Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Paulo Ferreira da Gama

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO SENO

BELÉM - PA
2020

Paulo Ferreira da Gama

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO SENO

Dissertação apresentada como requisito para obtenção de título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral.

BELÉM- PA
2020

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Gama, Paulo Ferreira da

Uma sequência didática para o ensino da função seno/ Paulo Ferreira da Gama; orientador Natanael Freitas Cabral, 2020

Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (Mestrado Profissional) Universidade do Estado do Pará, 2020

1. Geometria espacial -Estudo e ensino 2. Esfera. 3. Geogebra (Software). 4. Métodos de ensino. I. Cabral, Natanael Freitas (orient.) II. Título.

CDD. 23º ed.516.15

CD
D

Bibliotecária: Regina Ribeiro CRB-2 739

Paulo Ferreira da Gama

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO SENO

Dissertação apresentada como requisito para obtenção de título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral.

Data da Avaliação: / /

Banca Examinadora:

____________________________________. Orientador
Prof. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas
Universidade do Estado do Pará

____________________________________. Membro Interno
Prof. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação
Universidade do Estado do Pará

____________________________________. Membro Externo
Prof. Gustavo Nogueira Dias
Doutor em Educação
ETRB

AGRADECIMENTOS

Ao Deus e Pai de nosso Senhor Jesus Cristo - o verdadeiro Mestre, que pelo Seu Espírito me deu da Sua graça, misericórdia e longanimidade, dando-me saúde para concluir mais essa etapa da minha vida.

À minha querida esposa Merabe Carvalho Ferreira da Gama, pelo seu amor, amizade, companheirismo, compreensão e por não apenas acreditar, mas também ajudar-me a sempre ir além.

Aos meus pais simplesmente por serem o que são. Pouparei palavras na descrição, dado que qualquer uma delas seriam pobres em meu intento.

Aos meus familiares, que sempre estiveram acreditando e torcendo por mim, mesmo nas horas mais difíceis.

Ao professor e amigo, Dr. Francisco Xavier Lima da Silva, por ter ensinado a mim muito mais do que Física, permitindo-me "subir em seus ombros" e vislumbrar coisas maiores, assim como disse Newton: "*Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre os ombros de gigantes*".

Ao professor, orientador e amigo, Dr. Natanael Freitas Cabral, pelas contribuições, orientações, parcerias e atenção dispensada para a consecução desta e de outras pesquisas.

Ao professor Dr. Miguel Chaquiam, por sua amizade, seus ensinos, suas contribuições e orientações, as quais foram de grande relevância para minha vida acadêmica e para essa pesquisa.

À banca de qualificação, pelas orientações, dicas, sugestões e críticas que trouxeram grandes contribuições para esta pesquisa.

A todos professores e professoras pelo ensino e atenção durante minha trajetória acadêmica.

A todos os amigos e amigas do mestrado, em especial ao amigo, Prof. Akilson Medeiros Vasconcelos pela amizade e pelas contribuições para essa pesquisa.

GAMA, P. F da. **Uma sequência didática para o ensino da função seno.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

RESUMO

A presença da trigonometria em vários contextos da sociedade atual, inclusive nos documentos oficiais brasileiros; a importância dela na modelagem de fenômenos periódicos; a possibilidade de a função seno conseguir unir a si temas importantes da Matemática, dentre outros, são fatores que demonstram a relevância de estudos sobre as funções trigonométricas. Porém, pesquisas apontam dificuldades dos discentes no aprendizado deste tema. Na tentativa de contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem desse objeto matemático, após delimitar o tema à função seno, essa pesquisa teve como objetivo responder ao seguinte Problema: Quais as contribuições que uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo das unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) trazem ao processo de ensino e aprendizagem da função seno aos estudantes do 2º ano do ensino médio de uma escola pública da região metropolitana de Belém (PA)? Foi considerada a teorias das Situações Didáticas, de Guy Brousseau e a Psicologia Histórico-Cultural, de Vygotsky, além da utilização da Análise Microgenética e da Análise do Discurso, esta última apresentada por Mortimer e Scott (2002). Foram feitas pesquisas para sondar as concepções dos discentes egressos do 2º ano do ensino médio e de 60 docentes de Matemática sobre este tema. Com base nelas e no que foi apresentado na fase de revisão de literatura, foi elaborado uma sequência didática contendo 8 UARC's, a qual foi aplicada em uma turma do 2º ano do ensino médio de uma escola pública da região metropolitana de Belém (PA). Mediante um estudo de caso, foram seguidos os procedimentos metodológicos específicos e com base no aporte teórico, constatou-se que a utilização da sequência didática trouxe contribuições ao *aluno*, ao *professor* e ao *saber*, dentre as quais selecionamos: ao *aluno*: a valorização dos conhecimentos prévios, maior atividade escolar, permite o levantamento e validação de hipóteses e o respeito ao contexto sociocultural; ao *professor* possibilita: a sistematização do conteúdo, o favorecimento do pensamento reflexivo, o estímulo ao aprofundamento dos conhecimentos específicos, o aumento da autonomia em relação ao livro didático; o favorecimento da criação e manutenção de zonas de desenvolvimentos proximais; ao *saber* possibilita: o favorecimento da identificação e evolução dos saberes ensinados, a contribuição na sua formação, mediante a estrutura articulada das intervenções estruturais. Por se tratar de um estudo de caso, os resultados e conclusões constantes nestas pesquisas não são passiveis de generalizações. No entanto, percebe-se a possibilidade de expansão desta pesquisa para outros temas da Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Ensino de Matemática. Trigonometria. Função seno.

GAMA, P. F da. **A didactic sequence for teaching the sine function.** Dissertation (Professional Masters In Matematics Teaching) – University of the State of Pará, Belém, 2020.

ABSTRACT

The presence of trigonometry in various contexts of current society, including in official Brazilian documents; its importance in modeling periodic phenomena; the possibility that the sine function can bring together important mathematical themes, among others, are factors that demonstrate the relevance of studies on trigonometric functions. However, research indicates students' difficulties in learning this topic. In an attempt to contribute to the teaching and learning process of this mathematical object, after delimiting the theme to the sine function, this research aimed to answer the following Problem: What contributions did a Didactic Sequence elaborated according to the model of Articulated Reconstruction units Conceitual (UARC) bring to the process of teaching and learning the sine function to 2nd year high school students from a public school in the metropolitan region of Belém (PA)? Guy Brousseau's Theories of Didactic Situations and Vygotsky's Historical-Cultural Psychology were considered, in addition to the use of Microgenetic Analysis and Discourse Analysis, the latter presented by Mortimer and Scott (2002). Research was carried out to probe the conceptions of students who graduated from the 2nd year of high school and 60 Mathematics teachers on this topic. Based on them and on what was presented in the literature review phase, a didactic sequence containing 8 UARC's was elaborated, which was applied to a 2nd year class of high school in a public school in the metropolitan region of Belém (PA). Through a case study, specific methodological procedures were followed and based on the theoretical contribution, it was found that the use of the didactic sequence brought contributions to the student, the teacher and knowledge, among which we selected: the student: the valorization of previous knowledge, greater school activity, allows the raising and validation of hypotheses and respect for the socio-cultural context; to the teacher it makes possible: the systematization of the content, the favor of reflective thinking, the encouragement to deepen specific knowledge, the increase of autonomy in relation to the textbook; favoring the creation and maintenance of proximal development zones; knowledge enables: the favoring of the identification and evolution of the knowledge taught, the contribution in its formation, through the articulated structure of structural interventions. As this is a case study, the results and conclusions contained in these surveys cannot be generalized. However, the possibility of expanding this research to other mathematical themes is perceived.

KEYWORDS: Mathematical Education. Mathematics teaching. Trigonometry. Sine function.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O processo de ensino e o de aprendizagem encontram-se dentro de um processo maior: o educacional. Este permeia várias áreas de uma sociedade, se dividindo no binário composto por educação intencional e educação não-intencional. Ademais pode ser considerado complexo, pois existem vários fatores que podem interferir em sua estrutura, tais como: correntes filosóficas, pedagógicas, políticas e partidárias dos personagens envolvidos.

O ensino de Matemática não fica à parte deste cenário. Um dos temas importantes desta disciplina é a trigonometria, na qual encontram-se os estudos das funções trigonométricas mais conhecidas: função seno, função cosseno e a função tangente, sendo a primeira o objeto de pesquisa da sequência didática apresentada no corpo deste texto. Essa importância deve-se a vários fatores, tais como: i) a presença da trigonometria em vários contextos da sociedade atual, conforme os citados por Oliveira (2015); ii) a relevância das funções trigonométricas encontradas nos documentos oficiais brasileiros (Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM, Base Nacional Comum Curricular – BNCC, etc.); iii) a importância do estudo da trigonometria na modelagem de fenômenos periódicos; iv) a possibilidade da função seno conseguir unir a si dois temas importantes como a geometria e o conceito de função, dentre outros.

Apesar disso, observa-se que os índices de aprendizagens em Matemática ainda são muito baixos. Pesquisas apontam que o índice dos alunos que aprendem o esperado em Matemática é cerca de 11% do total de estudantes. Além disso, 55% dos alunos da rede pública de ensino, com oito anos de idade, tem conhecimento insuficiente em Matemática (FAJARDO; OLIVEIRA, 2017; MORENO; GUILHERME, 2014; CAI PARA ..., 2014).

Nesta esteira, considero que pesquisas desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática possibilitam engendrar discussões e apontamentos relevantes que podem contribuir para a melhoria no processo de ensino e aprendizagem desta disciplina.

No caso específico da trigonometria (e consequentemente da função seno) há poucas pesquisas relacionadas às dificuldades de aprendizagens. Feijó (2018, p.) afirma que “as pesquisas sobre as dificuldades enfrentadas ao se aprender trigonometria são escassas não só no Brasil, mas no mundo”. Neste cenário, pesquisas que tratem deste assunto possuem grande importância, tanto pela escassez, quanto pelas dificuldades dos escolares no tocante ao aprendizado desse conteúdo.

Nesta senda, a presente pesquisa busca contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de trigonometria. Este é um tema amplo, assim o estudo se concentrou no processo de ensino e aprendizagem da função seno.

Com isso, pretendemos responder ao seguinte Problema de Pesquisa:

Quais as contribuições que uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo das unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC)[1] *trazem ao processo de ensino e aprendizagem da função seno aos estudantes do 2º ano do ensino médio de uma escola pública da região metropolitana de Belém (PA)?*

Para responder à pergunta acima, foram estabelecidas as seguintes questões norteadoras:

- O que a literatura atual aponta sobre o processo de ensino e aprendizagem escolar no tocante às funções trigonométricas?
- Quais são as concepções dos estudantes egressos do 2º ano do ensino médio quanto ao processo de aprendizagem da função seno?
- O que dizem os docentes de Matemática sobre o ensino da função seno?
- A utilização de uma sequência didática traz contribuições para o processo de ensino e aprendizagem da função seno?

Considerando essas questões, nesta pesquisa, foi adotado o seguinte objetivo geral: evidenciar as contribuições ao processo de ensino e aprendizagem da função seno aos estudantes do 2º ano do ensino médio de uma escola pública da região metropolitana de Belém (PA) a partir da utilização de uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo das unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC).

Visando alcançar o objetivo geral desta pesquisa e responder às perguntas suscitadas, definimos os seguintes objetivos específicos:

- Sondar os problemas apontados na literatura relacionados ao processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas;
- Identificar as dificuldades de aprendizagens dos estudantes egressos do 2º ano do ensino médio de uma escola pública da região metropolitana de Belém (PA) no tocante à função seno;
- Sondar as concepções dos docentes de Matemática quanto ao ensino da função seno;
- Elaborar uma sequência didática para o ensino da função seno.

Como metodologia de pesquisa, adotamos o estudo de caso. Os procedimentos percorridos para a consecução dos objetivos desta pesquisa tiveram início com a aplicação do

[1] As UARC’s estão mais detalhadas na Subseção 1.5.

Teste de Verificação (Apêndice B) aos discentes do 2º ano do ensino médio de uma escola pública da região metropolitana de Belém, os quais apresentaram um desempenho baixo. Assim, em ato contínuo foi realizada a Oficina de Conhecimentos Prévios (apêndice C) seguida da aplicação da sequência didática constante na Seção 4.

Esta pesquisa está estruturada em cinco seções, além desta introdutória e das considerações finais. A primeira apresenta o aporte teórico no qual fundamentamos o desenvolvimento da pesquisa: Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau; Psicologia Histórico-Cultural, de Lev Vygotsky; Análise Microgenética; Análise do Discurso; Sequência Didática e o método utilizado na pesquisa.

A segunda seção foi dedicada à revisão de literatura sobre funções trigonométricas e é composta ainda pela apresentação dos resultados obtidos em pesquisa de campo que buscou detectar as concepções tanto de alunos egressos do 2º ano do ensino médio sobre a aprendizagem da função seno, quanto de professores de Matemática com relação ao ensino deste tema.

A terceira seção foi construída para facilitar a compreensão das seções subsequentes. Nela, é possível observar nesta os aspectos históricos e conceituais relacionados à função seno.

A Seção 4 é composta pelas 8 UARC's que compõem a sequência didática aplicada em sala de aula com vistas a sondagens de indícios de aprendizagens aos escolares.

A apresentação detalhada dos procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa bem como a utilização da Análise Microgenética e da Análise do Discurso em busca das contribuições da aplicação da sequência didática ao processo de ensino e de aprendizagem relacionadas à função seno, encontra-se na seção 5.

Por fim, são apresentadas as considerações finais e os elementos pós-textuais da pesquisa.

1- APORTE TEÓRICO E METODOLÓGICO DA PESQUISA

A concepção que o professor constrói sobre a educação influencia na sua prática docente. Em geral, essa construção é moldada a partir de experiências e conhecimentos adquiridos durante a vida do docente. Assim, quanto mais conhecimento ele tiver sobre o processo de ensino e aprendizagem, maior será a capacidade de dele no tocante à seleção de recursos didáticos e metodológicos para suas aulas.

Com efeito, pouco vale o professor de Matemática, por exemplo, saber muito sobre o seu conhecimento específico, se este não vier acompanhado de uma visão mais global sobre o ensino e a aprendizagem escolar. Pode iludir-se, portanto, quem considera que na ministração da aula de Matemática é necessário ter apenas um vasto conhecimento específico sem concatenar estes conhecimentos com as teorias de aprendizagens vigentes.

Neste contexto, outras áreas do conhecimento têm trazido contribuições para o processo de ensino. No caso específico da Matemática, o conhecimento sobre o processo de aprendizagem estudantil tem apresentado estreita relação com outras áreas do conhecimento, tais como: a Psicologia, a Filosofia, a História, etc. Dentre as teorias relacionadas à educação, que têm trazido contribuições para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, encontram-se a Psicologia Histórico-Cultural, de Lev Vygotsky (1896-1934), e a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau.

A escolha do recurso didático-pedagógico pelo docente também merece destaque. Neste sentido, estudos como os de Oliveira (2018); Pereira (2017); Uebel (2015); Grando e Preussler (2014); Figueiredo (2013) e Maia e Faria (2013) tem apresentado resultados positivos ao aprendizado escolar a partir da utilização de sequências didáticas[2] como recurso didático em aulas de Matemática.

Considerando o exposto, esta seção apresenta as principais características das teorias consideradas nesta pesquisa, quais sejam: teoria das Situações Didáticas e Psicologia Histórico-Cultural. Apresentamos também a definição da Análise Microgenética e da ferramenta para Análise do Discurso adotada nesta pesquisa. Apresentamos ainda o conceito de Sequência Didática segundo Zabala (1998) e um modelo para estruturar este recurso didático. Por fim, desvelamos o método utilizado na pesquisa.

---

[2] Este termo será tratado detalhadamente na subseção 1.5.

1.1- Teoria das Situações Didáticas

No contexto da Educação Matemática, uma das principais teorias que tem se apresentado e trazido grandes contribuições para o ensino de Matemática é Teoria das Situações Didáticas ou apenas Teoria das Situações, de Guy Brousseau.

Brousseau (1996) ao criar a Teoria das Situações, considerou que o discente aprende a partir de constantes adaptações a um meio permeado de contradições, dificuldades e desequilíbrios. Esse meio é criado pelo docente e considera que as respostas dos discentes surgirão a partir de duas hipóteses, a saber: i) o aluno consegue resolver o problema dando respostas corretas ou ii) o aluno não consegue alcançar a resposta correta, carecendo de um ensino para resolver o problema proposto. Assim, as respostas dos alunos, segundo essa teoria, evidenciam sua aprendizagem.

Dessas hipóteses pode-se perceber que a aprendizagem escolar se dá a partir de constantes adaptações ao meio criado pelo professor. Este meio deve buscar engajar fortemente os saberes matemáticos dos escolares na busca de sua própria aprendizagem a partir da intencionalidade didática, caso contrário, ele será insuficiente para o aprendizado (ALMOULOUD, 2014).

Podemos perceber que a Teoria das Situações põe em relevo o discurso do aluno, onde a maiêutica socrática[3] merece destaque, pois a partir das respostas do aluno, o professor compreende melhor seu raciocínio, já que elas manifestam as adaptações do discente frente às perguntas propostas. Aliás, segundo o autor desta teoria, “todos os procedimentos em que o professor não dá a resposta são aceitáveis para levar o aluno a dar à luz esse saber” (BROUSSEAU, 1996, p.48).

Além disso, o fato de o aluno tentar responder, refazer suas respostas, responder novamente, indagar, argumentar, criar hipóteses, etc. foge do padrão hegemônico, pautado pela sequência: definição, exemplo resolvido e exercícios propostos, mostrando-se como uma opção à ele, mudando a postura do discente de totalmente passiva (professor como detentor do conhecimento) para uma postura na qual o discente, assume responsabilidades quanto a sua própria aprendizagem.

A Teoria das Situações considera ser possível caracterizar o processo de aprendizagem a partir de uma série de situações reprodutíveis, denominadas de *situações didáticas*. Essas situações relacionam-se com três elementos principais: o aluno, o saber e o meio no qual se

[3] A maiêutica socrática é descrita como a arte na qual o mestre tenta conduzir o aprendiz ao seu próprio conhecimento, mediante um jogo de perguntas e respostas (GABIONETA, 2015)

dará a aprendizagem. Estes três elementos estabelecem fatores determinantes para a evolução dos comportamentos dos alunos, podendo caracterizar a aquisição de determinado conjunto de conhecimento mais significativo (ALMOULOUD, 2014; TEIXEIRA; PASSOS, 2013).

Estes conhecimentos mais significativos surgem justamente a partir de um processo envolvente, no qual o discente ativamente constrói, reestrutura e modifica os esquemas de conhecimentos que já possui com vistas à aprendizagem de novos conteúdos, não deixando de lado os conhecimentos trazidos de fora da escola; antes, modelando-os a partir de conhecimentos novos, discutidos em sala de aula.

Neste contexto, o professor deve sondar os conhecimentos prévios dos discentes, buscando encontrar as limitações dos alunos. Geralmente essas limitações são manifestadas nas respostas dos discente às perguntas apresentadas em sala de aula. Ao considerar as limitações e dificuldades dos escolares, o professor deverá propor situações novas, contendo dificuldades adequadas às faixas de aprendizagem dos escolares.

Ao fazer isso, o professor deve ter intenção de ensinar. Caso contrário, ele poderá avançar com os conteúdos novos, atribuindo as dificuldades futuras dos escolares à ausência de conhecimentos pretéritos, delegando o fracasso da aprendizagem de seus alunos aos professores que o antecederam. Em geral, em um contexto assim, as situações de aprendizagem são enfraquecidas, sobressaindo-se apenas poucos alunos, o que não deve ser, nem de longe, a intenção do docente.

Nesta direção, ao levar em consideração os conhecimentos prévios dos discentes, as dificuldades apresentadas na sondagem de aprendizagem, além da intenção de ensinar, o professor poderá ter mais facilidade ao criar situações de ensino. Apesar disso, faz-se necessário que ele esteja sempre atento às características particulares de cada turma, adequando os meios e os recursos a serem utilizados em cada aula, potencializando a aceitação pelos discentes das situações criadas pelo professor. Essa aceitação, segundo a Teoria das Situações, é denominada de *devolução*.

Na *devolução* os discentes aceitam o problema proposto pelo professor como seu e mobilizam conhecimentos para tentar resolvê-lo, sem a necessidade de o docente apelar às razões didáticas da situação. O discente envolve-se de tal maneira que ele próprio deseja resolvê-lo, e não mais mediante uma imposição do professor ou da escola. Quando o discente age voluntariamente, sem querer "ganhar pontos" ou apenas efetuar uma tarefa escolar, temos a situação *adidática* (BROUSSEAU, 1996).

Pode-se fazer a seguinte distinção entre a situação didática e a situação a-didática: na primeira as ações mobilizadas pelo discente são conduzidas por regras criadas pelo professor, na qual o aluno tem que resolver os problemas propostos em classe apenas com fins didáticos; na última, os discentes são envolvidos por sua própria motivação: não há necessidade de imposição de algum sistema didático (provas, testes, avaliações, etc.), pois os escolares já aceitaram a proposta do professor como de sua responsabilidade.

Com isso, ao aceitar a devolução, o professor torna-se um *mediador* do conhecimento, sendo mínima a interferência dele nas ações dos escolares. Esta ideia é reforçada pelo próprio Brousseau (1996, p.49) ao afirmar que:

> Estes problemas, escolhidos de forma a que o aluno possa aceitá-los, devem levá-los a agir, a falar, a reflectir (SIC), a evoluir por si próprio. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento em que produz a sua resposta, o professor recusa-se a intervir como proponente dos conhecimentos que pretende fazer surgir.

Assim, é imperioso dizer que o docente tem papel fundamental, mas não exclusivo[4], no processo de ensino e aprendizagem. Suas escolhas quanto às situações de ensino impactam diretamente à aprendizagem dos escolares. O professor mediador, neste cenário, é aquele que utiliza os instrumentos mediadores no processo de ensino. Ele deve apresentar-se como o principal agente na busca da aprendizagem e do desenvolvimento cognitivo dos discentes.

A Teoria das Situações pressupõe ainda que há uma espécie de *jogo didático* envolvendo a tríade saber-professor-aluno. O professor propõe uma questão com objetivo de o aluno construir algum saber, de ensinar; o aluno aceita esta proposta e tenta resolver a questão sem ter necessidade de estímulos do professor, sem apelar para questões didáticas. As regras deste jogo são explícitas ou implícitas a todos personagens envolvidos (BROUSSEAU, 1996; ALMOULOUD 2014).

Em outros termos: o professor deve saber onde quer chegar com suas propostas e os discentes envolvem-se no jogo didático deixando de questionar o motivo das situações apresentadas pelo professor. Há, portanto, uma aceitação tácita dos escolares: “o aluno sabe que está aprendendo, que o professor está ensinando; o professor é consciente do seu papel e de como a situação está se desenvolvendo” (D’AMORE, 2007a, p.235).

Segundo Brousseau (1996), D’Amore (2007b), Almouloud (2014) e Teixeira e Passos (2013) no *jogo didático* há fases predominantemente de ação, de formulação, de validação e de institucionalização, cujas principais características são:

[4] Entendemos que a complexidade do processo de ensino e aprendizagem vai além da sala de aula, compreendendo situações pessoais, emocionais, econômicas, motivacionais, etc., tanto do aluno quanto do professor.

a) *Fase de ação*: O professor propõe um problema (ou uma situação) relacionado a um determinado conhecimento e propõe aos discentes. A solução mais adequada é justamente o conhecimento que o professor espera despertar no aluno;

b) *Fase da formulação*: O aluno tem a oportunidade de discutir com o professor ou com seus pares sobre as decisões tomadas na fase de ação, tentando escrever de tal forma que sua escrita seja aceita por todos e tenta comunicar seu raciocínio mediante um modelo e uma linguagem mais clara possível;

c) *Fase da validação*: o modelo encontrado pelos alunos é compartilhado aos que ainda estão com dificuldades em encontrá-lo. Aos que foram comunicados o modelo, é facultado pedidos de verificações, demonstrações e explicações e o apresentador terá a oportunidade de justificar seu raciocínio mostrando-lhes a pertinência de seu modelo e, se possível, fornecer um modelo semântico para sua proposta de resposta;

d) *Fase da institucionalização*: O professor institucionaliza o conhecimento, dando validade àqueles conhecimentos construídos corretamente nas fases anteriores, devendo "estabelecer e dar um *status* oficial a conhecimentos surgidos durante a atividade em classe" (D'AMORE, 2007b, p.83).

Vale assinalar que as fases acima não seguem, necessariamente, a ordem apresentada e que na fase de ação o docente deve considerar o fato de que os discentes têm capacidade suficiente de criar teorias implícitas para resolver a situação apresentada.

Quanto a fase de institucionalização, é necessário que o professor esteja atento para que ela ocorra no momento certo. Afinal, ocorrendo de forma prematura, o professor poderá interromper a construção pelos alunos do conceito pretendido; ocorrendo de forma tardia, poderão surgir interpretações inexatas sobre o conceito, acarretando atraso na aprendizagem e dificuldades no momento da aplicação (ALMOULOUD, 2014).

É nesta perspectiva que consideramos que a teoria de Brousseau guarda estreita relação com pesquisas relacionadas à Educação Matemática, contribuindo significativamente ao processo de aprendizagem escolar, permitindo a análise dos indícios de aprendizagens apresentados na aplicação de uma sequência didática.

1.2- Psicologia Histórico-Cultural

A importância dada aos conhecimentos trazidos pelos discentes de fora da escola é uma das principais características apresentadas na literatura no tocante ao processo de ensino e aprendizagem. Exemplos como os encontrados em Carraher, Carraher e Schliemann (1982), nos quais as crianças conseguem resolver uma *situação-problema* de Matemática do seu cotidiano, mas não conseguem resolver uma *operação* matemática, dizem muito a respeito da importância destes conhecimentos. Teorias têm surgido tentando descobrir como ocorre o aprendizado e o desenvolvimento escolar e quais as contribuições das interações sociais no processo de aprendizagem, bem como quais as contribuições dos conhecimentos adquiridos fora da escola para o aprendizado estudantil.

Nesta pesquisa, consideramos a definição de desenvolvimento e aprendizagem encontrada em Davis e Oliveira (2010), onde o primeiro corresponde ao processo pelo qual o indivíduo constrói ativamente suas características, a partir das relações com o ambiente físico e social; o segundo, por seu turno, corresponde ao processo pelo qual o indivíduo apropria-se ativamente dos conteúdos obtidos nas relações humanas anteriores a sua e que compõem o conhecimento do seu grupo social.

Neste enfoque, a Psicologia Histórico-Cultural, do soviético Lev Vygotsky (1896-1934) apresenta-se como uma teoria que trouxe grandes contribuições ao processo de ensino e aprendizagem, pois ela considera que as interações sociais e o contexto cultural são partes importantes no desenvolvimento e na aprendizagem de uma pessoa. Para ele é a partir das interações sociais e de signos externos que são modificadas e desenvolvidas as funções psíquicas superiores dos indivíduos, e os aspectos cognitivos e afetivos se inter-relacionam.

Segundo esse pesquisador, o processo de desenvolvimento do pensamento tem como sentido aquele que vai do social para o individual, do coletivo para o pessoal, do externo para o interno e a internalização de uma ideia é feita a partir das interações sociais, a partir daquilo que o pesquisador soviético denominou de "lei genética geral do desenvolvimento cultural", a qual pode ser descrita da seguinte forma:

> Qualquer função presente no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos distintos. Primeiro, aparece no plano social, e depois, então, no plano psicológico. Em princípio, aparece entre as pessoas e como uma categoria interpsicológica, para depois aparecer na criança, como uma categoria intrapsicológica. Isso é válido para atenção voluntária, a memória lógica, a formação de conceitos e o desenvolvimento da vontade. [...] a internalização transforma o próprio processo e muda sua estrutura e funções. As relações sociais ou relações entre pessoas estão na origem de todas as funções psíquicas superiores (VYGOTSKY, 1981, p.163)

Segundo esta "lei genética", as interações sociais ganham destaque no processo de desenvolvimento cognitivo de uma pessoa, já que elas são as "origens" das funções psíquicas superiores, e as relações dialéticas e as interações sociais dos personagens envolvidos no processo de ensino e aprendizagem são colocadas em destaque, contribuindo na formação de conceitos e da memória lógica, elementos importantes na aprendizagem de Matemática.

Baraldi (1999), afirma que o processo de ensino e aprendizagem escolar compreende as interações sociais. Estas, por sua vez, englobam um complexo que relaciona conhecimentos diversos, concepções científicas e concepções de vida. Além disso, as expressões verbais existentes em sala de aula respeitam o limite contextual tanto do aluno, quanto do professor.

Apesar do respeito aos limites contextuais dos discentes, o professor deve buscar pareá-los aos conhecimentos científicos, justificando possíveis limitações e erros de conhecimentos trazidos pelo aluno do senso comum. Agindo desta forma, os discentes poderão ter uma melhor compreensão dos conhecimentos escolares e maiores possibilidades de aplicar o conhecimento aprendido em sala de aula em situações externas à escola.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) vão ao encontro da Psicologia Histórico-Cultural apontando que o desenvolvimento do indivíduo se dá a partir de um processo no qual "o ser humano assume a cultura do grupo social a que pertence" (p.46) e que a escola deve levar em consideração "a importância das interações entre crianças e destas com parceiros experientes, dentre os quais destacam-se professores e outros agentes educativos" (p.46).

Observa-se com isso que o professor deve dar importância a relação existente entre os conhecimentos espontâneos dos alunos (trazidos de fora da escola e aprendidos a partir da educação não-intencional[5]) e o conhecimento científico (aquele aprendido a partir de uma educação intencional, geralmente na escola). Afinal, conforme a assertiva de Brasil (1997), estes conhecimentos interagem entre si. Ou seja: no ambiente escolar podem coexistir harmonicamente estes dois tipos de conhecimento.

Vale frisar que embora as interações sociais tenham se destacado no processo de aprendizagem, para que haja a consolidação do aprendizado é necessário que o aprendiz já tenha algum nível de desenvolvimento cognitivo, pois é a partir deste nível de desenvolvimento que o aluno possui que as interações sociais se mostram mais eficazes.

Davis e Oliveira (2010) e Jófili (2002) afirmam que a teoria de Vygotsky considera três zonas de desenvolvimentos. A primeira, denominada de zona de desenvolvimento real corresponde àquela na qual uma pessoa consegue executar uma tarefa sem ajuda de outra; a segunda, denominada de zona de desenvolvimento potencial, corresponde àquela na qual o indivíduo já consegue realizar alguma tarefa, porém, necessita apelar à uma pessoa mais adulta

[5] Uma breve distinção entre educação não-intencional e educação intencional pode ser encontrada em Libâneo (1994, p.16-22)

ou mais experiente. O distanciamento entre essas duas primeiras zonas corresponde a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

Jófili (2002) afirma ainda que a escola pode estimular o aparecimento de ZDP's, colocando em marcha os processos de desenvolvimento internos, desencadeados a partir das interações sociais. Estes processos, uma vez internalizados, são incorporados pelo aprendiz e contribuem ao seu desenvolvimento.

Nesta seara, o professor deve considerar principalmente as ZDP's na construção do conhecimento pelos alunos, estimulando-os na direção da aprendizagem. Mediante a criação e manutenção de ZDP's o professor pode estimular o surgimento de funções psíquicas superiores, que até o momento não foram perfeitamente desenvolvidas nos escolares. A imitação, os exemplos, as perguntas de caráter maiêutico, a colaboração em atividades em grupos, o compartilhamento com toda a classe dos conhecimentos manifestados por um (ou poucos) alunos, suscitando dúvidas, levantando hipóteses e questionamentos quanto a resposta correta, dentre outros, são possibilidades de ajuda do docente para isso.

Acentuamos que conforme Moysés (2004), a imitação aqui considerada não é pautada na repetição de conceitos e situações a partir de características mnemônicas; antes, trata-se de o aluno considerar a ideia apresentada pelo professor e modificá-la, conforme a situação imposta a ele exigir.

A fala apresenta-se como um dos instrumentos de mediação das interações sociais, sendo ela um dos signos mais conhecidos em nossa sociedade. Através das palavras que a compõem, são indicados objetos do mundo externo e suas principais características que podem ser generalizadas e ensinadas aos escolares. Assim, a fala deve ser considerada no processo de ensino de Matemática. Afinal, ao responder verbalmente uma pergunta, a fala do aluno carrega relações do pensamento do discente a partir dos conhecimentos adquiridos em seu dia a dia e o professor deve atentar ao sentido empregado pelo discente em seu discurso, pois ele é o reflexo do significado dado pelo aluno ao objeto ensinado.

Moysés (2004) chega a afirmar que no processo de ensino e aprendizagem ocorre um movimento cíclico no qual os conhecimentos científicos tendem a "descer" e se aproximar mais da realidade concreta dos escolares e os conhecimentos espontâneos tendem a "subir", buscando a sistematização, a abstração e a generalização mais amplas.

Vale destacar que, segundo esta teoria, existem quatro níveis (ou fases) de desenvolvimento humano que se inter-relacionam. São eles: filogenético, sociogenético, ontogenético e microgenético.

Davis e Oliveira (2010) e Moura et al (2016) apontam características para estes níveis de desenvolvimento, a saber: *filogenético:* remete ao pertencimento do indivíduo a espécie *Homo sapiens*, cuja existência remonta 150 mil anos atrás. É a história da espécie; *sociogenético:* considera o processo de socialização da espécie humana de instrumentos materiais e sígnicos, além do planejamento e da regulação de condutas para a vida em sociedade. É a história do grupo cultural; *ontogenético:* considera as condições específicas em que cada indivíduo se insere como membro de uma espécie em determinado contexto histórico, social e cultural, sendo classificado como a história do indivíduo; *microgenético:* considera as diferentes formas pelas quais acontecem o *desenvolvimento* das funções psicológicas superiores dentro de determinado contexto histórico, social e cultural, permitindo analisar a história da formação dos processos psicológicos específicos em um dado intervalo de tempo.

Apesar de considerar que o desenvolvimento humano compartilha das quatro fases apresentadas acima, consideramos que o desenvolvimento humano obtido na fase microgenética é mais fácil de mensurar no ambiente escolar, onde o professor deve analisar os indícios de aprendizagem do educando em intervalos de tempo pequenos, como uma aula, uma semana, etc. Para analisar as mudanças de comportamentos e os indícios de aprendizagens, consideramos como instrumento de análise a Análise Microgenética e a Análise do Discurso, ambas apresentadas nas subseções que seguem.

1.3- Análise Microgenética

Como vimos anteriormente, a teoria da Psicologia Histórico-Cultural considera que o desenvolvimento de um indivíduo é um ato contínuo que o acompanha por toda vida. Este desenvolvimento se dá mediante a interrelação dos estágios (ou fases) filogenéticos, sociogenético, ontogenético e microgenético. Como falado ao norte, nessa pesquisa interessa-nos apenas o estágio microgenético.

É interessante acentuar que este estágio não foi criado e nem definido diretamente por Vygotsky, mas sim por um de seus contemporâneos, o psicólogo Werstch (MOURA et al, 2016; TOMIO; SCHROEDER; ADRIANO, 2017). Apesar disso, estes pesquisadores concordam que as pesquisas do Psicólogo soviético já continham a origem e as características deste estágio. Assim, o nível microgenético se refere às diversas maneiras pelas quais as funções superiores de um indivíduo são desenvolvidas em um intervalo de tempo, local e cultura. A microgênese coloca em relevo os fatos ocorridos no momento analisado, permitindo ao pesquisador verificar mais claramente como se dão os acontecimentos relacionados aos fenômenos psicológicos.

Moura et al (2016) afirmam que Vygotsky referia-se à microgênese como situações particulares vividas pelo indivíduo que modificam as funções superiores, conduzindo a criação de novos níveis de desenvolvimento no indivíduo.

De acordo com Kelman e Branco (2004), o conceito de microgênese:

> seria, portanto, um domínio genético, porque Vygotsky percebeu que era exatamente no aqui e agora das ações e interações diante de uma situação problema que se encontravam os processos mentais mais ricos. A microgênese permite compreender melhor a emergência de fenômenos psicológicos novos e complexos, procurando captar os momentos em que o processo de transformação está ocorrendo (KELMAN; BRANCO, 2004, p.95).

A Análise Microgenética considera justamente a microgênese dos eventos relacionados ao processo de desenvolvimento humano.

Moura et al (2016, p.112) afirma que a análise microgenética corresponde a “um recurso metodológico que avalia processos afetivo-cognitivos e que investiga a compreensão dos processos psíquicos superiores, tais como: pensamento, linguagem, atenção voluntária, entre outros”. Segundo Wertsch (1985) apud Góes (2000), na análise microgenética há o envolvimento do acompanhamento das minúcias relacionadas à formação de um processo. Para isso, são detalhadas as ações dos sujeitos e as relações interpessoais surgidas intervalos de tempo pequenos.

Góes (2000, p.15), por seu turno, considera que o termo micro “não é micro porque se refere à curta duração dos eventos, mas sim por ser orientada para minúcias indiciais”. O termo “genética”, por sua vez, traz consigo “o sentido de ser histórica”, tendo como foco o movimento durante o processo, permitindo relacionar tanto as condições do passado quanto do presente com vistas às projeções futuras de desenvolvimento.

Podemos observar que tanto Moura et al (2016) quanto Góes (2000) consideram a Análise Microgenética como um instrumento de análise de pesquisa que pode avaliar as minúcias envolvidas na formação de determinado processo psíquico. Essas avaliações são feitas a partir da análise das interações sociais (pesquisador e pesquisado) e da atenção minuciosa aos indícios de aprendizagens, onde todos os personagens envolvidos na pesquisa têm papel relevante na construção do conhecimento analisado.

Por considerar intervalos de tempo pequenos, a Análise Microgenética tem sido frequentemente utilizada em pesquisas experimentais com viés qualitativo, como pode ser visto nas pesquisas de Freitas, Queiroz e Lacerda (2018); Silva e Silva (2017); Tomio, Schroeder e Adriano (2017); Côrrea e Queiroz (2017); Moura et al (2016); Pacheco (2016); Werner (2015) e Silva e Caiado (2015). Em todas essas pesquisas, foi possível “analisar no curtíssimo espaço de tempo de um episódio (segundos, minutos, horas, etc.), a manifestação de uma função psíquica superior – como a atenção voluntária – já formada ou em processo de formação” (WERNER, 1999, p.160).

Werner (1999) afirma que as pesquisas que utilizam a Análise Microgenética deslocam a avaliação do indivíduo para as relações interpsíquicas que estão ocorrendo, sendo analisado o *processo* de desenvolvimento humano e não o *produto*.

Por considerar *o processo* e não *o produto*, todos os personagens envolvidos na construção do conhecimento são importantes. Com isso, torna-se dispensável a neutralidade do pesquisador (o professor), facultando-lhe a oportunidade de intervir sempre que necessário, auxiliando os discentes na formulação (ou reformulação) de algum argumento, alguma ideia.

Nessa direção, a Análise Microgenética apresenta-se como um campo fértil para pesquisas em ambiente escolar. Kelman e Branco (2004) concordam com este raciocínio ao afirmarem que a utilização deste tipo de Análise Microgenética no contexto escolar:

> É particularmente interessante porque permite observar como ocorre o processo ensino-aprendizagem, quais são as qualidades do contexto de determinada sala de aula, e assim detectar quais são as habilidades comunicativas necessárias durante os processos de interação que facilitam ou dificultam a ocorrência da aprendizagem (KELMAN; BRANCO, 2004, p. 95).

Com isso, a Análise Microgenética permite ao professor sondar como e quando ocorrem os indícios de aprendizagens a partir da análise atenta às interações verbais e não verbais ocorridas em sala de aula.

Uma vez discutido sobre definição e a importância deste recurso de investigação em ambiente escolar, faz-se necessário discutir *como* o pesquisador deverá utilizá-la.

Segundo Góes (2000), a construção dos dados utilizados na Análise Microgenética se dá mediante a atenção aos mínimos detalhes, sendo frequentemente realizadas gravações de áudios e vídeos com alguns recortes das interações dos personagens envolvidos. A análise fica focada nos comportamentos dos sujeitos da pesquisa, nas relações intersubjetivas e nas condições sociais da situação.

Por tratar da análise das minúcias envolvidas nas interações sociais, a videogravação mostra-se relevante. Afinal, ela permite descrever com mais facilidade a partir das transcrições das falas e atitudes dos pesquisados, as mudanças de atitudes dos escolares que podem retratar indícios de aprendizagens. Essas minúcias indicias emergem de um contexto de análise de eventos particulares e pontuais. Apesar disso, em investigações com Análise Microgenética a totalidade não é abandonada, pois a parte analisada faz parte do todo, logo, possui características deste que podem ser analisadas com maior facilidade. Algo semelhante ao exame de biópsia no corpo humano.

Sangiogo (2014), corrobora este pensamento ao afirmar que a Análise Microgenética permite que os sinais e indícios de aprendizagens, além da formação de conceitos, podem ser inferidos a partir de análise de falas, escritos e de outras expressões dos estudantes, tais como: gestos, verbalizações, mudanças de expressão, entonação de voz, expressão do rosto, etc.

Assim, em pesquisas envolvendo Análise Microgenética não devem ser consideradas apenas as falas dos pesquisados, mas também as mudanças de expressões destes. Afinal, não é porque o aluno responde ao professor “entendi” que, de fato, ele entendeu. Pode ser que apenas ele não queira repetir sua pergunta para não ser constrangido pelos demais alunos.

Sangiogo (2014) afirma ainda que Análise Microgenética, por considerar registros que vão além dos escritos, contribui para que o docente avalie se é possível dar continuidade a sua fala, ou se é necessário retomar algum conceito; se é necessário incluir ou excluir pautas de discussões sobre temas que o docente poderia julgar que os alunos já tinham aprendido; e por através da videogravação, o docente pode avaliar se os discentes conseguiram incorporar as ideias ensinadas.

Neste contexto, a técnica de videogravação apresenta-se indispensável, pois a partir dela é possível ser visto quantas vezes forem necessárias as interações entre professor e aluno e entre aluno e seus pares, permitindo ao pesquisador fazer uma análise mais precisa dos indícios de aprendizagens ocorridos nas interações em sala de aula.

Considerando que a análise dos vídeos e transcrições relacionados à Análise Microgenética consideram, dentre outros, o discurso como elemento importante, faz-se necessário que levemos em conta instrumentos precisos que nos auxiliem a julgar se houve ou não mudança de comportamento do pesquisado a partir de seu discurso. A subseção a seguir apresenta um instrumento que pode auxiliar o pesquisador a ter êxito em seu intento.

1.4- Análise do Discurso

A fala é um dos recursos que nós utilizamos para manifestar indícios de como internalizamos uma ideia ou de como estão sendo formados seus pensamentos superiores. Tanto a Teoria das Situações quanto a Psicologia Histórico-Cultural concordam com isso. Assim, ao analisarmos o discurso podemos detectar indícios de aprendizagens, a formação e o estabelecimento de ZDP’s, a construção dos conceitos, a cooperação entre os alunos e entre estes e o professor, etc.

Existem várias ferramentas para analisar o discurso. No entanto, nesta pesquisa adotamos a apresentada por Mortimer e Scott (2002). Segundo essa ferramenta, pode-se analisar as interações sociais e a produção de significados a partir de uma estrutura analítica composta de cinco aspectos que relacionam o foco no ensino, na abordagem e nas ações:

Quadro 1 - Estrutura analítica de interações e produção de significado

Aspectos da análise					
i.	Focos do ensino	1.	Intenções do professor	2.	Conteúdo
ii.	Abordagem	3.	Abordagem Comunicativa		
iii.	Ações	4.	Padrões de interação	5.	Intervenções do professor

Fonte: Mortimer e Scott (2002, p.285)

A intenção do professor é manifestada na: 1) criação de um problema: o professor busca envolver o aluno na estória cientifica; 2) exploração da visão do aluno: o professor explora a visão do aluno sobre o ideias e fenômenos específicos; 3) introdução e desenvolvimento da estória científica: o docente disponibiliza as ideias cientificas no contexto social da sala de aula; 4) condução dos estudantes no trabalho com as ideias científicas com suporte no processo de internalização: o docente dá oportunidade aos escolares para que possam refletir sobre as novas ideias científicas apresentadas e produzirem significados particulares; 5) condução dos estudantes na aplicação das ideias científicas, com a transferência de responsabilidade: o docente dá suporte aos escolares para que possam aplicas as ideias científicas em vários contextos; 6) manutenção da narrativa: o professor deve prover comentários relacionados ao que foi ensinado de modo a auxiliar a manutenção da estória científica.

No que tange aos conteúdos, a ferramenta apresentada considera três fases: a descrição do tema a ser ensinado; a explicação sobre ele e a generalização. Quanto à abordagem comunicativa, o discurso entre professor e aluno e entre os alunos e seus pares, dividem-se basicamente em duas dimensões: discurso *dialógico* ou de *autoridade* e discurso *interativo* ou *não-interativo* (MORTIMER; SCOTT, 2002).

Segundo esses autores, o discurso *dialógico* ou de *autoridade* distinguem-se pelo fato de que no primeiro caso o professor considera o que o discente diz e coloca-se no ponto de vista do discente, assumindo duas vozes com vários pontos de vista; no segundo, o docente ouve o que o aluno diz, mas adota apenas o ponto de vista científico da situação.

Podemos perceber que os dois tipos de discurso coexistem e o professor pode aproveitar-se do primeiro para implementar o segundo. Com isso, o discente compreende melhor aquilo que está sendo ensinado, já que o seu discurso é considerado/modelado ainda no *discurso dialógico*. O discurso *interativo* é aquele no qual duas ou mais pessoas falam; enquanto no discurso *não-interativo* há a participação de uma única pessoa (MORTIMER; SCOTT, 2002). Do exposto acima, temos quatro classes de abordagem comunicativa:

Quadro 2 - Classes de abordagens comunicativas

Discurso Interativo	Dialógico	Professor e aluno exploram ideias, interagem entre si e discutem pontos de vistas distintos.
	De autoridade	O docente conduz os escolares por um caminho específico, direcionando sua fala e seu discurso até se chegar no conceito científico.
Discurso não-interativo	Dialógico	O docente reflete sobre suas falas, incorporando pontos de vistas distintos, destacando proximidades e afastamentos delas.
	De autoridade	O professor apresenta o ponto de vista científico, específico.

Fonte: Mortimer e Scott (2002)

Os padrões de interação em sala de aula, segundo Mortimer e Scott (2002), podem ser divididos da seguinte forma: cada fala dos indivíduos envolvidos é denominado de *turno*. Um conjunto de turnos formam os *segmentos* e o conjunto de segmentos é denominado de *episódio*. Para estes autores, alunos e professor alternam suas falas geralmente seguindo a tríade I-R-A (Iniciação do professor, Resposta do aluno, Avaliação do Professor). Entretanto, podem ocorrer situações nas quais:

> O professor apenas sustenta a elaboração de um enunciado pelo aluno, por meio de intervenções curtas que muitas vezes repetem parte do que o aluno acabou de falar, ou fornecem um *feedback* para que o estudante elabore um pouco essa fala. Essas interações geram cadeias não triádicas do tipo I-R-P-R-P... ou I-R-F-R-F... onde P significa uma ação discursiva de permitir o prosseguimento da fala do aluno e F um *feedback* para que o aluno elabore um pouco mais sua fala (MORTIMER; SCOTT, 2002, p.288)

A partir destes padrões de interações claros, podemos analisar mais precisamente como estão se dando as interações sociais em sala de aula, onde podem surgir seis tipos de intervenções do professor, a saber:

1) *Dando forma aos significados:* O docente introduz um termo novo, parafraseando a resposta dos estudantes e mostrando a diferença entre dois significados;

2) *Selecionando significados:* O docente pode considerar a fala de um estudante que se aproxime mais do que ele pretende ensinar, ignorando a fala de outros que apresentam respostas distantes do que ele pretende alcançar;

3) *Marcando significados chaves:* O professor repete o enunciado ou pede que o aluno o faça. Pode ser estabelecida uma sequência I-R-A com o objetivo de realçar parte do enunciado que merece mais destaque;

4) *Compartilhando significados:* repete a fala de um aluno que apresentou uma resposta correta com toda a turma ou pede que o próprio aluno o faça. O objetivo disso é permitir que toda a turma conheça a ideia apresentada pelo locutor e que se manifeste quanto a isso;

5) *Checando significados:* O docente pode pedir que o aluno explique melhor seu raciocínio, se necessário escrevendo sua ideia;

6) *Revendo o progresso da estória científica:* o docente sintetiza os resultados de uma situação particular, recapitulando atividades de aulas anteriores e revendo o progresso adquirido até o momento.

Ante o exposto, consideramos que a ferramenta ora apresentada, concatenada com a Análise Microgenética e amparada pelas teorias apresentadas nesta seção, podem trazer contribuições positivas para a análise da aprendizagem dos discentes quanto a aplicação de uma sequência didática relacionada ao objeto matemático função seno. Por considerar o termo "sequência didática" um tanto polissêmico, a subseção a seguir apresenta um balizamento do que consideramos como tal, bem como uma forma de estruturá-la de acordo com a literatura atual.

1.5- Sequência Didática e UARC

O processo de ensino e aprendizagem é bastante complexo e envolvente. Complexo porque em sua análise são considerados diversas variáveis que vão desde a tarefa dada pelo professor ao aluno com determinado objetivo didático, até questões sociais. É envolvente porque relaciona diversos personagens como o professor, os alunos, os coordenadores pedagógicos, etc.

Segundo Zabala (1998), este processo é composto pela interrelação entre planejamento, aplicação e avaliação escolar. Segundo este autor, a unidade mais elementar (ou básica) deste processo é denominada de atividade ou tarefa.

Nessa direção, para este autor:

> Podemos considerar atividades, por exemplo: uma exposição, um debate, uma leitura, uma pesquisa bibliográfica, tomar notas, uma ação motivadora, uma observação, uma aplicação, um exercício, o estudo, etc. Desta maneira, podemos definir as atividades ou tarefas como uma unidade básica do processo de ensino/aprendizagem (ZABALA, 1998, p.17)

É possível perceber a importância do professor no direcionamento das atividades e tarefas em sala de aula, pois é ele quem as propõem e quem deve ter um planejamento na seleção delas, de tal forma que o conjunto de atividades ou tarefas tragam maior contribuições para o processo de ensino e aprendizagem. Em geral, este conjunto de atividades ou tarefas é apresentado no ambiente escolar em forma de sequência, o que agrega um valor mais expressivo ao processo de ensino e aprendizagem.

Zabala (1998) afirma que “é preciso ampliar esta unidade elementar e identificar, também, como nova unidade de análise, as sequências de atividades ou sequência didáticas” (p.18). A sequência didática, segundo este autor, corresponde a “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (p.18).

Nesta esteira, é possível perceber que todas as tarefas apresentadas pelo professor são importantes, pois elas formam um conjunto que, se bem estruturadas e articuladas, podem facilitar a aprendizagem dos escolares. É necessário também que o professor tenha objetivo bem claro na propositura destas tarefas, exigindo planejamento e organização na elaboração das sequências didáticas.

Zabala (1998) considera que as atividades que compõem a sequência didática devem ser bem estruturadas e articuladas entre si, demonstrando que estrutura de construção e sequenciamento dela deve ser coesa à consecução dos objetivos educacionais propostos. Assim, na elaboração e estruturação da sequência didática desta pesquisa, foi adotado estrutura apresentada por Cabral (2017).

Segundo este autor, o educando reconstrói determinado conceito a partir de uma série de Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual – UARC’s. Neste cenário, as UARC’s advêm da comparação entre a reconstrução de um conceito relacionado a um objeto matemático com o procedimento utilizado na determinação da área de uma superfície S (CABRAL, 2017):

> A concepção que proponho aqui se fundamenta numa analogia da reconstrução conceitual de um objeto matemático com o procedimento adotado para se determinar a medida da área de uma superfície a partir de uma unidade previamente definida. Imaginemos que o conceito objeto de reconstrução seja representado, por analogia, a uma superfície S (CABRAL, 2017, p.39).

Para Cabral (2017), até que o discente chegue em determinado conceito (pela analogia citada, até que ele consiga preencher a superfície S), são necessárias várias unidades de área (por analogia, várias UARC’s) que devem ser ligadas umas às outras de forma bem estruturada e segundo uma ordem bem definida. Em cada uma delas, o aluno aprende um pouco e avança para a próxima unidade. Ao final, na enésima UARC, o discente conseguirá preencher totalmente a área S, isto é, já conseguirá alcançar o conceito proposto pelo professor.

Cabral (2017) aponta ainda que essas UARC’s são materializadas em uma sequência didática a partir de seis categorias, a saber:

1. *intervenção inicial* (I_i): Corresponde a primeira peça utilizada em uma espécie de jogo envolvendo o professor e o discente a partir de um discurso didático-pedagógico, na busca da

percepção ativa (de maneira empírica e intuitiva) das regularidades relacionadas a determinado conceito;

2. *intervenção reflexiva* (I_r): Geralmente apresenta-se em forma de pergunta. Nela, um ou mais aspectos relacionados ao conceito estudado são inquiridos dos educandos e servirão para facilitar a reconstrução final do conceito pretendido pelo professor;

3. *intervenção exploratória* (I_e): Busca aprofundar a percepção dos alunos quanto as respostas dadas por eles nas intervenções reflexivas. Para isso, o professor solicita que os estudantes executem determinados procedimentos, agindo ativamente em simulações, descrições, preenchimentos de tabelas, etc.

4. *intervenção formalizante* (I_f): A partir das intervenções anteriores, o professor considerar aquilo que os escolares conseguiram se apropriar do conceito trabalhado e, levando em consideração a percepção de regularidade empírico- intuitiva dos alunos, formaliza o conceito matemático construído até então intuitivamente, mas agora, com o rigor inerente à Matemática.

5. *intervenção avaliativa restritiva* (IA_r): Procura sondar o aprendizado do discente sobre o conceito matemático discutido avaliando-o a partir de duas perguntas fundamentais: (i) O que é o objeto de estudo? E (ii) Como se justifica a utilização de determinado algoritmo na resolução de dada questão?

6. *intervenção avaliativa aplicada* (IA_a): Nessa intervenção, o educando é levado a mobilizar as noções relacionadas ao conceito construído em resoluções de problemas e exercícios, tendo capacidade de ajustar as devidas habilidades em situações nas quais o objeto matemático é apresentado de forma plural, ou seja, em situações diversificadas.

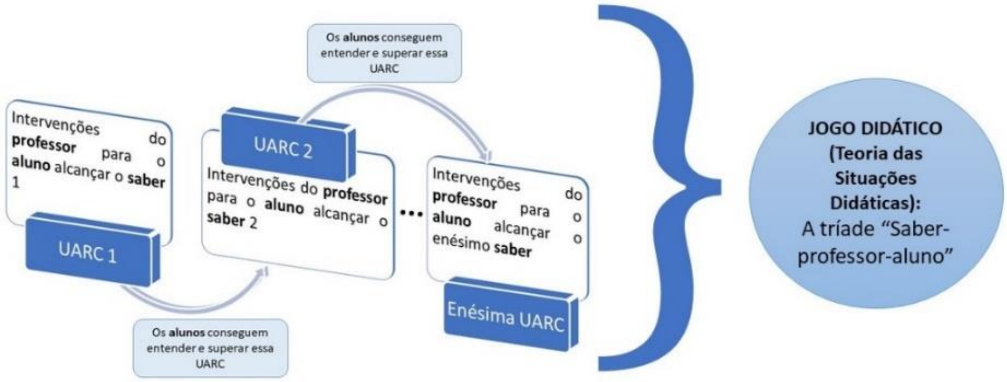
Além das intervenções acima, é de se esperar que na aplicação da sequência didática, os discentes apresentem dúvidas e questionamentos relacionados ao tema trabalhado, exigindo do professor intervenções que os direcionem à aprendizagem.

Assim, embora o pesquisador não tenha como apresentar por escrito essas intervenções (devido principalmente a heterogeneidade da turma e dos personagens envolvidos), ele deverá estar apto a propor intervenções orais pontuais, visando evitar que os discentes se afastem do objetivo proposto na sequência didática. Cabral (2017) denomina este tipo de intervenções de *intervenções orais de manutenção objetiva* (I-OMO), que tem como objetivo “modular as aproximações e distanciamentos dos alunos em relação aos objetivos de aprendizagem” (p.45).

O conjunto formado por várias *I-OMO’s* assemelha-se com uma sequência didática paralela, pois as intervenções orais propostas pelo professor têm objetivos didáticos claros. Vale destacar que a estrutura apresentada por Cabral (2017) se relaciona com as teorias apresentadas no corpo deste texto, pois consideram os conhecimentos adquiridos pelos alunos e as falas destes, na construção do seu próprio conhecimento.

É possível perceber que a estrutura encontrada em Cabral (2017) guarda estreita relação com o *jogo didático* encontrado na Teoria das Situações, conforme a Figura 1:

Figura 1 - Relação entre as UARC's e o Jogo Didático



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

A Figura 1 indica que cada UARC contém intervenções do professor que devem ser entendidas pelos alunos para que estes possam adquirir um saber. Ou seja: o professor deseja ensinar um saber e o aluno deseja aprendê-lo. Esta relação é típica do *jogo didático* encontrado na teoria de Brousseau. Ante a harmonia da estrutura apresentada em Cabral (2017) com as teorias ora apresentadas, a adotamos na elaboração e estruturação da sequência didática dessa pesquisa.

1.6- Método utilizados na Pesquisa

A presente pesquisa é classificada no método de estudo de caso, que conforme Gil (2010, p.37), consiste em um "estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetos, de maneira que permita seu amplo e detalhado conhecimento, tarefa praticamente impossível mediante outros delineamentos". As etapas, os procedimentos metodológicos e a Análise Microgenética dessa pesquisa serão detalhadas na seção 5.

2- O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO SENO

2.1- Revisão da literatura

Para sondar o contexto atual relacionado ao processo de ensino e de aprendizagem da função seno, fiz uma pesquisa bibliográfica procurando inicialmente dissertações e teses com as palavras-chaves "função seno", "funções seno" em sítios acadêmicos como o banco de dissertações do PROFMAT, o Google Acadêmico e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), delimitando a pesquisa entre os anos de 2012 até o ano de 2018.

Nessa pesquisa inicial, foram encontradas poucas pesquisas. Considerando o fato de que a função seno nada mais é do que uma função trigonométrica, resolvi expandir a pesquisa para teses, dissertações e demais pesquisas acadêmicas, buscando como palavras-chaves "funções trigonométrica" e "função trigonométrica", mantendo o intervalo de tempo assinalado. Com esta expansão, selecionei 11 pesquisas relacionadas ao objeto matemático pesquisado.

Ao analisar esses estudos, percebi semelhança entre alguns deles. Com isso, para uma melhor compreensão, resolvi agrupar estes estudos em três categorias, conforme o Quadro 3:

Quadro 3 - Síntese dos estudos revisados

CATEGORIA DOS ESTUDOS	DEFINIÇÃO	AUTOR/ANO	TÍTULO
DIAGNÓSTICOS	Não há intervenção do autor quanto ao processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas, embora eles possam recolher e analisar dados (geralmente via pesquisa de campo) referentes a este processo. Geralmente são relatadas as dificuldades dos discentes, por exemplo, mas sem intervenção dos autores.	Baldini e Cyrino (2012)	Função seno – uma experiência com o software GeoGebra na formação de professores de matemática.
		Corradi (2013)	Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno: uma experiência com alunos do 2º ano do ensino médio.
		Feijó (2018)	Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal.
EXPERIMENTAIS	Estudos em que há intervenção do autor no processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas. Nesses estudos, há relatos de experimentos didáticos e geralmente é proposta (ou apresentada) uma metodologia de ensino validada na pesquisa ou um produto que pode ser	Pedroso (2012)	Uma proposta de ensino da Trigonometria com uso do *Software* Geogebra.
		Figueiredo (2013)	Atividades práticas integradas ao componente curricular: o software Geogebra no ensino de funções trigonométricas.
		Maia e Faria (2013)	O ensino de Matemática na educação profissional: a relação entre funções trigonométricas e o software GeoGebra.
		Santos (2014)	O uso da modelagem para o ensino da função seno no Ensino médio.

	utilizado como recurso didático em sala de aula.	Grando e Preussler (2014)	Funções trigonométricas seno e cosseno: das representações semióticas à formação de conceitos.
		Silva (2015)	Funções trigonométricas elementares e tecnologia: algumas aplicações no currículo da rede pública estadual de São Paulo.
		Uebel (2015)	Relacionando a função seno e fenômenos periódicos: uma experiência com mídias digitais.
TEÓRICO	estudos em que não há intervenção do autor quanto ao processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas. Neles, os autores não recolhem e nem analisam dados obtidos em pesquisas de campo, apenas fazem análises de estudos bibliográficos ou levantamento de hipóteses que podem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas.	Franken (2015)	Música, Matemática e tecnologias: um caminho para o ensino de funções trigonométricas.

Fonte: Pesquisa Bibliográfica (2018)

2.1.1- Estudos Diagnósticos

Baldini e Cyrino (2012), realizaram pesquisa com objetivo de discutir como 20 professores de Matemática da educação básica do Paraná lidam com questões conceituais relacionadas à função seno. Em sua pesquisa, estas autoras utilizaram o software GeoGebra e adotaram como fundamentação teórica a investigação matemática. A partir da utilização de software os docentes pesquisados puderam investigar e discutir estratégias para resolver as questões propostas e sondar a influência dos parâmetros a, b, c e d em funções do tipo $f(x) = a.sen(bx + c) + d$.

Segundo as autoras, os professores participantes apresentaram maior compreensão dos conceitos relacionados à função seno quando manipulavam o software GeoGebra, sendo que alguns deles “comentaram que é difícil fazer isso na mídia lápis e papel, pois seria um trabalho exaustivo para que os estudantes percebessem estas regularidades” (p.15). Com isso, as autoras concluíram que os docentes manifestaram a importância do GeoGebra no processo de compreensão e elaboração de tarefas investigativas, que podem ser utilizadas em sala de aula.

Corradi (2013), fez uma pesquisa que contou com o auxílio do *software* GeoGebra e teve como objetivo sondar quais as contribuições que a utilização de investigação matemática[6], mediada pelo pensamento reflexivo pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem da função seno e cosseno. Os dados foram obtidos a partir de aulas com o uso do referido software no Centro Federal de Ensino Técnico de Minas Gerais (CEFET/MG) e no Instituto Santo Antônio de Pádua (ISAP).

Foram considerados os cadernos de campo, registros dos alunos e questionários, bem como áudios que posteriormente foram transcritos e analisados a partir da análise do conteúdo e análise da pesquisa qualitativa. Nesse contexto, a aprendizagem dos discentes foi percebida a partir da análise dos diálogos transcritos após a gravação das aulas, os quais permitiram a autora verificar situações envolvendo o pensamento reflexivo. Segundo a autora, este tipo de pensamento contribuiu para a aprendizagem dos escolares pesquisados, a partir do contraste entre as conjecturas e as conjecturas reformuladas na direção da aprendizagem do conteúdo trabalhado, conforme podemos ver:

> A reformulação de uma conjetura no CEFET: Conjectura inicial do sexto encontro: O período de funções do tipo $f(x) = sen\ (B_1x)\ +\ cos\ (B_2x)$, com os valores do parâmetros B sendo uma fração e o outro um número inteiro, seria igual a $2\pi/|B|$, sendo B a fração. Conjectura reformulada: Grupos 1, 4, 5, 6 – com interferência da professora pesquisadora: O período de funções do tipo $f(x) = sen\ (B_1x)\ +\ cos\ (B_2x)$, será dado pelo menor múltiplo comum dos períodos das funções seno e cosseno. Grupo 6 – Visando a um novo contexto (produto de funções seno e cosseno): O período de funções do tipo $f(x) = sen\ (B_1x)\ +\ cos\ (B_2x)$, será dado pela fórmula $\frac{2\pi}{|B_1B_2|}$, sendo $B_1\ = a$ e $B_2\ = \frac{a}{b}$, ou seja, o valor de B_1 deveria ser igual ao valor do numerador da fração do parâmetro. Grupo 9 – reformulação parte numérica para gráfica: O período de funções do tipo $f(x) = sen\ (B_1x)\ +\ cos\ (B_2x)$, e $g(x) = sen\ (B_1x)\ .\ cos\ (B_2x)$ será encontrado pela diferença dos valores do domínio, onde os gráficos da função criada e daquelas que a compõe se encontrarem (CORRADI, 2013, p.129)

Considerando o contraste existente, a autora analisou as conjecturas dos escolares que indicaram a investigação matemática, mediada pelo pensamento reflexivo contribui para a evolução das habilidades dos estudantes, os quais demonstraram maior autonomia na construção do seu próprio conhecimento, o que, segundo a autora, pode ser evidenciado na elaboração de conjecturas reformuladas pelos estudantes (CORRADI, 2013).

Assim, os estudantes tiveram a oportunidade de criar estratégias para desenvolver teses e previsões que em dado momento foram refutadas ou confirmadas, evidenciando que a

[6] Ato em que os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem em Matemática desperta curiosidade, propõe sugestões e observações, criando o hábito de pesquisar e constrói consecutividade no ciclo das ideias, interações, argumentações sobre seus questionamentos e suas teses (CORRADI, 2013).

atividade investigativa é um contexto rico de mobilização e desenvolvimento do pensamento reflexivo, dado que ela pode gerar um cenário no qual os alunos podem usar outros conhecimentos matemáticos na resolução de uma questão proposta e assim, ter maior capacidade de argumentação nas respostas dadas (CORRADI, 2013).

Feijó (2018) pesquisou as dificuldades e obstáculos relacionados ao aprendizado de trigonometria mediante a elaboração de uma matriz de referência, que serviu como base de uma avaliação diagnóstica contendo questões de múltipla escolhas e entrevistas com os discentes do ensino médio. Essa matriz levou em consideração as habilidades e competências requeridas nas matrizes nacionais e no Enem, além das dificuldades já apresentadas na literatura quanto a este objeto matemático.

