitas tarefas específicas nas diversas atividades humanas.

Os números e a álgebra entram como um sistema de códigos, enquanto a geometria atua na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade, por sua vez, atuam na compreensão dos fenômenos em universos finitos. Na opinião de Lopes e Macedo (2011):

> [...] o currículo do Ensino Médio deve destacar a educação tecnológica básica, a compreensão do significado da ciência, das letras e das artes, o processo histórico de transformação da sociedade e da cultura, a língua portuguesa como instrumento de comunicação e incluir uma língua estrangeira moderna, como disciplina obrigatória, escolhida pela comunidade escolar, e uma segunda, em caráter optativo dentro das disponibilidades da instituição. Os conteúdos, as metodologias e as formas de avaliação devem ser organizados de tal forma que, ao final do Ensino Médio, o estudante seja capaz de demonstrar domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna, de conhecer das formas contemporâneas de linguagem e dominar conhecimentos de Filosofia e de Sociologia necessários ao exercício da cidadania. (LOPES & MACEDO 2011, p. 4)

Acrescenta-se com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que a Matemática no Ensino Médio também ser vista como uma Ciência, considerando-se suas características estruturais específicas, possibilitando o desenvolvimento de sua autonomia e capacidade de pesquisa.

Nesse contexto, entende-se que a Matemática contemporânea do Ensino Médio busca pelo desenvolvimento global do aluno, analisando-se a disciplina no contexto formativo, instrumental e científico. Pode-se destacar aqui os chamados PCN+ que são complementações aos PCN, destacando o ensino e a aprendizagem de Matemática no Ensino Médio como algo que deve ser feito de forma contextualizada, integrada e relacionada a outros campos do conhecimento, desenvolvendo as competências e habilidades dentro desse âmbito.

No currículo escolar de Matemática do Ensino Médio, conforme consta nos PCN, deve-se ter como objetivo desenvolver as competências e habilidades da Matemática como a representação e a comunicação; a investigação e a compreensão; e a contextualização sociocultural, tendo para tanto uma divisão em quatro blocos de conteúdo: Número e Operações; Funções; Geometria; Análise de dados; e Probabilidade. Devendo, sempre que necessário retomar conteúdos do Ensino Fundamental (BRASIL, 2006).

No bloco de Número e Operações devem estar envolvidos conteúdos e atividades como operação com números inteiros e decimais, operação com frações porcentagens, cálculo mental e estimação de grandezas de números, uso da calculadora e números em notação científica, resolução de problemas de proporcionalidade direta e inversa, interpretação de dados numéricos, tabelas e gráficos, ler e interpretar faturas de contas e, ainda, interpretar informações dadas em artefatos tecnológicos (BRASIL, 2006). O que contribui no desenvolvimento de projetos de aulas tomando como base os parâmetros destacados.

No que diz respeito ao estudo das Funções tem-se a abordagem qualitativa de duas grandezas em diferentes situações como, por exemplo, idade e altura, considerando-se os modelos linear, quadrático e exponencial, bem como funções trigonométricas e polinomiais e, ainda, as progressões geométricas e aritméticas. Consistindo em valores e atributos específicos para o ensino desta abordagem dentro dos parâmetros destacados.

O ensino de Geometria, por sua vez, envolve o desenvolvimento da capacidade do aluno em resolver problemas práticos do cotidiano como se orientar no espaço, fazer leituras de mapas, conhecer propriedades de formas geométricas básicas, entre outras, abordando as grandezas geométricas, a geometria analítica, vetores do ponto de vista geométrico e equações, como é possível observar nos PCN, viabilizando a proximidade ao cotidiano, contribuindo para um melhor aprendizado dos alunos.

Por fim, o bloco de Análise de Dados e probabilidade possibilita que os alunos possam ampliarem e formalizarem seus conhecimentos em relação ao raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico, fazendo com que o aluno entenda sobre o propósito e a lógica do estudo da estatística, possibilitando a compreensão sobre as medidas de posição e de dispersão, exercitando a análise crítica do aluno no que diz respeito às investigações estatísticas e análise de documentos probabilísticos. (BRASIL, 2006).

Vale destacar aqui a importância de o aluno ter conseguido adquirir todo o conhecimento matemático necessário durante o Ensino Fundamental, pois muito do se aprendeu nesse período é utilizado com frequência no Ensino Médio, devendo-se destacar, inclusive a importância de revisar o conteúdo do Ensino Fundamental no início do Ensino Médio e sempre que se fizer necessário. São estes conteúdos básicos e a forma como foram ministrados e absorvidos pelos estudantes no Ensino Fundamental, quando foram, que dão a base e podem determinar, ou não, a empatia pela matéria, influenciando diretamente no rendimento dos estudantes. As questões surgem à medida que se aumentam as situações vivenciadas em sala.

Percebe-se então a notória importância desses saberes básicos para um bom aproveitamento do aluno ao longo do ensino médio, fundamental para o segmento do presento trabalho, pois a pesquisa se faz pertinente e oportuna, mesmo contrariando esse novo momento da educação brasileira, onde a disciplina de matemática tem ganhado uma nova roupagem nas avaliações externas. Pode-se citar como maior exemplo dessa fase o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que privilegia a capacidade de leitura, interpretação e resolução de problemas, em detrimento da álgebra formal e técnica dos vestibulares anteriores, considerando que segundo Vianin (2013):

> Antes de tudo, a resolução de problemas torna-se, há muitos anos, o ponto central do ensino de matemática. Além disso, como vários outros campos da inteligência, o raciocínio parece escapar a uma intervenção educativa. Como vimos para a questão da inteligência ou da motivação, o raciocínio matemático parece fora do alcance do ensino: ou a pessoa sabe raciocinar, ou vai fazer outra coisa. Contudo, existem estratégias que favorecem o raciocínio e, igualmente aqui, o professor tem a responsabilidade de ensiná-las. (VIANIN, 2013, p. 259)

Portando, considera-se que: identificar essas carências e resgatar o interesse dos alunos que ingressam no ensino médio, propondo estratégias e soluções eficientes para a diminuição desse impacto negativo ao longo do ensino médio, são questões fundamentais e essenciais no do cotidiano dos profissionais e entidades que fazem a educação em nível médio acontecer.

2.2 AS TECNOLOGIAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA

A trajetória das máquinas (computadores) nas escolas marcou uma época onde se especulava a real necessidade, como se dava esse processo ou se o aprendizado dos alunos através dos softwares seria realmente efetivo e, ainda, se de fato estava ocorrendo alguma mudança para o futuro. Contudo, atualmente, essa concepção é amplamente aceita e a prática contínua, bem como a assistida, tem demonstrado grandes avanços no contexto da educação. As TIC’s se encontram cada vez mais se aproximando da realidade das escolas, sendo reconhecida a cada dia a importância da informática na educação e no ensino, independente da idade do aluno.

Para Papert (2008), os ensinos tradicionalistas não são eficazes para o desenvolvimento do aprendizado, traz a reflexão sobre uma forma de ensino centrada na procura ativa e exploração do conhecimento por meio das tecnologias, buscando despertar o interesse, o envolvimento e o divertimento das crianças na aprendizagem, desta forma, depreende-se tais objetivos concomitantes, fundamentais à presente pesquisa. Além disso, pode-se observar que o autor defende que as tecnologias podem ser consideradas como fundamentais para a educação básica, haja vista que promovem a aprendizagem autônoma do aluno, o percebendo como um indivíduo que possui o direito de assumir o controle de seu próprio desenvolvimento.

Nesse sentido, segundo Mello (2005, p. 20), é importante que “[...] a tecnologia da informação possa contribuir para tornar reais utopias pedagógicas tão antigas”. Assim, considera-se que em um mundo globalizado onde a escola está inserida, é necessário que se repense as práticas pedagógicas vigentes pautadas na mera transmissão de conhecimento a partir do uso exclusivo de livro didático, quadro e pincel (onde o professor se posiciona no centro do ensino), tendo a percepção de que as ideias tecnológicas permitem um avanço mais coerente à educação, uma vez inseridas no Projeto Político Pedagógico da escola.

Ao fazer uso das TIC, o professor contribui para o desenvolvimento holístico do aluno, visto que o atrai para contribuir como agente de transformação social, considerando que um ambiente discursivo é criado, fazendo com que os alunos percebam a amplitude do mundo. Como bem afirma Perrenoud (1998, p. 125), “Ora, as novas tecnologias da informação e da comunicação transformam espetacularmente não só maneiras de comunicar, também de trabalhar, de decidir, de pensar”. Assim, pode-se dizer que atua na ampliação da visão do aluno sobre seu próprio conhecimento, podendo aguçar a curiosidade para novas aprendizagens, observando que existem diferentes formas de vida e, ainda, diferentes formas de compreender os problemas, ideais fundamentais na prática educativa.

Para Gianolla (2006, p. 52) utilizar as TIC no cotidiano pedagógico é “informar-se sobre o mundo com o formar-se no mundo”. Dessa maneira não são somente os aspectos técnicos, é também construir o conhecimento, envolvendo tanto professores e alunos, quanto a comunidade educativa em geral. Portanto, é importante que se compreenda a visão de mundo, ampliando, a educação, que hoje ainda prevalece com o modelo de ensino dividido em disciplinas e horários, sendo possível pautá-la na interdisciplinaridade, através de projetos que despertem o interesse dos alunos para que possam recontextualizar o aprendizado e integrá-lo a sua realidade de vida.

Cabe então ao professor a tarefa de conciliar os recursos digitais que tem ao seu dispor ao quadro e pincel, recursos existentes em todas as salas de aula, e ao seu gosto por ensinar para melhor preparar e lecionar as suas aulas. Faz-se necessário, portanto, que a escola se proponha a desenvolver em seus alunos um pensamento ativo e crítico, havendo uma cooperação entre professor e alunos para que possa ser desencadeado um crescimento intelectual, devendo o professor se atentar para as dificuldades de cada aluno, como diz Papert (2008, p. 51) “obstáculos mentais que obstaculizam o caminho do progresso”.

Uma das maiores dificuldades para a melhoria da educação segundo Papert (2008) é forma de transmissão do conteúdo para os alunos que privilegiam uma linguagem abstrata, isolando a linguagem concreta esta que seria capaz de desencadear o questionamento sobre as coisas, tal como fazem as crianças, potencializando a aprendizagem.

Ao explorar uma tecnologia, a criança toma dimensões que provavelmente não levaríamos à memória de outro modo, pois a partir do momento que vivencia algo, ela terá a curiosidade de novos conhecimentos o que a levará a controlar seu próprio aprendizado, devendo isso à sua capacidade criativa e imaginativa, fatores que não deveriam ser castrados em benefício da normalização dos conhecimentos dos currículos impostos pelo sistema de ensino. Para Papert (2008) o aprendizado deve ocorrer por meio das tentativas e erros, pois são através deles que vão construindo e descobrindo sua aprendizagem de forma autônoma.

Ao fazer uso das TIC, o professor contribui para o desenvolvimento holístico do aluno, visto que o atrai para contribuir como agente de transformação social, considerando que um ambiente discursivo é criado, fazendo com que os alunos percebam a amplitude do mundo, percebendo o que já sabiam, o que faltava aprender, além de aguçar a curiosidade para novas aprendizagens, observando que existem diferentes formas de vida e, ainda, diferentes formas de compreender os problemas. Sobre o assunto, Takahashi (2000) destaca que:

> [...] educar em uma Sociedade de Informações significa muito mais que treinar as pessoas para o uso das tecnologias de informação e comunicação: trata-se de investir na criação de competências suficientemente amplas que lhes permitam ter uma atuação fundamentada no conhecimento, operarem com fluência os novos meios e ferramentas em seu trabalho, bem como aplicar criativamente as novas mídias, seja em usos simples e rotineiros, seja em aplicações mais sofisticadas. TAKAHASHI (2000, p. 45)

Desse modo, é fundamental que o professor acompanhe as mudanças sociais cada vez mais complexas e competitivas. No que diz respeito às aulas de Matemática, verifica-se que o uso das tecnologias tem se feito cada vez mais presente, isso porque como se trata de uma aula considerada por muitos alunos como complexa e cansativa, os professores têm buscado meios de motivá-los na aprendizagem, encontrando nas tecnologias um caminho para tanto.

Entende-se que a Matemática quando apresentada de forma nova, atrativa e estimulante, pode influenciar na aprendizagem, pois oportuniza aulas interessantes, agradáveis e participativas e bem mais apreciadas pelos alunos em uma sala de aula. Por isso, torna-se indispensável refletir e deliberar o uso de tecnologias nas aulas de Matemática, pois podem se mostrar como importantes aliadas do ensino. Assim, é considerável que a Matemática precisa difundir-se para inclusão de novas tecnologias, com associação entre diferentes teorias.

De acordo D'Ambrósio (2003), Matemática e tecnologia são intrínsecas, todavia, se faz necessário seu uso efetivo, caso o professor utilize, por exemplo, de um retroprojetor para passar slides com conteúdos matemáticos, nada mais vai está fazendo do que uma mera substituição da lousa e do pincel. Assim, o uso das tecnologias nas aulas de Matemática só se faz efetiva se os alunos assumirem uma aposição ativa de aprendizagem, com o dispositivo tecnológico sendo utilizado como parte do planejamento do professor e não como mero instrumento para fins ilustrativos. O autor faz entender o processo pelo qual ocorre a transmissão do conteúdo através de tecnologias capazes de gerar maiores variações de exemplos e demonstrações e que ainda concede tempo hábil para tratar do assunto que se almeja de forma mais clara e objetiva.

Valente (1999) elucida que o fazer Matemática exige pensamento, raciocínio, intuição, criatividade, errar, refazer, enganos, incertezas, enfim, até mesmo os grandes matemáticos precisaram experimentar essa ciência para aprendê-la e fazer novas descobertas, portanto, não cabe que o ensino da Matemática nas salas de aula seja feito de forma técnica, como simples transmissão de conteúdo, sendo fundamental que se consiga trabalhar os conteúdos promovendo a experimentação do aluno para uma aprendizagem significativa. Ressalta-se que os Parâmetros Curriculares de Matemática (PCN) (2001, p. 46) descrevem sobre o uso das tecnologias nas aulas de Matemática, afirmando que:

> As tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem no cotidiano das pessoas. [...] Estudiosos do tema mostram que a escrita, leitura, visão, audição, criação e aprendizagem são capturados por uma informática cada vez mais avançada. Nesse cenário, inserem-se mais um desafio para escola, ou seja, o de como incorporar ao seu trabalho, tradicionalmente apoiado na oralidade e na escrita, novas formas de comunicar e conhecer. Por outro lado, também é fato que as calculadoras, computadores e outros elementos tecnológicos já são uma realidade para significativa da população. (PCN, 2001, p. 46)

Assim, verifica-se a importância do uso de tecnologias nas aulas de Matemática. Sobre o assunto, Santos e Vasconcelos (2015) elucidam que o uso de tecnologia nas aulas de Matemática é fundamental. De acordo com os autores através do uso de aplicativos e softwares é possível desenvolver a capacidade lógica e matemática dos alunos, bem como trabalhar a socialização e a integração em grupo.

Ferreira, Scortegagna e Camponez (2015) pesquisaram sobre o uso de tecnologias da informação no ensino de Matemática para o Ensino Fundamental II, verificando em seu estudo que muitos professores ainda não estão capacitados para o uso dessas tecnologias, porém, já buscam meios de se capacitar ou aperfeiçoar para uso dessas ferramentas, enquanto os alunos demonstram interesse em usufruir dessas tecnologias no processo de aprendizagem.

Por sua vez, Ferreira (2013) ao analisar a percepção dos alunos sobre o uso de tecnologias nas aulas de Matemática, verificaram que os professores consideram as tecnologias como uma forma de promover a aprendizagem autônoma dos alunos, além de gerar maior interatividade nas aulas, identificando como obstáculos questões relacionadas à infraestrutura e às condições didático-pedagógicas.

Revisando a literatura sobre o uso de softwares no ensino de Matemática foi encontrada a pesquisa realizada por Giraffa (2008), que destacou que o uso de tecnologias faz parte do dia a dia do aluno, por isso deve ser agregada ás salas de aula. Com o uso de software na educação matemática é possível respeitar as características individuais sem descartar as características comuns aos grupos, podendo contextualizar os conteúdos e estimular aos alunos a expandir seus conhecimentos. A consideração acima ressalta de maneira sucinta os valores característicos da pluralidade encontrada nas salas de aula, que constituem as diferentes personalidades e formas de se captar as informações.

Por sua vez, Marinho (2010) fala sobre os softwares livres, como é o caso do Geogebra, destacando que eles consistem naqueles que podem ser utilizados para qualquer propósito, não precisando pedir ou pagar permissão para seu uso, podendo, inclusive, ser aperfeiçoado. Assim, se tem um custo baixo para uso desses softwares o que facilita sua utilização em escolas públicas.

Também falando sobre o uso de softwares na educação, Santos, Nunes e Sá (2014) elucidam que os alunos podem utilizá-los para explorar os conteúdos de forma criativa e diferenciada, estimulando sua aprendizagem autônoma. Como ferramenta educacional, podem aumentar a motivação e o interesse dos alunos pelas aulas de matemática.

Desse modo, o uso de softwares educacionais pode facilitar o processo de ensino e aprendizagem, podendo ser utilizado pelos professores sem que demande de altos custos para tanto, estimulando o aluno a desenvolver sua aprendizagem de forma autônoma.

A necessidade de capacitação dos professores para uso de tecnologias em sala de aula foi evidenciada por diferentes pesquisas como a de Domingues (2009) e Santos, Nunes e Sá (2014), sendo colocada como uma das principais barreiras para efetiva aplicação destas no ensino.

Conforme explica Domingues (2009), nenhum recurso didático substitui o trabalho do professor, porém é possível agregar ao seu trabalho tecnologias que facilitem o ensino, sendo mencionado pelos autores que: “Empecilhos como os receios dos professores, choques culturais, problemas operacionais, por exemplo, acabam afastando as TICs das escolas, tornando-as cada dia mais obsoletas e ultrapassadas” (DOMINGUES, 2009, p. 8).

Santos, Nunes e Sá (2014) também evidenciaram a importância da formação e capacitação do professor para o uso de tecnologias da educação, afirmando que nas primeiras vezes o entusiasmo é nítido com interesse nos conteúdos, contudo, com o passar dos tempos vai deixando de ser novidade, por isso o rendimento dos alunos volta a cair. Assim, é fundamental que o professor busque meios de manter o interesse dos alunos sempre renovados.

Nesse contexto, verifica-se que o uso de tecnologias nas aulas de Matemática se mostra bastante propício, sendo considerado por diferentes autores como uma forma de potencializar o processo de ensino e aprendizagem, promovendo a autonomia do aluno e, ainda, trabalhando sua socialização, já que estimula a cooperação entre eles.

2.3 O ENSINO DE MATRIZES: REVISÃO DO ESTADO DA ARTE

Com o objetivo de analisar trabalhos que falam dos estudos destinados as matrizes, esta revisão replicou algumas ideias de pesquisas para fundamentar um produto educacional que servirá futuramente como ferramenta de apoio em aulas de matemática em turmas do 2º e 3º anos do ensino médio.

Lopes (2012) desenvolveu uma pesquisa de investigação de caráter histórico, objetivando analisar como o tema de matrizes foi difundido no ensino secundário brasileiro, tendo como metodologia a investigação de livros didáticos implantados na temporada de 1930 a 1980, em consonância com a leitura de documentos oficiais que fundamentaram o estudo do contexto educacional no período em essas obras estavam envolvidas. Dessa forma o autor buscou responder a seguinte pergunta: como é possível historicamente explicar a presença do conteúdo de matrizes na matemática escolar nos anos finais do Ensino Médio (ou Ensino Secundário, como era chamado naquele período)?

De acordo com Lopes (2012), no início da década de 1930, na perspectiva da investigação dos livros didáticos, o assunto “matriz” não tinha o devido valor no ensino da matemática, aparecia superficialmente com definições básicas para servir de base aos assuntos determinantes e sistemas lineares, tendo assim um papel coadjuvante, meramente cultivado.

Durante certo tempo este aspecto vigorou, entretanto, a partir da década de 1960, o papel ocupado pelas matrizes nos livros didáticos começou a modificar substancialmente com a transmissão das ideias do Movimento da Matemática Moderna (MMM), pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) que perceberam a acuidade deste assunto no desenvolvimento da ciência, apontando para a característica “moderna” das matrizes e a urgência de sua inserção no ensino (LOPES, 2012).

Dessa maneira as matrizes “iniciaram” sua ocupação em um lugar de destaque nos livros didáticos, não sendo mais trabalhada de forma apenas de fundamentação para outros assuntos, mas, detendo capítulos próprios, passando a ser nova maneira de resolver problemas envolvendo sistemas lineares. O pesquisador citado constatou que o Movimento da Matemática Moderna, foi de suma importância no desenvolvimento do ensino da Matemática e, em caráter particular, ao ensino das matrizes que passou a ter seu devido espaço.

Ramos et al. (2006), por sua vez, fizeram um epítome geral sobre o assunto de matrizes quando trataram da construção histórica de seus conceitos e propriedades, tornando inevitável a exposição da biografia dos matemáticos que a desenvolveram. Trouxe também uma investigação simples da forma como as definições de matrizes estão presentes nos livros didáticos escolhidos de acordo com a preferência de professores da rede pública de ensino em múltiplos municípios.

Desses livros que foram investigados, dez de diferentes autores, de acordo Ramos et al. (2006), metade apresentava o assunto de maneira “tradicional”, começando com a definição e, em seguida, com exemplos e exercícios, expuseram ainda que dentre cinco daqueles, somente dois faziam citações históricas, sem uma abordagem mais aprofundada do seu conteúdo. As demonstrações de teoremas e propriedades não são notadas nestes, os autores enfatizaram que para os alunos “aceitarem” as ideias são mostradas apenas exemplos numéricos.

Nos demais cinco livros investigados, os autores não consideraram a abordagem tradicional, como era vista; sendo assim, colocaram que dois iniciaram o assunto por meio de uma situação problema que envolvia matriz e os três restantes, iniciaram enfatizando a acuidade do estudo das matrizes nas demais áreas do conhecimento. Entretanto, continuaram com os padrões de continuidade dos cinco primeiros livros. Os autores também destacaram distintas publicações do conteúdo no coloquial, em circunstâncias de sala de aula.

Baraldi e Garnica (2012) acreditando que os livros didáticos podiam contribuir de forma característica para a assimilação dos aspectos matemáticos na escola, trataram sobre a forma de abordagem que estes fizeram dos assuntos de matrizes, com o objetivo de arquitetar um histórico do conteúdo, com ênfase na sua apresentação nesses livros. Para tanto, os autores julgaram importante destacar fatores sócio, político e econômicos do período em que esses livros foram publicados.

Faz-se importante destacar que a pesquisa de Silva, Oliveira e Garnica (s.d), perante a argúcia do que vários autores consideraram que o Movimento da Matemática Moderna, foi formidável ao abordar os conteúdos dos livros didáticos. Os autores, após uma pesquisa inicial, encontraram resultados parciais que mostraram que algumas mudanças no apanhado do assunto de matrizes nos livros didáticos foram introduzidas pelo Movimento da Matemática Moderna.

Messias, Sá e Fonseca (2007) fizeram um apanhado com a intenção de investigar quais eram os principais problemas apresentados pelos alunos quando resolviam questões relacionadas às matrizes e quais métodos são utilizados pelos professores durante o ensino de tal assunto, para isso foram destacados 109 alunos de cursos de graduação que estudam a disciplina Álgebra Linear, que necessita de concepções do assunto de matrizes. Os pesquisadores citados constataram que nas séries do Ensino Médio, onde se estuda os assuntos de matrizes, existia uma diferença, pois, em relação às respostas à pergunta “em que série estudou matrizes?”, surgiram respostas das três séries do ensino médio, com o 3º ano registrando maior número de respostas.

No que se refere à dificuldade no assunto, Messias, Sá e Fonseca (2007) constataram que pouco mais da metade dos alunos consultados (58,7%) tinham esse assunto como difícil de entender. Enquanto ao enfoque em que os assuntos foram ensinados, a maioria (89,9%) dos alunos afirmou que o assunto foi introduzido mediante a definição e, posteriormente, com exemplos e exercícios. Indicaram também que a dificuldade de introduzir tal assunto, podia ser efeito da forma como os conceitos e definições eram apresentadas. Já nas operações com matrizes, os autores constataram através da consulta que menos da metade dos alunos conseguiam resolver corretamente os problemas propostos desse assunto, assim como o cálculo de determinantes.

Cardoso, Kato e Oliveira (2013) investigaram os aspectos do raciocínio matemático empregados por estudantes de cursos de graduação, tais como: Engenharia, Informática, Matemática, Física, Química, entre outros, que tem a disciplina Álgebra Linear em comum, a qual, depende de conhecimentos específicos dos alunos, que é o conhecimento inicial sobre matrizes. De acordo com os autores, as ideias empregadas nas operações envolvendo matrizes são essenciais para o “curso” desta disciplina, que será alicerce a compreensão dos conceitos ligados aos sistemas de equações lineares, espaços vetoriais, base, dimensão, transformações lineares, autovalores, autovetores, entre outros. As ideias matemáticas forma investigadas de acordo com uma atividade de resolução de situações-problemas que relacionavam matrizes.

Cardoso, Kato e Oliveira (2013) fundamentaram-se na Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, para identificar os invariantes operatórios equivocados propostos por grupos de estudantes nas questões que se relacionavam com matrizes. Os invariantes operatórios eram teoremas e conceitos que os estudantes usavam numa situação-problema nova, ao observarem analogias com diferentes resoluções listadas, contudo, essas compatibilidades em determinadas circunstâncias eram ilusões inconsistentes na nova situação. Para os autores a Teoria dos Campus Conceituais era intensa, na identificação e na superação das barreiras passando a ser instrumento de apoio aos docentes na construção das atividades escolares.

Para fazer a coleta dos dados, Cardoso, Kato e Oliveira (2013) analisaram criteriosamente gravações de vídeo, 8 horas das, 64 que corresponde a um curso de Álgebra Linear, executado em uma universidade pública do estado do Paraná, onde um grupo de 11 alunos foi investigado, cuja participação, dependeu do desempenho nas atividades proposta durante o desenvolvimento do curso. Sendo que professor da disciplina foi o mesmo que fez a coleta e a análise dos dados, o qual desempenhou simultaneamente as funções de professor e pesquisador, assim a metodologia do trabalho aproximou-se de uma pesquisa ação, que utilizou informações empíricas como alicerce à reflexão.

