Universidade do Estado do Pará
Pró-reitora de Pesquisa e Pós-graduação
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Mauro Floriano da Costa Garcia
Natanael Freitas Cabral

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Belém-Pará
2020

Mauro Floriano da Costa Garcia
Natanael Freitas Cabral

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Produto apresentado como requisito para obtenção de título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Linha de pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral

Belém-PA
2020

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

GARCIA, Mauro Floriano da Costa & CABRAL, Natanael Freitas. uma sequência didática para o ensino de frações algébricas. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2020.
ISBN:
Ensino Matemática; Ensino por atividades; Frações algébricas.

Bibliotecária: Regina Ribeiro CRB-2 739

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Este trabalho é o produto resultante da pesquisa realizada por Garcia (2019) sobre uma sequência didática para o ensino de frações algébricas, cujo objetivo foi mensurar o potencial de uma sequência didática, na construção do entendimento do conceito e operações de frações algébricas nos alunos do 8º ano do ensino fundamental de uma escola estadual do município de Belém-Pará, estruturada sob o prisma das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual.

A primeira etapa da pesquisa consistiu na investigação, por meio de levantamento bibliográfico, sobre o cenário histórico e atual do ensino de frações algébricas no ensino fundamental, a fim de analisar os diferentes pontos de vista de outras pesquisas relacionadas ao estudo das frações algébricas, dessa forma, analisou-se os pontos considerados pertinentes, tais como objetivos, questões norteadoras, estratégias metodológicas e resultados obtidos.

Após esse embasamento teórico, realizou-se a consulta, através de um questionário, com os alunos do 8º ano do ensino fundamental, sobre as questões sociais e ensino-aprendizagem de frações algébricas. Além disso, aplicou-se um teste de verificação de aprendizagem aos alunos participantes da pesquisa.

Embora não existam, como já destacado, fórmulas prontas que garantam o sucesso do ensino-aprendizagem da Matemática, é certo que o uso de determinados recursos pedagógicos, conforme Nunes et al (2009), pode favorecer esse processo, promovendo a motivação e socialização do alunado, suscitando o processo de desenvolvimento de habilidades que, até então, não eram construídas por eles.

Em relação ao conceito e estudo das propriedades de Frações Algébricas, pode-se afirmar que são a base para a consolidação de outros conteúdos curriculares do ensino fundamental e médio, por apresentar um papel chave na materialização da matemática aplicada as situações problemas do cotidiano. No entanto, percebe-se que ainda é ensinada de maneira tradicional, apoiada na tríade conceito-exemplos-exercícios, fazendo com que o aprendizado seja dificultado e desconectado da realidade dos alunos.

O terceiro e último passo foi a construção e aplicação da sequência didática para alunos do 8º ano do ensino fundamental. E a partir dos resultados obtidos verificar a viabilidade desta ferramenta metodológica dentro deste estudo.

Desse modo, identificou-se através do objeto de estudo uma sequência didática capaz de proporcionar ao aluno do 8º Ano do Ensino Fundamental ferramentas para amenizar as dificuldades no processo do ensino-aprendizado de frações algébricas. Desta forma, a questão de pesquisa elaborada foi a seguinte: Qual sequência didática estruturada no ensino por atividades seria adequada a favorecer e facilitar o entendimento do aluno do Ensino Fundamental sobre o conceito e operações de frações algébricas?

A opção pela adoção da pesquisa de campo se deu pelo fato de que, desde o início do levantamento para elaboração do presente projeto, se acreditou que a abordagem ora proposta não poderia ser reduzida tão somente a pesquisas de caráter teórico.

Isso porque se tinha a necessidade de também verificar, na prática, quais os recursos pedagógicos utilizados pelos docentes da instituição de ensino analisada para o ensino da Álgebra em Matemática, bem como qual seria a sequência didática adequada para este fim.

A metodologia adotada está baseada nos princípios da engenharia didática divididas nas seguintes etapas: Análises prévias, Concepção e Análise à priori, Experimentação e Análise à posteriori e Validação.

Segundo Artigue (1988), “Engenharia Didática”’ surge como uma expressão criada para o trabalho didático comparado ao trabalho de um engenheiro, pois ao realizar um projeto, baseia-se em conhecimentos científicos de sua área, submetendo-se a um controle de cunho científico, ao mesmo tempo que é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos propriamente trabalhados pela ciência.

Além disso, a pesquisa também está pautada na teoria das Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC), que de acordo com a proposta de Cabral (2017), a reconstrução conceitual do objeto matemático é determinada por uma unidade previamente definida, denominada Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC), sendo analogicamente comparada a determinação da medida da área S de uma superfície.

Desta forma, cada UARC é definida como:

> Um conjunto de argumentações empírico-intuitivas construído por todas as Intervenções Estruturantes pré-formais que antecedem e

> inclui alguma Intervenção Formalizante. Em outros termos, cada Intervenção Formalizante estabelece um recorte argumentativo unitário que, em tese, contribuiu/estimula a reconstrução de um conceito do saber matemático escolar e, além disso, armazena a história epistemológica dessa reconstrução (CABRAL, 2017, p. 59).

A partir desse estudo realizado, este produto visa possibilitar mais uma alternativa no ensino de frações algébricas, diferente do modelo tradicional do ensino da álgebra, por meio do uso da sequencia didática. Desta forma, o produto está estruturado em três capítulos: o primeiro trata da fundamentação matemática sobre fração algébrica, afim de auxiliar na formação continuada do docente; o segundo apresenta um levantamento histórico do ensino de frações algébricas, para contextualizar o leitor e o terceiro desdobra a sequência didática produzida e aplicada.

2 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA SOBRE FRAÇÃO ALGÉBRICA

Se chama fração algébrica uma expressão racional fracionária, que é o quociente da divisão de um polinômio por outro (FREITAS, 2007).

A fração algébrica que representa o cociente da divisão do polinômio A por outro polinômio B se escreve, corretamente, na forma de $\frac{A}{B}$, com a particularidade de que o polinômio A se denomina como numerador da fração algébrica e o polinômio B como denominador da mesma.

Os exemplos de fração algébrica são:

$$\frac{3ab-b}{a^3+1};\frac{ab-b}{d+a};\frac{a^2+b^2}{a-b};\frac{xy+6y}{7x+8y}.$$

O CVA de uma fração algébrica $\frac{A}{B}$, em que figuram n letras é um conjunto de todas as coleções numéricas correspondentes a coleção literal da fração $\frac{A}{B}$ com exceção para aquelas cujo valor numérico correspondente do polinômio B é igual a zero.

Por exemplo, o CVA da fração algébrica $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ é o conjunto $\{(a,b)|a \in R; b \in R; a \neq b\}$.

Demonstraremos algumas afirmações sobre a igualdade das frações algébricas.

1. Se designa a fração algébrica $\frac{A}{B}$ com apenas uma letra C, sendo assim, no CVA, a fração é equivalente às igualdades idênticas.

$$C = \frac{A}{B} \text{ e } A = CB$$

A validade dessa propriedade se desprende de algumas afirmações anteriores (14§2)

2. As igualdades $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ e $AD = BC$ são equivalentes ao primeiro CVA delas. Essa propriedade se anuncia do seguinte modo: As frações $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ são identicamente iguais no CVA. Se, e apenas se, no dito CVA se verificar a igualdade $AD = BC$.

Demonstração: Seja a região M do CVA das frações $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$. Examinaremos o caso em que $A = 0$ em M. Então, $\frac{A}{B} = 0$, e a igualdade $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ se deduz que também $\frac{C}{D} = 0$ em M.

Por isso, $C = 0$ em M, e isso significa que $AD = BC$ em M.

Ao contrário, seja $AD = BC$ e $A = 0$ em M. Por conta de $D \neq 0$ & $B \neq 0$ em M, será $C = 0$ em M. Por consequência, $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Agora examinaremos o caso em que não existe nenhuma coleção da região M. Para qual o polinômio A não se reduz a zero, sendo assim, no caso em que $A \neq 0$ em M. Seja: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, então daqui se desprende $C \neq 0$ em M. Designemos com a fração $\frac{A}{B}$ e com β, $\frac{C}{D}$. Segundo a propriedade 1 da fração algébrica, $A = aB$ e $C = \beta D$. De acordo com a afirmação 14§2, teremos $A\beta D = CaB$.

Por conta de $a = \beta \neq 0$ em M, resulta em, conforme a afirmação 14§2, de (1) se deriva $AD = CB$.

Ao contrário, seja $AD = BC$, então, por conta de $A \neq 0$, $D \neq 0$ e $B \neq 0$ em M. Teremos $C \neq 0$ em M. Portanto, $a = \frac{A}{B}$ e $\beta = \frac{C}{D}$ não são iguais a zero em M. Multipliquemos a igualdade dada em $AD = BC$ por $a\beta$. Obteremos uma igualdade equivalente $a\beta AD = a\beta BC$.

Porém, $aB = A$, $\beta D = C$, e a igualdade (2) adquire a forma $aAC = \beta AC$.

Fazendo uso da afirmação 14§2, chegamos à demonstração $\alpha = \beta$.

Deste modo, é demonstrada a propriedade 2 das frações algébricas.

3. No CVA da fração algébrica $\frac{A}{B}$ se verificam as igualdades idênticas $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = \frac{A}{-B} = \frac{-A}{B}$.

Cada uma destas igualdades se faz evidente, se fazemos uso da propriedade 2 que acabamos de demonstrar.

4. Para qualquer polinômio K, que não se reduz a zero no CVA da fração algébrica $\frac{A}{B}$, se verifica a igualdade idêntica $\frac{A}{B} = \frac{AK}{BK}$.

Por conta do CVA da fração $\frac{A}{B}$, essa igualdade é equivalente, conforme a propriedade 2, à igualdade $A(BK) = B(AK)$, a qual é óbvia, então, também será evidenciado a validez da propriedade 4.