O questionário elaborado continha 15 questões e foi primeiramente aplicado a alunos de Cálculo 1 da Universidade de Brasília. A partir da Teoria de Resposta ao Item (TRI) e da Teoria Clássica dos Testes (TCT) houve a necessidade de a autora fazer ajustes em algumas questões. Após os devidos ajustes, o questionário foi aplicado a 22 turmas do 2º ano do ensino médio de 3 escolas públicas do Distrito Federal, totalizando 556 alunos. Segundo a autora, a TRI assegura que os itens (questões) podem ser classificados de acordo com a discriminação (parâmetro a) e pela dificuldade (parâmetro b), conforme o Quadro 4:

Quadro 4 - Classificação para os índices de discriminação e dificuldades na TRI

Valores de α	Discriminação	Classificação	Valores de b
$\alpha = 0$	Nenhuma		
$0,0 < \alpha \leq 0,35$	Muito baixa	Muito fáceis	Até -1,28
$0,35 < \alpha \leq 0,65$	Baixa	Fáceis	De -1,27 a -0,52
$0,65 < \alpha \leq 1,25$	Moderada	Medianos	De -0,51 a 0,51
$1,35 < \alpha \leq 1,70$	Alta	Difíceis	De 0,52 a 1,27
$\alpha > 1,70$	Muito alta	Muito difíceis	1,28 ou mais

Fonte: Feijó (2018, p.33)

Feijó (2018) separou os discentes em cinco grupos (levando em consideração o tema e/ou as habilidades e obstáculos requerido em cada item), os quais apresentavam as seguintes características:

- Grupo 1: Apresentaram um bom desempenho em questões envolvendo apenas uma razão trigonométrica e um desempenho inferior quando as questões envolviam mais de uma razão trigonométrica.
- Grupo 2: Esqueceram ou desconhecem a necessidade do sinal negativo para se referir às razões trigonométricas no ciclo orientado (nos quadrantes em que este sinal é necessário); apresentaram dificuldades em identificar corretamente as coordenadas de um ponto no 3º

quadrante; há uma lacuna no aprendizado da trigonometria dos discentes quando os ângulos estudados são maiores do que 90°.

- Grupo 3: Apresentaram dificuldades em interpretar gráficos de funções trigonométricas, pois "os gráficos das funções seno e cosseno parecem não ser representativo para que a análise seja feita com base neles (p. 42) "
- Grupo 4: Conseguiram identificar corretamente o intervalo apresentado e "enrolar" a reta real no ciclo trigonométrico. Porém, quando solicitado que fizessem uma análise do comportamento de funções trigonométricas em um dado intervalo, seus desempenhos caíram, sendo possível "inferir que os alunos apresentam dificuldade na compreensão de comportamentos e propriedades das funções trigonométricas em um dado intervalo" (p.44).
- Grupo 5: Conseguiram identificar corretamente pontos sobre o ciclo trigonométrico desde que estes fossem ângulo agudo. Apresentaram dificuldades em analisar pontos do 3° quadrante; não apresentam um bom desempenho quando foi preciso relacionar duas razões trigonométricas, assim como nos casos em que o ângulo analisado não está na base horizontal do triângulo, "a maioria dos alunos não faz conexões com o gráfico das funções trigonométricas para responder as questões, principalmente aquelas que questionam comportamentos e/ou propriedades das funções" (p.44).

A partir dos resultados apresentados pelos cinco grupos, Feijó (2018) levantou onze questionamentos relacionados a alguns itens do questionário aplicado aos discentes:

> Item 2: A dificuldade apresentada no item é decorrente da necessidade de se trabalhar com duas razões trigonométricas ou decorre do fato de um dos ângulos em questão não estar na base horizonta do triângulo? Item 3: Há clareza na definição de radiano? Item 5: No item há compreensão do enunciado? Se sim, o aluno pensa no círculo trigonométrico para responder? Como ele vê a resposta? Fixa-se o ângulo? Para o aluno, α é só ângulo ou pode ser número real qualquer? Remete-se ao gráfico das funções trigonométricas para a análise? Item 6: Qual a imagem gráfica o aluno tem das funções seno e cosseno? Item 7: No item, o aluno remete-se apenas ao círculo trigonométrico? Remete-se ao gráfico das funções trigonométricas? O fato de ter duas funções relacionadas atrapalha? Identificam corretamente o que são raízes? Identificam corretamente que quando um produto é igual a zero ao menos um dos fatores precisa ser igual a zero? Item 10: As coordenadas dos pontos no 2º quadrante são interpretadas como equivalentes às coordenadas dos pontos no 1º quadrante? Item 11: Há referência ao teorema de Pitágoras? Item 12: Quais são as características mais marcantes das funções seno e cosseno? Como essas funções são visualizadas? Tem-se ideia clara de que essas funções são periódicas? E limitadas? Como é visto o domínio dessas funções? Para o aluno, como ocorrem os deslocamentos horizontais e verticais do gráfico? Item 13: Quais são as características mais marcantes das funções seno e cosseno? Item 14: As coordenadas dos pontos no 2º quadrante são vistas como equivalentes às coordenadas dos pontos no 1º quadrante? Item 15: O aluno limita o círculo trigonométrico ao intervalo $[0.2\pi]$? O alto índice de marcações na alternativa D ocorreu por memória visual ao $2k\pi$? (FEIJÓ, 2018, p.45)

A partir deles, a autora selecionou 22 alunos dentre os respondentes do questionário para participarem de uma entrevista com o objetivo de confirmar ou rechaçar estas hipóteses. A partir das análises das entrevistas e de análise global da pesquisa, Feijó (2018) conclui que os discentes conseguem: i) identificar triângulos retângulos semelhantes e seus ângulos internos; ii) não conseguem fazer referência ao teorema de Pitágoras como causa (ou consequência) da relação fundamental, não sabendo assim explicar sua validade; iii) não conseguem compreender (ou definir) o radiano; iv) não conseguem enunciar ou apresentar propriedades e/ou características das funções trigonométricas, tais como: periodicidade, amplitude, domínio, etc.; v) não conseguem definir bem ângulos negativos; vi) apresentam dúvidas quanto ao que seja um ponto P dado por $P\ = (cos\ \alpha;\ sen\ \alpha)$.

2.1.2- Estudos Experimentais

Pedroso (2012) realizou uma pesquisa baseada em um estudo de caso com 45 discentes de uma escola particular de Porto Alegre (RS). Posteriormente o estudo foi reduzido para sete alunos. Nela, a pesquisadora tinha duplo objetivo: i) apresentar uma proposta de ensino de trigonometria para estudantes do ensino médio com a utilização da geometria dinâmica, a partir da utilização do software GeoGebra e ii) avaliar a aprendizagem deste conteúdo matemático mediante uso de uma sequência de ensino em um ambiente informatizado e dinâmico.

As tarefas propostas aos estudantes faziam parte de uma sequência de ensino, tendo como base teórica a Teoria dos Campos Conceituais, de Gerard Vergnaud, que considerou a análise, identificação e interpretação de 32 conceitos-em-ação e teoremas-em-ação encontrados nas respostas dos discentes. O Quadro 5 apresenta os conceitos-em-ação e teoremas-em-ação encontrados pela autora e a validação deles à luz do referencial teórico já citado:

Quadro 5 - Conceitos-em-ação e Teoremas-em-ação

CONCEITOS-EM-AÇÃO OU TEOREMAS-EM-AÇÃO	**VERDADEIRO / FALSO**
1. Se os lados do triângulo mudam, então seno, cosseno e tangente também mudam	Falso
2. Se os ângulos são diferentes, então as alturas [cateto oposto] também são diferentes.	Falso
3. A soma dos ângulos internos de um triangulo é dada pela soma dos ângulos que aparecem na figura.	Falso
4. Cateto oposto é aquele que está posicionado verticalmente, cateto adjacente é aquele que está posicionado horizontalmente e hipotenusa é o segmento que une os extremos desses segmentos.	Falso
5. A razão entre as medidas de dois lados do triangulo retângulo resulta na medida do terceiro	Falso
6. Se um ângulo mede um valor maior do que 360º então desconta-se as voltas completas e marca-se a medida restante do círculo	Verdadeiro

7. Se um ângulo de 360º determina um arco de uma volta completa no círculo trigonométrico, então não existem ângulos maiores do que 360°.	Falso
8. Se um ângulo é negativo, então diminui-se o módulo deste valor do ângulo de 360° e marca-se a medida restante (para $0° > \alpha > -360°$).	Verdadeiro
9. Se no círculo trigonométrico mostrado na tela só aparece ângulos positivos, então não existem ângulos negativos.	Falso
10. Se os triângulos retângulos são semelhantes, então a razão entre lados correspondentes será igual.	Verdadeiro
11. Se um triângulo é retângulo, então a relação a ser utilizada é o teorema de Pitágoras	Verdadeiro
12. O número de vezes que um arco cabe em um círculo é dado pela razão entre 360° e o ângulo correspondente do arco.	Verdadeiro
13. Do ponto A= (1,0) até o ponto P= (0,1) tem-se um arco de medida 1, então cabem 4 arcos iguais a esse no círculo.	Falso
14. Um radiano é igual a π radianos	Falso
15. O quadrado de um número é igual ao número multiplicado por 2.	Falso
16. Se seno e cosseno no círculo trigonométrico podem ser vistos pelas medidas dos segmentos, então seno e cosseno de 0°, 90°, 180°, 270° e 360° são sempre 1.	Falso
17. Os valores de $sen 0°, sen 90°, sen 180°,$ [e assim por diante] são dados pelas medidas dos arcos determinados pelos respectivos anglos.	Falso
18. Se $senax = b$ então $senx = \frac{b}{a}$, com $a \neq 0$.	Falso
19. O ponto P está no 1° quadrante, P_1 está no 2° quadrante e é simétrico a P com relação ao eixo y. Sendo assim, $A\hat{O}P_1 = 90° - A\hat{O}P + 90°$.	Verdadeiro
20. O ponto P está no 1° quadrante, P_1 está no 2° quadrantes e é simétrico a P com relação ao eixo y. Sendo assim, $A\hat{O}P_1 = 180° - A\hat{O}P$ ou $A\hat{O}P_1 = A\hat{O}P + A\hat{O}P + A\hat{O}P$.	Verdadeiro
21. O ponto P está no 1° quadrante, P_3 está no 4° quadrante e é simétrico a P com relação ao eixo x. Sendo assim, $A\hat{O}P_3 = 270° + A\hat{O}P$ ou $A\hat{O}P_3 = 360° - A\hat{O}P$.	Verdadeiro
22. O ponto P está no 1° quadrante do círculo trigonométrico, P_1está no 2°, P_2está no 3° e P_3está no 4° quadrante. Se forem traçados segmentos unindo os pontos e formar-se um retângulo, então os quatro pontos são simétricos entre si.	Verdadeiro
23. Se $cosax = -1$, então $ax = 180°$, logo $x = \frac{180°}{a}$.	Verdadeiro
24. Resolver $cosx = cos1$ é o mesmo que resolver $cosx = 1$.	Falso
25. $Sen\alpha$ é o mesmo que $sen = \alpha$, com α medido em radianos.	Falso
26. Se -2 é o simétrico do arco de medida 2 em relação ao eixo x, então $\cos(-2) = \cos(2)$.	Verdadeiro
27. Se -2 é côngruo ao arco de medida 4,28 obtido por $6{,}28 - 2 = 4{,}28$, então $\cos(-2) = \cos(4{,}28)$.	Verdadeiro
28. $j_1(x) = sen(x - \left(\frac{\pi}{2}\right))$ é uma reflexão em torno do eixo x do gráfico de $j_3(x) = sen(x + \left(\frac{\pi}{2}\right))$.	Verdadeiro
29. Se uma função trigonométrica for multiplicada por -1, então as alturas se alternam ou muda [desloca horizontalmente] o período.	Verdadeiro
30. O período começa sempre em $x = 0$.	Falso
31. O período é o inverso da frequência, sendo $f = C$ e $P = \frac{1}{C}$.	Falso
32. Período não muda (sempre $P = 2\pi$).	Falso.

Fonte: Pedroso (2012, p.225-227).

Segundo Pedroso (2012), os teoremas-em-ação revelaram um cenário no qual ela pôde discutir com os escolares individualmente. Neste cenário, os discentes puderam refletir sobre a temática e passaram a agir de forma mais ativa, tornando as aulas mais dinâmicas. O professor, por seu turno, assumiu o papel de mediador da aprendizagem, favorecendo o trabalho cooperativo entre os estudantes. Além disso, a autora aponta que a sequência de ensino, mediada pela utilização do software GeoGebra, favoreceu a aprendizagem de conceitos da trigonometria, como os relacionados às funções trigonométricas seno e cosseno. O contexto criado foi propício à observação e compreensão das relações entre os elementos de uma construção geométrica, onde os discentes puderam experimentar suas hipóteses e elaborar suas conclusões.

Figueiredo (2013) fez uma pesquisa na qual se propôs a identificar elementos constituintes das atividades de práticas relacionadas à construção das competências pedagógicas concernentes à aprendizagem das funções trigonométricas, tendo como personagens três estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul. Na sua fundamentação teórica, o autor considerou os trabalhos de Tardif, Zabala, Shulman e Ball.

A pesquisa consistiu na aplicação de uma sequência didática elaborada no software GeoGebra, que continha atividades relacionadas à trigonometria básica com a finalidade de que os futuros professores de Matemática pudessem alcançar um conhecimento prático da utilização do software e posteriormente aplicassem esse conhecimento em suas aulas. Assim, os alunos receberam *applets*[7] previamente criados para o GeoGebra, a partir dos quais eles deveriam manipular com a finalidade de investigar e interagir com o software na formação dos conceitos estudados. Segundo o autor, o *software* Geogebra e a sequência didática, trouxeram contribuições relevantes para a construção dos conceitos relacionados à trigonometria no triangulo retângulo, ciclo trigonométrico e gráfico das funções trigonométricas além da revisão destes. Além disso, segundo os autores, a utilização da "geometria dinâmica pode, e deve ser inserido nas disciplinas de matemática como alternativa a metodologia tradicional para integrar as atividades práticas ao componente curricular" (FIGUEIREDO, 2013, p.1).

Maia e Faria (2013) fizeram uma pesquisa com o objetivo de discutir uma maneira de integrar formação profissional à formação dos estudantes utilizando o ensino de funções trigonométricas e o software GeoGebra. Em sua pesquisa, os autores fizeram um levantamento bibliográfico sobre o assunto, seguido da análise de três livros didáticos, o que lhes permitiu a construção de uma sequência didática sobre as funções trigonométricas, a qual foi aplicada em uma turma do 2º ano do ensino médio do Instituto Federal do Rio Grande do Norte (IFRN).

Segundo os autores, a análise dos livros didáticos apresentou relações do conteúdo matemático com a vida profissional, apresentando questões envolvendo funções trigonométricas contextualizadas e com estreitas relações com o cotidiano dos escolares.

[7] Pequeno software que executa uma atividade específica, dentro (do contexto) de outro programa maior (como por exemplo um web browser), geralmente como um Plugin. O termo foi introduzido pelo AppleScript em 1993 (FRANKEN, 2015, p.16)

Entretanto, pelo fato de os livros didáticos não apresentarem a mesma oportunidade de interação entre aluno e objeto matemático, torna-se mais dificultoso ou tardio a aprendizagem dos conteúdos dispostos neles, se comparado com a utilização do software GeoGebra.

A sequência didática aplicada continha 4 atividades que foram aplicadas em 8 aulas; porém, na pesquisa analisada, os autores fizeram referência a apenas uma, que tinha como objetivo ofertar condições para que os discentes pudessem entender, a partir de situações práticas e com o auxílio do software, a aplicação dos fenômenos periódicos modelados matematicamente. Foi observado que os discentes apresentaram maior interesse e desempenho no processo de aprendizagem escolar. Além disso, o GeoGebra permitiu que os escolares pudessem articular melhor suas ideias e raciocínios na busca de soluciona situações diversas, articulando a teoria à prática (MAIA; FARIA, 2013).

Santos (2014), fez uma pesquisa com 15 alunos de uma escola pública de São Paulo com objetivo de analisar os efeitos da utilização da modelagem matemática para uma aprendizagem mais significativa e avaliar uma proposta de abordagem para a modelagem, mediante etapas e fases. A metodologia utilizada foi de característica qualitativa, a partir da observação dos participantes. O suporte teórico considerou as concepções de modelagem de Beltrão, Bassanezi e na teoria da aprendizagem de David Ausubel. Esse pesquisador utilizou-se de 6 aulas para discutir em sala uma maneira de elaborar um modelo para resolver uma situação envolvendo a função seno. Nas ministrações das aulas, o autor dividiu sua proposta de ensino, com objetivo de construir um modelo matemático, em três fases, a saber: i) Apresentação do conteúdo matemático (definições, propriedades, etc.) através da história da Matemática; ii) Apresentação de modelos matemáticos envolvendo o assunto de funções trigonométricas e iii) construção com os discentes de um modelo matemático sobre a situação-problema envolvendo o movimento do sol.

Na aplicação das atividades, o autor dividiu a turma em 6 duplas e uma terna de alunos. As atividades apresentadas continha 5 questões: a 1ª tratava de simetria de arcos no ciclo; a 2ª relacionava arcos com suas projeções no eixo das ordenadas; a 3ª, tratava da construção do gráfico da função seno; a 4ª tratava do cálculo do seno no ciclo trigonométrico a partir da razão trigonométrica, com o auxílio de transferidor e régua, além do preenchimento de uma tabela com os valores dos senos de alguns ângulos calculados e, por fim, a 5ª questão, também tratava da construção do gráfico desta função trigonométrica. O Quadro 6 apresenta as análises da aprendizagem dos discentes encontradas em Santos (2014). Por questão didática, resolvi apresentar os comentários conforme a autora dividiu os discentes em sala de aula.

Quadro 6 - Resultados apresentados pelos estudantes

QUESTÃO	DUPLA 1	DUPLA 2	DUPLA 3	DUPLA 4	DUPLA 5	DUPLA 6	TERNA
QUESTÃO 1	Tiveram dificuldades no uso do transferidor para a marcação do seno, no ciclo trigonométrico.	Conseguiram utilizar o transferidor corretamente, utilizando os conhecimentos prévios na resolução questão.	Fizeram a construção de várias retas que serviu de auxílio para que eles pudessem resolver a questão. Porém, na hora da resposta, responderam incorretamente.	Um dos discentes argumenta a questão de a distância ser sempre positiva. Esse questionamento foi superado e os discentes acertaram a questão, demonstrando um aprendizado significativo.	Tiveram dificuldades na manipulação do transferidor, marcando incorretamente as projeções dos arcos sobre o eixo y.	Construíram os arcos simétricos, pois tinham o costume de indagar mais o professor, que os auxiliavam na construção do seu conhecimento.	Tiveram dificuldades na utilização do transferidor e não conseguiram acertar o que se pedia no comando da questão, apesar do auxílio do professor.
QUESTÃO 2	Apresentaram dificuldades por não compreenderem bem o conceito de ângulos complementares, importante para a resolução desta questão	Não conseguiram acertar, o que pode demonstrar que a sua âncora de aprendizagem não foi bem construída.	Conseguiram utilizar os conhecimentos prévios na resolução da questão, demonstrando um conhecimento significativo.	Apresentaram dificuldades na interpretação da questão e no significado de região angular, implicando em resposta incorreta.	Discutiram as noções de ângulos complementares e suplementares. Após isso, a dupla consegue utilizar os conceitos discutidos na resolução da questão proposta.	A dupla consegue utilizar conhecimentos prévios de ângulos complementares e suplementares na resolução da questão.	Apresentaram a resposta corretamente, utilizando os conhecimentos prévios como os de ângulos complementares e suplementares.
QUESTÃO 3	Apresentaram dificuldades na passagem dos dados obtidos no ciclo trigonométrico para o gráfico, apresentando uma aprendizagem com poucas âncoras de conhecimentos.	Conseguiram representar corretamente a função seno, indicando que a dupla teve uma aprendizagem significativa quanto a este objeto matemático.	Alcançaram a resposta correta, pois tinham apresentado em aulas passadas um certo domínio de como representar pares ordenados no gráfico. Com isso, a dupla demonstrou ter tido uma	Possivelmente utilizaram-se do cálculo mental, mesmo assim, conseguiram construir e compreender o significado de pontos extremos do gráfico desenhado por eles.	Também apresentaram dificuldades na passagem dos dados obtidos no ciclo trigonométrico para o gráfico.	Conseguiram construir o gráfico corretamente, pois sempre que necessário, a dupla fazia indagações ao professor para avançar em sua aprendizagem.	Apresentaram dificuldades na representação gráfica dos pares ordenados, necessários na construção do gráfico.

			aprendizagem significativa.				
QUESTÃO 4	Apresentaram dificuldades na construção das figuras geométricas, de onde poderiam encontrar a resposta.	Tiveram dificuldades na representação gráfica do que pedia, indicando que não houve uma ruptura das estruturas cognitivas anteriores em direção à novas estruturas cognitivas.	A dupla consegui representar corretamente o que pedia. Também, conseguiu calcular os valores dos senos de forma correta, pois utilizaram-se de conhecimentos anteriores na resolução da questão.	Apesar de terem feito cálculos mentais, a dupla conseguiu resolver corretamente a questão.	Não construíram as representações geométricas, alegando falta de habilidades para o desenho. Segundo o autor, isso pode estar relacionado a necessidade de mudança de postura na tarefa escolar, requerendo uma atitude mais ativa dos escolares.	Conseguiu construir corretamente o ciclo trigonométrico e calcular o que se pediam mobilizando conhecimentos prévios demonstrados em suas respostas.	Apresentaram dificuldades em distinguir os valores dos senos dos arcos notáveis, implicando em construções geométricas erradas.
QUESTÃO 5	Embora esta dupla não tenha feito corretamente a questão anterior, ela conseguiu construir um gráfico muito semelhante ao gráfico da função seno.	Construiu o gráfico da senóide, mas não associou esta construção com conhecimentos anteriores, demonstrando uma aprendizagem não-significativa.	A dupla conseguiu fazer o esboço do gráfico corretamente, inclusive calculado os valores dos senos pedidos corretamente, demonstrando um conhecimento significativo.	Nesta dupla, os discentes construíram o gráfico corretamente, embora não tivesse tido muito diálogo entre ela e o professor.	Apresentaram dificuldades na representação gráfica da função seno. Na construção gráfica desta função, ao invés da dupla fazer o gráfico em forma de onda, eles fizeram em forma de "bicos", demonstrando que eles não conseguiram ter uma aprendizagem significativa.	A dupla conseguiu representar corretamente o gráfico da função seno, calculando os valores deste corretamente. Assim, os discentes desta dupla demonstraram ter uma aprendizagem significativa da função seno.	Os alunos desta dupla demonstraram ter tido uma aprendizagem significativa no tocante a função seno, pois conseguiram representar e compreender conceitos relacionados a esta função, pois estava ancorado em conhecimentos prévios.

Fonte: Santos (2014)

Santos (2014) aponta que embora os discentes tenham apresentado dificuldades em seu aprendizado (conforme expresso no Quadro 6), a partir da utilização da modelagem matemática, eles demonstraram ter tido uma aprendizagem mais significativa do conceito estudado. O autor fez essas conclusões a partir da observação da aprendizagem demonstradas pelos discentes na aplicação e construção do modelo matemático citado e das considerações que levaram em consideração a Teoria da Aprendizagem Significativa.

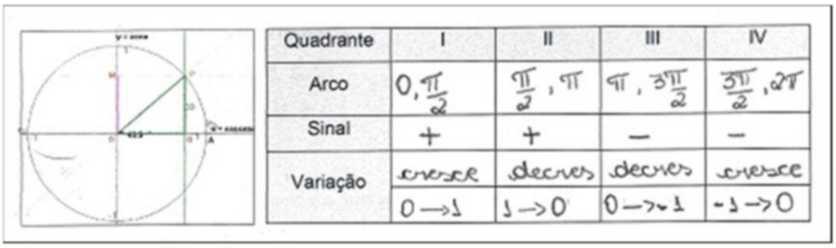
Grando e Preussler (2014), fizeram uma pesquisa com objetivo de apresentar os resultados de uma experiência desenvolvida com 27 alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola pública de São Luiz Gonzaga/RS. Nelas, foi analisado a formação do conceito das funções seno e cosseno no ciclo trigonométrico e de como diferentes representações podem contribuir para a formação destes conceitos matemáticos.

Para isso, estes pesquisadores elaboraram uma sequência didática composta de 16 atividades relacionadas às funções seno e cosseno. Foram utilizados os *softwares* Cabri-Géomètre II e Graphmatica como instrumentos de mediação de ensino. A pesquisa teve como suporte teórico a teoria histórico-cultural, de Vygotsky, e a teoria dos registros de representação semiótica, de Raymond Duval. Os instrumentos de análises foram as observações feitas a partir da transcrição dos áudios e vídeos, que haviam sido gravados na aplicação da sequência didática. Os autores afirmaram que os discentes conseguiram se apropriar do conceito de função seno, apresentando para isso a transcrição das falas dos discentes, conforme segue:

> A 2 – Ah, lembra que aqui é 270 (indicam a figura 1 na tela do computador), aqui não tem 225! 270 como é que eu vou fazer? A 1 – É foi isso que ele disse ó, assim ó. A 2 – Se for solicitado para calcular o valor do cosseno de 225, qual a medida que você poderia atribuir ao cosseno sem calcular, apenas movimentando a figura? (O aluno relê a questão). A 2 – Ah, mas é o ângulo, não é! O ângulo de 270. Ah, mas aqui zera. Aqui é 270 né. 270! 270! Aqui é 180, né. Que medida você atribuiu, sem calcular, apenas. A 1 – Não sei como que é! Eu não sei por que aqui zera, ó, vai ficar 180 aqui. Ô professor! Olha isso aqui. Eu não sei, eu vou adivinhar que aqui é 225? P – Não. Não é. P – Tá! Mas e se você não conseguisse marcar o 225 ali, o que vocês iriam concluir para o valor do cosseno de 225°? A 1 – É o cateto adjacente, a medida aqui. A 2 – Tá, então escreve isso aqui. P – Só isso! [...] A 2 – Tá meu, o de 330 também a mesma coisa. A 1 – Também! A 2 – Quanto que deu o seno de 330? A 1 – Olha, 330 vai entrar no quarto quadrante lá, vai ou não? A gente já respondeu isso. A 2 – Tá, independente do ângulo, o cosseno vai ser sempre igual ao cateto adjacente. A 1 – Independente do ângulo, independente do quadrante, independente da circunferência (GRANDO; PREUSSLER, 2014, p. 24).

Em uma segunda atividade, os alunos deveriam identificar as transformações de objetos matemáticos para diferentes formas de registro. Com isso, os discentes deveriam primeiramente reconstruir em uma tabela características da função seno e em seguida representá-las no gráfico. A Figura 2 representa como os discentes conseguiram fazer a transformação de diferentes registros semióticos do objeto matemático analisado:

Figura 2 - Representação de diversos registros semióticos

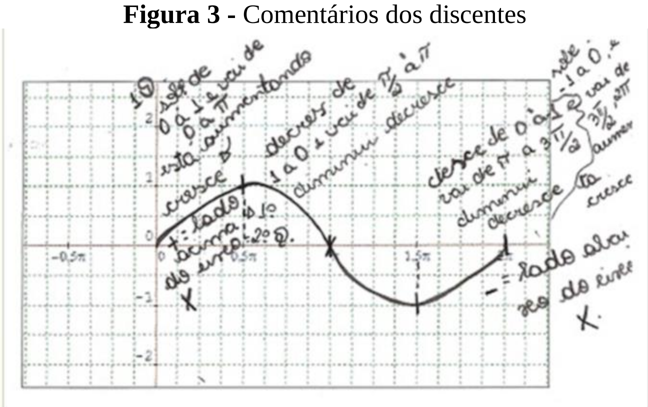


Quadrante	I	II	III	IV
Arco	$0, \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}, \pi$	$\pi, \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}, 2\pi$
Sinal	+	+	−	−
Variação	cresce	decres	decres	cresce
	0 → 1	1 → 0	0 → -1	-1 → 0

Fonte: Grando e Preussler (2014, p.25)

A Figura 3 apresenta a conversão de representação de dados da tabela para o gráfico de uma função trigonométrica.

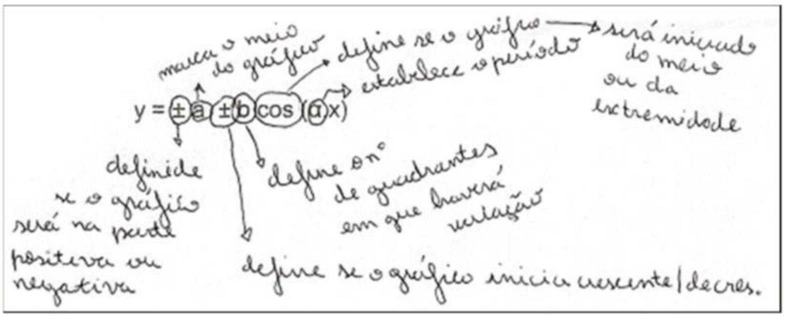
Figura 3 - Comentários dos discentes



Fonte: Grando e Preussler (2014, p.25)

Os autores ainda apresentaram a Figura 4 que representa observações de um discente quanto as implicações dos sinais e dos valores dos coeficientes de uma função dada por $y = \pm a \pm bcos(ax)$.

Figura 4 - Implicações dos sinais e dos coeficientes de uma função trigonométrica



Fonte: Grando e Preussler (2014, p.26)

Grando e Preussler (2014) puderam observar que os alunos constroem suas aprendizagens nas interações sociais da sala de aula, sempre buscando solução para os desafios propostos nas atividades. Além disso, a pesquisa apontou que a utilização de softwares pode servir como instrumentos motivacionais e auxiliares na construção de um sistema de representações, permitindo aos discentes uma melhor relação entre os conceitos e uma melhor apropriação dos seus significados.

A pesquisa de Silva (2015) teve como objetivo propiciar aos docentes da educação básica uma proposta de ensino das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente que levasse em consideração os Parâmetros Curriculares Nacionais e o Currículo Pedagógico do Estado de São Paulo, com o diferencial de que os ensinos destes conteúdos fossem feitos a partir da utilização do *software* GeoGebra. Inicialmente, o autor apresentou os fundamentos da trigonometria no triângulo retângulo com as principais razões trigonométricas de um ângulo agudo (seno, cosseno e tangente) bem como uma descrição de como as propriedades das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente do tipo $f(x) = A.sen(Bx + C) + D$ sofrem alterações a mudança dos termos $A, B, C\ e\ D$ de f.

O autor criou no Geogebra as atividades referentes às funções trigonométricas constantes no Currículo Pedagógico de São Paulo e propôs a utilização do material criado em sala de aula, alegando que a utilização do GeoGebra facilita a compreensão dos discentes quanto a influência dos parâmetros $A, B, C\ e\ D$ na função analisada. Silva (2015) considerou, ainda, que a utilização de softwares tem fundamento legal nas normas jurídicas brasileira e paulista, apresentando resultados positivos no campo educacional e, portanto, a proposta de utilização do GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas é pertinente.

Uebel (2015), fez uma pesquisa com objetivo de investigar se a utilização de mídias digitais em sala de aula auxilia a compreensão dos conteúdos de função seno, quando estas estão relacionadas aos fenômenos periódicos. A autora adotou a Engenharia Didática como metodologia. Os participantes da pesquisa foram uma turma de 28 alunos do 2° ano do ensino médio de Westfália (RS). A pesquisadora utilizou uma sequência didática envolvendo funções trigonométricas com o auxílio de mídias digitais, em que os instrumentos de coleta de dados foram: fotos, anotações dos discentes, os arquivos respondidos pelos alunos no GeoGebra, além das respostas em questionários de papel.

A aplicação da sequência didática se deu em 8 etapas, denominadas pela autora de "momentos", a partir das quais foi proposto quatro hipóteses:

> Hipótese 1 – A definição de crescimento e decrescimento do gráfico da função $sen(x)$ é compreendida pelas relações estabelecidas com a circunferência trigonométrica, ao explorar o dinamismo da construção realizada no GeoGebra. Hipótese 2: A análise do gráfico $sen\ (x)$ no GeoGebra possibilita a compreensão do conceito de período. Hipótese 3: A compreensão sobre o efeito de cada parâmetro de uma função senoidal do tipo $f(x) = a + b \times sen(cx + d)$ é facilitada pela utilização dos controles

> deslizantes no GeoGebra. Hipótese 4: Os alunos conseguirão resolver o problema relacionado com funções trigonométricas (UEBEL, 2015, p.16).

Segundo Uebel (2015), todas as hipóteses foram validadas. Com isso, a autora afirma que “a utilização de mídias digitais em sala de aula auxilia os alunos na compreensão do conteúdo matemático função seno, relacionado com fenômenos periódicos” (UEBEL, 2015, p.28).

2.1.3- Estudo Teórico

Franken (2015) fez uma pesquisa com objetivo de servir como como recurso didático no ensino das funções seno e cosseno. Nela, o autor apresenta relações entre a música e a Matemática. A partir dessa relação ele propõe a utilização simultânea da música e da trigonometria no currículo escolar. Para alcançar seu objetivo, foi feito um levantamento bibliográfico sobre a relação entre música e Matemática desde os pitagóricos. Apresentou também algumas definições de conceitos presentes na Matemática e que, por através da Física, guardam relações diretas com a música e, consequentemente, com os sons musicais.

O autor apresenta a teoria pitagórica da harmonia das esferas, afirmando que a música nada mais é do que ondas sonoras audíveis aos seres humanos (em frequências compreendidas entre 20 Hz e 20000 Hz) e que o som pode ser expresso a partir de uma função seno dada por: $f(x) = A.sin(Bx + C) + D$. O autor apresenta ainda sons com fases invertidas, que permitem trabalhar com transformações trigonométricas, onde a função seno é transformada na função cosseno a partir de ondas com fases diferentes, sinalizando que os discentes podem compreender transformações trigonométricas a partir de necessidades próprias.

Em sua pesquisa, Franken (2015) apresenta ainda como utilizar o software GeoGebra para emitir sons a partir de funções trigonométricas, apresentado a relação entre função trigonométrica e música. Dessa forma, segundo o autor, o docente pode utilizar de recursos mais atrativos para os alunos, pois os mesmos podem estudar funções trigonométricas e transformações trigonométricas a partir da música. Assim, o autor considera que a utilização do GeoGebra pode dinamizar as aulas e, concomitantemente, concretizar os conceitos matemáticos estudados a partir de situações mais próximas à realidade dos escolares, como é o caso da música (FRANKEN, 2015)

2.2- Concepções dos alunos egressos do 2º ano do ensino médio

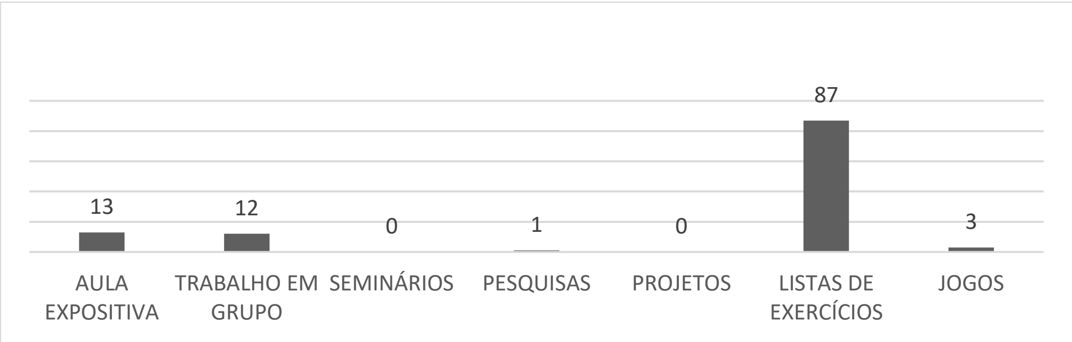
Atualmente, o estudo da função seno se dá no 2º ano do ensino médio. Com objetivo de sondar as dificuldades e as concepções dos discentes egressos deste nível escolar quanto a este objeto matemático bem como sobre conhecimentos de trigonometria básica, entre os dias 16 e 18 de maio de 2018, foi realizada uma pesquisa de campo[8] com 115 discentes de 4 turmas do 3º ano do ensino médio de 3 escolas estaduais da região metropolitana de Belém (PA).

Os instrumentos de coleta foram: questionário socioeconômico, quadro de dificuldades dos alunos egressos do 2º ano do Ensino Médio e teste diagnóstico contendo questões relacionados a conhecimentos prévios para o estudo da função seno. Nesta pesquisa, consideraremos apenas os dados obtidos no teste diagnóstico, doravante denominado Teste Alunos Egressos (Apêndice A)

Os dados obtidos na aplicação da pesquisa, foram tratados por meio da Estatística descritiva e analisados a partir de pesquisas anteriores. Dentre os dados obtidos, consideramos relevantes os representados nos gráficos e tabelas a seguir.

O Gráfico 1 apresenta as atividades e trabalhos mais utilizados pelos professores de Matemática, segundo os alunos pesquisados.

Gráfico 1 - Atividades e/ou trabalhos mais utilizados em aulas de Matemática



Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

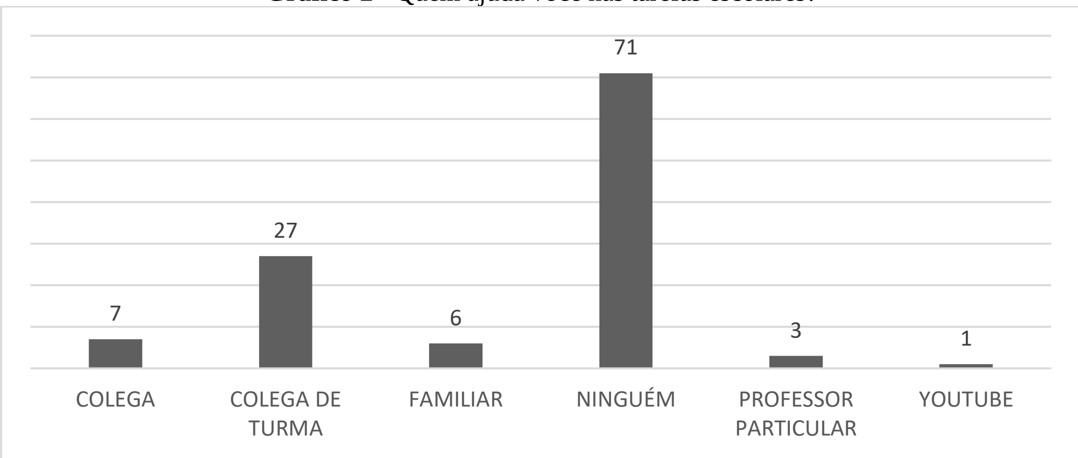
Observa-se no Gráfico 1, que 87 alunos afirmam que a lista de exercícios ainda predomina nas aulas de Matemática. Em segundo lugar, têm-se a aula expositiva. Considerando o fato de que as listas de exercícios geralmente são deixadas a cargo dos escolares, como tarefas de casa, após as aulas expositivas, pode-se perceber que há o predomínio do método tradicional de ensino apresentado por Libâneo (1994), onde o professor é retratado como o detentor do conhecimento, e que o “repassa” aos alunos e estes o “recebem” passivamente.

---

8 Realizada na disciplina de Currículo e Avaliação da Aprendizagem em Matemática no presente Curso de Mestrado.

A Gráfico 2 apresenta os principais auxiliares dos alunos pesquisados nas tarefas escolares. A análise desse Gráfico permite afirmar que dos 115 alunos pesquisados, mais de 60% responderam que não tem ninguém que o auxiliem nas tarefas escolares.

Gráfico 2 - Quem ajuda você nas tarefas escolares?



Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Vale destacar que dentre as respostas dadas pelos alunos, uma delas apresentou a plataforma de vídeo do Google (Youtube) como auxiliar das suas tarefas escolares. Isso vai ao encontro do que diz as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica ao afirmarem que:

> As tecnologias da informação e comunicação constituem uma parte de um contínuo desenvolvimento de tecnologias, a começar pelo giz e os livros, todos podendo apoiar e enriquecer as aprendizagens. Como qualquer ferramenta, devem ser usadas e adaptadas para servir a fins educacionais e como tecnologia assistiva; desenvolvidas de forma a possibilitar que a interatividade virtual se desenvolva de modo mais intenso, inclusive na produção de linguagens (BRASIL, 2013, p.25).

Silva, Santos e Paixão (2014) corroboram com Brasil (2013), apontando a utilização da internet como recurso utilizado tanto pelo professor quanto pelos discentes na realização de tarefas escolares: “Na aula dele (professor), a gente pesquisa, traz livros, *acessa a Internet,* estuda para tentar fazer os trabalhos e aprender” (p.247, grifo meu).

Em relação às abordagens do ensino de função seno, segundo dados apresentados na Tabela 1, quase a metade dos alunos que selecionaram alguma opção, informaram que os docentes iniciavam o ensino da função seno a partir da sequência definição→ exemplo → exercícios.

Tabela 1 - Como os professores iniciavam o ensino da função seno

Conteúdo	Quantidade de alunos	Percentual
Iniciavam pela definição, seguida de exemplos e exercícios	44	38,26%
Iniciavam com a história do assunto para depois explorar os conceitos	14	12,17%
Iniciavam com uma situação problema para depois introduzir o assunto	10	8,7%
Iniciavam com um modelo para	5	4,35%
Iniciavam com jogos para depois	0	0%
Não estudei este assunto na escola	18	15,65%
Não selecionou nenhuma opção	24	20,87%
Total	115	100%

Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Essa sequência de conteúdo é uma das características do método tradicional (ZABALA, 1998) que apesar de receber muitas críticas, ainda é adotado de modo exclusivo por vários professores. A pesquisa apontou ainda que apesar da função seno ser um dos conteúdos obrigatórios na educação básica, mais de 15% dos estudantes afirmam nunca terem visto este conteúdo matemático.

Os dados apresentados na Tabela 2 são referentes às formas pelas quais os professores propõem que os discentes exercitem o conteúdo de função seno.

Tabela 2 - Como o professor exercitava o conteúdo da função seno

Tipo de exercício	Número de aluno	Percentual
Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos	54	46,96%
Apresentar jogos envolvendo o assunto	1	0,87%
Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios dos livros didáticos	11	9,56%
Solicitar que os alunos procurassem	5	4,35%
Não propunha questões de fixação	2	1,74%
Não estudei este assunto na escola	18	15,65%
Não selecionou nenhuma opção	24	20,87%
Total	115	100%

Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

A partir dela, observamos que, segundo os discentes que selecionaram alguma opção, a maioria dos professores propõem que eles exercitem o conteúdo ministrado a partir de resolução de exercícios propostos. A Tabela 3 apresenta os dados referentes aos instrumentos de avaliação utilizados pelo professor de Matemática.

Tabela 3 - Instrumentos de avaliação utilizado pelo professor

Provas	32
Testes	46
Simulados	9
Auto avaliação	3
Observação	5
Trabalho em grupos	8
Visto no caderno	20
Participação em resolução de atividades	24
Frequência/assiduidade	4
Outros	1

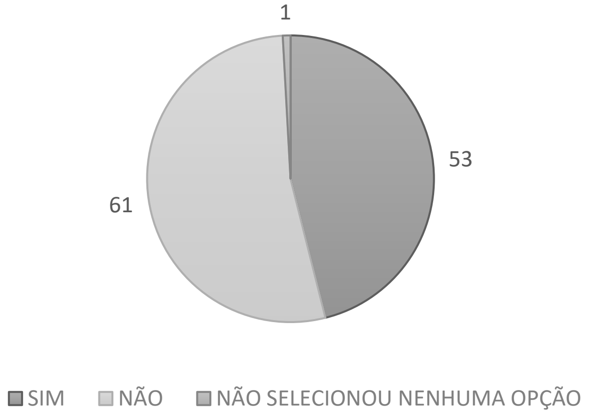
Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Por considerar ser possível a utilização de vários instrumentos avaliativos pelo professor, permiti que os discentes selecionassem várias opções. A pesquisa indicou que há um predomínio dos testes e provas como instrumentos de avaliação. Estes instrumentos avaliativos, porém, são pontuais e quantitativos, que geralmente servem para avaliação exclusiva dos discentes, não permitindo uma auto avaliação do docente. Deste modo, a avaliação coopera para a segregação dos escolares em dois grupos: “os que sabem Matemática” e os “que não sabem Matemática”, não havendo lugar para meio termo, conforme assinala Attie e Moura (2018).

O estudo da função seno e da trigonometria em geral, segundo Pedroso (2012), consegue unir a si tanto a álgebra quanto a geometria. Assim, é necessário que os discentes possuam conhecimentos prévios sobre essas duas áreas para um melhor aprendizado da trigonometria. Com isso, a partir da pesquisa realizada, sondamos a quantidade de estudantes de estudaram determinados conhecimentos prévios.

O Gráfico 3 representa a quantidade de estudantes que responderam ter estudado comprimento de circunferência.

Gráfico 3 - Alunos que estudaram o cálculo de comprimento de circunferência

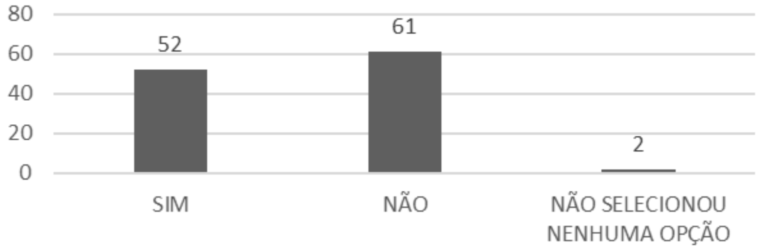


Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Observamos que mais da metade dos alunos afirmaram não ter lembrança de ter visto esse conteúdo em sua vida estudantil. Vale frisar que apesar desse conteúdo estar relacionado à geometria plana, ele é de fundamental importância para a compreensão a compreensão do conceito de radiano, que nada mais é do que um arco cuja medida é igual ao raio da circunferência.

O Gráfico 4 apresenta a quantidade de discente que lembram de terem estudado a respeito do cálculo de arco de circunferência e do ângulo formado por este arco.

Gráfico 4 - Alunos que estudaram o cálculo de arco de circunferência e o ângulo formado



Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Trata mais uma vez de conhecimento de geometria plana, o qual deve ser mobilizado pelo estudante para que este possa compreender melhor a função seno. O Gráfico 4 permite afirmar que mais da metade dos 115 alunos lembram de ter estudado. As Tabelas 4 e 5 indicam, respectivamente, a quantidade de discentes que responderam a respeito da lembrança do estudo a respeito de ângulos complementares e ângulos suplementares. Os conhecimentos desses dois conteúdos são primordiais para que o estudante consiga entender melhor o seno dos arcos complementares e suplementares, além de facilitar a compreensão da redução ao primeiro quadrante.

Tabela 4 - Quantidade de alunos que estudaram ângulos complementares

Sim	35,65%
Não	61,74%
Não selecionou nenhuma opção	2,61%
Total	100%

Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Apesar da importância deste conhecimento prévio para o aprendizado da função seno, a Tabela 4 aponta que mais de 60% dos escolares não tem lembrança de terem estudado o conteúdo de ângulos complementares. A falta de conhecimento a respeito deste conteúdo poderá acrescentar dificuldades no estudo da função seno. Os dados obtidos em relação aos ângulos suplementares (Tabela 5) assemelham-se bastantes aos do primeiro. Talvez isso se deva ao fato de que, ao ensinar o primeiro conhecimento, geralmente, o professor ensina o segundo.

Tabela 5 - Quantidade de alunos que estudaram ângulos suplementares

Sim	32,17%
Não	66,09%
Não selecionou nenhuma opção	1,74%
Total	100%

Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Podemos afirmar a partir da Tabela 5, que de cada dez alunos pesquisados, quase sete não lembram de ter estudado ângulos suplementares. A experiência docente aponta que a ausência deste conteúdo pode dificultar a aprendizagem da função seno. Esse pode ser um dos fatores que auxiliam na compreensão do exposto por Feijó (2018), ao constatar que os discentes "demonstram extrema dificuldades em trabalhar com ângulos maiores do que $\frac{\pi}{2}$" (p.52).

Quanto as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, de acordo com as respostas dos alunos pesquisados quanto a estes assuntos, a maioria dos que responderam não lembrar de terem estudados. A ausência desses dois conteúdos matemáticos poderá ensejar dificuldades no processo de aprendizagem da função seno, posto que de acordo com Brasil (2006), o estudo das funções trigonométricas deve ser precedido do estudo das razões métricas e trigonométricas no triangulo retângulo.

O teste com os alunos egressos (Apêndice A) é composto de dez questões de múltipla escolha, elaboradas[9] especificamente para sondar as dificuldades de aprendizagem dos discentes sobre o estudo da função seno. As questões foram elaboradas considerando-se duas categorias: conceitual e algorítmica. O nível de dificuldade varia entre fácil, médio e difícil. Os dados representados nas Tabelas e Gráficos abaixo foram obtidos na pesquisa de campo.

A questão 1 trata de uma situação problema em que é requerido do aluno conhecimento sobre o conceito de radiano. A resposta correta é a letra C. A tabela 6 apresenta o índice percentual por alternativa:

Tabela 6 - Dados referentes a questão 01

QUESTÃO 01	ALTERNATIVA SELECIONADA	PERCENTUAL
A	22	19,13%
B	33	28,70%
C	39	33,91%
D	12	10,43%
NENHUMA	9	7,83%
TOTAL	115	100,00%

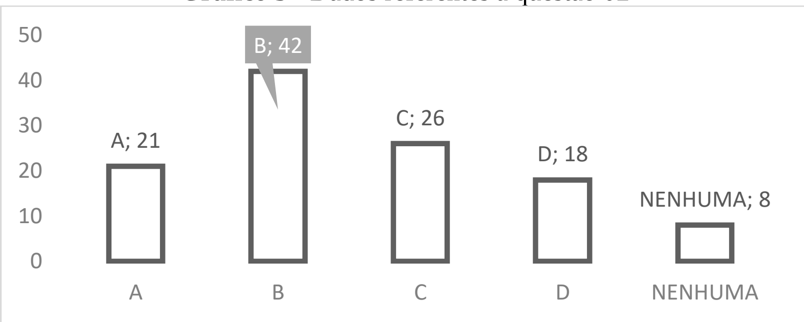
Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

[9] A questão 4 é a única que não é de autoria própria, mas foi citado a fonte.

A Tabela 6, indica que o índice de acerto foi de aproximadamente 34%, sinalizando para às dificuldades dos discentes na compreensão e cálculo de arcos com medidas de arcos em radiano. Essas dificuldades também foram detectadas na pesquisa feita tanto por Pedroso (2012) quanto por Feijó (2018).

A questão 2 tem como resposta correta a letra C. Pode ser classificada como uma questão conceitual. O Gráfico 5 apresenta a distribuição percentual das respostas dadas pelos alunos pesquisados em relação a esta questão.

Gráfico 5 - Dados referentes a questão 02

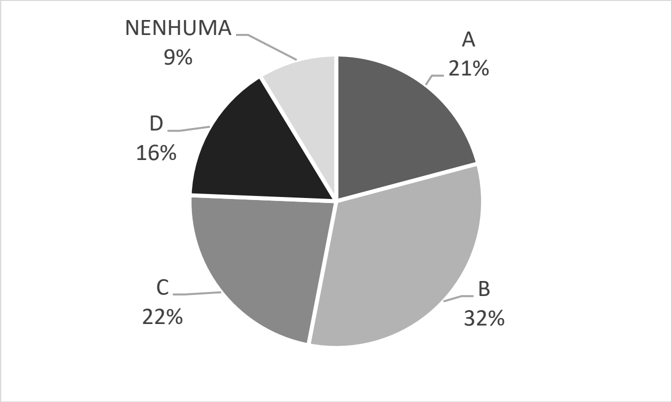


Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Observa-se nele, que os respondentes apresentaram, pois apenas 23% deles a acertaram. Isso nos permite inferir que os discentes têm dificuldades em reconhecer o segmento o seno no ciclo trigonométrico e em fazer a interpretação gráfica. Percebemos ainda que a letra (b) foi a maior selecionada pelos estudantes. De acordo com essa letra, o seno trigonométrico seria representado pelo segmento AE, que corresponde ao cosseno trigonométrico. Assim, podemos inferir que os alunos tiveram dificuldades na relação cateto oposto/hipotenusa e cateto adjacente/hipotenusa, indo ao encontro da pesquisa de Pedroso (2012).

Em relação a questão 3, os dados obtidos na pesquisa encontram-se dispostos no Gráfico 6. A resposta correta é a letra C. Trata de uma questão envolvendo álgebra e geometria, além de redução ao primeiro quadrante.

Gráfico 6 - Dados referentes a questão 03



Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

O percentual de acerto foi de apenas 22%. Desse modo, percebemos que os discentes pesquisados apresentam dificuldades em fazer redução ao primeiro quadrante, bem como em perceber a variação do sinal da função seno no ciclo trigonométrico. Essa dificuldade também foi apontada ne pesquisa feita por Silva (2011).

No que concerne à questão 4, trata-se de uma questão com nível de dificuldade alta. A resposta correta é a letra B. A Tabela 7, apresenta os dados relacionados às respostas dadas pelos discentes à essa questão.

Tabela 7 - Dados referentes a questão 04

QUESTÃO 04	ALTERNATIVA SELECIONADA	PERCENTUAL
A	60	52,17%
B	22	19,13%
C	16	13,91%
D	8	6,96%
NENHUMA	9	7,83%
TOTAL	115	100,00%

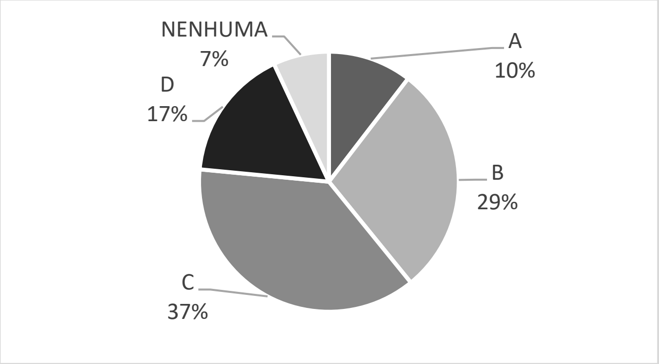
Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Baseado nos dados contidos na Tabela 7, observamos que os discentes apresentaram índice de acerto inferior a 20%. Isso nos permite inferir que os estudantes tiveram dificuldades em representar no ciclo trigonométrico um arco e em analisar como o seno deste arco varia com a variação do arco.

Em relação a questão 5, trata-se de uma questão na qual o discente deve saber que a imagem do seno de qualquer arco x está contida no intervalo fechado compreendido entre 1 e -1, isto é: $-1 \leq senx \leq 1$. A partir disso, o aluno deveria apenas fazer algumas manipulações algébricas até chegar em: $-1 \leq 2 + 3.senx \leq 5$. Assim, a resposta correta é: $Im(f) = [-1,5]$. Portanto, letra A.

O Gráfico 7 indica os índices de seleção a essa questão pelos discentes pesquisados.

Gráfico 7 - Dados referentes a questão 05



Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Apesar da questão 5 não ter um grau de dificuldades alto, observamos a partir da pesquisa do Gráfico 7 que a taxa de acerto dessa questão foi de apenas 10%. Isso indica que os alunos pesquisados apresentaram dificuldades na compreensão e no cálculo de um elemento do conjunto imagem da função seno, além de apresentarem dificuldades na compreensão da linguagem simbólica utilizada questões envolvendo a trigonometria.

A Tabela 8 trata dos dados referentes às respostas dadas pelos alunos em relação a questão 06. A resposta correta desta questão é a letra B.

Tabela 8 - Dados referentes a questão 06

QUESTÃO 06	ALTERNATIVA SELECIONADA	PERCENTUAL
A	19	16,52%
B	40	34,78%
C	20	17,39%
D	29	25,22%
NENHUMA	7	6,09%
TOTAL	115	100,00%

Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Apesar de haver semelhança entre essa questão e a anterior, de acordo com os dados representados na Tabela 8, observamos que o índice de acerto dela mais do que triplicou. No entanto, o índice de erro, mesmo desprezando aqueles alunos que não marcaram nenhuma opção, é alto. Com isso, podemos concluir que os discentes apresentaram dificuldades em calcular um elemento do conjunto imagem da função seno, dado um elemento de seu conjunto domínio e em fazer cálculos algébricos e aritméticos envolvendo os valores dos principais arcos no ciclo trigonométrico.

A questão 7 requeria que os alunos mobilizassem conhecimentos relacionados ao conteúdo de arcos côngruos. A resposta correta dessa questão é a letra D.

Tabela 9 - Dados referentes a questão 07

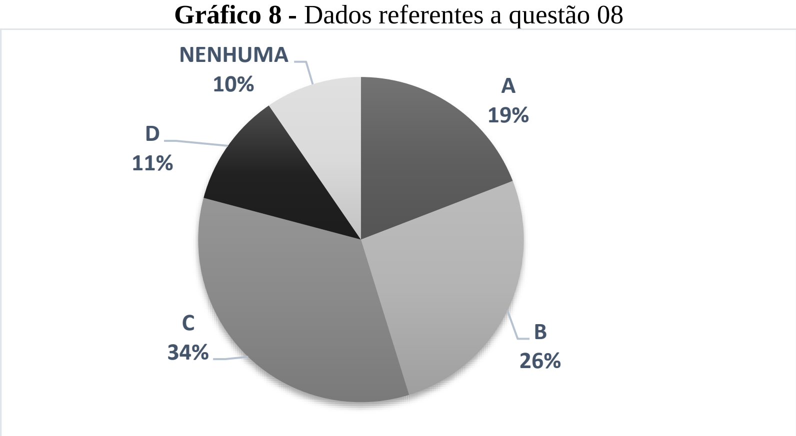
QUESTÃO 07	ALTERNATIVA SELECIONADA	PERCENTUAL
A	30	26,09%
B	21	18,26%
C	25	21,74%
D	33	28,70%
NENHUMA	6	5,22%
TOTAL	115	100,00%

Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

A Tabela 9 apresenta os índices relacionados as respostas dadas pelos alunos pesquisados à questão 7. Observamos que o índice de acerto foi de apenas 28,70%. Isso permite dizer que os discentes pesquisados apresentaram dificuldades em fazer a localização de um arco maior do que $2\pi\ rad$ $(360°)$ no ciclo trigonométrico. Essa dificuldade encontrada reforça o que Pedroso (2012) detectou em sua pesquisa, em que, apesar da utilização de softwares, os educandos apresentam dificuldades relacionadas a localização de arcos maiores do que 360º no ciclo trigonométrico.

A questão 8 trata do assunto de trigonometria no triângulo retângulo. Nela, são mesclados conhecimentos de relações métricas e razões trigonométricas neste tipo de triângulo. Trata-se de uma questão com categoria de dificuldade média, na qual a resposta correta é a letra A. O Gráfico 8 apresenta os dados obtidos, referentes a essa questão.

Gráfico 8 - Dados referentes a questão 08

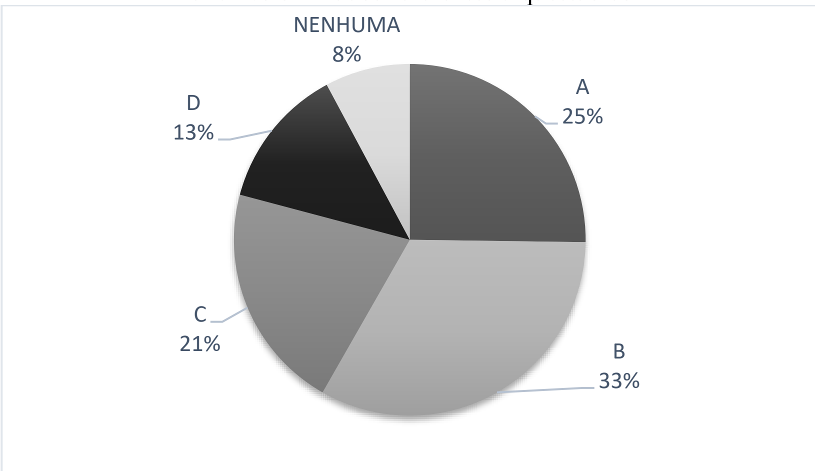


Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

A partir do Gráfico 8, observamos que o índice de acerto referente a questão 8 foi menor do que 20%. Isso permite afirmar que os discentes têm dificuldades em (i) utilizar o teorema de Pitágoras para calcular o terceiro lado de um triângulo retângulo, dados os outros dois e em (ii) atribuir corretamente a razão trigonométrica.

Na busca de encontrar possíveis dificuldades dos escolares quanto a redução de um arco ao 1º quadrante, elaboramos a questão 9, cuja resposta correta é a letra C. O Gráfico 9 representa os índices relacionados às respostas dadas pelos alunos à referida questão.

Gráfico 9 - Dados referentes a questão 09



Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

A partir da análise gráfica, podemos observar que a alternativa correta teve um índice de acerto de apenas 21%, o que nos permite concluir que os discentes têm dificuldades em obter a família dos arcos que possuem o seno de mesmo módulo.

Dada a importância de o aluno conseguir fazer a redução de um arco qualquer ao primeiro quadrante, elaboramos a questão 10. A resposta certa encontra-se na letra C.

Tabela 10 - Dados referentes a questão 10

QUESTÃO 10	ALTERNATIVA SELECIONADA	PERCENTUAL
A	16	13,91%
B	28	24,35%
C	35	30,43%
D	28	24,35%
NENHUMA	8	6,96%
TOTAL	115	100,00%

Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

A Tabela 10 apresenta o índice de respostas dadas pelos discentes à questão analisada. Podemos observar que mais de 2/3 dos discentes pesquisados têm dificuldades em fazer redução de arcos ao primeiro quadrante e em utilizar os valores referentes aos arcos notáveis em expressões algébricas. Pedroso (2012) corrobora os dados obtidos nesta pesquisa e atribui essas dificuldades ao o fato de os escolares tentarem apenas decorar as fórmulas de redução de arcos ao primeiro quadrante, ao invés de tentarem compreender como é construída essa redução.

2.3- Concepções dos docentes

Esta subseção tem como objetivo analisar as concepções dos docentes quanto ao ensino da função seno. Para isso, entre os dias 28/11/2019 e 15/12/2019, realizamos uma pesquisa com 60 professores na qual eles tinham que responder um questionário on-line contendo 23 perguntas, via formulário do Google (ANEXO C), o qual foi compartilhado por e-mail e via grupos de mensagens de professores de Matemática no aplicativo WhatsApp.

Essas perguntas estavam divididas em três categorias, a saber:

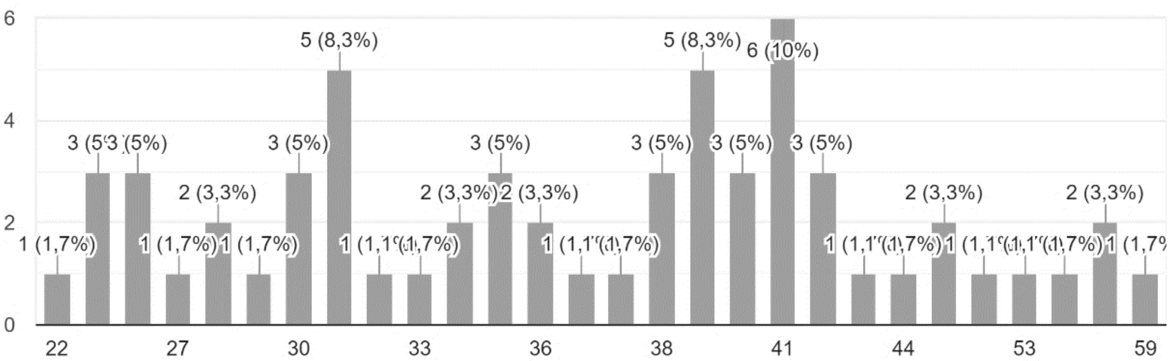
1) Perfil dos professores: Questões de 1 a 13;
2) Método de avaliação utilizado pelo professor: Questões 14 e 15;
3) Método de ensino e recursos didático-pedagógicos relacionado à Função Seno: Questões de 16 a 23.

A partir da coleta de dados realizada na pesquisa mencionada, faremos uma análise baseada na estatística descritiva buscando relacionar as perguntas constantes no formulário com possíveis implicações ao processo de ensino da função seno.

2.3.1- Análise dos perfis dos professores pesquisados

Em relação ao perfil dos professores pesquisados, percebemos todos eram graduados em Matemática, sendo 80% do sexo masculino e 20% do sexo feminino. O gráfico 10 indica as idades dos docentes pesquisados:

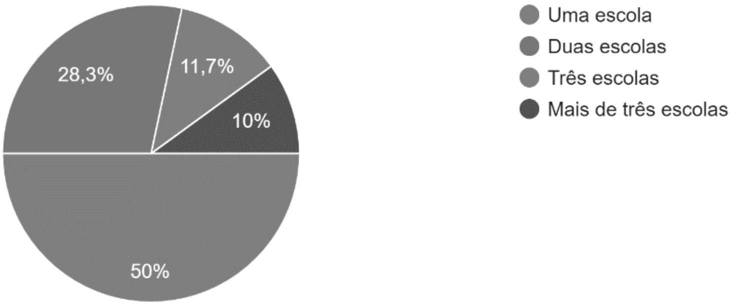
Gráfico 10 - Idades dos docentes pesquisados



Fonte: Dados da Pesquisa (2019)

A partir do Gráfico 10, percebemos que a maioria dos docentes têm idade igual ou superior a 36 anos. Em relação ao tipo de escola em que os professores pesquisados trabalham, foi detectado que mais de 70% deles trabalham em escolas públicas estaduais e/ou municipais, seguido de 13,3% que afirmaram trabalhar em escolas privadas, sendo que 78,3% responderam que trabalham apenas em uma ou duas escolas e 10% responderam estar trabalhando em mais de três escolas, conforme o gráfico a seguir:

Gráfico 11 - Tipo de escolas dos docentes pesquisados



Fonte: Dados da Pesquisa (2019)

Em relação a nível de escolaridade em que os professores trabalharam ministrando aulas, percebemos que 48 professores afirmaram já ter lecionado matemática no nível fundamental e no nível médio e apenas 3 disseram ter ensinado exclusivamente no ensino médio. Atualmente, 31 dos respondentes afirmaram que estão lecionando nos dois níveis de escolaridade, sendo que apenas 11 dos respondentes afirmaram estar ministrando aula exclusivamente para o ensino médio.

Além disso, foi possível percebermos que 47 dos docentes pesquisados trabalham exclusivamente como professor, sendo que os demais trabalham em profissões diversas, conforme a tabela a seguir:

Tabela 11 - Profissões extras dos professores pesquisados

Não	**Sim**	
47	Profissão	Quantidade
	Analista de TI	1
	Contador	1
	Fiscal de Obras	1
	Militar	1
	Secretário	1
	Avaliador MEC	1
	Outros	7

Fonte: Dados da Pesquisa (2019)

Em relação ao estudo da função seno, a pesquisa indicou que durante a graduação 60% dos professores participaram de alguma disciplina sobre o ensino da função seno e 40%

disseram não ter estudado (na graduação) alguma disciplina sobre o ensino da função seno. Além disso, dos docentes pesquisados, foi possível perceber que 75% deles não participou de algum evento, curso ou treinamento envolvendo a Função Seno e apenas 25% afirmaram ter participado de algum evento, curso ou treinamento envolvendo a Função Seno.

