

Universidade do Estado do Pará
Pró-Reitoria de Pesquisa de Pós-Graduação
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática



Akilson Medeiros Vasconcelos

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DAS
OPERAÇÕES DE ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO,
MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS**

BELÉM/PA
2020

Akilson Medeiros Vasconcelos

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DAS
OPERAÇÕES DE ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO, MULTIPLICAÇÃO E
DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Fundamental.

Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral.

**BELÉM/PA
2020**

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Vasconcelos, Akilson Medeiros

Uma sequência didática para o ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros /Akilson Medeiros Vasconcelos; orientador Natanael Freitas Cabral, 2020

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) Universidade do Estado do Pará, 2020

1. Aritmética-Estudo e ensino 2. Aprendizagem. 3. Educação de Jovens e adultos. 4. Métodos de ensino. I. Cabral, Natanael Freitas (orient.) II. Título.

CDD. 23º ed.513.07

AKILSON MEDEIROS VASCONCELOS

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO,
SUBTRAÇÃO, MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental

Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral

Data de aprovação: 28/02/2020

Banca examinadora

 . Orientador

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral

Doutor em Ciências Humanas-Educação – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC/RJ

Universidade do Estado do Pará

 . Examinador Interno

Prof. Dr. Miguel Chaquiam

Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN-RN

Universidade do Estado do Pará

 . Examinador Externo

Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias

Doutor em Educação – Universidade Nacional de Rosário - Argentina

Escola Tenente Rêgo Barros – Comando da Aeronautica

Belém – PA

2020

AGRADECIMENTO

Em primeiro lugar ao único Deus que existe, Aquele que nos libertou da escravidão no Egito; ao seu único Filho, Nosso Senhor Jesus, meu guia e a razão de minha vida; à sua Mãe, a primeira cristã da humanidade, Aquela que abriu as portas da salvação.

Aos meus amados pais Ailson Vasconcelos e Maria de Fatima Medeiros Vasconcelos, não tenho palavras que possam expressar o amor que sinto por vocês.

À minha amada esposa, Letícia dos Santos Costa, por ser o alicerce de minha vida.

Aos meus amados irmãos, Ailson Medeiros Vasconcelos e Moyses Medeiros Vasconcelos, por todas as experiências compartilhadas, as quais nos tornaram grandes homens.

Aos professores Miguel Chaquiam e Natanael Freitas Cabral por todas as orientações e conhecimentos compartilhados.

Ao amigo Paulo Ferreira da Gama por toda a ajuda durante essa caminhada.

À Universidade Federal Rural da Amazônia pelo apoio institucional e financeiro tornando possível este sonho.

Aos queridos alunos envolvidos no experimento.

A todos os colegas do PMPEM - 2018, os quais contribuíram direta ou indiretamente para a finalização deste trabalho.

RESUMO

VASCONCELOS, Akilson Medeiros. **Uma Sequência Didática para o Ensino das Operações de Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão de Números Inteiros**. 201 f. Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

A presente pesquisa foi desenvolvida com objetivo de analisar os indícios de aprendizagem resultantes da aplicação de uma sequência didática envolvendo as quatro operações aritméticas mais elementares com números inteiros, em uma turma da 3ª etapa da educação de jovens e adultos (EJA) do ensino fundamental de uma escola pública estadual em Belém do Pará. Neste sentido utilizamos o modelo das Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC), conforme Cabral (2017), para a elaboração da sequência didática proposta. Para a análise dos indícios de aprendizagem resultantes das interações verbais durante a aplicação da sequência didática utilizamos as noções da Análise Microgenética, segundo Góes (2000), e a Análise do Discurso, conforme Mortimer e Scott (2002). Os resultados das análises sobre as abordagens comunicativas e os padrões interativos evidenciaram fortes indícios de aprendizagem, mostrando que os alunos participaram ativamente da (re)estruturação do conhecimento, buscando a assimilação dos algoritmos para somar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros. Por fim, essas análises foram corroboradas pelos resultados quantitativos positivos da Intervenção Avaliativa Restritiva Final.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Educação Matemática. Sequência Didática. Números Inteiros. Operações com Números Inteiros.

ABSTRACT

VASCONCELOS, Akilson Medeiros. **A Didactic Sequence for Teaching Addition, Subtraction, Multiplication and Division of Integer Operations.** 201 f. Dissertation of the Professional Master's Program in Mathematics Education University of the State of Pará, Belém, 2020.

This research was developed in order to analyze the learning signs resulting from the application of a didactic sequence involving the four most elementary arithmetic operations with integers, in a class of the 3rd stage of youth and adult education (EJA) of elementary school. a state public school in Belém do Pará. In this sense we use the model of Articulated Units of Conceptual Reconstruction (UARC), according to Cabral (2017), for the elaboration of the proposed didactic sequence. For the analysis of learning signs resulting from verbal interactions during the application of the didactic sequence we used the notions of Microgenetic Analysis, according to Góes (2000), and Discourse Analysis, according to Mortimer and Scott (2002). The results of the analysis on the communicative approaches and the interactive patterns showed strong learning signs, showing that the students actively participated in the (re) structuring of knowledge, seeking the assimilation of the algorithms to add, subtract, multiply and divide integers. Finally, these analyzes were corroborated by the positive quantitative results of the Final Restrictive Evaluative Intervention.

Keywords: Mathematics Teaching. Mathematical education. Following teaching. Integer numbers. Whole Number Operation.

LISTA DE SIGLAS

BANPARÁ	Banco do Estado do Pará
BNCC	Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
EJA	Educação de jovens e adultos do Ensino Fundamental
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MMM	Movimento da Matemática Moderna
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
PMPEM	Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PNLEM	Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio
PUC/SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
SEDUC	Secretaria de Educação do Estado do Pará
UARC's	Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual
UEPA	Universidade do Estado do Pará
UFC	Universidade Federal do Ceará
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
UNAMA	Universidade da Amazônia
USP	Universidade de São Paulo

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Triângulo Didático	24
Figura 2 - Torre de Hanói	26
Figura 3 - Estrutura de uma sequência didática e as UARC que a compõem. 30	
Figura 4 - Estrutura mínima funcional para as sequências didáticas no ensino de Matemática.....	33
Figura 5: Produção correta da tarefa 7 (aluno E5)	128
Figura 6: Produção correta da tarefa 5 (aluno D4)	136
Figura 7: Produção correta da tarefa 5 (aluno E5)	136
Figura 8: Produção correta da tarefa 1 (aluno B2)	144
Figura 9 - Produção correta da tarefa 1 (Aluno E3).....	154

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Comparativo em valores percentuais da questão nº 3 nos três cenários analisados.....	58
Gráfico 2 - Comparativo em termos percentuais das questões 4 a 7, no C1 ..	59
Gráfico 3 - Comparativo em termos percentuais das questões 4 a 7, no C2. .	59
Gráfico 4 - Comparativo em termos percentuais das questões 4 a 7, no C3 ..	60
Gráfico 5 - 1ª Questão (Soma de Números Inteiros)	67
Gráfico 6 - 2ª Questão (Multiplicação de números Inteiros)	68
Gráfico 7 - 3ª Questão (Divisão de números Inteiros)	69
Gráfico 8 - 4ª Questão (Potenciação de números Inteiros)	69
Gráfico 9 – Porcentagem de acertos da 5ª a 10ª Questão	71
Gráfico 10 - Professores por faixa etária	73
Gráfico 11 - Tipo de Pós-graduação	75
Gráfico 12 - Operação matemática com maior dificuldade de ensino	79
Gráfico 13 - Nível de dificuldade da oitava, nona e décima questões	83
Gráfico 14 - Nível de dificuldade das questões 11 a 15	84

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Estrutura analítica da análise do discurso	37
Quadro 2 - Estudos sobre o ensino dos números inteiros	41
Quadro 3 - Multiplicação de números inteiros	48
Quadro 4 - Formas de introdução da adição de inteiros.....	50
Quadro 5 - Formas de introdução da multiplicação	51
Quadro 6 - Ensino de números inteiros na BNCC	64
Quadro 7 - Habilidades exigidas para a resolução das questões.....	64
Quadro 8 - Habilidades exigidas nas questões 11 a 15	84
Quadro 9 - Extrato Bancário de João referente a janeiro/2019	104
Quadro 10 - Extrato Bancário de João referente a fevereiro/2019	106
Quadro 11 - Extrato Bancário de João referente a março/2019	107
Quadro 12 - Subtração de números inteiros.....	109
Quadro 13 - Multiplicação de Números Inteiros (1ª parte).....	110
Quadro 14 - Multiplicação de Números Inteiros (2ª parte - A)	112
Quadro 15 - Multiplicação de Números Inteiros (2ª parte - B)	112
Quadro 16 - Multiplicação de números inteiros (Regra de Sinais).....	113
Quadro 17 - Divisão de números inteiros	114
Quadro 18 - Divisão de números inteiros (Regra de Sinais)	114
Quadro 19 - Sistematização dos recortes adotados.....	119
Quadro 20: Aspectos analisados no segmento 1	125
Quadro 21 - Aspectos analisados no segmento 3.....	130
Quadro 22: Aspectos analisados no segmento 4	132
Quadro 23: Aspectos analisados no segmento 5	135
Quadro 24: Aspectos analisados no segmento 6	139
Quadro 25: Aspectos analisados no segmento 7	143
Quadro 26: Aspectos analisados no segmento 8	146
Quadro 27: Aspectos analisados no segmento 9	148
Quadro 28: Aspectos analisados no segmento 10	151
Quadro 29: Aspectos analisados no segmento 11	154
Quadro 30: Aspectos analisados no segmento 12	158
Quadro 31: Número de acertos por tipo de questão.....	161
Quadro 32: Número de acertos por aluno	162

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Os cenários de aplicação do jogo Compra Monte	56
Tabela 2: Tipo de escola.....	74
Tabela 3 - Tempo de magistério	75
Tabela 4 - Metodologia de ensino.....	76
Tabela 5 - Instrumentos Avaliativos	77
Tabela 6 - Nível de dificuldade da primeira questão	79
Tabela 7 - Nível de dificuldade da segunda questão	80
Tabela 8 - Nível de dificuldade da terceira questão	80
Tabela 9 - Nível de dificuldade da quarta questão.....	81
Tabela 10 - Nível de dificuldade da quinta questão	81
Tabela 11 - Nível de dificuldade da sexta questão	82
Tabela 12 - Nível de dificuldade da sétima questão	82

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
1 APORTES TEÓRICOS E METODOLOGICOS	22
1.1 METODOLOGIA DA PESQUISA.....	22
1.2 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	23
1.3 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS	27
1.4 UNIDADE ARTICULADA DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL.....	28
1.5 ANÁLISE MICROGENÉTICA	34
1.6 ANÁLISE DO DISCURSO	36
2 SOBRE O ENSINO DOS NÚMEROS INTEIROS	40
2.1. REVISÃO DE ESTUDOS.....	40
2.2 DIAGNÓSTICO DOS ALUNOS EGRESSOS	63
2.3 DIAGNÓSTICO DOS PROFESSORES.....	72
3 SOBRE OS NÚMEROS INTEIROS	86
3.1 EVOLUÇÃO HISTÓRICA	86
3.2 CONSTRUÇÃO LÓGICO-FORMAL	93
3.2.1 Os Números Inteiros	93
3.2.2 Adição em $\mathbb{Z}$	94
3.2.3 Subtração em $\mathbb{Z}$	95
3.2.4 Multiplicação em $\mathbb{Z}$	95
3.2.5 Relação de ordem em $\mathbb{Z}$	97
3.2.6 Imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$	99
4 A SEQUENCIA DIDÁTICA	101
4.1 DIAGNÓSTICO INICIAL	101
4.2 CONCEPÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	102
4.2.1 Uarc 1 – Soma de Números Inteiros (1ª parte).....	103
4.2.2 Uarc 2 – soma de números inteiros (2ª parte)	105

4.2.3 Uarc 3 – Soma de números inteiros (3ª parte).....	107
4.2.4 Uarc 4 – Subtração de números inteiros.....	108
4.2.5 Uarc 5 – Multiplicação de Números Inteiros (1ª parte).....	110
4.2.6 Uarc 6 – Multiplicação de Números Inteiros (2ª parte).....	111
4.2.7 Uarc 7 – Divisão de Números Inteiros	113
4.2.8 Intervenção Avaliativa Restritiva Final	115
5 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E VERIFICAÇÃO DOS INDÍCIOS DE APRENDIZAGEM	116
5.1 APLICAÇÃO	116
5.2 VERIFICAÇÃO DOS INDÍCIOS DE APRENDIZAGEM	118
5.2.1 Processo de Análise Microgenética	122
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	164
REFERÊNCIAS.....	168
APÊNDICES	173
A – QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS EGRESSOS DO 7º ANO	173
B- TESTE DOS ALUNOS EGRESSOS DO 7º ANO.....	176
C- QUESTIONÁRIO DOS PROFESSORES.....	178
D – SEQUENCIA DIDÁTICA APLICADA AOS ALUNOS.....	184
ANEXOS	195
A- TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DO ALUNOS EGRESSOS DO 7º ANO	195
B- TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DOS RESPOSÁVEIS DOS ALUNOS EGRESSOS DO 7º ANO	197
C- TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DOS RESPONSÁVEIS DOS ALUNOS QUE PARTICIPARAM DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	199
D- TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DOS ALUNOS QUE PARTICIPARAM DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	201

INTRODUÇÃO

Durante toda a educação básica fui estudante da rede pública de ensino e sempre demonstrei certa afinidade com o aprendizado das disciplinas relacionadas às ciências exatas, mais especificamente à Matemática. Esta facilidade de aprendizado me proporcionou, na maioria das vezes, obter as melhores notas em provas e testes aplicados em sala de aula, no entanto sempre observei a grande dificuldade que os colegas tinham em aprender os conteúdos desta disciplina, logo, foi a partir de tais observações que surgiu o interesse em ajudar essas pessoas a superar essas dificuldades durante o processo de aprendizado desta tão importante disciplina. Não demorou muito para os colegas de classe perceberem que o exercício do magistério, como profissão, iria se consolidar em meu futuro.

Não contrariando as expectativas de colegas e familiares, em 2000, prestei vestibular para licenciatura em Matemática na Universidade da Amazônia (UNAMA), onde obtive aprovação e comecei a cursar esta graduação em 2001. A partir do momento que comecei frequentar as aulas, foi possível conhecer uma nova Matemática, não aquela simples disciplina sem qualquer relação com a sociedade, visto esta repassada pelos professores durante toda a educação básica, e sim como uma extraordinária ciência com estreita relação com outras ciências, visto que passei a conhecer diversas aplicações da Matemática à Química, Física, Biologia, Administração, Contabilidade, Economia, entre outras áreas de ensino e pesquisa.

Depois de formado, no final de 2005, fiquei ainda três anos sem exercer a docência, pois fui aprovado no concurso público de técnico bancário do Banco do Estado do Pará (BANPARÁ), emprego que me fez perceber a importância que a Matemática tinha nas instituições financeiras e consequentemente na vida de todos nós.

Foi em meados do segundo semestre de 2008, após aprovação em concurso público da Secretaria de Educação do Estado do Pará (SEDUC), que iniciei meu primeiro contato prático com o processo de ensino e aprendizagem na educação básica, mais precisamente no 6º ano do ensino fundamental,

momento em que foi percebida a grande dificuldade que os alunos tinham em operar as operações matemáticas mais elementares no conjunto dos números naturais.

Tais dificuldades se tornam ainda mais visíveis quando estes discentes têm seu primeiro contato, na série posterior, com o conjunto dos números inteiros e suas operações. Ainda neste contexto os PCN destacam que esses aprendizes têm obstáculos em:

Conferir significado às quantidades negativas; Reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir de zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido; Reconhecer diferentes papéis para o zero (zero absoluto e zero origem); Perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos números naturais - por exemplo, é possível “adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado”, como também é possível “subtrair um número de 2 e obter 9”; Interpretar sentenças do tipo $x = -y$, (o aluno costuma pensar que necessariamente x é positivo e y é negativo). (BRASIL, 1998, p.98)

Essas dificuldades podem ser notadas quando analisamos os resultados de avaliações de larga escala, como o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos), os quais demonstram baixos índices dos alunos brasileiros nas respectivas escalas dessas avaliações.

Neste sentido, o Pisa 2015 revelou que nós não só ainda não aprendemos como melhorar o ensino de Matemática, como também regredimos em relação aos demais anos. Nossos alunos de 15 anos (fase avaliada pelo Pisa) hoje sabem menos do que crianças de mesma faixa etária sabiam em 2012. A nota deste ano em Matemática foi de 377 pontos¹.

É importante ressaltar que segundo Brasil (2016, p. 29) “os estudantes brasileiros apresentaram melhor desempenho em itens da categoria quantidade (valor em dinheiro, razão e proporção e cálculos aritméticos)”, conhecimentos que, inicialmente, são adquiridos no 6º ano do ensino fundamental quando é ministrado o ensino dos números naturais, no entanto, apesar dos alunos terem melhor rendimento neste tipo de questão, 96% dos estudantes ficam entre os três níveis mais baixos de aprendizado. O mais grave é que quase metade desse grupo está abaixo do nível 1 da OCDE

¹ É possível ter acesso a essas informações por meio da lista completa do PISA em vários sites, dentre eles, <https://epoca.globo.com/educacao/noticia/2016/12/o-pisa-mostra-que-nao-dominamos-numeros.html>.

(Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico), ou seja, 43,74% dos estudantes brasileiros não sabem sequer o mínimo esperado na área de Matemática.

Neste sentido, é importante salientar que, na maioria das vezes, estes estudantes não conseguem superar tais obstáculos, causando sérias consequências no aprendizado da Matemática escolar.

Devido a essas inúmeras dificuldades e a forma como a Matemática vem sendo ensinada, a Educação Matemática propõe soluções e alternativas que procuram inovar o processo de ensino e aprendizagem desta disciplina, dessa forma, surgem novas metodologias, os quais Flemming et.al. (2005) destacam como tendências em educação matemática.