5. No CVA da fração algébrica $\frac{A}{B}$ se verifica a igualdade idêntica $\frac{A}{B} = A.\frac{1}{B}$.

Em efeito, de acordo com a afirmação 9§2 teremos

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{B}\left(B \times \frac{1}{B}\right).$$

Tomando em consideração a associatividade da multiplicação de expressões algébricas, teremos

$$\frac{A}{B}\left(B \times \frac{1}{B}\right) = \left(\frac{A}{B} \times B\right) \times \frac{1}{B}.$$

Aplicando a afirmação 11x2, chegamos a

$$\frac{A}{B} = A \times \frac{1}{B}.$$

6. No CVA da fração algébrica $\frac{1}{AB}$ se verifica a igualdade idêntica $\frac{1}{AB} = \frac{1}{A} \times \frac{1}{B}$.

Em efeito, no CVA da fração $\frac{1}{AB}$ é evidente a validez da cadeia de igualdades idênticas

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AB}\left(B \times \frac{1}{B}\right)\left(A \times \frac{1}{A}\right) = \left(\frac{1}{AB} \times AB\right)\left(\frac{1}{B} \times \frac{1}{B}\right) = \frac{1}{A} \times \frac{1}{B}.$$

7. No CVA das frações algébricas $\frac{A}{B}$ e $\frac{B}{1}$ se verifica a igualdade idêntica $\frac{A}{B} = \frac{1}{\frac{B}{A}}$.

Efetivamente, ao aplicar primeiramente a propriedade 5 das frações e, logo, as propriedades das operações sobre expressão algébrica e, por fim, as propriedades 6 e 5 das frações, teremos uma cadeia de igualdades idênticas

$$\frac{A}{B} = A \times \frac{1}{B} = A \times \frac{1}{B} \times \left(\frac{1}{A} \times \frac{1}{\frac{1}{A}}\right) = \left(A \times \frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{B} \times \frac{1}{\frac{1}{A}}\right) = \frac{1}{B \times \frac{1}{A}} = \frac{1}{\frac{B}{A}}.$$

Recordemos a seguinte convenção: se não for indicada explicitamente a região M, em que se estuda certa igualdade idêntica, então nesta se examina o CVA de duas expressões que figuram nos membros primário e secundário da igualdade. Por isso, não será mais indicado explicitamente a região da qual se verificará a igualdade idêntica, tomando em consideração que esta é válida para o CVA das expressões que figuram os membros primários e secundários da igualdade.

Fazendo uso das propriedades de adição e multiplicação das expressões algébricas e das propriedades de frações algébricas, podemos com facilidade mostrar que se verificam as seguintes igualdades idênticas:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD} .; \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$$

Efetivamente, aproveitando a propriedade das frações algébricas, obteremos:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} + \frac{CB}{DB} = AD \times \frac{1}{BD} + CB \times \frac{1}{BD}.$$

Ao aplicar agora a propriedade de adição e multiplicação das expressões algébricas e, logo, outra vez, as propriedades de frações algébricas, teremos o que se tratava de demonstrar.

$$AD \times \frac{1}{BD} + CB \times \frac{1}{BD} = (AD + CB)\frac{1}{BD} = \frac{AD+CB}{BD}.$$

De modo análogo se demonstra a segunda igualdade:

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \left(A \times \frac{1}{B}\right)\left(C \times \frac{1}{D}\right) = AC \times \frac{1}{B} \times \frac{1}{D} = AC \times \frac{1}{BD} = \frac{AC}{BD}.$$

Da mesma maneira, se demonstra também as igualdades:

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD-BC}{BD}; \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}.$$

Frequentemente queremos reduzir as frações algébricas a um denominador comum, isto é, escrevê-las de tal maneira que todas essas frações tenham o mesmo denominador. Para isso existe o seguinte procedimento: é necessário decompor cada denominador em fatores e depois multiplicar o numerador e o denominador de cada fração pelo produto daqueles fatores dos denominadores das frações remanescentes que não aparecem no denominador dado. Isso não os fará variar, de acordo com a propriedade das frações.

Exemplo. Reduzir para um denominador comum as seguintes frações algébricas:

$$\frac{a}{a^3-b^3}; \frac{c}{a^2-b2}; \frac{d}{a^2+ab+b^2}.$$

Ao decompor denominadores de fatores, escrevemos as frações no formulário:

$$\frac{a}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}; \frac{c}{(a-b)(a+b)}; \frac{d}{a^2+ab+b^2}.$$

Agora, ao multiplicar o numerador e o denominador da primeira fração por $(a + b)$, a segunda por $(a^2 + ab + b^2)$ e a terceira por $(a - b)$ $(a + b)$, obtemos

$$\frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)}; \frac{c(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)}; \frac{d(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)}.$$

Tais frações têm denominadores iguais, quer dizer, as frações originais foram reduzidas a um denominador comum.

Em uma série de casos, é necessário representar uma fração na forma de uma soma de frações com denominadores mais simples. Isto pode ser feito somente no caso em que o polinômio no denominador da fração é decomposto em um produto de polinômios de menor grau. Vamos mostrar com um exemplo como isso é feito.

Suponha que seja necessário decompor a fração algébrica $\frac{1}{x^2-1}$ em frações simples. Porque o polinômio $x^2 - 1$ se decompõe no produto de polinômio $(x - 1)$ e $(x + 1)$, deste modo a tarefa é alcançável. Para este fim, devemos encontrar as frações algébricas $\frac{A}{x-1}$ e $\frac{B}{x+1}$, tal que se verifica a igualdade idêntica em $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$. Examinemos a soma $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$. De acordo com as regras que acabamos de afirmar, temos:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$$

Porque esta fração deve ser identicamente igual à fração $\frac{A}{x^2-1}$ (Indiquemos que esta razão se realiza para qualquer x, sendo $x = 1$ e $x = -1$, então, segundo a propriedade 2, as duas fracções mencionadas são iguais apenas no caso em que $[(A + B)x - (A - B)](x - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)$. Como essa igualdade há de ser verificada para qualquer x, exceto para $x = 1$e $x = -1$, então, assumindo, por exemplo, $x = 0$ e, logo, $x = 2$, chegamos à conclusão de que isto se satisfaz apenas quando $\frac{A}{x-1}A - B = 1$ e $3A + B = 1$ simultaneamente. Enquanto isso, as duas últimas igualdades se verificam simultaneamente apenas no caso em que $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. Quer dizer, a fração dada se decompõe em frações simples, sendo assim, é válido a seguinte igualdade idêntica.:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x-1}$$

Este método de decompor uma fração na soma de frações mais simples é chamado de método de coeficiente indeterminado. De fato, assumindo números inicialmente desconhecido A e B, obtemos a CVA a igualdade de dois polinômios, um dos quais é conhecido coeficientes e outros desconhecidos, expressa através de A e B. Isso nos proporciona a oportunidade de escrever igualdades algébrico com respeito a coeficientes desconhecidos (no caso dado, $A - B = 1$, $3A + B = 1$). Encontrando os valores numéricos dos coeficientes desconhecidos que reduzem as igualdades algébricas dadas em certas equações numéricas, resolvemos, desta forma, o problema colocado na representação de uma fração na forma da soma das frações mais simples.

Desigualdades das frações algébricas. Vamos demonstrar duas afirmações que são amplamente utilizadas na análise de frações algébricas.

8. No CVA da fração algébrica $\frac{A}{B}$ são equivalentes as seguintes desigualdades: $\frac{A}{B} > 0$ e $AB > 0$.

Demonstraremos que a validez da primeira desigualdade se desprende da validez da segunda.

Demonstração. Designemos com a letra C a fração algébrica $\frac{A}{B}$, quer dizer, $C = \frac{A}{B}$. No CVA da fração algébrica dada que a expressão algébrica C é um número positivo. De acordo com a propriedade das igualdades entre expressões algébricas, teremos: no CVA da fração dada $A = CB$. Consequentemente, a expressão algébrica AB é igual a CB^2: $AB = CB^2$. Por definição, no CVA da fração $\frac{A}{B}$ a expressão algébrica B não se reduz a zero. Quer dizer, a expressão algébrica B^2 é positiva no CVA da fração $\frac{A}{B}$. O produto das expressões algébricas positivas C e B^2 serão também positivos. De modo análogo, o CVA da fração algébrica demonstra que a validez de $\frac{A}{B}$ para desigualdade $AB > 0$ segue a validez da desigualdade $\frac{A}{B} > 0$.

9. No CVA das frações algébricas $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ são equivalentes as desigualdades: $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ e $AD^2B > CB^2D$.

Demonstração. Valendo-nos da afirmação 20, obteremos as desigualdades equivalentes: $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ e $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} > 0$.

Anteriormente terá sido demonstrada a igualdade como

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD-BC}{BD},$$

A qual permite realizar um passo equivalente, mas:

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D} \Leftrightarrow \frac{AD-BC}{BD} > 0$$

De acordo com a afirmação 8, a última desigualdade é equivalente ao CVA das frações algébricas $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ à desigualdade $(AD - BC)BD > 0$, que é equivalente a desigualdade $AD^2B > CB^2D$. Sendo assim, a afirmação 9 está completamente demonstrada.

As afirmações 8 e 9 também são utilizadas para demonstrar outras desigualdades.

Por exemplo, demonstremos que a desigualdade $\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b}$ e $a > b$ são equivalentes para qualquer número a e b positivos que são iguais um ao outro.

Em efeito, de acordo com a afirmação 9, são equivalentes as seguintes desigualdades:

$$\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b} \text{ e } (a^2 - b^3)[(a+b)^2 - (a-b)^3] > 1).$$

Quanto à $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$, a última desigualdade é equivalente a desigualdade $(a-b)(a+b)4ab > 0$, a qual, é equivalente a $a > b$, em virtude de que a e b são positivos. Consequentemente, $\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow a > b$ para qualquer a e b positivos na igualdade.