A pesquisa ainda apontou que todos os professores participantes são graduados em Matemática e que apesar de as mulheres estarem se inserindo em várias áreas da sociedade, percebemos que ainda é discreta a parcela delas entre os docentes de Matemática. Destacamos também o fato de 10% dos docentes pesquisados *precisarem* trabalhar em mais de três escolas. Colocamos o verbo *precisar* por entendermos que apesar de muitos docentes amarem ministrar aula e uma grande parcela gostar de estar em sala de aula, dadas as circunstâncias nacionais, é preciso o professor estar *precisando* para se submeter a assumir três ou mais turmas.

Infelizmente, muitos professores precisam assumir muitas turmas para poderem honrar os compromissos financeiros e manter sua família com o mínimo de dignidade. Esse raciocínio é complementado ao percebermos que mais de 20% (13 dos 60 docentes) outros professores precisam assumir outras profissões paralelas além da de professor. Ora, é razoável supor que um profissional que precisa ter várias horas de trabalho para poder se manter ou que tem jornada dupla, tripla ou até mais de trabalho terá um desgaste superior aqueles que precisam trabalhar, por exemplo, apenas 6 horas diárias. Com isso, inevitavelmente, ele (no caso o professor) deixará em algum momento que essas situações tragam implicações às suas aulas e ao aprendizado do estudante.

Podemos somar a isso o fato de que, ainda na formação inicial (graduação) muitos professores deixam de ver conteúdos que mais tarde, na ministração de suas aulas, precisarão conhecer. No caso em tela, percebemos que 40% dos docentes não viram em sede de graduação nenhuma disciplina, curso ou similares relacionados à função seno. É fato que nenhuma graduação é completa, mas devemos atentar para que sejam minimizadas as lacunas existentes entre aquilo que o futuro professor (graduando em Matemática) estuda no nível superior e aquilo que ele irá lecionar na educação básica.

2.3.2- Análise dos métodos de avaliação utilizado pelo professor

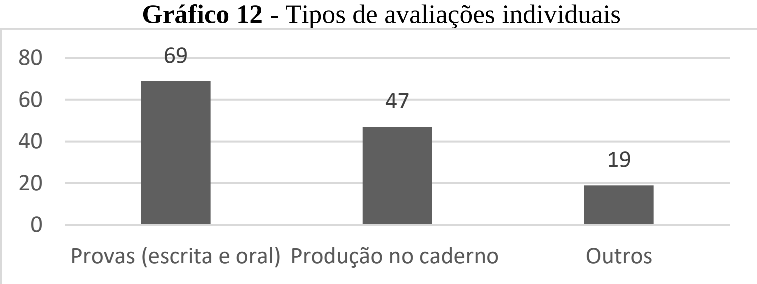
No tocante aos métodos de avaliação dos docentes, relacionado à função seno, a partir das respostas dadas na questão 14, foi possível percebermos que eles utilizam vários meios avaliativos, os quais foram divididos em duas categorias:

1) *avaliações individuais:* Meios pelos quais os alunos são avaliados isoladamente. Exemplo: Prova oral, prova escrita, auto avaliação, produções no caderno, fichas de observações, resolução de problemas, testes, resolução de apostilas, frequências, etc.;

2) *avaliações sociais:* Os meios pelos quais os alunos são avaliados na coletividade, em grupos. Exemplo: trabalhos em grupo (ou equipe), seminários e em atividades correlatas.

A pesquisa apontou que menos de 14% (8 docentes no total) dos professores utilizam-se das *avaliações sociais* para compor as notas finais dos escolares e dos 52 docentes restantes, entre os que utilizam algum dos tipos de *avaliações individuais*, houve o predomínio daqueles que utilizam a prova escrita (com 60 professores) e oral (com 9 professores) como sendo as principais formas de avaliação utilizada pelos professores. O gráfico 12 indica a distribuição dos meios de *avaliações individuais* constatados em nossa pesquisa:

Gráfico 12 - Tipos de avaliações individuais

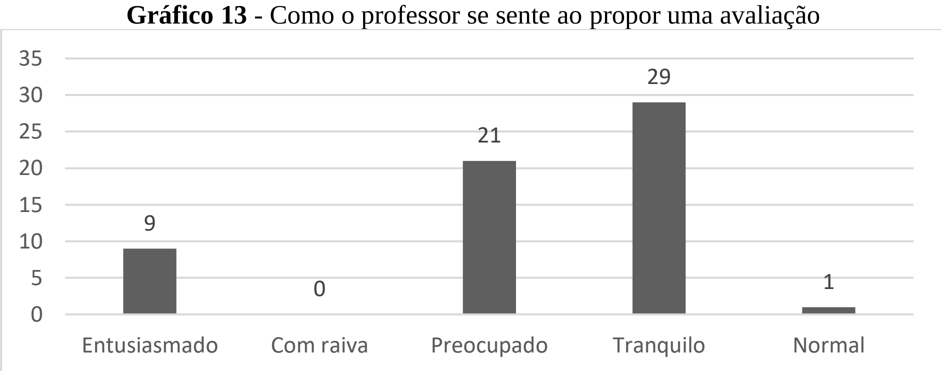


Fonte: Dados da Pesquisa (2019)

No gráfico 12, a categoria “outros” engloba todos outros tipos de avaliações individuais que não seja as provas e as produções no caderno, tais como: auto avaliação, fichas de observações, resolução de problemas, testes, resolução de apostilas, frequências, simulados, etc. Quando perguntados “como você costuma sentir-se quando está aplicando uma avaliação em Matemática?” (questão 15), apenas 1 dos docentes responderam sentir-se “normal” e 21 disseram sentir-se “preocupados” ao avaliar os estudantes.

O gráfico 13 apresenta as respostas dadas:

Gráfico 13 - Como o professor se sente ao propor uma avaliação



Fonte: Dados da Pesquisa (2019)

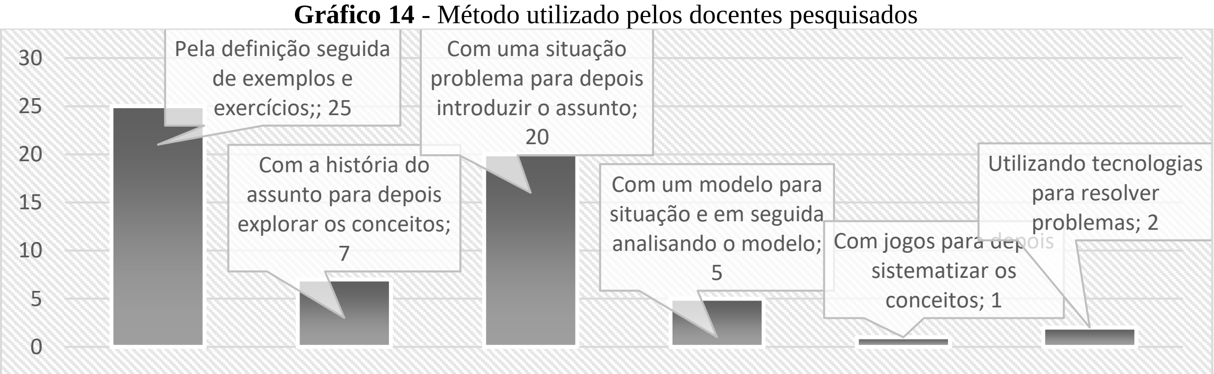
Do apresentado acima, percebemos que ainda persiste nas salas de aula as *avaliações individuais* em detrimento das *avaliações sociais*. No entanto, podemos perceber que em várias áreas da nossa vida nos relacionamos com outras pessoas por vários motivos, tais como: tirar dúvidas, divulgar uma nova ideia, submeter um raciocínio à crítica de alguém, pedir sugestões, etc. e como restou provado em nossa pesquisa, a sala de aula ainda preserva o caráter individualista.

Esse caráter, se adotado pelo docente, involuntariamente, acaba estimulando uma visão classificatória dos discentes, implicitamente separando-os entre o grupo dos "que sabem Matemática" e dos que "não sabem Matemática", conforme citou Attie e Moura (2018). Talvez seja esse um dos motivos para que 21 docentes se sintam "preocupados" ao submeterem os escolares às avaliações de rotina.

2.3.4- Métodos de ensino e recursos didático-pedagógicos relacionados à Função Seno

A partir das respostas dadas às questões relacionadas à categoria de métodos de ensino e avaliação relacionada à função seno, pudemos perceber que quase a metade dos docentes (25 do total de 60) utilizam a sequência "definição→ exemplo → exercício" para iniciar o ensino da função seno. O gráfico abaixo apresenta o percentual das respostas dadas pelos professores à questão 16.

Gráfico 14 - Método utilizado pelos docentes pesquisados

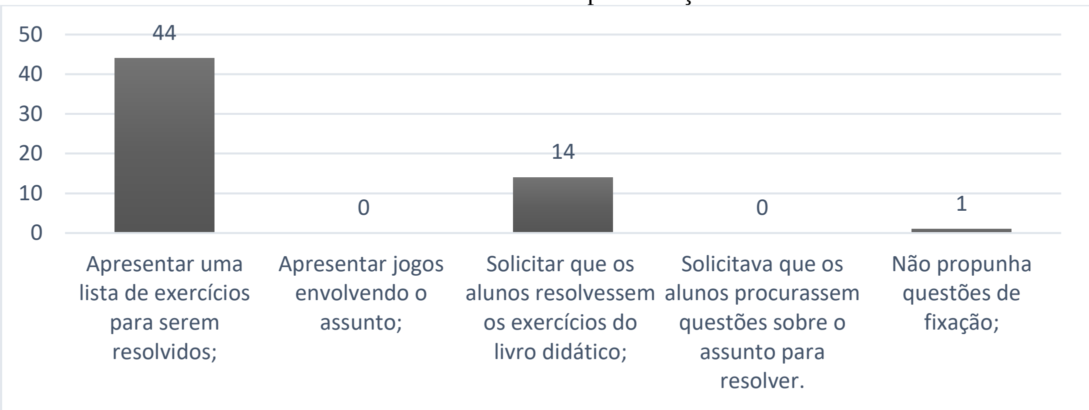


Fonte: Dados da Pesquisa (2019)

A pesquisa apontou ainda que 83% dos professores utilizam uma quantidade igual ou menor do que quatro aulas para ensinar a função seno. Em conversas informais com alguns destes docentes e indagando-os a respeito deste assunto em particular, muitos disseram que se preocupam mais em repassar uma grande diversidade de conteúdos curriculares do que em detalhar apenas um ou pouco assunto. E ao fazerem isso, segundo os docentes, os estudantes terão a oportunidade de mais tarde, se necessário, relembrar daquilo que foi ensinado e aprender com mais detalhes aquilo que não aprenderam em sala de aula.

Uma vez ensinado determinado assunto, 44 dos professores propõem que os escolares resolvam uma lista de exercícios como forma de fixar o assunto estudado e 14 docentes afirmaram que solicitam que os discentes resolvam questões do livro didático para fixar o conteúdo ensinado, conforme o gráfico que segue.

Gráfico 15 - Recursos utilizados para fixação de conteúdos

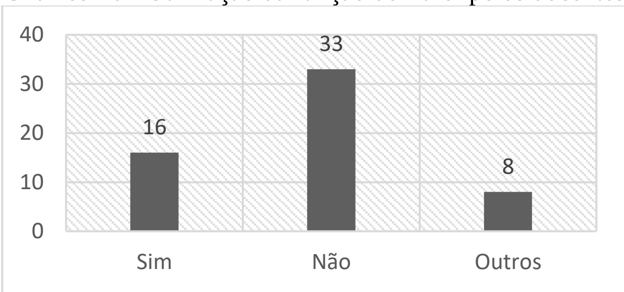


Fonte: Dados da Pesquisa (2019)

A partir do Gráfico 15, percebemos que apesar de estar em crescente utilização nas salas de aulas, nenhum dos professores disseram utilizar os jogos como recurso pedagógico. Semelhantemente, nenhum dos professores disseram solicitar que os discentes procurassem questões relacionadas ao tema ensinado para resolver, o que poderia favorecer a independência deles em busca de material didático e, consequentemente, um maior aprendizado.

Em geral, as funções seno e cosseno são introduzidas a partir do estudo da função de Euler, uma vez que elas são funções reais e a função de Euler consegue relacionar os números reais com pontos no ciclo trigonométrico. Com o propósito de sondar o conhecimento dos professores no que tange ao conhecimento sobre a função de Euler (questão 19), a pesquisa indicou que quase 30% dos docentes (no total de 17 professores) desconhecem a função de Euler. Quando perguntados se ao iniciar o ensino da função seno o docente o faz mediante o estudo da função de Euler (questão 20), apenas 57 professores deram alguma resposta. O gráfico a seguir representa as respostas coletadas:

Gráfico 16 - Utilização da função de Euler pelos docentes



Fonte: Dados da Pesquisa (2019)

Logicamente o docente tem a liberdade de iniciar os conteúdos matemáticos por onde considerar melhor para o aprendizado dos estudantes. Entretanto, o ensino da função seno é didaticamente mais bem construído quando o discente consegue perceber que um número real pode ser associado a um ponto no ciclo trigonométrico. Afinal, a função seno associa um número real à ordenada do ponto que o representa no ciclo trigonométrico e se o discente não conseguir encontrar este ponto no ciclo trigonométrico, praticamente será impossível ele encontrar sua ordenada.

Essa informação contrasta com os dados do Gráfico 16. Nele, percebemos que quase 58% dos docentes que deram alguma resposta (33 dos 57) disseram não iniciar o estudo da função seno a partir da função de Euler sem, no entanto, informar qual a maneira utilizada por eles ao ensinar o assunto mencionado. Dos 8 que disseram utilizar "outros" meios para iniciar o estudo da função seno, obtemos as respostas apresentadas na tabela a seguir:

Tabela 12 - Meios utilizados para o ensino da função seno

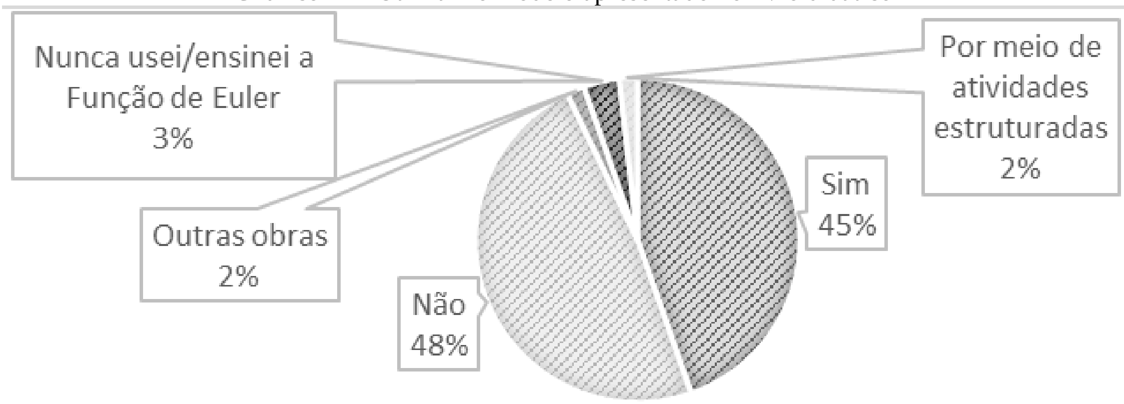
MEIOS UTILIZADO PARA INICIAR O ENSINO DA FUNÇÃO SENO	QUANTIDADE DE PROFESSORES
Relações trigonométricas	1
Definição de seno trigonométrico seguido da construção do gráfico	1
Raciocínio pitagórico	1
Círculo trigonométrico	1
Relações dos lados de um triângulo	1
Ciclo trigonométrico associado à uma tabela para construção do gráfico	1
Ensino por atividades	1
Não se recorda	1

Fonte: Dados da Pesquisa (2019)

Da Tabela 12, podemos perceber que duas delas apelam para a construção do gráfico. Ora, a pergunta inicial era como os docentes iniciam o ensino da função seno e, ao nosso ver, iniciar o estudo apelando à construção do gráfico pode não despertar a atenção dos escolares para a relação funcional entre um número real e o seu respectivo seno.

Na pergunta 21 queríamos saber se ao ensinarem a função de Euler, os docentes seguiram a forma apresentada nos livros didáticos. Dos 60 professores pesquisados, apenas 56 deram respostas que estão representas no Gráfico 17:

Gráfico 17 - Utilizam o modelo apresentado no livro didático

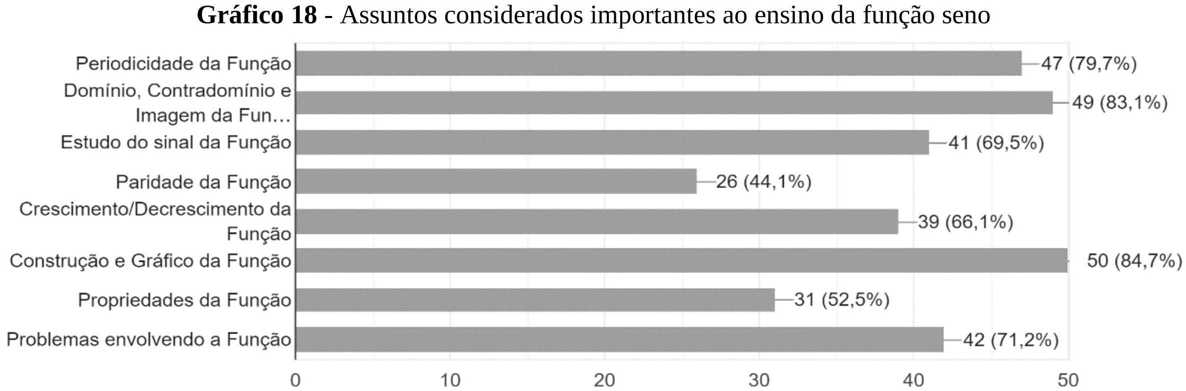


Fonte: Dados da Pesquisa (2019)

A análise do Gráfico 17 nos permite afirmar que 45% dos docentes que responderam à questão 21 seguem a forma apresentada no livro didático para o ensino da função de Euler, o que nos permite inferir que persiste a parcela dos docentes que dependem dos livros didáticos para a ministração dos conteúdos escolares.

Quanto aos assuntos considerados importantes pelos professores para o ensino da função seno, foi proposta a questão 22, a qual foi respondida por 59 professores. Nela, os respondentes podiam selecionar vários assuntos. Das respostas obtidas, construímos o gráfico 18:

Gráfico 18 - Assuntos considerados importantes ao ensino da função seno

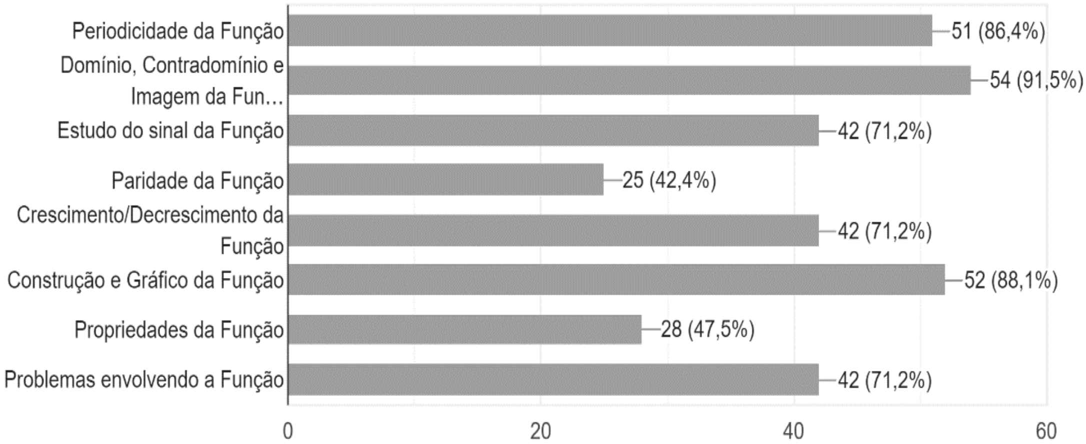


Fonte: Dados da Pesquisa (2019)

Do gráfico 18, percebemos que o assunto “propriedades da função seno” ficou em penúltimo lugar entre os assuntos selecionados como importante no estudo da função seno. Diametricamente oposto, a construção do gráfico da função seno mostrou-se como o assunto mais importante pelos docentes no ensino dessa função, o que ratifica a ideia de que os docentes têm por interessante a construção do gráfico para o estudo da função seno, inclusive sendo um meio utilizado para a introdução deste conteúdo.

A questão 23, embora guarde uma semelhança com a questão que a antecede, apresenta uma diferença: enquanto ela busca sondar os conteúdos que de fato já foram utilizados no ensino da referida função, na questão 22 a pergunta relaciona os assuntos que os professores consideram importantes para o ensino da função seno. Em outros termos, a primeira considera aquilo que ele *acha importante utilizar* no ensino da função seno e a segunda, busca descobrir os assuntos já utilizados. Além disso na questão 23 foi oportunizado aos docentes a possibilidade de que eles selecionassem vários assuntos considerados importantes. Dos 60 docentes pesquisados, apenas 59 responderam a referida pergunta. O gráfico contendo as respostas dadas pelos docentes encontra-se abaixo:

Gráfico 19 - Assuntos utilizados no ensino da função seno



Fonte: Dados da Pesquisa (2019)

Da comparação entre o gráfico da questão 22 e o gráfico da questão 23, construímos a tabela 13:

Tabela 13 - Conteúdo considerado importante e o utilizado no ensino da função seno

Conteúdo matemático	*Considerado importante para o ensino da função seno (Questão 22)*	*Abordado em sala de aula no ensino da função seno (Questão 23)*
Periodicidade da função seno	79,7%	86,4%
Domínio, contradomínio e imagem da função seno	83,1%	91,5%
Estudo do sinal da função seno	69,5%	71,2%
Paridade da função seno	44,1%	42,4%
Crescimento/decrescimento da função seno	66,1%	71,2%
Construção do gráfico da função seno	84,7%	88,1%
Propriedades da função seno	52,5%	47,5%
Problemas envolvendo a função seno	71,2%	71,2%

Fonte: Dados da Pesquisa (2019)

A partir da análise da Tabela 13, podemos perceber que os docentes mostraram-se bem coerentes entre os assuntos considerados importantes a serem ensinados no estudo da função seno e o que efetivamente eles abordam ao ministrarem esse conteúdo, pois a diferença entre os dados constantes na segunda e na terceira coluna da referida tabela foi de, no máximo, 8,4% (segunda linha). A partir da revisão de literatura, das concepções dos discentes e dos docentes relacionados a função seno, na seção a seguir apresentaremos a parte formal do estudo da função seno.

3- ASPECTOS HISTÓRICOS E CONCEITUAIS DA FUNÇÃO SENO

Este capítulo trata dos aspectos históricos e conceituais sobre a função seno. Para melhor compreendê-lo, considerei relevante, inicialmente, fazer uma abordagem histórica deste conceito, seguido de uma abordagem do conceito de função (com ênfase nas funções reais) definidas no $\mathbb{R}^2$. Somente a partir do desenvolvimento destes temas, é discutido o assunto de função seno.

Destaco que nas subseções 3.2. e 3.3. foram consideradas as obras de: Alencar Filho (1985); Carmo, Morgado e Wagner (2005); Lima et al (2006); Lima (2013); Neto et al (2009) e Niles (1996).

3.1- Uma história da função seno

Historicamente, a trigonometria teve sua gênese com os gregos, a partir de necessidades ligadas à Astronomia e às previsões relacionadas às efemérides celestes. Assim, inicialmente, foi na Astronomia que a Matemática demonstrou ser capaz de prever fenômenos naturais. Acreditava-se até então, que os planetas descreviam órbitas circulares em torno da terra, denominado de modelo geocêntrico[10], e daí surgiram interesses em buscar relações entre o comprimento da corda da circunferência e o ângulo central por subtendido (ÁVILA, 2010; CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

No início, a trigonometria estava relacionada aos triângulos sobre uma esfera, ou triângulos esféricos, cujo estudos remonta aos últimos pitagóricos. O próprio Euclides, de *Os Elementos*, fez estudos sobre Geometria esférica. Teodósio, por volta de 20 a. C, conseguiu compilar o conhecimento grego sobre as esferas (CARMO, MORGADO; WAGNER, 2005).

Porém, é a Hiparco de Niceia (190 a. C- 120 a. C) que se deve o título de pai da trigonometria. Talvez isso esteja relacionado ao fato de esse matemático ter feito a compilação da primeira tabela trigonométrica, além de ter deixado grandes contribuições na organização de dados empíricos, tomando por base a matemática babilônica, que serviu para a Astronomia (BOYER; MERZBACH, 2012).

Segundo Ávila (2010), outro matemático que trouxe grandes contribuições para a trigonometria, foi Cláudio Ptolomeu (100 d.C-160d.C). Esse estudioso escreveu um dos maiores compêndios sobre o assunto, em uma obra denominada *Almagesto*, que em árabe significa “O maior”, que conforme esse autor:

10 Ávila (2010) acentua que o modelo geocêntrico, embora comumente seja atribuído a Ptolomeu (100 d.C.- 160 d.C.) remonta aos pré-socráticos. Segundo este autor, até mesmo Aristóteles já considerava este modelo.

> O *Almagesto* é, em vários sentidos, uma obra monumental. A tradução de Toomer conta quase 700 páginas; e o livro contém tudo o que se sabia de Astronomia até a época em que foi escrito, e contém muitas referências a trabalhos de seus antecessores, particularmente Hiparco e Menelau (ÁVILA, 2010, p.125).

Além disso, Ptolomeu consegui deduzir o equivalente em linguagem moderna a expressão trigonométrica $sen(a \pm b)$ e que, dado um ângulo agudo $x, sen^2 x + cos^2 = 1$ (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

Outro povo que trouxe contribuições para a trigonometria foram os hindus. Dentre as contribuições, Carmo, Morgado e Wagner (2005) citam o abandono das tabelas de cordas utilizado pelos gregos e a adoção da tabela dos senos. Além disso, os hindus refizeram a tabela de Ptolomeu e adotam uma trigonometria mais aritmética (diferente dos gregos, que tinham uma trigonometria mais geométrica).

Mais tarde os árabes herdaram a trigonometria da Índia. Foi neste contexto, segundo Berlinghoffe e Gouvêa (2010), que surgiu a palavra seno. Segundo estes autores, o que hoje entendemos por seno, na Índia era denominado por $jy\overline{a} - ardha$ (meia-corda), ou abreviadamente, $jy\overline{a}$. Os árabes, ao se depararem com a matemática hindu, adotaram a palavra $jy\overline{a}$ como sendo $jiba$.

Entretanto, os árabes tinham costume dispensar as vogais em suas palavras, deste modo era $utilizado$ apenas jb. Com isso, os europeus ao encontrarem a palavra jb, acrescentaram as vogais a e i, por suporem que se tratava da palavra árabe $jaib$, que significa angra ou baía. Assim, escolheram a palavra latina $sinus$ como tradução. É dessa tradução equivocada que surgiu a palavra seno (BERLINGHOFFE; GOUVÊA, 2010).

No período do Renascimento a trigonometria assumiu grande destaque no auxílio às mudanças relacionadas a Astronomia posicional. O modelo geocêntrico heliocêntrico de Copérnico mostrou-se relevante e mais adequado (CARMO, MORGADO; WAGNER, 2005).

Foi também neste período que as grandes navegações começaram a surgir e com elas a necessidade de cálculos trigonométricos mais precisos. Destacam-se, neste contexto, os trabalhos de Tycho Brahe (1546-1601) e Kepler (1571-1630), os quais contribuíram significativamente para a implantação do modelo heliocêntrico (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

Joaquim Rético (1514-1576) foi um dos mais importantes matemáticos ligados à trigonometria, devido ao fato de ele ter feito um dos maiores tratados sobre o tema, até os dias atuais. Rético conseguiu introduzir a formulação da trigonometria ao triângulo retângulo. Foi nessa época também que o estudo da trigonometria passou a mais destaque para investigações das relações funcionais (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

Segundo Carmo, Morgado e Wagner (2005):

> A curva seno foi introduzida nos estudos de Roberval (1602-1675) sobre a ciclóide; no livro Mecânica de Wallis (1616-1703), publicado em 1670, vemos um gráfico de dois períodos da função seno. É o primeiro aparecimento de uma função trigonométrica (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p.147).

Com isso, aos poucos as funções trigonométricas passaram a se fazer presente na Matemática, na Topografia, nas navegações e na Astronomia de Posição. Carmo, Morgado e Wagner (2005) apontam que durante o século XVIII e XIX, as funções trigonométricas mostraram-se bastante contributivas para a Matemática e para a Física.

Nesse cenário, Fourier fez um estudo que apresentou as funções periódicas (inclusive as trigonométricas) como uma soma de funções do tipo: $acosnx + bsennx$, elevando as funções trigonométricas a um novo patamar e apresentando grandes contribuições delas para a análise matemática e em várias aplicações, tais como as apresentadas em Oliveira (2015).

3.2- Funções

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática atual. Existem vários tipos de funções, as quais podem ser classificadas e estudadas sob diversos critérios matemáticos. Entretanto, na presente subseção falaremos apenas de definições, qualidades e outras propriedades de funções elementares no $\mathbb{R}^2$ relevantes para o estudo da função seno.

3.2.1- Definição

Sejam A e B dois conjuntos não-vazios e f uma relação que associa todo elemento x de A a um único elemento y do conjunto B de tal forma que o par ordenado $(x; y) \in f$. Nesta situação, dizemos que f é uma função de A em B, cuja notação é dada por: $f: A \rightarrow B$ (Leia-se: Função f definida em A com valores em B).

O elemento $y \in B$, alcançado a partir de $x \in A$ mediante a função f geralmente é representado por $y = f(x)$. Dizemos que $f(x)$ é imagem de x mediante a função f. Geralmente é também utilizada a notação: $x \xrightarrow{f} f(x)$ para indicar que a função f transforma o elemento x em $f(x)$. O elemento x, neste caso, é chamado de variável independente (ou argumento) e o elemento $y = f(x)$, variável dependente.

Em uma função $f: A \to B$, o conjunto A é denominado de conjunto domínio de f (representado por $D(f)$) e o conjunto B é denominado de conjunto contradomínio (representado por $Cd(f)$). O conjunto formado por todos elementos $y \in B$, tal que $y = f(x)$ é denominado de conjunto imagem de f(representado por $Im(f)$).

O conceito de função não impede que os conjuntos A e B sejam iguais, assim como não impede que $Im(f) = Cd(f)$. Uma função importante na matemática ocorre quando os conjuntos A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais). Neste caso, dizemos que a função f é uma função real de variável real ou que f é uma função numérica.

É relevante pontuar que uma função f é bem definida a partir de três elementos: conjunto domínio de f, o conjunto contradomínio de f e a lei de correspondência que associa todo elemento $x \in A$ a um elemento $y \in B$.

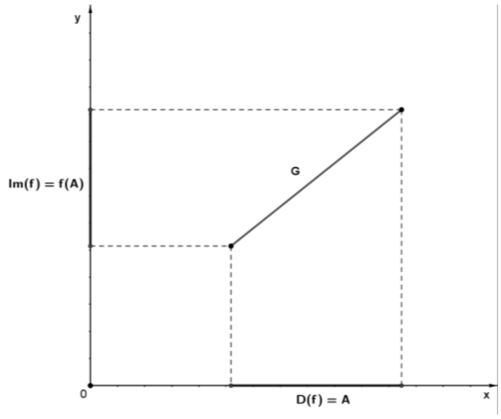
Faz-se necessário dizer ainda, que embora as funções mais conhecidas e estudadas na educação básica apresentem uma fórmula para associar o elemento x à sua imagem $f(x)$ por meio da função $f: A \to B$, não quer dizer que, obrigatoriamente, a forma de associar $x \to f(x)$ deva ser uma fórmula: pode ser feita esta associação de maneira discricionária, desde a lei de associação entre os elementos dos conjuntos A e B não seja ambígua, e que ela consiga associar todo elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Os livros da educação básica (e até alguns de nível mais avançado) costumam utilizar uma linguagem "imprecisa" dizendo "função $f(x)$" para se referir à transformação feita por f ao elemento x, embora o mais adequado seria dizer "função f" ou "$y = f(x)$" para dizer que y é uma função em x, embora saibamos que neste último caso, o que seria adequado era dizer que "y é o resultado da transformação de x pela função f". Em alguns momentos desta pesquisa podemos utilizar-nos desta linguagem "imprecisa" acreditando que o leitor saiba fazer a distinção entre estes conceitos.

3.2.2- Gráfico

Considere o sistema de eixos ortogonais $x0y$. O gráfico G de uma função real $f: A \to B$ é o conjunto de todos os pares ordenados $(x; f(x))$ do plano, com $x \in D(f) = A$, conforme representa o Gráfico que segue:

Gráfico 20 - Gráfico G



Fonte: O autor (2019)

De acordo com a definição de função apresentada na subseção 3.2.1, a partir do gráfico G da função real f pode-se fazer as seguintes observações:

(1) Toda reta paralela ao eixo $0y$ conduzida a partir de um ponto $x \in D(f)$ intercepta o gráfico G em um único ponto.

(2) O conjunto domínio de f pode ser obtido projetando-se G sobre o eixo $0x$ na direção $0y$.

(3) O conjunto imagem de f pode ser obtido projetando-se G sobre o eixo $0y$ na direção $0x$.

3.2.3- Tipos de funções

A partir da definição de função, pode-se fazer vários estudos sobre os elementos que o compõe. Embora o presente trabalho não tenha como escopo fazer isso, consideramos relevantes fazer uma abordagem de alguns tipos de funções e de algumas propriedades a ela inerente, objetivando uma melhor compreensão do conceito de função seno; a qual, aliás, nada mais é do que um tipo de função.

a) Função par e ímpar

Dizemos que uma função f é par se e somente se, para todo $x \in D(f)$, se tem $-x \in D(f)$ e $f(-x) = f(x)$. A função ímpar por seu turno, obedece a seguinte definição: uma função f é dita ímpar se e somente se, para todo $x \in D(f)$, se tem $-x \in D(f)$ e $f(-x) = -f(x)$. Vale destacar que existem funções que não são pares nem ímpares, como a função $f(x) = |x + 2|$, por exemplo.

b) Função periódica

Uma função f é dita periódica se existe um número real $p' \neq 0$ tal que, para todo $x \in D(f): x + p' \in D(f)$ e $f(x + p') = f(x)$. O número real p' é denominado de período da função periódica f. Observe que, se p' é o período da função periódica f, então todos os números reais kp' $(k \in \mathbb{Z}^*)$ também o são. Geralmente costuma-se usar os termos período principal ou simplesmente período de uma função periódica f o menor dos seus períodos estritamente positivos, representando-o por p.

c) Função monótona

Seja f uma função real e I um intervalo do conjunto dos números reais contido no $D(f)$. A função f é dita:

c.1) Crescente em I se e somente se:

$$\forall\, x', x'' \in I, \qquad x' \leq x'' \Rightarrow f(x') \leq f(x'').$$

c.2) Decrescente em I se e somente se:

$$\forall\, x', x'' \in I, \qquad x' \leq x'' \Rightarrow f(x') \geq f(x'').$$

c.3) Estritamente crescente em I se e somente se:

$$\forall\, x', x'' \in I, \qquad x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'').$$

c.4) Estritamente decrescente em I se e somente se:

$$\forall\, x', x'' \in I, \qquad x' < x'' \Rightarrow f(x') > f(x'').$$

c.5) Constante em I se e somente se:

$$\forall\, x', x'' \in I, \qquad f(x') = f(x'').$$

Se a função f é crescente, decrescente ou constante em I, dizemos que f é monótona em I.

Dizemos ainda, que se a função f é estritamente crescente em I ou estritamente decrescente em I dizemos que f é estritamente monótona em I.

Observação:

− A função real f é dita positiva, em I, e escrevemos $f \geq 0$, se e somente se:

$$\forall\, x \in I, f(x) \geq 0$$

− A função real f é dita negativa, em I, e escrevemos $f \leq 0$, se e somente se:

$$\forall\, x \in I, f(x) \leq 0$$

d) Função limitada

Uma função real $f: A \rightarrow B$ é dita limitada se existe um número real positivo M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é:

$$-M \leq f(x) \leq M$$

e) Função algébrica e transcendental

Denomina-se função algébrica toda função f definida por uma "expressão algébrica $y = f(x)$" que é raiz de uma equação na incógnita y na forma:

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0$$

Onde $n \in \mathbb{Z}_+$ e os $P_1(x)(1 = 0,1,2, \dots . , n)$ são polinômios inteiros em x.

A função transcendente é toda função que não é algébrica. Em outros termos, a função transcendente não pode ser definida por uma "expressão algébrica $y = f(x)$" que é raiz de uma equação na incógnita y na forma:

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0$$

3.3- Função seno

O estudo da função seno geralmente é apresentado nos livros didáticos como um avanço primeiramente em relação às razões trigonométricas e em seguida em relação à trigonometria no ciclo trigonométrico de arcos variando entre $0 \ e \ 2\pi$. Neste último caso, geralmente é feito um estudo das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente associando-as aos arcos (ou ângulos) do ciclo trigonométrico e não a um número real qualquer; havendo, deste modo, uma limitação quanto aos estudos destas funções.

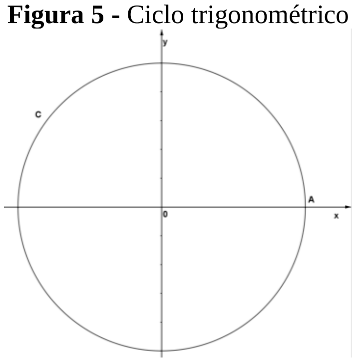
A História da Matemática aponta que a superação desta limitação se deu a partir de uma função denominada de Função de Euler, a qual permitiu associar um número real x a um ponto P no ciclo trigonométrico, extremidade do arco de medida x. Com isso, considero relevante introduzir o estudo da função seno a partir da Função de Euler, conforme exposto nas subseções seguintes.

Para uma melhor compreensão, é necessário que o leitor possua conhecimentos elementares de funções; de trigonometria em triângulos quaisquer e no ciclo trigonométrico; de geometria analítica, dentre outros. Caso necessário, o leitor pode consultar livros da educação básica para avançar em seu entendimento.

3.3.1- Função de Euler

Considere o ciclo trigonométrico C representado na Figura 6, onde o ponto $A = (1; 0)$ é o ponto de origem dos arcos.

Figura 5 - Ciclo trigonométrico



Fonte: O autor (2019)

Considere a Função E (denominada de Função de Euler) que associa um número real x a um ponto B, extremidade do arco $\widehat{AB}$ de medida x no ciclo trigonométrico.

Neste contexto, temos três situações:

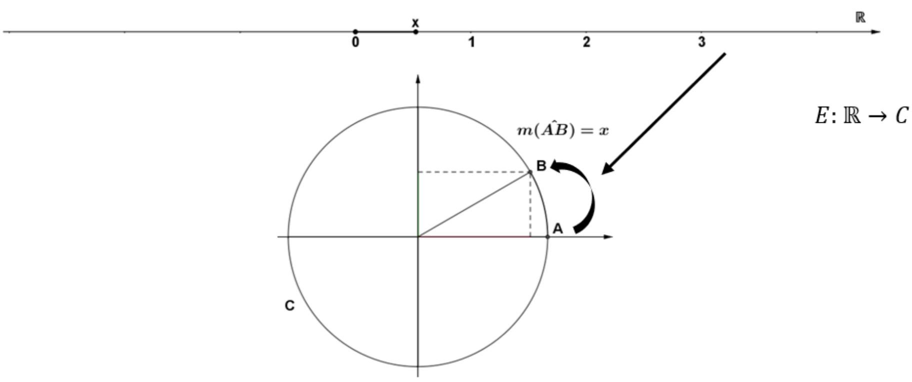
i) $x = 0$: Neste caso, o comprimento do arco $x = 0$. Logo, o $A \equiv B$.

ii) $x > 0$: Sendo $x > 0$, o arco $\widehat{AB}$ é tomado no sentido positivo do ciclo trigonométrico.

iii) $x < 0$: Sendo $x < 0$, o arco $\widehat{AB}$ é tomado no sentido negativo do ciclo trigonométrico.

O ponto $E(x) = B$ é denominado de imagem de x no ciclo trigonométrico C mediante a função E e, por definição, é extremidade do arco $\widehat{AB}$ de medida x. A Figura 7 ilustra essa situação quando $x > 0$ e pode ser estendida para situação em que $x < 0$.

Figura 6 - Função de Euler



Fonte: O autor (2019)

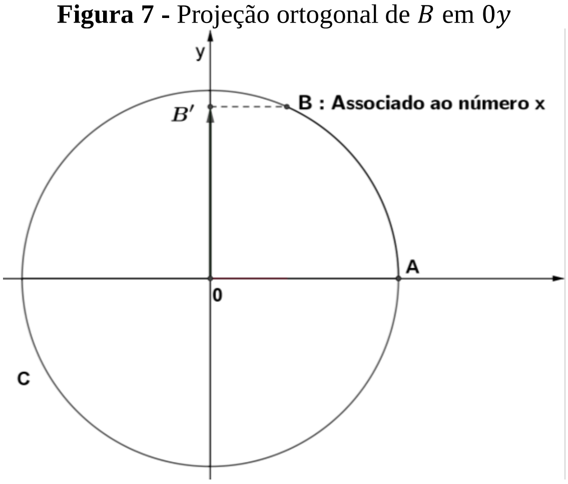
Em outras palavras, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe um único par de coordenadas para o ponto $E(x) \in C$. Logo, há uma relação biunívoca entre o número real x e as coordenadas de $B = E(x)$. Portanto, as coordenadas de B são funções do número real x.

Podemos observar que se x for positivo e maior que 2π, será necessário dar mais de uma volta no sentido positivo do ciclo trigonométrico C para que se possa atingir a imagem $E(x)$. Semelhantemente acontece quando $x < 0$. Em todo caso, o ponto $E(x)$ é um ponto bem definido em C. Além disso, sendo $B \in C$, percebe-se que B, pela função E, é imagem de infinitos números reais na forma: $x + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ e $0 \leq x < 2\pi$, onde os números expressos por $x + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ são chamados de côngruos de x.

3.3.2- Definição de função seno

No ciclo trigonométrico C representado na Figura 8, seja B o ponto associado ao número real x mediante a função $E: \mathbb{R} \to C$. Nele, B' é a projeção ortogonal de B sobre o eixo $0y$.

Figura 7 - Projeção ortogonal de B em $0y$



Fonte: O autor (2019)

Sabemos que a ordenada $\overline{0B'}$ do ponto B corresponde ao seno do arco de medida algébrica x, cuja extremidade é B.

Deste modo, dado $x \in \mathbb{R}$, pela função E, existe um único $B = E(x)$ em C ao qual está associado um único número real $\overline{0B'}$, que é o seno de $\widehat{AB}$; assim, fica definida a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ para a qual: $f(x) = senx$.

A função f é denominada de FUNÇÃO SENO. Podemos escrever que: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $x \to senx$ e: $D(f): \mathbb{R}$; $Cd(f): \mathbb{R}$ e $Im(f): [-1; 1]$

3.3.3- Gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$

Pela função E, percebemos que o número real x possui uma imagem em C dada por $E(x)$, o qual corresponde ao ponto B, extremidade do arco $\widehat{AB}$. Percebe-se também que B, pela função E, é imagem de infinitos números reais na forma: $x + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})(0 \leq x < 2\pi)$

Pela definição de função seno, todo número real x associa-se a um único par ordenado de B, sendo a ordenada deste o valor de $senx$. Com isso, concluímos que o $senx$ é ordenada de B e de todos os números $x + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ e $0 \leq x < 2\pi$.

Logo: $senx = sen(x + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ $\quad (i)$

Pelo conceito de função periódica, percebemos que se $f(x) = senx$ é uma função periódica, então, existe um real p', tal que: $sen(x) = sen(x + p')$ $\qquad (ii)$

Comparando (i) com (ii) percebermos que $p' = 2k\pi$. Portanto, a função seno é periódica. Sendo o período p da função $f(x) = senx$ o menor valor positivo de p', podemos obtê-lo fazendo $k = 1$. Assim, o período da função seno é $p = 2\pi$.

Considerando valores de x no intervalo de 0 a 2π, pois previamente já sabemos que f é uma função periódica e que o gráfico de f neste intervalo "se repete" tanto à esquerda de 0 quanto à direita de 2π. O Quadro 7 apresenta os valores de $0 \leq x < 2\pi$ e suas respectivas imagens:

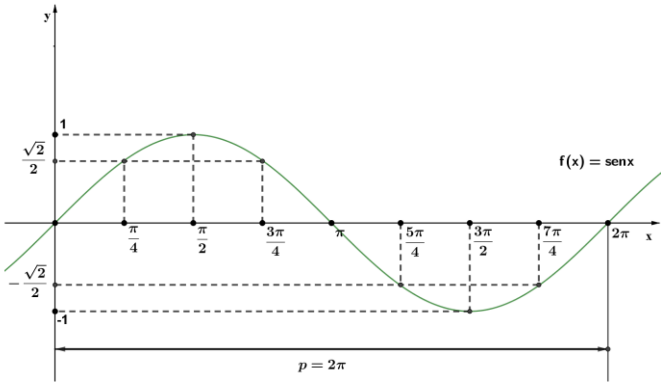
Quadro 7- Valores de alguns números reais e seu respectivo seno

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\frac{5\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{7\pi}{4}}$	$\boldsymbol{2\pi}$
$\boldsymbol{y}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Fonte: O autor (2019)

A partir dos valores constantes no quadro acima, é possível construir o gráfico de f no intervalo de $0 \leq x < 2\pi$:

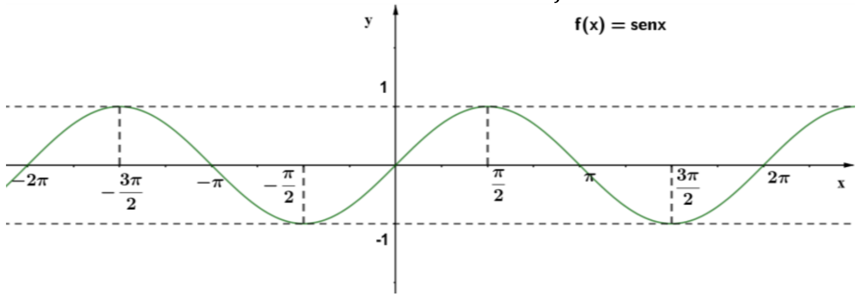
Gráfico 21 - Gráfico de f no intervalo de $0 \leq x < 2\pi$



Fonte: O autor (2019)

Assim, conhecendo o gráfico da função $f: x \rightarrow senx$ no intervalo de $0\, a\, 2\pi$, e considerando o fato de que f é uma função periódica (em que o gráfico fica "repetindo" a cada período p), é possível a construção do gráfico desta função para intervalos maiores, conforme o gráfico 22:

Gráfico 22 - Gráfico de f



Fonte: O autor (2019)

A análise das principais propriedades e conceitos relacionados à função $f(x) = senx$ encontra-se na subseção a seguir.

3.3.4- Propriedades da função seno

A partir da análise do gráfico da função $f(x) = senx$ e das definições apresentadas ao norte, pode-se dizer que:

i) A função $f(x) = senx$ é *positiva* no intervalo de 0 a π (1º e 2º quadrantes do ciclo trigonométrico) e *negativa* no intervalo de π a 2π (3º e 4º quadrantes do ciclo trigonométrico);

ii) f é crescente no intervalo de 0 a $\pi/2$; decrescente no intervalo de $\pi/2$ a $3\pi 2$, voltando a crescer no intervalo de crescente no intervalo de $3\pi/2$ a 2π. Portanto, a função seno é *monótona*;

iii) As imagens de x no gráfico ficam limitadas ao intervalo $I = [-1; 1]$ no eixo $0y$. Assim, $-1 \leq f(x) \leq 1$. Portanto a função seno é uma *função limitada*;

iv) A função seno é uma *função ímpar*, dado que $\forall x \in \mathbb{R}$ em que x e $-x \in D(f)$, temos que: $sen(-x) = -senx$;

v) Pelo fato de a função seno não poder ser definida por uma "expressão algébrica $y = f(x)$" em que y é raiz de uma equação na incógnita y na forma: $P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0$, onde $n \in \mathbb{Z}_+$ e os $P_1(x)(1 = 0,1,2, \ldots, n)$ são polinômios inteiros em x. Dizemos, portanto, que a função $f(x) = senx$ é uma *função transcendental*.

3.3.5- Teorema sobre o período da função $\boldsymbol{f(x) = a + b.sen(cx + d)}$

Para construirmos o gráfico da função $f(x) = a + b.sen(cx + d)$ basta conhecermos os movimentos de rotação e translação do gráfico de funções reais e o Teorema 1:

Teorema 1

Se f é uma função periódica de período p, onde $y = f(x)$, a função $g(x) = a + bf(cx + d)$ também é periódica e seu período P é dado por:

$$P = \frac{p}{|c|}$$

Demonstração:

Se g é uma função periódica, devemos provar que existe um T real tal que: $g(x) = g(x + T)$, isto é: $a + bf(cx + d) = a + bf[(cx + T) + d]$

Vejamos se isto ocorre:

Se $y = f(x)$ é periódica de período p, logo: $f(x) = f(x + kp), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (i)$

Multiplicando a igualdade (i) por b e em seguida, somando com a, temos:

$$a + b.f(x) = a + b.f(x + kp) \quad (ii)$$

Substituindo x em (ii) por $(cx + d)$ com $c \neq 0$, temos:

$$a + b.f(cx + d) = a + b.f[(cx + d) + kp]$$

$$a + b.f(cx + d) = a + b.f\left[(cx + d) + c.\frac{kp}{c}\right]$$

$$a + b.f(cx + d) = a + b.f\left[c\left(x + \frac{kp}{c}\right) + d\right]$$

Considerando $\frac{kp}{c} = T$, temos: $a + b.f(cx + d) = a + b.f[c(x + T) + d]$. Com isso, $g(x) = g(x + T) \quad (iv)$. Assim, existe o real T tal que a igualdade (iv) ocorre. Portanto g é periódica.

Como, por definição, o período é o menor $T > 0$, podemos obtê-lo para a função g, fazendo $k = 1$.

Portanto: $P = \frac{p}{|c|}$

∎

A partir do Teorema 1 percebermos que o período P da função trigonométrica $f(x) = a + b.sen(cx + d)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $(b\ e\ c \neq 0)$ é dado por $P = \frac{2\pi}{|c|}$ (considerando o fato de que o período p da função $f: x \to senx$ é igual a 2π).

4- SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO SENO

A sequência didática[11] utilizada nesta pesquisa encontra-se nesta seção. Ela foi composta de 8 UARC's que abordaram o conteúdo da função seno, tendo como início a Função de Euler e finalizando na construção do gráfico da função $f(x) = senx$. O Quadro 8 indica o número, o título e os objetivos dos alunos e do professor em cada UARC.

Quadro 8 - UARC's e seus objetivos

UARC	TÍTULO	OBJETIVOS DOS ALUNOS	OBJETIVOS DO PROFESSOR
1	Fio preso na roda gigante	Descobrir uma forma de associar um número real a um ponto no ciclo trigonométrico.	Definir a Função de Euler.
2	Números diferentes na reta, pontos iguais no ciclo trigonométrico	Descobrir o que acontece com a imagem $E(x)$ no ciclo trigonométrico quando os números reais diferem entre si por números inteiros de voltas; Descobrir o período da Função de Euler; Descobrir o conceito de fenômenos periódicos.	Definir a periodicidade da Função de Euler; Definir fenômenos periódicos.
3	A função de Euler e a razão trigonométrica seno	Descobrir a relação existente entre os números reais no ciclo trigonométrico e a razão trigonométrica seno no primeiro quadrante.	Demonstrar que o seno de um ponto no ciclo trigonométrico é numericamente igual ao valor da projeção ortogonal deste ponto no eixo das ordenadas.
4	Seno versus ordenada	Descobrir que o valor do seno de um número real é igual a ordenada do ponto que o representa no ciclo trigonométrico.	Demonstrar que o seno de um número real é igual ao valor da ordenada deste ponto no ciclo trigonométrico.
5	Passando pelo mesmo ponto	Descobrir que os números reais x e $x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ possuem o mesmo valor do seno; Perceber que a relação entre um número real e o seu respectivo seno é uma função.	Demonstrar que os números reais x e $x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ possuem o mesmo valor do seno; Definir a Função Seno.
6	Propriedades da função seno	Descobrir o intervalo de variação da função seno; descobrir a partir de quando a função seno começa a repetir os valores; analisar o sinal da função seno a partir do ciclo trigonométrico; analisar o crescimento/decrescimento da função seno a partir do ciclo trigonométrico.	Definir o domínio, a imagem e o período da função seno; fazer o estudo do crescimento/decrescimento da função seno; fazer o estudo do sinal da função seno.
7	Retornando ao 1º quadrante	Descobrir que o seno de um número real qualquer pode ser calculado a partir do seno de um número no primeiro quadrante.	Ensinar sobre a redução ao primeiro quadrante.
8	Gráfico da função seno	Representar no sistema cartesiano os pontos referentes aos pares ordenados $(x; senx)$; Descobrir intervalos importantes a partir dos pontos desenhados no sistema ortogonal $x0y$.	Construir o gráfico da função seno; Analisar o gráfico da função seno, extraindo dele o período, a imagem, o domínio da função seno; Analisar o crescimento/decrescimento da função seno a partir da análise gráfica

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

[11] Este é um recurso didático já utilizado em sala de aula. Por isso, as ilustrações, figuras, quadros, etc. constantes nesta seção não seguem a numeração e a formatação do restante do texto desta pesquisa.

4.1- UARC 1: Fio preso na roda gigante

MATERIAIS: Lista de tarefas, lápis, borracha e caderno.

PROCEDIMENTOS: Fazer a leitura do texto e resolver as questões propostas.

Considere que em um parque de diversões tenha uma roda gigante com raio medindo 8 metros, sendo A o ponto de embarque para o acesso às "gaiolas" em que ficam assentados os brincantes.

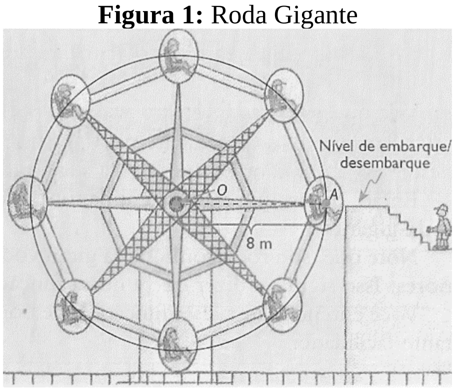
Em um sábado, uma criança planejou uma brincadeira a mais do que simplesmente "andar" de roda gigante: desejava enrolar o maior comprimento possível de um fio inextensível de tamanho infinito na circunferência da roda gigante.

Para isso, ela engatou uma extremidade deste fio no Ponto fixo A (Figura 1) e à medida que a roda gigante se movia, o fio era enrolado na roda gigante. Considere que no início do movimento da roda gigante a criança esteja sentada no Ponto A e que seu movimento ocorra no sentido anti-horário.

Considere ainda, que toda vez que o fio quebrava, a criança reiniciava a brincadeira sempre engatando o fio no ponto A. O Quadro 1 apresenta quantos metros o fio inextensível foi enrolado na circunferência até ele quebrar:

A partir desta situação, faça o que se pede:

Figura 1: Roda Gigante



Fonte: Bianchini e Paccola (1995, p.285)

Quadro 1: Comprimento percorrido pelo fio até quebrar e arco formado

DISTÂNCIA PERCORRIDA ATÉ O FIO QUEBRAR
28 m
45 m
33 m
40,55 m
10 m

Fonte: O autor (2019)

1) Considere que a distância percorrida pelo fio até quebrar esteja associada a um número real x, onde x é o valor numérico desta medida. Preencha O Quadro 2 com o valor do número real x e o valor do arco $\widehat{AB}$ percorrido pelo fio até quebrar:

Quadro 2: Associando o comprimento a um número real

DISTÂNCIA PERCORRIDA ATÉ O FIO QUEBRAR	MEDIDA DO ARCO $\widehat{AB}$ (ATÉ O FIO QUEBRAR)	VALOR DE x
28 m		
45 m		
33 m		
40,55 m		
10 m		

Fonte: O autor (2019)

2) Considere que no sábado seguinte a criança foi novamente ao parque de diversões para brincar na roda gigante. Porém, ao observar o movimento da roda gigante, a criança percebeu que ela estava girando no sentido horário. A criança queria saber uma forma de descobrir o sentido do movimento da roda gigante a partir do valor do número associado ao comprimento do fio, já que em um sábado ela estava girando no sentido anti-horário e no outro, no sentido horário.

Entretanto. ela tinha um problema: o número x associado ao comprimento do fio inextensível era sempre positivo e a medida do arco associado a ele também, não interessando se o movimento da roda gigante se dava no sentido horário, ou no sentido anti-horário!

Para tentar resolver este problema, a criança contou as duas situações ao seu tio, que era professor de Matemática, o qual criou as seguintes regras:

Regra 1: Se a roda gigante estiver movendo-se no sentido anti-horário, como ele é o sentido positivo, o valor de x será positivo!

Regra 2: Se a roda gigante estiver movendo-se no sentido horário, como ele é o sentido negativo, o valor de x será negativo!

a) Para descobrir se a criança conseguiu entender sua proposta, o tio dela considerou os dados do da questão 1 e atribuiu valores ao comprimento do fio do 2º sábado, conforme apresentado no Quadro 3. Preencha as colunas referentes ao sinal associado a ao valor do número x em cada caso:

Quadro 3: Proposta do tio da criança

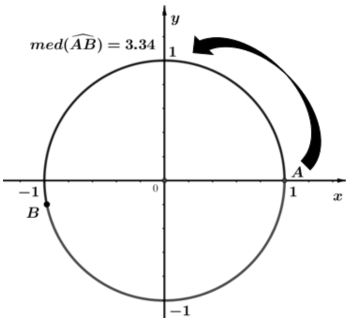
	$med(\widehat{AB})$	SINAL ASSOCIADO	VALOR DO NÚMERO x
SENTIDO HORÁRIO (1º SÁBADO)	28		
	45		
	33		
	40,55		
SENTIDO ANTI-HORÁRIO (2º SÁBADO)	35,78		
	54,5		
	100,33		
	74,75		
	110		

Fonte: O autor (2019)

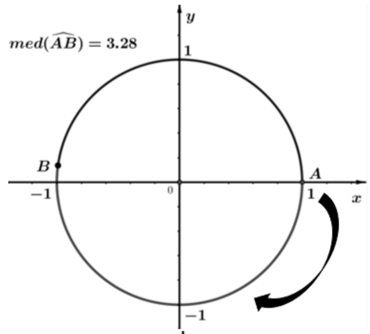
b) Cada número real x está associado a um único arco $\widehat{AB}$? Justifique sua resposta.

3) Enumere a segunda coluna a partir da primeira, associando o número real x ao Arco $\widehat{AB}$ respeitando-se o sentido indicado no ciclo trigonométrico:

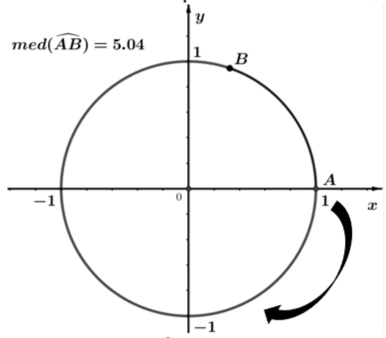
(I) $x = 1{,}25$ ( )



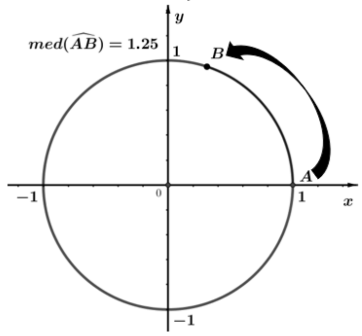
(II) $x = -5{,}04$ ( )



(III) $x = 3{,}34$ ( )



(IV) $x = -3{,}28$ ( )



4) Considerando as respostas dadas na questão anterior, se você tivesse que associar o número x a uma das extremidades do arco $\widehat{AB}$, a qual extremidade você associaria? Ao Ponto A ou o Ponto B? Justifique sua resposta.

5) Cada número real x está associado a **um único** ponto B, extremidade do arco $\widehat{AB}$ no ciclo trigonométrico? Justifique sua resposta.

6) A regra criada pelo tio da criança da roda gigante, que associa o número real x ao ponto $B = E(x)$, extremidade do arco $\widehat{AB}$ pode ser classificada como uma função? Justifique sua resposta.

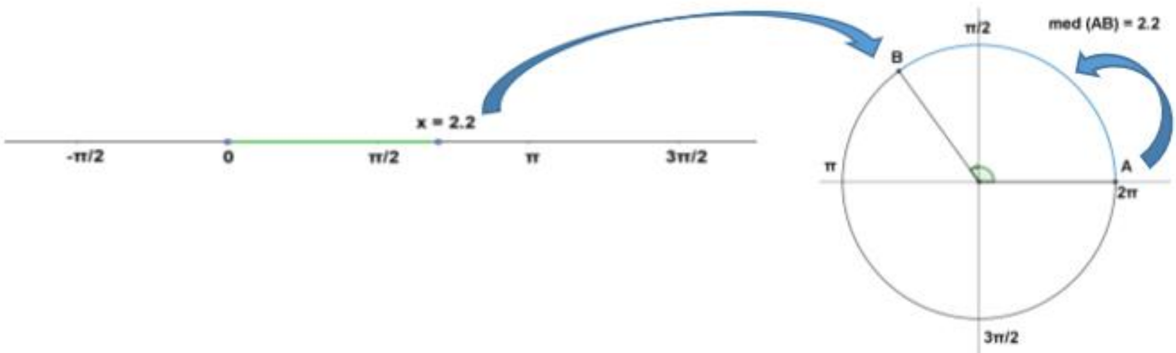
INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 1

A FUNÇÃO DE EULER

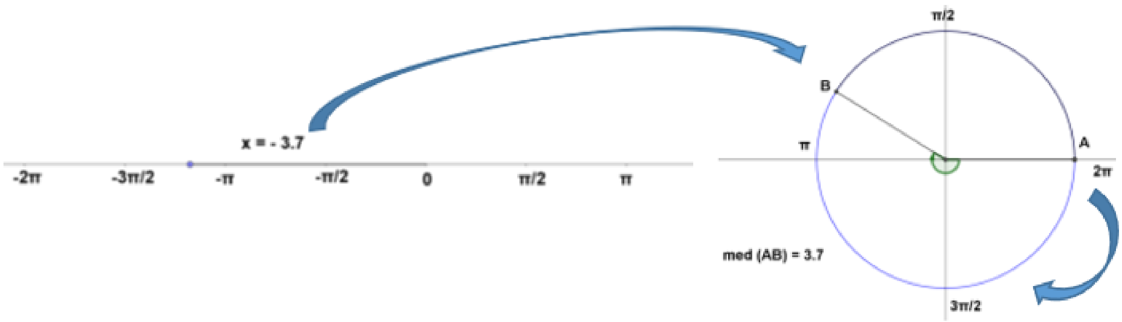
Na Matemática existe uma função denominada de **Função De Euler ($\boldsymbol{E}$)** que relaciona o número real x ao Ponto $B = E(x)$ no ciclo trigonométrico C. O Ponto $E(x)$ é extremidade do arco $\widehat{AB}$, que tem início na origem dos arcos no ciclo trigonométrico (ponto A) e comprimento igual a x.

A relação entre o número real x e o comprimento do arco de circunferência $\widehat{AB}$ se dá da seguinte forma:

1) **Se $\boldsymbol{x}$ é um número real positivo**, o arco $\widehat{\boldsymbol{AB}}$ deve estar no sentido **POSITIVO** do ciclo trigonométrico:



2) Se **$\boldsymbol{x}$ é um número real negativo**, o arco $\widehat{\boldsymbol{AB}}$ deve estar no sentido **NEGATIVO** do ciclo trigonométrico:



Assim, a função $E: x \to E(x)$. Isto quer dizer que a função E associa um **número real $\boldsymbol{x}$** a **um ponto $\boldsymbol{E(x)}$** $\in C$. $\boldsymbol{E(x)}$ é denominado de **imagem de $\boldsymbol{x}$** no ciclo trigonométrico C mediante a função E. Outra representação para E é: $E: \mathbb{R} \to B$, sendo B o ponto referente à extremidade do arco $\widehat{AB}$ de medida x.

7) Pela função de Euler E, em qual quadrante encontra-se o número real:

a) $x = -6$ b) $x = -3$ c) $x = 5$ d) $x = 1$ e) $x = \frac{4\pi}{3}$

4.2- UARC 2: Números diferentes na reta, pontos iguais no ciclo trigonométrico

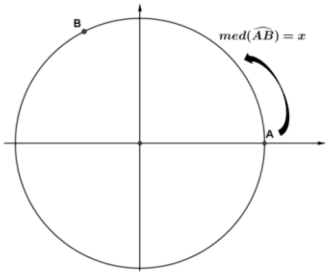
MATERIAIS: Lista de tarefas, lápis, borracha e caderno.

PROCEDIMENTOS: Fazer a leitura do texto e resolver as questões propostas.

Considerando a Função de Euler E e o número real x indicado pelo Ponto B, extremidade do arco $\widehat{AB}$ (Figura 1) no sentido anti-horário, faça o que se pede:

1) A partir do Ponto B indique no Quadro 1 o ponto que representa no ciclo trigonométrico o número real apresentado em cada caso:

Figura 1: Número x no ciclo trigonométrico



Fonte: O autor (2019)

Quadro 1: Pontos no ciclo trigonométrico mediante a função E

NÚMERO DE VOLTAS COMPLETAS	SENTIDO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO	NÚMERO REAL RESULTANTE	PONTO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO ($E(x)$)
1	POSITIVO		
1	NEGATIVO		
2	POSITIVO		
2	NEGATIVO		
3	POSITIVO		
3	NEGATIVO		
4	POSITIVO		
4	NEGATIVO		

Fonte: O autor (2019)

2) Os números $\pi,\ \pi \pm 2\pi,\ \pi \pm 4\pi,\ \pi \pm 6\pi$ e $\pi \pm 8\pi$ têm a mesma imagem $E(x)$ no ciclo trigonométrico? Caso sua resposta seja afirmativa, como você justificaria isso?