Ainda nesta seara, os PCN (BRASIL, 1998), apontam algumas metodologias que podem minimizar os problemas do ensino desta tão importante disciplina. Dentre elas podemos destacar a resolução de problemas, a História da Matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos.

A resolução de problemas surgiu em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, dessa forma educadores matemáticos apontam esta alternativa de ensino como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção, segundo os PCN, traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.

A História da Matemática pode ofertar uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática escolar. Ao apresentar a Matemática como uma obra humana, utilizada em diferentes culturas e em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem em suas mãos uma ferramenta que cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento (BRASIL, 1998).

Concordamos com Chaquiam (2017) quando destaca que a História da Matemática possibilita a inserção de fatos do passado, os quais podem ser uma dinâmica bastante interessante para iniciar um determinado conteúdo matemático em sala de aula, partindo do princípio que o aprendiz pode

reconhecer a Matemática como uma criação humana que se originou a partir da busca de soluções para solucionar problemas do cotidiano, conhecer as preocupações dos vários povos em diferentes momentos e estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Assim, a História da Matemática pode ser uma ferramenta eficaz para o docente, uma vez que descreve o penoso caminho percorrido por todos os envolvidos no processo de evolução da Matemática, permitindo que os aprendizes possam perceber que as dificuldades em assimilar os conteúdos da disciplina, também, foram enfrentados pelos grandes matemáticos do passado.

As Tecnologias da Comunicação estão se constituindo em um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas.

Segundo os PCN (BRASIL,1998) especialistas do tema mostram que a escrita, a leitura, a visão, a audição, a criação e a aprendizagem são influenciadas, cada vez mais, pelos recursos da informática, assim a escola enfrenta mais um desafio, o de como incorporar ao seu trabalho, tradicionalmente apoiado na oralidade e na escrita, novas formas de comunicar e conhecer.

Ainda neste contexto concordamos com Flemming et. al (2005) quando afirmam que a utilização de computadores e calculadoras podem levar às escolas a atingir os anseios de uma nova geração, já acostumada com estas tecnologias, possibilitando que o processo de ensino e aprendizagem se torne mais dinâmico e estimulante aos estudantes.

Outra importante estratégia para o desenvolvimento de ambientes de aprendizagem são os jogos. Estas ferramentas revelam-se como uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade, potencializando a elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. (BRASIL, 1998).

É importante também destacar que os jogos podem ser adaptados a diversas faixas etárias, de acordo com o desenvolvimento cognitivo dos participantes, assim esta ferramenta possibilita aos estudantes em geral o

desenvolvimento emocional e moral, além de ser um estímulo para o desenvolvimento das competências matemáticas.

Assim, apesar da existência de uma gama de ferramentas metodológicas de ensino, muitos docentes ainda estão aprisionados em um ambiente escolar que tem na tríade “definição, exemplos e exercícios” a única alternativa para o ensino da Matemática.

Ainda nesta perspectiva, há a necessidade que o professor proporcione ambientes mais favoráveis ao aprendizado, neste sentido a Teoria das Situações Didáticas - TSD - procura criar um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu*², no qual a aprendizagem deve se desenrolar. Este modelo objetiva ajudar o docente a conduzir o processo de ensino e aprendizagem, proporcionando a modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos (ALMOULOU, 2007). Essas modificações possibilitarão a aquisição do conhecimento matemático decorrente da utilização de uma aprendizagem significativa.

As sequências didáticas apresentam-se também como uma metodologia eficaz para o ensino na educação básica, em particular para o ensino da Matemática. Este tipo de abordagem permite a construção do conhecimento, possibilitando a experimentação, generalização, abstração e formação de significados (OLIVEIRA, 2018). Acreditamos que esta metodologia, aliada a atividades que estimulem os aprendizes a perceberem generalizações empírico-intuitivas, tornará o processo de ensino e aprendizagem mais dinâmico e significativo aos alunos.

As Unidades Articulas de Reconstrução Conceitual – UARC’s correspondem a um modelo de sequência didática proposto por Cabral (2017) para servir de referência à produção de novas propostas didáticas com o objetivo de ensinar conteúdos curriculares da disciplina de Matemática na educação básica. Esta proposta possibilita aos alunos explorar regularidades e perceber, mesmo que intuitivamente a importância e utilidade de se estabelecer generalizações, além de uma participação mais ativa no processo de ensino.

² Segundo Almouloud (2007) é o momento em que o aluno se depara com fatores de dificuldades, de contradições e de desequilíbrios no processo de ensino e aprendizagem.

Diante do exposto e em função dos obstáculos enfrentados por nossos alunos no aprendizado da Matemática, em particular, no ensino das quatro operações aritméticas mais elementares dos números inteiros, elaboramos a seguinte questão desta pesquisa: *Quais as potencialidades de uma sequência didática criada especificamente para o ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros, estruturada sob a ótica das unidades articuladas de reconstrução conceitual?*

Tendo em vista o questionamento levantado, adotou-se como objetivo geral desta pesquisa *analisar os indícios de aprendizagem resultantes da aplicação de uma sequência didática envolvendo as quatro operações aritméticas mais elementares dos números inteiros, elaborada de acordo com as unidades articuladas de reconstrução conceitual, em uma turma da 3ª etapa da educação de jovens e adultos (EJA) do ensino fundamental de uma escola pública estadual de Belém do Pará.*

Complementarmente, para melhor balizar o desenvolvimento deste trabalho, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- *Investigar o ensino dos números inteiros na visão de alunos e professores;*
- *Investigar o processo de ensino e de aprendizagem sobre os números inteiros baseado numa revisão bibliográfica;*
- *Analisar as orientações constantes nos documentos oficiais sobre o tema;*
- *Elaborar uma sequência didática envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão dos números inteiros de acordo com o modelo das UARC's;*
- *Avaliar as potencialidades dessa sequência na aprendizagem e aplicação dos conteúdos relacionados aos números inteiros.*

Além disso, elegemos como principais aportes teóricos para a elaboração desta pesquisa a Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Guy Brousseau (1986) - pois acreditamos que as situações didáticas propostas neste trabalho estão alinhadas ao que pressupõe esta teoria -, as Sequências

Didáticas na visão de Zabala (1998) e as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual desenvolvida por Cabral (2017) e, por fim, a Análise Microgenética segundo Góes (2000) associada à Análise do Discurso proposta por Scott e Mortimer (2002), a fim de verificar os indícios de aprendizagem decorrentes da aplicação da sequência didática constante nesta pesquisa.

Para um melhor entendimento, este trabalho está organizado em seis Seções. Na Seção 1 destacamos os principais aportes teóricos e metodológicos que embasaram esta pesquisa. Na Seção 2, apresentamos um diagnóstico do ensino dos números inteiros por meio de levantamentos em pesquisas acadêmicas e na opinião de alunos e professores.

Na seção 3, exploramos a evolução histórica dos números inteiros, inclusive a fundamentação matemática referente a construção lógico-formal destes números. Na Seção 4 são descritas as atividades que compõem a sequência didática, as quais foram elaboradas com o objetivo de amenizar as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem das quatro operações mais elementares com números inteiros.

Na Seção 5 descrevemos a fase de aplicação da sequência didática desenvolvida, com os alunos da terceira etapa da educação de jovens e adultos do ensino fundamental de uma escola pública estadual no município de Belém, além de destacamos os indícios de aprendizagem resultantes dos registros escritos e das interações verbais que ocorreram durante a aplicação das atividades. Por fim, na Seção 6, tecemos nossas considerações finais.

1 APORTES TEÓRICOS E METODOLOGICOS

Nesta Seção versaremos as bases teóricas que nos deram suporte para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente exibiremos a organização metodológica usada nesta pesquisa, na sequência apresentaremos as concepções de Brousseau (1986) sobre a Teoria das Situações Didáticas, visto que as atividades que compõem a sequência didática proposta nesta pesquisa foram desenvolvidas de acordo com o que pressupõe esta teoria, posteriormente trataremos sobre Sequência Didática segundo Zabala (1998), em seguida apresentaremos o modelo de sequência didática proposto por Cabral (2017), denominada de Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC), na qual nos apoiamos para a estruturação e elaboração das atividades aqui propostas.

Por fim, exibiremos a Análise Microgenética conforme Góes (2000) e a Análise do Discurso segundo Mortimer e Scott (2002), que foram as ferramentas utilizadas na análise das interações verbais entre os pares visando identificar os indícios de aprendizagens dos alunos, bem como os registros escritos no decorrer das atividades que compõem a sequência didática proposta neste trabalho.

1.1 METODOLOGIA DA PESQUISA

Para atingir os objetivos desta pesquisa, primeiramente analisamos o que os descritores presentes nos PCN e na BNCC revelam sobre o ensino dos números inteiros, mais especificamente no que tange as quatro operações mais elementares, a fim de verificar as competências e habilidades exigidas aos aprendizes no final do ciclo de aprendizagem.

Após esta fase fizemos um levantamento junto a professores e alunos das percepções sobre o assunto objeto da pesquisa. Ainda nesta seara, realizamos uma revisão da literatura referente ao processo de ensino e de aprendizagem dos números inteiros, onde identificamos dificuldades no ensino deste tema a partir de estudos diagnósticos, estudos que envolveram a análise de livros didáticos, estudos experimentais e estudos propositivos.

Após o levantamento de todas essas informações, construímos uma proposta de sequência didática para o ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros, na qual o professor possa agir como mediador do processo, organizando a situação de ensino de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem.

Para a realização dessa pesquisa, voltaremos nossa atenção para os alunos da terceira etapa da educação de jovens e adultos (EJA) do ensino fundamental de uma escola da rede pública estadual de Belém no estado do Pará, pois esta etapa da EJA engloba, simultaneamente, o 6º e 7º anos, séries que, segundo Brasil (1998), possibilitam o primeiro contato dos discentes com os números inteiros.

Finalmente, para analisar os indícios de aprendizagem que irão ocorrer durante a aplicação da sequência didática, utilizaremos a Análise Microgenética (GÓES, 2000) articulada com a Análise do Discurso (MORTIMER e SCOTT, 2002), pois são duas importantes ferramentas analíticas das interações sociais ocorridas em sala de aula entre aluno-aluno e aluno-professor.

A seguir, analisaremos de forma mais minuciosa o aporte teórico utilizado nesta pesquisa.

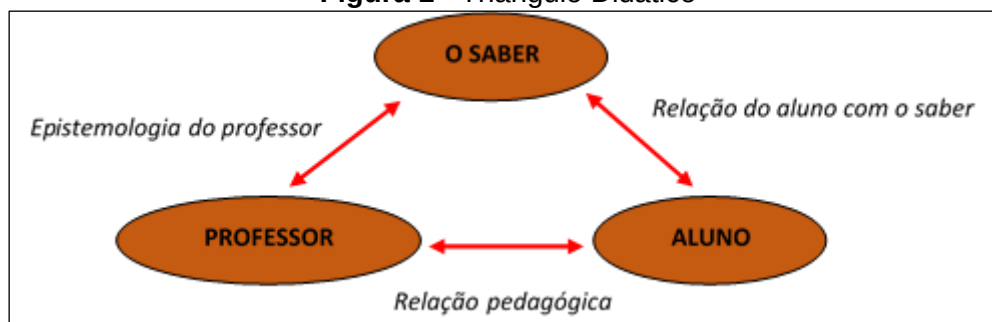
1.2 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida por Guy Brousseau com o objetivo de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos. Guy Brousseau é um matemático marroquino nascido em 1933, formou-se na década de 1960 e passou a lecionar na Universidade de Bordeaux na França, segundo este estudioso o processo de aprendizagem caracteriza-se de modo geral por uma coleção de situações identificáveis, as quais promovem a modificação dos comportamentos dos alunos, promovendo a aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos. (BROUSSEAU, 1975)

O objetivo principal desta teoria não é o sujeito cognitivo, e sim a situação didática, na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber. Dessa forma Brousseau (1986) considera como

primordial a estrutura formada pelas interações entre professor e alunos mediadas pelo saber nas situações de ensino, conforme Figura 1.

Figura 1 - Triângulo Didático



Fonte: Almouloud (2007)

De acordo com esta figura é muito fácil perceber que o processo de ensino e aprendizagem, segundo a Teoria das Situações Didáticas, evolui de acordo com o mecanismo das interações estabelecidas entre esses três elementos - o professor, o aluno e o saber -, onde o aluno aprende adaptando-se a um *milieu*, o qual é rico em dificuldades e contradições, características estas de grande importância para o desenvolvimento do aprendiz diante das situações problemáticas propostas.

Nesse sentido Almouloud (2007) destaca que esta teoria apoia-se em três hipóteses:

- 1- O aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrios, um pouco como acontece na sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas respostas novas, que são prova da aprendizagem. Esta hipótese é uma referência à epistemologia construtivista de Piaget, segundo a qual a aprendizagem decorre de processos de adaptação, no sentido biológico do termo, desenvolvidos pelo sujeito diante de situações problemáticas.
- 2- O *milieu* não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. Para que haja essa intencionalidade didática, o professor deve criar e organizar um *milieu* no qual serão desenvolvidas as situações suscetíveis de provocar essas aprendizagens.
- 3- A terceira hipótese postula que esse *milieu* e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. (ALMOULOU, 2007, p. 32)

Dessa forma, estas três hipóteses desencadeiam múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com o objetivo de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico. Estas múltiplas relações formam a

situação didática proposta pelo professor. Brousseau (1996), destaca que *situação didática* é o objeto de estudo da didática da matemática, que implica num processo de aprendizagem em que o professor e o aluno estão envolvidos. Neste sentido:

Para que de fato exista uma situação didática, é necessário que o professor seja criativo e, a partir de uma situação real, procure trabalhar um conhecimento e ou saber matemático através da realização de um jogo educativo e/ou utilização de diversos objetos que auxiliam na construção de novos conhecimentos (OLIVEIRA, 2013, p. 75).

A *situação adidática*, como parte intrínseca da *situação didática*, é uma situação na qual o objetivo de ensinar não é revelado ao aprendiz, mas foi planejada pelo professor para proporcionar condições favoráveis para a aprendizagem de um novo saber que deseja ensinar. (ALMOULOUD, 2007)

Para Brousseau (1986) uma *situação adidática* tem as seguintes características: a) o problema matemático selecionado deve instigar o aluno a agir, falar, refletir e evoluir por sua conta própria; b) Este problema proporcionará ao aluno a incorporação de novos conhecimentos, os quais serão justificáveis pela lógica interna da situação, conhecimentos estes construídos sem apelo às *razões didáticas*; c) o professor constrói condições para que o aprendiz seja o responsável pela aprendizagem dos conhecimentos a serem ensinados a partir das atividades propostas.

Neste sentido, ao desenvolvermos a sequencia didática proposta nesta pesquisa, procuramos ao máximo criar atividades que pudessem trazer situações reais vivenciadas no cotidiano destes aprendizes, pois acreditamos que o ponto de partida para o aprendizado é despertar o interesse dos alunos em solucionar estas atividades, e isso só será possível se o professor elaborar um *milieu* que possa despertar esse interesse.

É importante também ressaltar que para Brousseau (2008) uma situação didática deve ser classificada em:

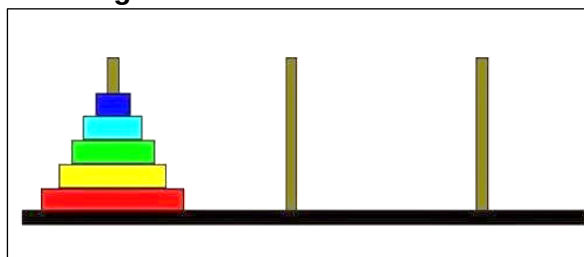
- *Situações de ação*: que facilitem a interação dos alunos entre si e o meio físico.
- *Situações de formulação*: que são caracterizadas pela comunicação/informação do professor e dos alunos.
- *Situações de validação*: os alunos sejam capazes de descobrir e elaborar argumentos para validação da aprendizagem.

- *Situações de institucionalização*: tanto o professor como os alunos devem estabelecer convenções sociais.

Para melhor ilustrar estas quatro fases do processo de aprendizagem, segundo a Teoria das Situações Didática, tomamos como exemplo a sequência didática proposta por Cabral (2017), a qual teve como objetivo incentivar os aprendizes a descobrir a forma algébrica mais elementar de uma função exponencial, utilizando o jogo educativo chamado Torre de Hanói.

Em um primeiro momento o professor explica as regras do jogo à classe; cada aluno deverá deslocar todos os discos da haste onde se encontram para uma haste diferente, respeitando as seguintes regras: a) deslocar um disco de cada vez, o qual deverá ser o do topo de uma das três hastes; b) cada disco nunca poderá ser colocado sobre outro de diâmetro menor.

Figura 2 - Torre de Hanói



Fonte: <http://angelica-coutinho.blogspot.com/2014/06/oficina-torre-de-hanoi.html>

Inicialmente o professor pode sugerir que os alunos comecem com uma pequena quantidade de discos, tabelando o número de discos utilizados e a quantidade mínima de movimentos necessários para transferir os referidos discos de uma haste a outra, possibilitando que os aprendizes possam perceber a relação existente entre essas variáveis, chegando ao objetivo estabelecido na sequência didática.

Na fase da ação, os jogadores colocam seus conhecimentos em prática, tomando decisões para solucionar o problema. Neste momento surge um conhecimento não estruturado matematicamente. Na fase da formulação, o professor propõe que os alunos verbalizem as estratégias usadas. Durante a formulação das respostas, os alunos transformam o conhecimento implícito em conhecimento explícito, retomando sua ação apropriando-se do conhecimento de maneira consciente.

Na fase da validação o aluno deve expor sua estratégia e ainda precisa comprovar que a informação é verdadeira, demonstrando na prática sua

convicção. É também nesta fase que cada aprendiz busca equívocos na estratégia de seu colega.