3 O ENSINO DE FRAÇÕES ALGÉBRICAS

3.1 REVISÃO DE LITERATURA

3.1.1 Estudos experimentais

Para o diagnóstico do objeto de estudo, foram realizadas análises de trabalhos relacionados ao ensino da álgebra, bem como ao ensino de frações algébricas. Para tanto, fez-se o levantamento bibliográfico, através de pesquisas em bibliotecas virtuais, em repositórios online e em acervos físicos de instituições de ensino. Os trabalhos selecionados são advindos de monografias de especialização e dissertações de mestrado.

É importante salientar a dificuldade encontrada em obter estudos acerca do ensino de frações algébricas, portanto, focou-se em trabalhos com referência a base matemática do objeto em questão, o ensino da álgebra, uma vez que serve de subsídio na compreensão das frações algébricas.

Do levantamento bibliográfico buscou-se analisar os pontos considerados como sendo de grande relevância: objetivos, questões norteadoras, aspectos metodológicos e resultados obtidos. No Quadro 1 estão listados os trabalhos analisados:

Quadro 1: Relação de Trabalhos Analisados

Autor	Título	Categoria	IES	Ano
KERN, Newton Bohrer	Uma Introdução ao Pensamento Algébrico através de Relações Funcionais	Dissertação de Mestrado	UFRGS	2008
MENOTTI, R. Malacrida	Frações e suas Operações: Resolução de Problemas em uma trajetória hipotética de aprendizagem	Dissertação de Mestrado	UEL	2014

Continua...

Continuação...

Autor	Título	Categoria	IES	Ano
FACHIN, M. P. G & WEBER, C. B	Ensino de Frações utilizando o Geogebra	Monografia de Especialização	UFRGS	2015
VELOSO, Débora Silva; FERREIRA, Ana Cristina	Uma reflexão sobre as dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da álgebra	Dissertação de Mestrado	UFOP	2011

COSTA, Sandro Henrique Barbosa	O ensino das frações no ensino fundamental e seu reflexo no ensino médio	Dissertação de Mestrado	UNIFAP	2014
NOTARI, A. Marques	Simplificações de Frações Aritméticas e Algébricas: Um diagnóstico Comparativo dos Procedimentos	Dissertação de Mestrado	PUC-SP	2002

Fonte: Elaborado pelo Autor, (2019)

Kern (2008), em seu trabalho de dissertação focou no ensino introdutório de álgebra da 6 ª série do ensino fundamental, trazendo a discussão sobre perspectivas que poderiam ser trabalhadas na escola de forma a melhorar a introdução ao ensino da álgebra.

O autor discorre sobre as dificuldades encontradas pelos alunos da 6ª série do ensino fundamental frente ao ensino da álgebra, principalmente, no início do trabalho com a linguagem algébrica, tais como, o estudo das equações, polinômios, produtos notáveis, fatoração e funções algébricas.

Nesse contexto, percebeu que as dificuldades mais aparentes estão relacionadas a um ensino tradicional, voltado para os aspectos mais abstratos, mais afastados do cotidiano, fazendo com que o ensino se torne uma fonte de problemas no processo de aprendizagem. Além disso, os alunos apresentam resistência em utilizar um método de resolução de problemas que ele não julga pertinente e importante.

A fim de mensurar as dificuldades encontradas, Kern (2008) fez um breve resumo sobre o desempenho dos alunos nas provas do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), demonstrando que os resultados são alarmantes, devido menos de 3% dos alunos chegam ao nível satisfatório, além do desempenho só ter caído nos últimos 10 anos (1995-2005).

No capítulo 2 da dissertação, o autor analisa os diferentes aspectos do ensino-aprendizagem de álgebra na escola, a fim de subsidiar a concepção e implementação da situação didática que trata da introdução ao pensamento algébrico, para isso, fez-se um levantamento das diferentes concepções de álgebra apresentadas nos livros didáticos aprovados pelo MEC e em artigos voltados para esse conteúdo matemático.

Como proposta pedagógica, o autor trouxe a possibilidade de se fazer uma introdução ao pensamento algébrico em alunos da 6ª série do ensino fundamental, através do estudo das relações funcionais, usando como ferramenta diferentes situações-problema do contexto da modelagem matemática. Essa proposta teve como questão norteadora: como trabalhar com a introdução à linguagem algébrica de modo que o aluno possa relacioná-la com situações reais e entenda a utilidade de sua aplicação?

A metodologia de investigação escolhida foi a Engenharia Didática, baseada não apenas em teorias, mas voltada para as experiências em sala de aula, num processo de concepção da situação didática acompanhada das etapas de análise a priori, experimentação e análise a posteriori. O autor construiu e testou uma sequência de atividades com o objetivo de provocar nos alunos da 6 ª série, a construção de relações funcionais através de situações-problema e da modelagem matemática, para isso utilizou o aplicativo “máquinas algébricas”.

Os resultados obtidos pelo pesquisador foram significativos, pois, a partir do progresso dos alunos, foi possível mensurar que a sequência de atividades proposta tenha ido ao encontro da necessidade de abordar o contexto da álgebra de um modo mais significativo, estabelecendo um sentido ao conteúdo. Por fim, como resultado do trabalho surgiu um produto didático, preparado e testado para ser utilizado na introdução da álgebra de forma satisfatória em sala de aula.

Os resultados obtidos por Kern (2008) vão ao encontro das perspectivas norteadoras dessa dissertação, na medida em que são oriundas de um trabalho de significação da Álgebra para se conferir ao conteúdo um sentido para o aluno, obtendo-se um produto didático que possibilita fazer com que os conhecimentos algébricos sejam introduzidos de maneira mais satisfatória em sala de aula.

Menotti (2014), em seu estudo de mestrado apresenta uma proposta didática por meio de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) e orientada por resoluções de problemas, visando o ensino de números fracionários relacionados aos números racionais. O objetivo foi trabalhar com alunos de 7º ano, pois já apresentavam a noção sobre as frações, para que assim houvesse a possibilidade de ampliar os conhecimentos dos alunos, além de propiciar a aprendizagem em uma perspectiva construtiva.

Na fundamentação teórica, o autor discorre sobre a estratégica didática e metodológica da resolução de problemas; o modelo de ensino baseado nas trajetórias hipotéticas de aprendizagem; o conteúdo de frações e números racionais e a relação de números racionais, de frações e o ensino matemática.

Menotti (2014) enfatiza que para compor a sequência de tarefas, escolheu a resolução de problemas, uma vez que, essa ferramenta metodológica possibilita ao professor uma abordagem sobre o tema de diferentes formas, permitindo ao aluno propor e explorar diferentes caminhos e estratégias, facilitando a compreensão e ampliação do aprendizado, através de situações significativas e não mecanizadas.

Enfatiza ainda, que a escolha das trajetórias hipotéticas de aprendizagem se deu pelo fato desta contribuir para o processo de ensino e aprendizagem em matemática, pois tem como base a reconstrução das práticas matemáticas construtivistas.

Acerca do tópico sobre o conteúdo de frações e números racionais, o autor faz um levantamento histórico do surgimento e evolução dos números, de sua contribuição para as diferentes civilizações. Aborda o surgimento das frações e as notações dadas por diferentes matemáticos ao longo do tempo. Descreve o conceito e as propriedades das frações, tais como, adição, subtração, multiplicação e divisão.

Finalizando a fundamentação teórica, o autor fala sobre os números racionais, frações e o ensino de matemática, fazendo uma abordagem sobre os desafios a serem superados no ensino-aprendizagem desses conteúdos matemáticos.

O autor elegeu como ferramenta metodologia a trajetória hipotética de aprendizagem, elaborando uma proposta contendo 7 tarefas para trabalhar com alunos do 7º ano do ensino fundamental os números racionais, em especial os números fracionários com enfoque principal na equivalência de frações e as operações envolvendo frações.

A primeira tarefa teve como foco o conceito de equivalência, simplificação de frações e classes de equivalências, por meio de uma tarefa usando materiais práticos. Na segunda tarefa, o autor trabalhou com um problema que tratou das operações de adição e subtração de frações com o mesmo denominador.

A terceira tarefa consistiu na leitura do conto “os 35 camelos”, visando a construção da competência leitora nas diferentes áreas de conhecimento. Com o problema proposto no conto, o aluno é levado a visualizar na matemática um caminho para solucionar este ou outros problemas do cotidiano.

Na tarefa seguinte, o autor selecionou uma situação problema, que permitiria ao aluno construir, desenvolver e aprimorar seu conhecimento sobre as frações e desenvolver habilidade em realizar as operações de adição e subtração de frações.

A quinta tarefa retoma os problemas apresentados nas Tarefas II e IV, trabalhando as frações como operadores. Nesta tarefa V as situações problemas apresentadas, já são parcialmente conhecidas pelos alunos. E por fim, as tarefas VI e VII apresentam situações problemas que visam levar o aluno a compreender os processos das operações de multiplicação e divisão de frações.

Após a obtenção dos resultados, o autor concluiu que sua proposta de trabalho permite uma reflexão do trabalho docente, sua atuação em sala de aula, permitindo ir além das tarefas propostas para uma determinada turma e de um determinado assunto, neste caso o ensino das operações com frações. Deixa a reflexão de que se faz necessário pensar em como levar o aluno a aprender, o que deve ou não ser proposto e como propor tarefas que levem à aprendizagem que tanto almejamos aos alunos.

Weber e Fachin (2015), realizaram um estudo voltado para o ensino de frações utilizando o Geogebra. O projeto foi parte de um trabalho de conclusão do Curso de Especialização em Matemática - Mídias Digitais - Didática: Tripé para Formação do Professor de Matemática, da UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Para a escolha do tema, as autoras utilizaram suas experiências como docentes de matemática e levaram em consideração as dificuldades enfrentadas pelos alunos em relação a disciplina. Entre as percepções, uma das mais relevantes foi o estudo das frações que, apesar de serem trabalhadas desde muito cedo, ainda são o “bicho de sete cabeças” dos alunos. E com o avanço da globalização e a busca incessante pelas mídias digitais, as autoras julgaram relevante associar o estudo das frações as mídias digitais.