De acordo com os resultados, os pesquisadores contataram que as ideias empregadas nas operações envolvendo matrizes eram análogas às ideias empregadas nas resoluções de problemas que envolviam adição e multiplicação com números inteiros. Os autores identificaram invariantes como multiplicação de duas matrizes, elemento por elemento, assim como nas adições e subtrações de matrizes, ignorando o algoritmo da multiplicação de matrizes, o algoritmo da multiplicação de matrizes foi um segundo invariante encontrado, no entanto de forma errada. Cardoso, Kato e Oliveira (2013) consideraram como outro invariante o fato de achar que elevar uma matriz ao quadrado era o mesmo que elevar cada elemento da matriz ao quadrado, enquanto que ao cálculo da inversa de uma matriz, os estudantes equivocaram-se em considerar à priori que a matriz dada era invertível, ocasionando erros na construção da solução.

Santos (2008) em “Ensino de operações com matrizes por atividades”, trouxe uma proposta de ensino por atividades para subsidiar o aprendizado de matrizes, propondo o uso de anexo de questões de matrizes que foram desenvolvidas de acordo com a metodologia da redescoberta e a utilização do software Winmat. Assim como aspectos documentais como análise de orientações para o ensino da matemática, o autor fez um apanhado sobre diversas dificuldades no ensino das matrizes, enfoca: 1) em primeira impressão, não existe utilidade no cotidiano da vida; 2) como é ensinada no 3º ano do ensino médio, segundo o autor, quase sempre os alunos não à estudam em sua totalidade, e às vezes, nem à estudam; 3) os documentos propostos pelo governo não fazem alusão ao ensino de matrizes, com exceção de alguns casos; 4) bastante alunos mostram dificuldade no que diz respeito ao conceito e resoluções de problemas com operações entre matrizes; especialmente o produto de matrizes e o cálculo do determinante.

Santos (2008) propôs também atividades de fixação do assunto com a utilização de jogos, e finalmente, considerou que a utilização dos diversos instrumentos para o ensino, deve ser valorizado e praticado, com o intuito de ter melhoria no decorrer do processo de ensino e aprendizagem de matemática, seguindo a atual realidade de acordo as suas tendências na educação.

Panciera e Ferreira (2006) trouxeram em sua pesquisa, atividades de Matemática para o Ensino Médio, desenvolvidas no curso de mestrado profissional em ensino de matemática e física do Centro Universitário Francisco de Santa Maria (UNIFRAN/RS). Tais atividades abordaram conceitos de matrizes e sistema de equações lineares, apoderando-se da metodologia da modelagem matemática, que foram desenvolvidas a partir de situações-problemas, como o controle da perda de calorias em um programa de emagrecimento, a base de dietas e atividades físicas e, mais, o fluxo de veículos nas ruas de mão única no horário de rush no centro de uma cidade.

Segundo os autores a Modelagem Matemática, utilizada como uma metodologia de ensino deixa enorme subsídio para uma compreensão com real sentido ao aluno, pois preza não adquirir conhecimentos, mas sim, da capacidade, atitudes e valores, correlacionando a matemática com o mundo verdadeiro. As atividades propostas trouxeram situações do dia a dia, em que o aluno é incitado a chegar a resolução de determinados problemas, os pesquisadores esperavam que os alunos descobrissem os conceitos e possibilidades que não tinham no desenrolar de suas vidas. Panciera e Ferreira (2006) consideraram que com a aplicação de situações reais durante o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos na sala de aula, fazia com que os alunos vissem a importância da matemática nas investigações e decisões, assim, intervindo no habitual.

Borba (2011), em sua pesquisa, abordou diversas aplicações novas que podem ser modeladas com a utilização das matrizes. Tais aplicações, em quase todos os casos, exigiram um desgastante trato com matrizes utilizando o papel, o que fica inviabilizado, sendo empregados manuseios computacionais. O pesquisador afirmou que atualmente o ingresso a equipamentos com recurso da informática é mais vasto do que em qualquer etapa da história, sendo assim, ele defendeu que para uma melhor assimilação do assunto pelo aluno, não se pode balizar seu contato as matrizes 3×3 e com números inteiros, como geralmente é abordado nas escolas.

Então, o autor propôs fazer o ensino das matrizes com a adesão da tecnologia, apropriando-se de recursos da informática, tais como, planilhas eletrônicas e applets encontrados na internet, visando aproximar a visualização das matrizes introduzidas no Ensino Médio e as suas verdadeiras aplicações. Para Borba (2011) o objetivo de sua pesquisa foi elaborar atividades de matrizes que considerem o uso de recursos computacionais citados anteriormente, sugerindo a apropriação destas por professores da educação básica.

Segundo o pesquisador, “avançar”, além da apresentação de fórmulas e de simples exemplos é significativamente importante, o autor expôs que a apropriação de recursos computacionais, tais como, planilhas e aplicativos específicos avançam no sentido de não balizar o trabalho com matrizes de ordem 3×3, sendo assim, o aluno tem a oportunidade de enxergar o conteúdo em nível satisfatório, facilitando assim, o atrelamento com problemas do cotidiano, estendendo-se, talvez, a problemas mais complexos, como debater sobre tópico de vetores e dependência linear.

Na pesquisa realizada por Kraieski (1999), foi realizada primeiramente uma investigação minuciosa acerca dos livros didáticos, observou que estes limitam matrizes a tabelas de números, não esclarecendo que uma matriz pode se ampliar a outros conteúdos matemáticos como funções. Considerou, também, que faltavam aplicações práticas das suas operações (adição, subtração, multiplicação por escalar e multiplicação entre matrizes) e propriedades, e também, que o “palavreado” utilizado nos conceitos é muito obscuro e abstrato para o aluno.

Dessa forma o autor sugeriu para a prática dos professores, apoderando-se de exemplos práticos para a inserção do assunto, para o esboço do manuseio das operações com matrizes (adição, subtração, multiplicação por escalar e multiplicação entre matrizes), e também trouxe circunstâncias que, segundo suas concepções, dão significado com praticidade às matrizes transpostas e inversas. Em seguida, tratou da estreita afinidade que as matrizes têm com a computação, sugerindo o uso de softwares como, Winmat, Winmatrix e Derive em sala de aula, com a intenção de auxiliar os alunos nos cálculos de matrizes enormes e/ou números altos e/ou não inteiros, também em cálculos demorados extensos que são praticamente impossíveis de se efetuar a mão.

Kraieski (1999) concluiu e defendeu que, quando até o próprio professor conhece das aplicações de um conteúdo, fica melhor compreendido. Considerou que os elementos que foram tratados por ele no decorrer de seu texto são essenciais na execução de uma aula. Por fim, para a preparação da aula do professor é importante começar com um breve histórico, desenvolver uma crítica sobre o que os livros didáticos apresentam, e daí em diante, observar que não se pode ter como referência um ou dois livros didáticos, mas se apoiar em diversos referenciais e assim montar sua sequência, refletir acerca da utilização do computador e propor aplicações não banais com o uso de matrizes, as quais encontram-se especialmente na área da programação de computadores.

Nesse mesmo sentido, Siqueira Filho (2013) realizou um estudo intitulado “Aplicações e resoluções de problemas como metodologia para o ensino de matrizes, sistemas lineares e determinantes” que objetivou apresentar tais conteúdos aos professores de matemática do Ensino Médio, dando destaque às situações- problemas e aplicações que os relaciona com a prática do dia-a-dia. O autor tratou dos conteúdos primeiramente fazendo um levantamento histórico, em seguida procurou apresentar, para a prática do professor várias situações-problemas do dia-a-dia, que se relacionam com os assuntos de matrizes, determinantes e sistemas lineares.

Siqueira Filho (2013) procurou uma maneira de abordagem que o aluno conseguisse perceber a presença dos componentes curriculares no seu dia a dia e que despertasse seu interesse pela “caçada” a uma possível solução para o problema proposto. Para o autor, é nesse momento de caçada que dão início as descobertas do aluno. Em relação a metodologia de ensino, pelo pesquisador acreditou que um problema adequado poderia transformar as aulas de matemática a ficarem mais interessantes e desafiadoras, sendo assim, é louvável qualquer esforço em propor os conteúdos matemáticos de forma concreta, pois assim, possibilitaria a participação do aluno no processo, e colaboraria com o surgimento de estratégias que poderiam ser aplicadas em outras circunstâncias. O autor chegou à conclusão de se for proposta aos alunos situações-problemas relacionando coisas de sua realidade, provavelmente o entendimento acerca do assunto, a relação com os colegas e professor aumente.

Tavares (2013) utilizou “Usando a história da resolução de alguns problemas para introduzir conceitos: sistemas lineares, determinantes e matrizes”, para estudar as formas de resoluções contidas no livro “Os nove capítulos sobre a arte matemática”, que foi escrito no século I d.c, com a intenção de mostrar como a história pode motivar a introdução de tópicos da matemática do ensino médio. O autor analisou como desenvolviam-se as resoluções de problemas que envolviam os assuntos de sistemas lineares, matrizes e determinantes durante a antiguidade, observou padrões que se aplicam até atualmente, e fazendo adaptações, conseguiu desenvolver sem recair aos conhecimentos atuais dos conceitos desses assuntos.

A pesquisa realizada por Tavares (2013) deixou como legado contribuições de exemplos de aplicações das resoluções, de acordo com exercícios contextualizados, onde a procura pela solução, leva ao encontro dos conceitos, sendo que, Tavares (2013), faz menção a um equívoco encontrado nos enunciados, que alguns livros didáticos trazem a respeito da regra de Cramer, e demonstrou sua observação fazendo a resolução de contraexemplos. Por fim, o autor concluiu, que por intermédio de observações dos padrões que se repetem nas formas de resolução apresentadas pelo livro, são possíveis introduzir e crescer de maneira espontânea e contextualizada, os conceitos de equações lineares, sistemas de equações lineares, solução de sistemas de equações lineares, determinantes e matrizes, além de outros assuntos.

Desse modo, o “alargamento” histórico dos assuntos usados como artifícios de ensino, deixa os conteúdos mais lógicos, com padrões que podem ser constatados, com teorias desenvolvidas de forma crítica, como foi o caso da regra de Cramer, assim, trazendo para a realidade do aluno, fazendo com que, segundo o autor, elevando a qualidade dos processos de ensino-aprendizagem de matemática.

Souza, Lopes e Azevedo (2013) realizaram uma pesquisa com a intenção de construir o objeto de aprendizagem digital sobre o produto de matrizes para ser destinado a professores e alunos do ensino médio. Os autores descreveram a maneira como criaram o ambiente, enfatizando o caráter homogêneo no que se refere a área de atuação dos diferentes componentes da equipe. Entre Designers e programadores, os componentes da área de educação matemática ficaram responsáveis pelas pesquisas e elaboração dos conteúdos matemáticos, que partia sempre de situações cotidianas.

No objeto de aprendizagem o aluno interagia de acordo com cliques, arraste de objetos e nas visualizações de animações proporcionadas pelo ambiente, assim como, pode simplesmente colocar o número ou resposta nos locais indicados, sem falar de possuir o diferencial de adequação para os alunos com necessidades visuais. Com isso, o aluno fazia o que lhe era proposto e dessa forma ia preenchendo tabelas que eram multiplicadas com intenção de chegar a uma solução de um problema ou uma curiosidade proposta, assim buscaria regularidades (coincidências) através das intenções instantâneas feitas pelo ambiente. Souza, Lopes e Azevedo (2013) propuseram esta forma de atividade por entenderem que os objetos de aprendizagem possibilitariam promover processos de mediação no contexto professores-alunos e alunos-alunos se apresentam como opção a tornar as aulas mais interessantes, dinâmicas, curiosas, interativas, além de provocar técnicas de socialização entre eles.

Manfio e Mathias (2013) investigaram o conteúdo de matrizes no ensino médio partindo da utilização como objeto de aprendizagem (OA) que forma geral, que de acordo com os autores poderiam ser entendidos como recursos digitais iterativos, no que diz respeito ao diálogo entre o aluno e o objeto de aprendizagem e que possuem a característica de serem reaproveitáveis educacionalmente. Tratou-se de um recurso que usa o assunto dentro do ambiente virtual, deixando assim o trabalho comeste recurso mais dinâmico, ficou evidente, segundo os autores, que o instrumento não tem o objetivo de introduzir o conteúdo de matrizes, uma vez que é constituído de diversas atividades que exigiam conceito e definições matemática outrora definidos acerca do conteúdo.

Sendo assim, o acervo digital se tornaria mais interessante quando era trabalhado após um primeiro contato com os alunos, agindo como um livro animado. Para os autores, este recurso aumentaria a qualidade pedagógica no trato dos assuntos matemáticos, uma vez que o objeto é visualmente atraente, oferecia incitações estimuladoras quando mostrava imagens de incentivo no acerto ou no erro do aluno quando ele solicitava a validação das respostas, incentivava a autonomia, sem falar que tinha uma boa avaliação de acordo a acomodação técnica do ambiente virtual. Souza, Lopes e Azevedo (2013) mostraram também que este, por ter a capacidade de dar de imediato a validação ou não dos resultados fornecidos pelos alunos, dava recursos a estes de acordo como as respostas randômicas chegavam até o resultado almejado, não atingindo o objetivo da atividade que era o da reflexão por parte do utilizador do espaço.

Outra pesquisa importante de ser mencionada foi realizada por Manfio e Matias (2013), que demonstraram que o objeto possui apenas parcialmente a característica da re-usabilidade, ou seja, que fosse usado para trabalhar diferentes maneiras de operar conteúdos diversos em contextos diferenciados se resumindo apenas em seu contexto de trabalho e trabalhando somente os conteúdos referentes às matrizes e vagamente aplicações a problemas do dia a dia. O enfoque utilizando o objeto de aprendizagem foi aplicado em uma sala de aula numa turma de educação profissionalizante de Jovens e Adultos (Proeja), os resultados encontrados revelaram que os alunos ao ficarem diante das questões propostas apresentaram dúvidas e por meio dessas apareceram discussões sobre como eles chegariam a solução, esse acontecimento revelou reflexões dos alunos sobre assuntos outrora explicados em sala de aula, o que levou os alunos esclarecerem dúvidas com os colegas e o professor, com isso, melhorar o entendimento do assunto baseado na interação.

O objeto foi admirável na circunstância em que incitou a curiosidade aluno em aprender a resolver e avançar para a atividade seguinte. Nesta seção houve também o questionamento dos alunos em porquê de algumas atividades outrora expostas. Manfio e Matias (2013), concluíram que para o uso desse recurso era necessária uma reciclagem para seu melhor aproveitamento, indicando que o contato tido anteriormente em caráter teórico sobre o objeto de aprendizagem se revelaram na prática, e mostraram que esta ferramenta tem grande valor, pois além de operar com definições matemáticas, abarcava e incentivava os alunos, despertando o gosto em estudar e aprender.

Baggio, Schossler e Dullius (2010) buscaram analisar pontos de vista dos alunos diante de diferentes abordagens no ensino de matrizes. Para tanto, construíram uma pesquisa com alunos do segundo ano do ensino médio em dois espaços diferentes, onde o primeiro se trata de uma turma do ensino regular de uma escola particular e o segundo, uma turma do Ensino de Jovens e Adultos (EJA), ambos do interior do Rio grande do Sul.

Os autores aplicaram uma sequência didática que envolvia a Modelagem Matemática iniciando com resoluções de situações-problemas que abordavam diferentes temas, como: modelo/ano/custo de automóveis, tabelas de alimentos e calorias, resultados de campeonatos de futebol e salários de servidores públicos, assim como tabelas de conhecimentos de aspectos físicos e escolares dos próprios alunos em questão. Também utilizaram as ferramentas computacionais como recurso auxiliar no aprendizado de matrizes, para isso, utilizaram o software

Winmatrix. A pesquisa objetivou analisar se as metodologias são enérgicas em ambos os contextos que foram aplicadas.

A sequência didática constituía-se das seguintes maneiras, em primeiro instante o assunto de matrizes foi introduzido utilizando a metodologia Modelagem Matemática, utilizando tabelas com dados referentes a assuntos anteriores outrora trabalhados. Para os autores, as tabelas foram várias vezes utilizadas para auxiliar a resolução, ou até mesmo resolver problemas verdadeiros com operações entre matrizes. Num momento final as atividades formam desenvolvidas com o auxílio da informática educacional, onde esperava-se que os alunos pusessem em prática o que haviam aprendido sobre matrizes, resolvendo listas de questões com auxílio do software. Para fazer a coleta dos dados, pediram aos alunos no final de toda a sequência que anotassem o que achavam de todas as aulas, também os pesquisadores fizeram gravações em vídeo ao longo das apresentações dos alunos e do professor, servindo de constantes discussões em sala de aula (Baggio; Schossler; Dullius, 2010)

Os resultados mostraram que no instante o clímax das atividades estava na metodologia Modelagem Matemática, os alunos do EJA se destacaram na participação e o interesse. Esse fato levou os autores dessa pesquisa a entenderem que para esse modelo de atividade seja mais expressivo, poia maioria habitualmente lê jornal, memorizando com facilidade as tabelas e com isso ampliando seus conhecimentos para o debate dos assuntos pertinentes a pesquisa. Para Baggio, Schossler e Dullius (2010), a utilização do laboratório de informática tinha diversas vantagens e também suas limitações, pois, os alunos do EJA mostraram problemas e temores no trato das ferramentas computacionais, uma vez que, a maioria nunca teve contato com o computador e também os professores pouco levavam os alunos para uma aula no laboratório de informática.

No entanto, os alunos da turma regular estavam inquietos para resolver as atividades com a utilização do Winmat e se dedicaram na resolução das atividades, pediram que voltasses a utilizar aquele recurso, porque acelera o trabalho, como diziam os alunos. Por fim, Baggio, Schossler e Dullius (2010), concluíram que através da análise das duas metodologias, que nos dois casos analisados a Modelagem Matemática incentivou bem mais os alunos da EJA e a utilização do software os alunos do ensino regular.

Sanches (2002) pesquisou experimentalmente abordando o ensino dos conceitos do assunto de matriz, utilizando a metodologia da pesquisa-ação, objetivou verificar a eficiência de um método que fosse diferente do ensino de matrizes, utilizou para esta estratégia que o conhecimento que o aluno tinha sobre conceitos antigos auxiliaria na formação de nos saberes e melhoraria o desempenho de novos estudantes do ensino médio na resolução de problemas de matrizes.

Foram consultados 105 alunos de uma escola particular de Santo André, pertencente ao ABC paulista, os alunos forma distribuídos em dois grupos, o grupo experimental e o de controle, este primeiro, foi contido a intervenção com dinâmicas de grupo, utilização de situações-problema constituídas a partir dos conhecimentos básicos dos alunos na disciplina e a realização da interdisciplinaridade com o uso dos conceitos de matrizes outrora estudados, o segundo, cujo conteúdo foi apresentado formalizadamente, onde foram dadas as definições, a formalização das fórmulas e exercícios de fixação. Para analisar os resultados da ideia da proposta, a pesquisadora utilizou pré-testes e um pós-testes com formato de provas que nem lápis e papel, como foi definido por ela, e de acordo com uma análise estatística apoderando-se do teste t de Student, analisou se haviam diferenças expressivas nas médias de dois grupos independentes e resultados antes e depois do tratamento.

Feita a checagem dos resultados, constatou que os indivíduos do grupo experimental no pré-teste apresentaram uma média menor em relação ao grupo controle nas provas, entretanto, no pós-teste, depois da utilização da estratégia diferenciada no ensino, os indivíduos do grupo experimental mostraram resultados melhores do que o grupo controle, os quais, participaram das aulas ensinadas de forma tradicional. Com isso, Sanches (2002) concluiu a partir dos resultados, que a estratégia diferenciada de ensino que fundamentava na assimilação dos conteúdos, com destaque a formação dos conceitos e a solução de situações-problemas que incitam os saberes básicos relacionados ao conteúdo formal alcançariam sucesso,

Lopes (2008) estudou sobre o ensino e aprendizagem matemática a partir de atividades que objetivaram introduzir conceitos básicos acerca da teoria das matrizes, determinantes e sistemas lineares utilizando a metodologia da resolução de problemas. Para isso realizou ações na perspectiva que tem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sobre a resolução de problemas no ensino da matemática, nessa perspectiva, de acordo com o autor, o problema é visto como marco inicial para uma etapa de construção de um novo conhecimento para o aluno.

As atividades relacionadas à pesquisa em três escolas do ensino médio localizadas nas cidades de Andradina e Pereira Barreto, pertencentes ao estado de São Paulo, e foram viabilizadas através de um projeto do núcleo de ensino da Universidade Estadual Paulista (UNESP). A publicação da pesquisa foi feita por duas professoras com vasta experiência no ensino médio e uma aluna bolsista do projeto ao qual a pesquisa fazia parte. O estudo dos sistemas lineares foi o ponto de partida do início da sequência, que enfatizou a “montagem” do sistema linear e o método do escalonamento, em seguida, a teoria das matrizes, levando em conta as operações básicas, propriedades e levando em conta que as matrizes aparecem de forma espontânea no estudo dos sistemas lineares. Enfim, aparecem os determinantes, onde surgem no estudo dos sistemas lineares.

De acordo com relatórios das professoras e dos alunos, que os resultados da sequência foram investigados, as professoras que fizeram parte do estudo constataram que a metodologia utilizada em anos anteriores com a da pesquisa, mostram que os alunos buscam resolver mais os problemas que são propostos na atividade, mostrando o nível de motivação dos alunos com a nova forma de ensino desperta a curiosidade e torna a aula mais interessante, facilitando o aprendizado.

Lopes (2008) constatou através de relatos dos alunos, que o trabalho com esta metodologia é mais difícil, para ambos, professores e alunos, pois a forma tradicional de trabalho está de certa forma enraizada nos modelos de ensino. No entanto, gradativamente, onde existe a interação com o grupo onde está vinculado, o aluno se tornará o construtor do seu próprio conhecimento, o que é bastante acentuado, no que diz a legislação, orientando que o ensino deve estar organizado, a fim de que não entregue conhecimento pronto ao aluno, porém, que ele participe da construção do conhecimento fazendo elos com sua realidade. O autor afirmou que há muitas dificuldades em se comunicar com alunos do ensino médio acerca das teorias das matrizes, porque, para os alunos essas teorias não passam de um monte de regras impossíveis de serem assimiladas e manuseadas e não são úteis na prática. Segundo as professoras envolvidas na pesquisa, a principal dificuldade é fazer o aluno enxergar para que serve o assunto.

De acordo com os resultados, Lopes (2008) sugeriu como ministrar o assunto de matrizes vinculado aos métodos de resolução de sistemas lineares, portanto, antes de se ministrar o assunto de matriz é conveniente dar destaque ao estudo dos sistemas lineares. Também sugeriu como utilizar a motivação do aluno para introdução dos conceitos iniciais de matrizes, e a exploração da matriz mágica, aquela matriz em que os elementos estão dispostos de forma que o professor adivinhe a soma ou o produto dos elementos fornecidos pelos alunos. O autor deixou claro no desenvolvimento de seu texto, o quão importante é a utilização de ferramentas auxiliadoras do ensino, como a informática, a investigação da história da matemática, jogos lúdicos entre outros, e usufruir de fato os recursos computacionais quando os sistemas forem demasiadamente grandes.

Ciente de que hoje em dia a maioria dos jovens estão conectados ao universo tecnológico, Steinhorst (2011) buscou com sua pesquisa facilitar a aproximação entre tecnologia e sala de aula de matemática, valorizando os saberes dos alunos e relacionando-os com os conteúdos matemáticos. Para isso propôs uma abordagem de resolução de problemas utilizando um software como apoio. A pesquisa foi feita com 36 alunos do ensino médio no primeiro semestre de 2010 em uma turma do segundo ano do ensino médio de uma escola particular localizada no sul de Porto Alegre, no Rio Grande do Sul.

Steinhorst (2011) fez a seguinte indagação: de que forma a planilha pode contribuir para o ensino de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares? De onde vem o objetivo em constatar com a planilha pode contribuir para o melhor entendimento de matrizes, determinantes e sistemas lineares, com alunos do ensino médio. Como metodologia utilizou instrumentos como questionários e entrevistas parcialmente estruturadas aplicadas para os alunos, o autor cria um estudo inicial para dar sustentação as investigações posteriores. Desenvolveu sua pesquisa em dois momentos distintos. Primeiro, ao utilizar a planilha como recurso na resolução de problemas, dos quais, relacionam os conteúdos de matrizes, determinantes e sistemas lineares em uma parte dos alunos da turma e a outra, o autor desenvolveu os mesmos conteúdos, no entanto, sem a ferramenta computacional. Em seguida, o autor inverteu a pesquisa, fazendo com que as turmas passem pelos mesmos testes.

O autor defendeu que sem a opção do computador, os exemplos ofertados são simplesmente didáticos, logo não teriam utilidade na prática. O autor colocou que a planilha possui funções específicas para multiplicar, somar, subtrair, inverter e determinar o determinante de uma matriz. Com isso, o aluno terá mais tempo para tempo para preocupar-se com a aplicação dos conceitos e com a situação problema. Steinhorst (2011) constatou a partir dos resultados, que intenção em estudar matrizes foi demasiadamente aumentada, e o principal motivo foi que os erros cometidos nas operações aritméticas, que antes eram uma barreira difícil de ultrapassar, com a ajuda do software se trona facilmente transponível.

Por fim, Steinhorst (2011) recomendou a quem desejasse fazer uma pesquisa parecida, que construísse um cronograma de aula no laboratório com os alunos e o explicasse minuciosamente para assegurar o aprendizado dos alunos. Também destacou que para se ter um bom rendimento da turma é necessário que se utilizasse como monitores os alunos com aproveitamento superior.

A pesquisa de Oliveira (2013) objetivou mostrar a elaboração e a realização de uma sequência didática, o autor abordou o estudo de matrizes através do uso da criptografia como ferramenta de ensino, apropriando para tanto uma prática de ensino fundamentada na engenharia didática. A construção da sequência permeia por uma aula de aproximadamente cem minutos, seguindo os pressupostos: 1) é preciso praticar na sala de aula algo que fugisse do cotidiano dos alunos; 2) usar um tema de fácil compreensão e manuseio dos alunos; 3) utilizar o currículo da disciplina que seja coerente com a série na qual está sendo aplicada a sequência; 4) sair do tradicional sem esquecer o que prescreve o currículo.