Na institucionalização o docente articula todas as situações validadas pelos alunos para serem formalizadas, a fim de que o novo conhecimento possa fazer parte do patrimônio matemático da classe, é nesta fase que, segundo Cabral (2017), o aluno terá artifícios para concluir, a partir do jogo Torre Hanói, que a lei $m = 2^d - 1$, calcula a quantidade mínima de movimentos “ m ” necessária para movimentar a quantidade “ d ” de discos de uma haste para outra, revelando a lei de formação de uma função exponencial.

A fim de entender de forma mais detalhada esta metodologia de ensino chamada de sequência didática, utilizada por Cabral (2017) para o ensino de função exponencial, trataremos mais minuciosamente deste tema a seguir.

1.3 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

A expressão sequência didática surgiu em uma reforma educacional que ocorreu na França na segunda metade do ano de 1980 e designava um conjunto ordenado e sequencial de atividades didáticas aplicadas ao ensino de qualquer tipo de conteúdo. Anos mais tarde um grupo de pesquisadores da Universidade de Genebra que trabalhava na área de linguística, psicologia e filosofia, sistematizou uma proposta teórico-metodológica para o ensino de determinados gêneros textuais, dessa forma, essa expressão sequência didática, inicialmente, ser mais conhecida no campo da linguística, contudo, podendo ser aplicada a qualquer outra área de estudo.

Neste sentido Cabral (2017) destaca que o objeto do saber a ser ensinado é uma espécie de gênero textual que pode assumir uma natureza escrita ou uma natureza oral dentro da sequência didática. Para Costa e Peretti (2013, p. 6), sequência didática é um conjunto de atividades integradas, organizadas de forma que cada etapa possibilite o alcance dos objetivos propostos pelo professor, somando a isso, um conjunto de atividades que permitam avaliar o aluno.

Segundo Zabala (1998) o termo sequência didática é definido como sendo “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim

conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (p.18). Para esse autor as sequências didáticas devem ser construídas para atingir o objetivo de ensino estabelecido pelo professor, sendo que essa construção deve ser planejada rigorosamente, reunindo toda a complexidade da prática de ensinar.

Zabala (1998) descreve que a construção de uma sequência didática passa por três etapas, quais sejam: o planejamento, a aplicação e a avaliação. Neste sentido, Cabral (2017, p. 32) detalha cada uma das etapas:

O planejamento racionaliza a inevitável articulação entre as reconstruções conceituais e as metodologias alternativas, a aplicação que materializa a viabilidade e pertinência do material sequenciado disponibilizado aos aprendizes e a avaliação que por sua vez permite as (re)elaborações necessárias a partir da análise e discussão dos dados.

Dessa forma, entendemos que se o professor, considerado o maestro de todo esse processo de ensino da Matemática, seguir estas etapas minuciosamente, contribuirá para consolidar o aprendizado do objeto matemático em questão, possibilitando que o aprendiz se torne, também, responsável pela aquisição do conhecimento.

O uso de sequências didáticas para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática escolar tem suas particularidades, neste contexto:

“ [...]se faz necessário que o professor faça um diagnóstico para estabelecer a relação adequada entre aquilo que os alunos sabem sobre o que lhes será ensinado – conhecimentos mínimos necessários para apreensão do novo objeto – e a estrutura da SD proposta para a aprendizagem do objeto em jogo (CABRAL, 2017, p. 38).

Partido deste princípio, acreditamos que as sequências didáticas devem ser planejadas minuciosamente para atender o objetivo dos professores de Matemática, dessa forma, Cabral (2017) descreve um modelo estruturante para a elaboração de sequências didáticas no âmbito do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, com características focadas sobre o nível escolar fundamental e médio, o qual destacaremos a seguir.

1.4 UNIDADE ARTICULADA DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL

Cabral (2017) propôs um modelo de sequência didática que teve como objetivo criar uma metodologia alternativa, que além de afastar o aluno da rigidez do modelo tradicional do ensino da Matemática – definição, exemplo e exercício – pudesse aproximá-los de uma prática discursiva dialógica promotora de interações verbais reflexivas, a fim de gerar condições para que estes discentes explorassem regularidades intuitivamente, de tal forma que pudessem perceber a necessidade e a utilidade de se estabelecer generalizações.

Neste contexto, esse modelo estruturante para a elaboração de sequências didáticas no âmbito do processo de ensino-aprendizagem de Matemática é chamado de Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC), a qual Cabral (2017) define como um conjunto de argumentações empírico-intuitivas construído por intervenções estruturantes concebidas entre professores e alunos.

A fim de explicar melhor a elaboração de uma sequência didática, no âmbito das UARC's, Cabral (2017) faz uma analogia, na qual o conceito do objeto matemático a ser reconstruído seja representado por uma superfície **S**, sendo que essa superfície será reconstruída por superfícies ou unidades menores, as quais serão representadas pela letra **s**. Essas unidades menores são denominadas pelo autor de UARC's. A primeira dessas unidades é chamada de UARC-1 (Unidade articulável de reconstrução conceitual de primeira geração). Essa UARC é na verdade o “ponto de partida” na reconstrução conceitual do objeto matemático.

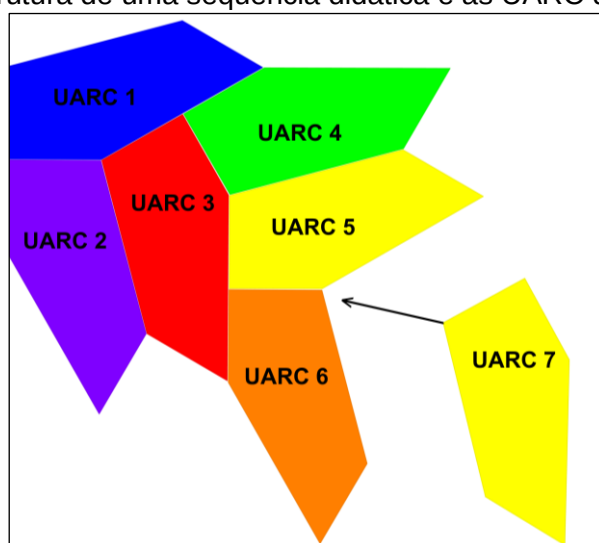
Neste prisma, Cabral (2017) destaca que:

A partir dessa primeira escolha (UARC-1) professor terá sua segunda escolha condicionada. Não poderá escolher uma unidade qualquer dentro de **S**. Em minha analogia deverá tomar uma peça unitária imediatamente ligada a primeira a qual denominei de UARC-2 (unidade articulável de reconstrução conceitual de segunda geração). O mesmo critério é adotado para definição das demais UARC's de gerações superiores. À medida que as UARC's são evocadas à superfície **S** o conceito, em minha analogia, é reconstruído/revestido. O que o aluno, em tese, aprende em cada uma dessas UARC's contribui potencializado sua capacidade de reconstrução conceitual a ponto de que, nas interações promovidas de uma *n*-ésima UARC, a reconstrução pretendida é atingida por ele. (CABRAL, 2017, p. 39)

Nesta perspectiva, a sequência didática proposta neste trabalho é composta de sete UARC's (unidades ou superfícies **s**), onde cada uma tem um objetivo específico no processo de ensino e aprendizagem, ou seja, quando cada um desses objetivos forem atingidos estaremos atingido o objetivo maior (superfície **S**), que no caso desta pesquisa, o aluno estará apto a realizar cálculos envolvendo as quatro operações mais elementares com os números inteiros.

Assim, é possível perceber que o professor deve organizar minuciosamente as UARC's, de forma que elas possam ser encaixadas como um quebra-cabeças, a fim de que o aprendizado do aluno possa ser potencializado, contribuindo para a reconstrução conceitual do objeto matemático. A Figura 3, presente em Pereira (2017), materializa a articulação das UARC' s.

Figura 3 - Estrutura de uma sequência didática e as UARC que a compõem



Fonte: Pereira (2017) - A partir de Cabral (2017)

A fim de um melhor entendimento do modelo de sequência didática baseado no construto analógico das UARC's, Cabral (2017) passa a descrever seis categorias estruturantes que materializam o texto de uma sequência didática, são elas: Intervenção Inicial (*I_i*), Intervenção Reflexiva (*I_r*), Intervenção Exploratória (*I_e*), Intervenção Formalizante (*I_f*), Intervenção Avaliativa Restrita (*I_{Ar}*) e, finalmente, as Intervenção Avaliativa Aplicativa (*I_{Aa}*).

O autor utiliza o termo “intervenção” por considerar que existe uma intencionalidade nas ações dirigidas pelo professor diante de seus aprendizes, ou seja, o professor é o orientador do pensamento em construção, e suas

ações de ensino são intervenções que visam estimular o aluno a alcançar os objetivos de aprendizagem.

A Intervenção Inicial (I_i) é o primeiro elemento do jogo de idéias na esfera do discurso dialógico-didático que serve de aporte para que o professor estimule o aluno a perceber de maneira empírico-intuitiva as regularidades funcionais de um conceito. Cabral (2017) Concebe duas modalidades para materializar a Intervenção Inicial, são elas: a “Exploração Potencial” (I_i - EP) e a “Conexão Pontual” (I_i - CP). Em ambas as modalidades a condução diretiva-dialógica do professor assume o papel de orientador do pensamento que tem como objetivo a reconstrução de um ou mais conceitos já sistematizados do saber disciplinar da Matemática presente no currículo escolar.

Segundo o autor, esta Intervenção Inicial na modalidade “Exploração Potencial” consiste na apresentação de uma situação-problema, um jogo, um quebra-cabeça, um desafio de natureza aritmética, algébrica ou geométrica ou ainda de natureza híbrida. Esta modalidade de Intervenção Inicial possibilita ao docente desencadear, a partir de diversos questionamentos aos aprendizes, uma gama de procedimentos investigativos, simulações, conjecturas, hipóteses, analogias, empirias, que são componentes típicos de construção do saber matemático.

A Intervenção Inicial na modalidade “Conexão Pontual”, segundo Cabral (2017), é apresentada a partir de um comando dado ao aprendiz que é estimulado a realizar um procedimento pontual, sem uma relação aparentemente direta com o objeto conceitual em processo de reconstrução.

A Intervenção Reflexiva é concebida por meio de um questionamento. Esse questionamento refere-se a aspectos relacionados ao conceito do objeto matemático que está sendo reconstruído, ou seja, esses questionamentos são de tal importância, pois tangenciam fatos importantes que vão facilitar a reconstrução final do objeto em jogo.

A Intervenção Exploratória, segundo Cabral (2017), tem como foco aprofundar o olhar do aprendiz a respeito das respostas obtidas a partir das Intervenções Reflexivas. Aqui não haverá perguntas, e sim a solicitação da execução de certos procedimentos por parte dos alunos.

É importante ressaltar que o autor concebe:

[...] a utilização colaborativa dessas duas formas de intervenções de ensino – Ir e Ie – no sentido de estimular o aluno à percepção de certas regularidades envolvidas no processo de reconstrução conceitual. O processo de ensinar e aprender precisa necessariamente passar por essa dinâmica, qual seja, de se elaborar o cenário didático com a finalidade de levar os alunos a perceberem, ainda que intuitivamente, os padrões, as regularidades que possibilitam a configuração de modelos generalizantes. Essa dinâmica muda substancialmente o que, em geral, é realizado a partir do modelo focado exclusivamente na exposição didática. (CABRAL, 2017, p. 41)

Na Intervenção Formalizante, o professor reelabora as verdades redescobertas pelos alunos no chamado “ping pong” promovido pelas Intervenções Reflexivas e Exploratórias. Essa reelaboração consiste em vestir essas verdades com o rigor matemático exigido, procurando satisfazer as exigências do saber disciplinar formal, axiomático, próprio da natureza matemática. Finalmente, após as Intervenções Formalizantes o docente poderá realizar as Intervenções Avaliativas Restritas e Aplicativas.

As Intervenções Avaliativas Restritas foram concebidas com a objetivo de se estabelecer um primeiro parâmetro de aferição de aprendizagem do conceito objeto de reconstrução. Segundo o autor, esta Intervenção busca medir as aprendizagens dos alunos em dois aspectos fundamentais do saber matemático, são eles: Qual o significado e o sentido do objeto matemático em estudo? e como se justificam e operam os algoritmos decorrentes? (propriedades e operações).

As Intervenções Avaliativas Aplicativas têm como finalidade a resolução de problemas de aplicação. Neste momento o aluno se depara com um nível mais complexo de avaliação do processo de apreensão conceitual. Nesta Intervenção o aluno deve ser capaz de mobilizar as noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes em situações que envolvam resolução de problemas aplicados aos diversos contextos reais e/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino.

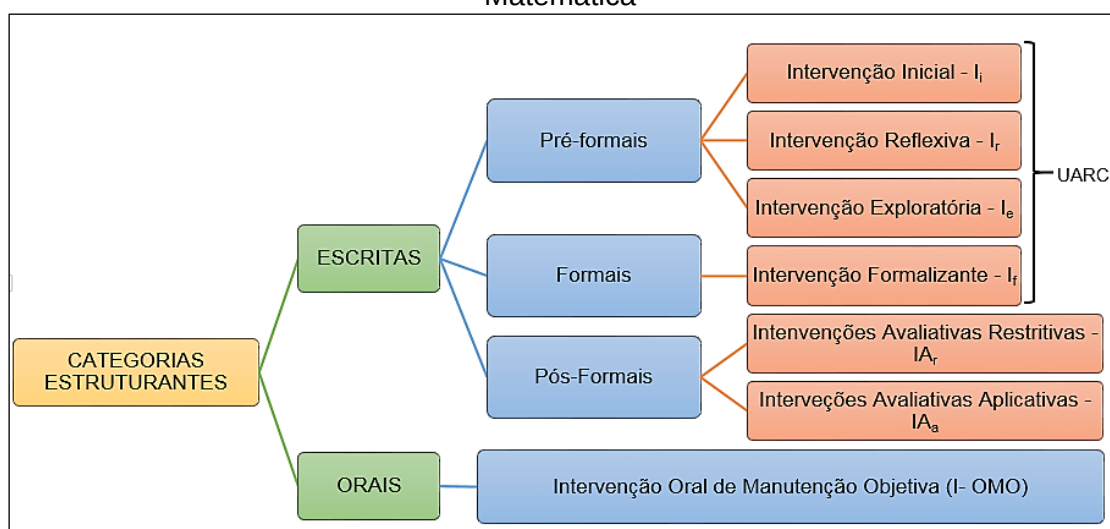
Dessa forma, Cabral (2017) classifica as intervenções Reflexiva, Exploratória, Formalizante, Avaliativa Restritiva e Avaliativa Aplicativa como Intervenções Auxiliares, as quais têm como objetivo evidenciar as potencialidades da Intervenção Inicial. Ainda neste prisma, o autor afirma que todas as intervenções auxiliares, além da Intervenção Inicial, formam o

conjunto das Intervenções Escritas, as quais estão sistematicamente organizadas no texto que materializa a Sequência Didática.

É importante ressaltar que além dessas seis intervenções escritas, Cabral (2017) desenvolveu uma sétima categoria de intervenção de natureza oral, a qual denominou de Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (I- OMO), cuja “finalidade é manter a objetividade planejada, manter o foco da reconstrução pretendida pela Sequência Didática.” (CABRAL, 2017, p.47).

Neste sentido as sete categorias de intervenções estruturantes criadas por Cabral (2017), dão conta de consolidar uma estrutura mínima funcional para as sequências didáticas voltadas para o ensino de Matemática, as quais são classificadas em pré-formais, formais e pós-formais, conforme ilustra a Figura 4 a seguir.

Figura 4 - Estrutura mínima funcional para as sequências didáticas no ensino de Matemática



Fonte: Autor (2019) - A partir de Cabral (2017)

Assim, mesmo que a sequência didática e as UARC's que a compõem estejam bem articuladas entre si, há a possibilidade que os aprendizes tenham algumas dificuldades durante o processo de ensino e aprendizagem, seja pela desconcentração do aluno, ou até mesmo pela falta de conhecimento prévio necessário para o aprendizado. Logo, é neste momento que o professor agirá no sentido de possibilitar esse domínio, e isso vai exigir uma atenção maior, por vezes individual, para que o aluno tenha condições de prosseguir.

Diante do exposto, foi possível perceber que este modelo de estrutura de sequência didática, concebido pelas Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual – UARC, consiste em um processo complexo, porém se for planejado minuciosamente pelo professor, se torna uma ferramenta poderosíssima para o ensino da Matemática. Dessa forma, a sequência didática proposta neste trabalho está pautada neste modelo, por acreditarmos que essa metodologia irá favorecer o processo de ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros.

Na próxima seção, trataremos das noções da Análise Microgenética proposta por Góes (2000), na qual nos permitiu verificar os possíveis indícios de aprendizagem provenientes dos registros escritos e das interações verbais dialógicas entre professores-alunos e alunos-alunos, estimulados de forma intencional pelas intervenções estruturantes presentes nas atividades que compõem a sequência didática aqui proposta.

1.5 ANÁLISE MICROGENÉTICA

Na análise sobre a formação de sujeitos, em particular no que concerne a processos que se instanciam nos contextos educativos, as áreas da educação e da psicologia vêm utilizando a uma abordagem metodológica denominada de “Análise Microgenética”. De modo mais amplo, Góes (2000) destaca que esta metodologia se trata de uma forma de construção de dados que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos.

Na prática, a Análise Microgenética é associada ao uso de videogravação, incorporando o domínio de estratégias para a filmagem e a trabalhosa atividade de transcrição, a fim de que haja o estudo minucioso do funcionamento humano, resultando na compreensão dos passos do desenrolar das ações dos sujeitos, no sentido de explicar suas construções e transformações cognitivas.

É importante ressaltar que a Análise Microgenética distingue-se de outras análises de microeventos. Neste sentido, podemos destacar a análise

Microetnográfica, pois, apesar de, à primeira vista, ambas terem uma proximidade, visto que estão igualmente orientadas para os detalhes das ações; para as interações e cenários socioculturais, a Análise Microgenética, segundo Góes (2000), repousa nas proposições de Vygotsky sobre o funcionamento humano.