Weber e Fachin (2015), destacam que o uso de mídias digitais está cada vez mais presente na área das ciências exatas, e na Matemática, essa utilização ocorre, principalmente através de softwares educativos. No estudo apresentado por elas, é relatado uma experiência de ensino que utiliza o software Geogebra no ensino/aprendizagem de frações, com o objetivo de sanar as dificuldades de alunos referentes à soma e subtração de frações através do uso do software Geogebra.

A proposta de ensino apresentada pelas autoras, teve como público, um grupo de alunos do 8º e 9º anos de uma escola do interior de Crissiumal-RS, sendo uma turma multisseriada que enfrentava dificuldades em Matemática. A proposta didática apresenta uma forma diversificada de ensino/aprendizagem através do software Geogebra, e seu foco principal se deu na abordagem da soma e subtração de frações, onde, a escolha por essas operações com frações veio do fato da dificuldade dos alunos em perceberem a necessidade de se ter os mesmos denominadores para efetuá-las, pois os alunos efetuam igualmente a operação tanto no denominador como no numerador.

Na metodologia utilizada por Weber e Fachin (2015), teve uma construção e manipulação no software Geogebra como principal componente, e o diferencial do trabalho está no conteúdo abordado através da manipulação, para que os alunos pudessem desenvolver competências e habilidades movimentando o objeto, além de, por si só, formularem conjecturas e perceberem propriedades.

Assim, o trabalho se estruturou em sete seções: na seção1 é apresentada a motivação para a escolha do tema; a seção 2 trata da importância das mídias digitais e sua crescente utilização em sala de aula; a seção 3, aborda a utilização do Geogebra como um recurso educacional e sua função algébrica e geométrica concomitantes; a seção 4 trata sobre a potencialidade e dificuldade do ensino-aprendizagem de frações, apresentando o resultado dos questionários realizados e da análise de livros didáticos; a seção 5, trata sobre o desenvolvimento do projeto; a seção 6 apresenta a análise realizada e a seção 7 apresenta as considerações finais.

O software Geogebra, foi escolhido como ferramenta, por explorar a geometria e a álgebra juntas e por ser um ambiente manipulável, ou seja, de Geometria Dinâmica. Para desenvolvimento do estudo, foi inicialmente feito uma atividade avaliativa, na qual os alunos deveriam, através de seu aprendizado anterior desenvolver as mais diversas representações e cálculos envolvendo soma e subtração de frações, e o tempo de realização das atividades foram oito períodos de cinquenta minutos, das aulas de matemática.

Ao finalizarem o trabalho proposto, Weber e Fachin (2015) concluíram que os objetivos foram alcançados pois observaram um crescimento relativo em relação ao ensino/aprendizagem dos alunos um aumento na produção das aulas e no interesse e aprendizagem dos alunos quando são utilizados recursos diversos, incluindo as mídias digitais. Concluíram ainda, que quando os alunos manipulam objetos geométricos, conseguem perceber as propriedades e, no caso, a interpretação geométrica da soma de frações.

Para essa dissertação, o trabalho de Weber e Fachin (2015) contribui como uma ideia de material didático acerca de novas mídias digitais e novas formas de didática envolvendo as mesmas.

Veloso e Ferreira (2011), apresentam o texto “uma reflexão sobre as dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da álgebra”, tal texto é parte de uma Dissertação de Mestrado em andamento. As autoras consideram a Álgebra como uma das áreas que oferece maiores dificuldades para professores e alunos e que a Álgebra representa para o aluno um importante suporte conceitual tanto para a análise e interpretação de situações cotidianas quanto para estudos mais avançados.

Neste contexto, a literatura apresentada por Veloso e Ferreira (2011), teve o objetivo de apresentar algumas reflexões acerca do tema Álgebra e teve seu foco voltado para as dificuldades enfrentadas pelos alunos que iniciam o estudo da álgebra. As autoras destacam que a introdução da temática deve basear-se na noção de que os símbolos algébricos podem ser manipulados de uma maneira que corresponde a aspectos do mundo real.

A metodologia utilizada foi de estabelecer uma relação entre as experiências docentes de uma das pesquisadoras e a literatura encontrada. Veloso e Ferreira (2011), concluíram que a dificuldade da conceituação e entendimento dos alunos nos conteúdos matemáticos, está ligado ao fato dos professores, em sua maioria, acreditarem que a Álgebra representa para o aluno um importante suporte conceitual tanto para a análise e interpretação de situações cotidianas quanto para estudos mais avançados.

As autoras acreditam que a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos pode ser desenvolvida nos alunos na descrição de situações e na resolução de problemas algébricos, afastando o abuso do uso simbólico e preocupando-se em trabalhar a compreensão dessa simbologia, procurando esclarecer seu significado, e que cabe aos professores, realizarem uma busca continua sobre os aspectos que envolvem o aprendizado da Álgebra e acompanhar e analisar os erros cometidos pelos alunos e suas causas, para assim, proporcionar instrumentos úteis para decidir sobre os meios de ajudar as crianças a melhorarem sua compreensão matemática.

As considerações de Veloso e Ferreira (2011) são especialmente importantes para esse trabalho, na medida em que corroboram a hipótese delimitada para solução ao problema de pesquisa identificado para o estudo: da importância da construção, pelo aluno, de um significado do conteúdo que aprende, melhorando, assim, a sua compreensão matemática.

Em 2014, Costa apresentou um estudo abordando “O ensino das frações no ensino fundamental e seu reflexo no ensino médio”. Diante da sua experiência na docência, Costa (2014) relata, que a matemática para muitos alunos é algo inatingível, e que são poucos os alunos que ficam à vontade com a disciplina, que ainda é a responsável por fazer muitos alunos abandonarem os estudos, sendo a disciplina que mais reprova e que menos se gosta.

O autor considera que um dos assuntos mais difíceis trabalhados no ensino fundamental são as frações, e diante da dificuldade, encontrada, no ensino da Matemática quando o conhecimento de frações era necessário é que surgiu o despertar do autor em estudar o tema.

A experiência e vivência da docência, fez Costa (2012), observar que sem o domínio das operações com frações a aprendizagem em outro conteúdo não fluía, e que os alunos apresentavam muita dificuldade com números e operações e em particular com frações. Quando não se domina a base da matemática que são: a) os números e operações e b) espaço com suas formas geométricas qualquer outra aprendizagem fica complicada. Seu trabalho consistiu em uma discussão em torno da dificuldade dos alunos em aprenderem matemática, em particular às operações com frações.

A pesquisa adotada por Costa (2012), foi realizada na Escola Estadual Marechal Castelo Branco que fica localizada no Bairro do Trem, localizada na cidade de Macapá, Estado do Amapá. Com objetivo de verificar o conhecimento dos alunos do ensino médio sobre o conceito de fração.

Na metodologia utilizada, o autor realizou uma atividade consistente de oito questões de múltipla escolha aplicada para alunos do 1º ano (22 alunos), para se verificar como esses alunos chegavam nesse nível de ensino e no 3º ano (16 alunos), para verificar como eles saem da etapa final da educação básica.

Num segundo momento o autor realizou a análise de dois livros de autores renomados com relação a forma de abordagem principalmente sobre os procedimentos práticos de resolução das operações adição, subtração e divisão, e em seguida apresentou uma proposta de ensino que busca ensinar as operações de frações focada nos procedimentos lógicos e curtos de forma a minimizar essa falta de conhecimento em relação a números fracionários (não decimal) dos alunos que chegam no ensino médio.

Nos resultados obtidos, Costa (2012) observou uma grande defasagem de conhecimento dos alunos em relação aos números fracionários, pois, a maioria dos alunos não conseguiram relacionar a fração (objeto concreto) com sua representação numérica, e que é preciso pensar num mecanismo para corrigir esta defasagem em relação ao conhecimento de frações com que os alunos chegam ao ensino médio.

Isso se dá ainda, por conta da maioria dos professores ainda ensinarem utilizando procedimentos mecânicos e para que o processo ensino/aprendizagem seja facilitado e melhor compreendido pelo estudante, o professor deve se manter informado sobre novos métodos de como se trabalhar temas difíceis de compreensão e que proponha mecanismos lógicos e práticos de resolução que facilitem o processo de aprendizagem e compreensão do estudante.

Para essa dissertação, a lição que se tira da abordagem de Costa (2012) é sobre a importância de se aproximar do aluno o conteúdo lecionado, fazendo com que este tenha significado para ele, e não seja meramente reproduzido de forma mecânica, que, como demonstrado pelo autor, retorna uma concepção falha dos conteúdos.

Notari (2002), em sua dissertação, sobre a “Simplificação de Frações Aritméticas e Algébricas: Um Diagnóstico Comparativo dos Procedimentos”, estabeleceu como objetivo principal obter um diagnóstico sistemático dos principais erros e dificuldades manifestados por alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio na simplificação de frações aritméticas e algébricas.

O público-alvo para a realização da pesquisa consistiu na seleção de 2 turmas, uma com alunos da 8ª série do ensino fundamental e a outra com alunos do 1º ano do ensino médio, de duas escolas públicas da Região Oeste, da cidade de São Paulo.

Segundo Notari (2002), as questões norteadoras desta pesquisa preconizam que a introdução da álgebra no ensino básico é realizada através das regularidades que governam as leis numéricas, uma vez que a álgebra não se reduz à "generalização" da Aritmética, pois as regras formais de reescrita operam sobre as expressões algébricas e literais e, embora encontrem um fundamento no domínio aritmético, se inserem em um domínio conceitual próprio.

O trabalho está constituído de 5 capítulos. No primeiro apresenta a problemática e a justificativa da pesquisa; o segundo é composto do referencial teórico, baseado no posicionamento de alguns pesquisadores acerca do enfoque da álgebra como "generalização das leis que regem as relações numéricas.

No capítulo seguinte, o autor apresenta os procedimentos metodológicos, desde a metodologia utilizada até a aplicação do instrumento piloto. O 4º capítulo trata da análise dos resultados obtidos. E, por fim o 6º capítulo apresenta a conclusão e considerações finais desta pesquisa.