Oliveira (2013) afirmou que a mensagem criptografada pode ser decodificada de acordo com o método da transposição, isto é, ficar olhando para a mesma, ficar olhando e depois tentar desembaralhar empiricamente. No entanto, este modelo dispõe de um grau de dificuldade elevado e é bastante difícil de se obter o sucesso. Por isso, a utilização das matrizes é indispensável, a decodificação se torna mais fácil e a mensagem é encontrada sem grandes dificuldades. Tal aplicação foi realizada com 50 alunos constituintes de duas turmas do ensino médio de uma escola estadual, localizada em Ourinhos no estado de São Paulo.

O autor descreve que ao copiar a mensagem criptografada na lousa, chamou a atenção de alunos que não se interessavam nas aulas de matemática que se sentiram instigados a tentar desvendar o enigma, o que começou a incomoda-los, pois não conseguiam resolver o problema, o que os levou na direção das matrizes e foi a linha de largada para se chegar até o mundo das matrizes. Oliveira (2013) apresentou como resultados preliminares que o processo de se chegar ao resultado do enigma sem a ajuda das matrizes não era muito satisfatório, vários alunos se desanimaram e abandonaram a atividade, deixando a cargo dos outros colegas de classe descobrirem o resultado.

No entanto, o autor considera que até no fracasso existe aprendizado, logo a etapa não foi de total desperdício, constatou isso, a partir da visualização dos comentários dos alunos nos relatórios e os mesmos esperavam situações que se aproximassem da sua realidade. Por fim, Oliveira (2013) concluiu que se o aluno querer ou não participar de uma atividade, está diretamente ligado ao fato da aprendizagem ser significativa e que este aluno deve construir o conhecimento e ser o personagem principal deste processo.

Para Meconi Júnior (2010), em sua pesquisa que investigava a formação continuada dos professores de matemática de ensino médio, que objetivou o grau de compreensão e a prática de repassar os conhecimentos que tais professores possuem do assunto matrizes e determinantes. Utilizou a contribuição de uma sequência didática que trazia problemas práticos e dos conceitos do conteúdo, o autor defende o uso das tecnologias educacionais no processo de ensino, destacando que tais tecnologias jamais substituirão os professores nem tampouco a capacidade que os mesmos têm de domínio sobre o assunto.

A pesquisa foi desenvolvida com professores de escola pública do estado de São Paulo que realizaram as atividades dinâmicas com acompanhamento do pesquisador, que realizou uma oficina de formação continuada, a qual geraria subsídios para efetuar a coleta dos dados, nesta oficina, realizaram atividades com e sem o uso de software Winmat. Dentre os subitens das atividades, estes continham situações em que as dificuldades conceituais dos docentes são manifestadas e a pesquisa visa superar essas dificuldades, e que, segundo o autor, foi alcançado. Ainda de acordo com Meconi Júnior (2010), o controle sobre os recursos tecnológicos traz a restauração dos conceitos matemáticos desenvolvidos em questão, abrindo os olhos dos docentes participantes da pesquisa para a importância do uso desses recursos tecnológicos nas aulas de matemática.

Silva (2012) pesquisou o assunto de matrizes, com alunos da educação especial, em especial, àqueles com limitações de visão e audição, estes que a autora já possui experiência de trabalho, segundo a autora, os professores não se sentem e não estão preparados para ter alunos especiais em sala de aula. De acordo com a autora, um fator preponderante para a construção pesquisa, foi a pequena quantidade de trabalhos que contemplem o assunto de matrizes, ela analisou o processo de aprendizagem deste conteúdo com a utilização de materiais por alunos do 2º ano do ensino médio.

A secretaria de Educação do estado de São Paulo, local onde foi feita a pesquisa, com relação a proposta curricular, encara o assunto como sendo parte do campo de tratamento da informação, enfatizando que o assunto de matriz é vastamente aplicado ao campo computacional, e quase não é explorado por alunos do ensino médio. Assim, Silva (2012) critica tal proposta, dizendo que ela não é adequada a vida do estudante, principalmente nesta pesquisa em que os conhecimentos da informática não são prioridades.

Dessa forma, Silva (2012) procurou dar resposta à pergunta: Qual o papel das ferramentas materiais no processo do ensino do conceito de matriz para alunos cegos e surdos do ensino médio, estabelecidos em escolas públicas? Para ajudar a dar essa resposta, Silva (2012), se apoderou da Design Experiments, tecnologia de pesquisa experimental voltada principalmente para pesquisas na área de Educação Matemática, que visa buscar sequências de padrões nos alunos durante o desenvolvimento da atividade, relacionando –se com os meios onde o intelecto do aluno se apoiou.

No caso da pesquisa, o professor é o elemento ativo, no que se refere ao desenvolvimento e observação. Assim, com esta metodologia a autora seguiu a seguinte etapa – 1) Estudo piloto exploratório, onde são pensadas e configuradas as atividades que, na sala de aula, utilizarão ferramentas para atender vários alunos – 2) Esta fase foi descrita como “Adição e igualdade de Matrizes”, que, com a utilização das ferramentas os alunos reconheçam e calculem a adição e a igualdade de matrizes – 3) Análise do procedimento, investiga o referencial teórico, observando o desempenho dos alunos com os instrutores e as ferramentas, verificando as contribuições e as limitações destas ferramentas de ensino.

Silva (2012) apoderou-se da ferramenta chamada MATRIZMAT, constituída por caixinhas de plástico representando os elementos das matrizes, que se chamavam de QUADRIX, que foram usadas em duas etapas, com alunos cegos; cartas em relevo com adaptações da representação que os videntes usavam para as matrizes. Com os alunos surdos, a ferramenta MATRIZMAT foi composta de outros objetos, como: botões de formatos variados e números e E.V.A, usados durante os encontros.

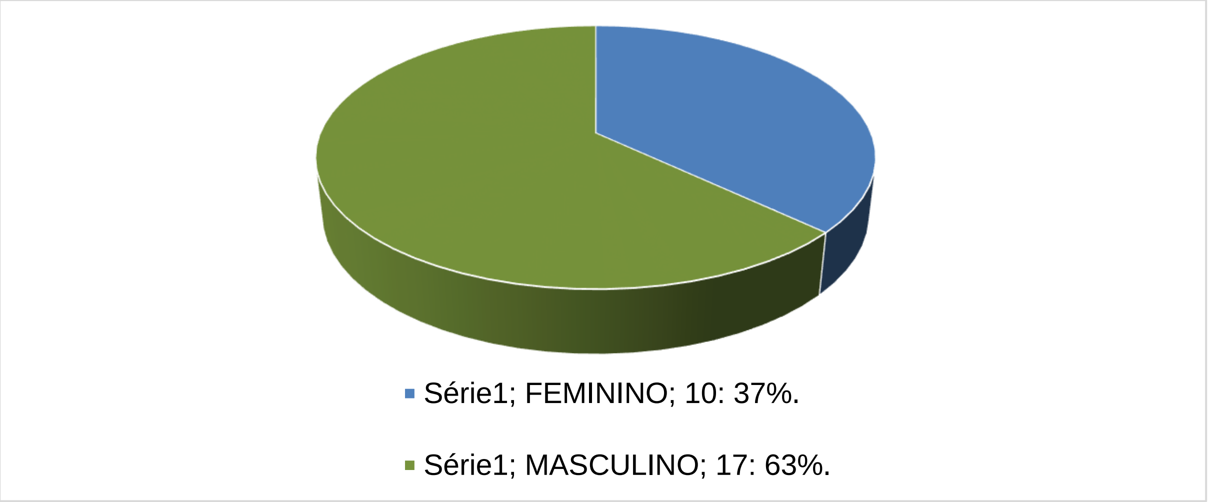
Como resultados, Silva (2012) verificou que os alunos se relacionaram bem com os recursos, mesmo em que as vezes os conceitos parecerem intrigantes. Os cegos, por intermédio da ferramenta, conseguiram notar condições para a igualdade e a adição das matrizes, seu aprendizado foi muito peculiar, tal que, ainda não havia sido proposto com os métodos tradicionais de ensino. Os surdos, apresentaram progressos desde a primeira atividade, como, criar sinais que serviriam para todas as atividades, como, localizar os elementos das matrizes e a ferramenta facilitou o método da adição de matrizes e favoreceu o entendimento da representação das matrizes no papel.

Desse modo, por fim, Silva (2012), concluiu a respeito do recurso MATRIZMAT que favoreceu a representação das matrizes tanto para cegos quanto para surdos, considerando as características individuais de cada aluno, o autor acreditava que a utilização das ferramentas nas aulas de matemática deixará todos os alunos em iguais condições ao aprendizado, uma vez que não existe diferenciação de intelectualidade entre cegos e videntes, porém, o que faltam são opções para que isso se torne possível.

2.4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Participaram desta pesquisa 29 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual do município de Abaetetuba, sendo 37% (10) do sexo feminino e 63% (17) do sexo masculino, conforme demonstra o Gráfico 1:

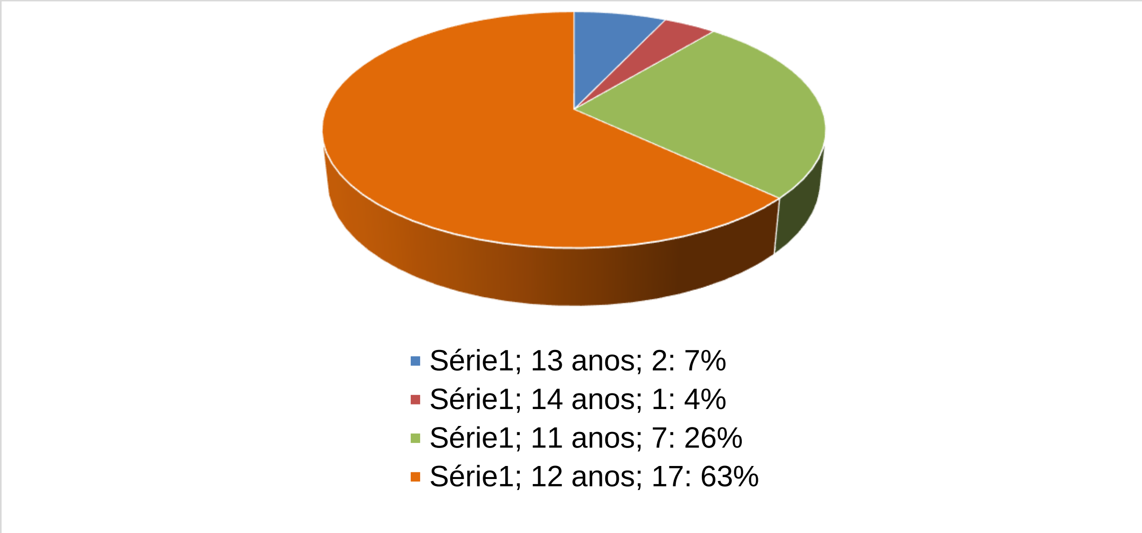
Gráfico 1 - Distribuição dos alunos por sexo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

A faixa etária dos alunos também foi verificada, identificando que os alunos possuem entre 11 e 14 anos, sendo 19% (7) com 11 anos de idade, 46% (17) com 12 anos, 32% (2) com 13 anos e 3% (1) com 14 anos, como ilustra o Gráfico 2:

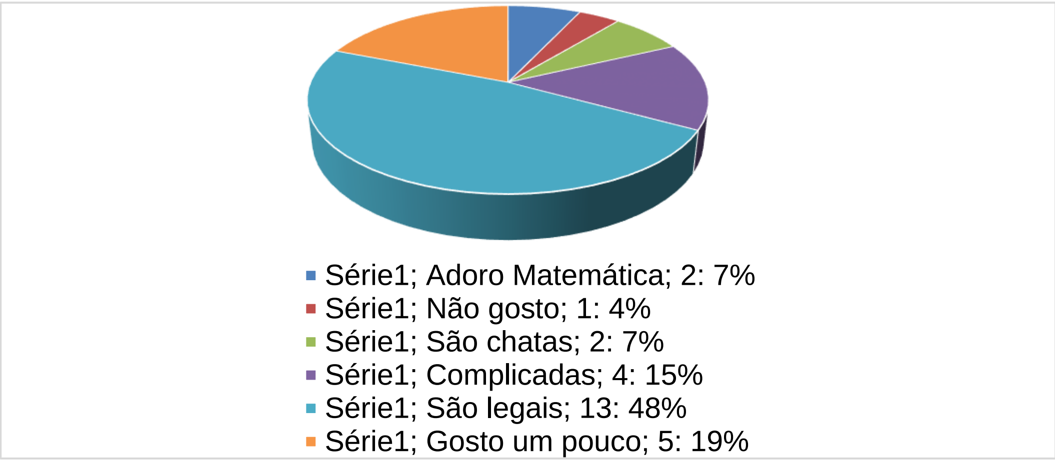
Gráfico 2 - Distribuição dos alunos por faixa etária



Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Conhecendo o perfil dos alunos que participaram desta pesquisa, no tópico a seguir analisa-se o pré-teste realizado com os mesmos. Inicialmente foi verificada sua percepção sobre as aulas de Matemática como um todo, verificando-se os seguintes resultados:

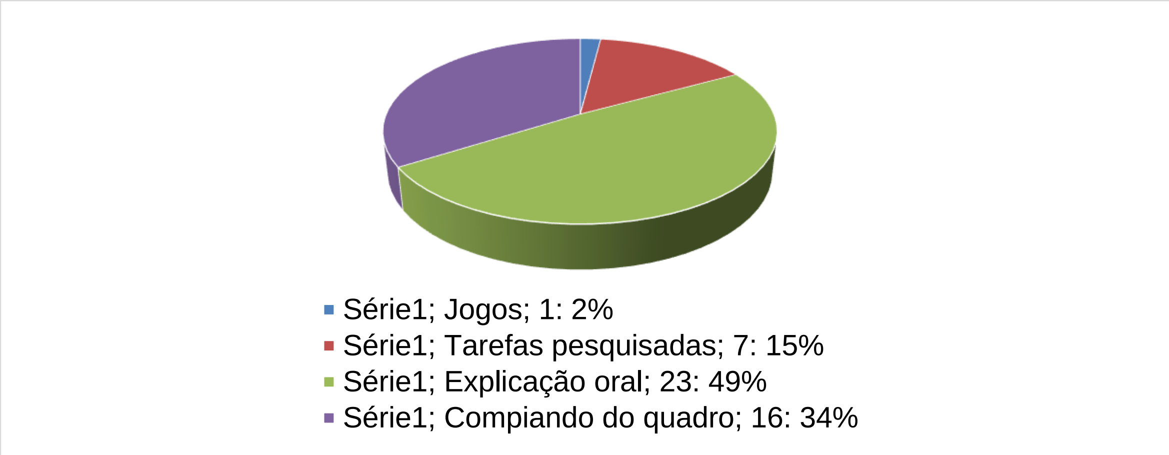
Gráfico 3 - Percepção dos alunos sobre as aulas de Matemática



Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Como se verifica no Gráfico 3, 48% (13) dos alunos afirmam que as aulas de Matemática são legais, enquanto 19% (5) afirmam gostar um pouco, 15% (4) afirmam serem complicadas, 7% (2) adorar Matemática, 7%(2) serem chatas e 4% (1) dizem não gostar das aulas. Dando continuidade se tem a pergunta relacionada à transmissão dos conteúdos escolares, verificando os resultados expostos no Gráfico 4:

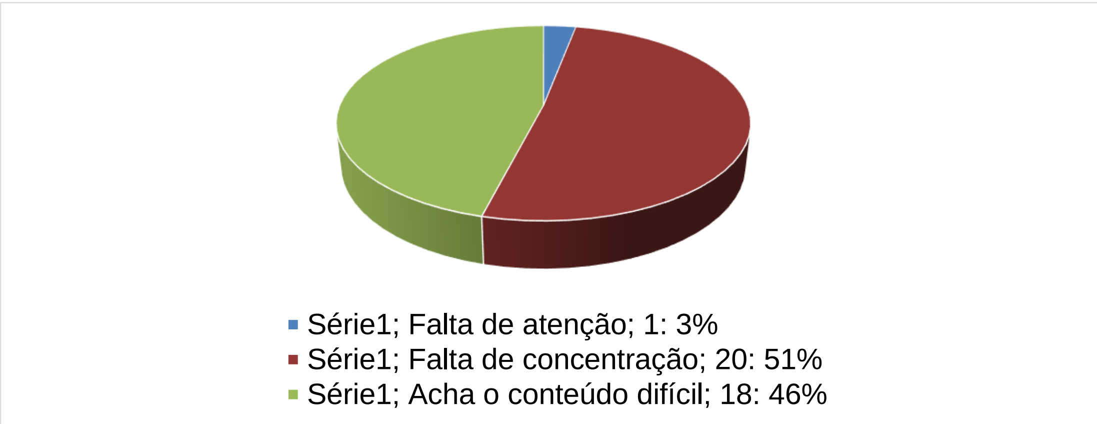
Gráfico 4 - Forma de transmissão dos conteúdos nas aulas de Matemática



Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Como se verifica a explicação oral é predominante (49%/23), seguida de cópia do quadro (34%/16), métodos considerados como tradicionais. As tarefas pesquisadas também são bem utilizadas com 15% (7) das respostas, enquanto os jogos recebem pouca expressividade com 2% (1) das respostas. Ainda visando caracterizar as aulas de Matemática para os alunos foi perguntado qual era sua maior dificuldade na aprendizagem, verificando-se os resultados ilustrados no Gráfico 5:

Gráfico 5 - Dificuldades nas aulas de Matemática

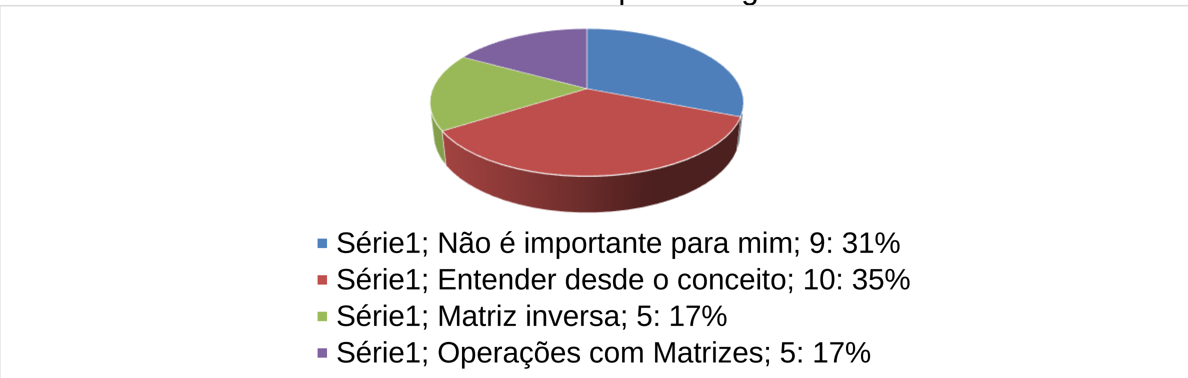


Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Como se verifica, a maioria dos alunos destaca falta de concentração como motivo para dificuldade de aprendizagem nas aulas de Matemática (51%/20), fator agregado a falta de artifícios que chamem a atenção dos alunos, como por exemplo o uso de tecnologias disponíveis; 46% (18) afirmaram ser o conteúdo de difícil aprendizagem e 3% (1) afirmou ter falta de concentração.

Enfocando o ensino de Matrizes foi perguntado aos alunos quais eram suas principais dificuldades, verificando-se os resultados apresentados no Gráfico 6.

Gráfico 6 - Dificuldades na aprendizagem de Matrizes



Fonte: Elaborado pelo autor

Como se verifica no Gráfico 6, os alunos se dividem no que consideram suas principais dificuldades na aprendizagem de Matrizes, destacando-se o entendimento geral, as operações com Matrizes, o entendimento sobre Matrizes Inversas, com 31% acreditando que o conteúdo não é importante para sua vida, o que evidencia a necessidade de contextualização do ensino de Matrizes para tornar a aprendizagem significativa para os alunos.

2.5 CONSIDERAÇÕES SOBRE AS ANÁLISES PRELIMINARES

A percepção dos alunos que participaram da pesquisa foi positiva em relação ao uso de novas tecnologias nas aulas de Matemática, podendo-se perceber em suas respostas que mais do que facilitar o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos, tais recursos didáticos permitem melhorar a socialização e interesse dos alunos, contribuindo com a melhoria do trabalho, de preferência, em equipe, trazendo, portanto, aprendizagem e interação de vida para esses estudantes.

Ao final do estudo é possível destacar a complexidade do conteúdo sobre Matrizes e as dificuldades enfrentadas por muitos alunos, sendo possível perceber que a aprendizagem é facilitada pelo emprego de tecnologias que favoreçam a didática do professor e aprendizagem dos estudantes, constatando-se que estes últimos acreditam que podem melhorar seu desempenho na aprendizagem de Matrizes, destacando-se a necessidade de contextualizar a realidade dos mesmos.

A pesquisa possibilitou o alcance dos objetivos deste trabalho, sugerindo que futuras pesquisas utilizem tecnologias capazes de captar a atenção dos alunos para com a aprendizagem de uma maneira facilitadora, buscando o ensino de outros conteúdos específicos para que se possa constatar se o recurso didático contribui de fato para o processo de ensino e aprendizagem, devendo o professor assumir uma postura de mediador desse processo, indo além da transmissão de conteúdo por via oral e cópia do quadro e passando a utilizar meios que envolvam e motivem seus alunos.

3 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI: SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MATRIZES

O presente tópico desta pesquisa vem com o objetivo de transcorrer sobre informações que envolvem entendimento da sequência didática para o ensino de matrizes dentro da concepção proposta e suas consequentes análises.

3.1 RIGOR MATEMÁTICO: MATRIZES.

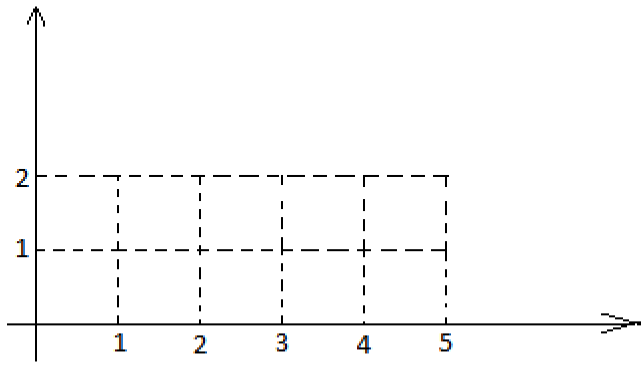
Chama-se matriz retangular, ou simplesmente matriz m×n a uma correspondência que associa a qualquer elemento (i,j)∈I×J um único elemento $a_{ij}€R$.

O número a_{ij} é chamado imagem do par (i, j).

Adaptado de Fainguelernnt (1980) Sejam $I = \{1, 2, 3, 4, 5\} e\ J = \{1, 2\}$

Calculemos $I \times J$:

$$I \times J = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2)$$



Observando o gráfico e utilizando a definição de matrizes:

$$a_{11} \text{é } a\ imagem\ do\ par\ (1,1);$$

$$a_{12} \text{é } a\ imagem\ do\ par\ (1,2);$$

E assim sucessivamente. Podemos então representar o gráfico acima da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \end{pmatrix}$$

Logo, uma matriz A, $m \times n$, (m por n), é uma tabela de $m.n$ números dispostos em m linhas e n colunas do seguinte modo: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$.,

A i-ésima linha de A é, $[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}]$, para $i = 1, \dots, m$ e a j-ésima coluna de A é $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$, para $j = 1, \dots, n$.

Usamos também a notação $A = (a_{ij})_{m\times n}$ para designar a matriz A por seus elementos genéricos a_{ij} e sua ordem $m \times n$.

Se na matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, tivermos $m = n$, dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n e os elementos $a_{11} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{nn}$ formam a diagonal principal de A.

Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}, D = [1 \quad 3 \quad -2], E = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}\ e\ F = [3]$$

As matrizes A e B são 2×2. A matriz C é 2×3, D é 1×3, E é 3×1 e F é 1×1. De acordo com a notação que foi introduzida acima, exemplos de elementos de algumas matrizes dadas são $a_{12} = 2$, $c_{13} = 0$, $e_{21} = 4$ e $f_{11} = 3$. Uma matriz que possui apenas uma única linha é chamada $matriz\ linha$ e uma matriz que possui uma única coluna é chamada $matriz\ coluna$.

3.1.1 Operações com Matrizes

No tópico precedente, as matrizes foram definidas como sendo dispositivos retangulares de números (NOBLE, 1986), a fim de com estes dispositivos, é necessário especificar regras para comparar ou combinar matrizes. Em particular, deve-se desenvolver, para as matrizes, regras que correspondem às que governam a igualdade, adição, subtração, multiplicação e divisão dos números ordinários. Enunciaremos agora estas regras, sem tentar fornecer nenhuma motivação, além de dizer que elas se revelam ser exatamente as exigidas para lidar com dispositivos de números que ocorrem nas aplicações e problemas.

3.1.1.1 Igualdade de Matrizes

As matrizes A e B são chamadas *iguais* se e somente se:

(a) A e B tem a mesma quantidade de linhas e a mesma quantidade de colunas.

(b) Todos os elementos correspondentes são iguais, isto é $a_{ij} = b_{ij} \qquad (todos\ i, j)$

3.1.1.2 Adição de Matrizes

A soma de duas matrizes de mesmo tamanho $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é definida como sendo a matriz $C = A + B$ de mesma ordem $m \times n$, obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Considere as seguintes matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ se chamarmos de C a soma das matrizes A e B, então: $C = A + B = \begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+1 & -3+5 \\ 3+0 & 4+3 & 0+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$

Observação: A diferença entre duas matrizes A e B, ou seja, $A - B$ é obtida através da soma da matriz A com a $oposta$ da matriz B, $-B$, assim; $A - B = A + (-B)$.

3.1.1.3 Produto por um escalar

A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ por um escalar λ é definida pela matriz $B = \lambda.A$ de ordem $m \times n$ obtida multiplicando cada elemento de A pelo escalar λ, ou seja, $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Dizemos que a matriz B é um $múltiplo\ escalar$ de A.