Ainda nesta seara, Góes (2000), destaca que a principal diferença entre a Análise Microgenética e outras análises de microeventos, é que estas não assumem a centralidade do entrelaçamento das dimensões cultural, histórica e semiótica no estudo do funcionamento humano, como o faz a Análise Microgenética.

Góes (2000) ainda acrescenta que uma primeira característica que diferencia a Análise Microgenética de outras análises de microeventos pode ser identificada, não no termo micro em si, mas na sua qualificação como genética, o que parece estabelecer um contraste com o aporte etnográfico. Segundo a autora a visão genética aí utilizada vem das proposições de Vygotsky sobre o funcionamento humano, e, dentre as diretrizes metodológicas que ele explorou, estava incluída a análise minuciosa de um processo, de modo a configurar sua gênese social e as transformações do curso de eventos. Essa forma de pensar a investigação foi denominada pelos seguidores de Vygotsky como Análise Microgenética.

É importante destacar que o próprio Piaget, em seu modelo clínico, afirma Góes (2000), utilizou técnicas que poderiam ser consideradas microgenéticas, partindo do princípio que envolviam uma análise minuciosa das ações nas sessões de provas ou entrevistas. Para a autora, a proposta de Piaget (entrevista clínica) teve influência nos trabalhos de Vygotsky sobre a ontogênese, muito embora, Vygotsky tenha mudado muito a proposta original, que era de buscar cuidadosamente as respostas “espontâneas” das crianças não influenciadas pelos adultos. Vygotsky introduziu deliberadamente pistas, auxílios ou obstáculos para estudar os processos de interesse. Neste sentido:

A mudança no formato da entrevista não é mero detalhe, mas decorre da tese fundamental de Vygotsky, segundo a qual os processos humanos têm gênese nas relações com o outro e com a cultura, e são essas relações que devem ser investigadas ao se examinar o curso de ação do sujeito. (GÓES, 2000, p. 11)

Assim, Cabral (2017) destaca que Análise Microgenética constitui-se em uma ferramenta metodológica poderosa de investigação sobre a construção do conhecimento quando focamos na reunião de sujeitos em situações de ensino no ambiente escolar. O autor destaca que a sala de aula, ambiente das interações dialógicas, proporciona ao docente um espaço de investigação pedagógica.

Diante do exposto, a Análise Microgenética é associada, nesta pesquisa, à sequência didática, como metodologia de aferir os indícios de aprendizagem de cada UARC que compõe o texto escrito da sequência. Estes indícios de aprendizagem serão detectados em videogravação, após o recorte de trechos da transcrição das interações verbais professor-aluno e aluno-aluno.

Ainda neste contexto, a Análise Microgenética articula-se com as contribuições da Análise do Discurso de Mortimer e Scott (2002), as quais descrevemos a seguir.

1.6 ANÁLISE DO DISCURSO

É inquestionável que o processo de aprendizagem decorre das diversas interações verbais entre professor-aluno e aluno-aluno. Estas interações têm como objetivo fazer com que os aprendizes possam reconstruir significados, os quais são criados na interação social e então internalizados pelos indivíduos. Neste sentido surge a preocupação em entender como os professores dão suporte ao processo pelo qual os estudantes constroem significados em salas de aula, sobre como essas interações são produzidas e sobre como os diferentes tipos de discurso podem auxiliar a aprendizagem dos estudantes, logo é para isso que serve a Análise do Discurso.

Segundo Mortimer e Scott (2002) a Análise do Discurso é uma ferramenta utilizada para analisar o modo de como os professores podem agir para guiar as interações que resultam na construção de significados em salas de aula de ciências. Segundo os autores esse método é o produto de uma tentativa de desenvolver uma linguagem para descrever o gênero de discurso das salas de aula de ciências.

Mortimer e Scott (2002) apresentam uma estrutura analítica para a Análise do Discurso baseada em cinco aspectos interrelacionados, que

focalizam o papel do professor e são agrupados em termos de focos do ensino, abordagem e ações, conforme Quadro 1:

Quadro 1 - Estrutura analítica da análise do discurso

ASPECTOS DA ANÁLISE	
i. Focos do ensino	1. <i>Intenções do professor</i> 2. <i>Conteúdo</i>
ii. Abordagem	3. <i>Abordagem comunicativa</i>
iii. Ações	4. <i>Padrões de interação</i> 5. <i>Intervenções do professor</i>

Fonte: Mortimer e Scott (2002, p. 285)

O primeiro item da estrutura analítica para análise do discurso agrupa dois aspectos - as intenções do professor e o conteúdo a ser transposto. As intenções do professor subdividem-se em seis passos, durante todo o processo da sequência didática, são eles: o problema (intervenção inicial da sequência didática, que irá despertar o interesse do aprendiz); a exploração da visão dos estudantes (visões e entendimentos dos estudantes sobre idéias e fenômenos específicos do objeto de estudo); a introdução e o desenvolvendo da 'estória científica' (disponibilizar idéias científicas do objeto de estudo no plano social da sala de aula.); a orientação dos estudantes a internalizar o conhecimento científico (orientar os estudantes a falar e pensar novas idéias científicas relacionadas ao objeto de estudo , a fim de produzir significados individuais e internalizar essas idéias); a aplicação do conhecimento adquirido (dar suporte aos estudantes para aplicar as idéias científicas ensinadas a uma variedade de contextos) e, por fim, manter a narrativa (solidificação do conhecimento adquirido).

O conteúdo do discurso é dividido em três categorias:

Descrição: envolve enunciados que se referem a um sistema, objeto ou fenômeno, em termos de seus constituintes ou dos deslocamentos espaço-temporais desses constituintes.

Explicação: envolve importar algum modelo teórico ou mecanismo para se referir a um fenômeno ou sistema específico.

Generalização: envolve elaborar descrições ou explicações que são independentes de um contexto específico. (MORTIMER E SCOTT, 2002, p. 287)

No segundo item da estrutura analítica da Análise do Discurso temos o aspecto abordagem comunicativa que é considerado por Mortimer e Scott (2002) como o conceito central de sua estrutura analítica, pois fornece a perspectiva sobre como o professor trabalha as intenções e o conteúdo do ensino por meio das diferentes intervenções pedagógicas que resultam em diferentes padrões de interação. Assim, os autores classificam a abordagem comunicativa em quatro classes, que são definidas por meio da caracterização do discurso entre professor e alunos ou entre alunos em termos de duas dimensões, são elas: discurso dialógico ou de autoridade; discurso interativo ou não-interativo.

Cabral (2004) destaca que é pela associação dessas duas dimensões que surgem as quatro abordagens comunicativas que podem ser aplicadas ao papel condutor do professor no discurso em sala de aula, como também para caracterizar interações entre estudantes em pequenos grupos. Assim o autor afirma que:

[...] o discurso será dito interativo-dialógico quando o professor e os alunos exploram idéias, formulam perguntas e consideram diferentes pontos de vista. Quando, no entanto, o professor reconsidera na sua fala vários pontos de vista destacando similaridades e diferenças, seu discurso é dito não-interativo/dialógico, ao passo que se conduzir os alunos por meio de uma seqüência de perguntas e respostas, com o objetivo de chegar a um ponto de vista específico, seu discurso será dito interativo/de autoridade. Finalmente, quanto o professor apresenta apenas um ponto de vista específico, seu discurso é dito não-interativo/de autoridade. (CABRAL, 2004, p. 110).

O terceiro e último item da estrutura analítica da análise do discurso, denominado de ações, se desenvolve por meio dos aspectos padrões de interação e intervenções do professor.

Neste sentido Bezerra (2018) destaca que o principal padrão de interação é o I-R-A (iniciação do professor, resposta do aluno e avaliação do professor); esse padrão pode ser desdobrado ou alterado, na formação de cadeias de discursos variados (debates) em que as respostas e réplicas constroem o conhecimento.

Ainda neste contexto Mortimer e Scott (2002) explicam que outros padrões também podem ser notados. Por exemplos, em algumas interações o docente apenas sustenta a elaboração de um enunciado pelo aluno, por meio de intervenções curtas que muitas vezes repetem parte do que o aprendiz

acabou de falar, ou fornecem um feedback para que os estudantes elaborem um pouco essa fala. Essas interações geram cadeias de turnos não triádicas do tipo I-R-P-R-P... ou I-R-F-R-F.... onde P significa uma ação discursiva de permitir o prosseguimento da fala do aluno e F um feedback para que o aluno elabore um pouco mais sua fala.

Finalmente, as intervenções do professor implicam em seis ações distintas ou sequenciais, desenvolvidas por Scott (1998) apud Mortimer e Scott (2002): a formalização dos significados; sua seleção; a marcação dos significados-chave; o compartilhamento desses significados; a aferição do entendimento dos alunos; e a revisão científica.

Neste sentido, elaboramos uma sequência didática para o ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros, estruturada de acordo com a UARC concebida por Cabral (2017), como um instrumento didático que possibilita a análise das interações advindas das abordagens comunicativas entre professor-alunos e alunos-alunos, resultado das intervenções estruturantes materializadas no texto didático e dos diferentes padrões de interações.

Dessa forma, a análise do discurso, revela-se uma ferramenta essencial para consolidar a Análise Microgenética, uma vez que ambas possibilitam acompanhar as minúcias das transições genéticas que tendem a progredir durante o processo de aplicação da sequência didática, de forma que teremos a oportunidade de “mapear” os padrões interativos, o que, conseqüentemente, nos permitirá evidenciar os indícios de aprendizagem de acordo com o objetivo de cada atividade proposta.

Na Seção seguinte apresentamos um panorama geral de como está ocorrendo o ensino dos números inteiros em nossas escolas, por meio da análise em trabalhos acadêmicos e na opinião de alunos e professores. Estas informações foram de extrema importância para a construção da sequência didática proposta neste trabalho.

2 SOBRE O ENSINO DOS NÚMEROS INTEIROS

Nesta Seção, apresentamos uma investigação sobre o panorama do ensino dos números inteiros no ensino fundamental. Foram feitas análises de alguns trabalhos acadêmicos que tiveram como tema os números inteiros, assim como, duas pesquisas de campo que objetivaram verificar, na opinião de alunos e professores, como o ensino dos números inteiros está ocorrendo em nossas escolas. Estas análises visam identificar problemas que, por ventura, venham a ocorrer no ensino e na aprendizagem do objeto de estudo, as quais subsidiarão a confecção de uma sequência didática com a finalidade de colaborar na superação das dificuldades detectadas.

2.1. REVISÃO DE ESTUDOS

Para realização desta revisão de estudo, buscamos pesquisas envolvendo o objeto “ensino de números inteiros” como palavra-chave no Google Acadêmico que é um sistema do Google que oferece ferramentas específicas para que pesquisadores busquem e encontrem literatura acadêmica. O Google Acadêmico nos direcionou para repositórios de diversas instituições de ensino superior brasileiras, incluindo o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Desse modo, selecionamos nove trabalhos acadêmicos, entre dissertações de mestrado e artigos, destacando em cada uma dessas pesquisas: objetivos, questões norteadoras, metodologia, resultados obtidos e as respectivas conclusões. As escolhas desses trabalhos se deram tendo em vista categorias de estudos, pois acreditamos que facilita a compreensão do cenário das pesquisas realizadas. Estas categorias foram definidas como estudos diagnósticos, análise de livros didáticos, estudos experimentais e estudos propositivos. Estes trabalhos estão disponíveis em banco dados online, de suas respectivas Instituições.

Na categoria denominada de estudos diagnósticos, apresentamos alguns estudos sobre as dificuldades no processo de ensino dos números inteiros, mais especificamente no ensino das operações aritméticas mais

elementares. Na categoria denominada análise de livros didáticos, o foco está na análise de como o ensino dos números inteiros é abordado nos livros didáticos utilizados pelos professores. Na categoria estudos experimentais apresentamos metodologias de ensino que foram testadas e favoreceram o aprendizado dos números inteiros. E por fim, a categoria estudos propositivos tem como foco destacar trabalhos que propõem estratégias para tratar obstáculos no processo de aprendizagem dos números inteiros.

O quadro a seguir mostra, de modo geral, os trabalhos que foram selecionados, a fim de que pudessem ser analisados individualmente.

Quadro 2 - Estudos sobre o ensino dos números inteiros

CATEGORIAS	AUTOR	TÍTULO	TIPO	IES	ANO
Estudos diagnósticos	Renata Siano Gonçalves	Um estudo com os números inteiros usando o programa aplusix com alunos de 6ª série do ensino fundamental	Dissertação de Mestrado	PUC/SP	2007
	Francisco Tavares da Rocha Neto	Dificuldades na aprendizagem operatória de números inteiros no ensino fundamental	Dissertação de Mestrado	UFC	2010
Estudos diagnósticos / Análise de livros didáticos	Evanilson Landim Alves	Menos com menos é menos ou é mais? Resolução de problemas de multiplicação e divisão de números inteiros por alunos do Ensino Regular e da Educação de Jovens e Adultos	Dissertação de Mestrado	UFPE	2012
Análise de livros didáticos	Aguinaldo José Rama	Números inteiros nos ensinos fundamental e médio	Dissertação de Mestrado	PUC/SP	2005
	Alessandro R. Silva	O livro didático e o discurso do professor	Dissertação de Mestrado	PUC/SP	2006

		no ensino das operações com números inteiros para alunos do ensino de jovens e adultos			
Estudos experimentais	Rosângela Cruz da Silva Salgado	O ensino de números inteiros por meio de atividades com calculadora e jogos	Dissertação de Mestrado	UEPA	2011
	Selma Felisbino Hillesheim	Os números inteiros relativos em sala de aula: perspectivas de ensino para a regra de sinais	Dissertação de Mestrado	UFSC	2013
	Daniel Fernandes da Silva	O jogo como recurso pedagógico de ensino: uma proposta para os números relativos	Dissertação de Mestrado	USP	2017
Estudos propositivos	Carlos Eurico Galvão Rosa; Carlos Gustavo da Mota Figueiredo; Marcelo Luís da Cruz Lisboa	Produto de números negativos: Estratégias para tratar um obstáculo epistemológico	Artigo	UFPR	2013

Fonte: Pesquisa bibliográfica (2018)

A dissertação de Gonçalves (2007) teve por objetivo investigar como alunos da 6ª série do Ensino Fundamental II resolvem situações-problema envolvendo números inteiros, utilizando o programa computacional chamado Aplusix. A pesquisa foi desenvolvida numa escola estadual de ensino localizada na periferia da zona oeste de São Paulo, a qual dispunha de um laboratório de informática equipado com número suficiente de computadores. Participaram desta pesquisa 8 alunos de uma classe de 34, que se dispuseram a ficar na escola após o horário das aulas. A pesquisadora procurou investigar

como os alunos fazem a conversão do enunciado do problema no registro da língua natural para o registro simbólico numérico, fundamentada na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

A fim de efetivar o objetivo desta pesquisa a autora propôs aos discentes dois problemas aditivos³. Após a resolução do primeiro problema a autora constatou que apenas um aluno acertou. Os principais erros se concentram na conversão da passagem do enunciado que está no registro da língua natural para o registro numérico e na resolução da expressão numérica resultante desta conversão. No segundo problema, apenas três alunos acertaram, sendo que os erros se concentraram novamente na conversão dos registros e na resolução da expressão numérica resultante da solução do problema.

Diante dos resultados apresentados nos protocolos dos alunos nos dois problemas, a pesquisadora conclui que os docentes devem trabalhar, pelo menos, com dois registros de representação para o estudo da compreensão em matemática, a fim de que o aprendiz possa ter uma visão mais ampla da aplicação do objeto matemático a ser ensinado. A pesquisadora também conclui que os docentes devem trabalhar com ferramentas didáticas que possam envolver os alunos, motivá-los e instigá-los no processo de ensino e aprendizagem.

A pesquisa de Gonçalves (2007) foi de extrema importância para a construção da sequência didática proposta em nosso trabalho, pois nos fez perceber que teríamos que criar atividades de ensino que pudessem ser significativas para os alunos, a fim de possibilitar que a conversão de registros pudesse transcorrer naturalmente sem grandes dificuldades.

Rocha Neto (2010) em sua dissertação de mestrado objetivou diagnosticar as causas e as dificuldades pelas quais passam os alunos do 7º ano do ensino fundamental de quatro escolas públicas de Fortaleza quando se submetem ao estudo dos números inteiros. Foi ainda objetivo desta pesquisa mapear os erros e acertos mais frequentes cometidos por esses alunos. Para isso aplicou-se duas avaliações em sala de aula, realizando-se dessa forma um estudo exploratório sobre o processo de compreensão dos números inteiros

³ Problemas aditivos são aqueles nos quais os enunciados, em geral, descrevem uma situação social ou econômica muito simples (jogo de bola de gude, compra, deslocamento etc.) e a resolução pede somente a utilização das operações de adição e subtração. (Damm, 2003, p. 35).

por que passam os alunos dessas escolas. A pesquisa foi realizada dentro de dois contextos: o aspecto cognitivo dos alunos que aprendem e o contexto pedagógico através das metodologias utilizadas.

Após a análise das avaliações aplicadas aos aprendizes, Rocha Neto (2010) identificou quatro grupos de dificuldades referentes a aprendizagem dos números inteiros. Um primeiro conjunto de dificuldades é relativo às operações com os números naturais, tendo os alunos apresentado as seguintes dificuldades: a) não compreensão da subtração como inversa da adição; b) não domínio dos procedimentos para efetuar multiplicação e divisão; c) não domínio da tabuada; d) não domínio das técnicas para resolver expressões numéricas, por não compreenderem o uso correto dos parênteses, colchetes e chaves.