Como estratégica metodológica, Notari (2002) procurou estudar os procedimentos e erros na simplificação de frações aritméticas e algébricas, de alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e da 1ª série do Ensino Médio, de duas escolas estaduais da cidade de São Paulo.

A primeira etapa da metodologia correspondeu a um período de observação no lócus da pesquisa, objetivando avaliar a pertinência do problema proposto. Posteriormente, fez-se um estudo piloto que consistiu na aplicação de um instrumento provisório para levantamento dos erros. Após os ajustes, elaborou-se o instrumento definitivo a ser aplicado, finalizando com as entrevistas.

Frente aos resultados obtidos, as principais conclusões apontadas pelo autor demonstram um elevado número de erros na simplificação de frações algébricas que revelam uma incompreensão das regras formais que regulamentam essas transformações. Havendo a predominância de erros devidos a uma generalização de regras de uma situação para outra, sem uma análise das condições que validam essa generalização.

Outro item revelado no tratamento das expressões aritméticas foi o predomínio de procedimentos computacionais realizados automaticamente, sem uma reflexão sobre a natureza da tarefa proposta; indicando a ausência de integração entre os domínios conceituais aritméticos e algébricos.

A contribuição para esse trabalho reside na identificação de experiência empírica da qual se extraiu lição sobre a importância de se bem trabalhar a compreensão das regras aplicáveis às frações algébricas para que o aluno as aproprie intimamente, analisando especificamente as condições que validam a generalização e não somente procedendo de forma mecânica.

3.1.2 Análise de livros didáticos

De acordo com Guia de livros didáticos (PNLD, 2014, p.12 apud Gérard & Roegiers, 1998), o livro didático tem um importante papel para o processo de ensino-aprendizagem como um interlocutor que dialoga com o professor e com o aluno. Nesse sentido, as funções mais importantes do livro didático na relação com o aluno são as seguintes:

- favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes;
- propiciar o desenvolvimento de competências cognitivas, que contribuam para aumentar a autonomia;
- consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos adquiridos;
- auxiliar na autoavaliação da aprendizagem;
- contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania.

Em relação ao professor, o livro didático desempenha, entre outras, as importantes funções de:

- auxiliar no planejamento e na gestão das aulas, seja pela explanação de conteúdos curriculares, seja pelas atividades, exercícios e trabalhos propostos;
- favorecer a aquisição dos conhecimentos, assumindo o papel de texto de referência;
- favorecer a formação didático-pedagógica;
- auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno.

Foram analisados quatro livros de 8º ano do Ensino Fundamental do Programa Nacional do Livro Didáticos, das coleções aprovadas no PNLD 2011. Na pesquisa procurou-se analisar de que forma o conceito e as propriedades de frações algébricas são abordadas e as sugestões de atividades. Os livros didáticos analisados estão relacionados no Quadro 2:

Quadro 2: Relação dos Livros Didáticos Analisados

Autor	Título	Editora	Ano de Publicação
Andrini, Álvaro; Vasconcellos, Maria José	Praticando a Matemática, 8º Ano – Edição Renovada	Ed. Brasil	2012
Bianchini, Edwaldo	Matemática – Bianchini 7ª edição	Moderna	2011
Mori, Iracema e Onaga, Dulce Satiko	Matemática: Ideias e Desafios, 8º ano – 18ª edição	Saraiva	2015
Dante, Luiz Roberto	Projeto Telaris: Matemática: Ensino Fundamental 2 – 2ª edição	Ática	2015

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

- **Praticando a Matemática, 8º Ano – Edição Renovada**

O livro é dividido em 14 unidades de conteúdos matemáticos referente ao 8º ano do ensino fundamental. Na unidade 7, o autor trata de frações algébricas, iniciando o assunto através da expressão “Letras no denominador”, em seguida apresenta uma situação-problema sobre uma lista de testes elaborada pelo professor “Jorge”, na qual a representação recai em expressões numéricas. Faz várias intervenções a respeito desses problemas até chegar na generalização e assim no conceito de frações algébricas.

Posteriormente, apresentou outras situações-problema, destacando sempre as generalizações, ou seja, a representação da variável no denominador, com a intenção de apresentar a condição de existência de frações algébricas, tal qual seria o denominador ser sempre diferente de zero. Após essa abordagem, o autor propõe um exercício com questões sobre o conceito de frações algébricas.

Finalizando a etapa anterior, o autor inicia um tópico denominado “Resolvendo problemas”, no qual fomenta a questão “Frações algébricas aparecem em problemas da vida real...” e assim apresenta várias situações do cotidiano das pessoas, contendo ilustrações de lugares pertencentes a cidades brasileiras, além de quadros e tabelas. Segue uma sequência lógica de raciocínio e propõe uma análise conjunta com o leitor na resolução dos problemas propostos.

Para fazer a introdução das propriedades das frações algébricas, mais especificamente simplificação de frações algébricas, o autor trabalha o tópico “vamos recordar? ”, retomando conhecimentos que considera importantes ao estudo dessa propriedade, tais como as propriedades de frações numéricas. No final desse tópico apresenta a seção livre com uma lista de exercícios.

No capítulo seguinte, inicia o estudo da propriedade da simplificação de frações algébricas, fazendo um comparativo com o conhecimento prévio sobre frações numéricas. Demonstra várias simplificações de frações algébricas, usando o recurso da fatoração a partir de questões contendo a representação formal da matemática. O autor finaliza o referido estudo dessa propriedade através de uma lista de exercícios.

As propriedades seguintes a serem estudadas são a adição e a subtração de frações algébricas. O autor inicia o capítulo fazendo o questionamento: você sabe somar e subtrair frações numéricas? Posteriormente, demonstra a resolução de alguns exemplos de adição e subtração de frações numéricas, ressaltando a importância das frações equivalentes.

A partir dos exemplos propostos, o autor menciona que com frações algébricas a ideia é a mesma usada nas numéricas, no que se refere a essas propriedades. No final desse estudo, é apresentado uma lista de exercícios.

De modo geral, o tema é inicialmente tratado por meio de situações-problema, principalmente no capítulo que trata do conceito de frações algébricas. Contudo, ao trabalhar as propriedades de simplificação, adição e subtração de frações algébricas, o autor apresenta questões formais de matemática, sem nenhuma relação com a vida real do aluno.

Como ponto positivo, o conceito de frações algébricas foi muito bem trabalhado, pois abordou o tópico através de uma sequência de atividades, que propiciavam ao estudante montar um raciocínio lógico do tema. Massificou as situações que envolviam o cotidiano do aluno, retomando outros conhecimentos importantes. O autor buscou apoiar o aluno na resolução das situações-problemas, propôs revisão de estudos e trouxe questões ligadas a vestibulares e de várias instituições de ensino superior.

Como ponto negativo, observamos que as propriedades de frações algébricas foram trabalhas numa perspectiva tradicional, através da fatoração, quadrado da soma e diferença, levando o aluno a resolver questões complexas. O autor não fez uso do algoritmo para facilitar o entendimento do aluno.

A qualidade apresentada em relação à apresentação conceitual das frações algébricas não foi observada na abordagem das propriedades deste objeto matemático, que não explorou de forma concreta e favorecedora do aprendizado como o fez quanto à concepção do mesmo. Ressalte-se, contudo, que, muito embora não tenha apresentado grande quantidade de exercícios, o autor buscou sugerir questões relacionadas ao cotidiano do aluno, perspectiva esta que também será adotada na elaboração da sequência didática para o ensino de frações algébricas nessa dissertação.

- **Matemática – Bianchini 7ª edição**

O livro é dividido em 10 capítulos de conteúdos matemáticos referente ao 8º ano do ensino fundamental. No capítulo 4 é apresentado o estudo de frações algébricas, iniciando-se com uma situação-problema intitulada “Matemática no mundo”, no qual o autor explora o conceito de frações algébricas com a resolução do problema proposto.

Após abordar o conceito, o autor trabalha a condição de existência das frações algébricas, por meio de exemplos diretos. Posteriormente, são apresentados exercícios propostos contendo questões tradicionais e situações ligadas ao cotidiano.

Na abordagem seguinte, o autor trabalha a simplificação de frações algébricas por meio das frações equivalentes, da decomposição em produtos e propriedade de fatoração. Para tanto, utiliza exemplos desvinculados do dia-a-dia do aluno. Finalizando com uma lista de exercícios propostos.

No próximo tópico, o assunto é iniciado a partir de uma charge a fim de abordar as seguintes operações de frações algébricas: redução a um mesmo denominador, adição algébrica, multiplicação, divisão e potenciação.

O conceito de frações algébricas é tratado inicialmente por meio de uma situação-problema do cotidiano do aluno, contudo, ao analisarmos os exercícios propostos, percebemos que há um distanciamento do que foi proposto inicialmente.

Em todas as propriedades abordadas, percebeu-se que o autor trabalhou de maneira bem sucinta, sem o uso de situações-problema e através de exemplos tradicionais sem qualquer relação com a vida real. E tanto nos exemplos, quanto nos exercícios houve a predominância de questões diretas do tipo: calcule, determine, considere a fração.

A contribuição desse livro didático para essa dissertação é no sentido do que não fazer. Isso porque, muito embora tenha iniciado a abordagem do conteúdo da forma como se pretende fazer nesse trabalho – aproximando o objeto matemático do dia a dia do aluno –, tal abordagem não se repetiu nos exercícios – ou seja, na parte prática. A lição que fica é que tanto na teoria quanto na prática a aproximação com o cotidiano do aluno é necessária, para que o processo de ensino-aprendizagem seja favorecido pela ressignificação promovida por este esforço.

- **Matemática: Ideias e Desafios, 8º ano – 18ª edição**

O livro é dividido em 12 unidades. Sendo na unidade 5, chamada Polinômios e Operações, mais especificamente na propriedade da divisão de polinômios, que o autor trabalha as frações algébricas, a partir do algoritmo da divisão. Percebendo-se então que não há no livro um tópico específico a respeito das frações algébricas. O conteúdo é trabalhado de forma puramente tradicional, de maneira bem sucinta e desconectada da realidade do aluno.