O produto de $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ pelo escalar -3 é dado por

$$-3A = -3\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)(-2) & (-3)1 \\ (-3)0 & (-3)3 \\ (-3)5 & (-3)(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}$$

3.1.1.4 Produto de Matrizes

O Produto de duas matrizes, tais que o **número de colunas da primeira é igual ao número de colunas da segunda**, ou seja, $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é definido pela matriz $C = A.B$ de ordem $m \times n$ obtida da seguinte forma: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

A equação matricial $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$ está dizendo que o elemento i, j do produto é igual à soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna de B.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

A equação matricial acima pode ser escrita de forma mais compacta sob a forma de somatório.

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

E dizemos somatório de k variando de 1 a p de $a_{ik}b_{kj}$. Considere as matrizes.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, se chamarmos de C o produto das matrizes A e B, então: $C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 1(-2) + 2.0 + (-3).5 & 1.1 + 2.3 + (-3)(-4) & 1.0 + 2.0 + (-3).0 \\ 3(-2) + 4.0 + 0.5 & 3.1 + 4.3 + 0(-4) & 3.0 + 4.0 + 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 0 \\ -6 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação: No exemplo anterior o produto $B.A$ não está definido (por quê?). Entretanto, mesmo quando ele está definido, $B.A$ pode não ser igual a $A.B$, ou seja, o produto de matrizes não é **comutativo**, como mostra o exemplo seguinte.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Então,

$AB = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$.

Veremos no próximo exemplo como as matrizes podem descrever um processo de produção. Uma indústria produz três produtos X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo A e B, para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama do insumo A e 1 grama do insumo B; para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. Usando matrizes podemos determinar quantos gramas dos insumos A e B são necessários na produção de x kg do produto X, y kg do produto Y e z kg do produto Z.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A\ ; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\ ; AX = \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x + y + 4z \end{bmatrix}$$

- Primeira linha da matriz A; (Gramas de A(kg))
- Segunda linha de A; (gramas de B(kg))
- Primeira, segunda e terceira coluna de A, respectivamente: x, y e z
- Primeira linha de AX; (gramas de A usados)
- Segunda linha de AX; (gramas de B usados)

3.1.2 Matriz Transposta

A transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é definida pela matriz $n \times m$, tal que $B = A^t$. Assim obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja, $b_{ij} = a_{ji}$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Podemos escrever também $[A]^t{}_{ij} = a_{ji}$. A transpostas das seguintes matrizes são:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\ e\ C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B^t = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\ e\ C^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A seguir mostraremos as propriedades válidas na álgebra de matrizes, das quais, várias são semelhantes àquelas conhecidas para números reais, porém, devemos tomar cuidado com uma delas que é válida para números reais, mas não é válida para as matrizes, à Comutativa do produto.

3.1.2.1 Propriedades das Matrizes

Sejam A, B e C matrizes de mesma ordem, α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades para as operações envolvendo matrizes.

i) Comutativa: $A + B = B + A$

Prova: $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = [B + A]_{ij}$;

ii) Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

Prova: $[A + (B + C)]_{ij} = a_{ij} + [B + C]_{ij} = a_{ij} + \left(b_{ij} + c_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right) + c_{ij} = (A + B)_{ij} + c_{ij} = \left[(A + B)_{ij} + C_{ij}\right]$;

iii) Elemento Neutro: A matriz $\bar{0}, m \times n$, definida por $[\bar{0}]_{ij} = 0$, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ é tal que, $A + \bar{0} = A$, para toda matriz $A, m \times n$. A matriz $\bar{0}$ é chamada matriz nula $m \times n$.

Prova: Seja X uma matriz $m \times n$ tal que, $A + X = A$ (*) Para qualquer matriz $A_{m\times n}$, comparando os elementos correspondentes, temos que $a_{ij} + x_{ij} = a_{ij}$, ou seja, $x_{ij} = 0$ para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, portanto a única matriz que satisfaz (*) é a matriz em que todos os seus elementos são iguais a zero. Indicamos a matriz X por $\bar{0}$.

iv) Elemento simétrico: Para cada matriz A, existe uma única matriz $-A$, definida por $[-A]_{ij} = -a_{ij}$, tal que, $A + (-A) = \bar{0}$.

Prova: Dada uma matriz $A_{m\times n}$ seja X uma matriz $m \times n$, tal que $A + X = \bar{0}$ (*), comparando os elementos correspondentes, temos que $a_{ij} + x_{ij} = 0$, ou seja, $x_{ij} = -a_{ij}$ para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Portanto a única matriz que satisfaz (*) é a matriz em que todos os elementos são iguais aos simétricos dos elementos de A. Indicamos a matriz X por $-A$.

v) Associativa: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;

Prova: $[\alpha(\beta a)]_{ij} = \alpha[\beta a]_{ij} = \alpha(\beta a_{ij}) = (\alpha\beta)a_{ij} = [(\alpha\beta)A]_{ij}$;

vi) Distributiva: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

Prova: $[(\alpha + \beta)A]_{ij} = (\alpha + \beta)a_{ij} = (\alpha a)_{ij} + (\beta a)_{ij} = [\alpha A]_{ij} + [\beta A]_{ij} = [\alpha A + \beta A]_{ij}$;

vii) Distributiva: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

Prova: $[\alpha(A + B)]_{ij} = \alpha[A + B]_{ij} = \alpha\left(a_{ij} + b_{ij}\right) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} = [\alpha A]_{ij} + [\alpha B]_{ij} = [\alpha A + \alpha B]_{ij}$;

viii) Associativa: $A(BC) = A(BC)$;

Prova: Sejam A, B e C as matrizes $m \times p, p \times q \times$ e $q \times n$ respectivamente. A notação do somatório aqui pode ser muito útil, pelo fato de ser compacta.

$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}[BC]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{q} b_{kl}c_{lj}\right) =$
$\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_{ik}\left(b_{kl}c_{lj}\right) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{l=1}^{q} a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^{k}[AB]_{il}c_{lj} =$
$[A(BC)]_{ij}$;

ix) Elemento Neutro: Para cada inteiro positivo p a matriz $p \times p$, $I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$, chamada matriz identidade é tal que, $AI_n = I_nA = A$, para toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Prova: Podemos escrever a matriz identidade em termos do delta de Kronecker que é definido por $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}$, como $[I_n]_{ij} = \delta_{ij}$. Assim, $[AI_n]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}[I_n]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}$;

A outra igualdade é análoga.

x) Distributiva: $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$;

Prova: $[A(B + C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}[B + C]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\left(b_{kj} + c_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} = [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB + AC]_{ij}$;

A outra igualdade é análoga.

xi) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

Prova: $[\alpha(AB)]_{ij} = \alpha\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(\alpha a_{ik})b_{kj} = [(\alpha A)B]_{ij}$ e

$$[\alpha(AB)]_{ij} = \alpha\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\left(\alpha b_{kj}\right) = [A(\alpha B)]_{ij};$$

xii) $(A^t)^t = A$;

Prova: $[(A^t)]^t{}_{ij} = [A^t]_{ji} = a_{ij}$;

xiii) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

Prova: $[(A + B)^t]_{ij} = (A + B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = [A^t]_{ij} + [B^t]_{ij}$;

xiv) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

Prova: $[(\alpha A)^t]_{ij} = (\alpha A)_{ji} = \alpha a_{ji} = \alpha[A^t]_{ij} = [\alpha A^t]_{ij}$;

xv) $(AB)^t = B^t A^t$

Prova: $[(AB^t)]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} [A^t]_{kj} [B^t]_{ik} = \sum_{k=1}^{p} [B^t]_{ik} [A^t]_{kj} = [B^t A^t]_{ij}$;

3.1.2.2 Diferença de Matrizes

A **diferença** entre duas matrizes acontece como já comentado na observação do item 3.1.1.2 de adição de matrizes. Assim, definimos a **potência** p de A, por $A^p = \underbrace{A.\dots.A}_{p\ vezes}$. E para $p = 0$, definimos $A^0 = I_n$.

Vamos verificar se para as matrizes quadradas A e B vale a igualdade $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

Utilizando a propriedade distributiva demostrada acima, temos;
$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 = (A+B)A + (A+B)(-B) = AA + BA - AB - BB = A^2 + BA - AB - B^2$.

Assim, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se, e somente se, $BA - AB = 0$, ou seja, se, e somente se, $BA - AB = 0$. Como o produto de matrizes não é comutativo, concluímos que a igualdade $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ não vale para matrizes em geral. Utilizaremos como contraexemplo duas matrizes que não comutem entre si.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Para estas matrizes:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B^2 = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim:

$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^2 - B^2.$$

3.1.3 Matriz Inversa

A matriz inversa também pode ser chamada de matriz invertível, tratando-se de um tipo de matriz quadrada, ou seja, que possui o mesmo número de linhas e colunas. Sua ocorrência pode ser vista quando o produto entre duas matrizes traz como resultado uma matriz identidade de mesma ordem.

Por matriz identidade deve-se entender por aquela que é formada por elementos iguais a 0 e a 1, sendo que os elementos da diagonal são todos iguais a 1, conforme demonstra o exemplo a seguir:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, matriz\ identidade\ de\ ordem\ 3.$$

As matrizes inversas possuem as seguintes propriedades: Existe somente uma inversa para cada matriz; Nem todas as matrizes possuem uma matriz inversa; Ela é invertível somente quando os produtos de matrizes quadradas resultam numa matriz identidade (I_n); A matriz inversa de uma inversa corresponde à própria matriz: $A = (A^{-1})^{-1}$; A matriz transposta de uma matriz inversa também é inversa: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$; A matriz inversa de uma matriz transposta corresponde à transposta da inversa: $(A^{-1}A^t)^{-1}$; e a matriz inversa de uma matriz identidade é igual à matriz identidade: $I^{-1} = I$. A seguir apresenta-se um exemplo de matriz inversa:

A é inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ é } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}.A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Para calcular uma matriz inversa faz-se necessário lembrar das suas propriedades, principalmente no que diz respeito ao fato de que a multiplicação de uma matriz por sua inversa resultará em uma matriz identidade $(A.A^{-1} = I)$. A partir disso, é possível montar a seguinte operação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inicia-se então a multiplicação, cada elemento da primeira linha da primeira matriz por cada coluna da segunda matriz, montando, assim, equações para que as incógnitas possam ser descobertas, como se mostra no exemplo:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a+3d+g & b+3e+h & c+3f+i \\ a+2d & b+2e & c+2f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os cálculos devem ser feitos um a um para que, com isso, seja possível descobrir o valor de cada incógnita e, então, encontrar a matriz inversa, levando-se em consideração o posicionamento de cada resultado.

No entanto, o cálculo da matriz inversa de ordem 3 de acordo com o método indicado acima pode ser demasiadamente cansativo, tentaremos indicar outra forma de encontrar a inversa de uma matriz, para tal, necessitaremos do uso do conhecimento dos determinantes, o qual será apresentado abaixo.

Para generalizar o cálculo da matriz inversa, será apresentado em breve o método que utiliza matrizes especiais que serão definidas no decorrer do trabalho, matrizes tais como, Simétrica, Adjunta, Determinante de uma matriz e matriz dos Cofatores. Tal método, como já foi justificado anteriormente, será apresentado como uma sequência lógica de passos baseados nas devidas definições indicadas, facilitando assim a compreensão dos estudantes do ensino médio ou qualquer pessoa que deseje conhecer uma forma simplificada de calculara a inversa de uma matriz sem necessariamente ter que desenvolver e resolver um sistema linear de duas ou mais variáveis.

3.1.3.1 Matriz Simétrica

Se uma matriz A é tal que $A^T = A$, dizemos que A é simétrica. Então, uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ para todos os valores de i e j. Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ e também KA é simétrica para qualquer escalar K.

(FRANK AYRES, 1971).

3.1.3.2 Determinantes

Consideremos o sistema de equações a duas incógnitas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Resolvendo, multiplicamos a 1ª equação por $(-a_2)$ e a 2ª equação por $(+a_1)$

$$\begin{cases} -a_1a_2x - a_2b_1y = -a_2c_1 \\ +a_1a_2x + a_1b_2y = +a_1c_2 \end{cases}$$

Somando, 1

$$(a_1a_2 - a_1a_2)x + (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (2)$$

Analogamente, obteremos o valor de x, multiplicando a 1ª equação de (1) por b_2 e a 2ª equação de (1) por $(-b_1)$ e depois somando, o

$$a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1$$

$$-b_1a_2x - b_1b_2y = -b_1c_2$$

$$- - - - - - - - - - - - - - -$$

$$(a_1b_2 - b_1a_2)x + 0 = b_2c_1 - b_1c_2$$

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \qquad (3)$$

Se $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, o sistema tem uma única solução. Por outro lado, escrevendo o sistema (1) como um produto de matrizes, tem-se: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, através desta notação deduziremos um outro método de resolução do sistema (1). A matriz $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ de 2ª ordem formada com os coeficientes de $x\ e\ y$; associamos a A um número real que se obtém da seguinte maneira:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2,$ onde $(a_1b_2) \rightarrow produtodos\ elementos\ da\ diagonal\ principal,$ e $(b_1a_2 \rightarrow produto\ dos\ elementos\ da\ diagonal\ secundária).$

Observemos que se substituirmos em Δ os coeficientes de $x, a_1\ e\ a_2,$

respectivamente pelos termos conhecidos, $c_1\ e\ c_2$, obteremos Δx:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = b_2c_1 - b_1c_2$$

Consequentemente obteremos Δy, substituindo em Δ os coeficientes de $y, b_1\ e\ b_2$, respectivamente por $c_1\ e\ c_2$, isto é:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Se $\Delta \neq 0$ resulta que $x = \frac{\Delta x}{\Delta}\ e\ y = \frac{\Delta y}{\Delta}$, basta comparar com (2) e (3), obtidas anteriormente, e o sistema tem uma única solução.

O número Δ é chamado determinante do sistema (1).

Para resolver sistemas de n equações e n incógnitas, $n \geq 2$, empregando o que foi visto acima, estudaremos a teoria dos determinantes.(FRANK AYRES, 1971)

3.1.3.3 Cofator

Dada uma matriz quadrada de ordem n, tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \cdots a_{nj} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se eliminarmos na matriz A a linha i e a coluna j obteremos uma outra matriz de ordem $(n-1)$ cujo determinante multiplicado por $(-1)^{i+j}$ é denominado cofator de a_{ij} e é indicado por A_{ij}.

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, obteremos os cofatores $A_{23}, A_{21}\ e\ A_{22}$

De fato,

$A_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$, é obtido eliminando-se em A a 2ª linha e 3ª coluna.

$A_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, é obtido eliminando-se em A a 2ª linha e 1ª coluna.

$A_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$, é obtido eliminando-se em A a 2ª linha e 2ª coluna.

3.1.3.4 Definição de Determinante (Laplace)

Determinante de uma matriz quadrada de ordem n é o número real que se obtém da soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna por seus respectivos cofatores.

Vamos determinar o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Segundo os elementos da 2ª linha, temos:

$$det(A) = 3.(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3(8+0) - 1(28-6) + 2(0-4) = 24 - 22 - 8 = -6$$

3.1.3.5 Observações importantes sobre determinantes

1) o determinante pode ser representado por um traço vertical de cada lado;
2) o produto dos elementos da diagonal principal é denominado termo principal;
3) só tem sentido falar de determinante associado a uma matriz quadrada;
4) desenvolvendo segundo os elementos de qualquer outra linha ou coluna, obtém-se o mesmo resultado.

3.1.3.6 Valor de um Determinante

(I) $n = 1$, o determinante $|A|$ da matriz A é seu único elemento.

$$A = (A_{11}) \Longrightarrow |A| = a_{11}$$

(II) $n = 2$, o determinante $|B|$ da matriz B é:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow |B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

(III) $n = 3$, regra prática para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Apliquemos a definição de Laplace neste caso. Desenvolvendo segundo os elementos da 1ª linha:

$$| A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Ou seja:

$$detA = |A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Poderemos obter facilmente os termos do desenvolvimento acima, adotando a seguinte disposição, que denominada Regra de Sarrus.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Repetindo do lado direito do determinante as duas primeiras colunas do mesmo, tem-se:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Multiplicam-se os termos entre si, da seguinte maneira: os termos da diagonal principal e paralelas por 1 e os termos da diagonal secundária e paralelas por (-1).

Uma outra maneira de se determinar a matriz inversa de uma outra matriz é o método conhecido como “ Método de inversão por matriz inversa”, pode ser um método mais longo do que os indicados anteriormente, porém, pode ser mais simples pois não recai em n sistemas de n equações. A utilização desse método depende de um teorema que será devidamente demonstrado em seguida.

3.1.3.7 Matriz Adjunta

Seja A uma matriz $n \times n$, define-se matriz adjunta de A, denotada por $adj(A)$, como a transposta da matriz formada pelos Cofatores de A, ou seja:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$ onde $A_{ij} =$

$(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ é o cofator do elemento a_{ij}, para $i, j = 1, \dots, n$.

Se A é uma matriz $n \times n$, então $A(adjA) = (adjA)A = \det(A)I_n$;

Temos $adj(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & A_{j1} & & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{j2} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{jn} & & A_{nn} \end{pmatrix}$

O $i, j - ésimo$ elemento da matriz produto $A(adjA)$ é:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \det(A)\ se\ i = j$$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0\ se\ i \neq j$$

Isto significa que:

$$A(adjA) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I_n$$

O $i, j - ésimo$ elemento da matriz produto $(adjA)A$ é:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \det(A)\ se\ i = j$$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0\ se\ i \neq j$$

Assim, $adj(A) = \det(A)I_n$.

Utilizaremos o resultado acima para demonstrar o método de encontrar a inversa de uma matriz através da matriz adjunta.

Se A é uma matriz de ordem $n \times n$ e $\det(A) \neq$, então:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(adjA) = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\det(A)} & \frac{A_{12}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{1n}}{\det(A)} \\ \frac{A_{12}}{\det(A)} & \frac{A_{22}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\det(A)} & \frac{A_{2n}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

Da conclusão anterior, temos que $A(adjA) = (adjA)A = \det(A)I_n$. Se $\det(A) \neq 0$, então:

$$A\frac{1}{\det(A)}(adjA) = \frac{1}{\det(A)}[A(adjA)] = \frac{1}{\det(A)}(\det(A)\,I_n) = I_n.$$

Logo, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(adjA) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\bar{A}$, onde $\bar{A} = adj(A)$.

Em resumo, para encontrar a inversa de uma matriz recorrendo ao método da matriz adjunta, devem-se seguir a seguinte sequência lógica de ações:

1- calcular o determinante da matriz M, ou seja $\det(M)$;

2- calcular a matriz C dos Cofatores de M;

3- determinar a matriz adjunta $\overline{M}$ de M;

4- calcular $M^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\overline{M}$;

3.2 ATIVIDADE 1: NOÇÃO DE MATRIZES

Objetivo:

- ✓ Reconhecer a matriz como conjunto de dados expostos em tabelas.

Material:

- ✓ Roteiro, lápis ou caneta.

Procedimentos:

i) Ler o texto;

ii) Considere os elementos dispostos na horizontal como elementos de uma linha;

iii) Considere os elementos dispostos na vertical como elementos de uma coluna

iv) De acordo com o texto e as questões abaixo faça o que se pede;

TEXTO 1.1:

Durante o ano letivo um aluno registrou as notas obtidas, respectivamente nas 1ª, 2ª, 3ª e 4ª avaliações. Nas disciplinas de Matemática: 5,0; 8,0; 7,5 e 7,0, Português: 6,0; 7,0; 9,5 e 6,5 e Geografia: 10,0; 5,0; 6,5 e 8,0.

a) Organize as notas em uma tabela, escrevendo em cada linha uma disciplina de acordo com a ordem pré-estabelecida e suas respectivas notas, obedecendo a ordem das avaliações.

b) Na tabela construída no item (a) quantas linhas e quantas colunas existem?

c) De acordo com a tabela construída no item (a), quais as notas localizadas na primeira linha?

d) Qual a nota que está localizada na 1ª linha e 2ª coluna?

e) Em relação as linhas e colunas da tabela construída no item (a), qual a localização da nota 10,0?

f) Reescreva somente as notas da tabela obtidas no item (a), dispostas na mesma ordem, utilizando um par de parênteses ou um par de colchetes.

Análise à priori

A situação descrita no texto 1.1 da Atividade 01 indica que se faz necessário à organização dos dados (notas). Cremos que através da observação desses dados que representa um cenário bastante comum no cotidiano escolar e com algumas intermediações do professor, o discente será induzido a construir uma tabela que facilitará a organização, a busca e a visualização dos dados indicados do que os dispor de forma desorganizada. Tal ideia leva intuitivamente o discente a trabalhar com matrizes, que é o objetivo deste trabalho, percebendo que é mais viável trabalhar com dados organizados em tabelas do que os dispor aleatoriamente.

TEXTO 1.2:

De acordo com o **"TEXTO 1.1"**, as notas das disciplinas Matemática, Português e Geografia, dispostas num par de parênteses conforme o item "f" da referida questão. Temos uma representação: $\begin{pmatrix} 5,0 & 8,0 & 7,5 & 7,0 \\ 6,0 & 7,0 & 9,5 & 6,5 \\ 10,0 & 5,0 & 6,5 & 8,0 \end{pmatrix}$.

a) Quantas linhas e quantas colunas essa matriz possui?

b) Quantos elementos essa matriz possui?

c) É possível estabelecer uma operação matemática entre o número total de elementos da matriz e o número de linhas e colunas? Qual seria?

d) Para cada situação abaixo, determine o número total de elementos da matriz.

d.1) Uma matriz que possui duas linhas e três colunas.

d.2) Uma matriz que possui uma linha e cinco colunas.

d.3) Uma matriz que possui quatro linhas e quatro colunas.

d.4) Uma matriz que possui m linhas e n colunas.

Análise à priori

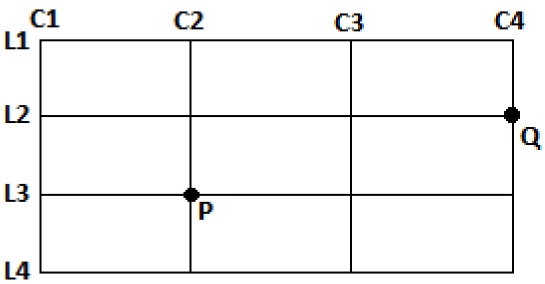
Acredita-se que nesta atividade os discentes utilizarão de conceitos básicos sobre matrizes para responder aos itens, havendo uma tendência de maior dificuldade quando a pergunta é menos objetiva, como é o caso do item "c", que exige um maior raciocínio do aluno. A aplicação de fórmulas será padrão para resolução do item "d", porém, acredita-se que erros em operações básicas poderão comprometer os resultados desses alunos.

Comentário:

i) A ordem de uma matriz é determinada multiplicando o número de linhas pelo número de colunas.
ii) A representação feita no item **"f"** do **"TEXTO 1.1"**, chama-se Matriz.

e) Observe as seguintes figuras e localize os pontos indicados de acordo com os códigos das linhas e colunas.

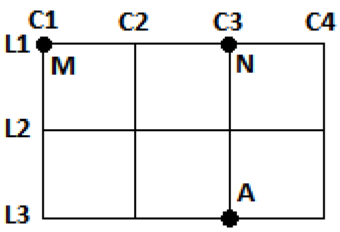
e.1)



- Ponto **P**:.....................

- Ponto **Q**:.....................

e.2)

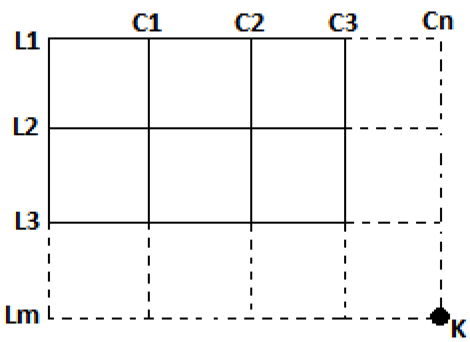


- Ponto **M**:....................

- Ponto **N**:....................

- Ponto **A**:....................

e.3)



- Ponto **K**:....................

Comentário:

iii) Para essa forma de localização de um elemento qualquer em uma matriz utilizamos o símbolo constituído de uma letra minúscula do alfabeto seguida de outras duas também minúsculas, por exemplo: $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Formalização:

Uma matriz do tipo $m \times n$ é um quadro retangular (tabela) com "$m.n$" elementos, dispostos em m linhas e n colunas. Representamos um elemento qualquer de uma matriz através do símbolo a_{ij}, onde i representa a ordem da linha e j a ordem da coluna onde o elemento se encontra.

Atividades de Fixação

1) Uma indústria tem quatro fábricas *A, B, C, D*, cada uma da qual produz três produtos 1, 2 e 3. A tabela mostra a produção da indústria durante uma semana.

	Fábrica A	*Fábrica B*	*Fábrica C*	*Fábrica D*
Produto 1	560	360	380	0
Produto 2	340	450	420	80
Produto 3	280	270	210	380

Em relação à Tabela acima:

a) Quantas unidades do produto 2 foram fabricadas pela fábrica *C*?

b) Qual foi a Fábrica que produziu mais produto 3?

c) Qual foi a Fábrica que produziu menos produto 2?

d) Qual a quantidade de linhas e de colunas de cada tabela?

2) Na matriz abaixo identifique os elementos indicados de acordo com o que se pede:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & \sqrt{2} \\ 0 & 3/7 \end{pmatrix}_{3\times 2}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -9 & 0 & 0 \\ \sqrt[3]{4} & 5 & 25/8 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

a) qual é o elemento a_{22}?

b) qual é o elemento a_{31}?

c) qual é o elemento b_{32}?

d) qual é o elemento b_{33}?

3) Nas matrizes abaixo, verifique se existem os elementos pedidos, se sim, determine-os:

$A = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}_{3\times 1}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 1/4 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 3}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$,

a) a_{22} b) a_{21} c) a_{42} d) b_{12} e) b_{41}

f) b_{22} g) c_{25} h) c_{11} i) c_{33} j) d_{22}

4) Indicar explicitamente os elementos da matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ tal que $a_{ij} = i - j$.

5) Construir as seguintes matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{3\times 3}\ tal\ que\ a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}$

b) $(b_{ij})_{3\times 3}\ tal\ que\ b_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i + j = 4 \\ 0, se\ i + j \neq 4 \end{cases}$

3.3 ATIVIDADE 2: ADIÇÃO DE MATRIZES

Objetivo:

- ✓ Adicionar matrizes.