O segundo conjunto de dificuldades detectadas está relacionado:

às primeiras noções do conjunto Z , tendo os alunos apresentado: a) dificuldade em compreender o conjunto Z como composto por valores numéricos ordenados em direções opostas a partir de um ponto de referência (origem). Aqui se encontram as dificuldades relativas à comparação entre inteiros, tais como: a₁) comparar valores numéricos quando o maior tem menor módulo – exemplo $+4$ e -5 ; a₂) dificuldade em comparar valores numéricos quando os dois são negativos – exemplo -3 e -5 e a₃) dificuldade em comparar valores numéricos com o zero – exemplo 0 e -2 ; b) dificuldade em ordenar corretamente os inteiros negativos, como por exemplo $-1, -3, -9$ ou $-3, -5, -8$ ao invés de $-9, -3, -1$ e $-8, -5, -3$ respectivamente. (ROCHA NETO, 2010, p. 48)

O terceiro conjunto de dificuldades, segundo o autor, está relacionado à aplicação das regras de sinais que aparecem nos cálculos de expressões numéricas tais como: a) $-3 - 8 = -5$ (subtraem e conservam o sinal); b) $(-3) + (+4) = +7$ (somam porque o sinal é de mais); c) troca entre as regras de sinais da adição e da multiplicação e divisão – exemplos: 1) $(+2) \times (-7) \times (-1) = -14$ (número ímpar de fatores); 2) $(-5) \times (+4) \times (-4) \times (-1) = +80$ (número par de fatores); 3) $(-12) : (-3) = -4$ (sinais iguais conserva o sinal).

O quarto e último conjunto de dificuldades está relacionado:

às operações e procedimentos de solução de expressões numéricas. Constatamos as seguintes dificuldades: a) não domínio da sequência das operações a serem efetuadas: 1º as multiplicações e divisões e 2º as adições e subtrações. Exemplos: 1) $14:7+6:2=2+6:2=8:2=4$; 2) $(4:2+2)=4:4=1$. b) não domínio dos procedimentos de eliminar parênteses, colchetes e chaves. c) quando da eliminação dos parênteses ou colchetes ou chaves que eram antecidos por sinal de menos, os alunos invertem apenas o sinal do primeiro número – exemplo: $10-[1-(4:2+2)] = 10-[1-(2+2)] = 10-[1-4] = 10-1-4$. (ROCHA NETO, 2010, p. 49)

Rocha Neto (2010) conclui sua pesquisa destacando que as dificuldades do ensino dos números inteiros ocorrem devido a uma não adequação do trabalho à realidade vivenciada pelos alunos. A isso ele destaca que os professores, quando saem dos cursos de graduação, não estão preparados para trabalhar com os alunos no sentido de levá-los a pensar, abstrair, classificar, ordenar e raciocinar, procurando dar enfoques diferentes dos tradicionalmente utilizados. O pesquisador ainda enfatiza que, de modo geral, os alunos não possuem o hábito de pensar, exercitar e abstrair, pois procuram solucionar apenas os exercícios que não trazem dificuldades; cumprem apenas a obrigação escolar, resolvendo com pressa e sem vontade.

O autor ainda afirma que este fato acontece porque “a metodologia aplicada para o ensino de matemática não apresenta subsídios que os motivem a exercitarem e desenvolverem o raciocínio, portanto é de se esperar que eles não tenham interesse.” (ROCHA NETO, 2010, p. 53).

O trabalho de Rocha Neto (2010) foi bastante significativo para nossa pesquisa, principalmente no que se refere ao primeiro grupo de dificuldades de aprendizagem detectadas pelo autor, pois nos alertou que a sequência didática proposta em nossa pesquisa só teria êxito se os aprendizes tivessem um conhecimento sólido do conjunto dos números naturais e suas operações mais elementares.

A pesquisa de Alves (2012) procurou responder a seguinte questão: *Quais as principais competências e dificuldades evidenciadas por adultos e adolescentes escolarizados em relação à multiplicação e divisão de números inteiros e que aspectos específicos (modalidade de ensino, idade, atividade profissional) podem influenciar a compreensão e as estratégias mobilizadas pelos estudantes?* Para responder esse questionamento, primeiramente, foi realizado um levantamento em 06 livros didáticos do PNLD (Programa Nacional

do Livro Didático) 2011 e PNLD EJA 2011 com o propósito de observar os contextos nos quais são trabalhados os números inteiros relativos e com vistas à elaboração do instrumento de coleta de dados.

Em seguida, foram realizadas entrevistas clínicas com quatro estudantes que já possuíam escolarização nas operações de multiplicação e divisão de números relativos. Dois desses estudantes pertenciam à 3ª fase da EJA e os outros dois ao 7º ano. O instrumento utilizado foi constituído de 10 questões elaboradas a partir das situações mais comuns nos livros didáticos observados. A essa etapa, foi dado o nome de estudo piloto.

Com a realização do estudo piloto, o autor constatou que as situações, sugeridas pelos livros didáticos, não eram suficientes para a efetiva compreensão das operações de multiplicação e divisão de inteiros. Após tal constatação, foi realizada a 2ª etapa desta pesquisa, na qual o pesquisador elaborou sete questões para a realização das entrevistas clínicas com 32 participantes, sendo 16 da 4ª fase da Educação de Jovens e Adultos e 16 do 8º ano, que pertencem ao mesmo ciclo do ensino fundamental. Para elaboração das questões e para a análise dos resultados, o autor utilizou a Teoria dos Campos Conceituais, que é uma excelente ferramenta, para a compreensão do processo de conceitualização do real.

Ao analisar os livros didáticos, o pesquisador constatou que o ponto de partida utilizado em quase todas as obras, para explicar as operações de multiplicação e divisão com inteiros relativos, é o conceito de números simétricos ou opostos, fazendo a seguinte representação para o produto -5 por -3: “ $-(+5) \cdot (-3) = -[(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3)] \Rightarrow - (+5) \cdot (-3) = - [-15] \Rightarrow -(+5) \cdot (-3) = +15$ ” (ALVES, 2012, p. 99). O pesquisador também percebeu que os contextos utilizados por esses livros, para a conceitualização dos números inteiros e suas operações, eram: situações de débitos e créditos, de variação de temperaturas, de depressões e altitudes, em relação ao nível do mar e à localização de números inteiros, ou figuras correspondentes a estes, na reta numérica.

Após a realização das entrevistas com 32 estudantes já escolarizados sobre o conceito e as operações fundamentais (multiplicação e divisão) envolvendo números inteiros relativos, Alves (2012) concluiu que não foram identificadas diferenças importantes no desempenho dos grupos, o que quer dizer que, na multiplicação e divisão de números inteiros, as atividades

cotidianas e a modalidade de ensino não apresentaram influências significativas na compreensão destes conceitos por parte dos estudantes.

Rama (2005) teve como objetivo investigar a abordagem conferida aos números inteiros nos ensinos fundamental e médio, particularmente na forma de como é evidenciado o conceito da divisibilidade. Para tal, o autor analisou o tratamento dado ao tema em livros didáticos referendados pelos guias oficiais, tais como o Guia Nacional de Livros Didáticos de 5ª a 8ª série: Matemática, editado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), e o Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM): Matemática, ambos nas versões de 2005.

Para a escolha dos livros didáticos do ensino fundamental, Rama (2005) utilizou os seguintes critérios: o uso frequente e adequado de situações-problema; o hábito de se trabalhar com demonstrações; boa articulação entre os campos da matemática; boa articulação entre conteúdos novos e outros já abordados e as retomadas de um mesmo assunto em momentos distintos. Com esses referenciais, o autor foi levado às três seguintes coleções: (a) A conquista da matemática, a + nova (GIOVANNI; GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI 2005); (b) Matemática hoje é feita assim (LOPES BIGODE, 2005) e (c) Tudo é matemática (DANTE, 2005).

Em relação à divisibilidade o autor destaca que nas três coleções o tema é introduzido por meio de situações-problema que exploram a regularidade dos anos bissextos, permitindo que os aprendizes possam ser encaminhados, de forma mais significativa, aos critérios divisibilidade.

O conceito de número negativo é introduzido nas três coleções na 6ª série, com base em situações concretas (temperaturas, saldo bancário, saldo de gols, calendário). Os exemplos escolhidos permitem a elaboração de situações que dão significado à adição e à subtração de inteiros.

Rama (2005) destaca que para o ensino da multiplicação de números inteiros com sinais iguais negativos as coleções - A conquista da matemática, a + nova e Tudo é matemática – utilizam metodologias semelhantes, que consistem no preenchimento de tabelas com o resultado de multiplicações sucessivas, até que o aluno possa perceber a regularidade desses resultados, conforme o Quadro 3 abaixo:

Quadro 3 - Multiplicação de números inteiros

X	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2
-6					0	-6	-12

Fonte: Rama (2005, p. 86)

O autor observa que, na linha inferior, quando adicionamos 6 a um dos dois últimos valores, obtém-se o anterior. Com essa relação, as lacunas são preenchidas. Assim segue a conclusão: “a multiplicação de dois números inteiros negativos resulta em número inteiro positivo”.

Segundo Rama (2005) a coleção - Matemática hoje é feita assim - recorre ao “método chinês”, ou método “das barras coloridas”. Os alunos são informados que se trata de um processo que era usado por esse povo oriental há muitos séculos para calcular ganhos e perdas, sendo que barras pretas eram usadas para indicar créditos, e vermelhas para os débitos. Para efetuar cálculos, aplica-se a seguinte regra: uma barra preta e uma vermelha se anulam. Assim, cada conjunto de barras equivale a um número inteiro.

Dessa forma, o pesquisador destaca que existem quatro casos possíveis de multiplicação quando os sinais dos fatores variam. Cada um é apresentado com um exemplo, com números iguais em valor absoluto. Para calcular primeiro $(+2) \times (+3)$, e depois $(+2) \times (-3)$, a interpretação dada é que devemos formar dois grupos de três barras pretas no primeiro caso, e dois grupos de vermelhas no segundo; obtém-se dessa forma $(+6)$ e (-6) , respectivamente.

Quando as contas solicitadas são $(-2) \times (+3)$ e $(-2) \times (-3)$, o autor afirma que devemos retirar dois grupos, o segundo termo indicando novamente qual a cor desses grupos; mas como é impossível retirar barras de um conjunto vazio, o zero é representado, nos dois casos, por um conjunto de doze barras, metade de cada cor. Agora, as retiradas fornecem, é claro, (-6) e $(+6)$.

Em relação à abordagem do tema números inteiros nos livros de ensino médio, Rama (2005) constatou que, em geral, a retomada do assunto é feita de forma superficial. A descrição dos elementos do conjunto Z é acompanhada de algumas poucas propriedades. Um aspecto relevante como a unicidade da fatoração em primos é, normalmente, ignorado. A divisibilidade, quando mencionada, permanece restrita aos naturais. Logo o autor conclui que é raro

que sejam abordadas propriedades que reforçam as distinções entre a natureza dos inteiros, dos racionais e dos reais. Mesmo em coleções de bom nível a situação não é diferente. Parece ter se firmado uma tradição de que, embora os números inteiros sejam mencionados no início do primeiro livro do ensino médio, o assunto não deve ser estendido com maiores considerações.

Silva A. (2006), em sua dissertação de mestrado, fez um estudo sobre a discussão do papel da linguagem no ensino das operações de números inteiros na EJA, dando ênfase à visão da compreensão do diálogo estabelecido a partir do discurso dos professores e do livro didático. O objetivo principal deste trabalho foi discutir aspectos relativos a compreensão das operações de adição e multiplicação de números inteiros dentro da prática do professor da EJA, partindo dos seguintes questionamentos: Que ambiente o professor proporciona em sala de aula? Quais materiais o professor escolhe e usa? Como o professor e materiais, utilizados em sala, cooperam para que a interlocução entre ele e seus alunos a respeito das regras de sinais ocorra?

O autor parte do princípio que o diálogo claro desenvolvido em sala de aula entre professor e aluno possa contribuir para o entendimento das operações de adição e multiplicação, porém essa hipótese só será válida se ambos os interlocutores cooperarem entre si.

Em relação às operações com os números inteiros, ele diz que o diálogo claro só acontecerá se o aluno também for autor da construção do conhecimento das regras de sinais. “Sendo assim, saberá o que está sendo dito pelo professor e poderá se manifestar sem intimidação quando necessário, pois o assunto em questão é também de conhecimento seu” (SILVA A., 2006, p. 17).

A metodologia consistia em analisar os discursos de doze professores que atuavam na EJA, tanto a nível fundamental quanto médio de escolas públicas municipais e estaduais em Itaquaquecetuba/SP, e o discurso dos autores dos livros didáticos usados por estes professores. O discurso dos professores foi coletado por meio de dois questionários, com o objetivo de mapear o perfil dos docentes, realizar levantamento do saber profissional e o tratamento que davam ao ensino das operações de adição e multiplicação de números inteiros, assim como, fazer o levantamento dos tipos de materiais em sala de aula.

O pesquisador constatou que o material mais utilizado pelos docentes para o ensino de números inteiros ainda era o livro didático. Os livros mais usados por eles foram os apresentados no Quadro 4, os quais foram analisados pelo pesquisador no intuito de verificar como os autores introduzem as regras de sinais, na adição e multiplicação no conjunto dos números inteiros.

Quadro 4 - Formas de introdução da adição de inteiros

Tipo de introdução	Livro de origem	Regras sistematizadas
Introdução da regra, diretamente escrita, em seguida, os exemplos e exercícios aritméticos	Praticando matemática (1989)	a) Adição de dois números de sinais iguais: “A soma de dois números positivos é um número positivo” b) Adição de números com sinais diferentes: “a soma de dois números inteiros de sinais diferentes é obtida subtraindo-se os valores absolutos, dando-se o sinal do número que tiver maior valor absoluto”
Introdução de um problema apresentando-o geometricamente e aritmeticamente. (utilização da reta numérica)	A conquista da matemática (1998)	- Usa um exemplo para ilustrar a adição entre dois positivos e apresenta a regra para números de sinais diferentes. - “Quando dois números têm sinais diferentes, o sinal do resultado corresponde ao sinal do número que está mais distante da origem. O módulo dos resultados é igual a diferença entre os módulos das parcelas”
Introdução de perda e ganho, representada aritmeticamente	Matemática hoje é feito assim (2000)	Trabalha com exemplos sem a preocupação de sistematizar as regras.
	Tempo de matemática (2000)	a) Adição de números positivos: juntando quantidades positivas, vemos que: “A soma de dois números positivos é um número positivo” b) Adição de números negativos: juntando quantidades negativas, vemos que: “A soma de dois números negativos é um número negativo”
	EJA – Ensino fundamental de matemática (apostila) (2004)	- “A soma de dois números inteiros positivos é igual ao valor positivo da soma dos módulos desses números”. - “A soma de dois números inteiros negativos é igual ao

		valor da soma dos módulos desses números”. - “A soma de dois números inteiros de sinais diferentes é igual a diferença dos módulos e o sinal é o da parcela de maior módulo”
Introdução aritmética de uma situação e a sua representação	Matemática (1997)	1º caso) Adição de números de mesmo sinal: os exemplos nos sugerem a seguinte regra: “a soma de dois números inteiros de mesmo sinal é obtida adicionando-se seus valores absolutos e conservando-se o sinal comum. 2º caso) Adição de números de sinais diferentes: os exemplos nos sugerem a seguinte regra: “a soma de dois números inteiros de sinais diferentes é obtida subtraindo-se seus valores absolutos, dando-se ao resultado o sinal do número de maior valor absoluto”

Fonte: Silva A. (2006, p. 75-89)

Na multiplicação, o pesquisador observou que quase todos os autores utilizavam a ideia de soma de parcelas iguais para introduzir a multiplicação com inteiros, conforme quadro 5.

Quadro 5 - Formas de introdução da multiplicação

Tipo de introdução	Livro de origem	Regras sistematizadas a partir de exemplos
Ideia de que a multiplicação é uma soma de parcelas iguais	Matemática (1997)	- Multiplicando um número negativo por um número positivo o resultado foi um número negativo: $(-).(+)= -$ - Multiplicando dois números negativos e o resultado foi um número positivo: $(-).(-)= +$
	Tempo de matemática (2000)	$(n^{\circ} \text{ positivo}) \cdot (n^{\circ} \text{ positivo}) = n^{\circ} \text{ positivo}$ $(n^{\circ} \text{ negativo}) \cdot (n^{\circ} \text{ negativo}) = n^{\circ} \text{ positivo}$ $(n^{\circ} \text{ positivo}) \cdot (n^{\circ} \text{ negativo}) = n^{\circ} \text{ negativo}$ $(n^{\circ} \text{ negativo}) \cdot (n^{\circ} \text{ positivo}) = n^{\circ} \text{ negativo}$
	Praticando matemática (1989)	Não foi apresentada pelo autor
	A conquista da matemática (1998)	Quando um fator é um número positivo e o outro é um número inteiro negativo temos: $(+6).(-4)=6.(-4)= (-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4)=-24$. Considere $(-6).(+4)= (+6).(-4)= -24$. Então: $(+6).(-4)= -24$ e $(-6).(+4)= -24$. “A multiplicação de um número inteiro positivo por um número inteiro negativo, em qualquer ordem, resultada em um número inteiro negativo”
Ideia das barras coloridas	Matemática hoje é feito assim (2000)	1º caso) Multiplicação de dois números positivos $(+2).(+3)$ – O multiplicador é positivo. Devemos, portanto, acrescentar dois grupos de 3 barras pretas, o resultado é 6 barras pretas, ou seja, $(+2).(+3) = +6$.

		2º caso) Multiplicação de um número inteiro positivo por um negativo $(+2).(-3)$ – O multiplicador $(+2)$ é positivo e o multiplicando (-3) é negativo. Devemos, portanto, acrescentar dois grupos de barras vermelhas, o resultado é 6 barras vermelhas, ou seja, $(+2).(-3) = -6$. 3º caso) Multiplicação de um número negativo por um número positivo $(-2).(+3)$. Como aqui (-2) é negativo, devemos tirar dois grupos de 3 barras pretas.
--	--	--

Fonte: Silva A. (2006, p. 95-100)

O autor conclui com sua pesquisa que as metáforas de “perda e ganho”, “temperaturas” e “saldo bancário”; usadas pelos livros didáticos quando se referiam à adição e a multiplicação dos inteiros funcionam bem para algumas situações, porém quando se trata de casos do tipo $(+2) - (+2)$ ou $(+2) - (-2)$, elas já não dão conta, existe um processo multiplicativo implícito nestas operações que estes professores e autores dos livros didáticos analisados parecem ter ignorado ou transgredido propositalmente. Assim o pesquisador destaca que a utilização de outro material didático, como a calculadora, poderia auxiliar o professor no processo de ensino e aprendizagem para introduzir um novo conjunto numérico, visto que, no conjunto dos naturais os alunos encontravam solução para a subtração e agora passariam a encontrar na calculadora um resultado surpreendente para o que antes acreditavam não ser possível.