Há poucas sugestões de atividades complementares e apenas alguns textos de aprofundamento, contribuindo para que não haja envolvimento mais ativo do aluno na exploração e na discussão dos conteúdos estudados, uma vez que a sistematização é conduzida de modo muito rápido na abordagem do tema.

Assim como relatado para o livro didático anteriormente analisado, a contribuição para o trabalho também é no sentido do que não fazer, considerando-se a escassez de atividades complementares e de tratativas específicas para o objeto matemático sob estudo, que é tratado, tal como no livro didático anterior, sob a perspectiva tradicional.

- **Projeto Telaris: Matemática: Ensino Fundamental 2 – 2ª edição**

O livro é composto de 9 capítulos, sendo que a abordagem sobre frações algébricas se dá no 2º capítulo, através do assunto expressões algébricas e variável, no tópico denominado restrições para o denominador.

O autor trabalha frações algébricas em um tópico não específico para o tema, sendo tratado de uma maneira bem resumida e ligada a condição de uma expressão algébrica necessariamente ter que ser diferente de zero. Desta forma, não se aborda o conceito e as propriedades relacionadas às frações algébricas.

De maneira geral, o assunto é relacionado a um outro tópico da matemática, contudo, de uma forma bem simples e resumida, sem envolver situações reais que possibilitem a interação dos alunos.

O contexto da álgebra tem um lugar bem restrito nesse livro em detrimento de outros campos da matemática escolar. E os exercícios propostos são diretos e tradicionais, sem a vinculação com o cotidiano do aluno.

No geral, de todos os livros didáticos analisados, verificou-se que somente o primeiro (Praticando a Matemática, 8º Ano, Edição Renovada), de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos trabalhou bem o conceito de frações algébricas, apresentando uma sequência de atividades para proporcionar ao aluno condições de montar um raciocínio lógico sobre o tema. Considerou, também, conhecimentos anteriores do aluno, retomando o seu cotidiano e explorando a resolução de situações-problemas ligadas a vestibulares e instituições de ensino superior.

Em todos eles, porém, verificou-se uma preocupação em trabalhar o conteúdo – ou parte dele, como verificado no livro de Andrini e Vasconcellos em relação às propriedades das frações algébricas – seguindo uma perspectiva tradicional, reduzindo a abordagem a exemplos tradicionais, sem estabelecer uma relação com o dia a dia do aluno, com o que ele tem para si de realidade em seu cotidiano.

Os exercícios foram sucintos e escassos, valendo-se de exemplos diretos e tradicionais e textos que não promovem envolvimento do aluno na exploração e discussão dos conteúdos que estão sendo abordados, já que tudo é tratado de forma muito rápida, restringindo-se o contexto da álgebra a um lugar bem restrito.

4 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

4.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O ensino da matemática vem exigindo ao longo dos tempos mudanças em relação aos métodos de ensinar, priorizando metodologias que valorizem a interação do aluno com o mundo. Portanto, o professor tem de mediar o conhecimento às transformações ocorridas no âmbito político, econômico, social e tecnológico, para assim favorecer a construção de cidadãos convictos de seu papel na sociedade.

Um dos assuntos que exige bastante habilidade do professor ao ensinar são as frações algébricas, pois são de difícil assimilação por parte dos alunos. Por isso, encontram-se muitos questionamentos sobre como ensinar frações. Aliando essa questão com as ferramentas educacionais disponíveis, tem-se a informática, que através da construção de softwares educativos proporciona ao professor maneiras diferentes de ensinar e, ao aluno uma aprendizagem satisfatória.

Apresentamos a seguir a proposta de sequência didática para o ensino das frações algébricas, referindo-se a uma proposta de ensino baseada numa aprendizagem facilitada e diferenciada, a fim de favorecer e facilitar o entendimento do aluno acerca do conceito e operações de frações algébricas.

Esta sequência é composta de quatro UARC's, na qual cada uma faz relação ao tema em questão, As UARC 1 e UARC 2 tratam da ideia inicial de frações algébricas, na UARC 1 será trabalhado o conceito de frações através de situações problemas relacionados ao cotidiano do aluno, a UARC 2 condicionada a primeira, consolidará o entendimento conceitual através de resoluções de equações fracionárias utilizando a propriedade fundamental das proporções.

Na UARC 3 será iniciada as propriedades das frações algébricas, através da soma e diferença, a UARC 4 trata das propriedades relacionadas a multiplicação e a divisão.

4.1.1 UARC 1: O conceito

Atividade 1: O conceito de frações algébricas a partir de situações problemas.

Objetivo: Identificar a partir de situações problemas o conceito de frações algébricas.

Material: Quadro branco, lista com situações problemas, papel, caneta.

Procedimentos:

- Leia atentamente cada situação problema;
- Traduza o problema da linguagem corrente para a linguagem simbólica.

[I_E]	**Questões**	**Qual é a representação da fração?**
1	João tem R$ 20,00 para dividir entre seus quatro irmãos. Como se representa essa fração?	
2	Carlos tem uma certa quantia no banco e precisa dividir entre seus três filhos. Como se representa essa fração?	
3	O professor Antônio possui R$ 100,00 para ser dividido entre os alunos que passarem de ano, mas não se sabe quantos passarão. Como se representa essa fração?	
4	Uma empresa de calçados irá premiar os melhores vendedores, mas não se sabe a quantia do prêmio e nem quantos se classificarão. Como se representa essa fração?	
5	Foi dado um prêmio para um grupo de vendedores. Sabendo-se que uma semana antes de ser dado o prêmio, um dos vendedores trocou de empresa e não pôde ser contemplado com o prêmio. Como se representa essa fração?	
6	Uma escola possuía uma certa quantia de dinheiro para premiar os seus melhores alunos de matemática, porém, um dia antes, arrecadou-se mais R$ 300,00 para ser somado ao prêmio. Como se representa essa fração?	

[I_R]. Fazendo uma reflexão sobre as questões apresentadas anteriormente, responda os seguintes questionamentos:

1. Todas as frações apresentadas nessa atividade possuem incógnitas? Por quê?
2. Em todas as frações apresentadas aparecem incógnitas tanto no numerador e no denominador?
3. Em relação às frações que possuem incógnitas:
   a) Todas apresentam elas no numerador?
   b) Todas apresentam elas no denominador?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 1: Frações algébricas são expressões que possuem pelo menos uma incógnita no denominador.

[IA$_r$]. Considerando o seguinte conjunto de denominadores:

$$D = \{5;\ x;\ x+3;\ x-y\}$$

Preencha as colunas vazias abaixo com um denominador à sua escolha e, por fim, represente o numerador pelo denominador em forma de fração na última coluna:

	Numerador	Denominador	$\dfrac{\boldsymbol{Numerador}}{\boldsymbol{Denominador}}$
1	$\boldsymbol{N} = 3$		
2	$\boldsymbol{N} = x$		
3	$\boldsymbol{N} = x - 1$		
4	$\boldsymbol{N} = x + y$		

[I$_R$]. Quais das frações geradas acima representa uma fração algébrica?

[IA$_r$]. Considerando os seguintes conjuntos:

Conjunto dos Numeradores:

$$N = \{x, 3\ , y-3\}$$

Conjunto dos Denominadores:

$$D = \{y, 2, x+2\}$$

Utilize alguns dos elementos acima para preencher as colunas vazias de acordo com a coluna a ser preenchida e, por fim, represente em forma de fração na última coluna:

	Numerador	Denominador	$\dfrac{\boldsymbol{Numerador}}{\boldsymbol{Denominador}}$
1			
2			
3			
4			

[I_R]. Quais das frações representa uma fração algébrica?

4.1.2 UARC 2: simplificação de frações algébricas

Atividade 2: Simplificação de frações algébricas.

Objetivo: Simplificar frações algébricas através da propriedade fundamental das frações.

Material: Quadro branco, lista com situações problemas, papel, caneta.

Procedimentos:

[I_E]. Resolva as questões aplicando a propriedade fundamental das frações: simplificação e cancelamento;

1. Simplifique através da fatoração e do cancelamento:
   a) $\frac{4}{8} =$
   b) $\frac{35}{80} =$
   c) $\frac{72}{144} =$

2. Simplifique as frações utilizando a fatoração:
   a) $\frac{3^7}{3^4} =$
   b) $\frac{5^2}{5^4} =$
   c) $\frac{8^5}{8^7} =$

Considerando o procedimento utilizado nas frações numéricas e admitindo que seja válido para as frações algébricas, simplifique as frações utilizando o método anterior:

3. Simplifique as frações algébricas utilizando a fatoração seguida do cancelamento:

   a) $\frac{10a^2b}{15a^3} =$
   b) $\frac{3x^3a^2}{6x^2a^2} =$
   c) $\frac{4x^3}{10xy} =$

d) $\frac{4x^4a}{6x^3} =$

e) $\frac{6a^5}{7a^3x} =$

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 2: As frações algébricas podem ser simplificadas por meio da propriedade fundamental na exploração da fatoração simultânea de numerador e denominador para posterior processo de cancelamento.

[IA$_r$]. Responda as seguintes questões com base na propriedade fundamental da fração:

1. É possível determinar que $\frac{4}{8}$ e $\frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2}$ são representações iguais? Por quê?
2. Efetuando a simplificação da fração: $\frac{4}{8}$, obtivemos: $\frac{1}{2}$. Explique brevemente como esta simplificação foi feita.
3. É possível determinar que $\frac{5y^2}{15y^3}$ e $\frac{5 \cdot y \cdot y}{3 \cdot 5 \cdot y \cdot y \cdot y}$ são representações iguais? Por quê?
4. Efetuando a simplificação da fração: $\frac{5y^2}{15y^3}$, obtivemos: $\frac{1}{3y}$. Explique brevemente como esta simplificação foi feita.