Material:

- ✓ Roteiro, lápis ou caneta.

Procedimentos:

i) Ler o texto;

ii) Considerar as quantidades vendidas em cada mês como sendo elementos de uma linha;

iii) Considerar as quantidades vendidas de cada tipo como sendo elementos de uma coluna;

iv) De acordo com o texto e as questões abaixo faça o que se pede.

TEXTO:

Dois vendedores A e B, comercializam três tipos de açaí: o popular, o médio e o grosso. Nos meses de junho, julho e agosto comercializaram as seguintes quantidades em litros (ℓ), respectivamente, de cada tipo: vendedor A (20, 10 e 6), (32, 18 e 3) e (12, 20 e 7) e vendedor B (12, 22 e 10), (30, 22 e 8) e (10, 17 e 4).

a) Construa as matrizes de produção de açaí de cada vendedor dos meses em questão.

A	JUNHO	JULHO	AGOSTO
POPULAR	20	22	16
MÉDIO	32	28	13
GROSSO	12	20	7

B	JUNHO	JULHO	AGOSTO
POPULAR	12	10	10
MÉDIO	30	22	8
GROSSO	10	17	4

b) Qual a quantidade total de venda do açaí popular no mês de junho?

c) Qual a quantidade vendida de açaí grosso?

d) Qual a quantidade de açaí que o vendedor B comercializou no mês de agosto?

e) Qual a quantidade comercializada de açaí médio?

f) De acordo com os meses e tipos, represente por uma única matriz a quantidade de açaí comercializada pelos vendedores A e B.

Análise à priori

Acredita-se que adentrando nas operações com matrizes será possível identificar maior dificuldade por parte dos discentes, visto que evidencia-se que operações básicas configuram-se como uma das dificuldades que mais acompanham os discentes no decorrer da vida estudantil, assim, pode ser refletido no conteúdo de matrizes, considerando que existem mais regras a serem consideradas, podendo o discente confundir-se entre elas.

Formalização

Para efetuar a adição entre duas matrizes $A = (a_{ij})_{m.n}$ e $B = (b_{ij})_{m.n}$ devemos efetuar a adição $A + B = a_{ij} + b_{ij}$, ou seja, cada elemento da primeira matriz com o seu elemento correspondente da outra matriz.

Atividades de Fixação

1) Efetue a adição das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & -6 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 44 \\ -6 & -78 & 8 \\ 5 & -55 & 41 \end{bmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -5 & 4 \\ 0 & -8 & 4 \end{pmatrix}$

2) Nas matrizes abaixo, verifique se é possível efetuar a adição entre as mesmas, se sim, determine essa adição:

a) $\begin{bmatrix} 23 & -6 & -5 \\ 4 & 5 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & 4 \\ 2/7 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$

3) Nos meses de abril e maio foram pesquisados os preços dos combustíveis: etanol, gasolina e diesel em dois postos de um mesmo bairro.

Preço dos combustíveis em abril (R$/1).

Combustível\Posto	X	Y

Etanol	2,29	2,27
Gasolina	3,49	3,49
Diesel	3,10	3,12

Preço dos combustíveis em maio (R$/1)

Combustível\Posto	X	Y
Etanol	2,32	2,31
Gasolina	3,53	3,55
Diesel	3,12	3,10

Houve redução no preço de algum combustível em um desses postos? Em qual posto e em qual combustível?

4) Consideremos as tabelas que descrevem a produção de queijos em dois anos consecutivos.

Ano I	Queijo de vaca	Queijo de ovelha	Queijo de cabra	Queijo misto
Região I	3000	200	400	600
Região II	700	350	700	100
Região III	1000	100	500	800

Ano II	Queijo de vaca	Queijo de ovelha	Queijo de cabra	Queijo misto
Região I	5000	50	200	0
Região II	2000	100	300	300
Região III	2000	100	600	600

Em relação as tabelas anteriores:

a) Escrever, na forma matricial, as tabelas de dois anos consecutivos;

b) Calcular a produção total dos dois queijos em cada região nos dois anos;

c) Determinar a ordem da matriz obtida na alínea anterior e identificar quais são os elementos a_{21}, a_{13} e a_{34} dessa matriz e o que representam;

d) Encontrar o aumento ou quebra na produção de queijo de vaca e queijo de ovelha no primeiro ano em relação ao segundo ano e escrever sob a forma matricial;

e) comparar as variações de produção do segundo ano em relação ao primeiro ano;

5) Dadas as matrizes, $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 11 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}\ e\ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, calcular $A + B + C, A - B + C, A - B - C\ e - A + B - C$.

3.4 ATIVIDADE 3: MULTIPLICAÇÃO DE UM ESCALAR POR UMA MATRIZ

Objetivo:

- ✓ Multiplicar um escalar por uma matriz qualquer

Material:

- ✓ Roteiro, lápis ou caneta.

Procedimentos:

i) Ler o texto;

ii) Considere as quantidades vendidas em cada mês como sendo elementos de uma linha;

iii) Considere as quantidades vendidas de cada tipo como sendo elementos de uma coluna;

iv) De acordo com o texto e as questões abaixo faça o que se pede.

TEXTO:

Uma empresa de componentes eletrônicos compra baterias e resistências a dois distribuidores A e B. A seguinte tabela mostra o número de transmissores e resistências que adquiriu a cada um dos distribuidores durante o mês de abril do presente ano.

	A	B
Baterias	40	80
Resistências	60	50

a) escreva esses dados sob forma de matriz;

b) Devido a demanda no mês de março, a empresa decide triplicar a compra desses componentes para o mês de abril. Represente por uma matriz essas quantidades?

Logo deverá comprar, $M = 3\begin{pmatrix} 40 & 80 \\ 60 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 240 \\ 180 & 150 \end{pmatrix}$

c) Explique o processo para o cálculo dos elementos da matriz que é o triplo da compra dos componentes.
d) Você identificaria alguma propriedade matemática já estudada nas séries anteriores com o processo que acabou de desenvolver? Qual?

Análise à priori

A questão que exige raciocínio lógico do discente aliado ao conhecimento sobre matrizes, assim, não basta que se tenha memorizado fórmulas e regras do conteúdo, sendo necessário que o discente realmente tenha entendido e parcialmente aprendido sobre matrizes. Acredita-se, portanto, que haverá um equilíbrio no número de erros e acertos para essa atividade.

Comentário

O procedimento descrito acima é denominado, multiplicação de um escalar por uma matriz.

Formalização

Para efetuar o produto de um escalar por uma matriz, devemos multiplicar esse escalar por cada elemento da matriz, e pode ser representado da seguinte forma $k.\left(a_{ij}\right) = (ka_{ij})$.

Atividades de Fixação

1) Calcular as matrizes $2A, \frac{1}{3}B\ e\ \frac{1}{2}(A+B)$, sendo dados:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\ e\ B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\ e\ C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, determinar X em cada uma das equações abaixo:

a) $2X + A = 3B + C$

b) $X + A = \frac{1}{2}(B - C)$

c) $3X + A = B - X$

d) $\frac{1}{2}(X - A - B) = \frac{1}{3}(X - C)$

3) Resolver sistema:

$\begin{cases} X + Y = 3A \\ X - Y = 2B \end{cases}$ onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

4) Sendo $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ calcule o valor de $2A - B$.

5) Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, então a matriz X, de ordem 2, tal que: $\frac{X-A}{2} = \frac{B+X}{3} + C$ é igual a:

3.5 ATIVIDADE 4: MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Objetivo:

- ✓ Fazer o produto de matrizes.

Material:

- ✓ Roteiro, lápis ou caneta.

Procedimentos:

i) Ler o texto;

ii) Com as informações do texto abaixo responda as questões;

TEXTO 4.1

Considere os sistemas S_1 e S_2, lineares de duas equações e duas variáveis.

S_1 $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = g \end{cases}$ S_2 $\begin{cases} hw + iz = x \\ jw + kz = y \end{cases}$

Responda:

a) Quais são as variáveis do sistema S_1? Quais são os coeficientes?

b) Quais são os termos independentes do sistema S_1?

c) Quais são as variáveis do sistema S_2? Quais são os coeficientes?

d) Quais são os termos independentes do sistema S_2?

e) Escreva as representações matriciais apenas com os coeficientes das variáveis x e y, idem para os coeficientes das variáveis w e z.

f) Qual a relação existente entre os sistemas S_1 e S_2?

g) É possível representar os sistemas S_1 e S_2 através de um outro sistema S_3, onde o sistema S_1 fique em função do sistema S_2?

Comentário:

É necessário lembrar das propriedades da multiplicação de matrizes.

TEXTO 4.2 FABRICAÇÃO DE BOLOS (adaptado de LIMA, 2006)

Uma empresa que possui duas confeitarias, chamadas A e B, fabrica três tipos de bolo: 1, 2 e 3, os quais são feitos de farinha, açúcar, leite, manteiga e ovos. Em cada semana, as vendas dessas duas confeitarias são estimada conforme a matriz de $\boldsymbol{m}$ vendas semanal abaixo:

Confeitaria	Bolo tipo 1	Bolo tipo 2	Bolo tipo 3
A	50 unidades	30 unidades	25 unidades
B	20 unidades	20 unidades	40 unidades

Para a fabricação desses bolos, o material é usado de acordo com a matriz $\boldsymbol{n}$ seguinte:

Bolo	Farinha	Açúcar	Leite	Manteiga	Ovos
Tipo 1	500g	200g	500ml	150g	4
Tipo 2	400g	100g	300ml	250g	5
Tipo 3	450g	150g	600ml	0	6

A direção da empresa, afim de atender à demanda, quer saberá quantidade de cada uma das cinco matérias primas que deve alocar às suas duas confeitarias.

Determine a tabela (matriz) que indica estas preferências separadas por material e por confeitaria seguindo os comandos expostos em cada item abaixo.

a) escreva na ordem em que aparecem, os elementos que representam as quantidades de bolos das confeitarias A e B, respectivamente.

b) escreva na ordem em que aparecem, os elementos que representam os materiais (farinha, açúcar, leite, manteiga, ovos) utilizados no preparo dos bolos dos tipos 1, 2 e 3.

c) multiplique cada elemento que representa a quantidade de bolo da confeitaria A pelo seu respectivo elemento que representa o material utilizado na confecção do bolo (farinha, açúcar, leite, manteiga, ovos).

d) some esses produtos referentes a operação realizada no item (c) acima.

e) multiplique cada elemento que representa a quantidade de bolo da confeitaria B pelo seu respectivo elemento que representa o material utilizado na confecção do bolo (farinha, açúcar, leite, manteiga, ovos).

f) some esses produtos referentes à operação realizada no item (e) acima.

g) que conclusão você tirou a respeito das operações feitas nos itens: a, b, c, d, e?

* Essa operação matemática que você acabou de fazer chama-se Multiplicação de Matrizes.

Análise à priori

O texto 4.2 traz um subsídio para que o discente perceba que a multiplicação de matrizes é mais fácil do que se pensa, apesar de envolver um processo mais longo. Acredita-se que os discentes vão se surpreender ao final, no item “g”, quando de fato perceberem que todos os itens lhe levaram a multiplicação de Matrizes, podendo, com isso, aumentar as chances de fixação do conteúdo. Acredita-se que o percentual de erros para essa questão será mais reduzido.

Formalização

Para se efetuar o produto de duas matrizes em que, o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz, deve-se multiplicar a primeira linha da primeira matriz por todas as colunas da segunda matriz, em seguida, a segunda linha da primeira matriz por todas as colunas da segunda matriz, até completarem todas as linhas da primeira matriz. Em seguida, soma-se todos os produtos relativos a cada linha e coluna. Ou seja, Sejam $A = (a_{ij})$

e $B = (b_{ij})$ duas matrizes do tipo $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente, o **produto** AB dessas matrizes é a matriz $C = (c_{ij})$ do tipo $m \times p$, cujo ij-ésimo elemento é dado por: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$. (WALTER, 2006, p.150).

Atividades de Fixação

1) Suponhamos que a seguinte tabela forneça as quantidades de vitaminas $A, B \ e \ C$ obtidas em cada unidade dos alimentos $I \ e \ II$.

	A	B	C
$Alimento\ I$	4	3	0
$Alimento\ II$	5	0	1

Se ingerirmos 5 unidades do alimento I e 2 unidades do alimento II, quanto consumiremos de cada tipo de vitamina?

2) Suponhamos que o custo de alimentos depende só do conteúdo vitamínico e os preços por unidade de vitamina $A, B \ e \ C$ são, respectivamente, $R\$ \ 1{,}50, R\$3{,}00 \ e \ R\$5{,}00$, quanto pagaríamos pela porção de alimentos indicada no exemplo anterior?

3) Durante a 1ª fase do Europeu de Futebol 2004, o grupo de Portugal também era formado por Grécia, Espanha e Rússia. Os resultados estão registrados na tabela seguinte.

PAÍS/RESULTADO	VITÓRIA	EMPATE	DERROTA
PORTUGAL	2	0	1
GRÉCIA	1	1	1
ESPANHA	1	1	1
RÚSSIA	1	0	2

Qual a pontuação obtida por cada equipe?

4) Calcule os produtos das matrizes caso seja possível:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 6 & 3 \\ 5 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

5) Resolver a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$$

3.6 ATIVIDADE 5: MATRIZ TRANSPOSTA

Objetivo:

- ✓ Encontrar a Transposta de uma matriz qualquer.

Material:

- ✓ Roteiro, lápis ou caneta.

Procedimentos:

i) Ler o texto;

ii) escrever os elementos da primeira linha da matriz dada como sendo os primeiros elementos da coluna de outra matriz.

iii) repetir o processo até a última linha da matriz inicial.

iv) Com as informações do texto abaixo responda as questões;

TEXTO 5

A matriz descrita abaixo representa as colocações de um grupo de 09 pessoas que participaram de uma disputa atlética, onde os números que representam as colocações seguem a disposição normal das linhas da matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

a) construa uma matriz B a partir da matriz, A em que a disposição da colocação dessa disputa atlética fique agora em colunas.

b) o que foi percebido com essas mudanças?

c) Se sim, o que deveria ser feito para que a questão não perder seu sentido original?

d) se a matriz descrita no TEXTO 5 fosse da seguinte forma $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3}$, ou seja, representasse apenas os seis primeiros colocados na disputa atlética cuja ordem é indicada na matriz.

e) o que aconteceria com a ordem da nova matriz quando você efetuasse os comandos indicados no item (a)?

*Esse manuseio que você acabou de fazer na matriz chama-se encontrara a Transposta de uma matriz.

Formalização

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a matriz transposta de A é uma matriz B de ordem $n \times m$, tal que $B = A^t$ obtidas trocando-se as linhas com as colunas, ou seja, $b_{ij} = a_{ij}$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Podemos escrever também $[A^t]_{ij} = a_{ji}$.

Atividades de Fixação

1) Determine a transposta das seguintes matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 34 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{2\times3}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}_{1\times3}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 12 & 65 \\ 7 & -76 \end{bmatrix}_{3\times2}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times3}$

2) Considere as seguintes matrizes:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}_{2\times2}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}_{2\times2}$, $C = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{pmatrix}_{2\times3}$, $D = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{3\times3}$ e $E = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times3}$

Se for possível calcule:

a) $AB - BA$

b) $2C - D$

c) $(2D^t - 3E^t)^t$

d) $D^2 - DE$

3) Sendo a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & X \\ 3 & 1 & Y \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ simétrica, determine x e y.

4) Analise a afirmação seguinte: Se A é uma matriz quadrada, então $\mathrm{A} + A^T$ é uma matriz simétrica e $\mathrm{A} - A^T$ é uma matriz antissimétrica.

5) A matriz transposta da matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem 2 com $a_{ij} = i^j + 2$, $1 \leq i \leq 2\ e\ 1 \leq j \leq 2$, é:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

3.7 ATIVIDADE 6: MATRIZ INVERSA

Objetivo:

- ✓ Calcular a **inversa** de uma matriz

Material:

- ✓ Roteiro, lápis ou caneta.

Procedimentos:

i) Ler o texto;

ii) Com as informações dos enunciados para responder as questões;

Comentário

Lembrar das propriedades inerentes às matrizes inversas.

Análise a priori

O cálculo da matriz é assunto considerado como complexo entre os alunos, desse modo, acredita-se que as dúvidas serão maiores, esperando-se um número menor de alunos que acertem essa questão, assim como aqueles que podem vir a deixá-la em branco.

1) Mostre que a matriz $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

Formalização

O produto de duas matrizes inversas é a matriz identidade.

2) Calcule as inversas das matrizes:

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 3\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}6 & -2 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ -3 & 2 & 3\end{bmatrix}$

3) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix}x & x+2\\ 5 & 7\end{vmatrix}=0$

b) $\begin{vmatrix}x & x\\ 3 & x\end{vmatrix}=-2$

4) Calcule o elemento a_{32} da inversa da matriz: $M=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 4\end{bmatrix}$**.**

Formalização:

O elemento a23 é o resultado da divisão do elemento A32 da matriz cofatora de M pelo determinante de M. O determinante de M é: det M = 1(4 – 6) – 2(8 – 15) + 4(4 – 5) = -2 + 14 – 4 = 8.

5) Considere P a matriz inversa da matriz M, onde $M = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/7 & 1 \end{bmatrix}$**. Calcule a soma dos elementos da diagonal principal da matriz P.**

3.8 ATIVIDADE 6: MATRIZ INVERSA

Objetivo:

- ✓ Calcular a inversa de uma matriz

Material:

- ✓ Roteiro, lápis ou caneta.

Procedimentos:

i) Ler o texto;

ii) Com as informações dos enunciados para responder as questões;

Comentário

Lembrar das propriedades inerentes às matrizes inversas.

Análise à priori

O cálculo da matriz é assunto considerado como complexo entre os discentes, desse modo, acredita-se que as dúvidas serão maiores, esperando-se um número menor de estudantes que acertem essa questão, assim como aqueles que podem vir a deixa-la em branco.

1) Mostre que a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Formalização

O produto de duas matrizes inversas é a matriz identidade.

2) Calcule as inversas das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x & x \\ 3 & x \end{vmatrix} = -2$

4) Calcule o elemento a_{32} da inversa da matriz: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

O elemento a_{23} é o resultado da divisão do elemento A_{32} da matriz cofatora de M pelo determinante de M. O determinante de M é:
$detM = 1(4-6) - 2(8-15) + 4(4-5) = -2 + 14 - 4 = 8.$

5) Considere P a matriz inversa da matriz M, onde $M = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/7 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule a soma dos elementos da diagonal principal da matriz P.

4 PROCESSO DE APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES DE MATRIZES

Dar-se-á início à etapa de verificação detalhada específica do procedimento da realização da sequência didática, proporcionando análise dos dados obtidos por meio de capitação de áudios, documentos gerados pelo preenchimento de cunho próprio dos alunos. Serão verificados através de figuras recortadas da digitalização dos testes, posterior a aplicação em sala de aula.

Os processos determinantes deste presente tópico serão abordados em seus diferentes períodos: o que antecedeu a pesquisa, durante a pesquisa e posterior a ela. Para a efetivação da sequência de atividades, foram entregues 6 Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC), que segundo Cabral (2017, p. 39) são definidas como propostas que fundamentam uma analogia que tem como objetivo a reconstrução conceitual de um objeto matemático, importante frisar nesse momento é que esse objeto da pesquisa obedece às noções de matrizes, desenvolvida em seus diferentes campos de estudo através desse material. Obteve-se uma duração média de 170 minutos de aula para alcançarmos nosso objetivo. Portanto, na sequência, podem ser observadas as propostas de aplicação das UARC's, bem como a percepção e desenvolvimento destas atividades, assim, poderão ser observadas nos tópicos conseguintes.

4.1 PROCEDIMENTO ANTERIOR À APLICAÇÃO

A primeira proposta concerne o sentido de perpassar as informações acerca do processo que antecedeu a aplicação da sequência didática dos alunos, descrevendo o procedimento até a efetiva aplicação.

Desta forma, cabe-se lembrar que foi pesquisada uma das escolas púbicas do município em que resido, Abaetetuba, que faz parte da microrregião de Cametá e se localiza à margem do Rio Maratauira. Foram realizadas visitas anteriores com a administração da instituição de ensino para verificar a possibilidade de realização de minha proposta de pesquisa.

A Pesquisa, de fato, ocorreu do dia 10 de maio de 2018 aplicada a turma do 2º ano do ensino médio de uma escola da rede pública estadual de ensino, localizada na zona rural, ramal Maúba. Inicialmente, pode-se afirmar que a proposta de aplicar as atividades em uma escola da rede pública de ensino foi considerada perante a determinação de aproximar os resultados à realidade apresentada atualmente do ensino-aprendizagem das mesmas, bem como oferece o nível de ensino requerido para a aplicação da sequência de atividades, o nível médio. Outro motivo para a aplicação acontecer foi o fato de eu ministrar aulas de matemática desde a atribuição do cargo por aprovação em concurso púbico prestado ao município no ano de 2002.

Para que a pesquisa procedesse, os alunos foram informados que estariam contribuindo com uma pesquisa a nível de mestrado e que seus nomes não seriam identificados no trabalho, mas que estariam realizando atividades importantes para a execução dos procedimentos cabíveis.

É válido lembrar que a turma passou por uma aula sobre conjuntos numéricos, soma, subtração e multiplicação dos números reais, os conteúdos foram ministrados no mês de abril do ano passado (2018) e contei com material de apoio para essa aula onde foram explorados e discutidos os assuntos como: conjuntos Numéricos, soma, subtração e multiplicação de números reais. O material tinha um total de 13 páginas, cujo objetivo consistia em introduzir conceitos mínimos necessários para a efetivação de um melhor aproveitamento no ensino de matrizes posterior à esta apresentação.

Continuando nossa sequência de atividades, a aula procedeu com comentários e explicações para que os alunos tivessem uma compreensão eficaz do assunto, sempre procurando interagir com os alunos e esclarecer dúvidas.

Seria necessário ainda verificar se a turma tinha os conhecimentos necessários a respeito do assunto que seria abordado nas atividades: Matrizes.

Porém, o conteúdo ministrado no ano passado foi necessário para proceder a aplicação, que ocorreu somente em maio de 2018. Neste ano letivo, a grade curricular obedece a requisição do assunto, visto que é conteúdo para a mesma, porém, que seria ministrado mais adiante, foi optado por anteciparmos o assunto, o qual seria usado em minha pesquisa de mestrado de forma que os alunos seriam resguardados e suas identidades não seriam expostas em nenhum momento.

4.2 PROCEDIMENTO DURANTE À APLICAÇÃO

Para a efetiva realização do processo, contei com a participação de 16 membros da classe para o cumprimento dessa etapa da pesquisa, foi necessário juntá-los em grupos, assim, seguiram organizados em 8 duplas, cada equipe com um material impresso para acompanhar e preencher as questões.

Chegado o dia de realização da sequência de exercícios, os alunos foram instruídos a organizarem as colunas referentes às fileiras de sua carteira, orientados a dividir-se atendo sua dupla.

4.2.1 Encontro para a realização da Sequência de Exercícios

Nosso encontro aconteceu no dia 10 de maio de 2018, é importante lembrar que os conteúdos necessários para a realização da atividade de Matrizes, perpassado em abril, foi relembrado em poucos minutos antecedentes à efetiva atividade da proposta. Estima-se que a turma teve uma média de 2 horas para resolverem o exercício, contando com a colaboração e interferência das minhas orientações.

Este tópico levantará amostras sobre as respostas das 6 UARC's, estabelecidas como propostas, além disso, será explorado não apenas uma amostra em particular de um grupo específico, mas da diversidade que se fez presente. Serão indicados e apresentados através de figuras, as produções de diferentes equipes com o intuito de exemplificar as diferentes atividades, estabelecido que serão norteadas em um exemplo de cada equipe, divididas então em seis abordagens.

4.2.1.1 Atividade 1: Intervenções Inicial (*Ii*), Reflexivas (*Ir*) e Exploratórias (*Ie*) - Noção de Matrizes.

No título Noção de Matrizes, aplicada na intervenção inicial, que segundo Cabral (2017, p. 40) “é a primeira peça de jogo de ideias na esfera do discurso didático-pedagógico que serve de aporte para que o professor estimule os alunos”. Teve o objetivo de transcorrer sobre a matriz como um conjunto de dados expostos em tabelas, os alunos seguiram o procedimento de ler o texto e considerar os elementos dispostos, podemos observar na figura conseguinte no Texto 1.1 a resposta da primeira equipe, caracterizada por Alunas A e B. A conferir.

Figura 01 – Intervenção Inicial da UARC 1: Noção de Matrizes – Primeira Equipe.

a) Organize as notas em uma tabela, escrevendo em cada linha uma disciplina de acordo com a ordem pré-estabelecida e suas respectivas notas, obedecendo a ordem das avaliações.

Matematica	5,0	8,0	7,5	7,0
Português	6,0	7,0	9,5	6,5
Geografia	10,0	5,0	6,5	8,0

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 02 – Intervenção reflexiva da UARC 1: Noção de Matrizes – Primeira Equipe

b) Na tabela construída no item (a) quantas linhas e quantas colunas existem?

3 linhas e 4 colunas

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

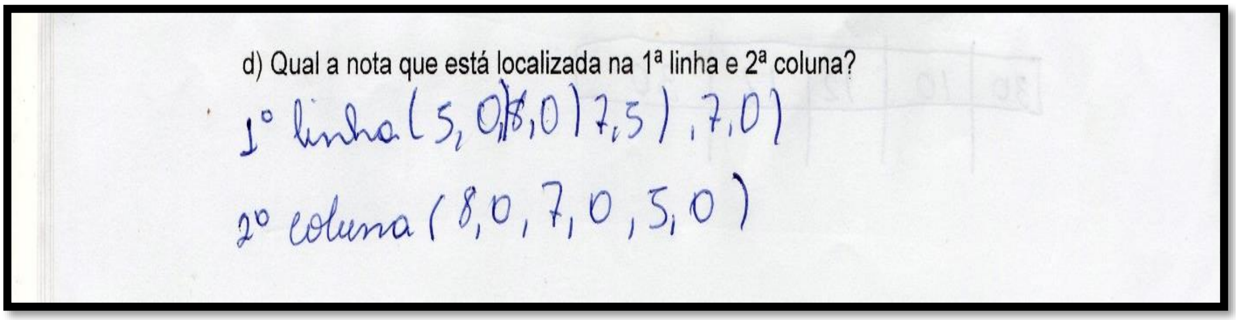
Figura 03 – Intervenção Reflexiva da UARC 1: Noção de Matrizes – Primeira Equipe

c) De acordo com a tabela construída no item (a), quais as notas localizadas na primeira linha?