3) Existem números reais distintos que possuem a mesma imagem no ciclo trigonométrico? Se a sua resposta for positiva, quando isso acontece?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 2

Observe que a Função de Euler tem imagens que se repetem cada vez que é somado k vezes o valor de 2π ao número x. Isto acontece porque quando esta soma é realizada, no ciclo trigonométrico é dado uma volta completa e a imagem de x acaba sendo a mesma do número $x + 2\pi$, $x + 4\pi$, $x + 6\pi$, $x + 8\pi$, etc. Isto acontece também no sentido anti-horário: A imagem de x pela função E é a mesma para $x, x - 2\pi, x - 4\pi, x - 6\pi$,etc. Em linguagem Matemática escrevemos:

$$\boldsymbol{E(x) = E(x + 2k\pi)\ (k \in \mathbb{Z})}$$

4) Um piloto de *Fórmula 1* percorre uma pista perfeitamente circular. Após percorrer 500 metros, ele passa pelo ponto D pela primeira vez. Quantas voltas completas ele terá que percorrer para passar novamente pelo ponto D pela segunda vez?

5) Qual o menor percurso a ser percorrido por este piloto para que ele passe sempre pelo ponto D?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 3

O que foi exposto na Intervenção Formalizante 2, indica que a Função de Euler $E: x \to E(x)$ é uma função periódica, pois satisfaz a seguinte definição:

Uma função f é dita periódica se existe um número real $p' \neq 0$ tal que, para todo $x \in D(f)$ e $x + p' \in D(f)$, temos: $\boldsymbol{f(x+p') = f(x)}$ $\quad (\boldsymbol{i})$

O menor valor de p' estritamente positivo em que ocorre $(\boldsymbol{i})$ é denominado de **PERÍODO** de uma função periódica, representamos este período simplesmente por $\boldsymbol{p}$".

6) Você conhece outros exemplos de funções ou fenômenos que se repetem (fenômenos periódicos)? Cite-os.

4.3- UARC 3: A função de Euler e a razão trigonométrica seno

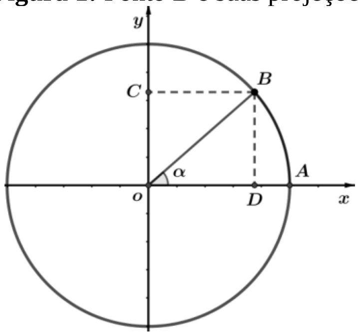
MATERIAIS: Lista de tarefas, lápis, borracha e caderno.

PROCEDIMENTOS: Fazer a leitura do texto e resolver as questões propostas.

Você lembra da brincadeira a roda gigante? Pois bem, considere que ela tenha sido representada no ciclo trigonométrico (Figura 1). Nela, foram representados os pontos de embarque/desembarque (ponto A) e o ponto B. Além destes pontos, o tio da criança marcou nos eixos x e y os pontos D e C, respectivamente, formando os segmentos $\overline{OD}$ e $\overline{OC}$. Esses segmentos $\overline{OD}$ e $\overline{OC}$ são as projeçoes ortogonais do ponto B sobre os eixos x e y, respectivamente:

A partir das informações apresentadas e da figura acima, onde se tem o triângulo ODB, retângulo em D, responda:

Figura 1: Ponto B e suas projeções



Fonte: O autor (2019)

1) Os segmentos $\overline{DB}$ e $\overline{OC}$ têm o mesmo comprimento?
2) Qual a medida do segmento $\overline{OB}$?
3) Utilizando a razão trigonométrica seno, investigue a relação existente entre o seno e o segmento $\overline{OC}$.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 4

$$sen\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}}$$

Sabendo que: $\overline{BD} = \overline{OC}$ e que $\overline{OB} = 1$, temos: $sen\alpha = \frac{\overline{OC}}{1}$

Logo: $sen\alpha = \overline{OC}$

O seno de um arco no ciclo trigonométrico é igual ao segmento $\overline{OC}$, correspondente à projeção ortogonal do raio do ciclo trigonométrico (com extremidade no ponto B) sobre o eixo $0y$.

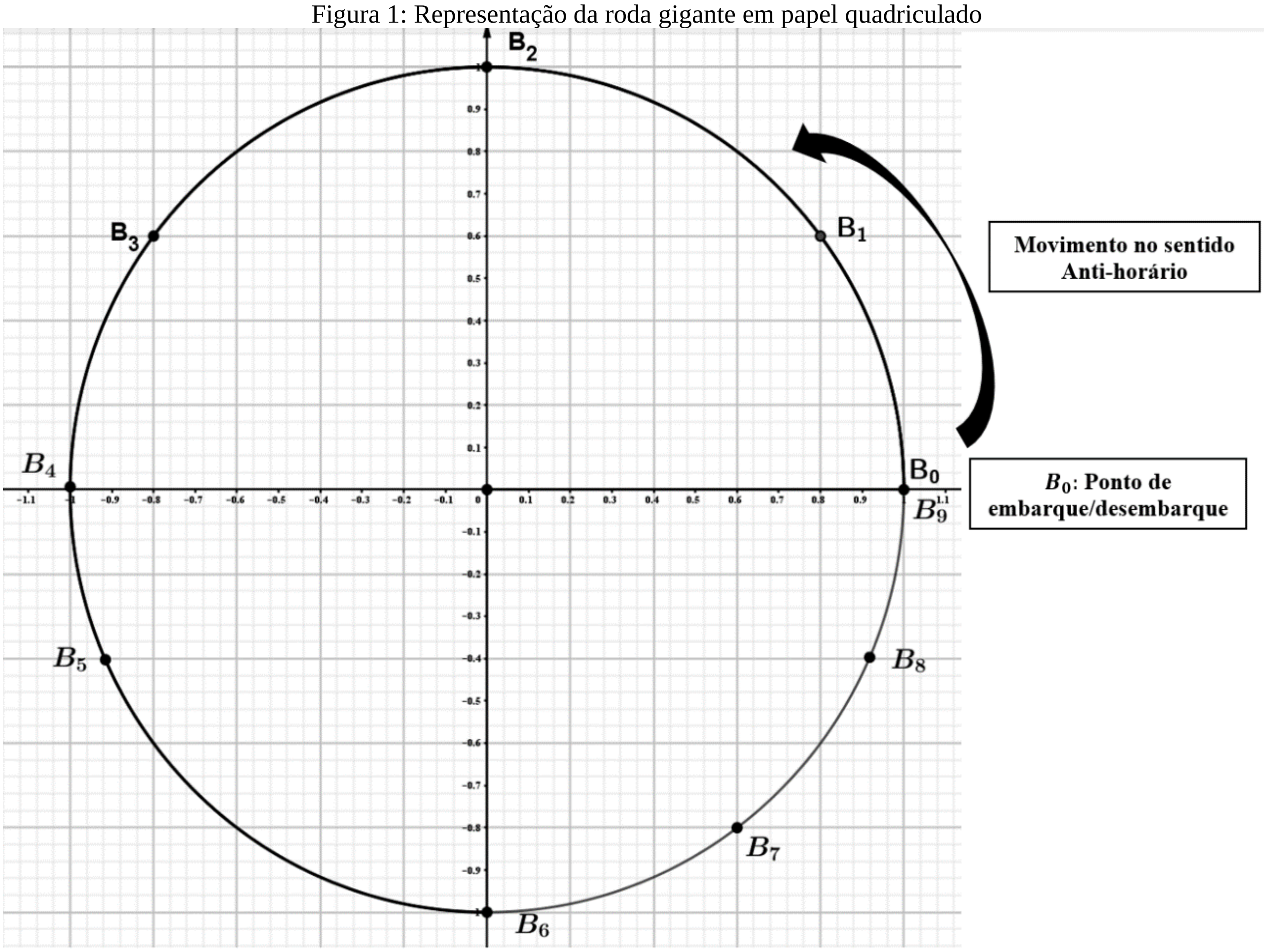
4.4- UARC 4: Seno versus ordenada

MATERIAIS: Lista de tarefas, lápis, borracha e caderno.

PROCEDIMENTOS: Fazer a leitura do texto e resolver as questões propostas.

$[I_i]$ Considere que a Figura 1 seja a representação da roda gigante em um ciclo trigonométrico, onde o ponto B_0 é o ponto de embarque às gaiolas dos brincantes:

Figura 1: Representação da roda gigante em papel quadriculado



Fonte: O autor (2019)

No ciclo trigonométrico acima os eixos $0x$ e $0y$ estão graduados em 0,1.

Nele, foram marcadas as imagens de dez números reais representados (*pela função de Euler*) pelos pontos $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$ e B_9.

Considere que os pontos pertencentes ao ciclo trigonométrico que estão acima do eixo $0x$ sejam chamados de ALTURA e os pontos que estão abaixo do referido eixo sejam chamados de PROFUNDIDADE.

A partir destas informações faça o que se pede:

1) $[I_e]$ Preencha o Quadro 1 conforme indicado na linha correspondente ao ponto B_7 (pode ser utilizado valores aproximados), onde é atribuído o sinal positivo à projeção ortogonal relacionada a ALTURA e o sinal negativo, caso esteja relacionado a uma PROFUNDIDADE:

Quadro 1: Pontos e suas coordenadas

Ponto	Projeção ortogonal do raio sobre o eixo $0y$	Altura ou profundidade?	Sinal atribuído (negativo/ positivo)	Projeção ortogonal com o sinal atribuído	Ordenada do ponto B_n no ciclo trignométrico
B_0					
B_1					
B_3					
B_5					
B_6					
B_7	0,8	Profundidade	Negativo	$-0{,}8$	$-0{,}8$
B_8					

Fonte: O autor (2019)

2) $[I_r]$ As projeções ortogonais (acompanhadas do sinal referente a altura ou profundidade) e a ordenada dos pontos representado em cada linha são sempre iguais? Por que você acha que isso ocorre?

3) $[I_r]$ Cada ponto do ciclo trigonométrico tem uma projeção ortogonal sobre o eixo $0y$? Cada ponto do ciclo trigonométrico tem um seno? Justifique.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 4

A ordenada de um ponto B no ciclo trigonométrico, imagem do número real x, corresponde ao valor do seno deste ponto. Em outras palavras: dado um número real x, o seno dele é igual ao valor da sua ORDENADA.

4) $[IA_r]$ A Figura 3 apresenta um ciclo trigonométrico no qual estão representados os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K. Estes pontos são imagens dos números reais $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\ e\ x_{11}$, respectivamente. Determine:

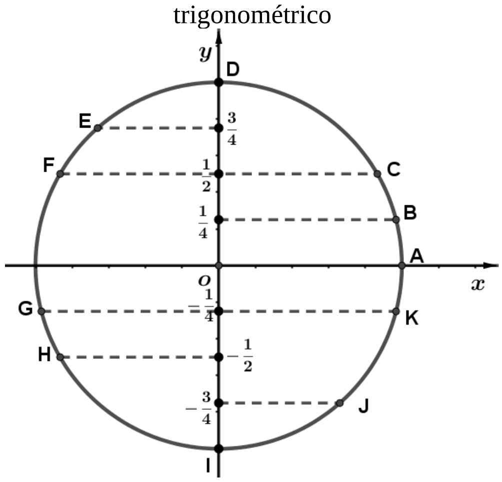
a) $senx_1 + senx_3$

b) $senx_{10} + senx_2$

c) $senx_4 + senx_8$

d) $senx_5 - 2.senx_6$

Figura 3: Seno de um número no ciclo trigonométrico



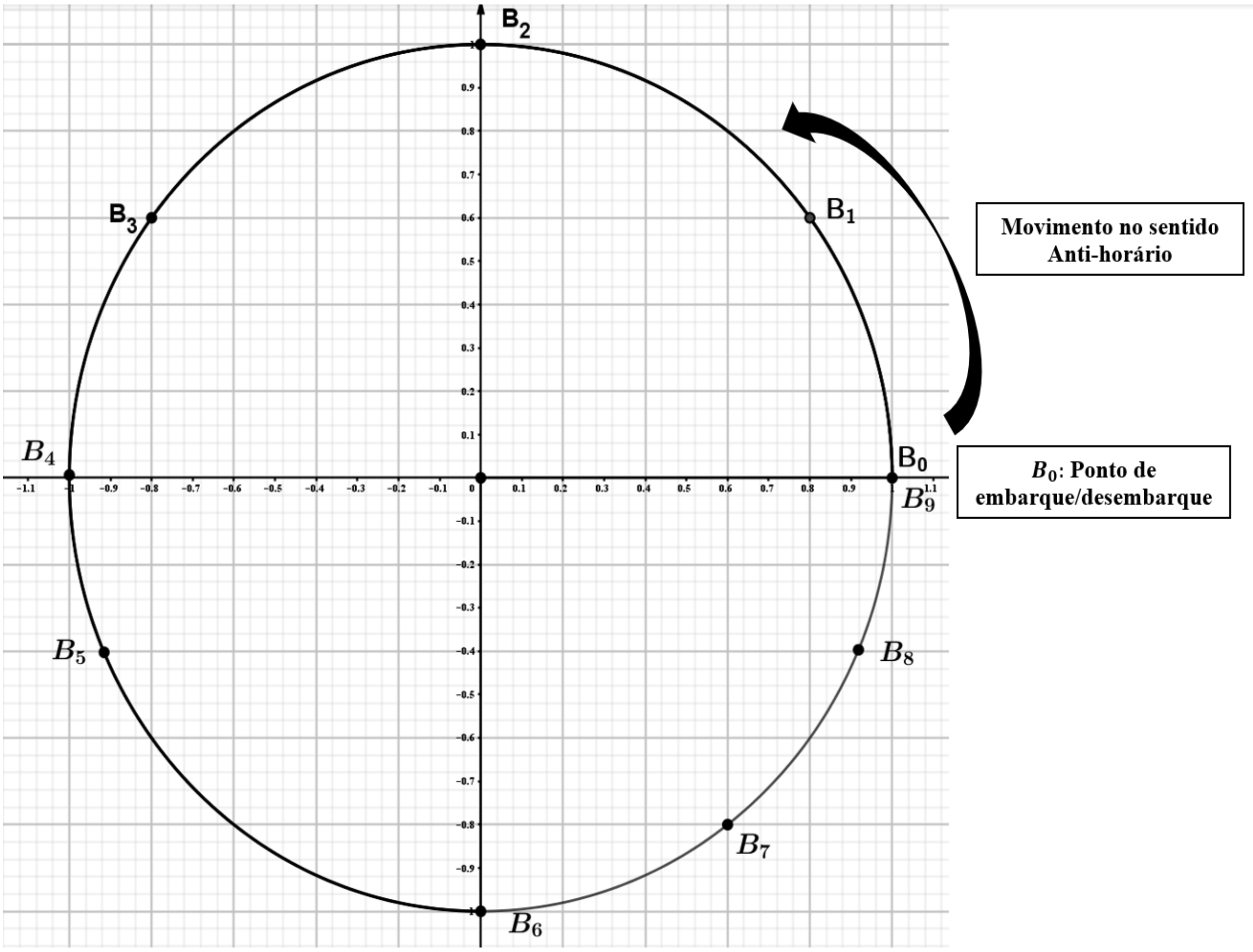
4.5- UARC 5: Passando pelo mesmo ponto

MATERIAIS: Lista de tarefas, lápis, borracha e caderno.

PROCEDIMENTOS: Fazer a leitura do texto e resolver as questões propostas.

1) $[I_i]$ Observe a Figura 1 que representa nove pontos no ciclo trigonométricos e responda as questões a seguir:

Figura 1: Representação da roda gigante em papel quadriculado



Fonte: O Autor (2019)

a) $[I_e]$ Preencha o Quadro 1 com os valores aproximados dos senos dos números representados pelos pontos indicados:

Quadro 1: Seno do número representado

IMAGEM DO NÚMERO REAL	SENO DO NÚMERO REAL
B_1	
$B_1 + 2\pi$	
$B_1 + 4\pi$	
$B_1 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$	

Fonte: O autor (2019)

b) $[I_e]$ Preencha o Quadro 2 com os valores aproximados dos senos dos números representados pelos pontos indicados:

Quadro 2: Seno do número representado

IMAGEM DO NÚMERO REAL	SENO DO NÚMERO REAL
B_5	
$B_5 + 2\pi$	
$B_5 + 4\pi$	
$B_5 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$	

Fonte: O autor (2019)

2) Os pontos B_n e $B_n + 2k\pi\ (k \epsilon \mathbb{Z})$ estão representados na mesma posição no ciclo trigonométrico?

3) Os pontos B_n e $B_n + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$ têm o mesmo valor do seno? Por que você acha que isso ocorre?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 5

Os números $x, x + 2\pi, x + 4\pi, \ldots, x + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ têm os mesmos valores senos, pois eles têm a mesma imagem no ciclo trigonométrico (pela função de Euler). Obviamente que, sendo $k \in \mathbb{Z}$**,** k a mesma coisa acontece em relação aos números $x, x - 2\pi, x - 4\pi, \ldots, x - 2k\pi$.

Genericamente, podemos afirmar que:

$$\boldsymbol{senx = sen(x + 2k\pi)(k \in \mathbb{Z})}$$

4) $[I_r]$ A partir da resolução da questão anterior, e considerando a Figura 1, julgue os itens como VERDADEIRO (V) ou FALSO (F):

( ) Pela Função de Euler (E), todo número real x tem uma imagem $E(x)$ no ciclo trigonométrico, que corresponde ao ponto B, extremidade do arco $\widehat{AB}$ de medida x.

( ) Somente alguns pontos no ciclo trigonométrico tem um par ordenado associado a ele.

( ) Todo ponto no ciclo trigonométrico tem um par ordenado associado a ele.

( ) O seno de um Ponto B no ciclo trigonométrico equivale a projeção ortogonal de B sobre o eixo $0x$.

( ) Dado um Ponto B no ciclo trigonométrico, o seno deste ponto é igual ao valor da sua abscissa.

( ) Dado um Ponto B no ciclo trigonométrico, o seno deste ponto é igual ao valor da sua ordenada.

( ) Os números reais $x, x + 2\pi, x + 4\pi, \ldots,\ x + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ têm o mesmo seno, pois possuem a mesma ordenada no ciclo trigonométrico.

( ) Pela Função de Euler (E), para cada número real x está associado a um único valor para $senx$, que é numericamente igual ao valor da ordenada de $E(x)$.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 6

Uma das grandes contribuições da Função de Euler (E) para a trigonometria foi a possibilidade de associar um número real x a um ponto do ciclo trigonométrico.

Essa associação permite definir o seguinte:

"Para todo número real x existe um único real $f(x)$ tal que $f(x) = senx$"

Como esta relação é biunívoca (*cada número real x está associado a uma única ordenada no ciclo trigonométrico*), podemos afirmar que esta associação é na verdade uma **função** f, denominada de **FUNÇÃO SENO**.

Assim, para todo número real x existe o número real $f(x)$, imagem de x pela função f, tal que:

$$f(x) = senx$$

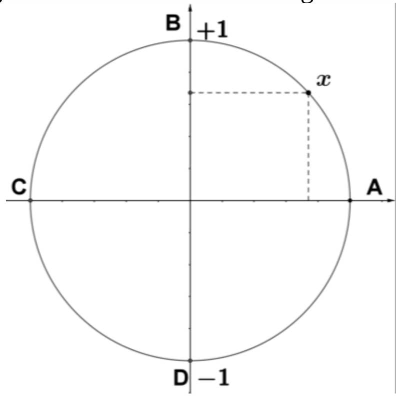
4.6- UARC 6: Propriedades da função seno

MATERIAIS: Lista de tarefas, lápis, borracha e caderno.

PROCEDIMENTOS: Fazer a leitura do texto e resolver as questões propostas.

1) $[I_r]$ Considere os pontos A, B, C e D (Figura 1) e o número x no ciclo trigonométrico, representados na roda gigante do parque de diversões (em uma escala):
A partir destas informações, responda:

Figura 1: Número x no ciclo trigonométrico



Fonte: O autor (2019)

a) Em qual ponto a pessoa estará na MAIOR ALTURA POSSÍVEL na roda gigante? Qual o valor do seno neste ponto?
b) Qual o MAIOR VALOR que o seno pode assumir?
c) Em qual ponto a pessoa estará na MAIOR PROFUNDIDADE POSSÍVEL na roda gigante?
d) Qual o MENOR VALOR que o seno pode assumir?
e) O valor de $senx$ varia de qual número a qual número?
f) A partir de quantas volta completa o valor de $senx$ começa a se repetir?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 7

Seja a função f definida por: $f: x \to senx$ $(FUNÇÃO\ SENO)$

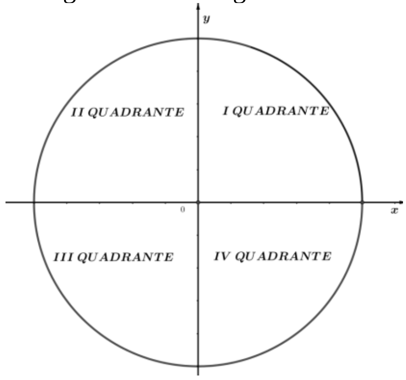
O **Domínio da função f é** $\mathbb{R}$ (x é qualquer número real). A **Imagem de f** é o intervalo: $[-1; 1]$, ou seja, $-1 \leq senx \leq 1$. **Portanto, a função f é definida de** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Afinal, ela associa um número real x ao seu seno, que também é um número real). Na função seno, para todo x real, temos:

$$\boldsymbol{senx = sen(x + 2k\pi)}, k \in Z$$

Assim a função seno é periódica e seu $\boldsymbol{p = 2\pi}$ (A partir de uma volta completa – de 0 a 2π – o valor do seno se repete).

2) Considere, que a figura que representa a roda gigante na questão anterior esteja dividida em quadrantes e que os arcos estão orientados no SENTIDO POSITIVO (Figura 2), faça o que se pede:

Figura 2: Ciclo trigonométrico



Fonte: O autor (2019)

a) Em quais quadrantes a criança terá uma ALTURA em relação ao eixo $0x$? E em quais quadrantes a criança terá uma PROFUNDIDADE em relação ao eixo $0x$?
b) Em quais quadrantes o seno é MAIOR que zero? Em quais quadrantes o seno é MENOR do que zero?
c) Preencha o Quadro 1 informando se os valores da função seno CRESCEU ou DIMINUIU em cada intervalo:

Quadro 1: Crescimento/ Decrescimento da função seno

INTERVALO CONSIDERADO	CRESCIMENTO/DECRESCIMENTO
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	

Fonte: O autor (2019)

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 8
SINAL E CRESCIMENTO/DECRESCIMENTO DA FUNÇÃO SENO

A partir da resolução das questões propostas, podemos fazer um quadro resumo com o crescimento e decrescimento da função seno, considerando o sentido anti-horário dos arcos:

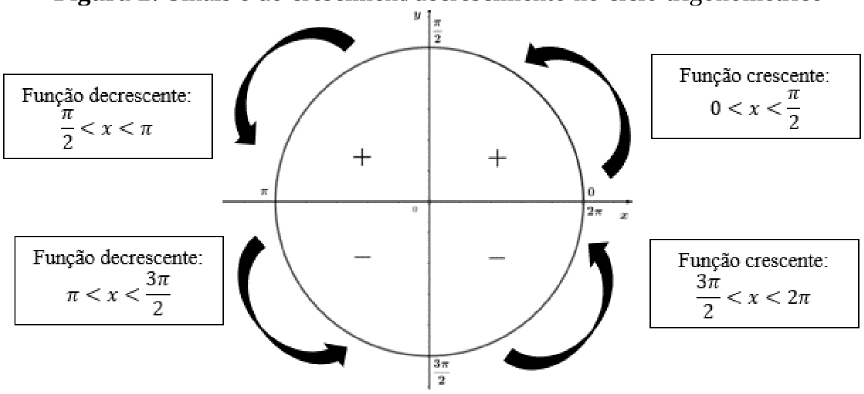
Quadro 3: Quadro-resumo dos sinais e do crescimento/decrescimento da função seno

	1º QUADRANTE	2º QUADRANTE	3º QUADRANTE	4º QUADRANTE
SINAL	Positivo	Positivo	Negativo	Negativo
CRESCIMENTO/ DECRESCIMENTO	Crescimento	Decrescimento	Decrescimento	Crescimento

Fonte: O autor (2019)

Essas informações podem ser interpretadas no ciclo trigonométrico, conforme mostra a Figura 2:

Figura 2: Sinais e do crescimento/decrescimento no ciclo trigonométrico



Fonte: O autor (2019)

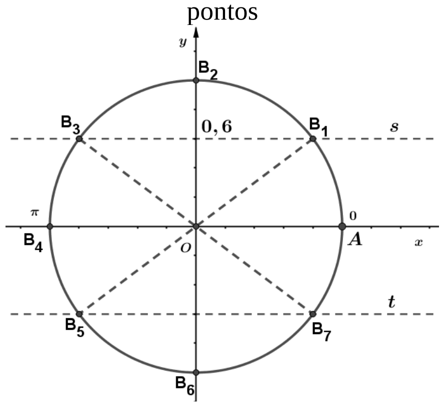
4.7- UARC 7: Retornando ao 1º quadrante

MATERIAIS: Lista de tarefas, lápis, borracha e caderno.

PROCEDIMENTOS: Fazer a leitura do texto e resolver as questões propostas.

$[I_i]$ Considere que o ciclo trigonométrico representado pela Figura 1 represente a roda gigante do início da nossa história. Nele foram marcados os pontos B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 e B_7.
Do ponto B_1 foi traçada a *reta* s enquanto do ponto B_7 foi traçada a *reta* t. Sabe-se que ambas as retas, s e t, são paralelas ao eixo $0x$ e que os pontos B_1 e B_7 estão à mesma distância (0,6) do eixo das abscissas. A partir destas informações, faça o que se pede:

Figura 1: Ciclo trigonométrico com vários pontos



Fonte: O autor (2019)

1) $[I_r]$ Considere que o número real x esteja associado ao Ponto B_3 no 2º Quadrante, isto é, $med(\widehat{AB_3}) = x$, e responda o que se pede:

a) Os pontos B_1 e B_3 estão à MESMA ALTURA?

b) Os valores do $sen(\widehat{AB_1})$ e do $sen(\widehat{AB_3})$ são iguais?

c) Você pode afirmar que $med(\widehat{AB_1}) = med(\pi - x)$?

d) É possível afirmar que, se x estiver no 2º quadrante, $senx = sen(\pi - x)$?

2) $[I_r]$ Considere que o número real x agora esteja associado ao Ponto B_5 no 3º Quadrante, isto é, $med(\widehat{AB_5}) = x$:

a) Você pode afirmar que $med(\widehat{AB_1}) = med(x - \pi)$?

b) Qual o valor do $sen(\widehat{AB_1})$? E o valor do $sen(\widehat{AB_5})$?

c) Você pode afirmar que $sen(\widehat{AB_1}) = -sen(\widehat{AB_5})$?

d) É possível afirmar que, se x estiver no 3º quadrante, $senx = -sen(x - \pi)$?

3) Considere agora, que o número real x esteja associado ao Ponto B_7 no 4º Quadrante, isto é, $med(\widehat{AB_7}) = x$:

a) $[I_r]$ Você pode afirmar que $med(\widehat{AB_1}) = med(2\pi - x)$?

b) $[I_r]$ Qual o valor do $sen(\widehat{AB_1})$? E o valor do $sen(\widehat{AB_7})$?

c) $[I_r]$ Você pode afirmar que $sen(\widehat{AB_1}) = -sen(\widehat{AB_7})$?

d) $[I_r]$ Você pode afirmar que $senx = -sen(2\pi - x)$?

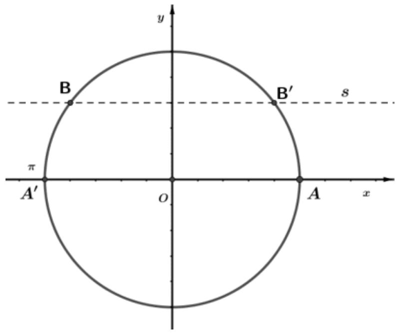
INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 9

A SIMETRIA NO CICLO TRIGONOMÉTRICO E A INFLUÊNCIA NO VALOR DO SENO

No ciclo trigonométrico podemos perceber simetrias entre alguns pontos contidos nele. Estas simetrias podem facilitar o cálculo dos valores dos senos destes pontos. Considere os três casos a seguir:

1° CASO: $\boldsymbol{x}$ está no SEGUNDO quadrante ($\boldsymbol{\frac{\pi}{2} < x < \pi}$)

Figura 1: $med(\widehat{AB}) = x$



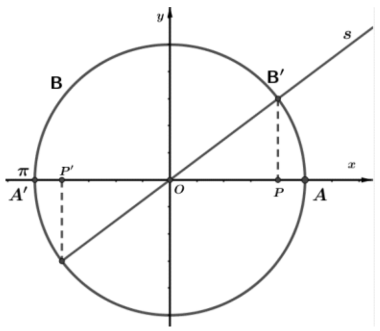
Fonte: O autor (2019)

Tracemos pelo ponto B a reta s paralela ao eixo $0x$. Esta reta intersecta o ciclo trigonométrico no ponto B'(**Figura 1**). Percebemos que: $med(\widehat{AB'}) = med(\widehat{BA'}) = \pi - x.$

Logo: $(\boldsymbol{i})$ $\boldsymbol{senx = sen(\pi - x)}$

2º CASO: $\boldsymbol{x}$ está no TERCEIRO quadrante ($\boldsymbol{\pi < x < \frac{3\pi}{2}}$)

Figura 2: $med(\widehat{AB}) = x$



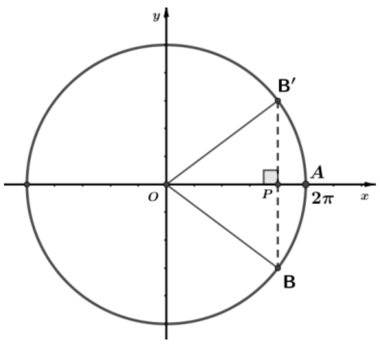
Fonte: O autor (2019)

Tracemos por B uma reta s que intersecta o ponto O. Esta reta passará pelo ponto B' pertencente ao ciclo trigonométrico (**Figura 2**): Os ângulos $A\hat{O}B$ e o ângulo $A'\hat{O}B$ são opostos pelo vértice. Logo: $med(\widehat{A'B}) = med(\widehat{AB'}) = x - \pi.$ Com isso, podemos afirmar que os segmentos $\overline{PB'}$ e o segmento $\overline{P'B}$ **tem a mesma medida**, porém, **senos simétricos** (no 3º quadrante o **seno é negativo**).

Portanto: $(\boldsymbol{ii})$ $\boldsymbol{senx = sen(x - \pi)}$

3º CASO: $\boldsymbol{x}$ está no QUARTO quadrante ($\boldsymbol{\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi}$)

Figura 3: $med(\widehat{AB}) = x$



Fonte: O autor (2019)

Tracemos pelo ponto $\boldsymbol{B}$ um segmento perpendicular ao eixo $0\boldsymbol{x}$ que intersecte o eixo $\boldsymbol{ox}$ em $\boldsymbol{P}$ e tenha extremidade no ponto $\boldsymbol{B'}$ pertencente ao ciclo trigonométrico (Figura 3). O triângulo $\boldsymbol{BOB'}$ é isósceles, pois $\overline{\boldsymbol{OB'}} \equiv \overline{\boldsymbol{OB}}$ =Raio do ciclo trigonométrico (o símbolo ≡ significa congruência) . Logo, o P é o ponto médio do segmento $\overline{\boldsymbol{BB'}}$. Deste modo, os segmentos $\overline{\boldsymbol{BP'}}$ e $\overline{\boldsymbol{B'P}}$ tem a mesma medida.

Se triângulo $\boldsymbol{BOB'}$ é isóscele, temos que: $\boldsymbol{med(\widehat{AB'}) = med(\widehat{BA}) = 2\pi - x}$

Assim, apesar de os segmentos $\overline{\boldsymbol{BP'}}$ e $\overline{\boldsymbol{B'P}}$ terem a mesma medida, seus senos são simétricos (no 4º quadrante o seno é negativo).

Portanto: $(\boldsymbol{iii})$ $\boldsymbol{senx = -sen(2\pi - x)}$

OBSERVAÇÃO 1:

Este procedimento de encontrar o valor do seno de um arco a partir de um arco do 1º Quadrante é conhecido como o processo de REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE. Ele é muito útil em cálculos de valores de senos de arcos que podem ser reduzidos a um arco conhecido no primeiro quadrante.

OBSERVAÇÃO 2:

Embora tenhamos feito a redução ao 1º Quadrante com arcos em radianos, pode-se utilizar a mesma ideia para se obter a redução de ângulos em graus, conforme os exemplos abaixo:

Exemplo 1:

Qual o valor de $sen150°$?

Solução:

$$sen150° = sen30° = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2:

Qual o valor de $sen210°$?

Solução:

$$sen210° = -sen30° = -\frac{1}{2}$$

4) O valor do $sen\frac{3\pi}{4}$ é equivalente ao do:

a) $sen\frac{\pi}{6}$ $b)sen\ \frac{\pi}{2}$ c) $sen\frac{\pi}{4}$ d) $sen\frac{\pi}{3}$

5) O valor da expressão

$$p = \frac{sen150°.sen45°.sen120°}{sen210°.sen330°}$$

É igual a:

a) $\frac{1}{2}$ $b)\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

4.8- UARC 8: Gráfico da função seno

MATERIAIS: Lista de tarefas, lápis, borracha e caderno.

PROCEDIMENTOS: Fazer a leitura do texto e resolver as questões propostas.

1) $[I_e]$ Preencha o Quadro 1 com os valores do seno do número x dado (se necessário, utilize uma calculadora científica arredondando-se o valor encontrado até a segunda casa decimal):

Quadro 1: Arco e seus senos

x	$senx$	x	$senx$
0		$0-2\pi$	
$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}-2\pi$	
π		$\pi-2\pi$	

$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2} - 2\pi$	
2π			

Fonte: O autor (2019)

2) $[I_e]$ A partir dos valores obtidos nos Quadro 1, faça um esboço do gráfico da função $f: x \rightarrow senx$.

3) A partir do gráfico obtido na Questão 2, responda:

a) $[I_r]$ Qual o VALOR MÁXIMO que $senx$ pode assumir? Qual o VALOR MINÍMO que $senx$ pode assumir?

b) $[I_r]$ Qual o intervalo correspondente ao conjunto imagem da função seno?

c) $[I_r]$ Qual a distância entre os números $-2\pi\ e\ 0$? E qual a distância entre os números $2\pi\ e\ 0$?

d) $[I_r]$ A linha que representa o gráfico da função seno no intervalo $-2\pi < x < 0$ e no intervalo $0 < x < 2\pi$ são idênticas? Se a sua resposta for positiva, como você justificaria isso?

4) Considerando APENAS o intervalo entre $0\ e\ 2\pi$ do Gráfico obtido na Questão 2, responda:

a) $[I_r]$ Em qual (is) intervalo (s) temos $f(x) \geq 0$? Este(s) intervalo(s) corresponde(m) qual(is) quadrante(s) no ciclo trigonométrico?

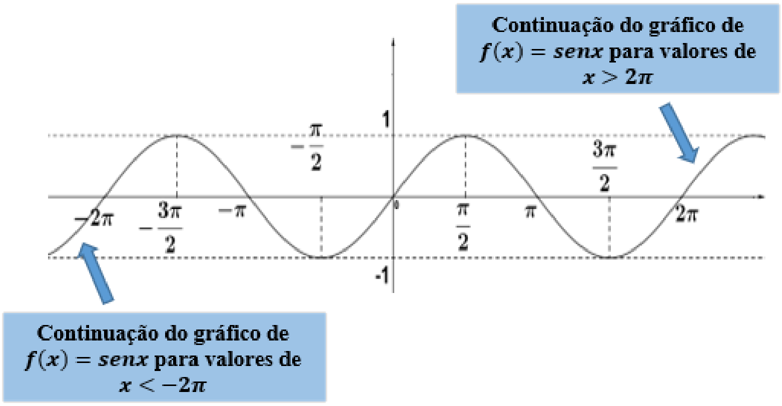
b) $[I_r]$ Em qual (is) intervalo (s) temos $f(x) \leq 0$? Este (s) intervalo(s) compreende(m) qual(is) quadrante(s) no ciclo trigonométrico?

c) $[I_r]$ Em qual(is) intervalo(s) de x a função $f(x) = senx$ é crescente?

d) $[I_r]$ Em qual(is) intervalo(s) de x a função $f(x) = senx$ é decrescente?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 10

O gráfico obtido na resolução da Questão 2 é apenas uma parte do gráfico da função seno, pois como já vimos anteriormente, para todo número real, pela função seno, existe o valor de um seno correspondente. O gráfico abaixo indica essa continuidade para $x > 2\pi$ e $x < -2\pi$:



A partir da resolução das questões anteriores e da representação gráfica da função $f(x) = senx$ acima, podemos extrair as seguintes propriedades:

- ✓ A função f é uma **FUNÇÃO PERIÓDICA**, pois seu gráfico sempre se repete com intervalos de 2π, isto é, o **PERÍODO** de f $p = 2\pi\ rad$;
- ✓ O **CONJUNTO IMAGEM** DE f é o intervalo: $-1 \leq senx \leq 1$;
- ✓ O **CONJUNTO DOMÍNIO** da função f é o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$);
- ✓ A função é **POSITIVA** no 1º e no 2° quadrante e **NEGATIVA** nos 3° e 4° quadrantes.
- ✓ A função é **CRESCENTE** no 1º e no 4° quadrante e **DECRESCENTE** no 2° e 3° quadrante.

OBSERVAÇÃO: Comumente, o conjunto imagem da função seno é denominado de **"amplitude"** e é calculada fazendo a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da função. Sendo A a **amplitude** da função $f(x) = senx$, temos que $A = 1 - (-1) = 2$. Logo, a amplitude da função referida é 2.

5- PROCEDIMENTOS E ANÁLISE DA PESQUISA

5.1- Procedimentos Metodológicos da Pesquisa

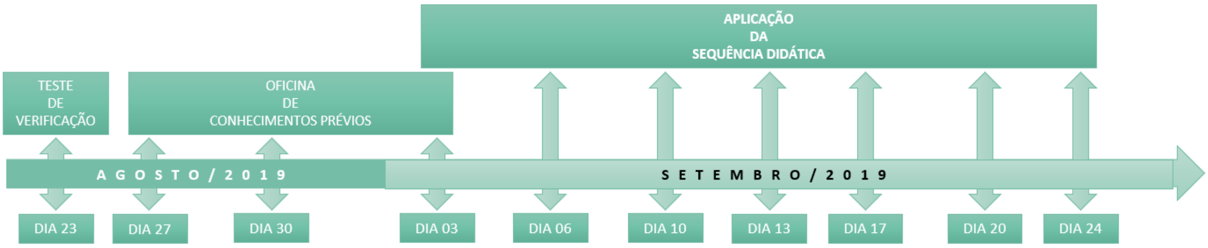
Nesta subseção apresentaremos os procedimentos metodológicos utilizados em nossa pesquisa, a qual foi realizada em uma turma do segundo ano do ensino médio de uma escola pública estadual do bairro do Paar, região metropolitana de Belém. Escolhemos uma escola pública estadual considerando que, em geral, nas escolas públicas os estudantes apresentam maiores dificuldades em seus estudos. A escola em que aplicamos a sequência didática, segundo dados oficiais, teve nota 2,0 no IDEB do ano de 2017. Outro motivo que nos fez optar pela escola em que foi aplicado a sequência didática foi de o professor da turma ser um amigo de uma das mestrandas de nossa turma. A turma em que aplicamos a sequência didática possuía 42 discentes e foi selecionada a partir da indicação do próprio professor da escola. As aulas em que foram aplicadas a sequência didática ocorreram às terças e às sextas-feiras, no período da tarde.

Antes de aplicarmos a sequência didática, considerando a necessidade de os escolares terem conhecimentos prévios de conteúdos importantes para o aprendizado da função seno, no dia 23/08/2019, aplicamos o Teste de Verificação (Apêndice B), que englobava os conhecimentos de geometria plana (cálculo de área de polígonos e do círculo; cálculo de comprimento de circunferência e de arcos; relações entre arcos e ângulos, projeções ortogonais, etc.); trigonometria básica (razões trigonométricas no triângulo retângulo; arcos no ciclo trigonométrico; relações entre diversas unidades de medidas de ângulo; incluindo o radiano; etc.); funções (definição, propriedades, gráficos, etc.); geometria analítica (pares ordenados, representações gráficas de funções, distância entre pontos no plano cartesiano, etc.), entre outros temas.

Na aplicação do referido Teste, percebemos um baixo desempenho dos escolares. Assim, objetivando favorecer a aprendizagem dos mesmos no que tange aos conhecimentos prévios e minimizar as dificuldades na aplicação da sequência didática, entre os dias 27/08/2019 e 03/09/2019, aplicamos a Oficina (Apêndice C). A referida aplicação se deu a partir de aulas expositivas/dialogadas nas quais todos os estudantes recebiam as unidades da oficina que seria trabalhada em cada dia.

Superadas essas etapas, em 03/09/2019, último dia da aplicação da Oficina citada anteriormente, iniciamos a aplicação da sequência didática, a qual se estendeu até o dia 24/09/2019, sempre às terças e sextas-feiras. A figura 9 apresenta uma linha do tempo relacionada aos procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa.

Figura 8 - Linha do tempo dos procedimentos metodológicos



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Inicialmente, os discentes e o Professor responsável pela turma receberam uma via do TCLE (Anexo A e Anexo B, respectivamente). Em seguida, fizemos a leitura deste documento com todos em sala de aula, esclarecendo possíveis dificuldades na interpretação dele. Após essa etapa, com assinatura dos referidos TCLE's e com ajuda de um discente do Curso de Mestrado, iniciamos a aplicação da sequência didática propriamente dita.

Neste contexto, ao perceberem que os participantes da pesquisa teriam que participar de gravações de vídeos e áudios, infelizmente, muitos estudantes optaram por não participar da aplicação da sequência didática. Embora reforçando que tais gravações não seriam divulgadas em nenhum meio, estes insistiram que não queriam participar mais da pesquisa. Considerando que a participação era voluntária e até mesmo para evitar qualquer tipo de litígio, resolvemos não insistir para que estes alunos permanecessem na pesquisa. O total dos discentes que firmaram o propósito de participar da nossa pesquisa foi de 18 estudantes.

Para facilitar a transcrição dos áudios e dos eventos considerados importantes na presente pesquisa, dividimos os 18 alunos em 6 grupos (A, B, C, D, E, F) com quantidade igual. Os estudantes foram identificados pelos três primeiros números naturais não-nulos, para garantir o anonimato da pesquisa. Os grupos formados foram:

Grupo A: A1, A2, A3;

Grupo B: B1, B2, B3;

Grupo C: C1, C2, C3;

Grupo D: D1, D2, D3;

Grupo E: E1, E2, E3;

Grupo F: F1, F2, F3;

Por convenção entre todos na sala de aula, dividimos a turma em dois macros grupos: os estudantes que iriam participar da pesquisa deveriam ficar no lado esquerdo da sala e os que optaram por não participar deveriam ficar no lado direito. Além disso, dos que demonstraram participar da pesquisa e que já haviam sido inseridos em um dos 6 grupos acima, pedimos que evitassem mudar de grupo até o fim da pesquisa. Pelos vídeos analisados na subseção seguinte, percebemos que nosso pedido foi atendido.

5.2- Análise Microgenética da Pesquisa

Nesta seção apresentamos a Análise Microgenética das interações sociais ocorridas na aplicação da sequência didática. Essa análise tem como objetivo sondar os indícios de aprendizagens dos escolares à luz dos referenciais teóricos adotados nesta pesquisa. Para isso, além da análise microgenética, utilizamos a ferramenta para Análise do Discurso encontrada em Mortimer e Scott (2002).

Como propõe a análise microgenética, em nossa análise serão considerados unicamente recortes das transcrições ocorridas quando da aplicação da sequência didática. Afinal, neste tipo de análise são considerados os *processos* de aquisição de conhecimento e não os *produtos*.

Para uma melhor compreensão da análise didática, consideramos:

- *Turno:* Cada fala de um dos personagens da pesquisa (professor/aluno);
- *Segmento:* Conjunto de turnos transcritos em ordem cronológica dos eventos ocorridos que encerram um objetivo didático-pedagógico;
- *Episódio:* Conjunto de turnos correspondente a uma UARC.

Sempre que necessário, o leitor poderá recorrer ao quadro 9 para entender o significado dos seguintes signos:

Quadro 9 - Signos e significados utilizados na Análise Microgenética

SIGNO	SIGNIFICADO
[...]	Chaves com reticência: Indica que houve um salto conveniente pelo pesquisador nos turnos analisados. Pode indicar também que o pesquisador, após um intervalo de tempo, devido a ausência de manifestação dos estudantes, precisou retomar à fala para dar prosseguimento na pesquisa e avançar com o conteúdo.
[abc]	Chaves com texto: O texto “abc” (entre colchetes) foi acrescentado a partir da análise dos vídeos para uma melhor compreensão daquilo que foi transcrito.
(abc)	Parênteses com texto: O texto “abc” (entre parênteses) pode ser subtendido a partir do contexto, mas a sua adição visa favorecer a compreensão.
abc	Texto em itálico: O texto em itálico indica que houve uma visível quebra da norma culta da Língua Portuguesa, mas foi mantido *ipsis litteris* pela tradução fidedigna das falas dos personagens.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Destacamos ainda que em vários momentos desta análise o professor faz pergunta retóricas, que tem como objetivo estimular o discente a refletir sobre a sua própria pergunta ou sobre a resposta já proferida, além de ofertar ao respondente o tempo necessário para que ele mobilize os conhecimentos já adquiridos para a formulação de novas respostas.

O aluno, por sua vez, algumas vezes socorre-se de *perguntas confirmatórias* ao responder as indagações do professor. Consideramos *pergunta confirmatória* aquela *pergunta* realizada por um indivíduo no momento de responder algo, onde, mediante solicitação *confirmatória*, o indivíduo requer que o proponente da questão inicial confirme a sua fala. Além disso, as palavras utilizadas nas perguntas confirmatórias já trazem a resposta daquilo que se pretendia responder, porém, em forma de questionamento.

A experiência nos mostra que perguntas confirmatórias feitas pelos discentes, em geral, é parte de uma tática dos escolares para *responder* à pergunta feita. Frequentemente, a situação se dá assim: se a resposta do discente (mediante pergunta confirmatória) estiver *correta*, o professor poderá ratificá-la ou avançar com o conteúdo; e se estiver *incorreta*, o professor poderá corrigir a resposta e o discente se sairá da situação (onde geralmente os demais discentes poderiam dizer que ele não sabia a resposta correta, com escárnios e zombarias, por exemplo, etc.) afirmando que se tratava de uma pergunta e não de uma afirmativa.

O Quadro 10 indica o número de cada UARC, os turnos que a compreendem, o título, os objetivos dos alunos e do professor, além dos turnos analisados em cada segmento. Na coluna que representa os indícios de aprendizagens dos escolares, "E" significa Episódio e "S" significa Segmento. Assim, por exemplo, a sigla $E1 - S1: 22 - 36$ quer dizer "Episódio 1 do Segmento 1, turnos 22 a 36".

Quadro 10 - UARC's, turnos, título e turnos analisados

UARC	TURNOS	TÍTULO	TURNOS ANALISADOS
1	01 - 508	Fio preso na roda gigante	$E1 - S1: 22 - 36;$ $E1 - S2: 37 - 87;$ $E1 - S3: 119 - 203;$ $E1 - S4: 379 - 391;$ $E1 - S5: 422 - 445;$ $E1 - S6: 455 - 465;$
2	509 - 666	Números diferentes na reta, pontos iguais no ciclo trigonométrico	$E2 - S1: 521 - 594;$ $E2 - S2: 633 - 644;$ $E2 - S3: 645 - 666;$
3	667 - 719	A função de Euler e a razão trigonométrica seno	$E3 - S1: 687 - 719;$
4	720 - 993	Seno versus ordenada	$E4 - S1: 735 - 749;$ $E4 - S2: 771 - 793;$ $E4 - S3: 854 - 879;$ $E4 - S4: 904 - 928;$ $E4 - S5: 955 - 981;$
5	994 - 1172	Passando pelo mesmo ponto	$E5 - S1: 1026 - 1064;$ $E5 - S2: 1090 - 1098;$ $E5 - S3: 1154 - 1172;$
6	1173 - 1294	Propriedades da função seno	$E6 - S1: 1184 - 1202;$ $E6 - S2: 1202 - 1216;$ $E6 - S3: 1222 - 1237;$

			$E6 - S4$: 1240 – 1262; $E6 - S5$: 1263 – 1294;
7	1295 - 1642	Retornando ao 1º quadrante	$E7 - S1$: 1314 – 1353; $E7 - S2$: 1391 – 1426; $E7 - S3$: 1452 – 1478; $E7 - S4$: 1552 – 1577;
8	1643 - 1938	Gráfico da função seno	$E8 - S1$: 1649 – 1683; $E8 - S2$: 1683 – 1727; $E8 - S3$: 1780 – 1796; $E8 - S4$: 1796 – 1804; $E8 - S5$: 1804 – 1818; $E8 - S6$: 1818 – 1844; $E8 - S7$: 1844 – 1862; $E8 - S8$: 1876 – 1890; $E8 - S9$: 1894 – 1910; $E8 - S10$: 1910 – 1928;

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

5.2.1- Análise Microgenética do Episódio 1

SEGMENTO 1: TURNOS 22 - 36

Neste segmento, o professor explora as ideias matemáticas por trás da estória referente a UARC 1, buscando estimular os alunos a lembrarem de conceitos vistos ainda na aplicação da Oficina. Dentre os conceitos a serem relembrado está o de medida de arco. Optei por apresentar os turnos 22 a 36, pois os turnos que os antecedem são basicamente explicação da estória matemática contida na UARC 1:

(22) Professor: Qual foi o comprimento percorrido aqui pessoal [apontando para o quadro]? Vou ajudar vocês só nessa parte aqui...quanto é?
(23) A1: 28.
(24) Professor: Qual a medida do arco aqui [aponta para a primeira linha a ser preenchida no quadro constante na questão 1]?
(25) C3: 8.
(26) C1: 28 *por* 8*?*
(27) Professor: [direcionando-se à C1] por que 28 *por* 8*?*
(28) C1: Porque (para calcular) a medida do arco divide o comprimento (do arco) pelo raio (da circunferência).
(29) Professor: Isso. Fazendo na calculadora...peguem a calculadora de vocês para ajudar...para ser mais rápido. Dá quanto?
(30) A3: Quatro.
(31) Professor: Não, pois $8x4$ *é* 32*. Dá um pouco menos.*
(32) C1: 3,5.
(33) Professor: 3,5*! Então essa vai ser a medida de quem?*
(34) A2: Do arco.
(35) Professor: Isso. Essa vai ser a medida de x*, a medida do arco da primeira linha. E assim vocês vão fazer em relação às outras (linhas) então, tá? Vamos só acabar de preencher a primeira linha. Então a medida do arco vai ser quanto?*
(36) A2: 3,5.

Neste segmento é possível percebermos que há a predominância da abordagem interativa/de autoridade, nas quais a intenção do professor é retomar o conceito de medida de arco, tendo como padrão de abordagem mais recorrente o do tipo I-R-P-R. No turno 22, percebemos que o professor, mobiliza o conhecimento de medida de arco com os escolares. Ao perceber, no turno 23, que o estudante havia respondido corretamente, o professor propõe, no turno 24, uma nova pergunta, mais direcionada para aquilo que pretende ensinar. Os dois turnos seguintes apresentam apenas uma resposta correta, a que está no turno 26. Entretanto, percebemos que ao invés de responder com uma afirmativa, o discente C1 propõe uma pergunta confirmatória. Ao perceber que a fala do discente C1 traz consigo significados para aquilo que está sendo ensinado, no turno 27, o professor ignora a fala do discente C3 (turno 25) e propõe nova pergunta. Ao fazer isso, o professor tem três objetivos principais: i) selecionar, ii) marcar e iii) compartilhar os significados chaves contidos na fala do discente C1.

No turno 28, o mesmo discente C1 responde corretamente à pergunta do professor, o que nos permite inferir que desde o início do episódio, ele já sabia a resposta certa, mas preferiu socorrer-se de uma pergunta confirmatória. No turno 29, o professor, ratificando a resposta dada no turno anterior, solicita que os discentes façam o cálculo proposto na questão, com o auxílio de uma calculadora. Ao perceber que os discentes tinham superado as dificuldades pontuais que ocorreram, o professor, relaciona (no turno 35) a medida do arco com o valor do número x, como é definido na Função de Euler.

Quadro 11 - Resumo da análise microgenética de $S1$

Intenções do Professor	Retomar as ideias sobre cálculo de medida de arco ensinados na oficina.	
Conteúdo	Medida de arco.	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade.	
Padrões de interações	I-R-P-R	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe questão e auxílio na resolução;	Responde corretamente;
	Propõe nova pergunta;	Responde incorretamente; Propõe pergunta confirmatória;
	Checa o conhecimento do discente;	Responde corretamente.
	Dá feedback positivo e propõe que os discentes façam o cálculo na calculadora;	Responde incorretamente;
	Dá feedback e orientações;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo, ratifica as falas dos escolares e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 2: TURNOS 37 – 87

Neste segmento o professor busca que os alunos consigam perceber a relação existente entre o número x (representado pelo comprimento do fio até quebrar) e a medida do arco formado:

(37) Professor: E o valor do x?

[...]

O valor do x é o valor numérico dessa medida. Então o valor de x vai ser quanto? Vai ser o valor dessa medida.

(38) A2: [aparentando dúvidas] então vai ser o próprio $3{,}5$?

(39) Professor: O que você acha?

(40) A2: Você disse que é o valor numérico. O valor numérico que eu encontrei foi $3{,}5$! Deve ser esse.

(41) Professor: Muito bem. É esse valor mesmo (3,5)! Então é isso que você vai fazer. A medida do arco... calculamos lá [aponta ao quadro] é o valor do x. Aqui diz que o valor do x é o valor numérico dessa medida. Então o x vai ser quanto?

(42) A1: $3{,}5$!

(43) Professor: Isso. Aí vocês fazem o mesmo nas outras (questões).

(44) B1: O x aqui [na primeira linha em branco da questão 1] é $3{,}5$?

(45) Professor: Isso! Vale $3{,}5$! Mas por que vale $3{,}5$?

(46) A2: Porque o x é o valor numérico dessa medida.

(47) Professor: Muito bem. Entendestes [pergunta ao B1]?

(48) B1: Sim professor.

[...]

(80) Professor: E o valor do x no (arco de comprimento) 10?

(81) D1: (Dá) $1{,}25$.

(82) Professor: Um vírgula quanto?

(83) D1: 25.

(84) A1: Professor, então o valor de x vai ser sempre igual ao valor (da medida) do arco, né?

(85) B2: Verdade, tá dando tudo igual!

(86) Professor: Isso mesmo! Muito bem!

(87) D1: Ah sim. Entendi.

Neste episódio podemos perceber que a partir de uma abordagem predominantemente interativa/de autoridade, os personagens envolvidos interagem a partir do padrão I-R-A.

Ao propor a pergunta inicial deste episódio, percebemos que nenhum dos escolares apresentaram manifestação. Podemos considerar 5 motivos que podem ter contribuído para a falta de manifestação dos escolares: 1) os escolares ainda não estavam familiarizados com o professor-pesquisador; 2) muitos alunos ficaram tímidos diante da câmera filmadora e hesitavam em responder; 3) a metodologia utilizada na resolução das questões propostas era diferente do método expositivo, predominante nas salas de aulas; 4) o professor natural da turma não participou em nenhuma aula em que foi aplicada a presente sequência didática e 5) não foi prometido nenhuma pontuação aos estudantes que participassem da pesquisa proposta.

Sem entrar em detalhes quanto aos motivos expostos, avancemos em nossa análise. No turno 37, ante a falta de resposta dos escolares, o professor resolve apresentar a relação entre a medida do arco e o número real x. Sua fala é uma tentativa de avançar com a aplicação da sequência didática. Com isso, percebemos que o professor propõe uma pergunta e logo responde. Esse jogo de *perguntar-responder* tinha objetivo de tentar marcar, através de sua fala, os significados importantes a serem internalizados pelos estudantes. No turno 38, apesar de o estudante ainda aparentar ter dúvidas, ele acaba se envolvendo no jogo de *perguntar-responder* do professor. Isso já é um ganho para a pesquisa: os discentes já começaram a falar, a responder à pergunta proposta. Assim, no turno 39, o professor já checa o significado que este escolar internalizou a partir das falas anteriores do professor. No turno seguinte, o discente A2 considera o argumento do professor “Você disse...” para construir o seu próprio raciocínio “deve ser esse”. Ou seja: a partir das interações sociais o discente constrói seu próprio conhecimento, partindo do ambiente externo para o ambiente interno, do intersubjetivo para o intrassubjetivo. Isso é perceptível claramente ao observarmos que o mesmo aluno (A2) deixa de considerar a dúvida existente no turno 38 e passa a ser uma afirmativa: “x é o valor numérico dessa medida” (turno 46).

No turno 80 o professor propõe mais uma pergunta que no turno seguinte é respondida corretamente. Apesar disso, no turno 82 o professor propõe uma nova pergunta com objetivo de fazer o discente repetir sua resposta e, assim, compartilhar com os demais estudantes a resposta correta. Com isso, percebemos entre os turnos 83 e 85 que os demais escolares ratificam a resposta dada no turno 81 e concluem, mediante pergunta confirmatória, que “o valor de x vai ser sempre igual ao valor (da medida) do arco” (turno 84); pergunta essa que é ratificada pelo professor no turno 86.

Quadro 12 - Resumo da análise microgenética de $S2$

Intenções do Professor	Relacionar a medida do arco com o número real x.	
Conteúdo	Função de Euler.	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade.	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe uma questão;	Não há;
	Apresenta a relação exigida;	Expressa dúvida;
	Propõe nova pergunta;	Responde;
	Dá feedback positivo, orientações e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e orientações;	Propõe pergunta confirmatória;
	Dá feedback positivo e checa a aprendizagem;	Responde corretamente à checagem;
	Dá feedback positivo e indaga um dos alunos;	Confirma a checagem;
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Checa a resposta dada;	Ratifica a resposta anterior; Propõe pergunta confirmatória; Ratifica a fala do seu colega;
	Dá feedback positivo e ratifica as falas dos escolares;	Afirma que compreendeu;

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 3: TURNOS 119 – 203

Este segmento refere-se a questão 2 (UARC 1) que tinha como objetivo fazer o aluno atribuir o sinal de mais (+) ou de menos (-) ao valor do número x. Segundo a estória apresentada na questão, esse sinal estava relacionado com o sentido do movimento da roda gigante.

(119) Professor: Certo. E no (arco de comprimento) $40{,}55$*? O sinal é negativo ou é positivo?*
(120) E2: Negativo.
(121) Professor: É o quê?
(122) E2: Negativo.
(123) Professor: Por que é negativo?
(124) E2: Porque está no sentido horário.
(125) Professor: O rapaz [o E2] já respondeu bem ali.
(126) A1: Por que está no sentido horário?
(127) Professor: E quando está no sentido horário é positivo ou negativo?
(128) A1: Negativo.
(129) Professor: Isso mesmo, (quando está no sentido horário) é negativo.
[...]
(196) Professor: E esse $3{,}5$ *que deu aqui, que é a medida do arco vai estar associado a um número que é um número* x*. Certo?*
(197) B3: Certo!
(198) A1: Então cada número vai (ser igual) com uma medida do arco lá [apontando para o ciclo trigonométrico desenhado no quadro] com sinal de menos ou mais.
(199) Professor: Mas esse sinal é de qualquer jeito, aleatoriamente?
(200) A2: Não. Depende se é (no sentido) horário ou (no sentido) anti-horário. Se for no anti-horário (o número real) é positivo. Se for no outro sentido (o horário), (o número real) é negativo.
(201) Professor: Muito bem, é o que está dizendo lá no início da leitura... que a medida do arco está associada a um número real x*. Esse número (real) vai ser a própria medida. Muito bem!*
(202) A1: Já entendi já!
(203) Professor: Que bom!

Os turnos acima indicam uma abordagem predominantemente interativa/de autoridade, onde os personagens envolvidos interagem principalmente a partir do padrão I-R-A, embora seja possível também percebermos o padrão I-R-F-R-A. Podemos perceber nos turnos 123, 127 e 199 que o professor tem a intenção de chamar a atenção quanto a relação existente entre o sinal do número x e o sentido do movimento da roda gigante. Os alunos, por sua vez, conseguem perceber essa relação (turnos 124, 128, 200 e 202). No turno 199 o professor busca selecionar na fala do discente um argumento que possibilite a generalização daquilo que está sendo ensinado. Essa generalização vem logo em seguida, no turno 200.

Assim, podemos observar que a pergunta realizada pelo discente A1 no turno 126 é na verdade uma pergunta confirmatória, pois nos turnos 128 e 198, ele responde corretamente às perguntas propostas pelo professor. O turno 198 e 200 apresentam indício de aprendizagem quanto a utilização dos sinais a depender do sentido do movimento considerado. Neles, os discentes A1 e A2 expõem, através de suas respostas, indícios de que compreenderam corretamente a ideia matemática por trás da estória apresentada na UARC 1.

Quadro 13 - Resumo da análise microgenética de $S3$

Intenções do Professor	Atribuir os sinais de mais (+) ou menos (-) aos números reais representados no ciclo trigonométrico.	
Conteúdo	Função de Euler.	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade.	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe uma questão;	Responde corretamente;
	Solicita que o discente repita a resposta;	Repete a resposta;
	Checa a aprendizagem;	Responde corretamente;
	Destaca a fala de um estudante;	Propõe pergunta confirmatória;
	Checa novamente a aprendizagem;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo;	Não há;
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente; Explica o raciocínio utilizado;
	Checa a aprendizagem;	Generaliza a regra apresentada na questão;
	Dá feedback positivo e compartilha a informação discutida;	Afirma que conseguiu entender;
	Dá feedback positivo.	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 4: TURNOS 379 - 391

Este segmento tem como objetivo analisar as interações ocorridas na resolução da questão 5 (UARC 1). Ao propor essa questão, o docente tinha como intenção fazer os discentes perceberem que existe uma relação entre o número real x e o ponto B, extremidade do arco que tem início na origem dos arcos no ciclo trigonométrico e medida igual a x:

(379) Professor: A outra pergunta é: cada número real x está associado a um único ponto do ciclo trigonométrico? Você pega um número real x qualquer... [professor direciona-se à D3] fala um número real x qualquer aí.
(380) D3: Quatro.
(381) Professor: Aonde estaria o quatro aqui no ciclo trigonométrico? Quatro é positivo ou negativo? Vamos fazer aqui no quadro para ficar melhor [professor anda em direção ao quadro e pergunta:] O quatro é positivo ou negativo?
(382) D3: Positivo.
(383) Professor: Então ele vai ser no sentido horário ou anti-horário?
(384) D3: Anti-horário.
(385) Professor: Beleza, anti-horário. Então ela vai passar de $3{,}14$, que é aproximadamente o π, e vai dar em qual quadrante?
(386) D3: terceiro.
(387) Professor: Isso. Então a pergunta que eu faço: cada número real x está associado a um único ponto do ciclo trigonométrico?
(388) B1: sim.
(389) Professor: Por que sim? Falou tem que explicar...
(390) B1: Égua (expressão de surpresa) vou ter que explicar? O (número) x fica (associado) com só um ponto. Ele (o ponto) é extremidade do arco de medida x...
(391) Professor: Isso mesmo.

Podemos observar o predomínio da abordagem comunicativa do tipo interativa/de autoridade, onde o docente intervém no discurso dos escolares principalmente a partir de intervenções orais. Assim, no turno 379, o docente propõe que os estudantes escolham um número real qualquer para que juntos possam encontrar o ponto que o representa no ciclo trigonométrico. Ao fazer isso, o professor dá aos discentes a oportunidade de construírem seu próprio conhecimento, a partir de exemplos pessoais, e não de um exemplo dado pelo professor. No turno seguinte, percebemos que o estudante cita um número real e no turno 381 o professor faz três perguntas, sendo duas repetidas, qual seja, “quatro é positivo ou negativo?”.

Ao fazer isso, o professor busca enfatizar o significado que o sinal de “positivo” e “negativo” tem sobre a localização do ponto. Podemos perceber que o discente responde corretamente (turno 382) quanto ao sinal do número quatro. Com isso, no turno seguinte o professor avança com conteúdo solicitando que os discentes julguem o sentido do arco do qual se escolherá o ponto extremo. No turno 384, D3 novamente responde corretamente. Ao perceber que os discentes não tiveram dúvidas quanto ao sentido do movimento em que será obtido o ponto B, imagem do número x pela Função de Euler, no turno 385 o docente repete a fala do aluno com objetivo de marcar o significado chave. Além disso, neste mesmo turno o professor auxilia os escolares na resolução da questão proposta.

Nos turnos 387 e 389 o professor busca que os escolares percebam que há uma relação entre o número real x e o ponto B, extremidade do arco que tem início na origem dos arcos no ciclo trigonométrico e medida igual a x. No turno 390 percebemos que o discente B1 confirma que existe essa relação. Assim, a partir das interações ocorridas em sala de aula, podemos observar que os discentes conseguiram perceber que cada número real x tem uma imagem, pela função de Euler, no ciclo trigonométrico. Até o momento, os escolares ainda não notaram que a relação estabelecida é uma função, o que será analisado no segmento que segue.

Quadro 14 - Resumo da análise microgenética de $S4$

<table>
<tr><td>Intenções do Professor</td><td colspan="2">Fazer o discente perceber a relação existente entre o número real x e o ponto B, extremidade do arco de medida x</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td colspan="2">Função de Euler.</td></tr>
<tr><td>Abordagem predominante</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade.</td></tr>
<tr><td>Padrões de interações</td><td colspan="2">I-R-A</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Relação dialética</td><td>Formas de Intervenções (professor)</td><td>Comportamentos e atitudes (discente)</td></tr>
<tr><td>Propõe uma questão;</td><td>Responde;</td></tr>
<tr><td>Propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e reforça a pergunta inicial;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Checa o significado internalizado;</td><td>Dá explicações;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo;</td><td>Não há.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 5: TURNOS 422 – 445

Neste segmento são analisadas as interações ocorridas na resolução da questão 6 (UARC 1) que tinha como objetivo fazer os discentes perceberem que a relação estabelecida entre o número real x e o ponto B, extremidade do arco que tem início na origem dos arcos no ciclo trigonométrico e medida igual a x, é uma função, denominada de Função de Euler.