As pesquisas de Alves (2012), Rama (2005) e Silva A. (2006) nos revelou uma informação importante para a construção de nossa sequência didática: o método mais conveniente para explicar a multiplicação de dois números inteiros negativos seria através de atividades que pudessem instigar os alunos a descobrirem regularidades, como por exemplo, a percepção de um padrão existente em uma sequência de números, os quais surgem do resultado de multiplicações sucessivas, conforme demonstrado no Quadro 3. Este artifício possibilitaria que os aprendizes não precisassem dispor, desnecessariamente, de energia para fazer manipulações aritméticas envolvendo números opostos ou simétricos.

Salgado (2011) em sua dissertação de mestrado apresenta os resultados de um estudo que teve como objetivo investigar se o ensino de números inteiros por meio de atividade com calculadora e jogos proporcionaria uma aprendizagem significativamente favorável aos alunos do 7º ano do ensino

fundamental. Foi adotado como aporte teórico a teoria das situações didáticas de Guy Brousseau, a fim de discutir a relação entre os conteúdos de ensino e os métodos para o ensino e, como metodologia, a engenharia didática, estando às seções deste estudo organizadas segundo as etapas dessa metodologia.

Nas análises preliminares a autora faz uma breve análise nos aspectos históricos dos números inteiros, com o objetivo de entender que estes momentos podem explicar alguns dos obstáculos de aprendizagem que são manifestados pelos alunos. Ainda nesta seção a pesquisadora analisou estudos sobre o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros nas seguintes categorias: abordagem; compreensão e construção do conhecimento que livros didáticos e professores apresentam sobre este conteúdo; as dificuldades e erros dos alunos no processo de ensino-aprendizagem e o uso de jogos e tecnologias no ensino.

Ao analisar pesquisas anteriores Salgado (2011) conclui que os professores demonstravam certa carência no que se refere a suas formações para atuarem frente ao conteúdo de números inteiros e que essa carência poderia estar sendo agravada em razão da fonte de pesquisa utilizada por esses educadores. De acordo com a pesquisadora, os livros didáticos ainda são a principal fonte de preparação teórica e metodológica usada pelos docentes para o ensino deste conteúdo, entretanto, os estudos revelaram que muitos desses livros não dão conta desta preparação já que apresentam abordagens simplistas, ambíguas e equivocadas para a formação e compreensão dos conceitos necessários para se ensinar este conteúdo.

Em relação às dificuldades e erros dos alunos no ensino-aprendizagem de números inteiros a pesquisadora constatou a presença de obstáculos didáticos e epistemológicos, os quais se revelam, especialmente, quando as atividades propostas sugerem a subtração de um número maior por um menor.

A sequência didática desenvolvida em sala de aula era composta de 17 sessões contendo 24 (vinte e quatro) atividades e 05 (cinco) testes de diagnóstico. Tais atividades e testes foram concebidos pela autora com a expectativa de que, a medida que o aluno fosse utilizando a calculadora, adquirisse os conhecimentos acerca da construção dos algoritmos das operações básicas com números inteiros. Os jogos eram utilizados com o

objetivo de proporcionar aos alunos a consolidação da apropriação dos referidos algoritmos das operações.

Após a realização da experimentação Salgado (2011) conclui que na comparação entre os resultados do pré-teste e pós-teste geral, contendo as mesmas questões e aplicados aos sujeitos da pesquisa, houve o aumento considerável no percentual de acertos. Tais resultados permitiram concluir que a sequência de ensino favoreceu o aprendizado e contribuiu para que habilidades úteis ao desenvolvimento dos alunos fossem despertadas e/ou aprimoradas, implicando, conseqüentemente, no melhor desempenho dos alunos do 7º ano.

Hillesheim (2013) em sua dissertação de mestrado propôs responder a seguinte questão: De que forma o “princípio de extensão”⁴ pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da multiplicação de números negativos?

Motivada por este questionamento, a pesquisadora elege como objetivo geral de seu trabalho analisar uma sequência de ensino em que as operações de adição, multiplicação e subtração com números inteiros relativos serão abordadas por meio do “princípio de extensão”, a fim de verificar as suas possíveis contribuições no processo de ensino e aprendizagem.

Visando atender o objetivo de seu trabalho, a autora buscou, na história da matemática, os acontecimentos que consolidaram os números negativos. Foi feito também uma análise de como o ensino das operações de adição, multiplicação e subtração com números inteiros são apresentadas nos livros didáticos da época.

Hillesheim (2013) utilizou como embasamento teórico para construir a sequência de ensino o “princípio de extensão” defendido por Caraça (1963), o qual defende o ensino da adição dos números inteiros como uma extensão dos naturais e a regra de sinais para a multiplicação como a única que preserva a distributividade à esquerda e a direita. A autora também utilizou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a fim de analisar como se apresentam

⁴ Segundo Caraça (1963) “princípio de extensão” é a capacidade que o homem civilizado tem para fazer generalizações e abstrações.

os casos de congruência semântica⁵ no processo de ensino e aprendizagem dos inteiros relativos.

A pesquisa da autora, também, apresenta uma análise de como os livros didáticos de matemática, do 7º ano, abordam os números inteiros, principalmente, de como eles apresentam a regra de sinais para a multiplicação desses números. Essa análise constatou que 60% dos livros analisados utilizam o modelo aritmético para abordar a adição de números inteiros. Os autores se basearam em situações problemas que relacionaram o número positivo a ideia de ganho/lucro/crédito e a ideia de número negativo atrelada a perda/débito/prejuízo. A operação de adição foi apresentada geometricamente em 40% dos livros analisados, por meio de situações em que realizaram os deslocamentos sobre a reta numérica, onde os números positivos representavam movimentações para a direita e os números negativos para a esquerda. Em nenhum dos livros analisados, a operação de adição foi apresentada utilizando o modelo algébrico.

Com relação à apresentação da operação de multiplicação todos os livros utilizaram o modelo aritmético. Alguns livros, cerca de 50%, utilizaram como explicação para a multiplicação de números com sinais diferentes a soma de parcelas iguais e, para o caso de dois números negativos a ideia da sequência numérica, onde a multiplicação de dois números negativos se justifica para atender o padrão da sequência formada.

Hillesheim (2013) conclui em sua pesquisa que o ensino da adição de números relativos, conduzido através de deslocamentos sobre a reta numérica, proporcionou aos alunos analisados uma aprendizagem desprendida de regras pré-estabelecidas. Assim, os alunos por meio das movimentações, realizadas na reta numérica, foram capazes de sinalizar a formação de generalizações a respeito das regras de sinais para a adição de números inteiros. Essa metodologia possibilitou que a maioria dos alunos não associasse a ideia de ganho a um número positivo e a ideia de uma perda a um número negativo. Esse fato contribuiu para que os alunos aceitassem que o produto de dois

⁵ Segundo Duval (2004) a congruência semântica ocorre quando a passagem de uma representação semiótica a outra atende três condições: a) correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem; b) Univocidade “semântica” terminal, em que para cada unidade significante elementar de partida, corresponde a uma só unidade significante elementar no registro de chegada; c) A ordem dentro da organização das unidades significativas de partida é mantida na representação de chegada.

números negativos precisa ser positivo para atender as condições internas da própria matemática.

Silva D. (2017) propôs analisar o processo de ensino-aprendizagem e avaliar a eficiência do jogo matemático “Compra Monte” como recurso de intervenção pedagógica, em relação ao conteúdo dos números relativos, em três cenários distintos de turmas regulares do Ensino Fundamental. O autor defende que a proposta de usar o jogo matemático parte da necessidade de romper com o ensino tradicional que ainda é praticado nas escolas brasileiras, pois esse tipo de prática não consegue alavancar resultados satisfatórios.

A abordagem metodológica adotada tem como referencial teórico a pesquisa-ação, partido do pressuposto básico que o conhecimento pode ser assimilado e reelaborado, num processo contínuo de reflexão-ação-reflexão.

A pesquisa foi realizada com turmas regulares de 5º, 7º e 8º anos do Ensino Fundamental I e II, realizada numa escola pública municipal na cidade de Taubaté – SP, objetivando explorar toda peculiaridade e heterogeneidade presente nesse tipo de instituição. O jogo na perspectiva do conteúdo curricular dos números inteiros foi analisado em três aspectos distintos: preconização de conteúdos (5º ano), parte da grade curricular (7º ano) e revisão de habilidades não assimiladas ou recuperação (8º ano). Na Tabela 1 está esquematizado os distintos cenários analisados, o nível escolar, a quantidade de alunos e os objetivos traçados de acordo com a metodologia da pesquisa-ação adotada.

Tabela 1 - Os cenários de aplicação do jogo Compra Monte

Cenário	Ano/Ensino Fundamental (EF)	Quantidade de alunos	Objetivos
C1	5º ano EF	25	Preconização de conteúdos: Oferecer acesso a conteúdos mais elevados contrapondo a ideia do ensino engessado e procedimental.
C2	7º ano EF	29	Ensino da grade curricular diferenciado do material didático ofertado: constante no currículo e planejamento do professor.
C3	8º ano EF	22	Revisão de conteúdos: desenvolver de modo diferenciado habilidades não desenvolvidas.

Fonte: Silva D. (2017, p. 66)

Inicialmente o pesquisador aplicou um pré-teste, buscando avaliar questões sobre a utilização dos jogos pelos alunos em seu cotidiano, o pré-conhecimento dos alunos em relação aos números relativos, mais

especificamente os números negativos e por fim o nível inicial de conhecimento deles em relação aos números relativos. A fim de contrapor esses resultados e de uma forma comparativa para verificar se houve ou não aprendizagem pós-aplicação do jogo Compra Monte, foi elaborado um pós-teste com intuito de verificar as hipóteses levantadas.

Após a análise dos dados o pesquisador conclui que o jogo faz parte do contexto diário dos adolescentes, além do que há uma percepção por parte deles de que jogos auxiliam na questão da aprendizagem dos conteúdos escolares.

Finalizado a aplicação do pré-teste o autor realiza a intervenção com o material lúdico, no caso o jogo Compra Monte, e posteriormente aplica um pós-teste buscando saber o nível de ensino alcançado por meio da intervenção realizada.

Na 1ª questão do pós-teste os resultados apontam que no C1, 88% dos alunos acertaram a questão, ou seja, um aumento de 80% comparativo a mesma avaliação aplicada inicialmente. No C2, o percentual de acertos nessa etapa foi de 82,8%, registrando um aumento de aproximadamente 79,4% em relação à etapa inicial. No comparativo do C3, onde os alunos já haviam sido escolarizados, ainda que tradicionalmente, em relação aos números inteiros negativos, mostra que 95,4% dos alunos, aproximadamente, acertaram a questão, em números absolutos, somente um aluno errou a questão, diferentemente dos resultados do pré-teste onde nenhum aluno acertou a questão nesse cenário.

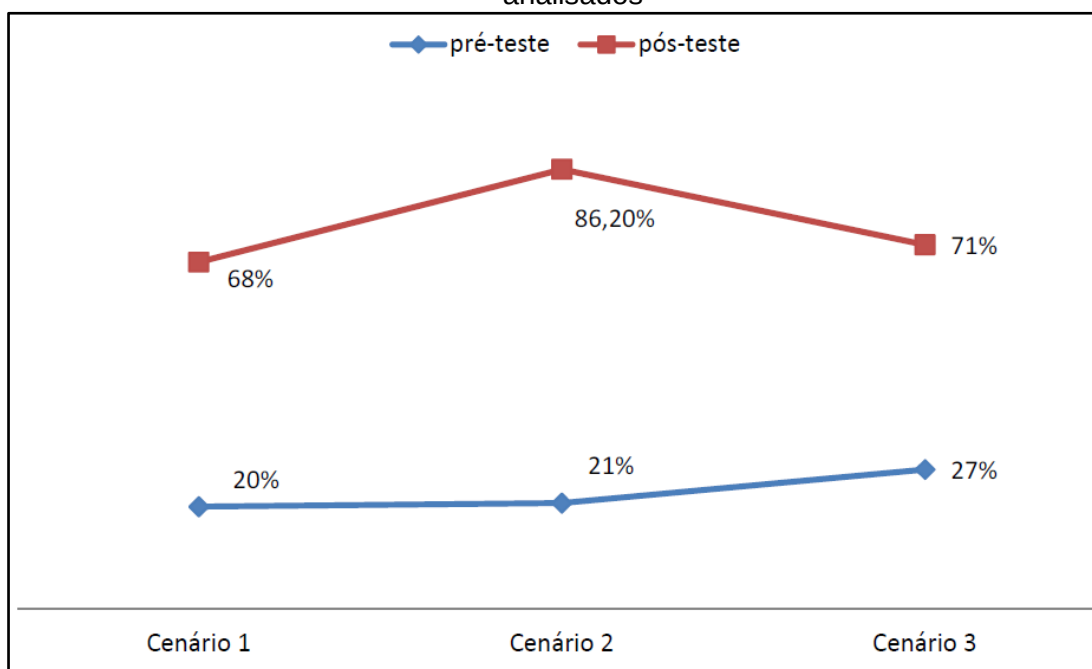
Na 2ª questão, letra a, do pós-teste os resultados foram melhores em todos os três cenários. No C1, 84% dos alunos acertam a questão, resultando numa melhora de 44%. No C2, 86,3% dos alunos acertaram a questão, representando uma evolução de 24,1% aproximadamente. Os resultados no C3 apresentam o mesmo percentual de acertos em relação ao pré-teste analisado.

Na 2ª questão, letra b, no C1, 92% dos alunos acertaram a questão no pós-teste, sendo que inicialmente somente 20% dos alunos responderam corretamente, um avanço de 72% nesse cenário. No C2, 82,8% dos alunos acertaram a questão nessa fase, apresentando um avanço de aproximadamente 62,1% em comparação com o pré-teste. Finalmente, no C3,

100% dos alunos acertaram essa questão, sendo que no comparativo com o teste inicial o avanço foi de aproximadamente 52,4%.

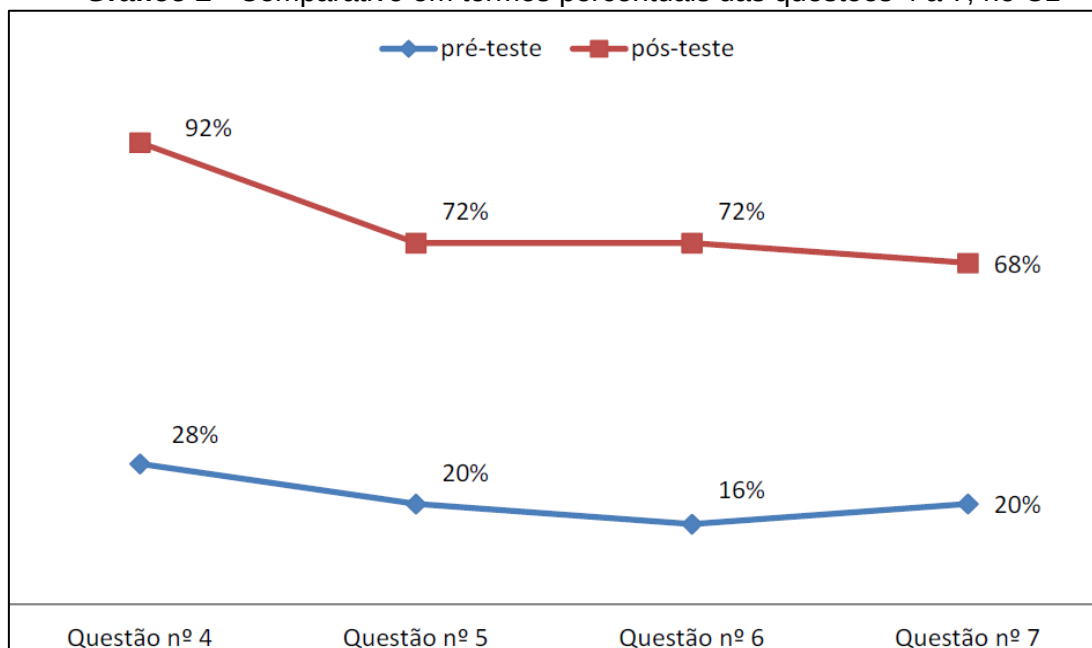
Na 3ª questão do pós-teste, novamente o número de acertos foi superior ao do pré-teste, conforme Gráfico 1 abaixo:

Gráfico 1 - Comparativo em valores percentuais da questão nº 3 nos três cenários analisados