5,0, 8,0, 7,5, 7,0

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 04 – Intervenção Reflexiva da UARC 1: Noção de Matrizes – Primeira Equipe



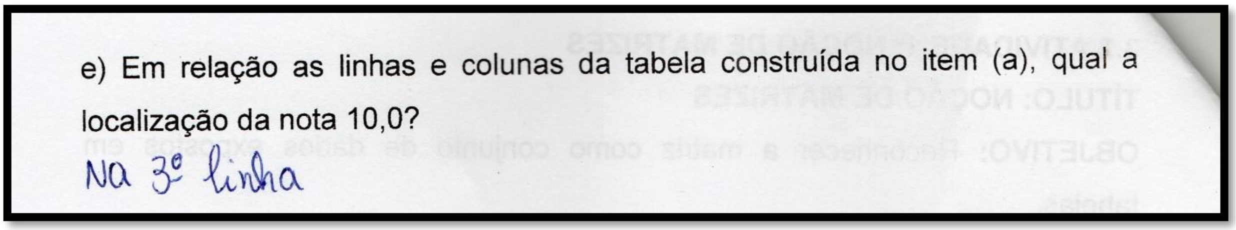
d) Qual a nota que está localizada na 1ª linha e 2ª coluna?

1º linha (5,0)8,0)7,5),7,0)

2º coluna (8,0, 7,0 , 5,0)

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 05 – Intervenção Reflexiva da UARC 1: Noção de Matrizes – Primeira Equipe



e) Em relação as linhas e colunas da tabela construída no item (a), qual a localização da nota 10,0?

Na 3º linha

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Na sequência acima, puderam ser identificadas as Intervenções Reflexivas, fator que se caracteriza pela materialização do questionamento (CABRAL, 2017 p. 41), poderão ser observadas a perspectiva e organização da resposta gerada na equipe, caracterizando uma linha de raciocínio comum entre os indivíduos, que atenderam aos quesitos da base destas informações com os elementos e material de Números Reais como foi mencionado no tópico anterior. Observe então, na sequência, a nossa terceira intervenção, a Intervenção Exploratória que, segundo o as considerações do mesmo autor, consiste em aprofundar o entendimento do aluno a respeito das respostas obtidas a partir das Intervenções Reflexivas. Temos então, as figuras a seguir, seguindo a linha de raciocínio da primeira equipe.

Figura 06 – Intervenção Exploratória da UARC 1: Noção de Matrizes – Primeira Equipe

f) Reescreva somente as notas da tabela obtidas no item (a), dispostas na mesma ordem, utilizando um par de parênteses ou um par de colchetes.

(5,0 8,0 7,5 7,0)

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

A atividade proposta no teste 1.2 fará jus a duas equipes, intitularemos elas de Primeira Equipe e Segunda Equipe, as figuras foram digitalizadas de dois documentos distintos, e haverão as Intervenções inicial, reflexivas e exploratórias novamente para o prosseguimento e continuação da nossa primeira Unidade Articulada, a conferir:

Figura 07 –Intervenção Inicial da continuação da UARC 1: Noção de Matrizes – Primeira Equipe.

TEXTO 1.2:

De acordo com o **"TEXTO 1.1"**, as notas das disciplinas Matemática, Português e Geografia, dispostas num par de parênteses conforme o item "f" da referida questão. Temos uma representação: $\begin{pmatrix} 5,0 & 8,0 & 7,5 & 7,0 \\ 6,0 & 7,0 & 9,5 & 6,5 \\ 10,0 & 5,0 & 6,5 & 8,0 \end{pmatrix}$.

21 20 23,5 21,5 86,0

a) Quantas linhas e quantas colunas essa matriz possui?

3 linhas x 4 colunas

21
20

Fonte: Dados da Pesquisa, 2019.

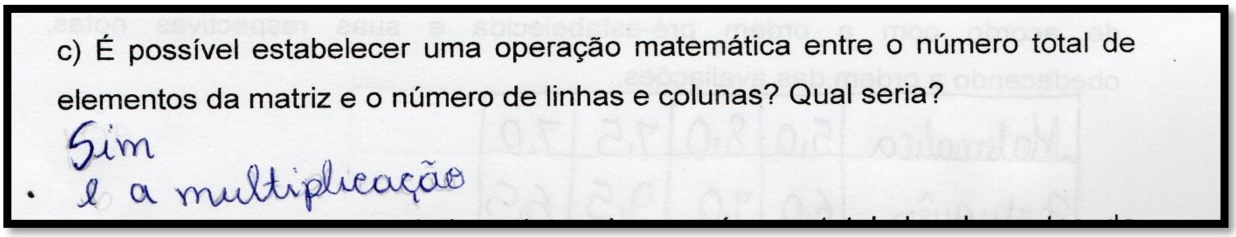
Figura 08 – Intervenção Reflexiva da UARC 1: Noção de Matrizes – Primeira Equipe

b) Quantos elementos essa matriz possui?

12

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 09 –– Intervenção Reflexiva da UARC 1: Noção de Matrizes – Primeira Equipe

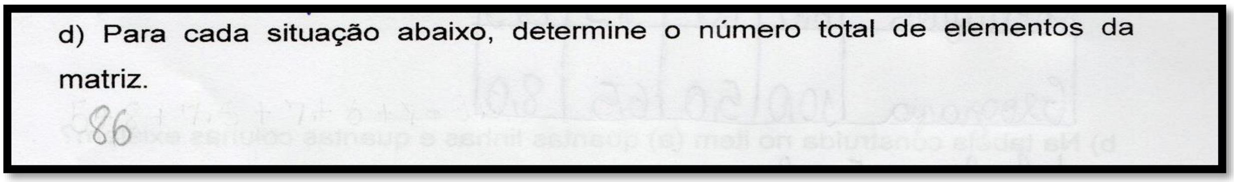


c) É possível estabelecer uma operação matemática entre o número total de elementos da matriz e o número de linhas e colunas? Qual seria?

Sim
é a multiplicação

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 10 – Intervenção Exploratória da UARC 1: Noção de Matrizes – Segunda Equipe

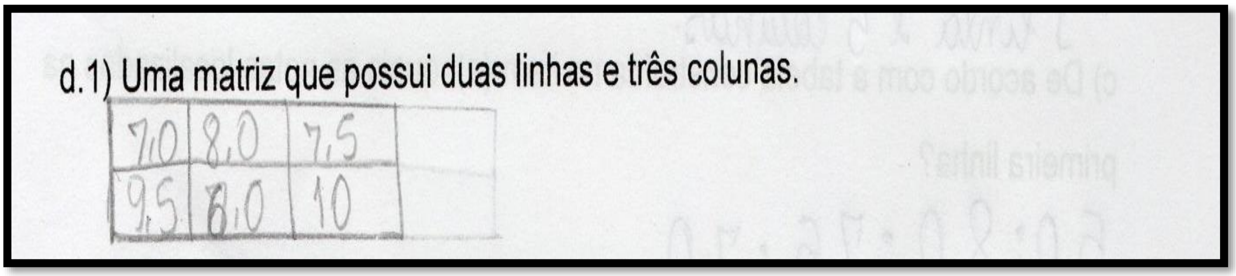


d) Para cada situação abaixo, determine o número total de elementos da matriz.

86

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 11 – Intervenção Exploratória da UARC 1: Noção de Matrizes – Segunda Equipe

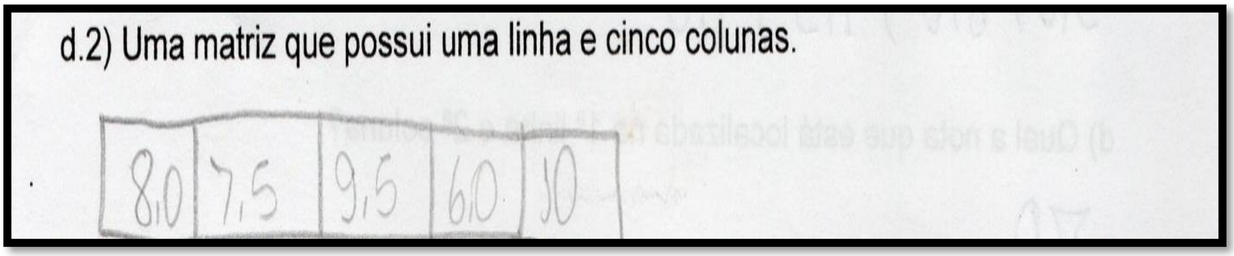


d.1) Uma matriz que possui duas linhas e três colunas.

7,0	8,0	7,5	
9,5	8,0	10	

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 12 – Intervenção Exploratória da UARC 1: Noção de Matrizes – Segunda Equipe

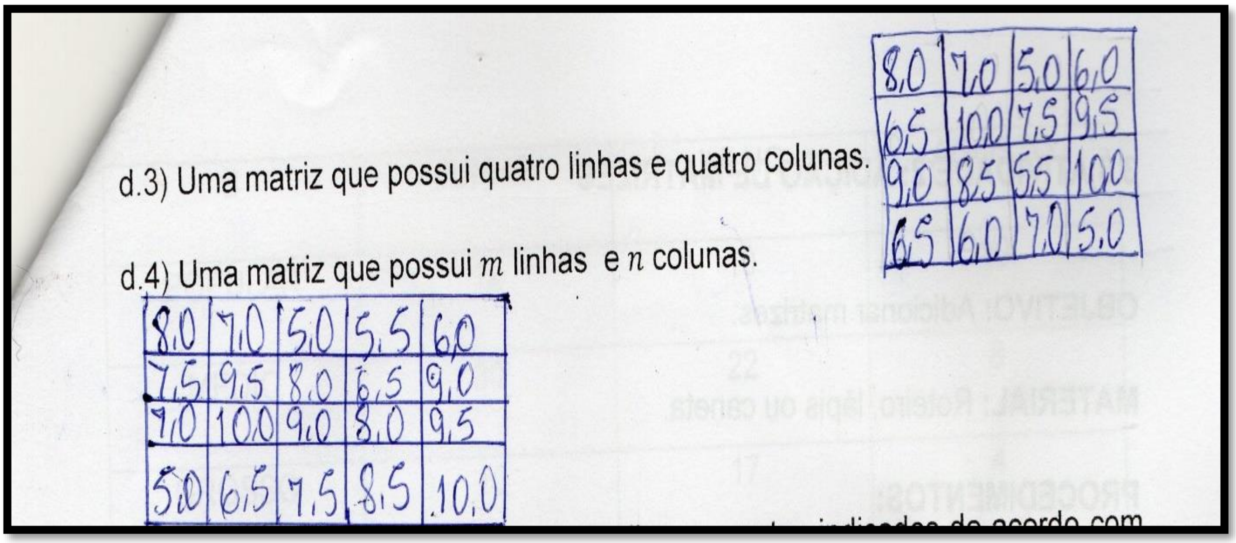


d.2) Uma matriz que possui uma linha e cinco colunas.

8,0	7,5	9,5	6,0	10

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 13 – Intervenção Exploratória da UARC 1: Noção de Matrizes – Segunda Equipe


d.3) Uma matriz que possui quatro linhas e quatro colunas.

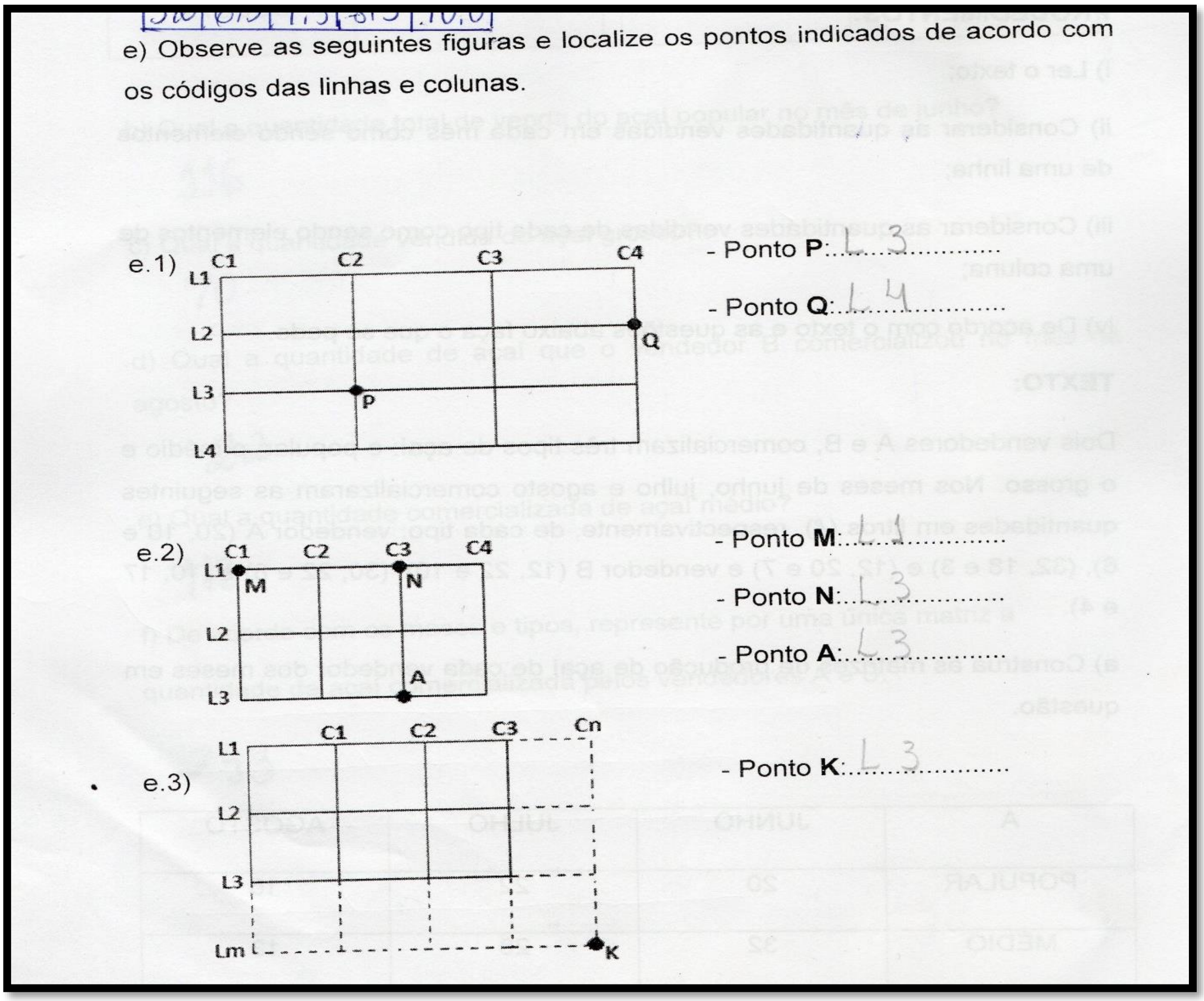
8,0	7,0	5,0	6,0
6,5	10,0	7,5	9,5
9,0	8,5	5,5	10,0
6,5	6,0	7,0	5,0

d.4) Uma matriz que possui m linhas e n colunas.

8,0	7,0	5,0	5,5	6,0
7,5	9,5	8,0	6,5	9,0
7,0	10,0	9,0	8,0	9,5
5,0	6,5	7,5	8,5	10,0

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 14 – Intervenção Exploratória da UARC 1: Noção de Matrizes – Segunda Equipe



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

4.2.1.2 Atividade 2: Intervenções Inicial (*Ii*), Reflexivas (*Ir*) e Exploratórias (*Ie*) - Adição de Matrizes.

A proposta conseguinte a apresentada até aqui, teve como objetivo adicionar e contamos com o material comum dos alunos, seguindo os procedimentos, tiveram que ser considerados alguns requisitos descritos nos procedimentos cabíveis aos elementos da sequência, dessa maneira, tivemos resultados interessantes durante a intervenção da segunda atividade, que serão possíveis ser observadas nas figuras que serão apresentadas na sequência retiradas do documento entregue por uma das equipes que chamaremos de Terceira Equipe.

Figura 15 – Intervenção Inicial da UARC 2: Adição de Matrizes – Terceira Equipe

TEXTO:

Dois vendedores A e B, comercializam três tipos de açaí: o popular, o médio e o grosso. Nos meses de junho, julho e agosto comercializaram as seguintes quantidades em litros (ℓ), respectivamente, de cada tipo: vendedor A (20, 10 e 6), (32, 18 e 3) e (12, 20 e 7) e vendedor B (12, 22 e 10), (30, 22 e 8) e (10, 17 e 4).

a) Construa as matrizes de produção de açaí de cada vendedor dos meses em questão.

A	JUNHO	JULHO	AGOSTO
POPULAR	20	22	16
MÉDIO	32	28	13
GROSSO	12	20	7

$$A \begin{pmatrix} 20 & 22 & 16 \\ 32 & 28 & 13 \\ 12 & 20 & 7 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 32 & 10 & 10 \\ 30 & 28 & 8 \\ 10 & 17 & 4 \end{pmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 16 – Intervenção Reflexiva da UARC 2: Adição de Matrizes – Terceira Equipe

B	JUNHO	JULHO	AGOSTO
POPULAR	12	10	10
MÉDIO	30	22	8
GROSSO	10	17	4

b) Qual a quantidade total de venda do açaí popular no mês de junho?

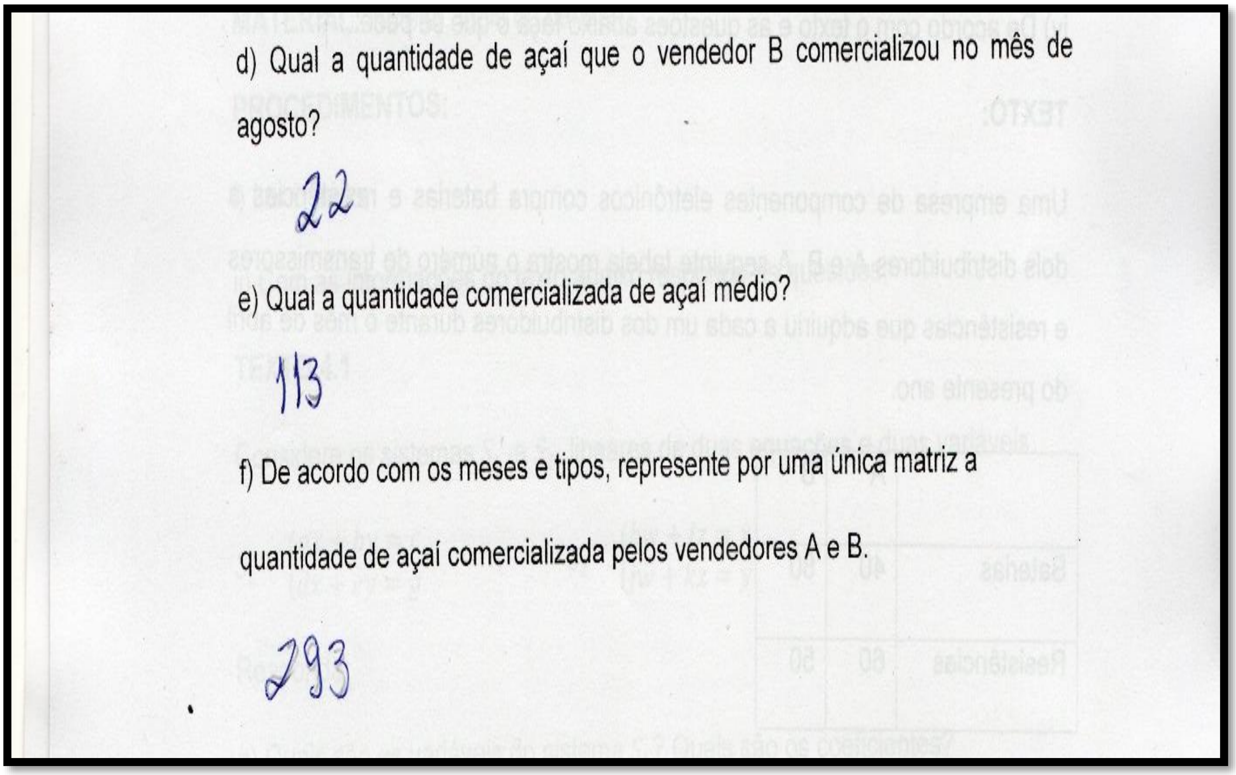
116

c) Qual a quantidade vendida de açaí grosso?

70

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 17 – Intervenção Reflexiva e Exploratória da UARC 2: Adição de Matrizes – Terceira Equipe



d) Qual a quantidade de açaí que o vendedor B comercializou no mês de agosto?

22

e) Qual a quantidade comercializada de açaí médio?

113

f) De acordo com os meses e tipos, represente por uma única matriz a quantidade de açaí comercializada pelos vendedores A e B.

293

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

4.2.1.3 Atividade 3: Intervenções Inicial (*Ii*), Reflexivas (*Ir*) e Exploratórias (*Ie*) - Multiplicação de um escalar por uma matriz.

A terceira atividade sobre multiplicação de um escalar por uma matriz teve como objetivo perpassar o conhecimento sobre multiplicar um escalar por uma matriz qualquer considerados os requisitos para o procedimento sobre a quantidade referentes aos meses e outros elementos pertencentes ao processo proposto, poderão ser observadas as figuras sobre essa terceira interferência compreendendo as respostas a um outro grupo que chamaremos de Quarta Equipe a ser analisada. Desta forma, apresentar-se-á as figuras digitalizadas na sequência.

Figura 18 – Intervenção Inicial da UARC 3: de Multiplicação de um escalar por uma Matriz – Quarta Equipe

TEXTO:

Uma empresa de componentes eletrônicos compra baterias e resistências a dois distribuidores A e B. A seguinte tabela mostra o número de transmissores e resistências que adquiriu a cada um dos distribuidores durante o mês de abril do presente ano.

	A	B
Baterias	40	80
Resistências	60	50

a) escreva esses dados sob forma de matriz;

$$\begin{pmatrix} 40, 80 \\ 60, 50 \end{pmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

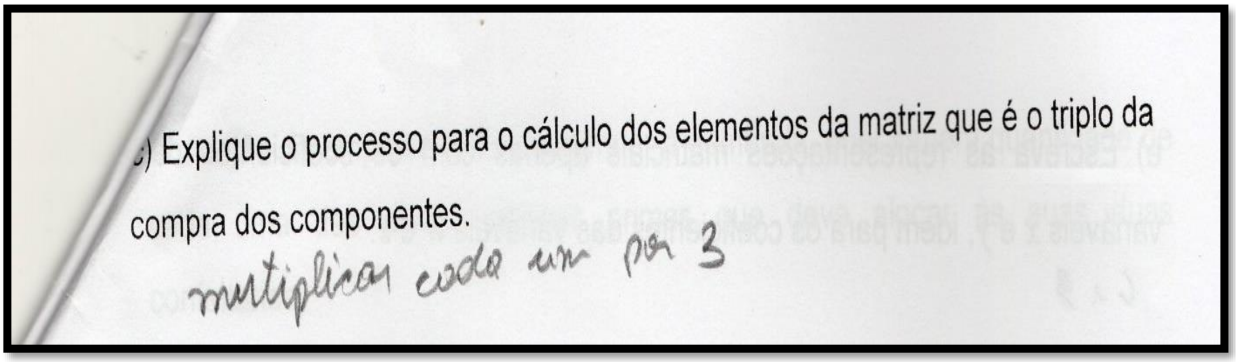
Figura 19 – Intervenção Reflexiva da UARC 3: de Multiplicação de um escalar por uma Matriz – Quarta Equipe

b) Devido a demanda no mês de março, a empresa decide triplicar a compra desses componentes para o mês de abril. Represente por uma matriz essas quantidades?

$$\begin{pmatrix} 120 & 240 \\ 180 & 150 \end{pmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 20 – Intervenção da terceira abordagem de Multiplicação de um escalar por uma Matriz – Quarta Equipe

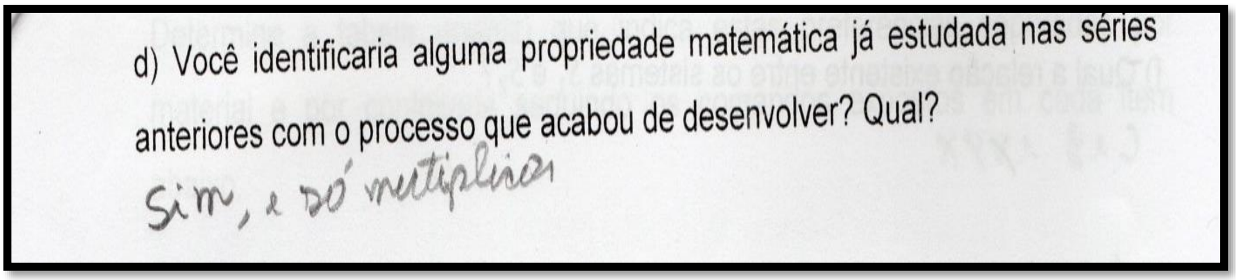


c) Explique o processo para o cálculo dos elementos da matriz que é o triplo da compra dos componentes.

mutiplicar coda um por 3

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 21 – Intervenção Reflexiva da UARC 3: de Multiplicação de um escalar por uma Matriz – Quarta Equipe



d) Você identificaria alguma propriedade matemática já estudada nas séries anteriores com o processo que acabou de desenvolver? Qual?