(422) Professor: Então aqui nós estamos associando o número x a um ponto no ciclo trigonométrico, certo?
(423) B1: Sim.
(424) Professor: O número x pode estar associado a vários pontos?
(425) B3: Não.
(426) Professor: Isso. Cada número x vai estar associado a quantos pontos no ciclo trigonométrico?
(427) B3: Um ponto.
(428) B1: Isso.
(429) Professor: Apenas um?
(430) F1: Um (ponto) apenas, professor.
(431) Professor: Então essa associação pode ser classificada como uma função?
(432) B3: Sim.
(433) Professor: Por que sim?
(434) F1: Porque associa só a um ponto, igual uma função.
(435) Professor: Por que o quê?
(436) B3: Porque está relacionado a um só ponto...
(437) B1: Porque o número x está relacionado a apenas um (ponto).
(438) B3: A um único ponto no ciclo trigonométrico.
(439) Professor: Quer dizer que é uma função porque todo número x está relacionado com apenas um ponto no ciclo trigonométrico? [Direcionando-se à turma] alguém concorda com eles [os alunos B1 e B3]?
(440) Vários alunos: Sim.
(441) Professor: Muito bem. Então, cada número x está associado com quem, pessoal?
(442) F1: A um ponto no ciclo trigonométrico.
(443) Professor: [repetindo a fala de F1] A um único ponto no ciclo trigonométrico. E isso é classificado como uma...
(444) B3: Função.
(445) Professor: Corretamente. Então aí atrás vocês colocam a intervenção formalizante (1).

Neste segmento, desde o seu primeiro turno, o professor tem a intenção de chamar a atenção dos escolares quanto à relação biunívoca existente entre o número real x e o ponto B, extremidade do arco $\widehat{AB}$ (de medida x), sendo A o ponto de origem dos arcos no ciclo trigonométrico. Para isso, o professor faz perguntas com o objetivo de enfatizar que de acordo com a estória científica apresentada na questão, cada número x só pode estar relacionado com um único ponto no ciclo trigonométrico (ver turnos 422, 424 e 426). Percebemos que a cada intervenção proposta pelo professor, os discentes respondem corretamente. Nos turnos 427 e 430 os discentes percebem essa relação biunívoca. Com isso, o docente avança com o conteúdo e no turno 431 propõe nova pergunta com objetivo de checar a percepção dos escolares quanto à similaridade entre a relação analisada (entre o número real x e o ponto no ciclo trigonométrico) e o conceito de função.

No turno 432 o discente afirma que a mencionada relação é uma função. No turno seguinte, o professor checa a aprendizagem do respondente facultando-lhe a oportunidade de explicar melhor o raciocínio utilizado na construção da sua resposta, o que é feito no turno 434. Ao perceber que o discente F1 (no turno 434) tinha respondido corretamente, o professor, solicita que o respondente repita sua fala. No entanto, entre os turnos 436 e 438, percebemos que não é F1 que repete, mas sim os discentes B1 e B3. As falas destes dois discentes demonstram que eles conseguiram perceber que o número x “está relacionado a um só ponto” (turno 436) e que cada “número x está relacionado a apenas um (ponto)” (turno 438). No turno 439, com objetivo de compartilhar as respostas de alguns estudantes com toda turma, o professor repete trechos das respostas dadas anteriormente e propõe à turma que julgue as afirmativas dadas pelos estudantes.

Neste contexto, podemos perceber que está em marcha a fase de validação da Teoria das Situações Didáticas, pois o contexto gerado pelas discussões é propício a possíveis pedidos de verificações, demonstrações e de explicações complementares. No entanto, como é possível vermos no turno 440, os discentes demonstram ausência de dúvidas, concordando com as falas dos seus predecessores. Assim, imune às possíveis alterações nas falas dos discentes, no turno 443, o professor repete a fala de um dos discentes (no turno 442) e sugere uma afirmativa. Entretanto, ele não a completa, deixando para que os escolares o façam e, ao fazerem, os estudantes concluem que a relação contida neste segmento é, de fato uma função. Somente após toda essa discussão o professor apresenta a intervenção formalizante 1.

Quadro 15 - Resumo da análise microgenética de $S5$

<table>
<tr><td>Intenções do Professor</td><td colspan="2">Fazer o discente perceber que a relação existente entre o número real x e o ponto B, é uma função.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td colspan="2">Função de Euler.</td></tr>
<tr><td>Abordagem predominante</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade.</td></tr>
<tr><td>Padrões de interações</td><td colspan="2">I-R-A</td></tr>
<tr><td rowspan="12">Relação dialética</td><td>Formas de Intervenções (professor)</td><td>Comportamentos e atitudes (discente)</td></tr>
<tr><td>Propõe uma questão;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Checa o conhecimento dos escolares;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Checa o significado internalizado;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Checa o aprendizado;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Pede maiores explicações;</td><td>Explica melhor o raciocínio utilizado;</td></tr>
<tr><td>Repete a fala do estudante e compartilha a resposta dada com a turma mediante nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente (parcialmente);</td></tr>
<tr><td>Complementa a fala do estudante e propõe que ele complete sua afirmação;</td><td>Completa a fala do professor;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo;</td><td>Não há.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 6: TURNOS 455 - 465

Após a intervenção formalizante da UARC 1 é apresentada a Questão 7, que se refere a uma intervenção avaliativa. Nela, os discentes têm que localizar cinco pontos no ciclo trigonométrico referente a cinco números reais. Este segmento analisa alguns turnos referentes as interações entre o professor e os alunos, e entre os alunos e seus pares no que tange à resolução da letra A da referida questão. As demais letras da questão mencionada, por requererem dos discentes as mesmas ideias e pensamentos matemáticos da que analisaremos neste segmento, serão suprimidas.

(455) Professor: O (número) -6 vai estar em qual quadrante?
(456) D2: Primeiro.
(457) Professor: Por que primeiro (quadrante)?
(458) B1: [girando o dedo no sentido horário em direção ao quadro] é porque π é 3.
(459) Professor: $3{,}14$, aproximadamente...
(460) B1: Pois então. Daí 2π [girando o dedo no sentido horário em direção do quadro] é quase -6, que vai dar antes do (ponto) A [O ponto A estava desenhado no quadro e correspondia ao ponto $(1{,}0)$ no ciclo trigonométrico desenhado].
(461) Professor: Ele falou que o (número) -6 é quase perto do A. Vocês concordam com o rapaz?
(462) Vários alunos; [concordando com a cabeça] Sim.
(463) Professor: Então o (número) -6 vai estar no primeiro quadrante [dirigindo-se ao aluno B1]?
(464) B1: Isso. Porque -6 vai ser quase 2π negativo.
(465) Professor: Beleza.

Neste segmento, há o predomínio da abordagem interativa/de autoridade, na qual o professor mantém um discurso balizado pelas interações do tipo I-R-P-R. Percebemos que o discente D2, no turno 456, não encontrou dificuldades em responder à pergunta realizada pelo professor. Destacamos que o número dado na questão analisada (o número -6) é diferente daqueles que comumente são apresentados nos livros didáticos, pois os que mais frequentemente aparecem nestes materiais são números envolvendo o irracional π ($\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, etc.). Na busca de checar o conhecimento internalizado pelo aluno respondente, no turno 457, o professor propõe nova pergunta, requerendo a explicação do raciocínio utilizado por D2 na elaboração de sua resposta. Como podemos ver no turno 460, é outro discente que inicia uma justificativa à checagem do professor. Apesar de no turno mencionado este estudante afirmar que $\pi = 3$ (o que foi retificado pelo professor), o raciocínio matemático dele é interessante e merece destaque, senão vejamos: no turno 458 o discente afirma que $\pi = 3$ e no turno 460, ele afirma que 2π é quase -6, concluindo que o ponto que representa o número -6 “vai dar antes do (ponto) A”, isto é, antes de $A = (1; 0)$. É interessante percebermos que as duas afirmativas do discente está errada, mas a sua resposta está correta.

Por quê?

Porque embora ele utilizasse palavras erradas, seu raciocínio matemático estava correto. Essa conclusão pode ser feita a partir de uma análise mais profunda nos turnos 460 e 464. Vejamos: no turno 460, ao mesmo tempo em que o discente afirma que "2π é quase -6", ao analisar o vídeo que gerou a transcrição do referido turno, podemos perceber que o discente girava o dedo no sentido horário dos arcos. Sabemos que o arco de medida 2π, se tomado no sentido horário (o sentido que o discente girava o dedo), equivale ao número real -2π. E este último número, o real -2π, está de fato perto do número real -6. Entretanto, o aparente erro persiste e disso surgem duas perguntas:

1) *O que motivou o discente a afirmar que -2π (já atribuindo o sinal referente ao sentido horário) é quase -6?*
2) *Como o discente concluiu que a imagem do número -6, pela Função de Euler, está perto de -2π, mas no primeiro quadrante?*

Analisemos o possível raciocínio utilizado pelo aluno. Geometricamente falando, no ciclo trigonométrico, ao tomarmos os arcos no sentido horário, primeiramente passamos pelo ponto referente ao número real -6 e só depois chegamos ao ponto referente ao número real -2π. Considerando que o discente girava seu dedo no sentido horário, supomos que esse era o raciocínio utilizado por ele. Em outras palavras: -6 é quase -2π. Entendendo desta forma, temos mais facilidade em responder à segunda pergunta. Afinal, se o número real -6, no ciclo trigonométrico, precede -2π, é correto afirmarmos que a imagem do número -6 (pela Função de Euler) vem antes da imagem do número -2π. Ora, a imagem do número -2π é o ponto $A = (1;0)$ e como a imagem de -6 (pela função de Euler) vem antes da imagem de -2π, o par ordenado do número -6 deve ser um par ordenado pertencente ao primeiro quadrante.

No turno 464 o discente B1 ratifica sua resposta, reforçando que o conhecimento por ele internalizado, apesar de erros pontuais na sua fala, estavam amparados por ideias matemáticas corretas. Colocamos em relevo o fato de que toda essa análise em torno da fala do aluno só foi possível graças à combinação entre a análise microgenética e a análise do discurso, pois foi a partir da gravação de áudio e vídeo relacionada à aplicação da sequência didática, que nós pudemos assistir quantas vezes foram necessárias a parte que gerou esse episódio, o que seria impossível de ser percebido, caso tivéssemos feito a análise apenas de protocolos, como provas, imagens, etc.

Quadro 16 - Resumo da análise microgenética de $S6$

<table>
<tr><td>Intenções do Professor</td><td colspan="2">Avaliar se os discentes conseguem relacionar corretamente o número real x com sua imagem $E(x)$ no ciclo trigonométrico</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td colspan="2">Função de Euler.</td></tr>
<tr><td>Abordagem predominante</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade.</td></tr>
<tr><td>Padrões de interações</td><td colspan="2">I-R-P-R</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Relação dialética</td><td>Formas de Intervenções (professor)</td><td>Comportamentos e atitudes (discente)</td></tr>
<tr><td>Propõe uma questão;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Checa o conhecimento;</td><td>Inicia uma explicação;</td></tr>
<tr><td>Auxilia na explicação;</td><td>Conclui a explicação;</td></tr>
<tr><td>Retoma a fala do discente e propõe pergunta confirmatória;</td><td>Concordam com o professor;</td></tr>
<tr><td>Checa a resposta dada anteriormente;</td><td>Responde à checagem corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo;</td><td>Não há.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

5.2.2- Análise Microgenética do Episódio 2

SEGMENTO 1: TURNOS 521 - 594

Este segmento trata das interações ocorridas na resolução das questões 1 a 3 da UARC 2. Os turnos transcritos apresentam as interações do professor com os discentes e destes entre si, tendo como objetivo fazer o aluno perceber que a imagem do número real x, pela Função de Euler, é também imagem do número real $x \pm 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(521) Professor: Vamos ver: De A até B tem quanto?
(522) C2: Tem x.
(523) Professor: E se eu dou uma volta completa eu vou somar quanto?
(524) C2: 2π.
(525) Professor: Correto! Então o número resultante vai ser quanto?
(526) C2: $x + 2\pi$.
(527) Professor: Muito bem. A pergunta agora é: em qual ponto vai "parar" esse número resultante?
(528) A1: No ponto B.
(529) Professor: [direcionando-se à turma] O que vocês acham?
(530) E1: Por que (vai parar) no ponto B?
(531) A1: Porque deu uma volta completa e para lá de novo!
(532) Professor: Mas não poderia parar em outro lugar?
(533) A1: Só se não fosse uma volta completa.
(534) E1: Toda vez que der uma volta completa vai para no mesmo ponto?
(535) A1: Claro! Se é uma volta completa [dá risadas com alguns colegas].
(536) Professor: Corretamente. Toda vez que der uma volta completa irá parar no mesmo ponto.

[...]

(583) Professor: E aqui [aponta para a próxima linha em branco desenhada no quadro] vai ser igual... Vai ser x menos...três voltas completas no sentido negativo. Que dá quanto?
(584) F1: 6π.
(585) Professor: Que vai parar em qual ponto?
(586) E1: (Ponto) B.
(587) C1: No ponto B, professor!
(588) A1: Professor, todos vão parar no mesmo ponto!
(589) Professor: Vocês concordam com ela?
(590) Vários alunos: Sim!
(591) Professor: Por quê?
(592) F1: Porque vai dar volta completa.
(593) E1: Sempre que der uma, duas, três (voltas completas)... vai parar no mesmo ponto, no (ponto) B.
(594) Professor: Isso.

Neste episódio percebemos a predominância dos padrões de interação do tipo I-R-F-R, onde o professor utilizando um discurso de autoridade, tem claramente a intenção de ensinar. Entre os turnos 521 e 526, o docente retoma conteúdos já adquiridos pelos escolares. Com efeito, pelo contexto da questão apresentada e pelas discussões anteriores, os discentes sabiam que o número x estava relacionado ao arco que vai de A até B e que, ao dar uma volta sobre o ciclo trigonométrico, é percorrido um arco de medida 2π. O que era "novo" para os escolares era o fato de que, somando-se (ou subtraindo-se) 2π ao número x, geometricamente falando, a imagem do número resultante no ciclo trigonométrico, pela função de Euler, estará no mesmo ponto que a imagem do número x. No turno 527, a pergunta feita pelo professor tem a finalidade de ensinar esse conhecimento novo aos escolares. No turno 528, percebemos que o estudante resolve corretamente e, aproveitando-se da resposta dada, o professor solicita que os demais discentes julguem a resposta dada.

Essa solicitação do professor é importante, pois a partir dela o professor tem a oportunidade de compartilhar com os demais escolares aquilo que um ou poucos alunos perceberam; além disso, mediante a solicitação do professor, é possível que sejam levantadas outras hipóteses, conjecturas ou mesmo dúvidas que podem validar ou não aquilo que fora afirmado. Aliás, foi isso que ocorreu no turno 530: um dos discentes apresenta uma dúvida quanto ao que foi falado.

É interessante notar que a resposta à dúvida do discente não foi dada pelo professor, mas por outro discente (turno 531). O professor, apenas fez a mediação das interações ocorridas, intervindo apenas quando necessário. No turno 532, é checada a resposta dada no turno anterior: "não poderia parar em outro lugar?". Ao propor essa pergunta, o professor tem como objetivo principal marcar o significado chave da situação: que dando-se uma volta completa no ciclo trigonométrico, o ponto será o mesmo.

O discente A1, no turno 533, ratifica a sua fala anterior e sugere que só seria possível parar em outro lugar "se não fosse uma volta completa". Apesar de a ideia matemática ter sido bem internalizada pelo discente A1, percebemos (pelo turno 534) que o discente E1 ainda permanece com dúvidas e novamente o discente A1 o ajuda dizendo que se for dado uma volta completa, o ponto de parada da estória científica será o mesmo. No turno 536 o professor dá um feedback positivo à fala do discente A1 e a complementa. A partir das discussões descritas acima e da leitura dos turnos 583 a 592, podemos perceber que houve pacificação quanto ao entendimento de que, dando-se uma volta completa, independentemente do sentido dos arcos, a imagem do número formado será a mesma. Com isso, no turno 593 o discente E1 consegue generalizar, intuitivamente, a situação discutida: "sempre que der uma, duas, três (voltas completas) ... vai parar no mesmo ponto, no (ponto) B".

Quadro 17 - Resumo da análise microgenética de $S1$

Intenções do Professor	Fazer o aluno perceber que a imagem do número real x, pela Função de Euler, é também imagem do número real $x \pm 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.	
Conteúdo	Função de Euler.	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade.	
Padrões de interações	I-R-F-R	
	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe uma pergunta;	Responde corretamente;
	Checa a aprendizagem;	Responde corretamente;
	Ratifica a resposta do discente e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Propõe que a turma julgue a resposta;	Manifesta dúvida; Responde à dúvida de seu amigo;
Relação dialética	Checa a aprendizagem;	Responde corretamente; Manifesta dúvida; Responde à dúvida de seu amigo;
	Dá feedback positivo;	Não há.
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Checa a aprendizagem;	Responde corretamente;
	Propõe que a turma julgue a resposta;	Responde corretamente;
	Checa a aprendizagem;	Responde corretamente; Generaliza a ideia matemática;
	Ratifica a fala do estudante;	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 2: TURNOS 633 - 644

Este segmento trata da análise de alguns turnos referentes à resolução da questão 5 (UARC 2). A proposta da questão, ora analisada, é destacar que o intervalo necessário para que as imagens do número real x, no ciclo trigonométrico, comece a se repetir é denominado de período da Função de Euler.

(633) Professor: Qual o menor percurso a ser percorrido por este piloto para que ele passe sempre pelo ponto D?
(634) F1: Uma volta completa.
(635) Professor: Isso. Se ele está andando na pista circular, aí tá...eu passei no ponto B. Qual é o menor percurso que eu andei de novo para passar no ponto D?
(636) C2: Uma volta.
(637) Professor: Só uma volta?
(638) B1: Sim.
(639) Professor: Que vale quanto?
(640) B1: 2π
(641) Professor: Muito bem. Então a resposta é quanto?
(642) Vários alunos: Uma volta completa.
(643) Professor: Corretamente, este intervalo que leva para os pontos de $E(x)$ *se repetir é chamado de período. No caso da Função de Euler, ele é de uma volta completa, que é* 2π.
(644) B1: Ah sim, entendi.

A partir da leitura dos turnos contidos neste segmento, percebemos que há o predomínio das interações do tipo I-R-A, tendo como discurso mais frequente o interativo/de autoridade. Pelas discussões anteriores, os discentes já haviam compreendido que dando-se uma ou várias voltas completas no ciclo trigonométrico, a imagem do número real, pela função de Euler, é a mesma. Essa compreensão é confirmada entre os turnos 633 e 638.

Semelhantemente, era pacífico aos discentes o conhecimento de que uma volta completa equivale, em radianos, a 2π (turno 640). Assim, o presente segmento apresenta a mobilização dos conhecimentos necessários já adquiridos pelos escolares para a compreensão do período da função de Euler. No entanto, apesar de os escolares terem tido várias oportunidades para discussões, caberia ao professor definir esse objeto matemático e ele o faz no turno 643.

Quadro 18 - Resumo da análise microgenética de $S2$

Intenções do Professor	Definir o período da função de Euler	
Conteúdo	Função de Euler.	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade.	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Checa o aprendizado;	Responde corretamente;
	Checa novamente o aprendizado;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e define o período da função de Euler;	Dá feedback positivo em relação à definição apresentada.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 3: TURNOS 645 - 666

Neste segmento apresentamos as interações ocorridas na resolução da questão 6, da UARC 2. Nela, é tratado sobre os fenômenos periódicos. Esses fenômenos são de suma importância no estudo das funções trigonométricas, pois em muitas questões aplicadas, o conhecimento desse assunto pode favorecer na resolução.

(645) Professor: Você conhece algum fenômeno ou função periódica? Algo que se repete...você pode citar algum?
(646) D2: Algo que se repete?
(647) Professor: Isso.
(648) D2: Uma onda sonora, por exemplo?
(649) Professor: Sim. Esses fenômenos que se repetem, como as ondas sonoras, são chamados de fenômenos periódicos. A natureza está cheia disso. Uma onda sonora é um tipo de fenômeno periódico. Mas tem vários outros exemplos...
(650) B3: O aniversário?
(651) Professor: O aniversário? É, a cada ano também se repete. É mais um exemplo de fenômeno periódico. Periódico quer dizer que a cada período igual ele se repete. O que mais, pessoal?
(652) B3: Natal?
[...]

(657) Professor: Mas além de datas, tem outros fenômenos... além de datas tem outros fenômenos...tá certo?
(658) B3: Inverno.
(659) Professor: Aqui olha... a moça falou aqui outro fenômeno que se repete: o inverno. O inverno é outro fenômeno que se repete. Embora hoje esteja um pouco bagunçado o clima, né? Mas as estações climáticas são fenômenos periódicos. Tem outros exemplos também. Vocês já ouviram falar de maré alta e maré baixa?
(660) Vários alunos: Sim!
(661) Professor: Quem lembra quanto tempo leva para a maré encher e para secar? De quantas em quantas horas a maré leva para encher e para secar?
(662) D1: Seis (horas).
(663) Professor: Se não me engano é seis mesmo.
(664) D1: Quatro vezes ao dia.
(665) Professor: Pronto. Então, a natureza está cheia de fenômenos periódicos. E teve um cara chamado de Fourier, um matemático, que fez uma relação na qual ele provou que todos os fenômenos periódicos podem ser representados por uma função trigonométrica. Então daí vocês veem a importância dos fenômenos periódicos. Por exemplo, quando a gente corre geralmente fazemos um movimento com o braço. Esse movimento, o movimento que o braço faz, é um movimento periódico que também pode ser representado pela função seno. Então na natureza existem vários exemplos de movimentos periódicos.
(666) F1: Legal!

Neste segmento há o predomínio da abordagem interativa/dialógica, tendo como padrão de interação mais frequente a do tipo I-R-P-R. Podemos observar que vários alunos interagem com o professor citando exemplos (turnos 648, 650, 652 e 658) que lhes são particulares, adquiridos a partir da sua própria vivência, sendo que os três primeiros são apresentados por perguntas confirmatórias, as quais, foram ratificadas pelos escolares.

A oportunidade dada aos discentes, é importante para que eles continuem motivados na resolução da questão proposta. Aliás, na propositura da questão analisada, os discentes se envolveram bastante, e acharam interessante a citação de exemplos do seu cotidiano. Podemos perceber esse envolvimento principalmente quando o professor sugeriu o exemplo da maré alta e maré baixa (turno 659). Percebemos que os discentes compreenderam a periodicidade deste fenômeno (turno 662). Somente após as discussões já mencionadas o professor apresenta a ideia de fenômeno periódico (turno 665). Com isso, percebemos que houve o respeito ao contexto cultural dos discentes, conforme propõe a Psicologia Histórico-Cultural.

Quadro 19 - Resumo da análise microgenética de *S*3

<table>
<tr><td>Intenções do Professor</td><td colspan="2">Exemplificar e definir fenômenos periódicos</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td colspan="2">Fenômenos Periódicos</td></tr>
<tr><td>Abordagem predominante</td><td colspan="2">Interativa/dialógica</td></tr>
<tr><td>Padrões de interações</td><td colspan="2">I-R-P-R</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Relação dialética</td><td>Formas de Intervenções (professor)</td><td>Comportamentos e atitudes (discente)</td></tr>
<tr><td>Propõe nova pergunta;</td><td>Apresenta pergunta confirmatória;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo;</td><td>Propõe um exemplo;</td></tr>
<tr><td>Ratifica o exemplo dado e dá informações;</td><td>Propõe pergunta confirmatória;</td></tr>
<tr><td>Ratifica a pergunta confirmatória e propõe nova pergunta;</td><td>Propõe pergunta confirmatória;</td></tr>
<tr><td>Propõe nova pergunta;</td><td>Dá um exemplo;</td></tr>
<tr><td>Enfatiza a resposta do discente e propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
</table>

	Checa o conhecimento sobre o fenômeno periódico citado;	Responde corretamente;
	Considera a fala do estudante;	Acrescenta informações
	Considera as falas do discentes na explicação e definição de fenômeno periódico.	Interage com o docente.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

5.2.3- Análise Microgenética do Episódio 3

SEGMENTO 1: TURNOS 687 - 719

Este segmento relaciona-se à UARC 3. Os turnos transcritos abaixo apresentam as interações entre professor e aluno e entre estes últimos e seus pares, nos quais o objetivo do professor era fazer os discentes perceberem que o seno de um arco no ciclo corresponde à projeção ortogonal do raio sobre o eixo oy:

(687) Professor: Utilizando a razão trigonométrica seno, vamos investigar a relação existente entre o seno e o segmento $\overline{OC}$. Eu quero buscar uma relação entre o seno e o segmento $\overline{OC}$. Pessoal, vamos pegar esse triângulo bem aqui [apontando ao quadro], o triangulo DBO.
(688) A1: Certo.
(689) Professor: Eu vou chamar ele [apontando para o segmento $\overline{OC}$ desenhado no quadro] de p, por exemplo. Tá? Aí eu tenho esse triângulo aqui [aponta para o triangulo ODB desenhado no quadro]. O que eu tenho, pessoal? Essa distância de O até B vale quanto?
(690) F1: Um.
(691) Professor: Está certo. Então eu quero saber qual o valor de p? Qual é a razão que eu tenho aqui? Cateto oposto e hipotenusa. Qual razão eu uso aqui?
(692) Alguns alunos: Seno.
(693) Professor: Responderam aqui. Então como ficaria aqui?
(694) F3: O seno (de α) é cateto oposto (a α) sobre a hipotenusa.
(695) Professor: Quem é o cateto oposto?
(696) A1: p.
(697) Professor: Isso! Sobre quem?
(698) A1: Sobre a hipotenusa.
(699) Professor: Mas que é a hipotenusa?
(700) F1: Um.
(701) Professor: Por que um mesmo?
(702) F1: É o valor do raio. Já tinha falado.
(703) Professor: Correto! Então o $sen\alpha$ é igual a quem?
(704) F1: p.
(705) Professor: Mas quem é p?
(706) F1: p é a distância de O até C.
(707) F3: Já tínhamos falado antes.
(708) Professor: Isso. Logo, esse $\overline{OC}$ é igual a quem, pessoal?
(709) B3: Ao seno!
(710) F3: E por que não pode ser $\overline{DB}$, professor?
(711) Professor: Olha na apostila: os segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{DB}$ não tem o mesmo comprimento?
(712) F3: Ah sim. Eles são iguais (congruentes).
(713) Professor: Correto! E isso é muito importante. Por que é muito importante? Porque aqui está dizendo que o seno deste ângulo é igual ao segmento correspondente a projeção do ponto B sobre o ponto C. Que é essa distância aqui [aponta para o desenho no quadro]. Essa distância aqui é o valor do seno [aponta para o desenho no quadro].
(714) B1: Entendi.
(715) Professor: Daqui nós temos que o valor do seno de α é o segmento que está "em pé".
(716) B3: Ah sim...entendi.
(717) Professor: Então, de acordo com o que vocês falaram, o seno corresponde a quem, pessoal?
(718) F3: A projeção do ponto B sobre o eixo y.
(719) Professor: Beleza. Isso mesmo. Então aqui nós temos a intervenção formalizante 4.

O padrão de interação predominante neste segmento é do tipo I-R-F-R-F, no qual há o predomínio da abordagem interativa/de autoridade. Percebemos que o docente tem a intenção de explorar as ideias matemáticas relacionadas ao contexto da roda gigante, buscando mobilizar conhecimentos prévios dos discentes para a resolução da questão apresentada (turnos 689, 691, 708) e fazer o aluno perceber a igualdade existente entre o seno e a projeção ortogonal do raio sobre o eixo $0y$ (turnos 691, 708 e 711). Além disso, percebemos que o professor se recusa a responder diretamente à dúvida do discente (turno 710 e 711) até a apresentação do objeto matemático estudado (turnos 713 e 715). Após essa etapa de formalização, o docente faz nova checagem para verificar o aprendizado dos escolares (717).

Os estudantes correspondem às intervenções do professor respondendo corretamente às perguntas relacionadas à mobilização e adaptação dos seus conhecimentos prévios à estória científica (turnos 690, 692, 694, 696 e 700); têm a oportunidade de refletir sobre a sua própria pergunta e sobre a pergunta feita pelo professor (turnos 710 – 712) e apresentando avaliação positiva nas checagens de aprendizagens (turnos 702, 704 e 718). Neste contexto, é possível percebermos a importância das interações sociais na modelação dos conceitos internalizados pelos discentes, conforme pressupõe a Psicologia Histórico-Cultural. Podemos perceber também a relevância do papel do professor na criação e manutenção de zonas de desenvolvimentos proximais. Além disso, é possível verificarmos que a fase de institucionalização (Teoria das Situações) ocorrida no turno 719 é apresentada apenas após a discussão com os escolares.

Quadro 20 - Resumo da análise microgenética de $S1$

<table>
<tr><td>Intenções do Professor</td><td colspan="2">Explorar as ideias matemáticas relacionadas à estória científica;
Associar conhecimentos prévios dos discente na resolução das questões propostas;
Fazer o aluno perceber que o seno no ciclo trigonométrico é igual à projeção ortogonal do raio sobre o eixo $0y$;
Demonstrar que o seno no ciclo trigonométrico é igual à projeção ortogonal do raio sobre o eixo $0y$.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td colspan="2">Associar o seno com a projeção ortogonal do raio sobre a o eixo oy.</td></tr>
<tr><td>Abordagem predominante</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade</td></tr>
<tr><td>Padrões de interações</td><td colspan="2">I-R-F-R-F</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Relação dialética</td><td>Formas de Intervenções (professor)</td><td>Comportamentos e atitudes (discente)</td></tr>
<tr><td>Propõe perguntas que retome os conhecimentos prévios dos discentes;</td><td>Responde às perguntas do professor, mobilizando seus conhecimentos já adquiridos;</td></tr>
<tr><td>Direciona os conhecimentos prévios dos discentes à aplicação na estória científica;</td><td>Adapta os conhecimentos adquiridos à estória matemática;</td></tr>
<tr><td>Checa se os alunos compreenderam a aplicação dos conhecimentos à estória científica;</td><td>Respondem corretamente à checagem do professor;</td></tr>
<tr><td>Retoma a estória científica com vistas à generalização;</td><td>Respondem corretamente;</td></tr>
<tr><td>Recusa-se a responder diretamente uma dúvida do discente;</td><td>Aluno reflete sobre o que foi perguntado e responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Apresenta o objeto matemático;</td><td>Dão respostas confirmatórias;</td></tr>
<tr><td>Checa novamente se os alunos compreenderam a aplicação dos conhecimentos à estória científica.</td><td>Respondem corretamente à nova checagem do professor.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

5.2.4- Análise Microgenética do Episódio 4

SEGMENTO 1: TURNOS 735 - 749

Os turnos 735 – 749 representam as interações ocorridas no início da aplicação da UARC 4, onde o docente explora os dados referentes à linha do ponto B_7 com objetivo de envolver os alunos na estória científica:

(735) Professor: Então vamos virar a folha. Aí é para fazer igual como está indicado na linha do (ponto) B_7. Observem a linha do B_7. Qual é a projeção ortogonal no eixo $0y$? Olhem aqui no desenho [apontando para a apostila], o B_7 está aqui embaixo. Qual é a projeção dele no eixo 0y?
(736) E3: 0,8.
(737) Professor: É profundidade ou altura?
(738) E3: Profundidade.
(739) Professor: Muito bem. O sinal vai positivo ou negativo?
(740) F1: Negativo.
(741) Professor [direcionando-se à turma]: Vocês concordam com ele?
(742) A1: Sim, professor! Está abaixo e é negativo, pois é profundidade.
(743) Professor [balançando a cabeça em concordância com o que disse A1]: Agora aqui [apontando para o quadro desenhado na lousa]: a projeção ortogonal com o sinal atribuído?
(744) A1: $-0{,}8$.
(745) Professor: Aí eu pergunto aqui na última coluna: qual a ordenada do ponto B_7? A ordenada só para lembrar para vocês, nós temos um par ordenado $(x; y)$ [professor escreve no quadro]. A ordenada é o valor de quem, pessoal?
(746) F1: (De) y.
(747) Professor: Isso. A ordenada é o valor de y. Qual é o valor do y do ponto B_7?
(748) A1: $-0{,}8$.
(749) Professor [balançando a cabeça concordando com A1]: Isso. Aí eu quero que vocês preencham as outras linhas referentes aos outros pontos. Qualquer dúvida é só chamar.
[Os alunos tentam resolver as demais linhas do quadro deixado como tarefa]

Nos trechos transcritos acima é possível percebermos constantes *feedbacks* do professor ao aluno, tanto verbais quanto gestuais. É possível percebermos o predomínio do padrão de interação do tipo I-R-F-R-F, onde a abordagem é interativa/de autoridade. Neste segmento o docente busca relacionar o seno com a ordenada do ponto que o representa no ciclo trigonométrico a partir do ponto B_7 (dado como exemplo na tarefa). Para isso, podemos observar seis intervenções do docente, a saber:

1) Chamando a atenção dos escolares quanto às características mais importantes do ponto considerado: podemos perceber isso nos trechos “observem a linha do B_7", “olhem aqui no desenho”, “está aqui embaixo (turno 735); “é profundidade ou altura?” (turno 737); “vai ser positivo ou negativo” (turno 739);

2) Compartilhando a resposta dada por um aluno com toda a turma e solicitando que os demais discentes concordem ou discordem da resposta dada (turno 741);

3) Dando *feedback* positivo ao aluno respondente (mediante o balançar da cabeça) e propondo nova pergunta articulada com a pergunta anterior (turno 743);

4) Retoma conhecimentos prévios e avança mais precisamente para aquilo que deseja ensinar (turno 745);

5) Dando novo *feedback* positivo, reforçando a resposta dada anteriormente pelo discente e propondo nova pergunta (turno 747);

6) Dando novamente *feedback* positivo “balançando a cabeça concordando com A1” e delegando tarefas aos discentes “aí eu quero que vocês preencham as outras linhas referentes aos outros pontos” (turno 749).

À todas as intervenções apontadas acima, os discentes responderam corretamente, conforme atestam os turnos 736, 738, 740, 742, 744, 746 e 748. Além disso, é possível percebermos que ao final das interações analisadas, ocorre o processo de devolução, no qual os alunos assumem a responsabilidade por sua própria aprendizagem “os alunos tentam resolver as demais linhas” através de situações adidáticas.

Quadro 21 - Resumo da análise microgenética de $S1$

<table>
<tr><td>Intenções do Professor</td><td colspan="2">Envolver os discentes na estória cientifica;
Explorar as ideias matemáticas referentes ao ponto B_7.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td colspan="2">Seno de um número real no ciclo trigonométrico.</td></tr>
<tr><td>Abordagem predominante</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade</td></tr>
<tr><td>Padrões de interações</td><td colspan="2">I-R-F-R-F</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Relação dialética</td><td>Formas de Intervenções (professor)</td><td>Comportamentos e atitudes (discente)</td></tr>
<tr><td>Chama a atenção dos alunos quanto às características relevantes do ponto B_7;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Compartilha com a turma a resposta correta de um aluno e solicita julgamento;</td><td>Responde corretamente com mais detalhes;</td></tr>
<tr><td>Dá *feedback* positivo (mediante gestos corporais) e propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Retoma conhecimentos prévios e direciona a pergunta àquilo que deseja ensinar;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá *feedback* positivo, reforça a resposta dada anteriormente e propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá *feedback* positivo (mediante gestos corporais) e delega tarefas.</td><td>Tentam resolver a tarefa delegada.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 2: TURNOS 771 -793

Após a discussão dos dados referentes ao ponto B_7 (episódio 4, segmento 1) um dos alunos percebe que o ponto B_0 não possui nem altura nem profundidade. Os turnos que seguem apresentam parte das interações relacionadas a esta situação:

(771) F2: Professor...
(772) Professor: Diga lá!
(773) F2: Aqui no B_0, né... Aqui ele quer altura ou profundidade, mas ele está no meio...
(774) Professor: Se ele está no meio, nem acima nem abaixo, ele tem altura ou profundidade?
(775) F2: Acho que não. Nem altura nem profundidade.
(776) Professor: Isso. [Professor caminha em direção do quadro e diz:] pessoal, vou fazer com vocês mais a linha do B_0. A primeira linha, só para vocês entenderem melhor. Qual a projeção ortogonal do B_0?
(777) F2: Zero.
(778) Professor: Muito bem: zero! Ele (o ponto B_0) tem altura ou profundidade?
(779) F2: Não.
(780) Professor: Isso. Ele está bem na linha lá, então você coloca (na resposta): não tem altura nem profundidade. O sinal atribuído é positivo ou negativo?
(781) C2: Positivo?
(782) Professor: O zero é positivo ou negativo?
(783) C2: O zero é neutro. Não tem sinal.
(784) Professor: Pronto, ele (o zero) não tem sinal. E a projeção ortogonal com o sinal atribuído é quanto?
(785) D2: Zero.
(786) Professor: Isso. Ele não tem sinal positivo nem negativo. E a ordenada referente ao ponto B_0, vale quanto?
(787) D2: Zero.
(788) C2: Entendi agora...
(789) F3: Agora consigo fazer...
(790) A2: Bora (vamos) fazer [fala a alguns de seus colegas]?
(791) Professor: Pronto. E quando é que você vai saber se é altura ou profundidade, pessoal? Basta olhar na figura na página anterior!
[...]
(792) A2: Professor vem olhar aqui se está certo [mostrando o caderno para o professor].
(793) Professor: [após analisar a resolução feita] é, aí está certo. Beleza!

Neste segmento é possível percebermos uma abordagem predominantemente interativa/de autoridade. O docente tem a intenção de ensinar sobre o valor do seno do ponto (1;0). No contexto geral é possível percebermos o envolvimento dos discentes na tarefa proposta pelo professor. O turno 771 indica uma atividade do aluno. Nele, o professor é chamado para dirimir uma dúvida do discente (turno 773) e, agindo como mediador do conhecimento, refaz a pergunta ao aluno acrescentando as informações “nem acima nem abaixo” que dão novo sentido aquilo que está sendo questionado. O aluno, então, refaz sua resposta e acrescenta informações (turno 775). O docente percebe que vários alunos ainda permaneciam com dúvidas quanto aos dados referentes à linha do ponto B_0. Um dos motivos possíveis para essa dificuldade é o fato de que até o momento, todos os pontos trabalhados em sala de aula tinham ou “altura” ou “profundidade”, diferentemente do que estava ocorrendo com o ponto B_0. Assim, o docente resolve preencher junto com a turma os dados faltantes relacionados ao ponto mencionado.

Neste mesmo turno vemos o professor dando *feedback* positivo à resposta do aluno F2, o qual responde corretamente às duas perguntas que seguem. No entanto, quando o professor pergunta qual o sinal devido ao número 0 (turno 780), o aluno C2 ao invés de simplesmente responder, resolve fazer uma pergunta confirmatória. Em seu turno, o professor mais uma vez recusa-se a responder. Antes, propõe nova pergunta (turno 782) que faz o aluno refletir sobre sua própria resposta. Percebemos que o mesmo aluno C2, que antes tinha proposto uma pergunta, agora responde corretamente sem hesitação (turno 783). Essa resposta é seguida de um feedback positivo do professor acompanhado de nova pergunta.

No turno 786 percebemos que o professor checa se os demais alunos tinham compreendido a estória científica. Os turnos que seguem indicam que dois alunos (turnos 788 e 789) afirmam que compreenderem. O aluno A2 convida seus pares para resolverem a atividade proposta. Assim, é possível percebermos que o cenário apresentado neste segmento leva em consideração a interação social para o processo de ensino e aprendizagem. Nele, é possível percebermos que os discentes não agem apenas em atividades mnemônicas, mas discutem, questionam, interagem e recebem ajudas tanto do professor quanto dos seus pares na construção do seu próprio conhecimento.

Quadro 22 - Resumo da análise microgenética de $S2$

Intenções do Professor	Discutir com o aluno o valor do seno do ponto (1;0).	
Conteúdo	Seno de um número real no ciclo trigonométrico.	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-F-R-F	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Atende do chamado do discente;	Apresenta sua dúvida ao professor;
	Dá informações através de uma pergunta;	Responde meio com dúvidas
	Dá feedback positivo e expande a dúvida do discente à turma;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo, acrescenta informação e propõe nova pergunta;	Apresenta uma pergunta confirmatória
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Confirma a fala do discente e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Confirma a fala do discente e propõe nova pergunta;	Responde corretamente; Diz que entendeu; Motiva-se a resolverem as outras questões; Convida outros alunos a resolverem as tarefas;
	Atende ao chamado dos escolares para verificar se as resoluções deles estavam corretas.	Responde corretamente a tarefa apresentada no caderno.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 3: TURNOS 854 - 879

Este segmento também trata da resolução da primeira questão da UARC 4, mais precisamente aos dados relacionados ao ponto B_6. Nele já é possível observarmos que um dos discentes consegue perceber que a projeção ortogonal acompanhada do sinal é igual à ordenada do ponto. Vejamos:

(854) Professor: Qual é que você está fazendo?
(855) C1: O (ponto) B_6.
(856) Professor: Vamos ver como está indo aí [vai em direção a um grupo de alunos e pergunta:] é altura ou profundidade [referindo-se ao ponto B_6]?
(857) D3: Profundidade.
(858) Professor: Isso. Está abaixo.

[...]

(859) D2: E aqui (no ponto B_6) não é negativo?
(860) Professor: O sinal para baixo (do eixo $0x$) é negativo?
(861) D2: [balançando a cabeça positivamente responde] ah sim...é negativo.
(862) Professor: E a projeção (ortogonal) com o sinal vai ser quanto?
(863) D2: $-\mathbf{1}$.
(864) Professor: E a ordenada vai ser quanto?
(865) D2: $-\mathbf{1}$.
(866) B1: Professor, a projeção com o sinal vai ser sempre igual à ordenada!
(867) Professor: Essa é a ideia! A projeção junto com o sinal é igual a quem?
(868) B1: A ordenada.
(869) Professor: Isso. Já percebestes.
(870) B1: Tá bom. Só queria confirmar mesmo.

[...]

(871) Professor: [direcionando-se à turma] então a ordenada vai ser igual a quem?
(872) A1: A quem? Ao seno!
(873) Professor: Isso.
(874) B2: Vai ser o seno?
(875) B3: Ah é, vai ser igual ao seno!
(876) Professor: Por que igual ao seno?
(877) B3: Porque o seno é a ordenada.
(878) B2: O $\boldsymbol{y}$.
(879) Professor: Muito bem. Isso mesmo.

Entre os turnos 854 e 879 é possível percebemos a presença predominante das interações do tipo I-R-A e I-R-F-R-F, onde a abordagem interativa/ de autoridade é a mais comum. Neles, o professor inicialmente estabelece uma relação horizontal com os discentes (turnos 854 e 856), conforme aconselha a Psicologia Histórico-Cultural. Os discentes, por sua vez, interagem e sentem-se mais à vontade para responder corretamente às perguntas realizadas pelo professor. Em vários turnos é possível percebermos o *feedback* positivo do professor (turnos 858, 867, 869, 873 e 879), estimulando-os. Vale assinalar também que aos estudantes é ofertado tempo para que eles tentem fazer as tarefas em grupo (turnos 858 e após o turno 870), sendo a intervenção do docente mínima, atuando apenas para fazer checagem quanto a aprendizagem dos escolares (turnos 862, 864, 867 e 868). Assim, no turno 859 o discente D2 percebe que o ponto B_6 é relacionado ao número real -1. Entretanto, ao invés dele afirmar essa relação, ele faz uma pergunta confirmatória “não é negativo?”. Os turnos subsequentes indicam que ele de fato já sabia da relação entre o ponto B_6 e o número -1, conforme atestam os turnos 861 e 863.

No turno 866 e subsequentes é possível observarmos que a discente B1 consegue generalizar a ideia de que o seno do número real x sempre vai estar associado com a ordenada deste ponto no ciclo trigonométrico, que após receber um feedback positivo do professor, afirma: “só queria confirmar mesmo” (turno 870). Não apenas ela percebe isso, mas todos os demais discentes apresentados neste segmento. A partir da análise constante neste segmento, é possível percebermos a relevância das interações sociais na construção do conhecimento dos escolares, seja mediante a ajuda do professor ao estudante, seja a partir da ajuda dos estudantes entre si, ou até mesmo a partir de *feedbacks* positivos do professor. É importante destacar também a importância das intervenções do professor para permanência dos estudantes na "modelagem" do conceito científico a ser construído.

Quadro 23 - Resumo da análise microgenética de $S3$

Intenções do Professor	Fazer o discente perceber que o seno de um número no ciclo trigonométrico é igual a ordenada do ponto que o representa.	
Conteúdo	Seno de um número real no ciclo trigonométrico.	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A e I-R-F-R-F	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Estabelece relação horizontal com os discentes;	Interage com o professor;
	Faz pergunta retórica;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e disponibiliza tempo para os alunos tentarem resolver a questão proposta;	Faz pergunta confirmatória;
	Faz pergunta retórica;	Responde corretamente;
	Checa a aprendizagem;	Responde corretamente à checagem;
	Checa a aprendizagem;	Responde corretamente à checagem; Generaliza;
	Dá feedback positivo;	
	Dá feedback positivo e checa a aprendizagem;	Responde corretamente à checagem;
	Dá feedback positivo e checa a aprendizagem;	Responde corretamente à checagem;
	Disponibiliza tempo para os alunos fazerem as atividades propostas;	Mobilizam-se para realizarem as atividades propostas;
	Questiona a turma sobre generalizações particulares;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo;	Faz pergunta confirmatória; Responde corretamente;
	Faz pergunta retórica;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo;	Não registrado

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 4: TURNOS 904 - 928

A partir das interações ocorridas no segmento anterior, os discentes tiveram mais facilidade para responder às questões da UARC 4. Este segmento trata das interações relacionadas à questão 3 que tinha como objetivo fazer o aluno perceber que cada ponto no ciclo trigonométrico tem um valor do seno correspondente a ele:

(904) Professor: E vocês falaram...olha só...vamos unir as ideias. Vocês viram que o seno corresponde à projeção ortogonal sobre o eixo $0y$*. Agora vocês disseram que todo ponto no ciclo trigonométrico tem uma projeção. Então a pergunta seguinte é: cada ponto no ciclo trigonométrico tem um seno? O que vocês acham?*
(905) D3: Tem.
(906) C2: Eu coloquei sim aqui.

(907) Professor: Olhem lá. A primeira pergunta da terceira questão: Cada ponto do ciclo trigonométrico tem uma projeção ortogonal no eixo $0y$? Todo ponto que você pegar no ciclo trigonométrico tem uma projeção no eixo $0y$?
(908) C2: Tem.
(909) Professor: Essa projeção corresponde a quem?
(910) D3: Ao seno.
(911) Professor: [direcionando-se ao aluno C2] você concorda?
(912) C2: Sim. É a altura ou profundidade, que é a mesma coisa do seno.
(913) Professor: Muito bem. Está correto.
(914) C2: Legal.
(915) Professor: Então a outra pergunta é essa: Cada ponto do ciclo trigonométrico tem um seno?
(916) C2: Tem.
(917) A1: Sim, professor.
(918) Professor: Vamos pensar assim: o seno corresponde a quem?
(919) A1: A projeção (ortogonal) no eixo $0y$.
(920) Professor: Vocês disseram que todo ponto tem uma projeção (ortogonal sobre o eixo $0y$), então todo ponto tem um seno?
(921) C2: Sim, professor.
(922) Professor: E quem é esse seno? É o valor de quem?
(923) A1: Da ordenada.
(924) Professor: Isso. Então o valor do seno corresponde ao valor de...
(925) D3: Professor eu coloquei que o seno é representado pela projeção ortogonal...
(926) Professor: No eixo...
(927) D3: No eixo y.
(928) Professor: Isso. Estás correto!

O segmento ora analisado apresenta abordagem interativa predominante do tipo Interativa/de autoridade, tendo como padrão de interação mais frequente o I-R-F-R-F. Nele, é possível percebermos que os escolares conseguem relacionar o seno do número real (representado no ciclo trigonométrico) com a ordenada dele. Essa relação é construída a partir da exploração do professor quanto aos conhecimentos adquiridos pelos alunos nos segmentos anteriores. Essa exploração, por sua vez, é manifestada pelos verbos no passado constantes nos turnos 904 e 920. Podemos perceber que o docente põe em destaque a fala dos escolares, o que pode motivá-los a continuarem respondendo. É neste contexto que o docente propõe um avanço na ministração do conteúdo.

Mediante perguntas novas, ele checa as respostas dos escolares e estes respondem corretamente a todas elas, além disso, o docente compartilha, mediante questionamento, a resposta de um discente com os demais alunos (turno 911), dando-lhes oportunidade para julgarem se a resposta dada isoladamente por um estudante é, de fato, correta. Ao fazer isso, podemos perceber que o aluno respondente não apenas acerta, como também explica com mais detalhe sua resposta (turno 912). Nos turnos que seguem é possível percebermos que o discente D3 consegue generalizar a ideia de que “o seno sempre vai ser representado pela projeção ortogonal” no eixo $0y$ (turnos 925 e 927) e que o seno é sempre numericamente igual à ordenada deste ponto no ciclo trigonométrico. Somente após as discussões acima descritas, o professor apresenta a intervenção formalizante 4. Ou seja: ao aluno é ofertado tempo para que eles possam agir, formular hipóteses, validar com seus pares e, por fim, o professor intervém institucionalizando o saber, conforme propõe a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau.

Quadro 24 - Resumo da análise microgenética de $S4$

Intenções do Professor	Fazer o discente perceber que o seno de um número no ciclo trigonométrico é igual a ordenada do ponto que o representa.	
Conteúdo	Seno de um número real no ciclo trigonométrico.	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-F-R-F	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Retoma a fala dos discentes (dos segmentos anteriores);	Não há;
	Propõe pergunta confirmatória;	Concorda com o professor;
	Checa a resposta do discente;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta retórica;	Responde relacionando com o objeto que o professor deseja ensinar;
	Compartilha, mediante pergunta, a resposta correta com os demais alunos;	Responde corretamente acrescentando informação;
	Dá feedback positivo;	Comemora a resposta correta;
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Explora a visão do aluno;	Responde corretamente;
	Explora a visão do aluno e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e começa a falar;	Generaliza;
	Dá feedback positivo;	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 5: TURNOS 955 - 981

Após a intervenção formalizante 4, o professor propôs uma intervenção avaliativa restritiva constante na questão 4 (UARC 4). Os turnos que seguem apresentam as interações ocorridas na resolução das letras a) e b) da referida questão. Optamos por apresentar apenas essas letras em nossa análise microgenética, por percebermos que o que aqui é apresentado, repete-se na resolução das demais letras, apenas com a diferença em relação às questões aritméticas, o que não é objeto de análise nessa pesquisa:

(955) Professor: Aí a pergunta que se faz: qual é o seno de A?
(956) A1: Zero.
(957) Professor: E (o seno) de C, quanto é?
(958) A1: Um sobre dois.
(959) Professor: Zero mais um sobre dois, dá quanto?
(960) A1: Um sobre dois.
(961) Professor: Muito bem. E a letra B? Pessoal, $\boldsymbol{senx_{10}} + \boldsymbol{senx_2}$*... Quem é o* $\boldsymbol{x_{10}}$*? Está representado por qual letra lá?*
(962) F3: K.
(963) Professor: K? Vamos ver aqui [professor conta os pontos].
(964) A3: J. é o (ponto) J, professor!
(965) Professor: É o (ponto) J, pessoal. Então aqui vai ficar J mais $\boldsymbol{x_2}$*. O* $\boldsymbol{x_2}$ *é quem?*
(966) A3: (Ponto) B.
(967) Professor: Quanto é o seno do ponto J, pessoal?
(968) D3: Menos três sobre quatro.
(969) Professor: [Indo em direção de D3]: O rapaz falou quanto?
(970) D3: Menos três sobre quatro.
(971) Professor: Todos concordam com ele?
(972) Vários alunos: Sim.
(973) Professor: Correto, porque o seno corresponde a...
(974) F3: Ordenada do ponto.
(975) Professor: Então vai ficar menos três sobre quatro mais quanto? O seno (do ponto) de B é quanto?
(976) A1: Um sobre quatro.
(977) Professor: Menos três quartos mais um quarto dá quanto?

(978) F1: Menos dois quartos.
(979) Professor: Muito bem, menos dois quartos. Simplificando vai ficar...
(980) F1: Menos um sobre dois.
(981) Professor: Tranquilo, né?

O segmento analisado apresenta diálogos predominantemente interativo/de autoridade, onde são estabelecidos principalmente padrões do tipo I-R-A. A partir dele podemos observar que o professor, ao buscar avaliar o aprendizado dos escolares, estabelece um jogo de pergunta e resposta com os discentes. Podemos observar que as respostas dos discentes, em geral, são imediatas e corretas, apesar de no turno 962 o respondente errar, o que consideramos ser apenas uma falta de atenção na contagem dos pontos, percebemos que os discentes já estavam bem familiarizados com a ideia de que o seno de um número (no ciclo trigonométrico) corresponde à ordenada dele no mesmo ciclo trigonométrico.

Além disso, é importante ressaltar a oportunidade dada pelo professor aos demais alunos sobre o julgamento da resposta dada isoladamente pelo discente D3 (turno 970). A oportunidade dada, oferta aos demais discentes o julgamento para verificação se a resposta dada por um aluno deve ou não ser considerada. Podemos perceber que vários alunos concordaram com a resposta dada isoladamente, o que reforça que os discentes compreenderam corretamente o que se propunha essa UARC.

Quadro 25 - Resumo da análise microgenética de $S5$

Intenções do Professor	Avaliar a aprendizagem dos discentes quanto a aprendizagem da relação existente entre o seno de um número real e a ordenada do ponto que o representa no ciclo trigonométrico	
Conteúdo	Seno de um número real no ciclo trigonométrico.	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde incorretamente;
	Checa o conhecimento;	Responde corretamente;
	Considera a fala do discente e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta confirmatória;	Responde corretamente;
	Compartilha com a turma a resposta dada isoladamente;	Responde corretamente;
	Checa o conhecimento;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta retórica;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e checa a resposta dada	Responde corretamente;

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

5.2.5- Análise Microgenética do Episódio 5

SEGMENTO 1: TURNOS 1026 - 1064

Este segmento trata da primeira parte da UARC 5 (questões 1 a 3). Ele tem como objetivo apresentar as interações ocorridas na construção do conhecimento dos escolares quanto a propriedade $senx = sen(x \pm 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(1026) Professor: O seno de B_1 todos entenderam que é $0{,}6$, *não é?*
(1027) Vários alunos: Sim.
(1028) Professor: Aí você imagina que de (do ponto) B_1 eu dou uma volta completa. Eu vou parar aonde?
(1029) D2: Em B_1.
(1030) Professor: Isso, B_1 de novo. E qual é o valor do seno aí?
(1031) D2: $0{,}6$.
(1032) Professor: Então se eu der outra volta completa eu vou parar aonde novamente?
(1033) C1: Em B_1. Sempre em B_1.
(1034) Professor: Qual vai ser o valor do seno dele?
(1035) C1: $0{,}6$. *Sempre vai dar* $0{,}6$.
(1036) Professor: Por que sempre vai dar $0{,}6$*?*
(1037) C1: Porque tá dando voltas completas. Aí para sempre no mesmo ponto e tem sempre a mesma altura ou profundidade.
(1038) Professor: Sempre?
(1039) C1: Sempre. Vai parar no mesmo lugar.
(1040) Professor: Isso. Então, tá safo? Então $B_1 + 2\pi$ vai ter seno igual a quanto?
(1041) D2: $0{,}6$.
(1042) Professor: E se eu tiver $B_1 + 4\pi$? Vai ser quanto o valor do seno?
(1043) D2: $0{,}6$ *também.*
(1044) Professor: Por quê?
(1045) D2: Porque sempre para no mesmo ponto.
(1046) C1: É, professor. Sempre que dá uma volta completa para no mesmo ponto.

[...]

(1059) Professor: Então (qual o valor do seno de) $B_1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$? Significa que eu vou dar várias voltas completas. Vai dar quanto o valor do seno?
(1060) F1: $0{,}6$. *Tá tranquilo moço.*
(1061) Professor: Tá tranquilo? Pacífico?
(1062) F1: Fácil.
(1063) Professor: É isso aí, pessoal. É bom ouvir vocês dizendo que é fácil. Pelo menos isso significa que vocês estão aprendendo...
(1064) F3: Fácil, fácil.

Os turnos apresentados acima, indicam predominantemente padrões de interações do tipo I-R-A, onde podemos perceber constantes abordagens do tipo interativa/de autoridade. A leitura deste segmento nos permite inferir que os discentes não apresentaram dificuldades em perceber que o seno de dois números quaisquer, cuja diferença seja $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, é sempre igual. Apesar disso, o professor faz frequentes checagens dos conhecimentos dos escolares (turnos 1026, 1030, 1038 e 1042), tendo como objetivo sondar se as respostadas dadas são consistentes, se o respondente tem propriedade sobre aquilo que está falando. Os turnos subsequentes à essas sondagens, apresentam respostas corretas, indicando indícios de aprendizagens, conforme a Teoria das Situações.

Os turnos 1036 e 1044 reforçam a checagem realizada pelo professor. Neles, o docente oferta a oportunidade aos escolares explicarem suas respostas. Estes, mobilizando seus conhecimentos já adquiridos e organizando seus argumentos, explicam corretamente sua resposta anterior. É possível percebermos que o ambiente criado favorece o discurso do aluno e valoriza os conhecimentos prévios, onde o saber novo é justificado pela lógica das situações apresentadas, e não definido pelo professor (como geralmente ocorre em aulas predominantemente expositivas). Em duas oportunidades (turnos 1033 e 1035) os discentes evidenciam, intuitivamente, a percepção de que $senx = sen(x \pm 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Todavia, eles ainda consideram apenas o termo “voltas completas”. No segmento a seguir o professor amplia e generaliza as discussões aqui apresentadas.

Quadro 26 - Resumo da análise microgenética de $S1$

Intenções do Professor	Fazer o aluno perceber que $senx = sen(x \pm 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.	
Conteúdo	Cálculo do seno de números representados por arcos côngruos	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Checa o conhecimento dos discentes;	Responde corretamente;
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Confirma a resposta do aluno e checa o conhecimento dos discentes;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta retórica;	Responde corretamente e generaliza;
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente e generaliza novamente;
	Pede explicação quanto a resposta dada;	Mobiliza conhecimentos adquiridos e responde corretamente;
	Checa o conhecimento do discente;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Checa o conhecimento do discente;	Responde corretamente;
	Pede explicação quanto a resposta dada;	Responde corretamente;
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Sonda a aprendizagem dos discentes.	Afirma que entendeu.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 2: TURNOS 1090 - 1098

Os turnos apresentados neste segmento retratam as interações que antecedem a intervenção formalizante 5 (UARC 5). Vale destacar que a apresentação dessa intervenção aos escolares se deu apenas após as discussões geradas em sala de aula e os turnos apresentados neste segmento e no anterior, são apenas recortes de uma discussão muito mais ampla.

(1090) Professor: E a terceira (questão)... Os pontos B_n e $B_n + 2k\pi, k \epsilon \mathbb{Z}$ têm o mesmo valor do seno?
(1091) F1: Sim.
(1092) Professor: E por que você acha que isso acontece?
[Inaudível]
(1093) F3: Porque estão no mesmo ponto lá [aponta para o ciclo trigonométrico desenhado no quadro].
(1094) Professor: O rapaz respondeu ali [O professor vai até F3].
(1095) D3: Porque dá várias completas voltas e volta para o mesmo ponto.

(1096) Professor: Isso! Então, o $senx$ *e* $sen(x \pm 2k\pi)$*, onde* $k\epsilon\mathbb{Z}$*, são iguais?*
(1097) D3: Foi o que falei, mas de outra forma!
(1098) Professor: Muito bem, é isso mesmo. Já merece um chocolate mais tarde. Beleza? Então aí vamos para a intervenção formalizante (5).

Os turnos apresentados acima indicam um contexto no qual os discentes já apresentam certa familiaridade com os símbolos matemáticos. Vale destacar que essa familiaridade foi cultivada a partir das interações sociais: os alunos tiveram a oportunidade de aprender, discutir com os colegas e com o professor sobre a utilização deles, tornando-os inteligíveis a todos. É possível percebermos que o segmento analisado apresenta a tríade I-R-A como o tipo de padrão de interação predominante. O turno 1093 indica que o discente já compreendeu que dando-se uma volta completa no ciclo trigonométrico, o número irá parar no mesmo ponto. Aliás, isso já havia sido falado pelos discentes nos segmentos anteriores.

No entanto, o professor dá voz ao discente F3 para motivá-lo a falar mais. Ao agir dessa forma, outro aluno, o D3, complementa a resposta do aluno anterior (turno 1095). O professor então, dá um feedback positivo aos respondentes e direciona ainda mais as perguntas para aquilo que deseja ensinar (turno 1096), ou seja: que o $senx$ e $sen(x \pm 2k\pi)$ ($k\epsilon\mathbb{Z}$) são iguais. O aluno D3 reforça a resposta dada anteriormente (turno 1097), a qual é ratificada pelo professor, que apresenta a intervenção formalizante 5. Percebemos que até apresentar a formalização do conhecimento matemático, o aluno percorreu um caminho cheio de contradições, dificuldades e desequilíbrios. Para superar os obstáculos, o discente teve que adaptar-se às situações novas. Essas adaptações são manifestadas através das respostas novas. Segundo a Teoria das Situações, essas respostas novas são indícios de aprendizagens. Vale assinalar também que o percurso do aluno foi acompanhado de perto pelo professor, que esteve sempre atento às falas e comportamento dele, ajudando-o sempre que necessário. As intervenções do docente se deram apenas quando necessário. Enquanto elas mostraram-se dispensáveis, o docente agia apenas como mediador do conhecimento, conforme preceitua a Psicologia Histórico-Cultural.

Quadro 27 - Resumo da análise microgenética de $S2$

Intenções do Professor	Fazer o aluno perceber que $senx = sen(x \pm 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.	
Conteúdo	Cálculo do seno de números representados por arcos côngruos	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe nova pergunta com a utilização de símbolos matemáticos;	Compreende o simbolismo utilizado e responde corretamente;

	Solicita explicações sobre a resposta dada;	Explica corretamente;
	Dá atenção a outro aluno respondente;	Complementa a resposta do aluno anterior;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Retoma a resposta anterior;
	Confirma a resposta do aluno e formaliza o conhecimento;	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 3: TURNOS 1154 - 1172

Neste segmento, o docente tem o objetivo de fazer os alunos perceberem que a relação que associa todo número real $\boldsymbol{x}$ com o seu respectivo seno é uma função. As interações aqui apresentadas relacionam-se com a quarta questão da UARC 5.

(1154) Professor: Pela Função de Euler (E), para cada número real x está associado um único valor para $senx$, que é numericamente igual ao valor da ordenada da imagem, $E(x)$? Vou repetir: Pela Função de Euler (E), para cada número real x está associado um único valor para $senx$? Cada x tem um valor do seno? Verdadeiro ou falso?
(1155) D2: Sim.
(1156) C1: Verdadeiro.
(1157) Professor: Por que vocês acham que é verdadeiro?
(1158) C1: Porque cada número está (relacionado) com um ponto na circunferência (trigonométrica) e esse ponto tem uma altura ou profundidade.
(1159) Professor: E o que é essa altura ou profundidade?
(1160) C1: É o seno?
(1161) D2: Verdade, é o seno! Já vimos isso antes!
(1162) Professor: Isso mesmo. [Direcionando-se ao restante da turma] quem é o (número) x, pessoal? O (número) x não tem um ponto equivalente no ciclo trigonométrico? Todo ponto [no ciclo trigonométrico] nós já vimos tem o quê, pessoal?
(1163) A2: Um seno.
(1164) Professor: Parabéns! Isso mesmo! Então, para cada valor de x, esse valor (de $senx$) é numericamente igual a sua imagem que é quem, pessoal?
(1165) A2: A sua ordenada.
(1166) D2: Mas a ordenada não é o seno?
(1167) C1: É o seno sim!
(1168) Professor: Isso. Então essa questão é verdadeira ou falsa?
(1169) C1: Verdadeira.
(1170) Professor: A relação que associa um número real x com o seu respectivo seno é uma função?
(1171) D1: É sim, pois vai de um para um e todo número real tem um seno.
(1172) Professor: Muito bem, é isso mesmo! Aí vamos para a intervenção formalizante 6.

A definição de função seno é um dos pilares desta pesquisa. Para alcançá-la, o professor utiliza-se de uma abordagem predominante interativa/dialógica, onde o discente tem a oportunidade de mobilizar seus conhecimentos individuais e externá-los com seus colegas em uma aula interativa, como a apresentada neste segmento. Vale destacar que antes de alcançarmos o objetivo apresentado neste segmento, os discentes participaram de uma Oficina que retomou conhecimentos prévios, dentre os quais, encontrava-se o conceito de função. Desde o turno 1154, o docente já tem a intenção de direcionar o olhar do discente para fazê-lo perceber que cada número real x tem um único valor de seno. Nos dois turnos seguintes os alunos perceberam isso. No entanto, no turno 1157 o professor dá aos discentes a oportunidade para que eles possam explicar sua resposta. A oportunidade dada é uma maneira utilizada para checar se os discentes de fato sabiam o que estavam respondendo, ou se eles o fizeram aleatoriamente, sem terem internalizados corretamente o objeto ensinado. No turno 1158 o aluno explica corretamente, indicando que o conhecimento internalizado por ele está sedimentado. Entretanto, podemos perceber que o discente ainda utiliza os termos “altura” e “profundidade”, oriundos da estória científica relacionada à roda gigante. Com isso, o professor faz nova pergunta e direciona ainda mais o escolar para a resposta que deseja obter (turno 1159).