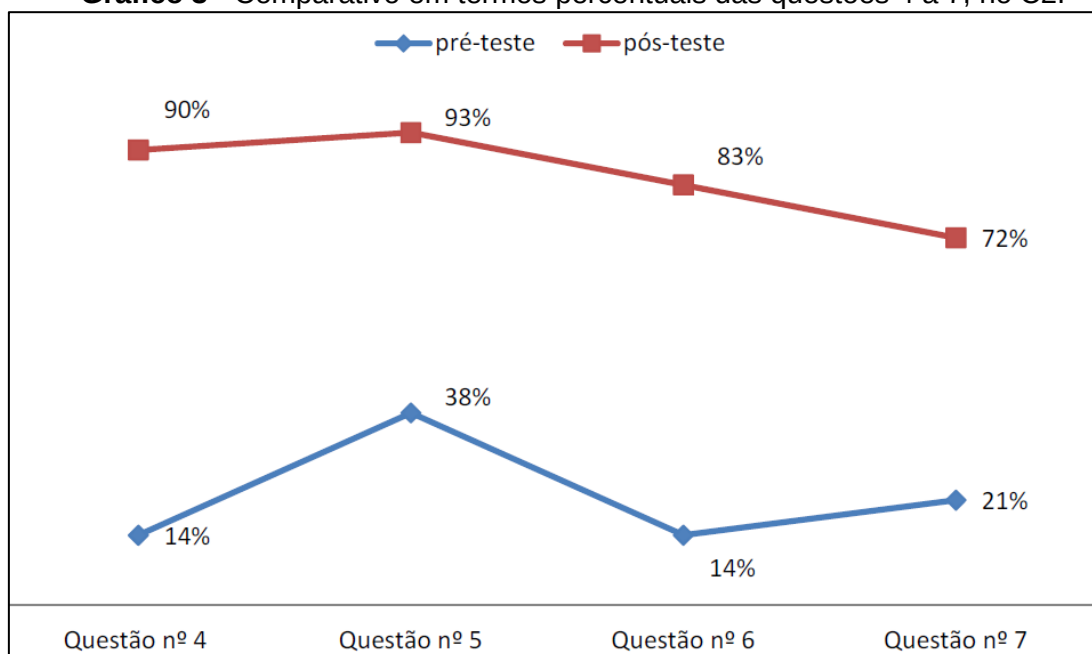


Fonte: Silva D. (2017, p. 93)

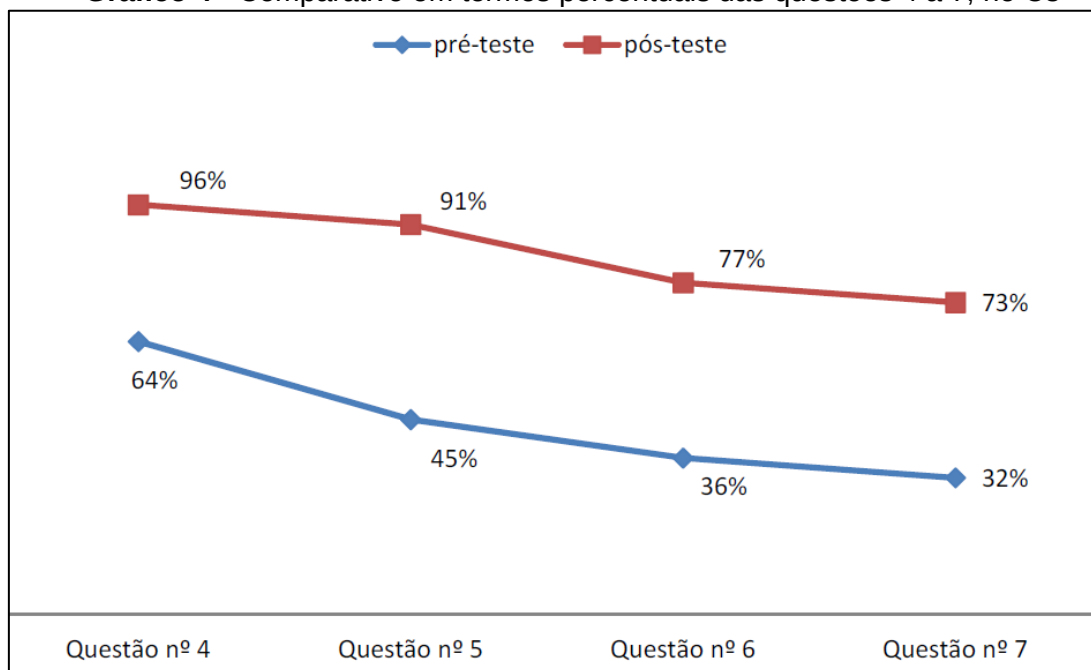
Nas questões de 4 a 7, o resultado do pós-teste apontou para uma evolução significativa em relação ao número de acertos por questão, como também no procedimental de cada aluno para resolver as situações propostas, conforme se vê nos gráficos 2, 3 e 4:

Gráfico 2 - Comparativo em termos percentuais das questões 4 a 7, no C1

Fonte: Silva D. (2017, p. 95)

Gráfico 3 - Comparativo em termos percentuais das questões 4 a 7, no C2.

Fonte: Silva D. (2017, p. 97)

Gráfico 4 - Comparativo em termos percentuais das questões 4 a 7, no C3

Fonte: Silva D. (2017, p. 100)

A oitava e nona questão do pós-teste não constavam no pré-teste aferido inicialmente, pois tratam de questões específicas do jogo Compra Monte. Nestas questões o autor pretendeu avaliar o potencial dos alunos em descrever jogadas, de forma escrita ou ilustrativa, possíveis em situação real de partida, em dois aspectos: uma situação aberta para compra e outra direcionada, com cartas pré-estipuladas. Na questão 8 somente 3,9% dos alunos não conseguiram descrever nenhuma jogada, demonstrando dificuldade ou nenhuma compreensão sobre as regras do jogo.

Na questão 9, com cartas pré-definidas na mesa e na mão do jogador, é solicitado ao aluno que demonstre duas situações de compras possíveis, desde que siga as regras pré-estipuladas pelo jogo, sendo que apenas 6,6% dos alunos avaliados não conseguiram demonstrar nenhuma situação.

Na décima e última questão o pesquisador perguntou aos alunos sobre o reconhecimento de situações cotidianas onde os números negativos sejam reconhecidos por eles e constatou que somente 3,9% dos alunos não conseguiram, após a aplicação dos jogos e a consequente escolarização em relação aos números negativos, identificar nenhuma situação cotidiana que envolvesse esse tipo de número.

Dessa forma, considerando o referencial teórico adotado nessa pesquisa, assim como a abordagem metodológica trilhada e análise quali-quantitativa por meio do pré-teste e pós-teste, Silva D. (2017) concluí que o jogo Compra Monte favorece a aprendizagem dos números inteiros negativos, tanto no ano/série adequado como também possibilita que tal assunto seja discutido em séries inferiores, desde que siga um planejamento sistemático e sofra as adaptações necessárias.

As dissertações de Salgado (2011), Hillesheim (2013) e Silva D. (2017) nos influenciou a tomar a seguinte decisão: a atividade inicial que comporia a sequência didática proposta em nossa pesquisa deveria ser o estopim para que os aprendizes permanecessem interessados durante todo o processo de ensino e aprendizagem, seja pela utilização de alguma tecnologia ou jogo já conhecido por eles, seja pela utilização de uma situação-problema que fizesse parte do contexto diário desses alunos.

Dessa forma, optamos por criar uma situação didática que reportasse os aprendizes a tomar decisões sobre sua vida financeira, pois, como estávamos lidando com uma turma da terceira etapa da educação de jovens e adultos, somado a isso o fato da maior parte deles já estarem no mercado de trabalho, a utilização deste tipo de contexto tornaria o aprendizado mais significativo para esses alunos.

Rosa; Figueiredo e Lisboa (2013) apresentaram um estudo histórico-epistemológico da multiplicação de números inteiros negativos, os obstáculos para a consolidação da noção desses números, além da exploração de estratégias para a facilitação do ensino da multiplicação. Neste trabalho os autores destacam a demonstração que comprova que a multiplicação de dois números inteiros negativos é positivo, baseados no trabalho do matemático Herman Hankel (1839-1873). Segundo os autores Hankel, em 1867, propôs uma forma de superar esse obstáculo epistemológico ao mostrar que a explicação para a regra dos sinais " $(-) \cdot (-) = (+)$ " não poderia ser procurada na natureza, e que havia a necessidade de ser demonstrada formalmente, ou seja, justificada dentro dos princípios da consistência interna da Matemática.

Rosa; Figueiredo e Lisboa (2013) baseados neste estudo epistemológico dos números negativos, mais especificamente da multiplicação de dois números negativos, propõem estratégias de intervenção, pois o obstáculo

epistemológico apontado, envolvendo $(-)\cdot(-)=(+)$, materializa-se em sala de aula como obstáculo didático. Os autores concluem sua pesquisa afirmando que:

O uso de estratégias ou artifícios simples e compreensíveis que ilustrem as regras de sinais contribui com a assimilação do conceito e dão significado a ele, sendo superado este obstáculo epistemológico-didático que costumeiramente impede a progressão dos alunos no aprofundamento na disciplina. (ROSA; FIGUEIREDO e LISBOA, 2013, p. 27)

Diante do exposto, foi possível perceber com esta revisão de estudos, que os pesquisadores estão cada vez mais preocupados com o processo de ensino e aprendizagem da Matemática na educação básica. Esta preocupação se materializa, principalmente, em entender e diagnosticar as dificuldades enfrentadas pelos aprendizes em todo esse processo didático, em que o aluno é considerado como ator principal na reconstrução do conhecimento matemático.

Esta análise foi de extrema importância para que nós pudéssemos identificar diferentes metodologias didáticas para o ensino dos números inteiros, mais especificamente das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, permitindo que fosse feito um mapeamento de diferentes formas de ensinar este objeto matemático.

O desenvolvimento desta revisão de estudo, também, possibilitou identificar um panorama geral do ensino dos números inteiros, chegando à conclusão de que o ensino deste conteúdo se torna mais significativo ao discente através de metodologias que possam desafiar os aprendizes a descobrir, mesmo que empiricamente, o que se pretende ensinar, a fim de que o docente tenha a preocupação de apenas lapidar aquele conhecimento novo, reescrevendo-o com o rigor matemático necessário.

Desse modo, acreditamos que todo o conhecimento adquirido nesta pesquisa possibilitará a criação de uma metodologia própria para o ensino dos números inteiros relativos, mais especificamente as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Com vista a ampliar o arcabouço de informações sobre o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros, apresentamos, a seguir, um diagnóstico feito com os alunos egressos do 7º ano do ensino fundamental, a

fim de detectar como está sendo feito o ensino destes números em escolas da rede pública estadual de ensino do Pará.

2.2 DIAGNÓSTICO DOS ALUNOS EGRESSOS

Este diagnóstico foi desenvolvido na escola Pública Estadual “Esperança e Fé”⁶, localizada no município de Belém do Pará no bairro do Tapanã, aos aprendizes do 8º ano do ensino fundamental, pois, segundo a BNCC (BRASIL, 2017), estes conhecimentos são aprendidos no 7º ano. Para isso aplicamos um questionário, inicialmente destinado a 100 alunos, porém devido a algumas dificuldades, apenas 80 alunos foram submetidos a pesquisa. O referido questionário possuía 18 perguntas (Apêndice A), a partir dos seguintes eixos: eixo 1 - dados pessoais, escolares e familiares; eixo 2 - metodologias de ensino dos professores; eixo 3 - formas de avaliação; eixo 4 – quadro de dificuldades referente à aprendizagem de 16 conteúdos de números inteiros ensinados no 7º ano do ensino fundamental, são eles: ideia de números inteiros positivos e negativos; representação dos números inteiros positivos e negativos na reta; módulo de um número inteiro; ideia de números inteiros simétricos; comparação de números inteiros positivos e negativos; adição de números inteiros com o mesmo sinal; adição de números inteiros com sinais diferentes; adição de simétricos; subtração de números inteiros com o mesmo sinal; subtração de números inteiros com sinais diferentes; subtração de números inteiros simétricos; multiplicação de dois números inteiros com sinais diferentes; multiplicação de dois números inteiros com sinais iguais; divisão de dois números inteiros com sinais diferentes; divisão de dois números inteiros com sinais iguais; potenciação com base de número inteiro e expoente com número Natural. E por fim, um teste com 10 questões (Apêndice B) confeccionadas de acordo com que preconiza a BNCC em relação às habilidades relacionadas ao objeto de conhecimento números inteiros (Quadro 6).

⁶ Nome fictício dado ao estabelecimento de ensino, a fim de preservar identidade da escola e, consequentemente, dos discentes.

Quadro 6 - Ensino de números inteiros na BNCC

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADE
Números	Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações	Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração. Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

Fonte: Brasil (2017).

A fim de avaliar as habilidades desenvolvidas pelos alunos na aprendizagem de números inteiros, construímos o Quadro 7, que destaca as habilidades exigidas para a resolução de cada questão, tendo como referência as habilidades exigidas na BNCC.

Quadro 7 - Habilidades exigidas para a resolução das questões

Questão	Habilidades	
1 ^a	Item (a) e item (b)	H1- Utilizar corretamente os algoritmos para adição de números inteiros com sinais iguais
	Item (c) e item (d)	H2- Utilizar corretamente os algoritmos para adição de números inteiros com sinais diferentes
2 ^a	Item (a) e item (b)	H3- Utilizar os algoritmos para a multiplicação entre dois números inteiros de sinais iguais
	Item (c) e item (d)	H4- Utilizar os algoritmos para a multiplicação entre dois números inteiros de diferentes
	Item (e) e item (f)	H5- Utilizar os algoritmos para a multiplicação de números inteiros por zero
3 ^a	Item (a) e item (b)	H6- Utilizar os algoritmos para a divisão entre dois números inteiros de sinais iguais
	Item (c) e item (d)	H7- Utilizar os algoritmos para a divisão entre dois números inteiros de sinais diferentes

4 ^a	<i>Item (a) e item (c)</i>	H8- Utilizar os algoritmos para a operação de Potenciação com base de número inteiro positivo e expoente de número Natural
	<i>Item (b) e Item (d)</i>	H9- Utilizar os algoritmos para a operação de Potenciação com base de número inteiro negativo e expoente de número Natural
	<i>Item (e) e item (f)</i>	H10- Utilizar os algoritmos para a operação de Potenciação com base de número inteiro e expoente zero
5 ^a		H11- Associar os números inteiros em situações de movimentação bancária que envolvam adição e subtração.
6 ^a		H12- Resolver problemas que envolvam operações de adição e subtração de números inteiros incluindo a associação a pontos da reta numérica.
7 ^a		H13- Associar os números inteiros em situações de movimentação bancária que envolvam adição e subtração.
8 ^a		H14- Resolver problemas que envolvam operações de adição e subtração de números inteiros relacionadas a espaço e tempo.
9 ^a		H15- Associar as operações de soma e subtração de números inteiros em diferentes contextos, incluindo o contexto histórico.
10 ^a		H16- Resolver problemas que envolvam operações de multiplicação e divisão de números inteiros.

Fonte: Autor 2018

Os aprendizes foram informados que a pesquisa era apenas para estudo e, conseqüentemente, a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da disciplina Matemática na educação básica, e para registrar o consentimento, gestores, pais ou responsáveis pelos discentes, assinaram um termo de consentimento que, além de orientá-los sobre como a mesma seria desenvolvida, assegura o sigilo dos participantes (anexos A e B). Para a

tabulação dos dados obtidos, utilizou-se uma das ferramentas do Google Docs - Google Formulário - em conjunto com o programa Microsoft Excel.

A análise estatística constatou que 41% dos alunos eram do sexo masculino e 59% do sexo feminino. Observou-se que 92% dos alunos possuíam idade de entre 12 e 14 anos e apenas 8% com idades acima do limite estabelecido para cursar o ensino fundamental definido pela resolução nº 3/2005 do Conselho Nacional de Educação (BRASIL, 2005). Quando questionados sobre a reprovação em disciplinas, 74% dos aprendizes disseram nunca terem ficado em dependência, e o que mais chamou atenção foi a porcentagem de 14% ter ficado em Ciências e apenas 1% em Matemática, o restante afirmaram ter ficado em outras disciplinas como História, Estudos Amazônicos e Língua Portuguesa. Em relação à afinidade com a disciplina, 84% disseram gostar um pouco de Matemática, 9% disseram adorar a disciplina, e o restante afirmaram que detestam ou suportam a Matemática. É importante ressaltar que 45% dos alunos responderam que não recebem ajuda de nenhum familiar para estudar Matemática, seguido da porcentagem de 25% ter ajuda de algum colega de classe, o quantitativo restante afirmou ter a ajuda de algum familiar.

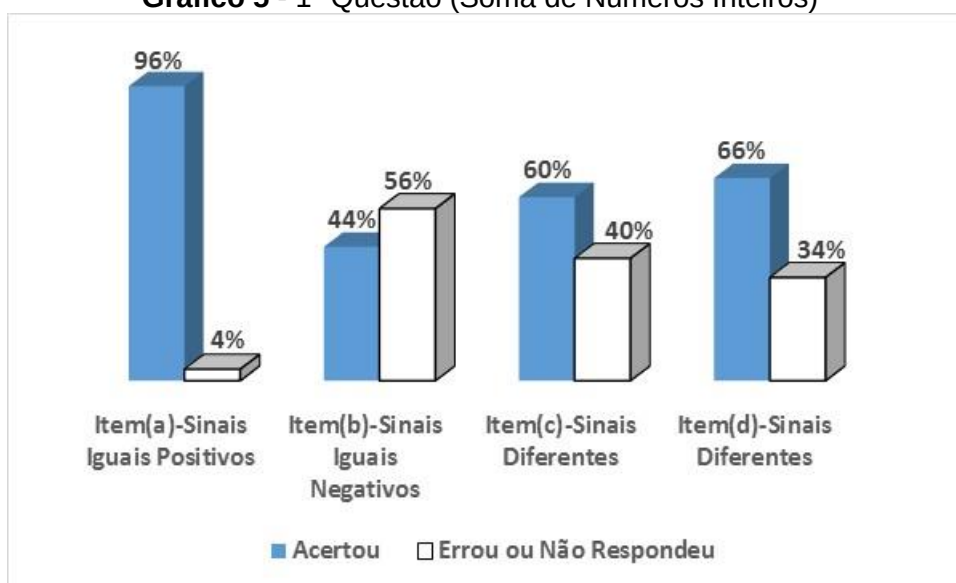
Quando foi perguntado de que forma os números inteiros eram ensinados em sala de aula, 71% dos aprendizes responderam que os professores iniciavam pela definição seguida de exemplos e exercícios, o que vai de encontro com o que preconiza os PCN, os quais sugerem que “Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática.” (BRASIL, 1998, p. 39-40). Quando foi questionado como o conteúdo de números inteiros era praticado, 91% dos aprendizes disseram que o professor utiliza lista de exercícios para serem resolvidos. No entanto, apesar da lista de exercícios ser um recurso importante para praticar os conteúdos da Matemática, os jogos possibilitam um aprendizado mais prazeroso aos alunos conforme relata Salgado (2011) quando afirma que o jogo é um recurso excelente ao aprendizado dos números inteiros, principalmente, para a prática e fixação das regras das operações com esses números.