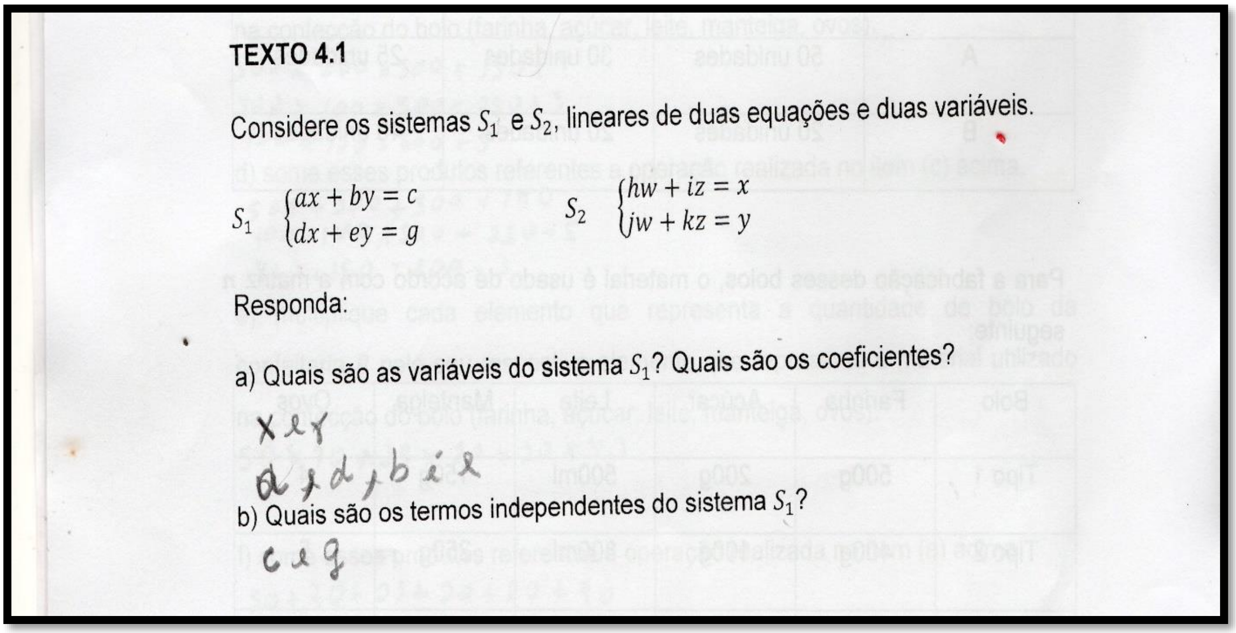
Sim, e só mutiplicar

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

4.2.1.4 Atividade 4: Intervenções Inicial (*Ii*), Reflexivas (*Ir*) e Exploratórias (*Ie*) Multiplicação de Matrizes.

A atividade quarto sobre a multiplicação de matrizes, teve como objetivo de realizar o produto advindo das matrizes, ou seja, agregar valores sobre essa abordagem no contexto de matrizes, fazendo os alunos compreenderem esse sistema sob orientação do professor. A seguir, poderão ser observadas as figuras que fazem jus a esses valores mencionados, com o intuito de evidenciar as respostas da quarta atividade dentro das considerações do Quinto Grupo a ser analisado.

Figura 22 Intervenção Inicial da UARC 4: Multiplicação de Matrizes – Quinta Equipe



TEXTO 4.1

Considere os sistemas S_1 e S_2, lineares de duas equações e duas variáveis.

$$S_1 \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = g \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} hw + iz = x \\ jw + kz = y \end{cases}$$

Responda:

a) Quais são as variáveis do sistema S_1? Quais são os coeficientes?

x e y

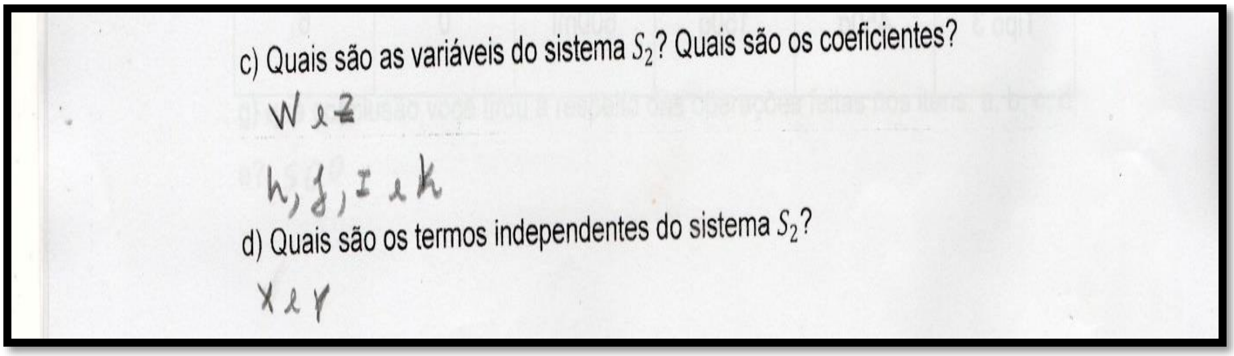
a, d, b e e

b) Quais são os termos independentes do sistema S_1?

c e g

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 23 – Intervenção Reflexiva da UARC 4: Multiplicação de Matrizes – Quinta Equipe



c) Quais são as variáveis do sistema S_2? Quais são os coeficientes?

w e z

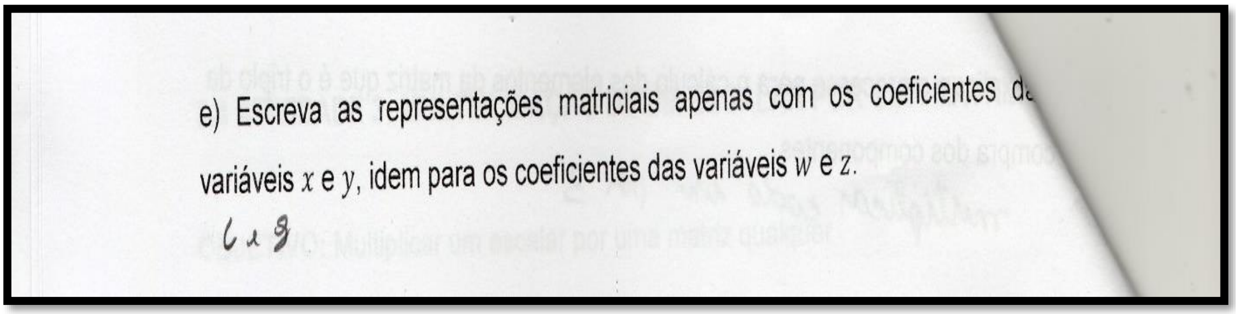
h, j, i e k

d) Quais são os termos independentes do sistema S_2?

x e y

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 24 – Intervenção Reflexiva da UARC 4: Multiplicação de Matrizes – Quinta Equipe

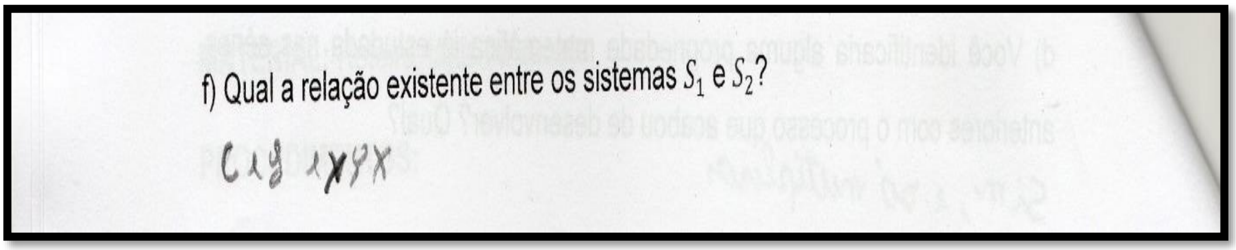


e) Escreva as representações matriciais apenas com os coeficientes das variáveis x e y, idem para os coeficientes das variáveis w e z.

c e g

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

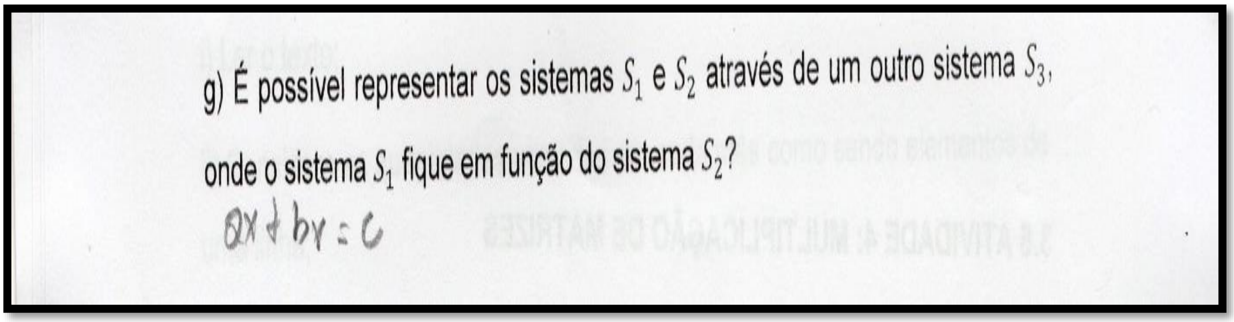
Figura 25 – Intervenção Reflexiva da UARC 4: Multiplicação de Matrizes – Quinta Equipe


f) Qual a relação existente entre os sistemas S_1 e S_2?

C x y x y x

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 26 – Intervenção Reflexiva da UARC 4: Multiplicação de Matrizes – Quinta Equipe

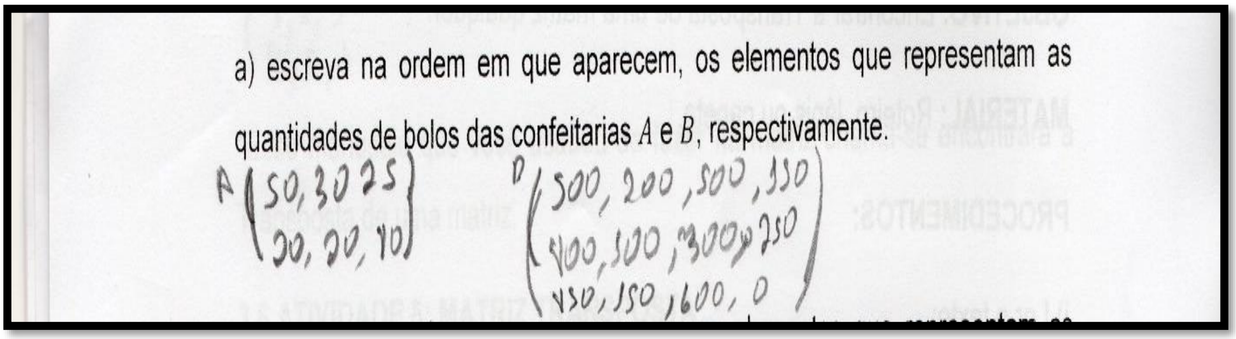

g) É possível representar os sistemas S_1 e S_2 através de um outro sistema S_3, onde o sistema S_1 fique em função do sistema S_2?

$ax + by = c$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

A interferência da atividade 4 também contou com uma segunda parte adaptado de LIMA (2006) cujo objetivo é verificar as estimativas referente à questão da fabricação de bolos, portanto, serão apresentadas as respostas na sequência.

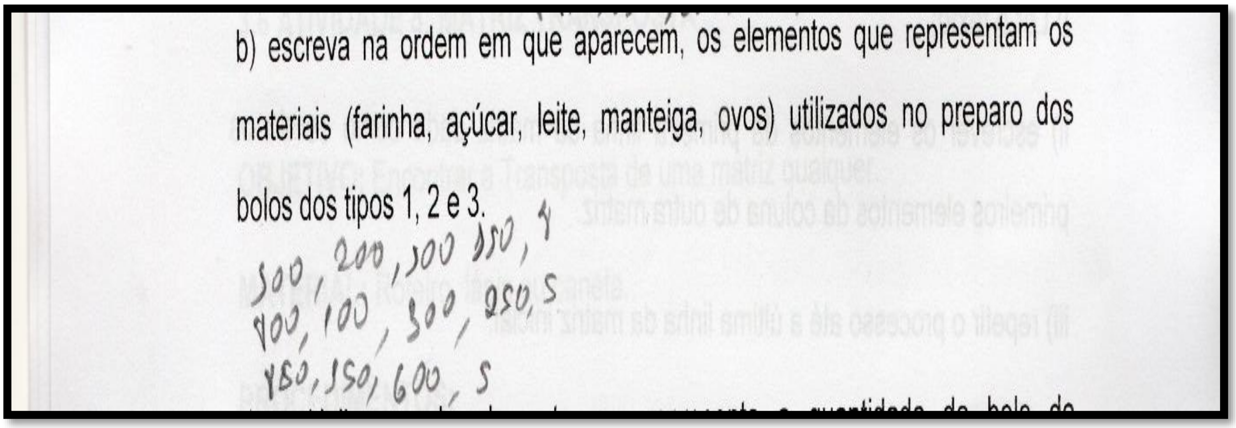
Figura 27 – Intervenção Exploratória da UARC 4: Multiplicação de Matrizes – Quinta Equipe


a) escreva na ordem em que aparecem, os elementos que representam as quantidades de bolos das confeitarias A e B, respectivamente.

$A \begin{pmatrix} 50, 30, 25 \\ 20, 20, 10 \end{pmatrix}$ $B \begin{pmatrix} 500, 200, 500, 350 \\ 400, 300, 300, 250 \\ 450, 150, 600, 0 \end{pmatrix}$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 28 – Intervenção Exploratória da UARC 4: Multiplicação de Matrizes – Quinta Equipe

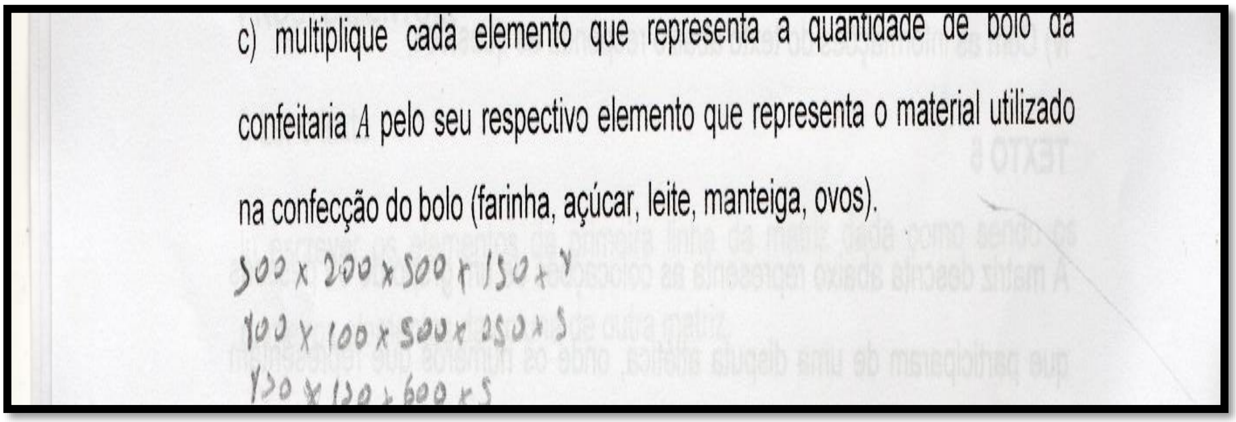


b) escreva na ordem em que aparecem, os elementos que representam os materiais (farinha, açúcar, leite, manteiga, ovos) utilizados no preparo dos bolos dos tipos 1, 2 e 3.

500, 200, 300 150, 4
400, 100, 300, 250, 5
450, 150, 600, 5

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 29 – Intervenção Exploratória da UARC 4: Multiplicação de Matrizes – Quinta Equipe

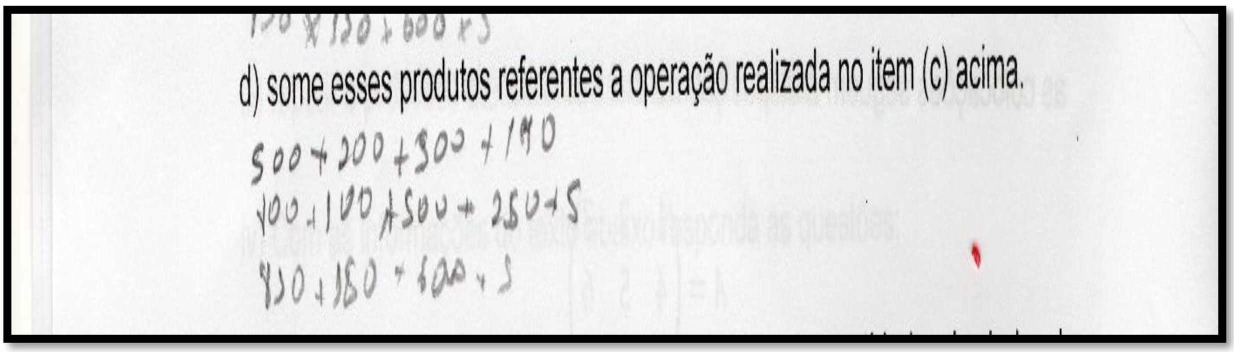


c) multiplique cada elemento que representa a quantidade de bolo da confeitaria *A* pelo seu respectivo elemento que representa o material utilizado na confecção do bolo (farinha, açúcar, leite, manteiga, ovos).

500 x 200 x 500 x 150 x 4
400 x 100 x 500 x 250 x 5
450 x 150 x 600 x 5

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 30 – Intervenção Exploratória da UARC 4: Multiplicação de Matrizes – Quinta Equipe



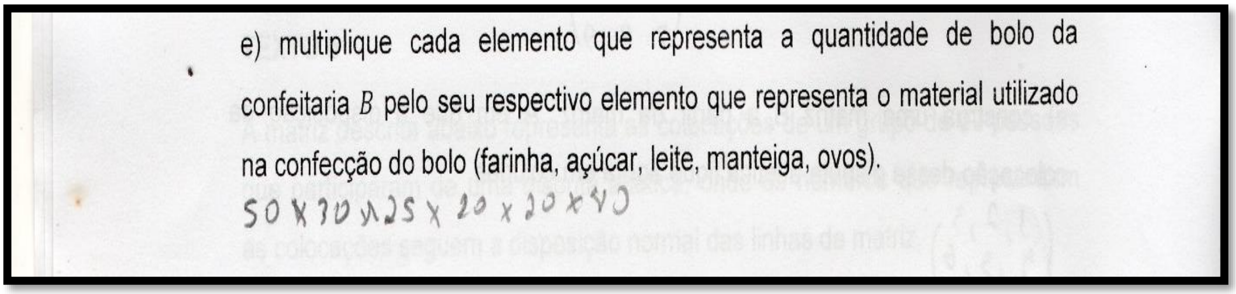
450 x 150 x 600 x 5

d) some esses produtos referentes a operação realizada no item (c) acima.

500 + 200 + 300 + 150
400 + 100 + 500 + 250 + 5
450 + 150 + 600 + 5

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

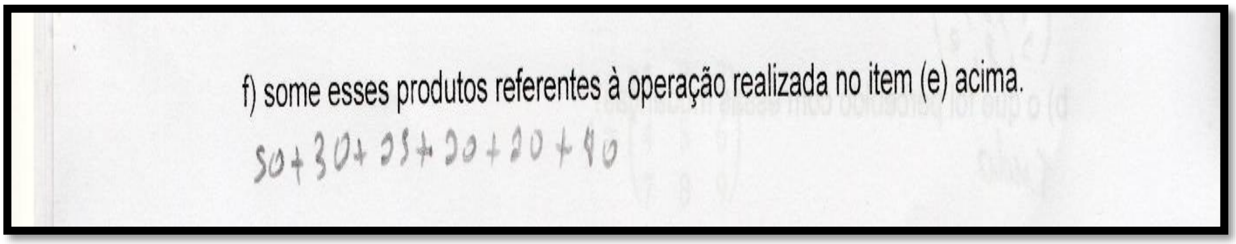
Figura 31 – Intervenção Exploratória da UARC 4: Multiplicação de Matrizes – Quinta Equipe


e) multiplique cada elemento que representa a quantidade de bolo da confeitaria *B* pelo seu respectivo elemento que representa o material utilizado na confecção do bolo (farinha, açúcar, leite, manteiga, ovos).

50 x 30 x 25 x 20 x 20 x 40

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

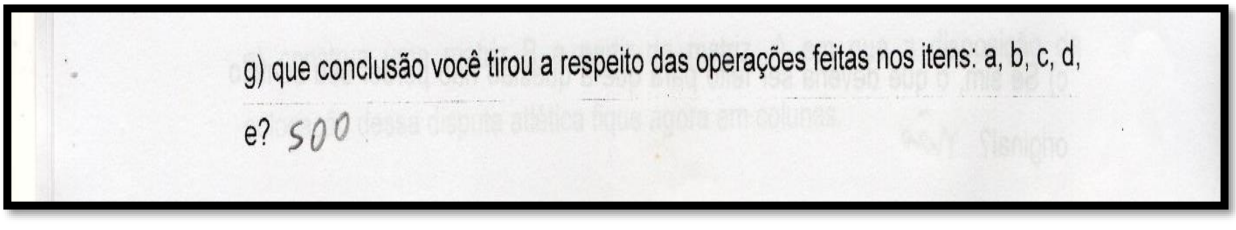
Figura 32 – Intervenção Exploratória da UARC 4: Multiplicação de Matrizes – Quinta Equipe


f) some esses produtos referentes à operação realizada no item (e) acima.

50+30+25+20+20+40

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 33 – Intervenção Exploratória da UARC 4: Multiplicação de Matrizes – Quinta Equipe


g) que conclusão você tirou a respeito das operações feitas nos itens: a, b, c, d, e? 500

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

4.2.1.5 Atividade 5: Matriz Transposta.

Finalmente, chegando a nossa última atividade, é válido ressaltar que a quinta proposta vem com o intuito de fazer com que os alunos entendam o que é Transposta de uma Matriz qualquer, o procedimento vem detalhando quais os processos a serem considerados para a realização desta. As próximas figuras fazem referência a nossa quinta etapa nas atividades de matrizes para a turma do 2º de ensino médio e a equipe responsável pelas resoluções são, novamente, a primeira equipe deste tópico, a conferir.

Figura 34 – Intervenção Inicial da UARC 5: Matriz Transposta – Primeira Equipe

TEXTO 5

A matriz descrita abaixo representa as colocações de um grupo de 09 pessoas que participaram de uma disputa atlética, onde os números que representam as colocações seguem a disposição normal das linhas da matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

a) construa uma matriz B a partir da matriz, A em que a disposição da colocação dessa disputa atlética fique agora em colunas.

B | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 35 – Intervenções Reflexivas e Exploratória da UARC 5: Matriz Transposta – Primeira Equipe

b) o que foi percebido com essas mudanças?

Ficou uma linha e Nove colunas

c) Se sim, o que deveria ser feito para que a questão não perder seu sentido original?

Ficasse do mesmo jeito

d) se a matriz descrita no TEXTO 5 fosse da seguinte forma $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3}$, ou seja, representasse apenas os seis primeiros colocados na disputa atlética cuja ordem é indicada na matriz.

Seria 6 colunas.

e) o que aconteceria com a ordem da nova matriz quando você efetuasse os comandos indicados no item (a)?

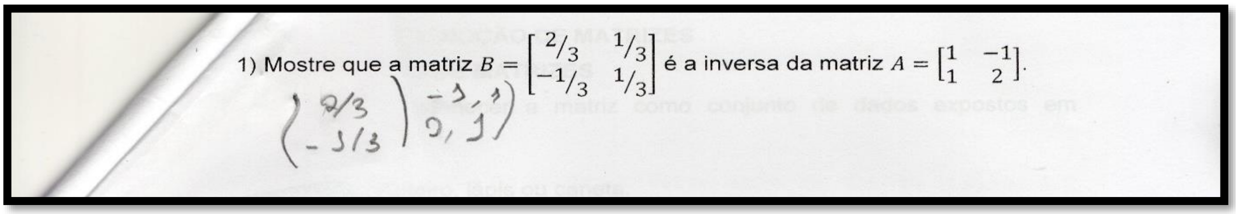
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Ficaria Assim

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

4.2.1.6 Atividade 6: Matriz Inversa.

Finalmente, esta última etapa das atividades se difere das outras também pelo fato do seu objetivo ser determinante para o aprendizado de cálculo a inversa de uma matriz. Os procedimentos são os mesmos, no que diz respeito à atenção para o enunciado da questão para responder as questões que são requeridas. A seguir, as figuras farão jus às propriedades do tópico, respondidas sob o ponto de vista da sexta equipe.

Figura 36 – Intervenção Exploratória da UARC 6: Matriz Inversa – Sexta Equipe

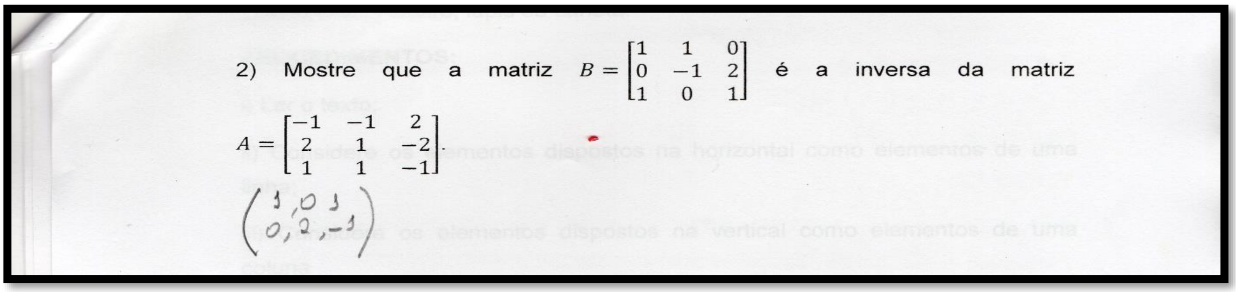


1) Mostre que a matriz $B = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1, 1 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 37 –Intervenção Exploratória da UARC 6: Matriz Inversa – Sexta Equipe



2) Mostre que a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1, 0, 1 \\ 0, 2, -1 \end{pmatrix}$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Assim, encerra-se este tópico que teve o objetivo de demonstrar as respostas perante as abordagens feitas por diferentes equipes, que foram representadas através de recortes de digitalizações dos documentos recebidos após a aplicação desta sequência de atividades de matrizes. O próximo tópico entrará em uma nova abordagem que concerne o mesmo objetivo de demonstrar de outra forma os indícios do efetivo processo através de trechos de transcrições dos áudios feitos no momento da intervenção.

5 INDICATIVOS DE APRENDIZAGEM DAS ATIVIDADES

Neste momento entraremos em um dos tópicos que validam a sequência de atividades propostas, serão evidenciadas as circunstâncias sobre os diálogos trocados com alguns alunos durante a aplicação da sequência, representando fielmente a transcrição destes após a captação dos áudios através de um aparelho telefônico com a função de gravador de voz.