No turno 1160, o aluno C1 (no turno 1160) apresenta uma pergunta confirmatória. Não é que ele não sabia a resposta e desejava que o professor o desse, mas sim que ele talvez não quisesse expor sua resposta com medo de estar errada e os demais alunos ficarem zombando dele, por exemplo. Esse raciocínio é reforçado por três motivos: *i)* no turno 1158 ele deu a explicação correta à pergunta realizada no turno anterior; *ii)* no turno 1167 ele responde à pergunta confirmatória de outro aluno e *iii)* no turno 1169 novamente esse mesmo aluno responde corretamente. Ou seja: é bem visível os indícios de aprendizagens dos escolares no contexto apresentado. Conforme os turnos 1160 a 1161 e 1165 a 1167 é possível percebermos a importância das contribuições compartilhadas pelos escolares, pois a partir delas, o conhecimento construído tem mais sentido, posto que ele surge a partir de uma situação vivida pelos próprios discentes. No turno 1170, o professor propõe nova pergunta mais restritiva, com objetivo de sondar se as interações ocorridas permitiam os discentes a perceberem que a relação estabelecida era uma função. O turno seguinte apresenta uma generalização quanto a relação mencionada. Ao afirmar que “*vai de um para um*”, o discente apresenta uma relação biunívoca e ao complementar que “*todo número real tem um seno*”, esse “todo” indica que na relação $x \to senx$ no conjunto de partida não sobrará nenhum elemento que fique sem um respectivo seno. Juntando essas duas partes, percebemos que o discente está seguro quanto a relação funcional $f(x) = senx$ contida na estória científica. Somente após essas discussões e percepções, o docente apresenta a intervenção formalizante 6.

Quadro 28 - Resumo da análise microgenética de $S3$

<table>
<tr><td>Intenções do Professor</td><td colspan="2">Fazer o aluno perceber a relação que associa o número real $\boldsymbol{x}$ o seu respectivo seno é uma função.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td colspan="2">Definir a função seno.</td></tr>
<tr><td>Abordagem predominante</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade</td></tr>
<tr><td>Padrões de interações</td><td colspan="2">I-R-A</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Relação dialética</td><td>Formas de Intervenções (professor)</td><td>Comportamentos e atitudes (discente)</td></tr>
<tr><td>Propõe questão;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Solicita explicação quanto a resposta dada;</td><td>Explica a resposta dada anteriormente;</td></tr>
<tr><td>Checa o conhecimento dos discentes;</td><td>Propõe pergunta confirmatória;
Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
</table>

	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente; Propõe pergunta confirmatória; Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Propõe questão;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e apresenta a intervenção formalizante 6.	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

5.2.6- Análise Microgenética do Episódio 6

SEGMENTO 1: TURNOS 1184 - 1202

Este segmento tem como objetivo apresentar as interações ocorridas em sala de aula na aplicação da UARC 6, mais precisamente no que concerne às letras de a) a d) da primeira questão, nas quais o professor tinha como intenção ensinar sobre os pontos de máximo e de mínimo da função $f(x) = senx$.

(1184) Professor: Em qual ponto a pessoa estará na maior altura possível?

[...]

(1184) Professor: Responderam ali, qual foi o ponto?
(1185) A2: (Ponto) B.
(1186) Professor: Qual o valor do seno neste ponto?
(1187) C2: $+1$.
(1188) Professor: Então qual é o maior valor que o seno pode assumir?
(1189) C2: $+1$.
(1190) Professor: O rapaz respondeu aqui [referindo-se a C2]. [Direcionando-se à turma] O valor do seno não é essa projeção aqui [aponta para a projeção no eixo y desenhada no quadro]?
(1191) C1: Sim.
(1192) Professor: Se ele vai passar por aqui [apontando o ciclo trigonométrico desenhado no quadro], no máximo o valor que ele vai alcançar é...
(1193) A2: 1.
(1194) Professor: O maior valor que o seno pode assumir é quanto?
(1195) C2: $+1$
(1196) Professor: Muito bem. Está correto!

[...]

(1198) Professor: Letra C: Em qual ponto a pessoa estará na maior profundidade possível?
(1199) C2: (Ponto) D.
(1200) Professor: Isso. É o ponto D. E qual o valor do seno neste ponto?
(1201) F1: -1.
(1202) Professor: Muito bem!

Nos turnos apresentados, podemos perceber que há o predomínio da abordagem interativa/de autoridade. Aliás, a partir deste segmento é este tipo de abordagem que será mais frequente. As interações serão mais concisas e objetivas, e o professor terá uma maior intervenção na busca de direcionar as respostas dos escolares para alcançarem a resposta mais rapidamente. Justificamos este fato pela necessidade de terminarmos a aplicação das UARC’s 6 a 8 (segmentos 6 a 8) apenas em um dia, em poucas horas, pois o professor “natural” da turma nos disse que já devíamos encerrar a aplicação para que ele pudesse continuar o conteúdo e que ele deveria aplicar uma avaliação exigida pela escola. Com isso, tivemos que “acelerar” nossa aplicação para não prejudicarmos a pesquisa e nem tampouco a sequência dos conteúdos escolares professor da turma, o qual nos foi muito atencioso.

Considerando o contexto dito anteriormente e a análise dos turnos contidos neste segmento, observamos que os padrões de interações predominantes têm a base triádica do tipo I-R-A. As principais intervenções do professor surgiram na busca de modelar os conhecimentos adquiridos pelos alunos buscando dar forma aos significados por eles internalizados, partindo de maior *altura/profundidade* (turno 1184 e 1198) para o *maior/menor valor* (turnos 1188 e 1200) que o seno pode obter no ciclo trigonométrico. Com isso, o objeto matemático ensinado tem mais significado aos escolares. Podemos perceber também que o docente, ao dar oportunidade aos escolares completarem a sua fala (turno 1192), marca o significado chave que deseja ensinar.

Além disso, percebemos que o docente compartilha com a turma as “descobertas” pessoais dos estudantes (turno 1190), oportunizando que ela avalie, considere, altere ou desconsidere a fala individual de um aluno. Este cenário, segundo a Psicologia Histórico-Cultural, mostra-se favorável para a construção do conhecimento. Dentre os motivos para essa afirmação, encontram-se: 1) a predominância das relações sociais, com o envolvimento de vários personagens (Professor, A2, C1, C2, F1); 2) a valorização das falas dos discentes; 3) a manutenção da ZDP, a partir das zonas de desenvolvimentos reais, dentre outras.

Destacamos, porém, que embora os motivos descritos no parágrafo anterior sejam necessários para o discente construir o saber, a própria teoria de Vygotsky afirma que o professor pode contribuir para a aceleração dele. Essa contribuição se dá a partir da intenção de ensinar, manifestadas nas intervenções do professor às falas dos escolares, que como é possível vermos nos turnos apresentados, existem. Aliás, dentre as vantagens da utilização de uma sequência didática, encontra-se o planejamento para o ensino, exigindo que o docente que utilize este instrumento, desde a elaboração, tenha uma intenção didática, uma intenção de ensinar.

Quadro 29 - Resumo da análise microgenética de $S1$

<table>
<tr><td>Intenções do Professor</td><td colspan="2">Fazer o aluno descobrir o valor máximo e o valor mínimo da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td colspan="2">Ponto de máximo e ponto de mínimo da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$</td></tr>
<tr><td>Abordagem predominante</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade</td></tr>
<tr><td>Padrões de interações</td><td colspan="2">I-R-A</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Relação dialética</td><td>Formas de Intervenções (professor)</td><td>Comportamentos e atitudes (discente)</td></tr>
<tr><td>Propõe questão nova ao aluno;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Propõe questão nova ao aluno;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
</table>

	Checa a aprendizagem do discente;	Responde corretamente;
	Considera a resposta dada e compartilha com a turma;	Não há
	Propõe questão nova ao aluno;	Responde corretamente;
	Dá explicação e explora o conhecimento dos discentes;	Responde corretamente;
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo;	Não há;
	Propõe questão nova ao aluno;	Responde corretamente;
	Propõe questão nova ao aluno;	Responde corretamente;

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 2: TURNOS 1202 - 1216

Após a discussão relacionada aos pontos em que a função $f(x) = senx$ assume o valor máximo e o valor mínimo, é necessário que o professor chame a atenção dos escolares quanto ao intervalo real formado entre estes extremos. Esse intervalo, no caso da função analisada, corresponde à sua imagem. Os turnos que seguem, apresentam as interações ocorridas em sala de aula para a formalização deste objeto matemático.

(1202) Professor: O valor do seno varia de qual número a qual número? Vocês falaram que o maior valor é quanto?
(1203) A2: $+1$.
(1204) Professor: E o menor valor vale quanto?
(1205) F1: -1.
(1206) Professor: Então o valor do seno varia de quanto?
(1207) C2: De -1 *a* $+1$.
(1208) Professor: Varia de quanto?
(1209) C2: De -1 *a* $+1$.
(1210) F1: De $+1$ *a* -1.
(1211) Professor: Muito bem. Então a resposta vai ficar como?
(1212) C2: De -1 *a* $+1$.
(1213) F1: Que é a mesma coisa de $+1$ *a* -1.
(1214) Professor: [Falando a F1] está correto! Muito bem, pessoal. Então eu vou colocar aqui [no quadro]. Vocês falaram que varia de...
(1215) C2: De -1 *a* $+1$.
(1216) Professor: Vou colocar aqui [no quadro] escrito.

Os turnos apresentados acima tratam das interações ocorridas na resolução da questão 1, letra e, da UARC 6. A intenção do professor ao propor essa questão, é a de fazer o aluno perceber o intervalo de variação da função $f(x) = senx$.

Para alcançar seu propósito, percebemos que o professor intervém no discurso apresentado, de várias maneiras: propondo questões (turnos 1202 e 1204) que visam elicitar conhecimentos novos a partir de conhecimentos já adquiridos; checando o significados internalizados pelos escolares (turnos 1206, 1208 e 1211) para confirmar se o significado proposto pelo aluno é coerente com o significado aceito pela academia; dando *feedback* positivos (turno 1211), para manter a fala dos discentes e ao mesmo tempo os manter motivados; confirmando a fala do estudante (turno 1214) e compartilhando o significado no quadro, com o auxílio dos alunos (turno 1214 - 1216).

Observamos que à toda intervenção do professor, os discentes responderam corretamente, indicando que eles de fato compreenderam o que era ensinado. Nos pares de turnos 1209 - 1210 e 1212 – 1213, apesar de os discentes C2 e F1 terem falado a mesma coisa, mas na ordem invertida, eles tiveram a oportunidade de se expressar e o professor, percebendo um pequeno "conflito" entre eles dirige-se a F1 (turno 1214) para confirmar seu raciocínio. Com a cooperação de C2, enfim, o professor institucionaliza o saber. Há, portanto, a valorização das falas dos discentes e o respeito às ideias diferentes (apesar de neste caso essas ideias serem apenas faladas em ordem diferentes), o que pode estimular o raciocínio e a construção do saber pelo próprio discente.

Quadro 30 - Resumo da análise microgenética de $S2$

Intenções do Professor	Fazer o aluno descobrir o intervalo de variação da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$	
Conteúdo	Imagem da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe questão nova ao aluno;	Responde corretamente;
	Propõe questão nova ao aluno;	Responde corretamente;
	Checa a aprendizagem do discente;	Responde corretamente;
	Checa novamente a resposta dada;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e faz nova checagem de aprendizagem;	Responde corretamente; Responde corretamente, mas na ordem invertida;
	Confirma a resposta dada e escreve no quadro a resposta correta com a cooperação dos alunos;	Coopera com o professor;

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 3: TURNOS 1222 - 1237

Um dos conceitos importantes no estudo da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$ é o período. Essa importância se dá pelo fato de que, a partir de um certo intervalo, a função começa a repetir os valores de sua imagem. A letra f da questão 1, UARC 6, trata desse assunto. Os turnos ora analisados tratam das interações relacionadas a esse tema:

(1222) Professor: A partir de qual intervalo o valor de senx começa a se repetir?
(1223) F1: Uma volta completa.
(1224) Professor: Isso. Muito Bem. Quem foi que respondeu uma?
(1225) F1: Eu.
(1226) Professor: Por quê?
(1227) A2: Porque a partir de uma volta a roda gigante começa a passar de novo pelos mesmos pontos que já tinha passado. Aí ela passa pelas mesmas alturas e mesmas profundidades.
(1228) Professor: Uma volta mede quanto?
(1229) D1: $2k\pi$?
(1230) A2: Não. Uma volta é só 2π.
(1231) D1: Ah é...

(1232) Professor: Isso [balança a cabeça concordando com A2]. Então a função seno começa a repetir seus valores a partir de quando?
(1233) A2: A partir de uma volta completa, 2π.
(1234) F1: Porque a partir de uma volta para no mesmo ponto. E ele vai se repetir.
(1235) Professor: Ele quem?
(1236) F1: O valor do seno.
(1237) Professor: Muito bem. Então vamos para a intervenção formalizante 7.

A intervenção inicial do professor (turno 1222) busca filtrar as respostas dos discentes quanto ao conceito de período. Ao finalizar a pergunta com "começa a se repetir", o docente deixa implícito que a partir de determinado intervalo a função começa a se repetir. Ora, os discentes já sabem que os valores das "alturas" e "profundidades" se repetem, mas o direcionamento da pergunta do professor é para o intervalo que isso começa a ocorrer, ou seja, o período.

No turno que segue, o discente responde corretamente, afirmando que a função começa a repetir seus valores a partir de uma volta completa. Podemos observar que o docente dá um *feedback* positivo (turno 1224) e aproveita a oportunidade para checar os significados internalizados pelos discentes (turno 1226). A resposta dada à essa checagem, apesar de correta, ainda trazem consigo termos não acadêmicos como "alturas" e "profundidades".

Ato contínuo, o professor mais uma vez utiliza-se de um argumento de autoridade para direcionar o conhecimento em construção para aquilo que ele deseja ensinar. O turno 1229 indica uma pequena confusão: o discente afirma que uma volta completa mede $2k\pi$ e sem necessitar o professor intervir, o próprio colega o ajuda. Isso aponta para a importância das interações sociais na aprendizagem em sala de aula. No turno 1232 o professor concorda com o discente que ajudou o seu colega e reforça a checagem feita anteriormente. À essa nova checagem, dois discentes respondem corretamente e no turno 1236, o discente F1 finaliza seu raciocínio construído de forma coerente e justificado pelas próprias situações criadas e mantidas em sala. É nesse contexto de discussão e interação social, que o professor então apresenta a intervenção formalizante 7, que define o domínio, a imagem e o período da função $f(x) = senx$.

Quadro 31 - Resumo da análise microgenética de $S3$

Intenções do Professor	Fazer o aluno descobrir período da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$	
Conteúdo	Período da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe questão nova ao aluno;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo;	Não há;

	Solicita justificativa à resposta dada;	Responde corretamente;
	Checa novamente a resposta dada;	Apresenta pergunta confirmatória; Auxilia o colega; Compreende a explicação dada;
	Dá feedback positivo e checa a aprendizagem dos discentes;	Responde corretamente; Responde corretamente acrescentando informações;
	Checa novamente a resposta dada;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e institucionaliza o saber matemático;	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 4: TURNOS 1240 - 1262

Este episódio trata das interações ocorridas em sala de aula na resolução da questão 2, letras a e b. Essas questões foram criadas com o objetivo de fazer o aluno perceber que, a depender do quadrante que o ponto estivesse no ciclo trigonométrico, o sinal do seno poderia ser positivo, negativo ou nulo. Trata-se, portanto, do estudo do sinal da função dada por $\boldsymbol{f(x) = senx}$.

(1240) Professor: Em quais quadrantes a criança terá uma altura em relação ao eixo $0x$*?*
(1241) F1: 1º *e* 2º *quadrante.*
(1242) Professor: E em quais quadrantes a criança terá uma profundidade em relação ao eixo $0x$*?*
(1243) C2: 3 *e* 4.
(1244) Professor: Muito bem. Em quais quadrantes o seno é maior do que zero?
(1245) F1: 1º *e* 2º.
(1246) Professor: O F1 respondeu ali... em quais quadrantes o seno é maior do que zero?
(1247) F1: 1º *e* 2º.
(1248) Professor: Então nesses quadrantes o seno vai ser positivo ou negativo?
(1249) A2: Vai ser positivo.
(1250) Professor: Por quê?
(1251) F1: Porque tem altura.
(1252) Professor: Tá certo. Muito bem. Em quais quadrantes o seno é menor do que zero?
(1253) A2: 3º *e* 4º*?*
(1254) Professor: É só você olhar em quais quadrantes você tem profundidade.
(1255) A2: Ah, então está certo.
(1256) Professor: [direcionando-se à turma] vocês concordam? Em quais quadrantes você terá o seno menor do que zero?
(1257) Vários alunos: 3º *e* 4º.
(1258) Professor: Ele vai ser menor do que zero quando nós tivermos o que?
(1259) A2: Profundidade.
(1260) Professor: Certo. Então em quais quadrantes ele pode ser menor do zero?
(1261) A2: 3º *e* 4º.
(1262) Professor: Muito bem. Está certo até aí.

Neste segmento há o predomínio dos padrões de interação do tipo I-R-A, onde o professor utiliza-se da abordagem interativa/de autoridade para ajudar os alunos a perceberem que toda vez que o ponto no ciclo trigonométrico tiver uma "altura", ele terá um seno positivo; toda vez que ele tiver uma "profundidade", o seu seno será negativo; por exclusão, caso ele esteja em um ponto em que não se tenha nem "altura" nem "profundidade", o seu seno será nulo. A proposta é fazer os discentes perceberem que esse estudo está relacionado aos quadrantes. Deste modo, entre os turnos 1240 e 1243 o docente apresenta perguntas na quais busca direcionar a atenção dos estudantes para que percebam que a "altura" e a "profundidade" da criança na roda gigante estão relacionadas com os quadrantes do ciclo trigonométrico. Podemos observar nestes turnos que os discentes respondem corretamente (turnos 1241 e 1243).

A partir do turno 1244 o professor busca dar forma aos significados atribuídos às palavras "altura" e "profundidade", trocando-as por maior e menor do que zero, respectivamente. No turno 1245 o aluno responde corretamente e aceita o significado implicitamente sugerido pelo professor. Ou seja: o aluno constrói seu próprio conhecimento a partir das interações sociais, conforme advoga a Psicologia Histórico-Cultural.

Na busca de selecionar melhor o significado internalizado pelos escolares, o docente apresenta, no turno 1248, a pergunta que relaciona quadrante com sinal positivo ou negativo da função $f(x) = senx$. Ao responder, à pergunta proposta, o discente consegue marcar o significado a ser internalizado. No turno 1250, ao propor uma intervenção reflexiva, o docente reforça ainda mais essa marcação no cognitivo do discente e oportuniza a ele a chance de explicar melhor o raciocínio utilizado.

Nos turnos 1252 o professor dá um *feedback* positivo aos discentes quanto a discussão gerada nos parágrafos anteriores. Simultaneamente, propõe nova pergunta que novamente relaciona quadrantes do ciclo trigonométrico com sinal da função $f(x) = senx$. No turno seguinte, o aluno apresenta uma pergunta confirmatória. O aluno sabia a resposta correta, mas evita respondê-la de forma direta, conforme se depreende a partir da leitura dos turnos seguintes. O professor então percebe que o aluno internalizou corretamente o conceito explicado e compartilha o significado adquirido por um aluno com toda a turma (turno 1256). Essa por sua vez, conforme os turnos 1257 – 1262, consegue perceber as relações estabelecidas entre "altura" e "profundidade" com o sinal positivo e negativo da função $f(x) = senx$.

Quadro 32 - Resumo da análise microgenética de $S4$

Intenções do Professor	Fazer o aluno descobrir os quadrantes em que a função $\boldsymbol{f(x) = senx}$ é positiva e negativa.	
Conteúdo	Estudo do sinal da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe questão nova ao aluno;	Responde corretamente;
	Propõe questão nova ao aluno;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e checa a aprendizagem dos discentes;	Responde corretamente;
	Propõe questão nova ao aluno;	Responde corretamente;
	Checa o significado atribuído pelo aluno ao objeto matemático;	Responde corretamente;
	Checa novamente a resposta dada;	Responde corretamente;

	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Acrescenta informações;	Valida a resposta dada;
	Propõe que a turma responda à questão proposta;	Respondem corretamente;
	Explora as ideias dos discentes;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo;	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 5: TURNOS 1263 - 1294

A questão 2, letra c, da UARC 6, trata do crescimento e decrescimento da função $f(x) = senx$. Nela, o docente propõe que os alunos preencham um quadro indicando se a função cresce ou decresce nos intervalos indicados. Os turnos de 1263 até 1294 apresentam as interações ocorridas no preenchimento do quadro citado:

(1263) Professor: No intervalo de zero até $\boldsymbol{\pi/2}$, o valor do seno está aumentando ou diminuindo?
(1264) A1: Aumentando.
(1265) Professor: Muito bem. Então a função está crescendo ou decrescendo?
(1266) A1: Está crescendo.
(1267) F1: (Está) aumentando.
(1268) Professor: Isso. Aí você coloca lá (a resposta que você disse) [no quadro da apostila]. Agora neste intervalo aqui de $\boldsymbol{\pi/2}$ até $\boldsymbol{\pi}$. O valor do seno está aumentando ou diminuindo?
(1269) A2: Diminuindo.
(1270) Professor: Vocês acham que está certo isso?
(1271) F1: Sim. Está descendo cada vez mais a profundidade.
(1272) Professor: A profundidade está aumentando?
(1273) F1: Sim. Mas o (valor do) seno diminui.
(1274) Professor: Muito bem. Então a função é crescente ou decrescente?
(1275) F1: Decrescente.
(1276) Professor: Tá ótimo. Então escrevam lá (no quadro contido na apostila): decrescente. E de $\boldsymbol{\pi}$ até $\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$, o valor está aumentando ou diminuindo...o valor do seno?
(1277) F1: Tá aumentando.
(1278) Professor: Tá aumentando? Vamos ver aqui [vai em direção ao quadro].
(1279) A1: Tá diminuindo.
(1280) F1: Tá diminuindo.
(1281) Professor: [ao observar que os alunos, de fato, tinham entendido a resposta correta, o professor avança com as perguntas] então a função é crescente ou decrescente?
(1282) F1: Tá decrescente.
(1283) Professor: Tá safo? Tá entendendo mesmo aí atrás?
(1284) Vários alunos: Sim.
(1285) F1: Já sei professor!
(1286) Professor: Legal. E aqui (na próxima questão) de $\boldsymbol{3\pi/2}$ até $\boldsymbol{2\pi}$... o valor está crescendo ou diminuindo?
(1287) D2: Crescendo.
(1288) Professor: O valor do seno está aumentando ou diminuindo?
(1289) F1: Aumentando.
(1290) Professor: [Pergunta a D2] Está certo o que F1 falou?
(1291) D2: Sim, pois ele (o ponto) estava na maior profundidade e vai crescendo (vai aumentando em relação ao eixo $0y$).
(1292) Professor: Então a função é crescente ou decrescente?
(1293) D2: Crescente.
(1294) Professor: Certo, muito bem. Fechamos aí (a unidade). Tranquilo. Pessoal, parece fácil, mas essas coisas caem no ENEM. Essas coisas de crescente, decrescente... é isso aí. E vocês estão vendo que na verdade não é difícil.

Neste segmento há o predomínio da abordagem interativa/ de autoridade, onde o professor tem a intenção de fazer o estudo do sinal da função $f(x) = senx$. Há o predomínio da tríade I-R-A, mas também ocorre o padrão de interação I-R-F-R-F. No turno 1263 o professor apresenta a primeira pergunta para sondar a percepção dos discentes quanto ao valor do seno, se ele está aumentando ou diminuindo no intervalo de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Comparando-se essa pergunta com a que está contida no turno 1264, aparentemente, elas são idênticas. Entretanto, podemos notar que na primeira há o verbo aumentar/diminuir, e na segunda, o verbo crescer/decrescer. Essa sutil diferença é uma maneira utilizada pelo professor, propositalmente, para dar forma ao significado apresentado ao aluno, onde ele parafraseia o conhecimento novo (crescimento/decrescimento) a partir do que o aluno conhece mais (aumenta/diminui).

A partir das respostas dadas, o docente propõe à turma que faça um julgamento (turno 1270), ratificando ou retificando o que foi falado. Com isso, o professor oferta a oportunidade para que os demais discentes se expressem, manifestando seus raciocínios. No turno 1271 o discente concorda com os que o precederam. Ao perceber que a resposta dada por F1 está correta, o professor checa o significado expresso por este aluno, dando-lhe a oportunidade para que ele esclareça melhor seu raciocínio, o que ele o faz no turno 1273. Considerando que os discentes haviam compreendido a situação, o professor apresenta uma pergunta mais direcionada no turno 1274: “a função é *crescente* ou *decrescente*?”. Estes, por sua vez, respondem corretamente: “*decrescente*” (turno 1275). Podemos perceber, que a inserção dos termos corretos (*crescente/decrescente*) se deu a partir de uma discussão prévia, onde os escolares, com o auxílio do professor, foram alterando suas falas, conforme prevê a Psicologia Histórico-Cultural. No turno 1276 o professor dá um feedback positivo aos discentes e com a cooperação deles preenche o quadro da questão discutida (que estava desenhado no magnético).

Entre os turnos 1276 e 1294, o professor faz intervenções semelhantes às descritas acima, porém analisando intervalos distintos do ciclo trigonométrico, quais sejam: *i)* de π até $\frac{3\pi}{2}$ (turnos 1276 a 1285); *ii)* de $\frac{3\pi}{2}$ até 2π (turnos 1286 a 1284). Deste modo, para não tornar enfadonha nossa análise, analisaremos apenas o erro encontrado no turno 1277. No turno mencionado o discente responde que os valores do seno, no intervalo compreendido entre π e $\frac{3\pi}{2}$, está aumentando. Acreditamos que foi um erro de palavras apenas, pois ao propor uma intervenção reflexiva, antes de o professor escrever no quadro alguma coisa (turno 1278), o discente F1 responde corretamente, conforme mostram os turnos 1279 – 1281. Reforçando esse raciocínio, o mesmo aluno F1, no turno 1282, responde corretamente à mais uma checagem de aprendizagem realizada pelo docente. É neste cenário permeado pelas interações sociais, intenções e intervenções do professor, estímulos aos discentes, onde o professor age como mediador do conhecimento construído pelos escolares, que o docente, enfim, apresenta a intervenção formalizante 8.

Quadro 33 - Resumo da análise microgenética de $S5$

Intenções do Professor	Fazer o aluno descobrir em quais quadrantes a função $\boldsymbol{f(x) = senx}$ cresce e em quais quadrantes a função decresce.	
Conteúdo	Crescimento e decrescimento da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A e I-R-F-R-F	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe questão nova;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e focaliza o olhar do aluno para aquilo que deseja ensinar;	Responde corretamente;
	Dá orientações e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Compartilha com a turma o significado verbalizado por um aluno;	Responde corretamente;
	Checa o significado expresso pelo discente;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e direciona a pergunta para o crescimento/decrescimento da função seno;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo, orientações e propõe nova pergunta;	Responde incorretamente;
	Apresenta uma pergunta confirmatória e solicita a cooperação dos discentes para escrever a resposta correta no quadro;	Mudam o discurso e respondem corretamente;
	Propõe questão nova;	Responde corretamente;
	Checa se os discentes estão compreendendo;	Confirmam a checagem do professor;
	Propõe questão nova;	Responde corretamente;
	Propõe questão nova;	Responde corretamente;
	Solicita confirmação da resposta dada por um aluno;	Reponde corretamente e explica o raciocínio utilizado;
	Reforça a pergunta anterior, focalizando a aprendizagem dos discente;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo, fala da importância deste assunto nas provas do ENEM e apresenta a intervenção formalizante 8;	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

5.2.7- Análise Microgenética do Episódio 7

SEGMENTO 1: TURNOS 1314 - 1353

A UARC 7 trata da redução de arcos ao primeiro quadrante. Este assunto é muito importante ao estudo das funções trigonométricas, pois permite que os discentes calculem os valores de várias funções trigonométricas a partir de arcos conhecidos no primeiro quadrante. Neste segmento, apresentamos as interações ocorridas em sala de aula na aplicação da referida UARC, mais precisamente no que tange às letras c) e d) da 1ª Questão, que trata da redução de arcos do 2º ao 1º quadrante:

(1314) Professor: Agora a letra C: Você pode afirmar que $med(\widehat{AB_1}) = med(\pi - x)$?
(1315) D1: Estou na dúvida, professor...
(1316) Professor: Vamos lá. Quanto vale (a medida do arco) de A até B_3?
(1317) D1: (Vale) x.
(1318) Professor: Isso. Muito bem. De A até B_3 vale quanto?
(1319) D1: (vale) x.
(1320) Professor: Então se eu tenho π. π não é bem aqui, pessoal [apontando para o quadro]?
(1321) Vários alunos: Sim.
(1322) Professor: Se eu tiro todo o x vai sobrar quanto?
(1323) A1: (Vai sobrar) De B_3 até π.
(1324) Professor: Correto. Mas a medida de B_3 até π não é igual a medida de A até B_1?
(1325) F1: É.
(1326) F3: É mesmo!
(1327) Professor: Então se eu tenho π e "tiro" o x vai sobrar quem?
(1328) A1: π menos B_3.
(1329) Professor: Pois então, você está correto. Mas quanto vale o arco de A até B_3?
(1330) A2: Vale x.
(1331) A1: Ah é mesmo!
(1332) D3: Ah tá. Agora entendi.
(1333) Professor: Então quanto vale o arco de A até B_3?
(1334) A2: Vale $\pi - x$, vale $\pi - x$ [aluno demonstra surpresa ao chegar nessa concussão]!
(1335) A1: Vale $\pi - x$?
(1336) Professor: [Perguntando a A2 sobre a pergunta de A1] O que você acha?
(1337) A2: Vale $\pi - x$, pois se eu tenho π aqui [aponta para o ponto B_4 na apostila] e tiro o x que está no ponto B_3, vai ficar o mesmo que $\pi - x$.
(1338) A1: Ah sim. Não tinha visto isso!
(1339) Professor: Muito bem, é isso aí. [Direcionando-se à turma] Tudo certo, pessoal? Tá tudo safo?
(1340) Vários alunos: Sim.
(1341) Professor: Então a letra C a resposta é...
(1342) Vários alunos: Sim.
(1343) Professor: Agora, os pontos B_1 e B_3 estão na mesma altura?
(1344) F1: Sim.
(1345) Professor: Logo, eles têm...
(1346) D3: O mesmo seno.
(1347) Professor: Isso mesmo. Então, o seno de $senx$ é igual ao $sen(\pi - x)$?
(1348) A2: Sim!
(1349) Professor: Por quê?
(1350) F1: Porque eles estão na mesma altura.
(1351) Professor: Isso. Então a letra D, a resposta é...
(1352) A2: Verdadeira.
(1353) F1: Sim.

Os turnos apresentados acima têm como padrão de interação predominante a tríade do tipo I-R-A. Neles é possível percebermos um discurso preponderantemente interativo e de autoridade, onde o professor apresenta constantes perguntas com objetivo de levar os discentes a perceberem que, dado um número x no 2° quadrante, $senx = sen(\pi - x)$. Para isso, o professor utiliza-se do caráter maiêutico para sondar o conhecimento dos discentes e para ajudá-los a construir esse saber matemático. Neste cenário, o aluno é envolvido em uma espécie de jogo, onde o professor propõe perguntas com grau de dificuldade superável aos discente, e estes não questionam e nem se abstém a responder. No turno 1315 percebemos que o discente apresenta dúvida quanto a resolução da questão proposta. Ao perceber isso, o professor decide resolver junto com a turma a questão analisada.

Entre os turnos 1316 e 1333 é possível percebermos o professor direcionando os discursos dos escolares para que eles percebam que o ponto B_3 e o ponto B_1 estão à mesma altura e que fazendo-se algumas manipulações algébricas e geométricas, é possível concluir que "o arco de A até B_3" (turno 1333) pode ser calculado por $\pi - x$.

No turno 1334 é possível percebermos a surpresa do discente A2 ao perceber isso. Entretanto, no turno seguinte, o discente A1 ainda se encontrava com dúvidas. Percebendo a dificuldade encontrada por A1, o docente, no turno 1336, faz uma pergunta a A2 com três objetivos: i) checar o significado internalizado por este aluno (A2); ii) responder à pergunta do turno 1335 e ii) solicitar o compartilhamento da descoberta constante no turno 1334 com toda turma. No turno 1337, percebemos que o discente A2 responde corretamente, indicando que ele havia compreendido corretamente a ideia matemática. Frisamos que a resposta dada ajudou a compreensão e esclarecimento do aluno A1, conforme percebemos no turno 1338. No turno 1339 o docente dá novamente um *feedback* positivo confirmando as respostas dada nos turnos anteriores. No turno 1343 o docente faz uma pergunta retórica. Ora, os discentes já sabem o que é “altura”, qual significado deste termo no contexto analisado. Com isso, no turno 1344 o aluno responde corretamente

É nesse pano de fundo pautado por constantes relações dialéticas que, enfim, no turno 1347, o docente propõe a pergunta principal, a pergunta que permite o discente generalizar e sintetizar tudo o que que foi discutido neste segmento: sendo $\boldsymbol{x}$ pertencente ao segundo quadrante, $senx = sen(\pi - x)$? Entre os turnos 1348 e 1353, percebemos que os discentes não apresentaram dificuldades em responder a essa pergunta, pois as interações pretéritas outorgaram-lhes conhecimentos suficientes para que eles relacionarem conhecimentos antigos “estão na mesma altura” (turno 1350) com conhecimentos novos, a igualdade $senx = sen(\pi - x)$ é “verdadeira” (turno 1352).

Quadro 34 - Resumo da análise microgenética de $S1$

Intenções do Professor	Fazer o aluno perceber que dado um número x no 2° quadrante, $senx = sen(\pi - x)$	
Conteúdo	Redução ao primeiro quadrante	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe uma questão;	Apresenta dúvida;
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta confirmatória;	Responde corretamente;
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Checa o significado internalizado pelo discente;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Solicita explicação às respostas dadas;	Responde corretamente;

	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 2: TURNOS 1391 - 1426

Neste segmento são analisadas as interações ocorridas quanto à questão 2, letras c) e d), da UARC 7. Essas questões têm como objetivo fazer o discente perceber que dada a imagem do número real x (pela função de Euler), onde x pertence ao 3º quadrante do ciclo trigonométrico, temos que: $senx = -sen(x - \pi)$

(1391) Professor: Você pode afirmar que $sen(\widehat{AB_1}) = -sen(\widehat{AB_5})$*?*
(1392) A2: Sim.
(1393) F1: sim.
(1394) Vários alunos: Sim.
(1395) Professor: Por que sim?
(1396) A2: Porque eles têm o mesmo valor (do seno), mas com sinal diferente.
(1397) Professor: E por que com sinal diferente?
(1398) A2: Porque um está na altura e outro na profundidade.
(1399) Professor: Mas por que o valor (em módulo) não é diferente? (Por que) Muda só o sinal?
(1400) A2: Porque de A até B_1 *é o mesmo que de* B_4 *até* B_5*. Mas um tem altura e o outro, profundidade.*
(1401) A3: Um é positivo e o outro não.
(1402) Professor: Correto! Têm o mesmo valor, porém com sinal diferente. [Direcionando-se aos demais alunos] Tá safo? Vocês entenderam aí?
(1403) Vários alunos: Sim!
[...]
(1407) Professor: Agora a letra D. A letra D é um pouquinho difícil...difícil, na verdade não, mas vocês têm que refletir um pouco. É possível afirmar que, se x *estiver no 3º quadrante,* $senx = -sen(x - \pi)$*?*
(1408) B3: Sim.
(1409) F1: A resposta é sim.
(1410) Professor: Vocês afirmaram que a medida de (do arco de medida) $\widehat{AB_1}$ *é igual a medida de quem, pessoal?*
(1411) A1: (Igual a medida de) $x - B_4$*.*
(1412) Professor: x *menos o quê?*
(1413) A1: (Igual a medida de) $x - B_4$*.*
(1414) Professor: Mas quem é B_4*?*
(1415) A3: (A medida de) $x - \pi$*.*
(1416) Professor: Isso. Essas medidas aqui [apontando para os arcos $\widehat{AB_1}$ *e* $\widehat{B_4B_5}$ *desenhado no quadro] são o quê, pessoal?*
(1417) F1: Iguais!
(1418) Professor: Isso. Têm a mesma medida, os senos têm o mesmo....
(1419) A1: valor
(1420) F1: Mas têm sinais diferentes.
(1421) Professor: Por quê?
(1422) F1: Um está na altura e o outro está na profundidade.
(1423) Professor: Isso! Os sinais são diferentes, mas os valores são iguais. Então podemos afirmar que se x *estiver no 3º quadrante,* $senx = -sen(x - \pi)$*?*
(1424) F1: Sim.
(1425) D3: Sim.
(1426) Professor: Muito bem.

Neste segmento, percebemos o predomínio da abordagem interativa/ de autoridade, onde o professor utiliza-se dos padrões de interações do tipo I-R-A e I-R-F-R para conduzir o discurso e as ideias dos alunos na direção da aprendizagem sobre a redução de arcos do 3º ao 1º quadrante. Nos turnos 1391 a 1394 percebemos que o diálogo apresentado indica que o discente A2 e F1 respondem corretamente. Na tentativa de explorar o significado atribuído pelos discentes, o professor solicita (turno 1395) que eles expliquem sua resposta. Essa explicação ocorre entre os turnos 1396 e 1398. No turno 1396 o aluno A2 afirma que "(os senos) têm o mesmo valor", em módulo, porém "com sinal diferente" e no turno 1398 ele justifica sua fala indicando que "um está na altura e o outro está na profundidade". Ora, nas discussões anteriores já havíamos dito que o seno de um arco que possui uma “altura” acima do eixo $0x$ é positivo e o seno dos arcos que tiverem uma “profundidade”, serão negativos.

Entretanto, o professor, no turno 1399, tenta avaliar se os discentes realmente compreenderam que os arcos analisados possuem o mesmo valor em módulo. O discente A2, no turno que segue, explica porque o módulo dos senos é igual, mas os sinais são diferentes. Podemos analisar que o referido aluno ainda se apoia na ideia de altura e profundidade, mesclando o conhecimento adquirido na experiência de sala de aula com o conhecimento científico. No turno 1402, o docente pergunta se a turma percebeu as ideias discutidas e se ela havia compreendido, o turno que segue indica que sim. Entre os turnos 1407 e 1426 o professor tem a intenção de fazer os discentes perceberem que se o número x estiver no terceiro quadrante, $senx = -sen(x - \pi)$. Como falado no turno 1407, trata-se de uma percepção um pouco difícil e que exige um “olhar geométrico” aguçado. Os discentes apresentaram dificuldades até chegar nessa percepção. Isso justifica as frequentes intervenções do professor neste segmento. Considerando este pano de fundo, no turno 1410, percebemos que o discente retoma ideias já apresentadas pelos alunos e propõe uma intervenção reflexiva. Nessa intervenção, o professor desejava que os discentes percebessem geometricamente (com desenho no quadro, etc.) que a medida do arco $\widehat{A\,B_1}$ é congruente à medida do arco $x - \pi$. Nos turnos 1411 e 1413 o discente responde que o arco $\widehat{A\,B_1}$ tem a mesma medida do arco $x - B_4$. Vale destacar que o raciocínio do discente está correto, mas a partir dele ainda não é possível concluirmos que $senx = -sen(x - \pi)$.

Com isso, o professor, no turno 1414, prossegue fazendo outra pergunta que reforcem a compreensão de que o arco $\widehat{A\,B_1}$ tem a mesma medida do arco $x - \pi$. A pretensão do professor foi concretizada pelo discente A3, no turno 1415. Nestes turnos, podemos perceber que o professor não afirma aquilo que pretende ensinar, mas apenas conduz as atividades de tal forma que os próprios discentes construam seus próprios argumentos, suas ideias, seus conhecimentos. Por exemplo, o professor não afirmou em nenhum momento o que o aluno A3 disse no turno 1415, mas deu apenas pistas que permitiu ao discente fazer suas próprias conclusões. Esse contexto criado e mantido pelo professor vai ao encontro da teoria das situações, de Guy Brousseau, que afirma que todo o cenário no qual o professor não dá diretamente a resposta ao aluno, mas que apenas o conduz, via atividade maiêutica, de tal forma que o próprio discente adquira um saber, é válido. Essa validade é sustentada pela compreensão de que o saber adquirido nesse cenário é justificado pela sua própria lógica interna, pelas situações didáticas e adidáticas surgidas, criadas e mantidas no ambiente escolar.

Quadro 35 - Resumo da análise microgenética de $S2$

Intenções do Professor	Fazer o aluno perceber que dado um número $\boldsymbol{x}$ no 3° quadrante, $\boldsymbol{senx = -sen(x - \pi)}$	
Conteúdo	Redução ao primeiro quadrante	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A e I-R-F-R	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe pergunta;	Respondem corretamente;
	Propõe intervenção reflexiva;	Dá explicação;
	Propõe intervenção reflexiva;	Dá explicação;
	Propõe intervenção reflexiva;	Dá explicação;
	Dá feedback positivo, explicações e submete à turma as respostas dadas;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta;	Respondem corretamente;
	Busca direcionar as respostas dos estudantes;	Responde corretamente;
	Reforça a resposta dada e deixa os alunos completarem sua fala;	Completam a fala;
	Solicita explicação;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Respondem corretamente;
	Dá feedback positivo,	Não há

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 3: TURNOS 1452 - 1478

Este segmento trata das interações ocorridas em sala de aula ainda na aplicação da UARC 7, mais precisamente na resolução da questão 3, letras b), c) e d). O conteúdo abordado é redução ao primeiro quadrante, onde os discentes têm que perceber que dado um ponto x no quarto quadrante, imagem do número real x, pela Função de Euler, temos que: $senx = -sen(2\pi - x)$.

(1452) Professor: Qual o valor do $sen\left(\widehat{AB_1}\right)$*?*
(1453) D3: $0{,}6$*.*
(1454) Professor: E o $Sen\left(\widehat{AB_7}\right)$*?*
(1455) A2: $-0{,}6$*. É a mesma coisa da (questão) 2.*
(1456) Professor: Mais ou menos. Ai na letra C, ele pergunta assim: que $sen\left(\widehat{AB_1}\right) = -sen\left(\widehat{AB_7}\right)$*?*
(1457) A2: Sim.
(1458) F1: Só muda o sinal.
(1459) A1: Só sinais diferentes.
(1460) Professor: Isso. Só muda o sinal. E a letra D: Você pode afirmar que $senx = -sen(2\pi - x)$*?*
(1461) F1: Sim.
(1462) Professor: Por quê?
(1463) F1: Professor, vai dar a mesma coisa da (questão) 2. Vai ser o (valor) de cima com sinal de menos.
(1464) Professor: Quer dizer... se o x *estiver no quarto quadrante, ele vai ser igual ao* $sen(2\pi - x)$*?*
(1465) A2: Sim.
(1466) Professor: Por quê?
(1467) F1: Porque o comprimento de A até B_1 *[girando a caneta no sentido anti-horário] é igual ao comprimento de A até* B_7 *[girando a caneta no sentido horário].*
(1468) Professor: E?
(1469) F1: Eles têm a mesma distância no eixo y*.*
(1470) Professor: Como assim?
(1471) F1: O seno não é o eixo y?
(1472) Professor: É. É a projeção do ponto (no ciclo trigonométrico) sobre o eixo y.
(1473) F1: Então... como eles estão na mesma distância de A, eles (os pontos) têm o mesmo valor do seno.
(1474) Professor: Muito bem! Então você pode afirmar que $senx = -sen(2\pi - x)$*?*
(1475) F1: Sim. Mas um é altura e o outro profundidade.

(1476) Professor: Isso aí! Por isso que o sinal troca! Alguma dúvida, pessoal?
(1477) C2: Ah sim. Entendi agora.
(1478) Vários alunos respondem: Não.

Neste segmento é possível percebermos um discurso interativo e de autoridade que tem como objetivo auxiliar os discentes na construção do saber matemático no tocante a redução de arcos do 4º para o 1º quadrante. Entre os turnos 1452 e 1455, os discentes respondem corretamente à pergunta do professor. Frisamos a percepção do discente A2 no turno 1455 que consegue perceber a semelhança da questão 3 com a questão anterior. Embora, de fato, exista uma pequena semelhança (geometricamente falando) entre a questão 2 e a questão 3, a álgebra relacionada é diferente. Ao propor a questão constante no turno 1456, o professor implicitamente já chama a atenção dos discentes para a mudança de sinal: $sen\left(\widehat{AB_1}\right) = -sen\left(\widehat{AB_7}\right)$. Nos três turnos que seguem, os discentes percebem essa mudança de sinal. Essa percepção dos discentes contribui para que os discentes consigam responder a próxima letra, a letra d), da questão analisada. No turno 1460 o professor propõe a questão que permite a generalização: "Você pode afirmar que $senx = -sen(2\pi - x)$?". No turno que segue, o discente A2 responde que sim, mas o professor quer mais, quer selecionar os significados importantes a partir da fala do discente. Para isso, ele propõe as questões constantes nos turnos 1462, 1464 e 1466.

No turno 1467, o discente começa a explicar o raciocínio utilizado e no turno 1469 consegue perceber que os arcos $\widehat{AB_1}$(no sentido anti-horário) e $\widehat{AB_7}$(no sentido horário) têm o mesmo comprimento, logo, eles "têm o mesmo valor do seno", em módulo (turno 1473). Entretanto, "um é altura", com sinal positivo, e o outro é "profundidade" (turno 1475). É neste cenário de diálogo, onde o professor ouve o que o discente diz e busca entender o raciocínio utilizado por ele, que os discentes conseguem afirmam não ter dúvidas (turno 1478) de que, sendo x um ponto do quarto quadrante do ciclo trigonométrico, temos que: $senx = -sen(2\pi - x)$. Após essas discussões, o professor apresenta aos discentes a intervenção formalizante 9.

Quadro 36 - Resumo da análise microgenética de $S3$

Intenções do Professor	Fazer o aluno perceber que dado um número $\boldsymbol{x}$ no 4° quadrante, $\boldsymbol{senx = -sen(2\pi - x)}$	
Conteúdo	Redução ao primeiro quadrante	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe uma questão;	Responde corretamente;

	Propõe uma questão;	Responde corretamente; Percebe semelhanças;
	Dá feedback positivo e propõe uma questão;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe uma questão;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta retórica;	Explica corretamente;
	Reforça a pergunta anterior;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta retórica;	Explica corretamente;
	Propõe pergunta;	Continua a explicação;
	Solicita explicação;	Propõe pergunta confirmatória;
	Confirma a pergunta fazendo alterações no discurso do aluno;	Assume as alterações e expande a explicação;
	Dá feedback positivo e propõe a pergunta final;	Responde com explicação;
	Dá feedback positivo e justifica o sinal trocado;	Dizem que entenderam;

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 4: TURNOS 1564 - 1579

Este segmento trata das interações ocorridas na resolução da questão 4 (UARC 7). Trata-se de uma Intervenção Avaliativa Restritiva na qual o discente tem que relacionar o seno do número $\frac{3\pi}{4}$ no segundo quadrante, com o seno de um dos números apresentados nas opções dadas, sendo este no primeiro quadrante. Assim, para resolver essa questão, o discente deverá mobilizar os conhecimentos relacionados à redução ao primeiro quadrante. Optamos por analisar a resolução apenas da questão 4, pois a questão seguinte guarda grande semelhança com ela, e as interações sociais, as abordagens predominantes, os padrões de interações a as relações dialéticas, etc. são praticamente idênticas.

(1564) Professor: Isso. Dá 135°. E 135 (graus) está em qual quadrante?
(1565) D2: Segundo quadrante.
(1566) Professor: Isso. Então, o $sen 135°$ é equivalente ao seno de qual (arco) aqui [apontando para o 1° quadrante]?
(1567) B1: Hum...
(1568) D1: De 135 (graus) até 180 (graus) tem 45 (graus)
(1569) Professor: Isso. De 135 (graus) até 180 (graus) tem quantos graus?
(1570) D3: Exatamente 45 (graus).
(1571) Professor: Então esses 135° vai estar na mesma altura de quem, pessoal?
(1572) D1: Do (arco de) 45°.
(1573) Professor: Isso. Então, o seno de 135° vai ser igual ao seno de quem?
(1574) D3: (Do arco de) 45°.
(1575) Professor: Correto. E 45° equivale a quanto, em radianos?
(1576) F1: $\frac{\pi}{4}$.
(1577) Professor: Corretamente. Então o $sen\frac{3\pi}{4}$ é equivalente ao seno de quem?
(1578) F1: (Ao seno) de $\frac{\pi}{4}$.
(1579) Professor: Pronto. Isso mesmo!

A questão 4, de onde foram extraídos os turnos acima, trata do seno do número $\mathbf{\frac{3\pi}{4}}$. A experiência nos mostra que em geral os discentes têm maior dificuldade em fazer operações com números em radianos. Assim, para facilitar as operações com o número dado na questão, consideramos importante fazer a conversão de graus para radianos. Nos turnos suprimidos neste segmento (por considerar que não é o foco dessa pesquisa), o professor e os discentes trabalham juntos para fazer essa conversão. No turno 1564, o professor ratifica a conversão de radianos para graus do número $\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}$. Em seguida, o docente, inicialmente, apenas explora a noção geométrica deste número, perguntando em qual quadrante do ciclo trigonométrico ele estaria. No turno seguinte percebemos que o discente D2 responde corretamente. No turno 1566 o professor dá um *feedback* positivo e busca relacionar o seno do número dado ($\frac{3\pi}{4}$) com o seno de um outro número (e arco) no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico. Podemos perceber que o discente B1, no turno 1567, compreendeu a pergunta do professor, mas não soube responder. No turno seguinte, o discente D1 mobiliza os conhecimentos já discutidos para buscar relacionar com o arco no primeiro quadrante.

Há, portanto, para esse discente um significado entre a pergunta do professor e as ideias por ele mobilizadas. Ao perceber isso, o professor (no turno 1569) mais uma vez dá um *feedback* positivo e retoma os conhecimentos mobilizados pelo discente D1, e propõe uma pergunta com as mesmas palavras ditas por ele no turno anterior. O objetivo do professor ao fazer isso, é realçar que o raciocínio dele está correto e ao mesmo tempo motivá-lo a continuar respondendo. Essa tática utilizada pelo professor acaba estimulando que outros alunos respondam também. Assim, no turno 1570, percebemos que o aluno D3 responde corretamente. Interessante notar que, ao responder, o discente demonstra convicção na sua resposta "exatamente 45 (graus) ". Essa convicção pode ser fruto do estímulo dado pelo professor, principalmente através de feedbacks positivos. Buscando relacionar as respostas dadas pelos discentes com a pergunta da questão analisada, o professor propõe mais uma questão no turno 1571. Nele, o docente relaciona a "altura" do arco de 135° com a altura de outro arco, que o aluno D1 (no turno 1572) consegue perceber. Até este ponto, já é possível percebermos um avanço: os discentes conseguiram perceber que o arco de 135° e o arco de 45° estão à mesma altura.

No entanto, essa não era a proposta da questão avaliativa analisada neste segmento. O que desejávamos era que os discentes conseguissem perceber que o arco de 135° e o arco de 45° de fato estão à mesma altura, e que por isso teriam o mesmo valor do seno. Ou seja: que o $sen135° = sen45$, em outras palavras, que o $sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Assim, no turno 1573, o considera as falas dos discentes e avança perguntando a quem era igual o seno de 135°. Ora, pela discussão anterior, os discentes sabiam que o arco de 135° estava à mesma "altura" que o arco de 45°, logo, eles teriam o mesmo valor do seno, já que pela construção da estória científica criada, a altura correspondia ao valor do seno. Deste modo, no turno 1574, percebemos que o discente responde corretamente. Após o professor perceber que os discentes haviam realmente compreendido as ideias matemáticas por trás da questão dada, e considerando a resposta correta do discente, ele mais uma vez ratifica a fala do discente (no turno 1575) e apenas solicita que os escolares convertam de graus em radianos os arcos obtidos, o que é feito corretamente, conforme atestam as falas dos discentes nos turnos 1576 e 1578.

Quadro 37 - Resumo da análise microgenética de $S4$

Intenções do Professor	Avaliar o aprendizado do discente sobre redução ao primeiro quadrante a partir de uma intervenção avaliativa restritiva	
Conteúdo	Redução ao primeiro quadrante	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Reflete sobre a pergunta; Mobiliza uma estratégia para responder;
	Dá feedback positivo reforçando a resposta obtida pela estratégia do discente e repete a pergunta;	Responde corretamente;
	Propõe nova pergunta relacionando com "altura";	Responde corretamente;
	Propõe nova pergunta relacionando com valor;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e finaliza a resolução da questão proposta.	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

5.2.8- Análise Microgenética do Episódio 8

SEGMENTO 1: TURNOS 1649 – 1683

Este segmento e o próximo tratam da resolução da primeira questão da UARC 8. Na questão mencionada é dado um quadro com oito números reais e é solicitado que os discentes preencham com os valores dos senos. Neste segmento, analisaremos as interações verbais ocorridas no preenchimento do quadro contido na questão, mas apenas da segunda coluna, onde os discentes têm que encontrar o valor dos senos dos números $0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}\ e\ 2\pi.$

(1649) Professor: O seno de 0 *(rad) é quanto?*
(1650) D1: É zero.
(1651) Professor: Isso. É zero por quê?
(1652) D1: (Porque) não tem nem altura nem profundidade.
(1653) Professor: O seno de $\frac{\pi}{2}$ *quanto é, pessoal?*

(1654) A2: Como é?
(1655) Professor: O seno de $\frac{\pi}{2}$ *que está aqui em cima [aponta para o quadro] quanto é o valor dele?*
(1656) A2: É 1.
(1657) Professor: A moça respondeu aqui. É quanto [perguntando à A2]?
(1658) A2: É 1.
(1659) Professor: Mas é positivo ou negativo?
(1460) A2: Positivo.
(1661) A1: É $+1$.
(1662) Professor: Isso. Porque está na altura. O seno de π, *quanto é o seno de* π, *pessoal? [Inaudível] O* π *está bem aqui [aponta para o quadro], pessoal. Ele está acima ou abaixo do eixo* x?
(1663) A2: Não tem nada.
(1664) Professor: Tem alguma altura ou profundidade?
(1665) A2: Não. É zero.
(1666) Professor: Então o seno de π *é quanto?*
(1667) D3: Ah, então é 0.
(1668) D1: Zero!
(1669) Professor: Isso, [direcionando-se à D1] entendeu por que é zero?
(1670) D1: Sim. É porque não tem nem altura nem profundidade.
(1671) Professor: Isso. E o seno de $\frac{3\pi}{2}$, *que está aqui embaixo [aponta para o quadro] (vale quanto)?*
(1672) D1: -1.
(1673) Professor: Por que é -1?
(1674) D1: Porque tem a maior profundidade.
(1675) Professor: Isso. A maior profundidade está aonde?
(1676) D1: No $\frac{3\pi}{2}$.
(1677) Professor: E vale quanto?
(1678) A2: -1.
(1679) Professor: Muito bem. E o (valor do) seno de 2π?
(1680) C3: Zero.
(1681) Professor: Beleza. Então como ficou? Só repitam aí...
(1682) Vários alunos: $0, +1, 0, -1,\ 0$.
(1683) Professor: Beleza.

Nos turnos apresentados acima é possível percebermos que há o predomínio da abordagem interativa e de autoridade, onde o professor utiliza-se dos padrões de interações do tipo I-R-A e I-R-F-R para cooperar com os discentes no preenchimento do quadro da questão analisada. Na aula, o professor desenhou no quadro o ciclo trigonométrico com os pontos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ *e* 2π. A partir disso o docente faz as perguntas constantes nos turnos ora analisados. Assim, no turno 1649 o docente pergunta qual o seno do número zero. No turno que segue, o discente D1 responde corretamente. Apesar disso, o professor faz uma pergunta retórica (no turno 1651) com o objetivo de explorar os significados internalizados pelos discentes, expostos na sua fala. O discente, por sua vez, mobiliza os conhecimentos já adquiridos e responde corretamente à pergunta feita, justificando seu raciocínio. Percebendo que o discente realmente tinha compreendido, o docente avança e no turno 1653 propõe mais uma pergunta. Um dos alunos solicita que seja refeita a leitura da questão. O professor assim o faz, utilizando-se da representação feita no quadro para reforçar a pergunta. A discente A2 responde corretamente. Entre os turnos 1656 e 1661 o professor busca reforçar a utilização do sinal.

No turno 1662 o professor dá um *feedback* positivo, ratificando a resposta contida no turno anterior e propõe nova pergunta. No turno que segue, o discente A2 afirma que "*não tem nada*". Trata-se de um erro: o zero não é nada. Zero é zero! Assim, o professor pergunta quanto à "altura" e "profundidade" relacionada ao número π. No turno 1665 percebemos que o mesmo discente A2 muda a sua resposta: agora ele afirma que é zero. Essa transição percebida na fala do discente é reflexo das intervenções realizadas pelo professor, que de acordo com a Psicologia

Histórico-Cultural, é o mediador do conhecimento a ser ensinado. No turno 1666, o docente retoma a pergunta realizada no turno 1662. Os discentes D1 e D3 respondem corretamente. Na verdade, o discente D1, no turno 1670, chega a explicar seu raciocínio. Ao final dessa explicação, no turno 1671, dá um feedback positivo com o objetivo de ratificar a resposta dada. Em seguida, o professor propõe nova pergunta. Entre os turnos 1672 e 1678, o professor busca mais uma vez explorar o significado internalizado pelos discentes. Para isso, ele busca fazer os discentes justificarem suas respostas. Ao agir dessa forma, ele marca os significados chaves da situação e checa se a fala do discente está correta. A mesma coisa se repete entre os turnos 1679 e 1683. Com isso, é possível percebermos a importância da constante relação dialética na construção do conhecimento dos escolares. Com efeito, a quantidade de intervenções orais de manutenção objetiva (I-OMO) é superior a quantidade de intervenções escritas, exigindo uma frequente adaptação das perguntas às situações de aprendizagens ocorridas em sala de aula.

Quadro 38 - Resumo da análise microgenética de $S1$

<table>
<tr><td>Intenções do Professor</td><td colspan="2">Preencher o quadro apresentado na primeira questão da UARC 8.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td colspan="2">Seno de números reais representados no ciclo trigonométrico</td></tr>
<tr><td>Abordagem predominante</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade</td></tr>
<tr><td>Padrões de interações</td><td colspan="2">I-R-A e I-R-F-R</td></tr>
<tr><td rowspan="17">Relação dialética</td><td>Formas de Intervenções (professor)</td><td>Comportamentos e atitudes (discente)</td></tr>
<tr><td>Propõe questão;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e solicita justificativa;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Propõe questão;</td><td>Solicita repetição da leitura da questão;</td></tr>
<tr><td>Repete a leitura desenhando no quadro;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Pergunta direcionando-se à aluna que respondeu;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Propõe questão;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;</td><td>Responde;</td></tr>
<tr><td>Propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback ao aluno com dúvida e propõe pergunta;</td><td>Responde corretamente e explica o raciocínio utilizado em sua resposta;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Solicita explicações quanto a resposta dada;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 2: TURNOS 1683 - 1727

Neste segmento, analisaremos as interações verbais ocorridas no preenchimento da quarta coluna do quadro apresentado na questão 1 (UARC 8). Essa coluna é importante pelo fato de que os valores obtidos a partir dela ajudarão os discentes a construírem o gráfico da função no intervalo $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

(1683) Professor: Agora vamos para a segunda coluna em branco (a quarta coluna da primeira questão): qual o $sen(0-2\pi)$?
(1684) F2: Zero?
(1685) Professor: Por que zero?
(1686) F2: Porque $(0-2\pi)$ vai estar no mesmo (ponto) que o 0, pois tirou uma volta completa. E o seno de 0 (rad) é 0!
(1687) Professor: Muito bem. Agora olhem lá: quanto é o seno de $\frac{\pi}{2}-2\pi$? Aí você não pode perder: -2π significa que eu estou dando uma volta no sentido...
(1688) F1: Horário.
(1689) Professor: Mas eu vou parar no mesmo ponto?
(1690) F1: Sim.
(1691) Professor: Qual é o ponto?
(1692) F1: (Ponto) B [o arco de medida $\frac{\pi}{2}$ estava representado no quadro pelo ponto B].
[...]
(1697) Professor: Vocês lembram daquela história lá? Que se você tiver o (número) x, o $x+2\pi$, o $x+4\pi$, ou então, o $x-2\pi$, o $x-4\pi$, não interessa se eu somar ou subtrair o 2π, sempre eu vou estar no mesmo ponto. Qual é o ponto?
(1698) D3: O x.
(1699) Professor: O ponto que é extremidade do arco x.
(1700) D3: Pois é. Isso que eu quis falar.
[...]
(1708) Professor: Então $\frac{\pi}{2}-2\pi$, vai ter seno igual de quem?
(1709) D1: $\frac{\pi}{2}$.
(1710) Professor: Que vale quanto?
(1711) F2: $+1$.
(1712) Professor: Isso. E o $sen(\pi-2\pi)$? Vai ser igual ao seno de quem?
(1713) B3: π?
(1714) Professor: Por que você acha isso?
(1715) B3: Porque -2π significa que eu vou tirar uma volta completa, mas vou parar no π.
(1716) Professor: Isso. E o $sen(\pi-2\pi)$ vai ser igual ao seno de quem?
(1717) F1: De π.
(1718) Professor: Que vale quanto?
(1719) F1: Zero.
(1720) Professor: Isso. Agora $\frac{3\pi}{2}-2\pi$. Quer dizer que eu vou tirar 2π, mas eu vou parar em que ponto?
(1721) C2: No $\frac{3\pi}{2}$.
(1722) Professor: Que tem seno igual a quanto?
(1723) C2: -1.
(1724) F1: 1.
(1725) Professor: -1 ou 1?
(1726) C2: -1, porque está na maior profundidade.
(1727) Professor: Isso; -1.

Neste segmento, o docente utiliza-se da abordagem predominantemente do tipo interativa/de autoridade. É possível percebermos a frequente intervenção do professor para ajudar os discentes a responderem mais rapidamente. Relembramos que o principal motivo para isso foi a necessidade de termos que encerrar a aplicação da sequência didática na escola que nos recebeu para que o docente de origem continuasse com o seu conteúdo escolar. Apesar dessa dificuldade, é possível percebermos que os discentes interagiram bastante, respondendo corretamente.

Vejamos:

No turno 1683 o docente propõe uma pergunta referente a primeira linha em branco da quarta coluna. No turno seguinte o discente F2, ao invés de responder diretamente, prefere fazer uma pergunta confirmatória. O professor, percebendo isso faz uma outra pergunta (turno 1685). A pergunta feita pelo docente tem duas intenções, a saber: *i)* ratificar a resposta do discente, pois ele não o corrige, mas avança com outra pergunte e *ii)* facultar a oportunidade para que o respondente esclareça seu raciocínio. No turno 1686, o discente percebe as intenções do professor e explicita o raciocínio utilizado.

Percebendo que a explicação do aluno é correta, o professor (no turno 1687) dá um *feedback* positivo e propõe nova pergunta. Os discentes, por seu turno, respondem corretamente às perguntas feitas pelo professor. Isso se repete até o turno 1692. Entre os turnos 1697 e 1700, o professor revisa com os discentes conhecimentos já discutidos em sala de aula. A finalidade dessa revisão é relembrar os conhecimentos dos discentes e facilitar nas respostas das próximas perguntas. Podemos observar que no turno 1713, ao responder à pergunta feita pelo professor no turno anterior, o discente B3 também faz uma pergunta confirmatória.

Mais uma vez é percebido que o aluno respondente sabia a resposta correta, conforme se depreende da explicação dada por ele no turno 1715. A partir dos turnos 1723 e 1724, surge um impasse: o seno de $\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right)$ é 1 ou -1?

Como mediador do conhecimento, o professor dá a oportunidade aos escolares avaliarem a resposta correta, o que eles o fazem corretamente, conforme a explicação dada no turno 1726. Foi no contexto descrito nas interações verbais analisadas acima que o professor construiu juntamente com os discentes o gráfico da função $f(x) = senx$, referente a segunda questão. Como sabemos, trata-se na verdade apenas de um esboço, pois o intervalo do domínio ficou limitado ao intervalo $D(f) = [-2\pi; 2\pi]$.

Quadro 39 - Resumo da análise microgenética de $S2$

Intenções do Professor	Preencher o quadro apresentado na primeira questão da UARC 8.	
Conteúdo	Seno de números reais representados no ciclo trigonométrico	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A e I-R-F-R	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe questão;	Propõe pergunta confirmatória;
	Assume como afirmativa e propõe outra pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe pergunta retórica;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta retórica;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta retórica;	Responde corretamente;
	Revisa conhecimentos anteriores;	Interagem com o professor;

	Dá feedback positivo e propõe pergunta retórica;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta retórica;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Propõe pergunta confirmatória;
	Assume como afirmativa e propõe outra pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe pergunta retórica;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta retórica;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta retórica;	Responde corretamente; Responde corretamente;
	Solicita que os discentes julguem as respostas dadas;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo;	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Segmento 3: Turnos 1780 - 1796

Este segmento trata das interações ocorridas na resolução da letra A da terceira questão da UARC 8. Nessa resolução, o professor busca apenas retomar os conteúdos discutidos nas UARC's anteriores, tais como valor máximo e valor mínimo da função seno e, consequentemente, o conceito de imagem da referida função. É interessante destacar que essa retomada realizada pelo professor se dá a partir do gráfico desenhado no quadro (feito na questão 2) e não mais no ciclo trigonométrico, como até então tinha sido feito.

(1780) Professor: A partir do gráfico que desenhamos [lendo a letra A da 3ª questão:], qual o valor máximo que essa função pode assumir?
(1781) F1: $+1$.
(1782) C2: $+1$.
(1783) Professor: Isso, mais um. Não passa daqui [apontando para o gráfico desenhado no quadro]. Por quê?
(1784) A3: Porque o valor máximo do seno é $+1$*!*
(1785) C1: Por que a maior altura é $+1$*?*
(1786) Professor: Isso. Vocês lembram do ciclo trigonométrico?
(1787) Vários alunos: Sim.
(1788) Professor: Pois é! Qual era a altura máxima lá? [áudio inaudível]
(1789) C1: [Falando com C2] Não falei que era isso? Mais um!
(1790) Professor: Então, isso quer dizer que o valor máximo do seno é quanto?
(1791) C1: $+1$.
(1792) Professor: Isso mesmo. Por isso que o gráfico da função seno vai só até $+1$*. E o valor mínimo?*
(1793) C1: -1.
(1794) Professor: E por quê?
(1795) C1: Porque a profundidade "maior" é -1.
(1796) Professor: Muito bem.

O conceito de imagem é um dos mais importantes no estudo das funções reais. Graficamente, se os discentes perceberem na linha que representa o gráfico, os pontos que indicam o valor máximo e o valor mínimo da referida função, fica mais fácil eles compreenderem este conceito. Assim, com objetivo de auxiliar os discentes na percepção dos pontos mencionados, é apresentado a questão ora analisada. Nas interações referentes aos os turnos 1780, 1781 e 1782, o professor tem a intenção de marcar o significado já internalizado pelos discentes, qual seja, que o valor máximo da função analisada é $+1$. No turno 1783, o docente ratifica as falas dos escolares repetindo trecho dela. Ao fazer isso, ele tem como intenção estimular ainda mais o aluno respondente nas respostas, bem como compartilhar com os demais a resposta correta.