4.1.3 UARC 3: adição e subtração de frações algébricas com denominadores iguais

Atividade 3: Adição e Subtração de frações algébricas com o mesmo denominador.
Objetivo: Efetuar os cálculos da adição e subtração de frações algébricas com denominadores iguais.
Material: Quadro branco, lista com situações problemas, papel.
Procedimentos:
[I$_E$]. Resolva as questões abaixo através da adição e subtração de frações com o mesmo denominador;

Adição e subtração de frações numéricas com o mesmo denominador		
	QUESTÕES	**RESULTADOS**
1	$\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$	
2	$\frac{5}{2} - \frac{3}{2}$	

3	$\frac{5}{2}+\frac{7}{2}$	
4	$\frac{7}{2}-\frac{3}{2}$	
5	$\frac{3}{2}+\frac{7}{2}$	

Formalização: Para somar ou subtrair frações numéricas com denominadores iguais, conserva-se o denominador e soma-se ou subtrai-se os numeradores.

Admitindo-se o procedimento utilizado nas frações numéricas, considera-se o mesmo para as frações algébricas. Ou seja, as frações algébricas que possuem o mesmo denominador podem ser somadas ou subtraídas conservando-se o denominador e somando-se ou subtraindo-se os numeradores.

Adição e subtração de frações algébricas com o mesmo denominador		
	QUESTÕES	**RESULTADOS**
1	$\frac{2\text{x}}{3a}+\frac{2x}{3a}$	
2	$\frac{2\text{y}}{b}-\frac{y}{b}$	
3	$\frac{x}{y^2}+\frac{4x}{y^2}$	
4	$\frac{2a}{b^2}-\frac{a}{b^2}$	
5	$\frac{4\text{a}}{5x^3}+\frac{3\text{a}}{5x^3}$	

[I_R]. Considerando a soma e diferença de frações algébricas. Responda as perguntas:

1. Todas as frações da tabela possuem sempre um mesmo denominador?
2. Qual é a regra que você utiliza para somar frações algébricas com o mesmo denominador?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 3: A lei de formação que foi gerada na UARC 3 esta baseada na percepção da existência de uma regularidade na resolução do problema, levando a um padrão chamado algoritmo, devido a característica comum entre elas: “mesmo denominador”.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \quad ; \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

Considerando as seguintes frações algébricas $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{b}$, aplica-se o algoritmo apresentado e obtêm-se: $\frac{a \pm c}{b}$

[IA$_r$]. Dado duas frações, preencha a tabela abaixo fornecendo o algoritmo, baseando-se no que foi aprendido anteriormente, e o resultado das operações:

	Fração	**Algoritmo**	**Resultado**
1	$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$		
2	$\frac{3}{x}+\frac{5}{x}$		
3	$\frac{7y}{x}-\frac{2y}{x}$		
4	$\frac{9x}{y}+\frac{x}{y}$		
5	$\frac{12a}{b}-\frac{7a}{b}$		

[I$_R$]. Responda as seguintes questões com base na soma de frações com denominadores iguais:

1. Analisando as seguintes somas de frações: $\frac{7}{4a}+\frac{3}{4a}$ e $\frac{7+3}{4a}$ podemos admitir que elas possuem representações iguais? Por quê?
2. Podemos determinar que as seguintes somas de frações: $\frac{4}{a}+\frac{5}{a}$ e $\frac{4+5}{2a}$ também possuem representações iguais? Por quê?

4.1.4 UARC 4: adição e subtração de frações algébricas com denominadores diferentes

Atividade 4: Adição e Subtração de frações algébricas com denominadores diferentes

Objetivo: Incentivar a resolução de cálculos da adição e subtração de frações algébricas com denominadores diferentes através da descoberta do algoritmo.

Material: Quadro branco, lista com situações problemas, papel.

Procedimentos:

[I_E]. Resolva as questões abaixo através da adição e subtração de frações com denominadores diferentes;

Adição e subtração de frações numéricas com denominadores diferentes		
	QUESTÕES	**RESULTADOS**
1	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	
2	$\frac{4}{3}-\frac{5}{4}$	
3	$\frac{5}{3}+\frac{7}{2}$	
4	$\frac{8}{3}-\frac{7}{2}$	
5	$\frac{5}{3}+\frac{1}{4}$	

Formalização: Para se resolver o problema da soma ou diferença de frações numéricas com denominadores diferentes, aplica-se a propriedade fundamental para igualar os denominadores e repete-se o mesmo procedimento utilizado com os denominadores iguais.

Considerando a ideia abordada na situação anterior, adota-se o mesmo método utilizado na soma ou diferença de frações numéricas e aplica-se o mesmo método nas frações algébricas.

Adição e subtração de frações algébricas com denominadores diferentes		
	QUESTÕES	**RESULTADOS**

1	$\frac{1}{4c}+\frac{2}{3\text{c}}$	
2	$\frac{3}{4c}-\frac{4}{3\text{c}}$	
3	$\frac{3}{2b}+\frac{4}{6b}$	
4	$\frac{3}{b}-\frac{1}{6b}$	
5	$\frac{2}{b}+\frac{3}{d}$	

[I$_R$]. Considerando a soma e diferença de frações algébricas. Responda as perguntas:

1. Dado duas frações com denominadores diferentes, é possível encontrar frações equivalentes com denominadores iguais? Por quê?
2. Portanto, pode-se encontrar frações equivalentes com denominadores iguais se multiplicarmos $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{3}$ por 3? Por quê?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 4: A lei de formação que foi gerada na UARC 4 está baseada na percepção da existência de uma regularidade na resolução do problema, levando a um padrão chamado algoritmo, devido a característica comum entre elas: “denominadores diferentes”.

Sendo assim, para se somar ou subtrair frações algébricas com denominadores diferentes basta trocar de posição os denominadores, multiplicando cada uma das parcelas por esses denominadores, tanto no numerador quanto no denominador, gerando com isso frações algébricas equivalentes com denominadores iguais e, portanto, aplica-se a regra anterior. Sendo representado por:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\ ;\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

[IA$_r$]. Preencha os numeradores e denominadores vazios com valores que multipliquem as determinadas frações de modo que elas obtenham denominadores iguais e, em seguida, efetue o cálculo da soma ou diferença entre elas:

	FRAÇÕES	APLICAÇÃO DO ALGORITMO	RESULTADOS
1	$\frac{2}{4a}+\frac{1}{3\text{a}}$	$\frac{2}{4a}*\frac{00}{00}+\frac{1}{3a}*\frac{00}{00}=\frac{00}{00}+\frac{00}{00}$	$\frac{00}{00}$
2	$\frac{4}{4x}-\frac{3}{3\text{x}}$	$\frac{4}{4x}*\frac{00}{00}-\frac{3}{3x}*\frac{00}{00}=\frac{00}{00}-\frac{00}{00}$	$\frac{00}{00}$
3	$\frac{3}{2y}+\frac{4}{6y}$	$\frac{3}{2y}*\frac{00}{00}+\frac{4}{6y}*\frac{00}{00}=\frac{00}{00}+\frac{00}{00}$	$\frac{00}{00}$
4	$\frac{1}{x}-\frac{3}{6x}$	$\frac{1}{x}*\frac{00}{00}-\frac{3}{6x}*\frac{00}{00}=\frac{00}{00}-\frac{00}{00}$	$\frac{00}{00}$

[IR]. Responda as seguintes questões com base na soma ou diferença de frações com denominadores diferentes:

1. Analisando as seguintes somas de frações: $\frac{7}{4a}+\frac{3}{a}$ e $\frac{7a}{4a^2}+\frac{12a}{4a^2}$, podemos admitir que elas possuem representações iguais? Por quê?
2. Podemos determinar que as seguintes somas de frações: $\frac{3}{x}+\frac{4}{2x}$ e $\frac{5x}{x}+\frac{6x}{x}$ também possuem representações iguais? Por quê?

O quadro abaixo apresenta o cronograma das atividades desenvolvidas durante a execução de toda a experimentação.

ENCONTRO	ATIVIDADE REALIZADA		DURAÇÃO DOS ENCONTROS
1	Esclarecimento da pesquisa com a turma, com a direção e coordenação da escola e encaminhamento do TCLE aos responsáveis dos alunos.		2 aulas de 35 minutos cada
2	- Aplicação do questionário socioeconômico e do teste de nivelamento; - Oficina de nivelamento.		3 aulas de 35 minutos cada
3	**UARC 1**	**Atividade 1:** O conceito de frações algébricas a partir de situações problemas. Traduzir o problema da linguagem corrente para a linguagem simbólica.	3 aulas de 35 minutos cada
4	**UARC 2**	**Atividade 2:** Simplificação de frações algébricas. através da propriedade fundamental das	3 aulas de 35 minutos cada

		frações e aplicando a propriedade: simplificação e cancelamento.	
5	**UARC 3**	**Atividade 3:** Adição e Subtração de frações algébricas com o mesmo denominador. Efetuar os cálculos da adição e subtração de frações algébricas com mesmo denominador.	2 aulas de 35 minutos cada
6	**UARC 4**	**Atividade 4:** Adição e Subtração de frações algébricas com denominadores diferentes. A resolução de cálculos da adição e subtração de frações algébricas com denominadores diferentes através da descoberta do algoritmo.	3 aulas de 35 minutos cada

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso da sequência para o ensino de frações algébricas permitirá ao aluno a percepção de um conhecimento já vivenciado por ele no seu cotidiano, descoberto em conjunto com o professor de maneira dinâmica e facilitada, saindo do modelo tradicional usualmente praticado em sala de aula.

Em se tratando do ensino de álgebra na escola básica, consideramos que as transformações, o tratamento e a conversão (números e letras), exigem apelos cognitivos que, na maioria das vezes, não são acessíveis à grande parte dos alunos. E o pior, é que, também, a maioria dos professores não consegue detectar este ponto de descontinuidade no processo de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, imaginamos que um planejamento didático para fazer frente ao ensino de álgebra na escola básica, deva estar embasado em teorias da didática da matemática com vistas a otimização do processo de ensino e aprendizagem como um todo. Inclusive levando em consideração a transformação dos conhecimentos prévios dos alunos em situações novas, sempre na busca da construção de um novo corpo de conhecimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, Paulo. **Reorganização curricular do Ensino Básico.** Ministério da educação de Portugal. Lisboa, 2001.