As análises compreendem a tentativa de fazer com que haja sintonia sobre os registros feitos, de forma a dispor o episódio vivenciado. Portanto serão apresentados em quadros a transcrição dos diálogos, bem como evidenciar os indícios do ensino-aprendizagem sobre as atividades de Matrizes.

Quadro 2 – Trecho demonstrativo do diálogo com o Primeiro Grupo – Atividade 1.

Professor: Atividade 01: noção de matrizes. Título: noção de matrizes. Objetivo: reconhecer a matriz como um conjunto de dados expostos em tabela. Material utilizado: roteiro, lápis ou caneta. Procedimentos: ler o texto, considere os elementos expostos na horizontal como elementos de uma linha, considere os elementos expostos na vertical como elementos de uma coluna. De acordo com os exemplos e as questões abaixo faça o que se pede:

Durante um ano letivo, um aluno registrou as notas obtidas respectivamente na primeira, na segunda, na terceira e quarta avaliações. Nas disciplinas de matemática: 5, 8, 7,5 e 7. Português; 6, 7, 9,5 e 6,5. E geografia; 10, 5, 6,5 e 8. A) organize as notas em uma tabela, escrevendo em cada linha uma disciplina de acordo com a ordem preestabelecida e suas respectivas notas, obedecendo a ordem das avaliações.

Professor: Na tabela construída do item A, quantas linhas e quantas colunas existem?
Aluno A e B: Quatro. Quatro linhas e quatro colunas.
Professor: De acordo com a tabela construída no item A, quais as notas localizadas na primeira linha?
Aluno B: cinco, oito, sete e meio e sete.
Professor: Qual a nota que está localizado na primeira linha e segunda coluna?
Aluno A: oito.
Professor: Em relação as linhas e colunas da tabela construída no item A, qual a localização da nota dez?
Aluno B: Quarta linha e primeira coluna.
Professor: Reescreva somente as notas da tabela obtidas no item A, dispostas na mesma ordem, utilizando um par de parênteses ou um par de colchetes: (não foi cobrada uma resposta, cada um á fez no roteiro.)
Professor: Vamos para o texto dois: De acordo com o texto 1.0, visto anteriormente, as notas das disciplinas matemática, português e geografia dispostas num par de parênteses ou colchetes, conforme o item f da referente questão, temos a seguinte representação: (cada um dos alunos realizou o demandava o item f, a maioria pós as notas em parênteses e baseado nisso eles vão responder novamente algumas questões.)
Professor: Quantas linhas e quantas colunas essa matriz possui?
Aluno A: Ela possui três linhas e quatro colunas.
Professor: Quantos elementos essa matriz possui?
Aluno B: Doze.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Pode ser observado, a partir do trecho em destaque, o início do processo em andamento, vale ressaltar que os alunos participantes das gravações foram intitulados com letras para substituição das suas identidades, é possível perceber então que, o primeiro grupo tem dois alunos em questão, os quais chamamos no diálogo como Alunos A e B para melhor compreensão destes. O diálogo transcorre de acordo com a aplicação da sequência, podemos observar também os alunos se mantém em um nível confortável de respostas, o que demonstra domínio sobre o assunto em questão.

Na sequência, dar-se-á continuação no diálogo entre professor e alunos do grupo citado, a conferir.

Quadro 3 – Trecho demonstrativo do diálogo com o Primeiro Grupo – Atividade 1.

Professor: É possível estabelecer uma operação matemática entre o número total de elementos da matriz e o número de linhas e colunas? No caso, qual seria essa operação?
Aluno B: operação.
Professor: de que forma?
Aluno A: multiplicando, quantas linhas vezes quantas colunas.
Professor: perfeito. Para cada situação abaixo, determine o número total de elemento da matriz. Uma matriz que possui duas linhas e três colunas:
Aluno A e B: seis.
Professor: uma matriz que possui uma linha e cinco colunas:
Aluno A e B: cinco.
Professor: uma matriz que possui quatro linhas e quatro colunas:
Aluno A e B: dezesseis.
Professor: uma matriz que possui m linhas e n colunas:
Aluno A: m e n linhas e colunas.
Professor: isso, é está bom. Nós vamos agora para outra questão: item I: observe as seguintes figuras e localize os pontos indicados de acordo, com o código das linhas e colunas. O ponto P, como você localizaria? De acordo com o código.
Aluno A: L3 linha e C2 coluna.
Professor: certo.
Aluno A e B: L1 linha
Professor: mas L1 linha seria que ponto localizando?
Aluno B: M, coluna 1. Ponto M, linha 1 coluna 3. Ponto A, terceira linha e terceira coluna. O ponto K, na linha m e na coluna n.
Professor: certo. (Ai tem algumas atividades de ficção que os alunos vão resolver). E nós vamos para a atividade três: que seria a adição de matrizes. Considere as quantidades vendidas em cada mês, como sendo os elementos de uma linha e considere as quantidades vendidas em cada tipo, como sendo os elementos de uma coluna. De acordo com o texto e as questões abaixo, faça o que se pede.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Observa-se o transcorrer do momento da aplicação das atividades, focado em fazer com que o aluno seja estimulado a perceber a maneira como a sequência acontecerá dentro do seu conceito, designando a intenção de maneira intuitiva, de forma empírica. O próximo quadro vem com a intenção de que corresponde aos questionamentos sequenciais, que faz com que os alunos reflitam sobre a atividade que se desenvolve. O grupo analisado consiste no segundo grupo, composto por dois alunos do sexo masculino. Apesar de ambos terem participação na atividade, somente um se dirigiu a responder as perguntas nos áudios analisados, que foram transcritos e podem ser identificados no último quadro transcrito a seguir.

Quadro 4 – Trecho referente ao diálogo com o Segundo Grupo – Atividades 2 e 3.

Professor: atividade 02: adição de matrizes: considere as quantidades vendidas em cada mês como elementos de uma linha e considerar as quantidades vendidas em cada tipo como elementos de uma coluna. De acordo com o texto e as questões abaixo, faça o que se pede.

Dois vendedores, A e B, comercializam três tipos de açaí; o popular, o médio e o grosso. Nos meses de junho, julho e agosto, comercializaram as seguintes quantidades em litros, respectivamente de cada tipo. O vendedor A comercializou vinte, dez e seis e 32, 18 e 3 e 12, 27 litros. O Vendendo B comercializou 12, 22 e 10, 30, 22 e 8, 10, 17 e 4 litros. Construa as matrizes de produção de açaí de cada vendedor dos meses em questão.

Professor: baseado nisso, vamos resolver. Qual a quantidade total de vendas de açaí popular no mês de junho?

Aluno A: 32.

Professor: qual a quantidade vendida de açaí grosso?

Aluno A: 68.

Professor: qual a quantidade de açaí que o vendedor B comercializou no mês de agosto?

Aluno A: Vinte e dois.

Professor: Atividade 03: multiplicação de uma escala por uma matriz. Procedimentos: ele vai considerar quantidades vendidas em cada mês, como elemento de uma linha. Considerar a quantidade vendidas de cada tipo, como elementos de uma coluna. De acordo com as questões abaixo, faça o que se pede.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Desta maneira, encerramos nossa última etapa levando em consideração que a intervenção na turma aconteceu de forma tranquila e harmoniosa, pode-se entender que a turma assume um domínio muito bom sobre o assunto apesar de alguns alunos não terem realizado as atividades.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo conhecimento de que a Matemática assume um papel fundamental na formação do pensamento e raciocínio lógico, pode-se concretizar esta pesquisa assumindo o objetivo principal, estabelecido previamente, que consiste em assimilar o conteúdo da disciplina eliminando os fatores de ensino tradicional como a repetição e memorização assídua de fórmulas e outros conhecimentos específicos da área.

A pesquisa concretiza a justificativa, que busca fundamentar-se através de uma Sequência de Didática de Exercícios pré-estruturados que demonstraram aporte necessário para o ensino-aprendizagem de Matrizes. É válido ressaltar que a aplicação aconteceu na turma de 2º ano de ensino médio de uma escola da rede pública de ensino que, além de ser a escola em estava lotado no período especificado na pesquisa, pode-se agregar os valores sobre a real situação do ensino público no estado do Pará.

Acerca dos resultados obtidos na presente pesquisa, podemos verificar sob análise, as dificuldades encontradas para a realização desta sequência, a falta de interesse no ensino da matemática, principalmente no ensino médio, por parte dos estudantes. O nível de satisfação nos testes também foi baixo, principalmente no que diz respeito a finalização das atividades, foi possível observar as dificuldades em prosseguir até o final das mesmas. Porém, a pesquisa foi, de fato, proveitosa e o nível de conhecimento sobre o assunto Matrizes foi expandido após a disseminação da proposta, caracterizando certo aprofundamento por parte dos estudantes envolvidos. Com isso, podemos considerar que a pesquisa foi concluída com êxito no que se refere às propostas pré-estabelecidas, assumindo caráter satisfatório às reflexões posteriores.

A agregação de valores sobre o uso da sequência didática no âmbito de matrizes foi essencial para o desenvolvimento deste assunto, apesar da resistência da participação de alguns estudantes, os envolvidos puderam elaborar seus próprios conceitos a partir da aplicação e adotar estratégias para a resolução de alguns problemas. Desta forma, é válido observar que a expansão do conhecimento é de grande importância para a firmação das capacidades matemáticas de todos os estudantes, adquirida através da reflexão das abordagens.

Assim, posso considerar como professor-pesquisador que a realização desta experimentação foi imprescindível para uma superação em relação a busca por conhecimentos pedagógicos. Com ela, também foi possível descrever a realidades enfrentada por milhares de brasileiros, principalmente, paraenses que consiste em grande dificuldade no processo de ensino-aprendizagem.

Por fim, pode-se afirmar que o estudo foi essencial para a representação de uma parte da realidade do conhecimento e competências manifestados nos estudantes, além disso, é válido destacar que é importante a relação entre estudantes e professor, cabendo ao professor assumir uma postura didática mais flexiva afim de melhorar o desempenho dos mesmos. Apesar disso, as abordagens, sugeridas na sequência didática, foram fundamentais para estimular a busca pela melhoria, não somente por parte do professor, mas também dos estudantes de forma geral.

REFERÊNCIAS

ABRAMOVAY, M.; CASTRO, M. G. **Ensino médio: múltiplas vozes**. Brasília: UNESCO, MEC, 2003.

______. **Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional.** Brasília: Líber Livro, 2005. (Série Pesquisa, v. 13).

ARTIGUE, M. "Ingénierie Didactique". Recherches en Didactique des Mathématiques. 1988. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308.

BAGGIO, G., SCHOSSLER, D., DULLIUS, M. **Utilizando diferentes metodologias para o ensino de matrizes: Uso de modelagem matemática e recursos computacionais em dois ambientes escolares**. Revista dos Destaques Acadêmicos, ano 2, n 4, 2010, p. 9-15.

BARALDI, Ivete Maria; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. Traços de uma paisagem: os anos 60 e 70 e a formação de professores de matemática na região de Bauru (SP). **Revista de Educação PUC-Campinas**, n. 18, 2012.

BORBA, Elizandro Max. **Uma proposta para o ensino de matrizes com o apoio de tecnologia.** 2011. 44f. Trabalho de Conclusão de Curso (Lic. em Matemática) – Universidade Federal do rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

______. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2).

______. Ministério de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília, 2000.

BRONCKART, Jean-Paul. **Gêneros textuais, tipos de discursos, e operaçoes psicolingüísticas.** Revista de estudos da linguagem, n. 11, p. 49-69, 2003.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequência didática: estrutura e elaboração**. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017. 104 p.

CARDOSO, Valdinei Cesar; KATO, Lilian Akemi; OLIVEIRA, Samuel Rocha de. **Um estudo no campo conceitual de Vergnaud aplicado as matrizes:** uma investigação acerca dos invariantes operatórios. In: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 8. 2013, p. 95-116. Disponível em: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8nespp95. Acessado em 27/12/2018.

CRISTOVÃO, V. L. L. **Modelos didáticos de gênero: uma abordagem para o ensino de LE**. Londrina: UEL, 2007.

______. Modelo didático de gênero como instrumento para formação de professores. Gêneros textuais e práticas discursivas: subsídios para o ensino da linguagem. Bauru: EDUSC, p. 31-73, 2002.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática**. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, p. 97-115, 1999.

______. **Novos paradigmas de atuação e formação de docente.** Redes em construção: meios de comunicação e práticas educativas. Araraquara: JM Editora, p. 55-77, 2003.

DOMINGUES, Isaneide. **O coordenador pedagógico e o desafio da formação contínua do docente na escola.** 2009. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

FERREIRA, E. F. P. SCORTEGAGNA, L. CAMPONEZ, L. G. B. **A utilização da performance matemática digital - PMD – no Ensino e aprendizagem de noção de função**. Universidade Federal de Juiz de Fora. Ano XXII – nº 30 – ago/dez – 2015.

FERREIRA, N. S. **Modelagem Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação como ambiente para abordagem do conceito de Função segundo a Educação Matemática Crítica**. Ouro Preto, 2013. 243 páginas.

FAINGUELERNNT, Estela Kaufman. **Álgebra Linear e Geometria Analítica: 2º grau, vestibulares**/ Estela Kaufman Fainguelernnt, Noelir de Carvalho Bordinhão. – São Paulo: Ed. Moderna, 1980.

FRANK AYRES, Jr. **Matrizes**. Frank Ayres Jr Ph. D. Departamento de Matemáticas, Dickinson College. Tradução de Ana Amélia Feijó Barroso, Professora do Ensino Médio do Estado da Guanabara – Ex-professora da Faculdade de Filosofia da Universidade do Rio de Janeiro e da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1971.

FRIGOTTO, Gaudêncio. A polissemia da categoria trabalho e a batalha das ideias nas sociedades de classe. **Revista Brasileira de Educação**, v. 14, n. 40, Campinas: Autores Associados, 2009.

GIANOLLA, R. M. **Informática na educação: representações sociais do cotidiano**. São Paulo, Cortez, 2006.

GIRAFFA, L. M. M. **Uma odisséia no ciberespaço: o software educacional dos tutoriais aos mundos virtuais.** Revista Brasileira de Informática na Educação, v. 2, p. 40, 2008

GOMES, F. M. **Matemática Básica: Operações, equações, função e sequências**. Vol. 1, IMECC - UNICAMP. 2016, 106 páginas.

KRAIESKI, Protasio. **Abordagens de matrizes no ensino médio:** uma avaliação crítica através dos livros didáticos, com sugestões de aplicações. 1999. 77f. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999.

KRAWCZYK, N. **O ensino médio no Brasil.** São Paulo: Ação Educativa, 2009.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. 357p. (Coleção Matemática Universitária).

______. Reflexão sobre alguns desafios do Ensino Médio no Brasil hoje. **Cadernos de Pesquisa,** v. 41, n. 144, set-dez/2011.

LINS, Romulo Campos. Matemática, monstros, significados e Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani e BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

LOPES, Alice C.; MACEDO, Elizabeth F. de. **Teorias de Currículo.** São Paulo: Cortez, 2011.

LOPES, José Marcos. Matrizes, determinantes e sistemas lineares através da metodologia de resolução de problemas para o ensino médio. *In*: **Livro Eletrônico dos Núcleos de Ensino da UNESP** (Org). São Paulo, 2008, v. 01, p. 1101-1124. 2008. Disponível em: http://www.mat.fies.unesp.br/docentes2008/jose_marcos/MatrizesDeterminantesSistLineares.pdf. Acessado em 09/01/2018.

LOPES, Marcelo dos Reis. **Matrizes:** história de um conteúdo escolar. 2012. 101f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

MANFIO, Carine Girardi; MATHIAS, Carmen Vieira. Um olhar lançado ao objeto de aprendizagem “matrizes”. In: **XI Encontro Nacional de Educação Matemática,** Curitiba – Paraná, 18 a 21 de julho de 2013.

MARINHO, Fernando Celso Villar. **Geometria com o uso de softwares livres.** Palestra. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, Bahia, 2010.

MECONI JUNIOR, Roberto. **Estratégias pedagógicas com o uso de tecnologias na formação de professores:** matrizes e determinantes. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional e Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

MELLO, G. **A Escola na era da tecnologia**. In: Revista nova Escola. Abril, março/2005.

MESSIAS, Maria Alice de Vasconcelos Feio; SÁ, Pedro Franco de; FONSECA, Rubens Vilhena. Um estudo diagnóstico sobre as dificuldades de matrizes. In: **IX Encontro Nacional de Educação de Matemática (ENEM)**, IX, 2007, Belo Horizonte. Anais...Belo Horizonte: Universidade de Belo Horizonte, 2007.

NOBLE, Ben. **Algebra linear aplicada** / Ben Noble, James W. Daniel: traduzido por João Pitombeira de Carvalho - Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1986.

NOVELLO, T. P.; SILVEIRA, S.; LUZ, V. S.; COPELLO, G. B.; LAURINO, D. P. **Material Concreto:** uma estratégia pedagógica para trabalhar conceitos matemáticos. Curitiba: PUCPR, 2009.

OLIVEIRA, Reinaldo Donizete de. **Utilização de mensagens criptografadas no ensino de matrizes.** 2013. 82f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

PANCIERA, Letícia Menezes; FERREIRA, Márcio Violante. A modelagem matemática no ensino de matrizes e sistemas lineares. In. **12ª Jornada Nacional de Educação e 2º Congresso Internacional de Educação,** Centro Universitário São Francisco – UNIFRA, Santa Maria – Rio Grande do Sul, 2006.

PAPERT, Seymour. **A Máquina das Crianças: repensando a escola na era da informática**. Porto Alegre: Artmed, 2008. 220 p.

PERRENOUD, Phillipe. **Avaliação: da excelência à regularização das aprendizagens: entre duas lógicas.** Porto Alegre, Artmed, 1998

RAMOS, Ivete do Socorro Gonçalves et al. **Matrizes**. 2006. 96f. Trabalho de Conclusão de Curso (Lic. em Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2006.

SANTOS, Antônio Carlos Matias dos. **Ensino de operações com matrizes por atividade.** 2008. 62f. Trabalho de Conclusão de Curso (Lic. Em matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém 2008.

SANTOS, A. O., ALMEIDA, M.Z.C.M. **Perspectivas para o Ensino Médio a partir do documento Referência Conae.** 2014. Pôster do GT Diálogos abertos sobre Educação Básica. Disponível em: <http://www.ceped.ueg.br/anais/vedipefinal/pdf/gt13/poster%20grafica/Alessandra%20de%20Oliveira%20Santos.pdf >. Acesso em abril/2018.

SANTOS, Kátia Maria Limeira; VASCONCELOS, Carlos Alberto. **O ensino da matemática na educação basica e as novas tecnologias: uma abordagem na formação do professor.** Educação básica revista, v. 1, n. 2, p. 75-84, 2016.

SANCHES, Maria Helena Figueiredo. **Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes.** 2002. 142f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

SÁNCHEZ, J. N. G. **Dificuldades de Aprendizagem e intervenção Psicopedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SANTOMÉ, Jurjo Torres. As culturas negadas e silenciadas no currículo. In: SILVA, Tomaz Tadeu da (Org.). **Alienígenas na sala de aula:** uma introdução aos estudos culturais em educação. 4. ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

SILVA, Gerciane Gercina da. **Ensino de Matrizes:** Um desafio mediado por ferramentas didáticas para aprendizes cegos e aprendizes surdos. 2012. 144f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

SILVA, Tarcila Gesteira; BERNARDI, Giliane. **Cal: Um agente pedagógico animado para apoio em um objeto de aprendizagem para o ensino de matemática.** In: Brazilian Symposium on Computers in Education (Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE). 2009.

SIQUEIRA FILHO, Aliprecídio José de. **Aplicações e resoluções de problemas com metodologia para o ensino de matrizes, sistemas lineares e determinantes.** 2013. 66f. Dissertação (Mestrado em Matemática/PROFMAT) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

SOUZA, Pâmela de Alvarenga; LOPES, Arilise Moraes de Almeida; AZEVEDO, Carmen Lúcia Vieira Rodrigues. O estudo de produto de matrizes por meio de um objeto de aprendizagem. In. **XI Encontro Nacional de Educação Matemática,** Curitiba – Paraná, 18 a 21 de julho de 2013.

STEINHORST, Aroldo César. **O processo de construção dos conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares no ensino médio, utilizando a planilha como recurso:** um estudo comparativo. 2011. 87f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

TAKAHASHI, Tadao (Org). **Sociedade da informação no Brasil: Livro Verde**. Brasília: Ministério da Ciência e Tecnologia, 2000. xxv, 195 p.

TAVARES, Agamenon Henrique. **Usando a história da resolução de alguns problemas para introduzir conceitos:** sistemas lineares, determinantes e matrizes. 2013. 73f. Dissertação (Mestrado em Matemática/PROFMAT) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

VALENTE, J. A. **Informática na educação.** Revista Pátio, ano 3., n. 09. Porto Alegre, maio/jul, 1999.

VIANIN, Pierre. **Estratégias de ajuda a alunos com dificuldades de aprendizagem.** Porto Alegre: Penso, 2013.

ZABALA, Antoni. A Prática Educativa. Como ensinar. Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ARTMED, 1998. 224 páginas.

APÊNDICE - QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS

Sequência didática para o ensino de Matrizes: integrando o ensino tradicional com resolução de exercícios e o uso de um aplicativo em Smartphones como ferramenta de apoio no 2º ano do Ensino Médio

*Obrigatório

1. **Gênero:** *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Masculino
- [ ] Feminino

2. **Qual sua idade?** *

3. **Qual sua idade?** *

4. **Qual o tipo da sua escola?** *

Marcar apenas uma oval.

- Escola Pública Municipall
- Escola'Pública Estadual
- Escola Pública Federal

5. **Qual a escolaridade de seu pai ou responsável masculino (Até que nível estudou)?** *

Marcar apenas uma oval.

- Fundamental Incompleto
- Fundamental Completo
- Ensino Médio Incompleto
- Ensino Médio Completo
- Ensino Superior Incompleto
- Ensino superior Completo
- Pós-graduação

6. **Qual a escolaridade de sua mãe ou responsável feminino (Até que nível estudou)?** *
Marcar apenas uma oval.

- Fundamental Incompleto
- Fundamental Completo
- Ensino Médio Incompleto
- Ensino Médio Completo
- Ensino Superior Incompleto
- Ensino superior Completo
- Pós-graduação

7. **Qual a profissão ou a ocupação de seu responsável masculino?** *

8. **Qual a profissão ou a ocupação de seu responsável feminino?** *

Ensino de Matemática

9. **Você está ou já esteve em dependência em Matemática?** *
Marcar apenas uma oval.

- Sim. Estou atualmente, em dependência em Matemática
- Sim. já estive em dependência em Matemática
- Não. Nunca fiquei em dependência em Matemática

10. **Com que frequência você costuma estudar Matemática fora da escola?** *
Marcar apenas uma oval.

- Todos os dias.
- Mais de 3 vezes por semanja
- Costumo estudar 3 vezes ou menos por semana
- Só no período de prova
- Não costumo estudar fora da escola.

11. **Qual o nível de seu gosto por matemática?** *
Marcar apenas uma oval.

	1	2	3	4	5	
Não gosto						Gosto muito

12. Quem mais lhe ajuda na tarefa de Matemática? (Marque mais de uma opção de necessário) *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Professor particular
- [ ] Pai ou responsável masculino
- [ ] Mãe ou responsável feminina
- [ ] Imão
- [ ] Costumo estudar sozinho
- [ ] Outro: ______________________

13. Você consegue compreender as explicações dadas nas aulas de Matemática? *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Sempre
- ( ) Quase sempre
- ( ) Poucas vezes
- ( ) Nunca compreendo

14. Quais as principais formas de avaliação que o professor de Matemática costuma solicitar a você? (Marque mais de uma opção, se necessário) *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Prova oral
- [ ] Prova escrita
- [ ] Autoavaliação
- [ ] Fichas de observação
- [ ] Produções no caderno

15. Como você costuma se sentir quando está diante de uma avaliação de Matemática? (Marque no máximo duas opções)

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Entusiasmado
- [ ] Tranquilo
- [ ] Com medo
- [ ] Preocupado
- [ ] Com raiva
- [ ] Sinto calafrios

Percepção sobre Matrizes

16. **Quando você estudou MATRIZES, as aulas foram ministradas em sua maioria:** *
Marcar apenas uma oval.

- Começando pela explicação seguida de exemplos e exercícios
- Começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto
- Criando um modelo para situação e depois analisando
- Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos
- Utilizando ferramentas tecnológicas para resolver problemas
- Outra metodologia

17. **Para fixar o estudo realizado com MATRIZES, seu professor(a):** *
Marcar apenas uma oval.

- Apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos
- Apresentava jogos envolvendo o assunto
- Mandava resolver os exercícios do livro didático
- Não propunha questões de fixação
- Mandava que você procurasse questões sobre o assunto para resolver
- Propunha a resolução de questões por meio de softwares

18. **Através de aulas expositivas e consulta ao livro didático. O quanto você gostaria de aprender MATRIZES?** *
Marcar apenas uma oval.

- Sempre
- Quase sempre
- Raramente
- Nunca

19. **Através de situação problema para introduzir o assunto. O quanto você gostaria de aprender MATRIZES?** *
Marcar apenas uma oval.

- Sempre
- Quase sempre
- Raramente
- Nunca

20. **Através de experimentações práticas do dia a dia. O quanto você gostaria de aprender MATRIZES?** *
Marcar apenas uma oval.

- Sempre
- Quase sempre
- Raramente
- Nunca

21. Através de jogos para depois sistematizar os conceitos. O quanto você gostaria de aprender MATRIZES? *

Marcar apenas uma oval.

- Sempre
- Quase sempre
- Raramente
- Nunca

22. Através de aplicativos para smartphone. O quanto você gostaria de aprender MATRIZES? *

Marcar apenas uma oval.

- Sempre
- Quase sempre
- Raramente
- Nunca

23. Através de aplicativos para smartphone. O quanto você gostaria de aprender MATRIZES? *

Marcar apenas uma oval.

- Sempre
- Quase sempre
- Raramente
- Nunca

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática Estatística e Informática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n, Telégrafo
66113-200 – Belém – PA
www.uepa.br