No mesmo turno o docente checa os significados dos escolares, dando-lhes a oportunidade para explicarem suas respostas. Nos dois turnos que seguem (1784 e 1785), os discentes respondem corretamente. O discente C1, porém, apresenta uma pergunta confirmatória. Na verdade, ele sabia que o maior valor da função $f(x) = senx$ é $+1$. Podemos afirmar isso, pela manifestação verbal contida nos turnos 1789 e 1791. No turno 1792, novamente o docente dá um feedback positivo e explica melhor o que significa esse valor, inclusive fazendo um paralelo com os valores da função seno ainda no ciclo trigonométrico (turnos 1786 – 1788), o que agrega aos discentes um significado mais profundo daquilo que está sendo aprendido. Ainda no turno 1792, o professor pergunta sobre o menor valor que a função seno pode obter. Nos turnos que seguem, percebemos que os escolares conseguem extrair do gráfico (desenhado no quadro) as informações necessárias para responder à pergunta realizada, sempre relacionando suas falas às conquistas cognitivas anteriores, tal como “porque a ‘profundidade maior’ é -1” (turno 1795). Ou seja: os conhecimentos novos dos escolares são mesclados com os conhecimentos já internalizados, o que vai ao encontro da Psicologia Histórico-Cultural.

Quadro 40 - Resumo da análise microgenética de $S3$

<table>
<tr><td>Intenções do Professor</td><td colspan="2">Analisar o esboço do gráfico e extrair os valores máximos e mínimos da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td colspan="2">Valor máximo e valor mínimo da função seno.</td></tr>
<tr><td>Abordagem predominante</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade</td></tr>
<tr><td>Padrões de interações</td><td colspan="2">I-R-A</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Relação dialética</td><td>Formas de Intervenções (professor)</td><td>Comportamentos e atitudes (discente)</td></tr>
<tr><td>Propõe questão;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e checa o conhecimento internalizado;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;</td><td>Respondem de forma afirmativa;</td></tr>
<tr><td>Propõe questão;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Propõe questão;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;</td><td>Respondem de forma afirmativa</td></tr>
<tr><td>Checa a aprendizagem;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo.</td><td>Não há.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 4: TURNOS 1796 - 1804

Este segmento trata das interações ocorridas na resolução da letra B, da questão 3 (da UARC 8). Nessa questão, é tratado do conceito de imagem da função seno. Para trabalhar esse conteúdo, o professor utiliza-se do gráfico construído com os discentes na questão anterior.

(1796) Professor: [Lendo a letra B da Questão 3] Qual o intervalo correspondente ao conjunto imagem dessa função? O conjunto imagem está no eixo $0x$ *ou o eixo* $0y$*?*
(1797) A1: (Eixo) $0y$.
(1798) Professor: Correto. Então o conjunto imagem varia de quanto a quanto, pessoal?
(1799) C1: (Varia) de $+1$ *até* -1.
(1800) Professor: Isso. Então o conjunto imagem na letra B varia entre qual intervalo?
(1801) F1: Entre de $+1$ *e* -1*, como C1 falou.*
(1802) Professor: Está certo. Então o intervalo de variação do conjunto imagem da função seno é de quanto, pessoal?
(1803) Vários alunos: (Varia) de $+1$ *até* -1.
(1804) Professor: Muito bem.

Nos turnos transcritos acima é possível percebermos o predomínio da abordagem interativa/ de autoridade, na qual o professor tem a intenção de fazer os alunos perceberem que a imagem da função $f(x) = senx$ é dado por $Im(f) = \{x \,\epsilon\, \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$. Destacamos que o conceito de imagem de função real já havia sido trabalhado em sede de Oficina, cabendo aos escolares mobilizarem estes conhecimentos, aplicando-os à função trigonométrica em questão. Os padrões de interações mais frequentes tiveram como base a tríade do tipo I-R-A.

Para alcançar sua intenção, o docente apresenta uma intervenção reflexiva no turno 1796. No turno seguinte, podemos observar que o discente A1 responde corretamente. Ao perceber que os discentes não aparentavam estar com dúvidas quanto a essa pergunta, o docente, no turno 1798, ratifica a resposta do aluno e faz outra pergunta com o objetivo de checar o significado dos discentes, ao que o discente C1, no turno seguinte responde corretamente. No turno 1800 o professor ratifica a resposta dada pelo escolar e praticamente repete a pergunta feita no turno 1798, com uma mudança proposital: é inserido o termo intervalo, e não mais o termo “de quanto a quanto” (turno 1798). Com isso, o docente busca dar forma ao significado a ser internalizado pelo discente, inserindo uma visão mais acadêmica, matematicamente aceita.

O discente F1, no turno 1801, responde corretamente à pergunta feita pelo professor no turno anterior. É interessante notar a importância das interações sociais na construção do conhecimento dos escolares. Por exemplo, ao afirmar “como C1 falou” (turno 1801), o discente F1 apropria-se de parte da fala de um dos seus colegas para reforçar a sua própria ideia, seu próprio conhecimento. Essa fala do discente é ratificada no turno 1802, onde o professor busca compartilhar com os demais escolares a resposta correta dada. Podemos perceber que ao fazer isso, o docente utiliza-se de uma linguagem mais técnica “o intervalo de variação do conjunto imagem da função seno", o que só foi possível ser feito após o docente dar forma aos significados discutidos nos turnos anteriores. No turno 1803, é possível percebermos que vários discentes respondem corretamente, o que nos permite afirmar que eles aprenderam aquilo que estava sendo ensinado.

Com efeito, de um lado a Teoria das Situações propõe que os indícios de aprendizagens dos escolares são manifestados através de respostas novas feitas pelo professor; e que, ao responder, o escolar busca adaptar-se ao meio criado pelo docente com objetivo de ensinar. Por outro lado, de acordo com a Psicologia Histórico-Cultural, os escolares aprendem a partir das interações sociais, onde o conhecimento é compartilhado entre todos os personagens envolvidos e o professor é o mediador dele, agindo apenas quando dispensável. Além disso, segundo essa teoria, há um movimento que busca "elevar" os conhecimentos ao nível mais técnico, sem desprezar os conhecimentos espontâneos, adquiridos pelos escolares durante sua vida.

Quadro 41 - Resumo da análise microgenética de $S4$

Intenções do Professor	Analisar o esboço do gráfico e extrair o intervalo correspondente à imagem da função $f(x) = senx$.	
Conteúdo	Imagem da função $f(x) = senx$.	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe questão;	Responde corretamente;
	Ratifica a fala do discente e checa o aprendizado dos escolares.	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e checa o aprendizado dos escolares.	Responde corretamente;
	Ratifica a fala do discente e reforça a pergunta anterior;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo;	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 5: TURNOS 1804 -1818

Com a construção do gráfico da função $f(x) = senx$, o professor propôs a letra C da questão 3 (UARC 8). Nela, o professor pretende explorar a visão geométrica dos discentes quanto a distância entre os pontos $(-2\pi; 0)$ e $(0; 0)$ e entre a distância entre os pontos $(0; 0)$ e $(0; 2\pi)$. Como sabemos, essas distâncias são idênticas e mede 2π. Os turnos abaixo representam as interações ocorridas na resolução dessa questão.

(1804) Professor: Agora a letra C: qual a distância entre -2π e 0?
(1805) D1: Um.
(1806) Professor: Um? A distância entre -2π e 0 vale quanto?
(1807) A1: (Vale) 2π.

(1808) Professor: Muito bem, entendestes? [Perguntando a D1].
(1809) D1: [aparentando dúvida] De -2π *a* 0 *vale* 2π*?*
(1810) F1: Sim. Lá [aponta para o desenho no quadro] do ponto -2π *até o ponto* 0 *mede* 2π*!*
(1811) Professor: Isso. Daqui para cá [apontando para os pontos -2π *e* 0 *desenhado no quadro], vale quanto pessoal?*
(1812) D1: [aparentando que tinha entendido] Ah sim. O comprimento do ponto -2π *até (o ponto)* 0 *mede* 2π*. Entendi quando F1 explicou!*
(1813) Professor: Isso. E qual a distância entre 2π *até* 0*?*
(1814) D1: É a mesma coisa: mede 2π*.*
(1815) F1: Isso. É a mesma coisa!
(1816) Professor: Muito bem. Vale 2π *também. Todos concordam?*
(1817) Vários alunos: Sim.
(1818) Professor: Então tá.

Neste segmento o tipo de abordagem predominante foi o interativo e dialógico, onde o professor tinha como intenção dá os primeiros passos na construção do conhecimento relacionado ao período da função $f(x) = senx$. Para isso, o docente utiliza-se do padrão de interação baseado na tríade I-R-A, apresentando intervenções orais de manutenção objetiva (I-OMO) em diversos momentos, tendo como objetivo conduzir os discentes na percepção geométrica daquilo que ele pretende ensinar. Assim, no turno 1804, o professor propõe a primeira pergunta de nossa análise. A ela, o discente D1 responde incorretamente (turno 1805). Entendendo que o erro faz parte do processo de aprendizagem, o docente o considera e ao invés de corrigir instantaneamente o discente, apresenta uma outra pergunta (turno 1806). Ao fazer isso, o professor pode perceber se o respondente de fato errou a pergunta sem querer ou se de ele não havia adquirido o conhecimento necessário para acertar.

No turno 1807, outro aluno responde corretamente. O professor, então, direciona-se ao aluno que havia errado, perguntando-lhe se havia entendido a resposta do seu colega (turno 1808). Com isso, a partir da resposta correta, o professor pretende dar ao discente que havia errado um outro significado para aquilo que estava sendo discutido. No entanto, no turno que segue, mais uma vez é possível perceber que a dúvida ainda persistia com o discente D1. Antes de avançarmos na análise do discurso, destacamos que dificuldades como a apresentada pelo discente D1 são frequentes em sala de aula; porém, o professor deve estar atendo às vozes dos discentes, tendo como objetivo perceber suas dificuldades. A partir dessa percepção, ele pode modelar suas intervenções em busca de auxiliar os escolares na superação de suas dificuldades. Neste aspecto, podemos afirmar que a utilização de uma sequência didática favorece a identificação e evolução dos saberes ensinados, conforme percebemos a partir da análise microgenética.

Voltemos à análise do discurso.

No turno 1810 o escolar F1 intervém para auxiliar seu colega na resposta correta. Destacamos que talvez esse tipo de intervenção não tivesse ocorrido, caso o professor estivesse ministrando uma aula expositiva, em que, geralmente, são anuladas as vozes dos escolares. Ao perceber que o discente F1 respondeu corretamente, o docente ratifica a resposta dada e explora no gráfico desenhado no quadro ideias (apontando os pontos) que podem auxiliar na resposta correta. A partir disso, o discente que estava duvidoso, no turno 1812, responde corretamente.

Colocamos em relevo a importância das interações sociais: podemos inferir que foi partir delas que o discente D1 conseguiu modificar seus pensamentos superiores. Tanto o discente F1 (no turno 1810) quanto o professor (nos turnos 1806, 1808 e 1811) contribuíram na alteração do significado internalizado por D1. Afinal, as I-OMO's propostas pelo professor tinham como finalidade fazer o discente refletir sobre o objeto ensinado e a explicação dada por F1 foram relevantes na construção da resposta correta. Como disse o próprio aluno D1: "Entendi quando F1 explicou!" (turno 1812).

Superado essas dificuldades, como podemos ver entre os turnos 1813 e 1818, os discentes apresentaram mais facilidades em perceber que a distância entre os pontos $(0; 0)$ e $(0; 2\pi)$ também tinha como medida 2π. O próprio discente D1 responde corretamente ao afirmar que "é a mesma coisa: mede 2π" (turno 1814).

Quadro 42 - Resumo da análise microgenética de $S5$

<table>
<tr><td>Intenções do Professor</td><td colspan="2">Analisar o esboço do gráfico e extrair a distância entre os pontos $(-2\pi; 0)$ e $(0; 0)$ e entre a distância entre os pontos $(0; 0)$ e $(0; 2\pi)$.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td colspan="2">Período da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$.</td></tr>
<tr><td>Abordagem predominante</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade</td></tr>
<tr><td>Padrões de interações</td><td colspan="2">I-R-A</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Relação dialética</td><td>Formas de Intervenções (professor)</td><td>Comportamentos e atitudes (discente)</td></tr>
<tr><td>Propõe questão;</td><td>Responde incorretamente;</td></tr>
<tr><td>Propõe pergunta retórica e repete a pergunta anterior;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e checa o aprendizado do aluno que tinha respondido incorretamente;</td><td>Propõe uma dúvida;
Auxilia o discente com dúvida;</td></tr>
<tr><td>Ratifica a fala do aluno e compartilha a resposta dada;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;</td><td>Responde corretamente;</td></tr>
<tr><td>Dá feedback positivo e checa a aprendizagem dos discentes;</td><td>Respondem corretamente</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 6: TURNOS 1818 -1844

Como sabemos, a linha representada no gráfico da função $f(x) = senx$ nos intervalos de $[-2\pi; 0]$ e $[0; 2\pi]$ são idênticas, e corresponde ao período p da função mencionada. Os turnos abaixo representados representam as interações ocorridas na resolução da última letra da questão 3.

(1818) Professor: Agora, olha só para essa linha daqui até aqui [aponta para os pontos $(-2\pi; 0)$ e $(0; 0)$]. Vocês falaram que essa distância vale quanto?
(1819) F1: (Vale) 2π.
(1820) Professor: Daqui até aqui [aponta para os pontos $(-2\pi; 0)$ e $(0; 0)$]. A linha representada nesses intervalos [referindo-se aos pontos citados anteriormente] e nesse intervalo [aponta para os pontos $(0; 0)$ e $(0; 2\pi)$] são iguais?
(1821) Vários alunos: Sim.
(1822) Professor: Sim ou não?
(1823) A1: Sim.
(1824) Professor: Por que sim? Por que você acha que essas linhas são iguais?
(1825) A1: Porque os valores do seno se repetem toda hora.
(1826) Professor: Como assim "toda hora"?
(1827) A1: É que sempre fica dando $+1$ e -1.
(1828) Professor: Sempre?
(1829) A1: Sim. O (seno de) 0 (rad) é 0, depois o (seno de) $\frac{\pi}{2}$ é $+1$, depois o (seno de) π é 0 e aí vai.
(1830) Professor: Certo. Mas essa linha vai ser igual sempre na distância de 2π?
(1831) D3: Acho que sim.
(1832) A1: Vai ser sim. Pois se repete.
(1833) Professor: Opa. Se repete de quanto em quanto?
(1834) A1: De 2π?
(1835) Professor: E 2π é quem?
(1836) A3: Ah, 2π é uma volta completa!
(1837) A1: É mesmo!
(1838) Professor: [Balança a cabeça concordando com A3] vocês lembram do ciclo trigonométrico? O seno se repete de quanto em quanto lá?
(1839) F1: De 2π em 2π.
(1840) A3: Não falei?! É isso! Uma volta completa.
(1841) D3: Ah sim, professor. Agora eu entendi. É a mesma coisa do ciclo trigonométrico...
(1842) Professor: Isso mesmo. A função seno é uma função periódica e ela se repete de quanto em quanto?
(1843) A1: De 2π em 2π.
(1844) Professor: Isso mesmo! Dizemos que o período p da função seno ($f(x) = senx$) é 2π

O período de $f(x) = senx$ é o conteúdo matemático abordado neste segmento. Para ensiná-lo, podemos observar que o docente mantém com os escolares o padrão de interação do tipo I-R-F-R, em que são estabelecidas frequentes abordagens do tipo interativa/dialógica. Assim, no turno 1818 o docente propõe uma pergunta que visa mobilizar os conhecimentos já adquiridos pelos escolares. No turno que segue, percebemos que o discente F1 responde corretamente. No turno 1820, o professor auxilia os discentes apontando para o quadro o gráfico construído na questão 2 e checando se eles conseguem perceber que as linhas do gráfico, entre os intervalos $[-2\pi; 0]$ e $[0; 2\pi]$, são iguais. Podemos perceber que as perguntas constantes nos turnos 1818 e 1820 são muito semelhantes, e isso é proposital: visa marcar os significados chaves da questão, qual seja: que a cada distância de 2π a função seno repete suas imagens.

A partir das perguntas do professor (turnos 1822, 1824, 1826, 1828 e 1830), os discentes conseguem perceber que os valores de $f(x)$ repetem-se. E mais: que esses valores ficam entre "$+1$ e -1" (turno 1827). A pergunta mais importante no momento é: qual a periodicidade em que isso ocorre? No turno 1833 a intenção do professor é que os alunos respondam a essa pergunta. No turno 1834, o discente propõe uma pergunta confirmatória. O professor, no turno seguinte, implicitamente, confirma a pergunta feita e faz uma nova, buscando relacionar o intervalo correspondente à periodicidade da função $f(x)$. Ao perceber que os alunos A1 e A3 conseguem perceber essa relação (turnos 1836 e 1837), o docente compartilha com os demais escolares. O discente F1 também percebe isso (turno 1839) e, embora não tenha sido captado o que gerou o turno 1840, percebemos que o discente A3 também já havia respondido corretamente à pergunta feita pelo professor. Vale colocar em relevo o progresso ocorrido na fala do discente D3 nos turnos 1831 e 1841, que apontam indícios de aprendizagens, de acordo com a Teoria das Situações. É neste cenário dialético, onde são estabelecidas várias interações sociais, que o docente, no turno 1844, enfim, apresenta a resposta correta.

Quadro 43 - Resumo da análise microgenética de $S6$

Intenções do Professor	Analisar e comparar a linha do gráfico de $f(x) = senx$ nos intervalos (do domínio) $[-2\pi; 0]$ e $[0; 2\pi]$.	
Conteúdo	Período da função $f(x) = senx$.	
Abordagem predominante	Interativa/dialógica	
Padrões de interações	I-R-F-R	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe pergunta;	Responde corretamente;
	Dá informações e checa o significado internalizado;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta confirmatória;	Responde corretamente;
	Checa o significado internalizado	Inicia uma explicação;
	Permite o discente prosseguir;	Continua a explicação;
	Propõe pergunta confirmatória;	Confirma e acrescenta informação;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Propõe nova pergunta;	Propõe pergunta confirmatória;
	Propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Propõe comparação entre as informações novas (do gráfico) com as informações antigas (do ciclo trigonométrico);	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e apresenta a resposta correta;	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 7: TURNOS 1844 -1864

Este segmento apresenta as interações ocorridas em sala de aula na resolução da letra A, da quarta questão. Ao propor essa questão, o docente tinha como objetivo fazer os discentes descobrirem a partir do gráfico desenhado na questão 2, mas apenas no intervalo I do domínio da função, tal que: $I = [0; 2\pi]$, os intervalos em que $f(x) \geq 0$ e a quais quadrantes do ciclo trigonométrico estes intervalos correspondem.

(1844) Professor: Em quais intervalos nós temos que a função é maior do que zero?
[...]
(1844) Professor: De 0 *a* $\frac{\pi}{2}$ *a função é positiva?*
(1845) A1: Sim.
(1846) Professor: Beleza. De $\frac{\pi}{2}$ *até* π *a função* $f(x) = senx$ *é positiva?*
(1847) F2: Sim.
(1848) Professor: Por que sim?
(1849) F2: Porque está em cima do eixo x*.*
(1850) Professor: Os valores de y estão acima do eixo $0x$*?*
(1851) F2: Sim.
(1852) Professor: Vocês entenderam, pessoal?
(1853) Vários alunos: Sim!

(1854) Professor: Beleza, muito bem. E aqui de π até $\frac{3\pi}{2}$ ela é positiva?
(1855) C1: Não. Ela é negativa.
(1856) Professor: Isso. E de $\frac{3\pi}{2}$ até 2π ela é o que?
(1857) C1: Negativa.
(1858) Professor: Então a letra A ficou assim: em quais intervalos nós temos que a função é positiva? Aqui está dizendo $f(x) > 0$, quer dizer, positiva, maior do que zero. Vocês falaram que é de 0 até aonde?
(1859) D1: Até $\frac{\pi}{2}$.
(1860) Professor: E depois de $\frac{\pi}{2}$ até...
(1861) D2: π.
(1862) Professor: Correto. Isso (o intervalo $[0; 2\pi]$) corresponde a qual ou quais quadrante no ciclo trigonométrico?
(1863) F1: Primeiro e segundo (quadrante).
(1864) Professor: Muito bem.

O estudo do sinal de uma função é muito importante. Neste episódio temos uma parte deste estudo em relação à função $f(x) = senx$. É perceptível o predomínio da abordagem interativa/de autoridade com base na tríade I-R-A. No turno 1844, percebemos que inicialmente o professor faz a pergunta que está na letra A da questão 4, uma pergunta muito genérica. Ao observar que os discentes demoravam muito para responder (e considerando já era tarde e que esta era a última aula para ser aplicada a sequência didática), o professor restringe o intervalo em uma nova pergunta. À essa segunda pergunta, o discente responde corretamente (turno 1845). No turno 1846, o docente dá *feedback* positivo e propõe nova pergunta com intervalo diferente do domínio da função. No turno seguinte, novamente os estudantes respondem corretamente. Para reforçar a resposta do discente, no turno 1848, o professor checa o significado internalizado por F2 solicitando que ele explique sua resposta. No turno seguinte, F2 afirma que $f(x)$ é positiva porque está “em cima do eixo x". Na tentativa de marcar os significados chaves, no turno 1850, o professor repete parte da fala do estudante e propõe nova pergunta. Novamente, no turno seguinte, F2 responde corretamente. Ao perceber que este discente tinha internalizado corretamente o objeto matemático ensinado, o professor compartilha (no turno 1852) com a turma a resposta dele, perguntando à classe se ela entendeu o raciocínio de F2.

No turno 1854 o professor dá um *feedback* positivo à turma, ratificando a resposta dada. Ao mesmo tempo, ele apresenta outro intervalo no qual a função é negativa e propõe uma nova pergunta. O discente C1 responde corretamente à pergunta realizada. A mesma coisa ocorre nos turnos 1856 e 1857. No turno 1858 o docente repete parte das falas contidas nas respostas dos alunos, buscando compartilhar com a turma a ideia apresentada por um ou por poucos alunos e facultando à classe a manifestação de possíveis dúvidas ou raciocínios diferentes. Ao mesmo tempo, no mesmo turno, o professor propõe nova pergunta, a qual foi corretamente respondida por D1 no turno seguinte. Buscando permitir relações entre a representação no plano cartesiano e a representação no ciclo trigonométrico da função $f(x) = senx,$ no turno 1862, o professor propõe uma nova pergunta, a qual é respondida corretamente no turno 1863, demonstrando que os escolares perceberam que o intervalo em que $f(x) \geq 0$ corresponde ao primeiro e segundo quadrante do ciclo trigonométrico.

Quadro 44 - Resumo da análise microgenética de $S7$

Intenções do Professor	Fazer os discentes perceberem em quais intervalos $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$ e relacionar estes intervalos com o ciclo trigonométrico.	
Conteúdo	Estudo do sinal da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$.	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe pergunta.	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Checa o significado internalizado;	Dá explicações;
	Checa novamente o significado internalizado;	Responde corretamente;
	Compartilha com a turma a resposta de um aluno e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Faz a releitura da questão;	Responde corretamente;
	Inicia uma afirmativa e deixa para os alunos completarem;	Completam corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 8: TURNOS 1876 -1890

Este segmento complementa o anterior. Nele são apresentadas as interações ocorridas em sala de aula na resolução da letra B, da quarta questão, na qual é proposto aos discentes a análise do gráfico desenhado na questão 2, mas apenas no intervalo $\boldsymbol{I}$ (descrito no segmento anterior), para que eles descubram os intervalos em que $f(x) \leq 0$ e a quais quadrantes do ciclo trigonométrico estes intervalos correspondem.

(1876) Professor: É a mesma coisa aqui (na letra B). E de π até $\frac{3\pi}{2}$ ela (a função) é positiva ou negativa?
(1877) F1: Negativa.
(1878) Professor: Muito bem. E isso equivale a qual quadrante no ciclo trigonométrico?
(1879) A1: Terceiro quadrante.
(1880) Professor: E de $\frac{3\pi}{2}$ até 2π ela (a função) é positiva ou negativa?
(1881) A1: Negativa.
(1882) Professor: Por quê?
(1883) A1: Porque está debaixo do eixo x.
(1884) D2: Está lá embaixo [apontando para o quadro].
(1885) Professor: E toda vez que estiver "debaixo do eixo x" ou "lá embaixo", (a função) é negativa?
(1886) A1: Sim, porque embaixo de (do eixo) x é negativo.
(1887) Professor: Muito bem, isso mesmo. Pessoal, e isso equivale a qual quadrante?
(1888) F1: Quarto quadrante.
(1889) A1: Quarto (quadrante).
(1890) Professor: Beleza.

A partir dos turnos apresentados, podemos perceber que os discentes não tiveram dificuldades na resolução da questão proposta. Afinal, a compreensão do gráfico da questão 2, de acordo com conversas informais com os discentes após a aplicação da sequência didática, foi facilitada pela estória científica da roda gigante. Este segmento apresenta uma abordagem predominantemente interativa/ de autoridade, em que ocorrem frequentes interações do tipo I-R-A. Podemos perceber que no turno 1876, ao propor a pergunta que conduzirá os discentes a perceber os intervalos em que $f(x) \leq 0$, o professor o faz dando a informação que a pergunta que está sendo proposta é semelhante a anterior. Ao fazer isso, o docente já chama atenção dos escolares para a similaridade entre as duas questões. No turno seguinte, percebemos que o estudante F1 percebe a similaridade existente e responde corretamente.

No turno 1878, o professor dá um feedback positivo para estimular os escolares a continuarem respondendo e propõe uma nova pergunta, mas agora buscando relacionar o intervalo em que a função é negativa com o intervalo (quadrante) no ciclo trigonométrico. O discente A1, no turno 1879, responde corretamente. Este mesmo discente responde corretamente à pergunta constante no turno seguinte, o que indica que ele havia analisado corretamente o gráfico da função seno e conseguido extrair dele as informações suficientes para responder as perguntas propostas. Esse raciocínio é reforçado a partir do turno 1882, no qual o docente checa os significados internalizados pelos escolares, solicitando que eles expliquem melhor o raciocínio utilizado na elaboração de suas respostas. No turno que segue, percebemos que o mesmo discente A1 elabora uma justificativa para as respostas dadas por ele anteriormente. Ao afirmar que a função é negativa porque “está debaixo do eixo x” (turno 1883), suas palavras demonstram que ele compreendeu a ideia matemática necessária para resolver a questão proposta. Destacamos ainda, que ele não foi o único a ter essa compreensão, o turno 1884 apresenta a resposta de outro discente que utilizou o mesmo raciocínio de A1.

No turno 1885, podemos perceber que o professor compartilha os significados apresentados pelos estudantes A1 e D2 com toda a turma, repetindo trecho das falas deles e outorgando a eles (ou a qualquer de seus colegas) a oportunidade de manutenção ou alteração de suas respostas. No turno que segue, novamente o discente A1 interage com o professor, mantendo sua resposta e acrescentando a informação que “embaixo de (do eixo) $\boldsymbol{x}$ é negativo”, o que reforça a compreensão e plenitude das ideias deste estudante na elaboração da resposta dada. Ao perceber que os escolares tinham compreendido e estavam respondendo corretamente às questões propostas, o professor novamente dá um feedback positivo (turno 1887) aos respondentes e propõe nova pergunta com objetivo de relacionar o gráfico apresentado com o ciclo trigonométrico. Nos dois turnos seguintes, os discentes respondem corretamente, o que, pela Teoria das Situações, equivale a dizer que eles apresentaram indícios de aprendizagens.

Quadro 45 - Resumo da análise microgenética de $S8$

Intenções do Professor	Fazer os discentes perceberem em quais intervalos $\boldsymbol{f(x) \leq 0}$ e relacionar estes intervalos com o ciclo trigonométrico.	
Conteúdo	Estudo do sinal da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$.	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe pergunta.	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Propõe pergunta.	Responde corretamente;
	Checa o significado internalizado;	Dá explicações;
	Repete trechos das respostas dos escolares na elaboração de uma nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 9: TURNOS 1894 - 1910

Neste segmento é tratado do estudo do crescimento/decrescimento da função $f(x) = senx$. Trata-se das interações ocorridas na resolução das letras C e D, da quarta questão (UARC 8). Na resolução das letras mencionadas, optamos por segmentar o estudo do crescimento/decrescimento da função em dois macros intervalos, a saber: i) de $0 \leq x \leq \pi$ e ii) $\pi \leq x \leq 2\pi$. Nestes termos, o presente segmento analisará as interações ocorridas apenas no intervalo i), deixando para o próximo a análise do intervalo ii).

(1894) Professor: De 0 até $\frac{\pi}{2}$ ela (a função $f(x) = senx$) é crescente?
(1895) D1: Sim.
(1896) C2: Isso a gente já tinha visto, mas no ciclo (trigonométrico).
(1897) Professor: Sim. Já tínhamos visto (no ciclo trigonométrico), mas agora estamos vendo no gráfico.
(1898) C2: Mas é parecido.
(1899) Professor: Um pouco. As ideias de lá (do ciclo trigonométricos) são apenas trazidas para cá (para o gráfico). E de $\frac{\pi}{2}$ a π, ela (a função) é crescente ou decrescente?
(1900) F1: Decrescente.
(1901) Professor: Por que decrescente?
(1902) F1: Porque o x tá lá em cima no $\frac{\pi}{2}$ e vem descendo, diminuindo.
(1903) Professor: Como assim?
(1904) A1: É professor! O x vem descendo e o valor do seno dele vem diminuindo.
(1905) Professor: Então a função é crescente ou decrescente?
(1906) F1: Decrescente sim.
(1907) Professor: Muito bem. Isso (o intervalo de $\frac{\pi}{2}$ a π) é aonde pessoal, em qual quadrante?
(1908) A1: Segundo quadrante.
(1909) D1: No (quadrante) dois.
(1910) Professor: Isso.

As interações apresentadas neste segmento indicam um discurso baseado na tríade I-R-A, onde o docente tem a intenção de ensinar sobre o crescimento/decrescimento da função $f(x) = senx$. No turno 1894 percebemos que o docente propõe uma pergunta ao discente. O intervalo apresentado na pergunta corresponde ao primeiro quadrante do ciclo trigonométrico, e ela buscar sondar se neste intervalor, a função é crescente ou decrescente. Dois alunos interagem com o professor. O primeiro, no turno 1895, responde corretamente, enquanto o segundo faz uma comparação da situação apresentada na questão com o que havia sido ensinado no ciclo trigonométrico, o que é confirmado pelo professor no turno 1897. Entretanto, ao falar, professor aproveita-se da comparação do discente para destacar que há diferença “agora estamos vendo no gráfico”. Com isso, o professor dá um novo significado para aquilo que está sendo ensinado. No turno seguinte, o discente reforça a semelhança, ao passo que o professor destaca que as ideias contidas no ciclo trigonométrico podem ser trazidas para o gráfico (turno 1899).

No mesmo turno (1899) o professor prossegue propondo uma nova pergunta e no turno seguinte o discente F1 responde corretamente. Com objetivo de checar se o significado internalizado pelos discentes está correto, nos turnos 1901 e 1903, o professor propõe duas I-OMO’s. Nos turnos subsequentes à essas intervenções, percebemos que os discentes F1 e A1 dão explicações aos raciocínios utilizados por eles. A explicação dada por A1, no turno 1904, merece destaque. Passemos à sua análise: ao afirmar que “o $\boldsymbol{x}$ vem descendo e o valor do seno dele vem diminuindo”, podemos perceber que apesar de a frase do discente considerar termos advindos de conhecimentos espontâneos, matematicamente, não há erro algum na explicação dada. Com efeito, de $\frac{\pi}{2}$ até π, geometricamente (lembremos que a situação analisava o gráfico de $f(x) = senx$ no intervalo $\frac{\pi}{2}$ até π), o ponto que representa o "x" vai descendo (embora, rigorosamente falando, o valor de x esteja aumentando) e o valor do seno vai diminuindo. Há, portanto, plausibilidade na fala do aluno. O que pode ser utilizado pelos escolares como uma noção “pré-formal”, uma definição própria, criada por eles mesmos, daquilo que vai ser definido mais adiante, apenas na intervenção formalizante 10.

Ao propor nova pergunta (no turno 1905), o professor implicitamente ratifica as explicações dadas pelos escolares e reforça a pergunta realizada no turno 1899. Podemos perceber que o discente F1, no turno seguinte, responde corretamente. Por fim, no turno 1907, o professor dá um feedback positivo e solicita que os escolares façam uma relação do intervalo analisado no gráfico com os quadrantes do ciclo trigonométrico. Os dois turnos seguintes apontam que os estudantes conseguem compreender essa relação e respondem corretamente.

Quadro 46 - Resumo da análise microgenética de $S9$

Intenções do Professor	Fazer os discentes perceberem o crescimento e decrescimento da função $f(x) = senx$ no intervalo $0 \leq x \leq \pi$	
Conteúdo	Crescimento/Decrescimento da função $f(x) = senx$.	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-A	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe pergunta.	Responde corretamente; Compara a pergunta proposta com assuntos passados;
	Dá feedback positivo;	Faz um comentário;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Checa o significado internalizado;	Dá explicações; 1902
	Checa novamente o significado internalizado;	Acrescenta informações à explicação dada;
	Reforça a pergunta inicial do turno 1899;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo.	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

SEGMENTO 10: TURNOS 1910 - 1928

Neste segmento é tratado o estudo do crescimento/decrescimento da função $f(x) = senx$. Como falado no segmento anterior, trata-se das interações ocorridas na resolução das letras C e D, da quarta questão (UARC 8) no intervalo $\pi \leq x \leq 2\pi$.

(1910) Professor: E de π a $\frac{3\pi}{2}$, a função é crescente ou decrescente?
(1911) D1: Decrescente.
(1912) Professor: Isso. Ela continua o que, pessoal?
(1913) B3: Diminuindo.
(1914) A1: Vai diminuindo.
(1915) Professor: O que quer dizer diminuindo?
(1916) B3: De π a $\frac{3\pi}{2}$ o valor do seno diminui. Vai descendo de 0 até lá embaixo no $\frac{3\pi}{2}$.
(1917) Professor: Então vai de 0 até quanto?
(1918) A1: Até -1.
(1919) Professor: Por que -1?
(1920) B3: (Porque é o valor do) O seno lá de baixo, do $\frac{3\pi}{2}$.
(1921) Professor: Correto. Decrescendo. Beleza. E de $\frac{3\pi}{2}$ até 2π, ela (a função) é crescente ou decrescente?
(1922) A1: Crescente.
(1923) Professor: Por quê?
(1924) A2: Porque lá embaixo (no arco de medida $\frac{3\pi}{2}$ o seno) é -1 e no (arco de medida) 2π (o seno) é 0. Então aumenta de -1 até 0.
(1925) Professor: Então (o valor do seno neste intervalo) vai aumentar de quanto até quanto?
(1926) A2: De -1 até 0.
(1927) F1: Vai aumentar até o 2π e depois repete até o $\frac{\pi}{2}$ de novo!
(1928) Professor: Isso mesmo, mas aí já vai ser outra volta.

No presente segmento, o professor buscou checar várias vezes o conhecimento internalizado pelos escolares. Para isso, ele utilizou-se frequentemente do padrão de interação do tipo I-R-F-P-R, onde foram estabelecidas abordagens predominantemente interativa/de autoridade. Nos turnos 1910 e 1911, percebemos que a pergunta feita pelo professor é corretamente respondida. No turno 1912 o professor dá um feedback positivo ratificando a resposta dada e, em seguida, propõe nova pergunta. Essa nova pergunta “continua o que, pessoal? ”, é uma forma de inserir os demais discentes na resolução da questão proposta e facultar-lhes a oportunidade de discordar da resposta dada por D1, ou de acrescentar informações. Podemos inferir que a proposta do docente foi bem-sucedida, pois, nos turnos 1913 e 1914 dois novos alunos respondem corretamente à pergunta do professor.

Apesar disso, no turno 1915, mais uma vez o professor checa o significado internalizado pelos estudantes, solicitando-lhes que expliquem “o que quer dizer diminuindo?”. No turno que seguinte, o discente B3 responde corretamente, mas se limita a dizer que “de $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$ o valor do seno diminui” e acrescenta “de 0 até lá embaixo no $\frac{3\pi}{2}$”, não deixando claro se ele consegue perceber que o valor do seno cresce de -1 até 0. Diante disso, no turno 1917, o professor propõe mais uma pergunta para checar a percepção dos discentes quanto ao intervalo de crescimento dos valores do seno. No turno 1918, o discente A1 responde corretamente. Com objetivo de marcar o significado chave encontrados nas respostas dos escolares, no turno 1919, o professor faz mais uma checagem da aprendizagem dos estudantes, a qual é respondida corretamente.

Ante a não havia hesitação em responder e as respostas corretas apresentadas pelos estudantes, no turno 1921, o professor dá um feedback positivo, ratificando as falas dos escolares e propondo nova pergunta para poder avançar no conteúdo. À essa nova pergunta, o estudante A1 responde corretamente. No turno 1923, o professor checa a aprendizagem dos discentes, solicitando-lhes que expliquem suas respostas. No turno 1924 é explicado o raciocínio utilizado pelo estudante, informando os valores do seno de $\frac{3\pi}{2}$ e de 2π. Para marcar o significado contido na resposta de A2, no turno 1925, o professor reforça a pergunta anterior assumindo que a resposta dada está correta, mas solicitando que o aluno informe o intervalo de variação do valor do seno. No turno seguinte, o mesmo aluno responde corretamente, o que indica que ele, de fato, internalizou corretamente esse conteúdo matemático.

Merece destaque a fala de F1 (no turno 1927). Ele conseguiu mobilizar o conhecimento relacionado ao período da função $f(x) = senx$, afirmando que após 2π (uma volta completa) os valores do seno voltam a se repetir. Ante os fortes indícios de aprendizagens (manifestados nas respostas corretas dos escolares), no turno 1928, o docente dá um feedback positivo e nos turnos seguintes apresenta a intervenção formalizante 10. Como orienta a Teoria das Situações, o professor entra na fase de institucionalização somente após várias discussões, onde os estudantes puderam apresentar suas ideias e receberem feedbacks do professor. Assim, a institucionalização do saber não foi apresentada de forma precipitada e nem atrasada.

Quadro 47 - Resumo da análise microgenética de $S10$

Intenções do Professor	Fazer os discentes perceberem o crescimento e decrescimento da função $f(x) = senx$ no intervalo $\pi \leq x \leq 2\pi$	
Conteúdo	Crescimento/Decrescimento da função $f(x) = senx$.	
Abordagem predominante	Interativa/de autoridade	
Padrões de interações	I-R-F-P-R	
Relação dialética	Formas de Intervenções (professor)	Comportamentos e atitudes (discente)
	Propõe pergunta.	Responde corretamente;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Checa o significado internalizado;	Dá explicações;
	Checa novamente o significado internalizado;	Responde corretamente;
	Checa novamente o significado internalizado;	Acrescenta informações;
	Dá feedback positivo e propõe nova pergunta;	Responde corretamente;
	Checa o significado internalizado;	Dá explicações;
	Checa novamente o significado internalizado;	Responde corretamente; Percebe a periodicidade;
	Dá feedback positivo;	Não há.

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta seção apresento as considerações finais retomando, inicialmente, o Problema de Pesquisa: Quais as contribuições que uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo das unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) trazem ao processo de ensino e de aprendizagem da função seno aos estudantes do 2º ano do ensino médio de uma escola pública da região metropolitana de Belém (PA)?

Para respondê-lo, foi estabeleci como objetivo geral: evidenciar as contribuições ao processo de ensino e aprendizagem da função seno aos estudantes do 2º ano do ensino médio de uma escola pública da região metropolitana de Belém (PA), a partir da utilização de uma Sequência Didática elaborada em UARC's.

Percebi em sede de levantamento da literatura que apesar da importância das funções trigonométricas, há dificuldades no processo de ensino e no processo de aprendizagem da função seno. Essas dificuldades foram ratificadas tanto na pesquisa que investigou as concepções dos discentes egressos do 2º ano do ensino médio quanto na pesquisa que investigou as concepções dos docentes de Matemática. Talvez as dificuldades dos escolares sejam reforçadas pela utilização hegemônica pelos docentes da sequência definição→ exemplo → exercícios na ministração dos conteúdos escolares. Não considero que tal sequência deve ser extinta (em algumas situações específicas ela pode ser útil à aprendizagem), mas sim que ela perca a hegemonia.

Entendo que as dificuldades enfrentadas pelos docentes podem trazer implicações ao processo de ensino. Afinal, ter que trabalhar em mais de três escolas ou em mais de uma profissão certamente é uma tarefa hercúlea, exigindo dele um esforço significativo em busca da qualidade do ensino. Entendo ainda que a exigência da escola, explícita ou implicitamente, pode ser um dos motivos pelos quais os docentes dão mais atenção à quantidade do que a qualidade de conteúdos ensinados.

Considero que o aumento das avaliações do tipo *sociais* pelo docente pode contribuir para a melhoria no processo de ensino e de aprendizagem de Matemática. Afinal, nestes tipos de avaliações, os escolares têm maior oportunidade de interagir com seus pares e de fazer pesquisas, o que pode contribuir para o aumento de sua autonomia escolar.

No que tange a aplicação da sequência didática, a partir da Análise Microgenética e da Análise do Discurso restou comprovado evidências que confirmam que a utilização deste recurso didático-pedagógico no ensino da função seno, quando aplicado aos alunos de uma escola pública da região metropolitana de Belém (PA), trouxe contribuições tanto para o processo de ensino quanto de aprendizagens dos escolares.

O Quadro 48 reúne as contribuições da sequência didática para o aluno, para o professor e para o saber, os três personagens integrantes do jogo didático:

Quadro 48: Contribuições da sequência didática ao jogo didático

ALUNO	PROFESSOR	SABER
1) Favorece a melhoria do discurso frente às formulações e reformulações das respostas dadas; 2) Valorização dos conhecimentos prévios; 3) Maior atividade escolar; 4) O aprendizado é construído a partir das interações sociais e não a partir da memorização e repetição de tarefas; 5) Favorece a autonomia; 6) Permite que sejam levantadas, testadas e validadas hipóteses; 7) Permite a generalização a partir da discussão de um caso particular; 8) Respeito ao contexto sociocultural; 9) Consideração da pluralidade de ideias e pensamentos na institucionalização do saber; 10) Favorece a colaboração entre os estudantes; 11) Estimula a exposição de dúvidas e ideias incorretas, evitando que ela permaneça com o discente; 12) Maior reflexão sobre o objeto de estudo; 13) Fortalecimento das relações interpessoais.	1) Maior eficiência em relação ao processo de ensino; 2) O conteúdo é sistematizado; 3) Melhor preparação dos recursos didático-pedagógico utilizados em aula; 4) Favorece o pensamento reflexivo; 5) Estimula o aprofundamento dos conhecimentos matemáticos; 6) Estimula o papel de mediador do conhecimento; 7) Estabelece conexões entre os conhecimentos matemáticos, didático-pedagógicos e os relacionados à Psicologia da Educação; 8) Valoriza e estimula a participação discente; 9) Aumenta a autonomia em relação ao livro didático; 10) Aumenta a percepção quanto à necessidade de fundamentação teórica na propositura de tarefas; 11) Favorece a criação e manutenção de Zonas de Desenvolvimentos proximais; 12) Favorece um contexto propício à mobilização de conhecimentos.	1) Favorece a identificação e evolução dos saberes ensinados; 2) Contribuição na formação do saber, mediante a estrutura articulada das intervenções estruturais; 3) O saber é justificado mediante lógicas internas advindas das situações propostas e não pela fala do docente;

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Destaco que as contribuições apresentadas no Quadro 48 ficaram mais evidentes a partir dos procedimentos metodológicos da pesquisa. Afinal, ao elaborar a sequência didática, foi levado em consideração o cenário atual apresentado na literatura no que concerne ao processo de ensino e de aprendizagem das funções trigonométricas, o que possibilitou perceber os direcionamentos das pesquisas em Educação Matemática no tocante ao tema, bem como as dificuldades apresentadas pelos escolares. Consideramos também as concepções do docente e dos discentes mencionadas nos parágrafos anteriores.

Coloco em relevo que a estrutura utilizada na elaboração da sequência didática, que utilizou as UARC's (ver CABRAL, 2017), foram importantes. Pois ao levar em consideração esta estrutura, percebi que as unidades constituintes da sequência didática foram mais harmonizadas entre si e os estudantes puderam seguir as ideias matemáticas constantes na estória científica sempre remetendo, por exemplo, à mesma estória científica (da roda gigante) da UARC 1 até o fim da aplicação da sequência didática.

Além disso, a partir da Análise Microgenética, percebi que as frequentes Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (I-OMO's) contribuíram significativamente para que os escolares conseguissem internalizar o conhecimento matemático ensinado. Ousamos dizer que sem elas os estudantes poderiam não ter aprendido o que foi ensinado ou o teriam aprendido mais tardiamente.

Vale destacar que além das contribuições da sequência didática ao jogo didático, constantes no Quadro 48, a utilização deste recurso didático-pedagógico trouxe contribuições profissionais, acadêmicas e pessoais.

Em termos profissionais, destaco a maior autonomia na preparação de material didático independente, maior reflexão sobre os significados atribuídos pelos discentes em suas falas, compartilhamento das ideias contidas na sequência didática com os meus pares, assim como a absorção de ideias destes na elaboração da referida sequência, além da busca pela manutenção do diálogo entre aluno-professor e aluno-aluno com vistas à melhoria da qualidade de aprendizagem dos escolares sobre a função seno.

Em relação às contribuições acadêmicas, destaco o aprofundamento da aprendizagem em relação às teorias relacionadas ao processo de ensino e de aprendizagem em Educação Matemática bem como sobre o conhecimento específico da função seno, o que favoreceu uma maior percepção aos mínimos detalhes das falas dos escolares em busca de conceitos e significados que em outro tempo poderiam ser facilmente desconsiderados.

As contribuições pessoais desta pesquisa orbitam principalmente em torno da percepção da aplicabilidade das teorias estudadas no Curso de Mestrado à minha prática docente, uma vez que ao buscar o pareamento entre teoria e prática, percebi a aceleração do aprendizado dos escolares e o aumento do meu foco em relação aos objetivos de ensino de cada tarefa apresentada em sala de aula.

Por se tratar de um estudo de caso, os resultados e conclusões constantes nesta pesquisa não são passiveis de generalizações. Afinal, cada professor tem sua peculiaridade, assim como há uma heterogeneidade de turma para turma, de estudante para estudante. Apesar disso, percebemos a possibilidade de expansão desta pesquisa para outros temas da Trigonometria.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Funções numéricas.** São Paulo: Nobel, 1985.

ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da didática matemática**. Curitiba: UFPR, 2014.

ATTIE, João Paulo; MOURA, Manoel Oriosvaldo de. A altivez da ignorância matemática: supervia ignorantiam mathematicae. **Educ.Pesqui.** São Paulo, v.44, e152362. 2018.

ÁVILA, Geraldo. **Várias faces da matemática:** tópicos para licenciatura e leitura em geral. 2 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira. CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Função seno – uma experiência com o software GeoGebra na formação de professores de matemática. In: CONFERÊNCIA LATINO AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 2012, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: PUC-SP, 2012. p. 150-164.

BARALDI, Ivete Maria. **Matemática na escola: que ciência é esta?** Bauru (SP): EDUSC, 1999.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2 ed. Traduzido por: Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2010.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. Traduzido por: Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. **Ministério da Educação.** Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.** Secretaria de Educação Continuada. Brasília: MEC/SEB/DICEI. 2013.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUM, J. (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 35-114.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas:** estrutura e elaboração. 1 ed. Belém: SBEM/SBEM-PARÁ. 2017.

CAI PARA .... **Cai para 11% o índice de alunos que aprendem o esperado em matemática**. São Paulo: [G1]. 2014. Disponível em <<http://g1.globo.com/educacao/noticia/2014/12/cai-para-11-o-indice-de-alunos-que-aprendem-o-esperado-em-matematica.html>>. Acesso em: 12/06/2018.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria número complexo.** Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).

CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David William; SCHLIEMANN, Analúcia Dias. Na vida dez; na escola zero: os contextos culturais da aprendizagem matemática. São Paulo: **Fundação Carlos Chagas.** v.42. p.79-86. 1982.

CORRADI, Daiana Katiúscia Santos. **Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno**: uma experiência com alunos do 2º ano do ensino médio. 208 f. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013.

CÔRREA, Mônica Cariello Brotas; QUEIROZ, Sávio Silveira de. A família é o melhor recurso da criança: análise de trocas sociais entre mães e crianças com transtorno do espectro do autismo. **Ciência e Cognição.** Rio de Janeiro, v.22, n.1. p.041-062. 2017.

D'AMORE, Bruno. O triângulo: professor, aluno, saber. Transposição didática. Teoria das situações didáticas. In: D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da Matemática.** (Tradução: Maria Cristina Bonomi). São Paulo: Editora Livraria da Física. 2007a. p.221-240.

D'AMORE, Bruno. Didática da Matemática como epistemologia da aprendizagem matemática. In: D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da Matemática.** (Tradução: Maria Cristina Bonomi). São Paulo: Editora Livraria da Física. 2007b. p.221-240.

DAVIS, Claudia; OLIVEIRA, Zilma de Moraes Ramos de. **Psicologia na educação**. 3 ed. São Paulo: Editora Cortez. 2010.

FAJARDO, Vanessa; OLIVEIRA, Marina. **55% dos alunos de 8 anos da rede pública têm conhecimento insuficiente em matemática e leitura, diz MEC**. 2017. Disponível em https://g1.globo.com/educacao/noticia/mais-da-metade-dos-alunos-de-8-anos-da-rede-publica-tem-conhecimento-insuficiente-em-matematica-e-leitura-diz-mec.ghtml>>. Acessado em: 25/10/2017.

FEIJÓ, Rachel Saffir Araújo Alves. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria:** um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. 2018. 107 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília. Brasília- DF. 2018.

FIGUEIREDO, Sonner Arfux de. Atividades práticas integradas ao componente curricular: o software Geogebra no ensino de funções trigonométricas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais** [...]. Curitiba: SBM, 2013. p.1-14.

FRANKEN, Diogo Beck. **Música, Matemática e tecnologias: um caminho para o ensino de funções trigonométricas.** 2015. 32 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

FREITAS, Victor Menezes de. QUEIRÓS, Wellington Pereira de; LACERDA, Nília Oliveira dos Santos. Audiovisuais como temática de pesquisa em periódicos brasileiros de educação em ciências. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física.** Florianópolis (SC**).** v.35, n.2. p.592-633. 2018.

GABIONETA, Robson. A maiêutica socrática como 'união' de teorias no Teeteto. Gávea (RJ): UFMG. **Revista clássica.** v.28, n.2. p.35-45. 2015.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** São Paulo: Atlas. 5 ed. 2010.

GÓES, Maria Cecília Rafael de. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. Campinas: **Caderno Cedes**, v.20. p.09-25.2000.

GRANDO, Neiva Ignês; PREUSSLER, Roberto. Funções trigonométricas seno e cosseno: das representações semióticas à formação de conceitos. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 41, p. 19-27, 2014. Disponível em: http://cienciaparaeducacao.org/eng/publicacao/preussler-roberto-grando-neiva-ignes-funcoes-trigonometricas-seno-e-cosseno-das-representacoes-semioticas-a-formacao-de-conceitos-educacao-matematica-em-revista-sao-paulo-v-41-p-19-27-2/. Acesso em: 03 dez. 2018.

JÓFILI, Zélia. Piaget, Vygotsky, Freire e a construção do conhecimento na escola. **Educação e teorias**. Brasília-DF, v.2, n.2, p.191-208. 2002.

KELMAN, Celeste Azulay; BRANCO, Angela Uchoa. Análise microgenética em pesquisa com alunos surdos. **Rev. Bras.ed.Esp.** Brasília-DF, v.10, n.1, p.93-106. 2004.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Editora Cortez. 1994.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise v.1.** 14 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. 2013.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio (v.1).** 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006 (Coleção do Professor de Matemática).

MAIA, Joaildo; FARIA, Débora Suzane de Araújo. O ensino de Matemática na educação profissional: a relação entre funções trigonométricas e o software GeoGebra. In: COLÓQUIO NACIONAL A PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO EM EDUCAÇÃO PROFISSIONAL, 2., 2013, Natal. **Anais** [...]. Natal: IFRN: 2013. p. 1-15.

MORTIMER, Eduardo F.; SCOTT, Phill. Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. **Investigações em ensino de Ciências.** Porto Alegre (RS), v. 7, n. 3, p. 283-306, 2002.

MORENO, Ana Carolina; GUILHERME, Paulo. **'Nobel' de matemática contrasta com baixo índice de aprendizado no Brasil.** 2014. Disponível em: <http://g1.globo.com/educacao/noticia/2014/08/nobel-de-matematica-contrasta-com-baixo-indice-de-aprendizado-no-brasil.html>>. Acessado em: 20/09/2017.

MOURA, Elaine Andrade et al. Os planos genéticos do desenvolvimento humano: A contribuição de Vigotski. **Revista Ciências Humanas,** São Paulo, v. 9, n. 1, p. 106-114, 2016.

MOYSÉS, Lúcia. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática.** 5 ed. São Paulo: Papirus editora. 2004.

NILES, Nathan O. **Trigonometría plana.** 2 ed. Cidade do México: Limusa Noriega Editores. 1996.

NETO, Aref Antar et al. **Noções de Matemática (v.3).** Fortaleza: Editora Vestseller. 2009.

OLIVEIRA, Joerk da Silva. **Aplicações da trigonometria nas ciências.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2015.

OLIVEIRA, Marconni Augusto Pock de. **Sequência didática para o ensino de função exponencial**. 2018. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Pará, 2018.

PACHECO, Mirian Cazarotti. Contribuições da análise microgenética às pesquisas em neurolinguística. **Estudos Linguísticos.** São Paulo (SP), v. 45, n. 2, p. 582-594, 2016.

PEDROSO, Leonor Wierzynski. **Uma proposta de ensino da Trigonometria com uso do *Software* Geogebra**. 2012. 271 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

PEREIRA, Marcos Fabrício Ferreira. **Uma sequência didática para o ensino de semelhança de figuras planas**. 2017. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Pará, 2017.

SANGIOGO, Fábio André. **A elaboração conceitual sobre representações de partículas submicroscópicas em aulas de Química da educação básica: aspectos pedagógicos e epistemlógicos**. 2014. 291 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis- SC. 2014.

SANTOS, Ricardo Ferreira dos. **O uso da modelagem para o ensino da função seno no Ensino médio.** 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica. São Paulo- SP. 2014.

SILVA, Ana Kely da; SANTOS, Maria de Lourdes Silva; PAIXÃO, Carlos Jorge. Ensino e aprendizagem no Brasil: um estudo das práticas curriculares em Universidades da região norte. In: FERNANDES, Domingos et al. **Avaliação, ensino e aprendizagem no ensino superior em Portugal e ne Brasil: realidades e perspectivas (volume I).** Lisboa: EDUCA, 2014. p. 227-267.

SILVA, Caroline Veloso da; CAIADO, Kátia Regina Moreno. O professor de língua espanhola em contexto de educação inclusiva: desafios e perspectivas no ensino para deficientes visuais. **Educação e Fronteias on-line.** Dourado (MS), v. 5, n. 13, p. 109-124, 2015.

SILVA, Maria Angélica da; SILVA, Daniele Nunes Henrique. O jogo de papéis e a criança com autismo na perspectiva histórico-cultural. **Psicologia em Estudo.** Maringá (PR), v. 22, n. 3, p. 485-496, 2017.

SILVA, Marlizete Franco das. **Trigonometria, modelagem e tecnologias:** um estudo sobre uma sequência didática**.** 2011. 238 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica. Belo Horizonte- MG. 2011.

SILVA, Tiago Henrique Pereira da. **Funções trigonométricas elementares e tecnologia: algumas aplicações no currículo da rede pública estadual de São Paulo.** 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto (SP), 2015.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Revista Zetetiké**, São Paulo, v.21, n. 39, p. 155-168. 2013

TOMIO, Daniela; SCHROEDER, Edson; ADRIANO, Graciele Alice Carvalho. A análise microgenética como método nas pesquisas em Educação na abordagem Histórico-Cultural. **Revista Reflexão e Ação.** Santa Cruz do Sul, v. 25, n. 3, p. 28-48, 2017.

UEBEL, Tamara. **Relacionando a função seno e fenômenos periódicos:** uma experiência com mídias digitais. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em matemática, mídias digitais e didática para a Educação Básica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, [Porto Alegre], 2015.

VYGOTSKY, L.S. **The genesis of higher mental funtions.** In: WERTSCH, James V. (org.). The concepto f activity in sovietic psychology. Nova York: M.E. Sharpe, 1981, pp.144-188.

WERNER, Jairo. A relação linguagem, pensamento e ação na microgênse das funções psíquicas superiores. **Fractal: Revista de Psicologia,** Rio de janeiro, v. 27, n. 1, p. 33-38, 2015.

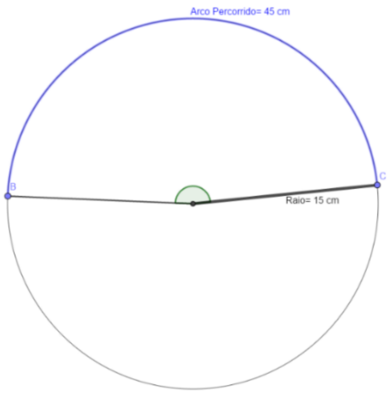
WERNER, Jairo. Análise microgenética: contribuição dos trabalhos de Vygotsky para o diagnóstico em psiquiatria infantil. **Int. J. Prenatal and perinatal Pyschology and medicine**, Rio de Janeiro, v. 11, n. 2, p. 157-171, 1999.

WERTSCH, J. V. **Vygotsky and the social formation of mind. Cambrisge**, Mass. Harvard University Press, 1985.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa:** como ensinar. Porto alegre: Artmed, 1998.

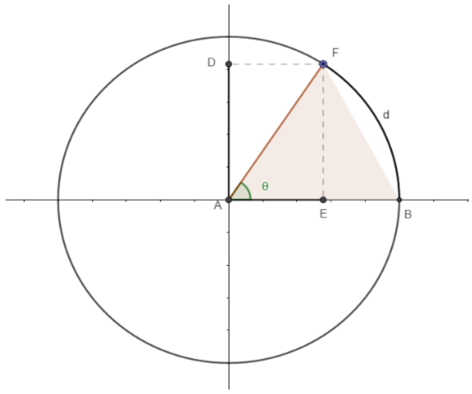
APÊNDICE A– TESTE ALUNOS EGRESSOS

QUESTÃO 1: Em uma circunferência com raio medindo 15 cm caminha uma formiga do ponto B até o ponto C perfazendo um arco de 45 cm. Qual a medida, em radianos, do ângulo central referente ao arco percorrido pela formiga?



a) $\frac{1}{3}\ rad$
b) $6\ rad$
c) $3\ rad$
d) $9\ rad$

QUESTÃO 2: Considere que a figura ao lado represente o ciclo trigonométrico. Pode-se dizer que o seno trigonométrico é melhor representado por:



a) θ

b) $\overline{\text{AE}}$

c) $\overline{\text{AD}}$

d) $\widehat{BF} = d$

QUESTÃO 3: O valor de $Sen\ (210°)$ é:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $b)-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

QUESTÃO 4: (FEI-SP) A sequência de valores:

$$sen\frac{\pi}{2}, sen\frac{\pi}{3}, sen\frac{\pi}{4}, \dots, sen\frac{\pi}{n}, \dots:$$

a) É estritamente crescente.
b) É estritamente decrescente.
c) Possui valores negativos.
d) Possui valores iguais.

QUESTÃO 5: A imagem da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = 2 + 3.senx$ é:

a) $Im(f) = [-1,5]$

b) $Im(f) = [1,5]$

c) $Im(f) = [0,5]$

d) $Im(f) = [-1,3]$

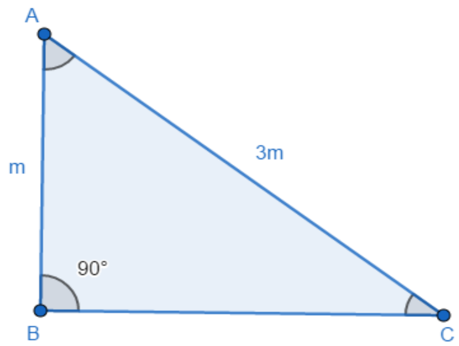
QUESTÃO 6: Em relação a questão anterior, podemos afirmar que:

a) $f(0) = 3$
b) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$
c) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
d) $f(\pi) = -5$

QUESTÃO 7: A extremidade do arco de medida $\frac{31\pi}{4}$ encontra-se no:

a) Primeiro quadrante.
b) Segundo quadrante.
c) Terceiro quadrante
d) Quarto quadrante.

QUESTÃO 8: O triângulo retângulo ABC representado ao lado tem um dos seus catetos medindo m e a hipotenusa medindo $3m$.
A medida do seno do maior ângulo agudo do triângulo ABC é:



a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$
d) $2\sqrt{2}$

QUESTÃO 9: O valor do $sen\frac{3\pi}{4}$ é equivalente ao do:

b) $sen\frac{\pi}{6}$ $b)sen\ \frac{\pi}{2}$ c) $sen\frac{\pi}{4}$ d) $sen\frac{\pi}{3}$

QUESTÃO 10: O valor da expressão

$$p = \frac{sen150°. sen45°. sen120°}{sen210°. sen330°}$$

É igual a:

b) $\frac{1}{2}$ $b)\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

APÊNDICE B – TESTE DE VERIFICAÇÃO

1) Em uma circunferência, foi adotado como unidade de medida padrão o arco de comprimento 2 cm. A medida do arco $\widehat{AB}$ cujo comprimento é de 60 cm é de:

a) 30 b) 40 c) 78 d) 50

2) Em uma circunferência adotou-se como unidade de medida um arco de comprimento 0,5 cm. Nessa unidade, o arco $\widehat{AB}$ mede 8 unidades. Qual o comprimento do arco $\widehat{AB}$?

a) 2 cm b) 4 cm c) 8 cm d) 16 cm

3) O arco $\widehat{AB}$ de uma circunferência tem comprimento igual a 10 cm e a sua medida é 2 unidades. Qual o comprimento da unidade de medida adotada?

a) 5 cm b) 20 cm c) 4 cm d) 10 cm

4) Uma circunferência foi dividida em quatro partes iguais. Qual a medida, em graus, correspondentes a cada um dos arcos formados?

a) 90º b) 120º c) 45º d) 36º

5) Considere o trecho a seguir:

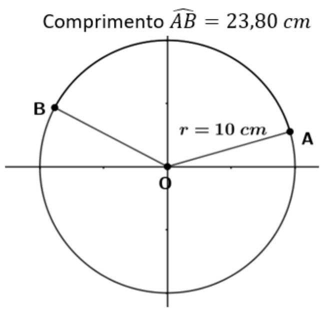
> A inclinação axial ou obliquidade da Terra é o ângulo entre o eixo de rotação e seu plano orbital, ele permanece confinado entre $21{,}8°$ e $24{,}4°$. Atualmente, ela é de $23°26'14''$ mas se recupera cerca de $0.46''$ por ano o 1 grau a cada 7800 anos. Este eixo oscila em torno de um cone com um ciclo completo (com $360°$) dura 25.765 anos (Disponível em: http://www.astronoo.com/pt/artigos/obliquidade-da-terra.html. Acesso em 03/08/2019)

Supondo que um maremoto muito forte tenha afetado o ângulo de inclinação axial da terra, aumentando esse ângulo em $37'52''$. O novo ângulo de inclinação da terra será de:

a) $23°63'3''$ **b)** $24°4'6''$ **c)** $23°56'13''$ **d)** $24°14'13'$

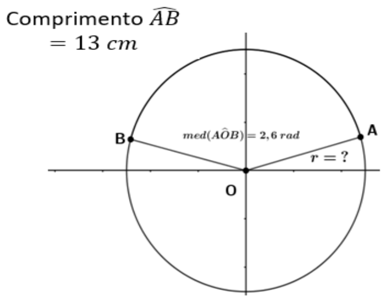
6) Qual a medida, em radianos, do menor arco $\widehat{AB}$ representado na figura ao lado:

a) 2,38 rad
b) 4,20 rad
c) 2,10 rad
d) 4,76 rad



7) Na figura ao lado, o arco $\widehat{AB}$ tem comprimento igual a 13 cm e forma o ângulo de medida $2{,}6\ rad$. Qual o tamanho do raio $\boldsymbol{r}$ da circunferência?

a) 5 cm
b) 10 cm
c) 0,2 cm
d) 33,8 cm



8) O arco de medida 200°, em radianos, corresponde a:

a) $\frac{9\pi}{10}$ b) $\frac{5\pi}{3}$ c) $\frac{10\pi}{9}$ d) $\frac{20\pi}{7}$

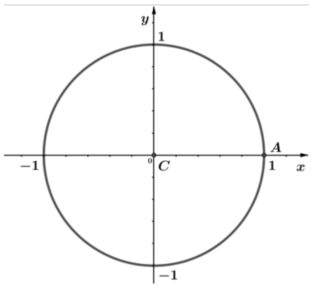
9) O arco de medida $\frac{3\pi}{2}\ rad$, em graus, corresponde a:

a) 200°
b) 150°

c) 120°
d) 270°

10) Qual a medida aproximada, em graus, de um arco igual a 2 radianos?
a) 115° b) 200° c) 57° d) 75°

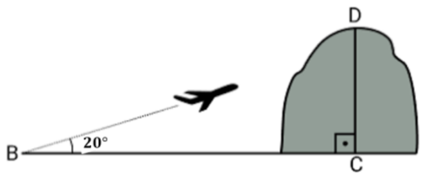
11) Marque no ciclo trigonométrico ao lado os pontos aproximados referentes aos arcos dados:
a) 45º
b) $\frac{3\pi}{2}$
c) 180º
d) -120º
e) 300º
f) -45º
g) $-\frac{\pi}{6}\ rad$



12) A primeira determinação positiva do arco de medida 800º é:
a) 80º b) 180º c) 0º d) 100º

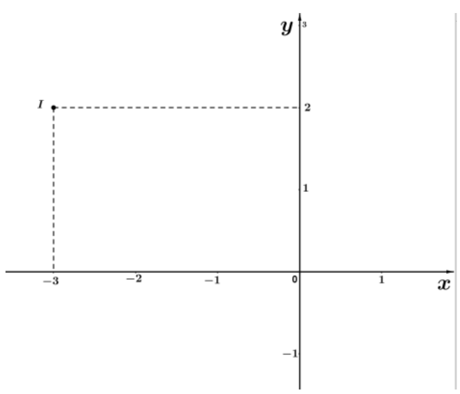
13) Um avião decola formando um ângulo de 30° com a pista. Qual será a distância percorrida por este avião quando ele tiver atingido a altura de 2000 metros? (Considere $sen30° = 0{,}5; cos30° = 0{,}86; tg30° = 0{,}57$)
a) 4000 metros b) 1000 metros c) 1500 metros d) 1720 metros

14) Um avião levanta voo do Ponto B formando $20°$ com a horizontal. Sabendo-se que a distância entre os pontos B e C é de 5000 metros, podemos afirmar que ao passar pelo Ponto D, o avião estará a quantos metros a que altura? Valores aproximados de: $sen20° = ; cos20° =; tg20° = 0{,}36)$
a) 1800 metros b) 1700 metros
c) 4650 metros d)2325 metros



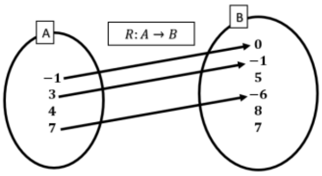
15) Uma escada medindo 4 metros foi apoiada em um muro formando um ângulo de 60° com o chão. Qual a altura aproximada do muro? (Utilize $\sqrt{3} = 1{,}71$).
a) 3 metros
b) 8 metros
c) 3,5metros
d) 2 metros

16) No plano cartesiano indicado abaixo, as coordenadas do ponto I são:
a) $I = (-3; -1)$
b) $I = (-3; 0)$
c) $I = (0; -3)$
d) $I = (-3; 2)$
e) $I = (-1; -3)$

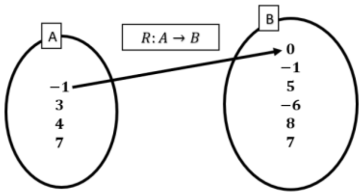


17) Dados os conjuntos A e B (representados abaixo) e a relação $R: A \to B$, qual das relações representa uma função f de A em B?