ADRIANO, G.A.C e SCHROEDER, E. e TOMIO, D. A Análise Microgenética como Método nas Pesquisas em Educação na Abordagem Histórico-Cultural. Revista Reflexão e Ação, Santa Cruz do Sul, v. 25, n. 3, p. 28-48. Disponível em: http://online.unisc.br/seer/index.php/reflex/index. Acesso: 12/01/2019.

ALCÂNTARA, Ana Paula de; CORRÊA, Cassiana Nascimento. **A mediação pedagógica junto às novas tecnologias.** [S.l.], 2012. Faculdades Integradas Teresa Ávila.

ALMOULOUD, Saddo Agg e COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd**. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.6, p.62-77, UFSC: 2008.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, José M. **Praticando matemática, 8.** 3. ed. renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012. – (Coleção praticando matemática)

ARTIGUE, Michelle (1988). Engenharia didáctica. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BAUMGART, John K. **Tópico de história da matemática para uso em sala de aula.** São Paulo. ed: Atual, 1992.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BORGES, Camila Delatorre; SANTOS, Manoel Antônio dos. Aplicações da técnica do grupo focal: fundamentos metodológicos, potencialidades e limites. **Revista da SPAGESP,** v. 6, n. 1, p. 74-80, jan-jun. 2005.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – Inep. **Página Inicial, Ações Internacionais, PISA – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes.** Disponível em: <http://inep.gov.br/educacao-basica/saeb>. Acesso em: 21/02/2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática (5ª a 8ª séries). Brasília, DF, 1998.

CABRAL, Natanael Freitas. **O papel das interações professor-aluno na construção da solução lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras**. 2004. 151 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará. Belém – PA. 2004.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas:** estrutura e elaboração. Belém-PA: SBEM/SBEM-PA, 2017.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **Engenharia Didática**: um referencial para ação investigativa e para a formação de professores de Matemática. Zetetiké. Unicamp. v. 13, n.23. 2005. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias _digitais_II_2014/modulo_III/ENGENHARIA_ZETEIKE2005.pdf>. Acesso em 10/12/2018.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em ciências humanas e sociais.** 3. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

COSTA, Sandro Henrique Barbosa. **O ensino das frações no ensino fundamental e seu reflexo no ensino médio**. Curso de mestrado profissional em matemática. Fundação Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, 2014.

CURTO, Viviane. Trabalhando com o computador na EJA: uma análise dos relatos das práticas pedagógicas em meio digital com jovens e adultos. In: Encontro Nacional sobre hipertexto, **Anais...** 2009.

DANTE, Luiz R. **Projeto Teláris – Matemática: Ensino Fundamental 2**. 2ª edição, São Paulo; Ática; 2015.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat – Revisa Eletrônica de Educação Matemática,** v. 7, n. 2, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/ view/1981...2012v7n2p266/0. Acesso: 20/12/2018.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar. **Pró-Posições,** v. 1, n. 4, p. 78-91, mar. 1993.

FONSECA, Joaquim José da Silva. **Metodologia da pesquisa científica.** Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

FIOREZE, Leandra Anversa. **Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: uma análise a partir da Teoria dos Campos Conceituais.** 244 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS. 2010. Disponível em: http://www.educadores. diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/dezembro2013. Acesso: 10/11/2018.

FLYNN, E.; PINE, K.; LEWIS, C. The microgenetic method: time for change? The Psychologist, v. 19, n. 3. Mar, p.152-155, 2006. Disponível em: https://thepsychologist. bps.org.uk/...19/edition-3/microgenetic-me...Acesso: 03/02/2019.

FREITAS, Luciana Pinto. **Atividades algébricas no sexto ano do Ensino Fundamental com materiais manipuláveis.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2014. Disponível em: https://app.uff.br/riuff/bitstream/ 1/4414/1/ Dissertação%20Luciano.pdf. Acesso: 20/11/2018

GATTI, Bernadete A. **Grupo focal na pesquisa em ciências sociais e humanas.** Brasília: Líber Livro Editora, 2005.

GÓES, M. C. R. de. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: Uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. Cadernos Cedes, ano XX, n. 50. abr, p. 9-25, 2000, ISSN 1678-7110.

Guia de livros didáticos: PNLD 2014: Matemática. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013. Disponível em: www.fnde.gov.br/centrais-de-conteudos/publicacoes/.../125-guias?...8294:livro...Acesso: 11/01/2019.

LOBATO JÚNIOR, José Maria dos Santos. **O Ensino de Razão e Proporção por Meio de Atividades**. 2017. 246 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

LINS, Rômulo C.; GIMENEZ Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.** 7. ed. São Paulo: Papirus, 2006.

KERN, Newton Bohrer. Uma Introdução ao Pensamento Algébrico através de Relações Funcionais. Porto Alegre: UFRGS / Instituto de Matemática, 2008. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/15584. Acesso: 10/01/2019.
MARCUSSI, Haidée de Fátima Rodrigues. **A álgebra no Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2013. Disponível em: uenf.br/posgraduacao/.../wp.../19032013Haidee-Fatima-Rodrigues-Marcussi.pdf. Acesso: 20/11/2018.

MARTINS, Angela Maria Souza. Breves reflexões sobre as primeiras Escolas Normais no contexto educacional brasileiro, no século XIX. **Revista HISTEDBR On-line,** Campinas, n. 35, p. 173-182, set. 2009.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (org.). **Pesquisa social:** teoria, método e criatividade. 29. ed. Petrópolis: Vozes, 2010. (Coleção temas sociais).

MENOTTI, R. Malacrida. Frações e suas Operações: Resolução de Problemas em uma trajetória hipotética de aprendizagem. UEL, Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. Disponível em:http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000198 094. Acesso: 10/01/2019.

MONTEIRO, C.; PINTO, H.; FIGUEIREDO, N. As frações e o desenvolvimento do sentido do número racional. **Revista Educação e Matemática,** 84, 47-51, set. 2005.

NUNES, Terezinha; et al. **As estruturas aditivas:** avaliando e promovendo o desenvolvimento e os conceitos de adição e subtração em sala de aula. In: BRYANT, Peter; et al. Educação Matemática 1: números e operações numéricas. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2009. p. 45-81.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de. **A formação matemática de um matemático e educador matemático.** In: VALENTE, Wagner Rodrigues (Org.). Ubiratan D´Ambrosio: conversas; memórias; vida acadêmica; orientandos; educação matemática; etnomatemática; história da matemática; inventário sumário do arquivo pessoal. São Paulo: Annablume; Brasília: CNPq, 2007. cap. 2.

ONAGA, Dulce Satiko; MORI, Iracema. Matemática Ideias e Desafios. 8ºano. 17 ed. São Paulo; Saraiva livreiros editores, 2012.

PEREIRA, Marcos. **Uma Sequência Didática para o ensino de semelhança de figuras planas**. 2017. 161 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2017.

PEROSA, Cleci Terezinha; PEDRO, Eva Neri Rubim. Perspectivas de jovens universitários da região norte de Rio Grande do Sul em relação à paternidade. Rev. **Esc. Enf. USP,** v. 43, n. 2, p. 300-6, 2009.

PONTE, João Pedro. **Números e álgebra no currículo escolar.** In: VALE, Isabel; et al. (Org.) Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Porto: SEM/SPCE, 2006. p. 5-27.

POTÁPOV, M. e ALEXÁNDROV, V. e PASICHENKO, P. Álgebra y análisis de funciones elementales Editora: Editorial Mir Moscú, Ano: 1986

RAMPAZZO, Lino. **Metodologia científica para alunos dos cursos de graduação e pós-graduação.** 3. ed. São Paulo: Loyola, 2005.

SÁ, Pedro de Franco. **Atividades para o ensino de Matemática no ensino fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de; ALVES, Fábio José da Costa. **A engenharia didática:** alternativa metodológica para pesquisa em fenômenos didáticos. In: Maria Inês Marcondes; Ivanilde Apoluceno de Oliveira; Elizabeth Teixeira. (Org.). Abordagens teóricas e construções metodológicas na pesquisa em educação. 1. Ed. Belém: EDUEPA, 2011, v.1, p. 145-160.

SANTOS, Huberlândio Silva. **A importância da utilização da história da matemática na metodologia de ensino:** estudo de caso em uma Escola Municipal da Bahia. 2010. 64 f. Monografia apresentada ao Curso de Matemática da Universidade Estadual da Bahia para obtenção do Grau em Licenciatura em Matemática.

SILVA, Vinícius Gomes da. **A importância da experimentação no ensino de Química e de Ciências.** Trabalho de Conclusão (graduação). Universidade Estadual PaulistaUNESP. Faculdade de Ciências; Departamento de Química. Bauru, SP, 2016.

SILVA, Amarildo Melchiades da. **Uma análise da produção de significados para a noção de base em álgebra linear.** 1997. 163p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro.

STAREPRAVO, Ana Ruth. **Jogando com a matemática:** números e operações. Curitiba: Aymará, 2009.

VELOSO, Débora Silva; FERREIRA, Ana Cristina. **Uma reflexão sobre as dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da álgebra**. Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol I, 2011.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. **Matemática financeira.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 1997.

WEBER, Cristina Back; FACHIN, Maria Paula G. Matemática, mídias digitais e didática: Ensino de frações utilizando o GeoGebra. 2015. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/134135/000984570.pdf?sequence=1. Acessado em: 05/12/2018

WESTRCH, J. V. A necessidade a ação na pesquisa sociocultural. In: WERSTCH, J. V.; DEL RÍO, P.; ALVAREZ, A. Estudos sociais da mente. Porto Alegre: Artmed, 1998a. p. 56-71.

_______. Vygotsky y la formacion social de la mente. Barcelona: Paidos Iberica, 1998b

ZABALA, Antoni. **A prática educativa como ensinar.** [S.l.]: Artes Médicas, 1998. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=2511383. Acesso: 02/12/2018.