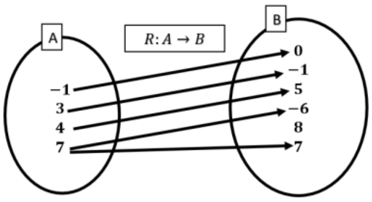
a)



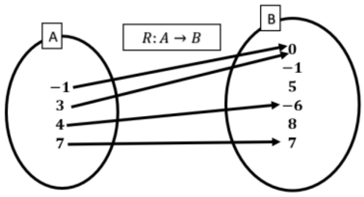
c)



b)



d)



18) O gráfico ao lado representa a função f. A partir da análise do gráfico da função f é possível afirmar que:

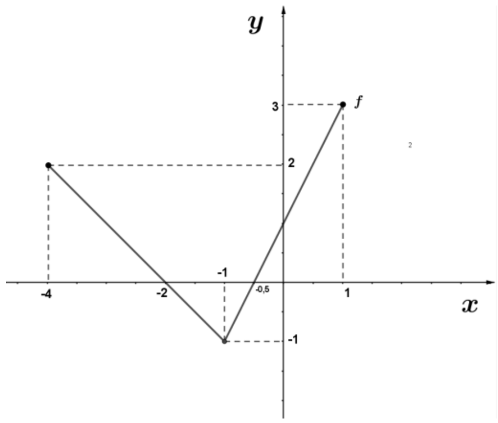
a) A função f é crescente no intervalo: $-2 < x < 1$

b) A função f é decrescente no intervalo: $-4 < x < 0$

c) As raízes da função f são -2 e $-0{,}5$

d) Apenas -1 é raiz de f

e) A função é positiva no intervalo $-2 < x > -0{,}5$

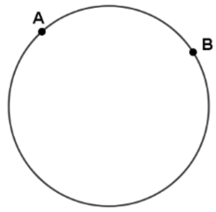


APÊNDICE C – OFICINA DE CONHECIMENTOS PRÉVIOS

UNIDADE 1: Arcos e ângulos

OBJETIVOS: Definir arcos e ângulos. Calcular a medida de um arco na circunferência

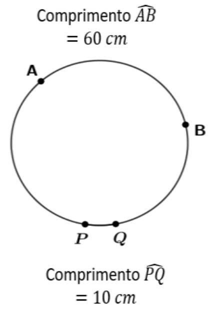
Considere a circunferência apresentada ao lado na qual foram marcados dois pontos A e B. Estes dois pontos dividem a circunferência em duas partes. A cada uma dessas partes denominamos de **arco de circunferência**.
No caso dos pontos A e B serem coincidentes, um dos arcos fica reduzido a um ponto da circunferência e o outro arco é a própria circunferência. Estes arcos são denominados, respectivamente de **arco nulo** e **arco de uma volta**.



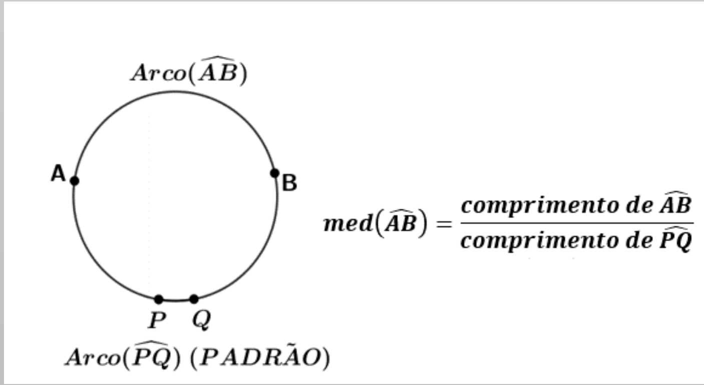
1) Considere a circunferência representada ao lado na qual o comprimento do menor arco $\widehat{AB}$ mede 60 cm e que o comprimento do menor arco $\widehat{PQ}$ mede 10 cm.

a) O comprimento do arco $\widehat{AB}$ é equivalente a quantas vezes o comprimento do arco $\widehat{PQ}$?

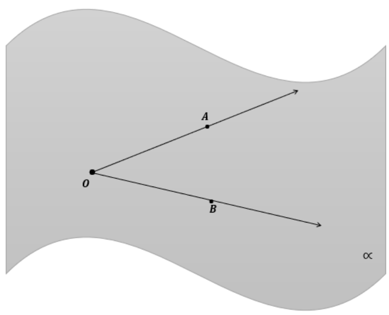
b) Como calcular o comprimento do arco $\widehat{AB}$ tomando como medida padrão o comprimento do arco $\widehat{PQ}$?



Tomando como unidade padrão a medida do arco não nulo $\widehat{PQ}$ em uma circunferência, a medida do arco $\widehat{AB}$ nesta mesma circunferência é o quociente entre o comprimento do arco $\widehat{AB}$ e o comprimento do arco $\widehat{PQ}$.



Considere duas semirretas coplanares (no mesmo plano $\propto$) contendo os pontos A e B, ambas com origem no ponto O (Figura ao lado)
Nestes termos, as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ dividem o plano $\propto$ em duas regiões. Cada região do plano é denominada **ângulo**.

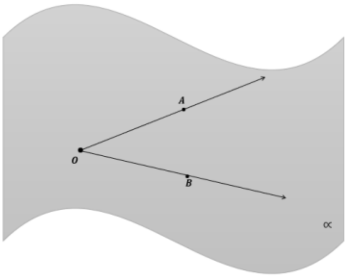


Dadas duas semirretas coplanares contendo os pontos A e B, ambas com origem no ponto O. Essas semirretas dividem o plano em duas regiões denominadas de ângulos. Os ângulos formados são representados por $A\hat{O}B$. O ponto O é denominado de vértice desses ângulos e os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são os seus lados.

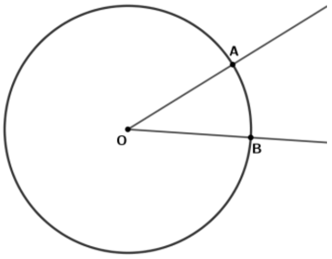
OBSERVAÇÃO:

Considere a figura anterior:

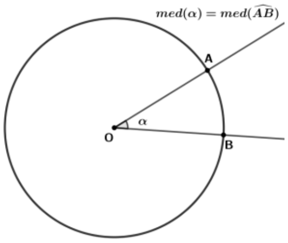
Dado um ângulo $A\hat{O}B$, podemos construir uma circunferência em que centro dela é o ponto O:



Observe que os lados do ângulo $A\hat{O}B$ determinam na circunferência o arco de medida $\widehat{AB}$. Assim, por convenção, a **medida do ângulo $A\hat{O}B$ é igual a medida do arco $\widehat{AB}$.**



Deste modo, fica estabelecido que as unidades de **medidas para arcos** e **para ângulos** de uma circunferência podem receber as mesmas denominações.

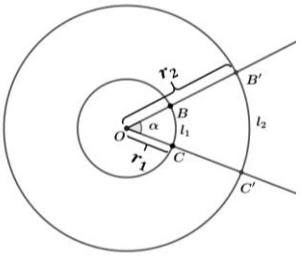


OBSERVAÇÃO:

Uma das coisas que devemos saber distinguir é a diferença entre a medida do arco de circunferência e comprimento de um arco. Por um lado, **a medida do arco de circunferência** depende *exclusivamente* do **ângulo central** correspondente a ele. Por outro lado, **o comprimento do arco** de circunferência **depende do tamanho do raio**.

Como exemplo, considere as circunferências concêntricas (que têm o mesmo centro), onde é tomado o ângulo α:

Observemos que **a medida** dos arcos $\widehat{CB}$ e $\widehat{C'B'}$ são iguais (têm a mesma medida do ângulo α). Entretanto, **o comprimento** dos arcos $\widehat{CB}$ e $\widehat{C'B'}$ são diferentes: $l_2 > l_1$.

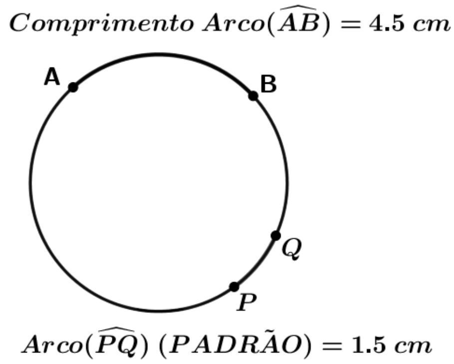


Observemos que **a medida** dos arcos $\widehat{CB}$ e $\widehat{C'B'}$ são iguais (têm a mesma medida do ângulo α). Entretanto, **o comprimento** dos arcos $\widehat{CB}$ e $\widehat{C'B'}$ são diferentes: $l_2 > l_1$.

EXERCÍCIOS

19) Em uma circunferência, foi adotado como unidade de medida padrão o arco de comprimento 1,5 cm.
A medida do arco $\widehat{AB}$ na unidade considerada (representado na figura ao lado) é de:

e) 3 b) 4 c) 0,34 d) 3,5



20) Em uma circunferência adotou-se como unidade de medida um arco de comprimento 2,5 cm. Nessa unidade, o arco $\widehat{AB}$ mede 7 unidades. Qual o comprimento do arco $\widehat{AB}$?

a) 4,5 cm
b) 17,5 cm
c) 2,8 cm
d) 0,35 cm

21) O arco $\widehat{AB}$ de uma circunferência tem comprimento igual a 120 cm e a sua medida é 20 unidades. Qual o comprimento da unidade de medida adotada?

a) 0,16 cm
b) 40 cm
c) 60 cm
d) 6 cm

22) A unidade de medida de arco adotada em uma circunferência foi o comprimento do raio. Qual o qual a medida do arco cujo comprimento é igual ao comprimento da circunferência?

a) π
b) $\frac{\pi}{2}$
c) 2π
d) 3π

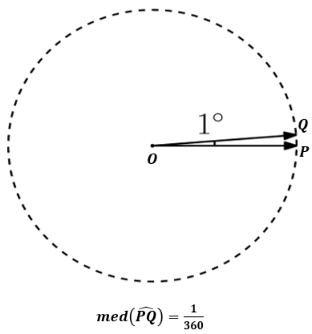
UNIDADE 2: Unidades de medida de arcos
OBJETIVOS: Apresentar o grau e o radiano como unidade de medida de ângulo

Como vimos na unidade anterior, é possível termos várias unidades de medidas para os arcos de uma circunferência, desde que tomemos como unidade de arcos diferentes arcos $\widehat{PQ}$. No entanto, você já imaginou se cada matemático no mundo adotasse uma unidade de medida de arco diferente? Certamente teríamos que fazer muitas conversões, o que dificultaria a manipulação de arcos!
Ainda bem que para facilitar nossa vida, no mudo todo são adotadas unidades de medidas padrões. São elas: **o grau (e suas subunidades) e o radiano**.

➢ **O GRAU**

O grau é uma das unidades de medidas mais antigas. Desde os Babilônios essa unidade já era utilizada. Considere uma circunferência qualquer. Divida ela em 360 partes, conforme a figura abaixo. Um grau (representamos por 1°) equivale a cada uma dessas partes, ou seja:

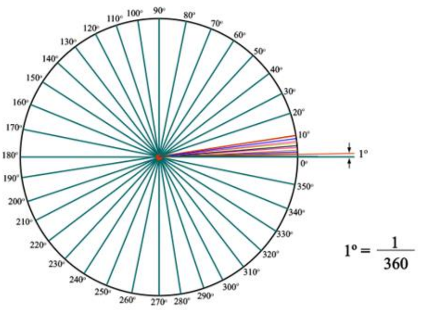
$$1° = \frac{1}{360} \text{ da circunferência considerada.}$$



Disponível em https://matika.com.br/angulo/medidas-e-classificacoes (adaptado). Acesso em 03/08/2019.

Dizemos que determinado arco $\widehat{AB}$ mede x graus se o arco $\widehat{PQ}$ "couber" nele x vezes. A medida do ângulo central (aquele cujo vértice é o centro da circunferência), em graus, é sempre igual à medida do arco correspondente a ele.
O grau possui subdivisões: o minuto (representado por ') e o segundo (representado por ''), obedecendo a seguinte relação:

$$1° = 60'(60\ minutos)$$
$$1' = 60''(60\ segundos)$$

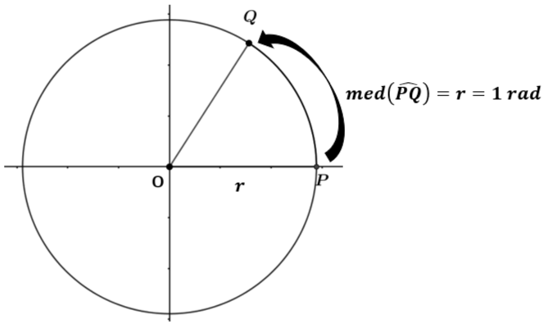


Disponível em:
https://slideplayer.com.br/slide/1367560/.
Acesso em: 03/08/2019)

- **O RADIANO**

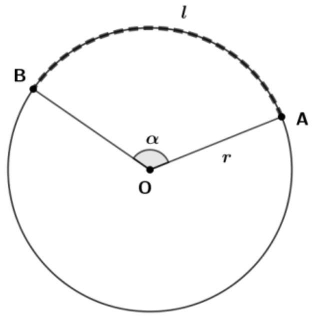
O radiano (representado por rad) é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio r da circunferência que o contém:

Dizemos que um determinado arco $\widehat{AB}$ mede x radianos se o arco $\widehat{PQ}$ "couber" nele x vezes. A medida do ângulo central (aquele cujo vértice é o centro da circunferência), em radianos, é sempre igual à medida do arco correspondente a ele.



De modo geral, para calcularmos a medida de um **arco $\boldsymbol{\alpha}$,** em radianos (e consequentemente a medida do ângulo central formado), de um **arco de comprimento $\boldsymbol{l}$** em uma circunferência de **raio r,** basta dividirmos l por r:

$$\alpha = \frac{l}{r} \qquad (\alpha, em\ radianos)$$



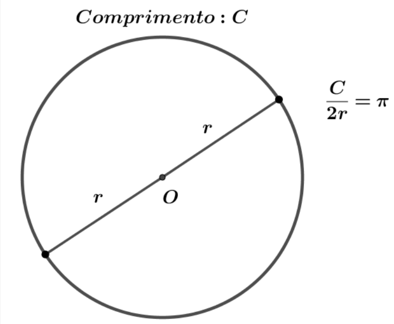
OBSERVAÇÃO 1:

Quando estamos resolvendo uma questão, é comum que na solução dela ou nas alternativas apresentadas sejam **omitida o termo $\boldsymbol{rad}$**. Assim, quando você ver que um arco, em radianos, mede 3, fica subtendido que se trata de 3 rad. Igualmente, quando você ler em determinada situação que um arco com medidas em radianos mede $\frac{3\pi}{2}$ fica subtendido que a medida dele é de $\frac{3\pi}{2}rad$.

O NÚMERO π

Uma das maiores curiosidades encontradas na História da Matemática foi a descoberta do número π. Este número aparece toda vez que você divide **o comprimento de uma circunferência** pelo seu **diâmetro** (o dobro do raio), não importando a medida do seu raio!!

Assim, seja uma circunferência de comprimento C e raio r:A razão $\frac{C}{2r}$ é constante e sempre dá o mesmo valor! A esse valor denominamos de π. Desde os egípcios já se tentava encontrar o valor exato deste número, porém, há séculos já se descobriu que este número é irracional, ou seja, a quantidades de casas decimais são infinitas e não periódicas!



No entanto, geralmente nos livros didáticos e nas provas, é considerado o valor aproximado para este número:

$$\boldsymbol{\pi = 3,14}$$

Em 13 de Março de 2019, a japonesa Emma Haruka Iwao entrou no *Guinness World Records* – o famoso Livro dos Recordes – por ter conseguido calcular com a ajuda de softwares o valor do número π com a maior quantidades de casas decimais: 31,4 trilhões de dígitos desta constante Matemática. Para isso, foram necessários mais de 120 dias ininterruptos de cálculos pelos computadores!

OBSERVAÇÃO 2:

Observe que é possível estabelecermos uma relação entre o grau e o radiano. Sabemos que $\pi = \frac{C}{2r}$. Logo, o comprimento C de uma circunferência de raio r é dado por $C = 2\pi r$. O arco de uma volta completa, portanto, tem comprimento $2\pi r$. Em radianos, a medida deste arco é: $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{C}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ rad$

Como a circunferência completa mede 360°, temos que:

$\boxed{360°\ equivale\ a\ 2\pi\ rad}$

ou ainda que:

$\boxed{180°\ equivale\ a\ \pi\ rad}$

EXERCÍCIOS

1) Quantos graus tem uma circunferência completa?

a) 180° b)300° c)360° d) 90°

2) Uma circunferência foi dividida em 6 partes iguais, quantos graus mede o arco correspondente a cada uma dessas partes?

a) 50° b) 90° c)100° d)60°

3) Quantos graus tem um arco nulo?

a) 0° b) 5° c) 100° d) 250°

4) Considere o trecho a seguir:

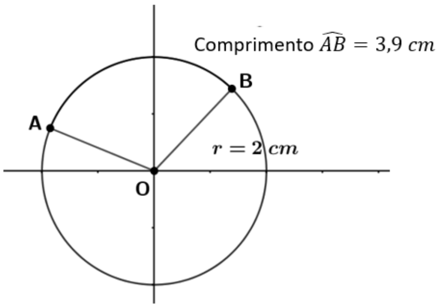
A inclinação axial ou obliquidade da Terra é o ângulo entre o eixo de rotação e seu plano orbital, ele permanece confinado entre $21{,}8°$ *e* $24{,}4°$*. Atualmente, ela é de* $23°26'14''$ *mas se recupera cerca de* $0.46''$ *por ano o 1 grau a cada 7800 anos. Este eixo oscila em torno de um cone com um ciclo completo (com* $360°$*) dura 25.765 anos (Disponível em: http://www.astronoo.com/pt/artigos/obliquidade-da-terra.html. Acesso em 03/08/2019)*

Supondo que um maremoto muito forte tenha afetado o ângulo de inclinação axial da terra, aumentando esse ângulo em $37'52''$. O novo ângulo de inclinação da terra será de:

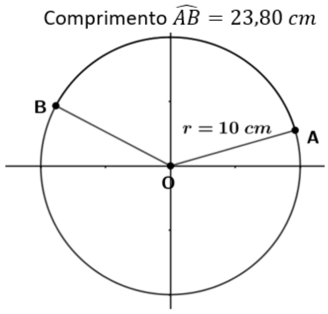
e) $23°63'3''$
f) $24°4'6''$
g) $23°56'13''$
h) $24°14'13'$

5) Qual a medida, em radianos, do menor arco $\widehat{AB}$ representado nas figuras abaixo:

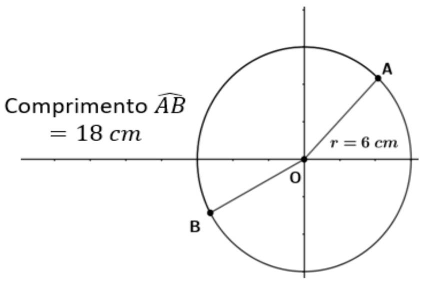
a)



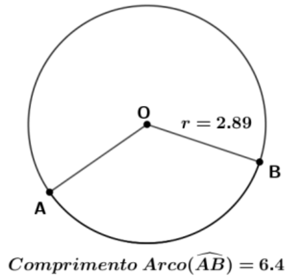
b)



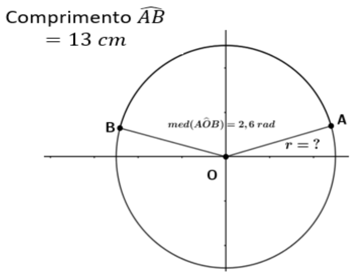
c)



d)



6) Na figura ao lado, o arco $\widehat{AB}$ tem comprimento igual a 13 cm e forma o ângulo de medida $2{,}6\ rad$.
Qual o tamanho do raio $\boldsymbol{r}$ da circunferência?



7) Transforme em radianos os arcos abaixo:

a) $30°$
b) $150°$
c) $300°$
d) $90°$
e) $270°$
f) $120°45'$

8) Em uma circunferência traça-se um arco de 1 radianos. Qual a medida deste arco em graus?

9) Em uma circunferência de raio medindo 1, determinar o comprimento dos arcos relacionados aos arcos de medida:

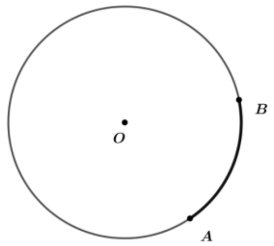
a) $3\ rad$
b) $5{,}5\ rad$
c) $\pi\ rad$
d) $\frac{3\pi}{2}\ rad$

10) Sendo o raio de uma **circunferência unitário (de medida 1)**, o comprimento do arco e a medida do ângulo (em radianos) sempre terão o mesmo valor numérico? Justifique sua resposta.

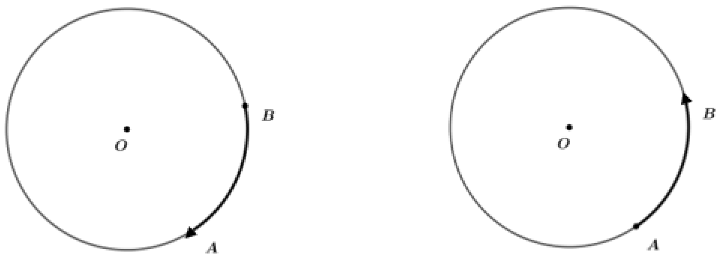
UNIDADE 3: Arcos orientados e o ciclo trigonométrico
OBJETIVOS: Compreender o conceito de arcos orientados e de ciclo trigonométrico

1. Arcos orientados

Considere a figura abaixo na qual têm-se uma circunferência com centro em O e o arco $\widehat{AB}$:



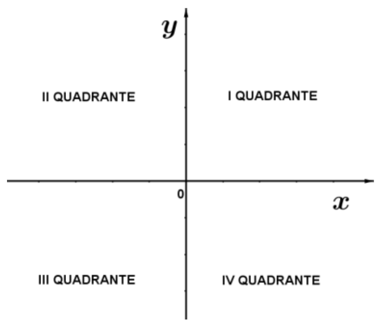
Observe que não é indicado o sentido do arco, isto é, não é indicado a origem e o final do arco. No entanto, muitas vezes é necessário indicar onde se **inicia** o arco considerado e onde ele **termina**.
A Figura a seguir apresenta as duas situações possíveis:



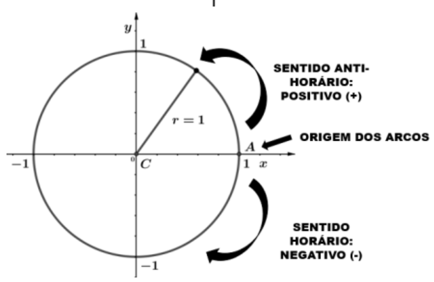
Observe que na primeira imagem da esquerda o arco está tem o sentido de B para A, enquanto na imagem da direita, o arco tem o sentido de A para B. Em ambos os casos o arco $\widehat{AB}$ tem uma orientação e os denominamos de **ARCOS ORIENTADOS**.
O arco da direita, como *segue o sentido do movimento dos ponteiros do relógio*, tem o **SENTIDO HORÁRIO**; o arco da esquerda, como tem o *sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio*, denominados de **SENTIDO ANTI-HORÁRIO.**

2. Circunferência trigonométrica (ou ciclo trigonométrico)

Considere o plano cartesiano $x0y$ representado ao lado. Observe que o plano cartesiano está dividido em quatro partes iguais, denominadas de **QUADRANTES**. No plano cartesiano construímos uma circunferência com raio medindo 1 e centro no ponto $C = (0; 0)$.

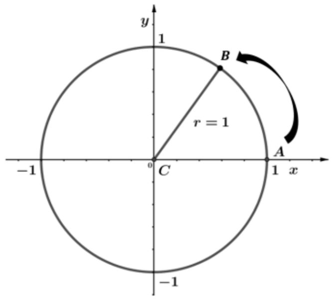


A partir do **ponto fixo** $\boldsymbol{A = (1; 0)}$ denominado **ponto de origem dos arcos** desta circunferência podemos traçar arcos no sentido horário e no sentido anti-horário. Por convenção, os arcos no **sentido horário** têm sentido **negativo** e os arcos no **sentido anti-horário** têm sentido **positivo.**
A figura ao lado representa essa situação:



A circunferência representada no plano cartesiano com centro no Ponto $C = (0; 0)$, raio unitário e que têm origem dos arcos no ponto $A = (1; 0)$ tem um nome especial, denomina-se **CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA** ou **CICLO TRIGONOMÉTRICO**!

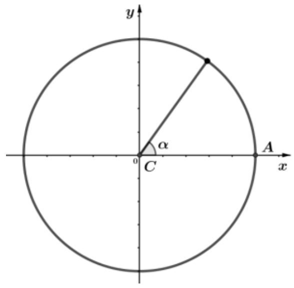
Observe agora que toda vez que for dado um arco no CICLO TRIGONOMÉTRICO, é interessante termos em mente o sinal deste arco, pois ele indica o sentido do arco (sentido horário ou sentido anti-horário).



Outra informação importante é que agora **cada ponto $\boldsymbol{B}$** do ciclo trigonométrico será a extremidade do arco de medida $\widehat{AB}$, conforme representa a figura ao lado.

Uma consequência disso é que o **ponto B**, extremidade do arco $\widehat{AB}$ pode ser encontrado ao percorrermos o ciclo trigonométrico a partir de A, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário, dando uma ou mais voltas completas.

Chamando de $\boldsymbol{\alpha}$ a **PRIMEIRA DETERMINAÇÃO POSITIVA**[12] de $\widehat{AB}$, podemos construir a seguinte tabela:



	ARCOS EM RADIANOS	
Volta	***Sentido Positivo***	***Sentido Negativo***
$\mathbf{1^{a}}$	α	$-1.(2\pi)+\alpha$
$\mathbf{2^{a}}$	$1.(2\pi)+\alpha$	$-2.(2\pi)+\alpha$
$\mathbf{3^{a}}$	$2.(2\pi)+\alpha$	$-3.(2\pi)+\alpha$
$\mathbf{4^{a}}$	$3.(2\pi)+\alpha$	$-4.(2\pi)+\alpha$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$\boldsymbol{n}^{\mathbf{a}}$	$(n-1).2\pi+\alpha$	$-n.(2\pi)+\alpha$

De modo geral, podemos afirmar que a medida do ponto B , em radianos, é dado por:

$$\boldsymbol{med}\left(\widehat{\boldsymbol{AB}}\right) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{k}.\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\,, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\ (\boldsymbol{i})$$

A expressão (i) representa a medida de todos os arcos trigonométricos com origem no ponto A e extremidade B, mas que diferem entre si por um número inteiro de voltas completas. Esses arcos são chamados de **ARCOS CÔNGRUOS**. A expressão (i) impõe que o arco $0 \leq \alpha < 2\pi$, ou seja, basta você encontrar o arco α (referente a primeira determinação positiva) e somar $2k\pi$.

OBSERVAÇÃO:

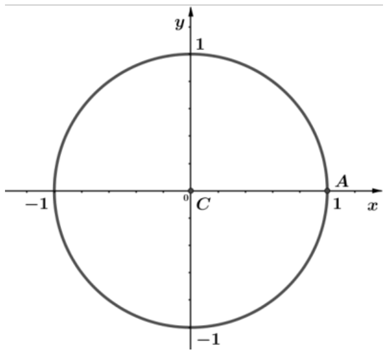
Vale ressaltar que embora a Tabela apresentada acima represente os arcos em radiano, podemos representar de forma análoga, os arcos em graus.

EXERCÍCIOS

1) Marque no ciclo trigonométrico abaixo os pontos aproximados referentes aos arcos de medida:

a) $\frac{\pi}{2}\ rad$ b) $\pi\, rad$ c) $-3\, rad$ d) $-270°$

e) $450°$ f) $210°$ g) $-15°$ h) $-\frac{\pi}{2}\ rad$



[12] A **PRIMEIRA DETERMINAÇÃO POSITIVA** de um arco é o arco positivo que se encontra na primeira volta do ciclo trigonométrico (entre 0 e 2π)

2) Um ponto se desloca no sentido anti-horário no ciclo trigonométrico. Sabendo-se que este ponto partiu da origem dos arcos, quais as coordenadas dele após ele ter percorrido:

a) Duas voltas e meia
b) Uma volta e três quartos de volta
c) Três voltas
d) Quatro voltas

3) Encontre a 1ª determinação positiva dos seguintes arcos:

a) $600°$
b) $1200°$
c) $\frac{7\pi}{2}$
d) $\frac{12\pi}{5}$
e) $-120°$
f) $-\frac{3\pi}{2}$

4) Obtenha a expressão geral dos arcos côngruos referentes aos arcos de medidas:

a) $0\ rad$
b) $\frac{\pi}{3}\ rad$
c) $210°$
d) $\frac{\pi}{6} rad$
e) $\frac{9\pi}{4}\ rad$

5) Marque (aproximadamente) no ciclo trigonométrico as extremidades dos arcos cujas medidas são dadas por $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

UNIDADE 4: Razões trigonométricas no triângulo retângulo

OBJETIVOS: Apresentar as razões trigonométricas e algumas relações fundamentais da Trigonometria

1. Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Considere o triângulo retângulo ABC (reto em A) e o ângulo α, com catetos representados pelos segmentos $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, e hipotenusa $\boldsymbol{a}$. Observe que se prolongarmos o segmento $\overline{BA}$ podemos marcar na semirreta que contém o novo segmento, os pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Igualmente, se prolongarmos o segmento $\overline{BC}$ podemos marcar na semirreta que contém o novo segmento, os pontos $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$.

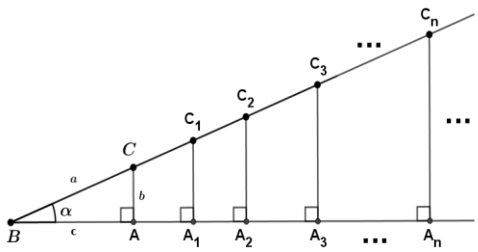


Figura 1: Triângulos retângulos

Os segmentos $\overline{BA_1}, \overline{BA_2}, \overline{BA_3}, \dots, \overline{BA_n}$, medem, respectivamente, $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$; semelhantemente, os segmentos $\overline{BC_1}, \overline{BC_2}, \overline{BC_3}, \dots, \overline{BC_n}$, medem, respectivamente, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.
Os segmentos que unem os pontos A_n ao ponto C_n é representado por b_n.
Observe que os triângulos retângulos $ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, A_3BC_3, \dots, A_nBC_n$, são semelhantes. Dessa semelhança, podemos extrair razões importantes para o estudo da **TRIGONOMETRIA.**

1.1. Cateto oposto a α sobre a hipotenusa

Como os triângulos retângulos $ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, A_3BC_3, \dots, A_nBC_n$, são semelhantes, podemos dizer que:

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{b_1}}{\boldsymbol{a_1}} = \frac{\boldsymbol{b_2}}{\boldsymbol{a_2}} = \frac{\boldsymbol{b_3}}{\boldsymbol{a_3}} = \frac{\boldsymbol{cateto\ oposto\ a\ \alpha}}{\boldsymbol{hipotenusa}} = \boldsymbol{CONSTANTE}$$

Observe que as razões **independem do triângulo retângulo** tomado da **Figura 1**, isto é, não importa se você tomar o triângulo retângulo ABC ou qualquer triângulo retângulo A_nBC_n, a razão vai ser a mesma!! Isso se justifica pelo fato de que essa razão está relacionada ao ângulo agudo α de um triângulo retângulo, e não ao comprimento dos seus lados. Essa constante que relaciona o cateto **oposto ao ângulo agudo $\boldsymbol{\alpha}$** e a **hipotenusa,** é denominada de **seno**. Como o **seno** é uma razão que depende da medida do ângulo $\boldsymbol{\alpha}$**,** representamos por $\boldsymbol{sen\alpha}$**.**

$$\boldsymbol{sen\alpha} = \frac{\boldsymbol{cateto\ oposto\ a\ \alpha}}{\boldsymbol{hipotenusa}}$$

1.2. Cateto adjacente a α sobre a hipotenusa

Como os triângulos retângulos $ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, A_3BC_3, \dots, A_nBC_n$, são semelhantes, podemos dizer que:

$$\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{c_1}}{\boldsymbol{a_1}} = \frac{\boldsymbol{c_2}}{\boldsymbol{a_2}} = \frac{\boldsymbol{c_3}}{\boldsymbol{a_3}} = \frac{\boldsymbol{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}}{\boldsymbol{hipotenusa}} = \boldsymbol{CONSTANTE}$$

Assim como no seno, observe que as razões acima **independem do triângulo retângulo** tomado da **Figura 1**, isto é, não importa se você tomar o triângulo retângulo ABC ou qualquer triângulo retângulo A_nBC_n, a razão vai ser a mesma!! Isso se justifica pelo mesmo motivo apresentado na razão seno. Essa constante que relaciona o **cateto adjacente ao ângulo agudo $\boldsymbol{\alpha}$** e a **hipotenusa,** é denominada de **cosseno**. Como o **cosseno** é uma razão que depende da medida do ângulo $\boldsymbol{\alpha}$, representamos por $\boldsymbol{cos\alpha}$**.**

$$\boldsymbol{cos\alpha} = \frac{\boldsymbol{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}}{\boldsymbol{hipotenusa}}$$

1.3. Cateto oposto a α sobre cateto adjacente a α

Por fim, ainda considerando os triângulos retângulos semelhantes $ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, A_3BC_3, \dots, A_nBC_n$, podemos dizer que:

$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} = \frac{b_3}{c_3} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = CONSTANTE$$

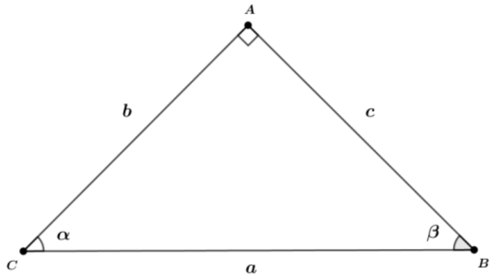
Assim como ocorreu no seno e no cosseno, observe que as razões acima **independem do triângulo retângulo** tomado da *Figura 3*, isto é, não importa se você tomar o triângulo retângulo ABC ou o triângulo retângulo A_nBC_n, a razão vai ser a mesma!!

Essa constante que relaciona o **cateto oposto ao ângulo agudo α e o cateto adjacente ao ângulo agudo α**, é denominada de **tangente**. Como a **tangente** é uma razão que depende da medida do ângulo $\boldsymbol{\alpha}$, representamos por $\boldsymbol{tg\alpha}$**.**

Temos assim definidas as três principais razões trigonométricas no triângulo retângulo:

$sen\alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}$	$cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}$	$tg\alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}$

Em resumo, para o triângulo retângulo ABC, temos:



RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS EM RELAÇÃO AO ÂNGULO $\boldsymbol{\alpha}$:

$$sen\alpha = \frac{c}{a}$$
$$cos\alpha = \frac{b}{a}$$
$$tg\alpha = \frac{c}{b}$$

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS EM RELAÇÃO AO ÂNGULO $\boldsymbol{\beta}$:

$$sen\beta = \frac{b}{a}$$
$$cos\beta = \frac{c}{a}$$
$$tg\beta = \frac{b}{c}$$

2. Ângulos notáveis: $30°, 45°$ e $60°$

Os ângulos de medida 30°, 45° e 60° são considerados de ÂNGULOS NOTÁVEIS. O quadro ao lado apresenta os valores do seno, cosseno e da tangente destes ângulos.

Os valores das razões trigonométricas apresentadas no quadro acima são frequentemente exigidos em provas de concursos públicos e nas provas do ENEM. Por isso, faz-se necessário que você sempre tenha em mentes os valores contidos nela para te ajudar na hora da prova.

$\hat{A}ngulo$	$\boldsymbol{Seno}$	$\boldsymbol{Cosseno}$	$\boldsymbol{Tangente}$
$\mathbf{30°}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\mathbf{45°}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\mathbf{60°}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

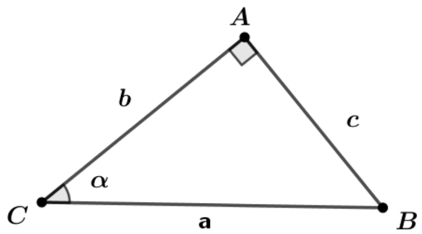
3. Primeiras relações fundamentais

Considere o triângulo retângulo representado na figura ao lado.

Como vimos anteriormente:

$$sen\alpha = \frac{c}{a}\ e\ cos\alpha = \frac{b}{a}$$

Elevando-se ambos os lados das razões acima ao quadrado, nas duas igualdades, temos:



$$sen^2\alpha = \frac{c^2}{a^2}\ e\ cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2}$$

Somando-se as expressões ao quadrado:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}$$

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

Pelo Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$, logo:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2}$$

Assim:

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

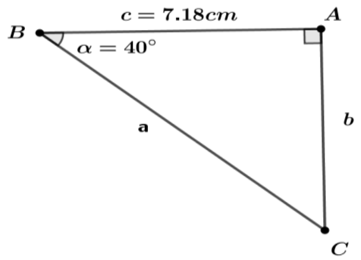
OBSERVAÇÃO 1:
Embora igualdade acima esteja inicialmente restrita ao caso de ângulo interno agudo de um triângulo retângulo, veremos que ela é válida para todos os ângulos! Essa igualdade é conhecida como **EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA.** Outra relação importante na Trigonometria é encontrada ao dividirmos o seno de um ângulo pelo seu cosseno:

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b} = tg\alpha, \qquad logo\colon\ tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

EXERCÍCIOS

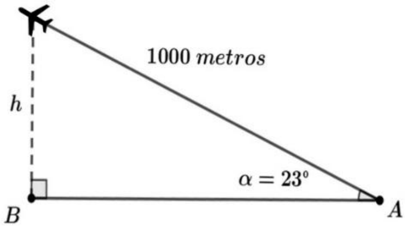
1) Considerando a figura representada ao lado, o comprimento aproximado do lado b representado no triângulo ABC, em centímetros, é (Considere $sen40° = 0{,}642$; $cos40° = 0{,}766$; $tg40° = 0{,}839$):

a) 6 b) 4,6 c) 5,5 d) 11 cm



2) O avião representado na figura ao lado decolou no sentido de A para B, tendo percorrido 1000 metros de distância. Após o avião ter percorrido a distância representada na figura ao lado, a altura que ele estará em relação ao solo, em metros, é de (*Considere:* $sen23° = 0{,}39$; $cos23° = 0{,}92$; $tg23° = 0{,}42$):

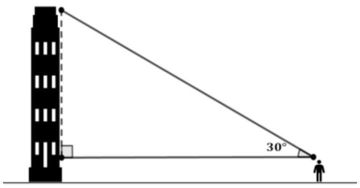
a) 920 b) 4200 c) 420 d) 390



3) Uma pessoa encontra-se a 90 metros de distância de uma torre. Com um teodolito ela consegue ver o ponto mais alto da torre sob um ângulo de 30° com a horizontal.

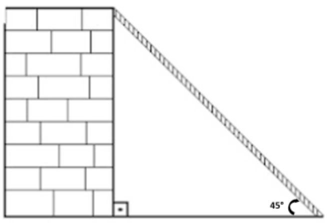
Sabendo-se que o teodolito está a 1,8 metros do chão, a altura aproximada da torre, em metros, é de (*Considere:* $\sqrt{3} = 1{,}73$)

a) 51,90 b) 53,70 c) 45 d) 46,90



4) Uma escada de comprimento igual a 4 metros foi apoiada sobre um muro formando um ângulo de 45° com o chão. A altura do muro é de:

a) $4\sqrt{2}\,m$ b) $4\,m$ c) $\sqrt{2}\,m$ d) $2\sqrt{2}\,m$



5) Uma pessoa mede 1,80 metros de altura e encontra-se a 40 metros de distância da base de um edifício. Dessa distância, essa pessoa consegue ver o ponto mais alto do edifício sob um ângulo de 25°. A altura do edifício é de (Considere $sen25° = 0{,}42$; $\cos 25° = 0{,}90$; $\text{tg}25° = 0{,}46$):

a) 18,40 metros b) 36 metros c) 37,8 metros d) 20,2 metros

6) No ano de 2018 o governo russo enviou ao espaço um foguete decorado com as cores da copa do mundo. Considerando que o foguete tenha sido lançado

Imagem: Foguete russo

sob um ângulo de 30° com o solo e tenha percorrido, nos primeiros 10 minutos, um movimento retilíneo. Considerando ainda que após 6 minutos o foguete tinha percorrido 90 km, a altura que o foguete estará em relação à base de lançamento, após 6 minutos, é de (Caso necessário, considere $\sqrt{3} = 1{,}73$):

a) 45 km b) 77,85 km c) 51,9 km d) 90 km

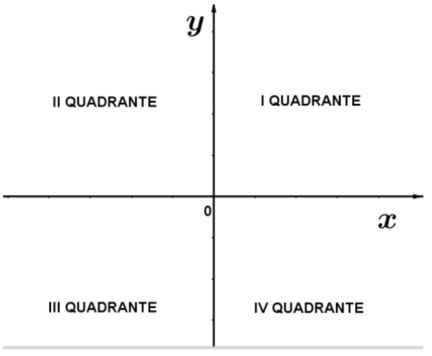
Fonte: https://noticias.r7.com/tecnologia-e-ciencia/fotos/russia-lanca-foguete-decorado-com-as-cores-da-copa-do-mundo-2018-06062018#!/foto/1

UNIDADE 5: Revisão sobre funções
OBJETIVOS: Apresentar o conceito de par ordenado e de função

1. Par Ordenado

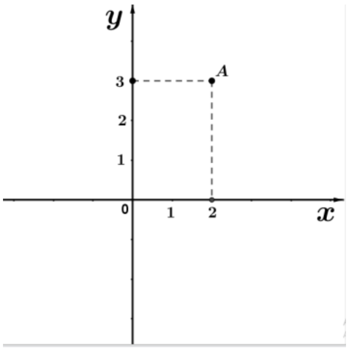
Considere o plano cartesiano representado ao lado. Nele, o eixo $0y$ é denominado de **eixo das ordenadas**. O eixo $0x$ é denominado de **eixo das abscissas**. Observe que embora o plano cartesiano esteja dividido em quatro partes iguais, **denominadas de quadrantes**, fica impossível encontrarmos um ponto nele caso não seja dado as devidas **coordenadas do ponto**.

As coordenadas de um ponto no plano cartesiano são denominadas de **pares ordenados**. Os pares ordenados são representados por $(x; y)$, onde x é o valor da abscissa do ponto e y, o valor da ordenada.



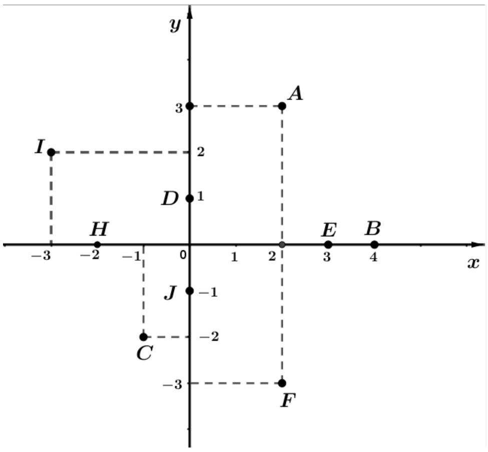
Assim, conhecendo-se as coordenadas do ponto no plano cartesiano, podemos encontrá-lo facilmente.

A Figura ao lado apresenta o ponto A, cuja coordenada no plano cartesiano é dada pelo par ordenado no eixo cartesiano $(-3; 2)$. Isso quer dizer que a abscissa do ponto F é -3 e a sua ordenada é 2.



EXERCÍCIOS

1) Encontre as coordenadas dos pontos apresentados no plano cartesiano ao lado:



a) $A =$

b) $B =$

c) $C =$

d) $D =$

e) $E =$

f) $F =$

g) $H =$

h) $I =$

i) $J =$

2) Represente no plano cartesiano abaixo os pontos cujas coordenadas são:

j) $A = (0{,}5; 1)$

k) $B = (-0{,}5; -0{,}5)$

l) $C = (-1; 1)$

m) $D = (0; 1)$

n) $E = (0; 2)$

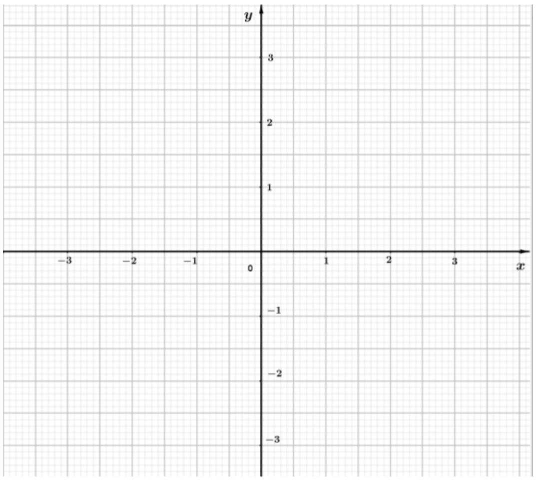
o) $F = (-1{,}5; 0)$

p) $H = (0{,}5; 0{,}5)$

q) $I = (0; -1)$

r) $J = (1{,}5; -1)$

s) $K = (-1; -1)$



2. Função

2.1. Definição

Sejam A e B dois conjuntos não vazios em que $x \in A$ e $y \in B$. Denomina-se função $\boldsymbol{f}$ de A em B (representa-se por $f: A \to B$) toda associação em que para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo:

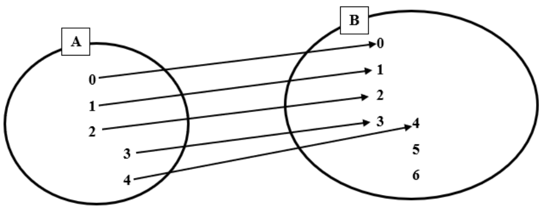
Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 5\}$ e $B = \{y \in \mathbb{N} | x < 7\}$. Considere ainda a regra $R: x = y$. Podemos afirmar que a regra R é uma função de A em B?

Solução:

$$A = \{0,1,2,3,4\}$$
$$B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

A regra R associa cada elemento $x \in A$ ao seu valor igual no conjunto B.

Representando no diagrama de flechas, temos:



Observe que **todo elemento de A** está associado com **um único elemento do conjunto B**. Logo a regra R é uma função $f: A \to B$. Dizemos que o Conjunto A é denominado de Conjunto **Domínio da função** f (representamos por $D(f)$) enquanto o conjunto B é denominado de **Contradomínio da função** (representamos por $CD(f)$). O conjunto formado **apenas** pelos elementos que foram alcançados pela função (pela flecha) é denominado de conjunto **Imagem da função** (representamos por $Im(f)$).

No exemplo acima, temos:

$$D(f) = A = \{0,1,2,3,4\}$$

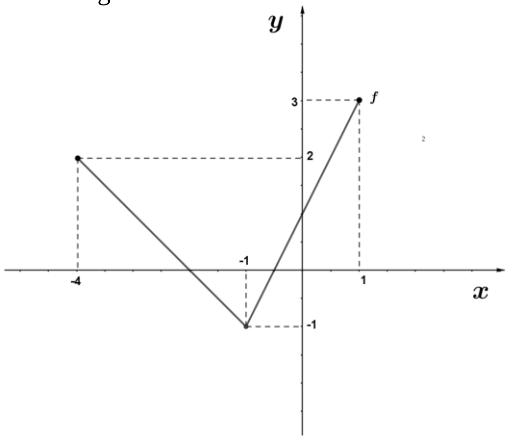
$$CD(f) = B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$
$$Im(f) = \{0,1,2,3,4\}$$

2.2. Função crescente, função decrescente e função constante

Dizemos que uma função $f: A \to B$ é **crescente** quando para todo $x_1, x_2 \in A$; $x_1 > x_2$,temos $f(x_1) > f(x_2)$. Ou seja, **aumentando-se** o valor de x **aumenta** o valor de $f(x)$.
Dizemos que uma função $f: A \to B$ é **decrescente** quando para todo $x_1, x_2 \in A$; $x_1 > x_2$,temos $f(x_1) < f(x_2)$. Ou seja, **aumentando-se** o valor de x **diminui** o valor de $f(x)$.
Observação: caso o gráfico da função seja representado por uma reta paralela ao eixo $0x$, a função é dita **CONSTANTE**.

EXEMPLO:

Considere a função f representada no gráfico abaixo:



A partir do gráfico podemos afirmar que a função é:
- ✓ **CRESCENTE** no intervalo: $-1 < x < 1$;
- ✓ **DECRESCENTE** no intervalo: $-4 < x < -1$;

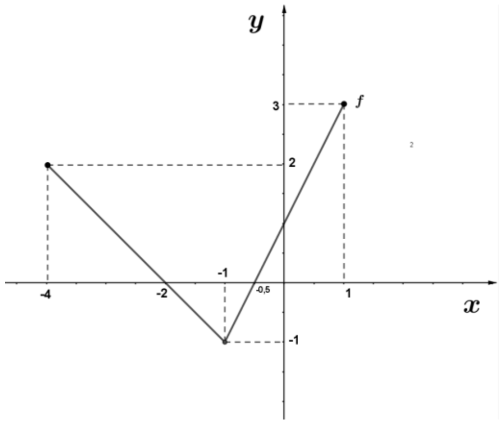
2.3. Estudo dos sinais de uma função

Fazer o estudo do sinal de uma função f é verificar em quais intervalos a função é positiva, negativa ou nula. Em outras palavras, é verificar os intervalos do $D(f)$ em que ocorre as seguintes situações:

$$f > 0 \qquad f = 0 \qquad f < 0$$

Dizemos que a função f é **POSITIVA** quando $f > 0$;
Dizemos que a função f é **NEGATIVA** quando $f < 0$;
Dizemos que a função f é **NULA** quando $f = 0$;
Graficamente, basta analisarmos os intervalos em que a o gráfico da função f está acima do eixo $0x$, abaixo do eixo $0x$ e o(s) pontos em que a função toca o eixo $0x$.

EXEMPLO: Analise o gráfico da função f e indique os intervalos em que a função é positiva, negativa e nula:



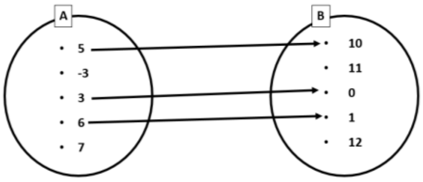
Solução: A partir do gráfico, podemos afirmar que a função é:

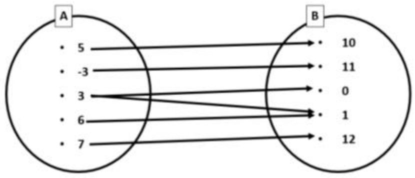
- **POSITIVA** no intervalo $-4 < x < -2$ e no intervalo $-0{,}5 < x < 1$;
- **NEGATIVA** no intervalo $-2 < x < -0{,}5$;
- **NULA** nos pontos $x = -2 \ e \ x = -0{,}5$.

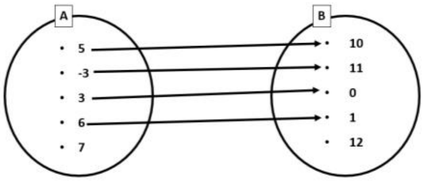
OBSERVAÇÃO:
Os pontos em que a função é nula são denominados de ZEROS ou RAÍZES DA FUNÇÃO.

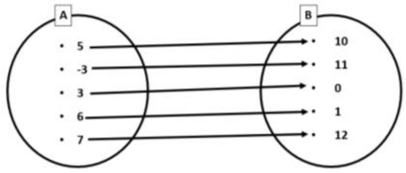
EXERCÍCIO

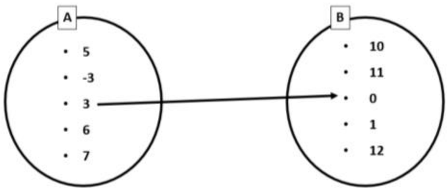
1) Nos diagramas representados pelas relações em flechas, indique quais deles representam funções. Caso a relação indique uma função, indicar em cada caso, o domínio, o contradomínio e a imagem da função:

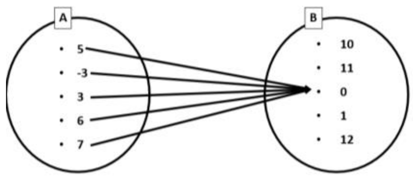
a)


b)


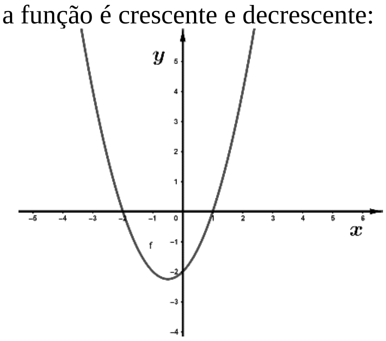
c)


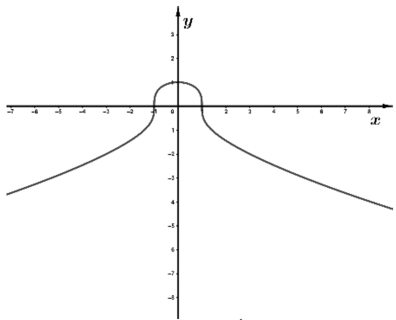
d)


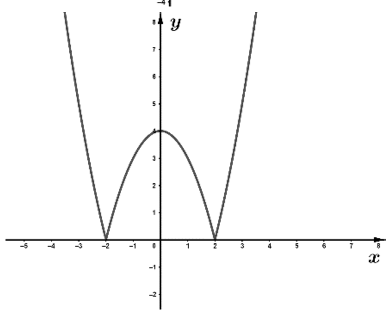
e)


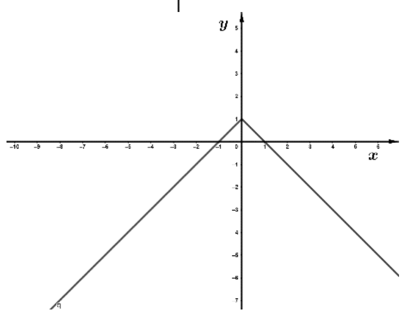
f)


2) Dos gráficos apresentados abaixo faça o estudo do sinal de cada um deles e indique os intervalos em que a função é crescente e decrescente:

a)


b)


c)


d)


ANEXO A – TCLE ALUNO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) aluno (a),

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada "**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO SENO"**, sob a responsabilidade dos pesquisadores **Natanael Freitas Cabral (Orientador) e Paulo Ferreira da Gama (Orientando)**, vinculados ao Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (PMPEM/UEPA).

O objetivo desta pesquisa é propor alternativas metodológicas de ensino que venham minimizar as dificuldades de aprendizagem em Matemática. A sua colaboração será em participar das tarefas que iremos propor a vocês. Essas tarefas serão gravadas em vídeos. Os áudios destes vídeos serão fielmente transcritos para a análise de nossa pesquisa. Não haverá, em hipótese alguma, divulgação dos referidos vídeos em nenhum canal de divulgação. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa poderão ser publicados e ainda assim a sua imagem será preservada.

Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa. Também não haverá nenhum risco de qualquer natureza. Os benefícios serão de cunho acadêmico, objetivando melhorias no processo de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você, contendo a sua assinatura e a de seu responsável.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores: **NATANAEL FREITAS CABRAL (natanfc61@yahoo.com.br) e PAULO FERREIRA DA GAMA (paulofgama@outlook.com).** Poderá também entrar em contato com a Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (PMPEM/UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010.

Belém, ____ de ________________ de 2019

____

Natanael Freitas Cabral

____

Paulo Ferreira da Gama

Eu, ____ aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

______________________________ ______________________________

Assinatura do Aluno (a) Assinatura do responsável pelo aluno (a)

ANEXO B – TCLE PROFESSOR

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) professor (a),

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada "**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO SENO"**, sob a responsabilidade dos pesquisadores **Natanael Freitas Cabral (Orientador) e Paulo Ferreira da Gama (Orientando)**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

A sua colaboração será de permitir que as atividades sejam realizadas em sua turma e auxiliar os pesquisadores durante a execução das atividades, dentre outras. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa. Também não haverá nenhum risco de qualquer natureza. Os benefícios serão de cunho acadêmico, objetivando melhorias no processo de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores: **NATANAEL FREITAS CABRAL (natanfc61@yahoo.com.br) e PAULO FERREIRA DA GAMA (paulofgama@outlook.com).** Poderá também entrar em contato com a Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (PMPEM/UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010.

Belém, ____ de _________________ de 2019

____

Natanael Freitas Cabral

____

Paulo Ferreira da Gama

Eu, ____ aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____

Participante da pesquisa

ANEXO C – QUESTIONÁRIO PROFESSOR

Prezado (a) Professor (a), estamos realizando um estudo que busca trazer melhorias para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica, em especial sobre a Função Seno. Para tanto, necessitamos de sua colaboração. Assim, convidamos você a responder o questionário abaixo e nos ajudar a obter êxito em nossa pesquisa. Agradecemos antecipadamente a sua colaboração e garantimos que todas as informações aqui prestadas serão mantidas no absoluto sigilo e anonimato.

1. Idade:

2. Gênero:

( ) Masculino ( ) Feminino

3. Tipo de escola que trabalha?

( ) Pública Municipal ( ) Privada
( ) Pública Estadual ( ) Conveniada
( ) Pública Federal ( ) Não trabalho em escola no momento

4. Você possui graduação em:

( ) Matemática ( ) Outro

5. Qual a sua formação acadêmica?

( ) Graduação ( ) Doutorado
( ) Especialização ( ) Pós-doutorado
( ) Mestrado (em andamento) ( ) Outro
( ) Mestrado

6. Qual o seu tempo de serviço como professor de Matemática?

( ) Menos de um ano ( ) De 16 a 20 anos
( ) De 1 a 5 anos ( ) De 21 a 25 anos
( ) De 6 a 10 anos ( ) Mais de 25 anos
( ) De 11 a 15 anos

7. Em quantas escolas você trabalha?

( ) Uma escola ( ) Três escolas
( ) Duas escolas ( ) Mais de três escolas

8. Quais níveis você já lecionou a disciplina de Matemática?

( ) Nível fundamental ( ) Nível médio

9. Quais níveis você está lecionando atualmente a disciplina de Matemática?

( ) Nível fundamental ( ) Nível médio

10. Qual a quantidade média de alunos por turma que você, como professor, ministra as aulas de matemática?

( ) entre 10 e 20 alunos ( ) entre 41 e 50 alunos
( ) entre 21 e 30 alunos ( ) Mais de 50 alunos
( ) entre 31 e 40 alunos

11. Você exerce alguma outra função remunerada além da de professor (a)?

12. Durante a sua formação inicial (graduação) você participou de alguma disciplina sobre o ensino da Função Seno?

( ) Sim ( ) Não

13. Você já participou de algum evento, curso ou treinamento envolvendo a Função Seno?

( ) Sim ( ) Não

14. Quais as principais formas de avaliação que você costuma utilizar em sala de aula? (Se necessário, você pode selecionar mais de uma opção).

( ) Prova oral ( ) Auto avaliação
( ) Prova escrita ( ) Produções no caderno

( ) Fichas de observação
( ) Outros

15. Como você costuma sentir-se quando está aplicando uma avaliação em Matemática?

( ) Entusiasmado
( ) Com raiva
( ) Preocupado
( ) Tranquilo
( ) Outro

16. Quando você leciona o assunto de Função Seno, a maioria das aulas iniciam:

( ) Pela definição seguida de exemplos e exercícios;
( ) Com a história do assunto para depois explorar os conceitos
( ) Com uma situação problema para depois introduzir o assunto
( ) Com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo
( ) Com jogos para depois sistematizar os conceitos
( ) Utilizando tecnologias para resolver problemas

17. Para fixar o conteúdo estudado de Função Seno, você costuma:

( ) Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;
( ) Apresentar jogos envolvendo o assunto;
( ) Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;
( ) Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.
( ) Não propunha questões de fixação;

18. Em média, quantas aulas você utiliza para trabalhar o assunto Função Seno

( ) Uma aula
( ) Entre duas e quatro
( ) Entre cinco e sete aulas
( ) Mais de oito aulas

19. Você conhece a Função de Euler?

( ) Sim
( ) Não

20. Quando você ensina sobre a Função Seno, você inicia pela Função de Euler? (Se você não utiliza a Função de Euler ao ensinar sobre a Função Seno, por favor, selecione a opção "Outro" e, se possível, descreva qual seria)

( ) Sim
( ) Não
( ) Outro

21. Quando você ensinou sobre a Função de Euler em sala de aula, você seguiu a forma apresentada no livro didático? (Se você usou um método diferente do que é apresentado no livro didático, descreva-o selecionando a opção "Outro")

( ) Sim
( ) Não
( ) Outro

22. Quando você ministra o conteúdo Função Seno, quais assuntos você considera importante ser ensinado?

( ) Periodicidade da Função
( ) Domínio, Contradomínio e Imagem da Função
( ) Estudo do sinal da Função
( ) Paridade da Função
( ) Crescimento/Decrescimento da Função
( ) Construção e Gráfico da Função
( ) Propriedades da Função
( ) Problemas envolvendo a Função

23. Quando você ministrou o conteúdo Função Seno, quais assuntos você abordou no seu ensino deste tema?

( ) Periodicidade da Função
( ) Domínio, Contradomínio e Imagem da Função
( ) Estudo do sinal da Função
( ) Paridade da Função
( ) Crescimento/Decrescimento da Função
( ) Construção e Gráfico da Função
( ) Propriedades da Função
( ) Problemas envolvendo a Função

ANEXO D – QUESTIONÁRIO ALUNOS EGRESSOS

Prezado(a) aluno (a), Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1) Idade: ____ anos 2) Gênero: □Masculino □Feminino 3) Ano/Série _______

4) Tipo de escola que estuda?

□Municipal □Estadual □ Conveniada □ Outro

5) Você já ficou em dependência?

□Não □Sim, em quais disciplinas? ____

6) Você gosta de Matemática?

□Detesto. □Suporto. □Gosto um pouco. □Adoro.

7) Qual a escolaridade do seu responsável masculino?

□Superior. □Médio. □ Médio incompleto. □Fundamental. □Fundamental incompleto. □ Não estudou. □ Não sei informar.

8) Qual a escolaridade da sua responsável feminina?

□Superior. □Médio. □ Médio incompleto. □Fundamental. □Fundamental incompleto. □ Não estudou. □ Não sei informar.

9) Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?

□Professor particular □Colega □Colega de Turma □Ninguém □ Familiar, Quem?______

10) Com que frequência você estuda matemática fora da escola?

□Todo dia □Somente nos finais de semana □No período de prova □Só na véspera da prova □Não estudo fora da escola.

11) Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?

□Sempre □Quase sempre □Às vezes □Poucas vezes □Nunca

12) Quais formas de atividades e/ou trabalhos o seu Professor (a) de matemática mais utiliza em suas aulas?

□Aulas Expositivas □Trabalhos em grupo □Seminários □Pesquisas □Projetos □Lista de exercícios □Jogos □Outros, Quais? ________________________________

13) Seu professor de matemática demonstra conhecimento e clareza ao trabalhar os conteúdos?

□Sim □Não

14) Você considera as explicações do professor de matemática?

□Ruins □Regulares □Boas □Excelentes

15) Quando você estudou FUNÇÃO SENO, a maioria das aulas:

□Iniciavam pela definição seguida de exemplos e exercícios;

□ Iniciavam com a história do assunto para depois explorar os conceitos;

□ Iniciavam com uma situação problema para depois introduzir o assunto;

□ Iniciavam com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;

□ Iniciavam com jogos para depois sistematizar os conceitos.

16) Para praticar o conteúdo de FUNÇÃO SENO seu professor costumava:

□Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;

□Apresentar jogos envolvendo o assunto;

□Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;

□Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

□Não propunha questões de fixação;

17) Quais os instrumentos que seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?

□ Provas □Testes □Simulados □ Auto avaliação □Observação □ Trabalhos em Grupos □ Seminários □ Visto no caderno □ Pesquisa □ Participação em resolução de atividades □ Frequência/assiduidade □Outros.

18) Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática?

□Contente □Tranquilo □ Com Medo □Preocupado □ Com Raiva □Calafrios

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66113-010 Belém-PA
www.uepa.br