Em relação à avaliação de aprendizagem foi constatado que 56% dos entrevistados afirmaram que o professor utiliza provas, testes e simulados como método de avaliação, ou seja, o docente priorizou mais a avaliação quantitativa que a qualitativa, sobre isso Libâneo (1990, p. 199) afirma que “o entendimento correto da avaliação consiste em considerar a relação mútua entre os aspectos quantitativos e os qualitativos”.

Ao serem questionados se já tinham estudado os conteúdos dispostos no quadro de dificuldades, constatou-se que uma média de 71,25% dos alunos já tinham visto os referidos conteúdos. Foi possível também constatar que, em média, 11,02% dos aprendizes acham os conteúdos muito fáceis, 39,69% fáceis, 17,81% difíceis e apenas 2,73% acham os conteúdos analisados muito difíceis. Foi também evidenciado que, em média, 23,75%, responderam que os conteúdos mais difíceis para eles são: subtração de números inteiros com sinais diferentes; subtração de números inteiros simétricos; multiplicação de dois números inteiros com sinais diferentes; multiplicação de dois números inteiros com sinais iguais; divisão de dois números inteiros com sinais diferentes; divisão de dois números inteiros com sinais iguais e potenciação com base de número inteiro e expoente com número natural.

Após a correção dos testes foram obtidos os resultados que estão organizados nos gráficos abaixo:

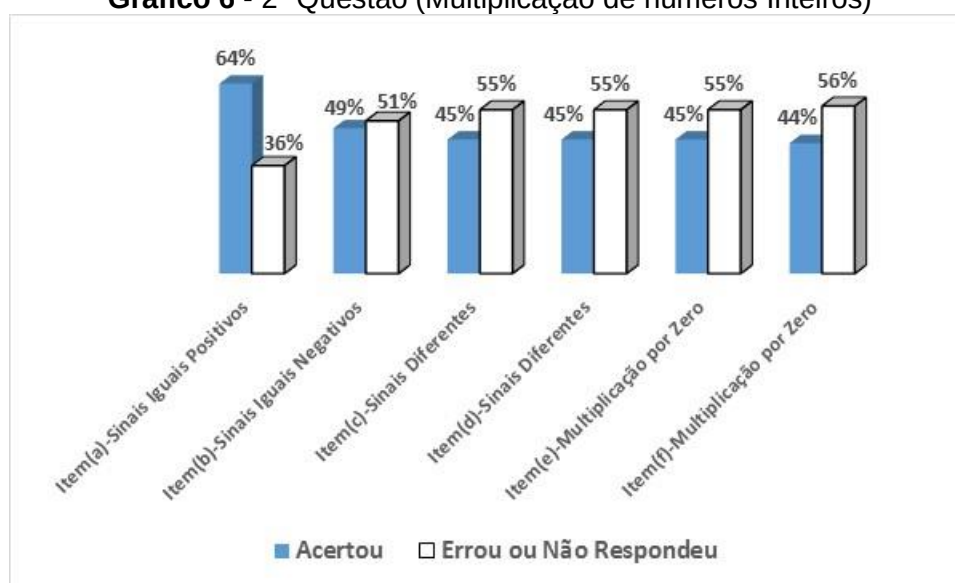
Gráfico 5 - 1ª Questão (Soma de Números Inteiros)



Fonte: Pesquisa de campo 2018

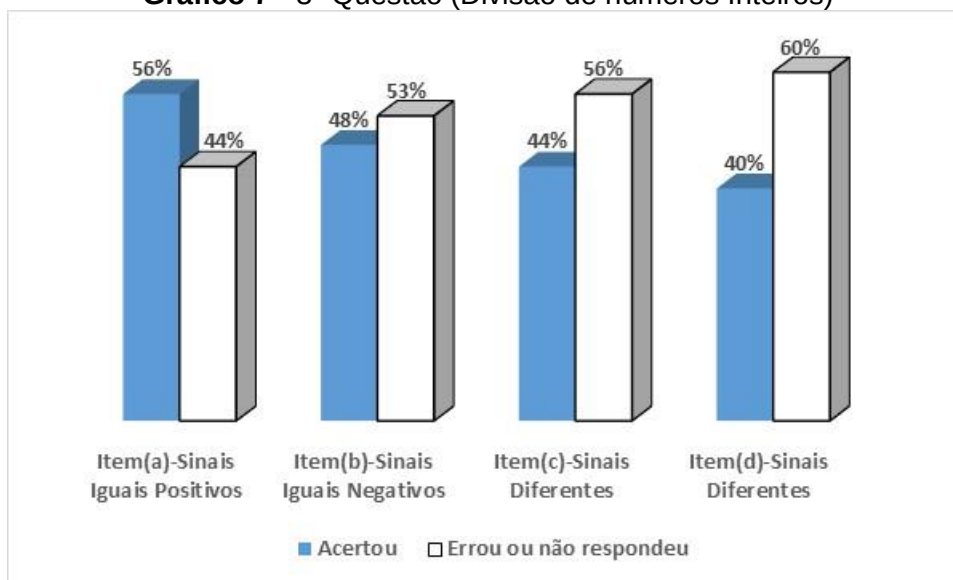
No Gráfico 5 a maior porcentagem de alunos que erraram ou não responderam ocorreu no item (b) referente à habilidade H1, mais especificamente quando ambos os números são negativos (56%), nós levando a crer na existência de um obstáculo relacionado à manipulação de números inteiros negativos, obstáculos estes que podem ser classificados como epistemológicos, pois “[...] durante muito tempo estes números foram evitados por aqueles que se dedicavam ao estudo de matemática, referindo-se a eles como números absurdos ou fictícios.” (SALGADO, 2011, p.33)

Gráfico 6 - 2ª Questão (Multiplicação de números Inteiros)



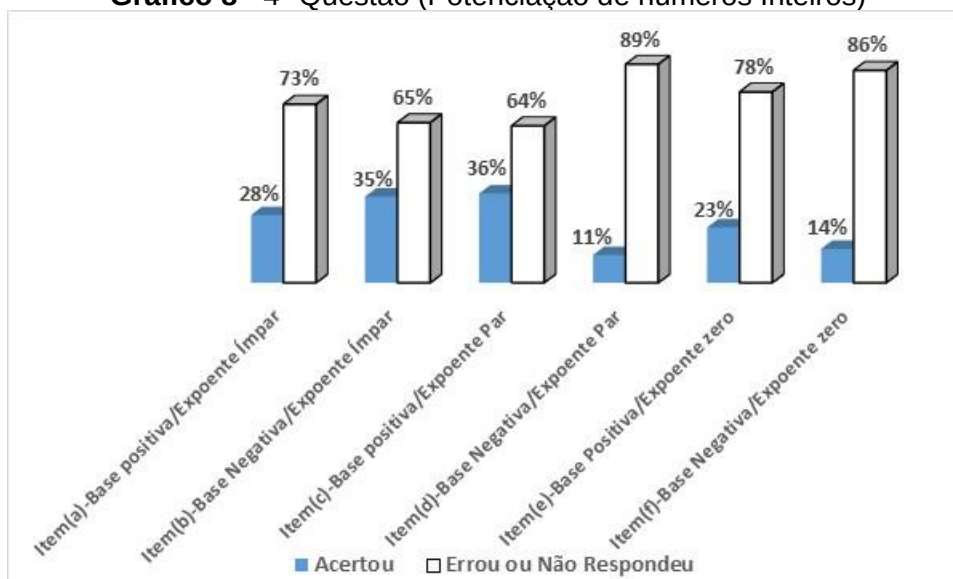
Fonte: Pesquisa de campo 2018

No gráfico 6 foi fácil perceber que a maior porcentagem de alunos que erraram ou não responderam ocorreu nos itens (b), (c), (d), (e) e (f), estes itens estão relacionados às habilidades H3, H4 E H5, ou seja, além do obstáculo referente à manipulação de números negativos foi detectado que estes aprendizes possuem obstáculos na multiplicação de um número inteiro por zero, sobre isso é possível concordar com Almouloud (2007, p.140) ao afirmar que “ a associação de zero com o “nada” desloca esse obstáculo epistemológico para um aspecto psicológico e é causa de numerosos erros.”

Gráfico 7 - 3ª Questão (Divisão de números Inteiros)

Fonte: Pesquisa de campo 2018

No gráfico 7, novamente, percebemos que a maior parte dos aprendizes errou ou não respondeu os itens relacionados à manipulação de números inteiros negativos, mas agora, no campo da operação de divisão, habilidades H6 e H7, ficando claro que a dificuldade em trabalhar com estes números persiste, independentemente da operação matemática realizada.

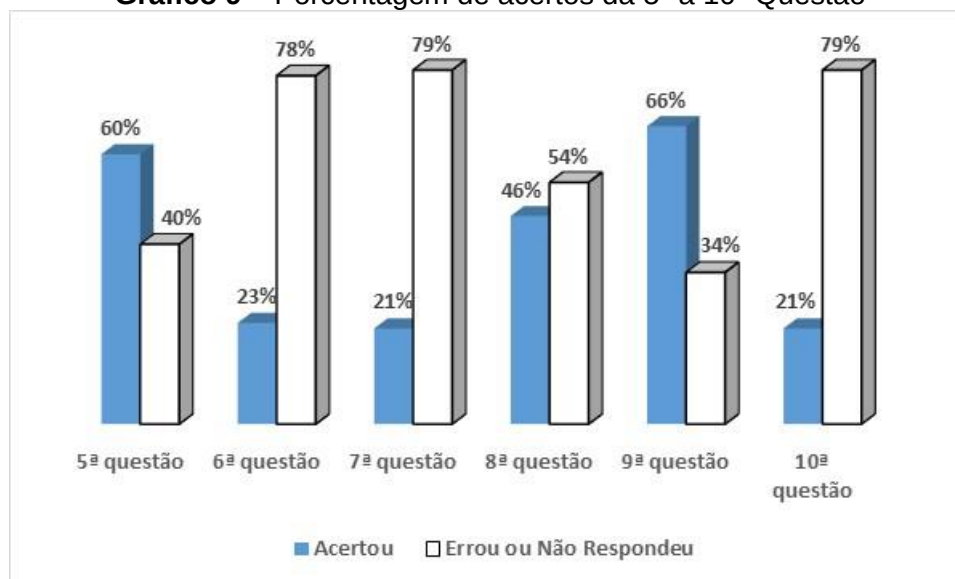
Gráfico 8 - 4ª Questão (Potenciação de números Inteiros)

Fonte: Pesquisa de campo 2018

O gráfico 8 revela dados mais preocupantes, o alto índice de alunos que erraram ou não responderam os itens relacionados à operação de potenciação de números inteiros; habilidades H8, H9 e H10. Desse total a maior porcentagem de erros ocorreram nos itens (d) e (f), respectivamente, 89% e 86%, os quais estão relacionados com a operação de potenciação de base negativa e expoente par, e base negativa com expoente zero. Um dos erros mais comuns detectados, em relação ao item d, estavam relacionados às regras de sinais em que o aprendiz utilizava a definição de potência corretamente, contudo errava o sinal, fato também constatado por Paias (2009) ao realizar um estudo e um diagnóstico a respeito da operação potenciação com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 1ª Série do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual de ensino do Estado de São Paulo, afirmando que:

[...] quando não existe o sinal negativo envolvido, verificamos que acontece um acerto maior por parte do aluno. [...] Outro aspecto que registramos nesse momento foi o cálculo de potência com uso de parênteses. Percebemos que o aluno ao longo das respostas confunde-se bastante com esses sinais. (PAIAS, 2009, p. 133)

Em relação ao item (f), $(-2)^0$, o erro mais comum encontrado foi o resultado -2 ou 0. Estes erros também foram detectados por Caraça apud Paias (2009), o qual considera que o zero provoca perturbações de duas naturezas aos aprendizes. A primeira, relaciona-se a impossibilidade da divisão de um número por zero. No segundo caso está o produto de um número por zero ou um número elevado a zero. Para o autor não há significado para o aprendiz a soma de zero parcelas, ou, no caso da potência, não há produtos com nenhum fator.

Gráfico 9 – Porcentagem de acertos da 5ª a 10ª Questão

Fonte: Pesquisa de campo 2018

O gráfico 9 descreve os dados de resolução da 5ª a 10ª questão. Estas questões foram construídas com a preocupação de verificar se os aprendizes conseguem associar os números inteiros e suas operações a diversos contextos, principalmente aqueles que retratam situações que são vivenciadas em determinados momentos da vida. Foi possível perceber que a porcentagem média de alunos que erraram ou não responderam esse grupo de questões foi de 60%, média que só ficou abaixo da registrada na 4ª questão (76%) que tratou da operação de potenciação de números inteiros. Esse alto índice ficou mais evidente na 6ª (78%), 7ª e 10ª (ambas com 79%) questões, as quais exigiram as habilidades H12, H13 e H16, respectivamente. Uma explicação razoável para a alta porcentagem de alunos que erraram ou não responderam esse grupo final de questões pode estar relacionado à maneira de como o professor conduziu o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros, de forma que as situações, os exemplos, as atividades e outras ferramentas utilizadas para a assimilação do conteúdo estarem dissociadas do contexto social dos aprendizes, ou seja, esses alunos não estavam familiarizados com tais associações, impossibilitando que eles dessem sentido e significado as sentenças, regras e símbolos matemáticos.

Neste sentido, Moysés (2012) afirma que para se dar um ensino de qualidade nas escolas de ensino fundamental é preciso:

1º) contextualizar o ensino da matemática, fazendo com que o aluno perceba o significado de cada operação mental que faz; 2º) levar o aluno a relacionar significados particulares com o sentido geral da situação envolvida; 3º) que nesse processo, se avance para a compreensão dos algoritmos envolvidos; 4º) propiciar meios para que o aluno perceba, na prática, possibilidades de aplicação desse algoritmos. (Moysés, 2012, p. 73)

Assim, o professor deve entender que o processo de ensino e aprendizagem da Matemática deve focar contextualizações que utilizem situações práticas da vida daquele aprendiz, pois, “[...] é na interação social e por intermédio do uso de signos que se dá o desenvolvimento das funções psíquicas superiores.” (MOYSÉS, 2012, p. 27).

Diante do exposto, concluímos que os docentes que tiverem pela frente o desafio de conduzir o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros no ensino fundamental devem utilizar metodologias que possibilitem que os alunos possam dar sentido e significado a estes números, principalmente quando os números negativos forem inseridos nas operações matemáticas mais elementares. Ao utilizar estas metodologias, o docente deve sempre ter a resolução de problemas como ponto de partida de toda a atividade matemática, pois o conhecimento matemático ganha significado quando os aprendizes têm situações desafiadoras para solucionar, estes desafios se transformam em “combustível” para impulsionar a aprendizagem.

Após esta consulta feita com os alunos egressos do 7º ano do ensino fundamental, identificamos informações importantes sobre dificuldades que estes discentes apresentam no processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros. No entanto, sentimos a necessidade de ampliar nossa perspectiva de análise e, para isso, foi ideal obter informações, também, na visão dos professores, de como está ocorrendo o ensino destes números em nossas escolas.

2.3 DIAGNÓSTICO DOS PROFESSORES

Esta etapa teve como objetivo investigar como está sendo ensinado os números inteiros nas escolas, dessa forma realizamos uma consulta a 40 professores de Matemática em pleno exercício, que lecionaram ou lecionam o conteúdo. A coleta das informações foi feita por meio de um questionário

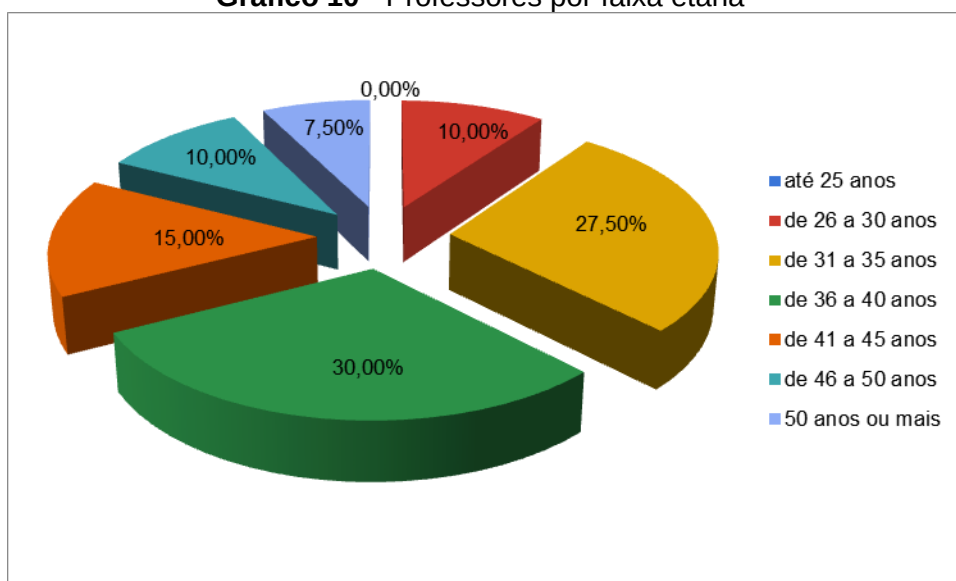
(APÊNDICE C), o qual foi dividido em três partes: a primeira foi composta por perguntas que visavam identificar o perfil dos professores consultados; a segunda objetivava identificar a metodologia utilizada pelos docentes em sua prática e, por fim, a terceira parte foi constituída por 15 questões que contemplam o conteúdo referente às quatro operações mais elementares com os números inteiros, a fim de que os docentes pudessem avaliar o nível de dificuldade de resolução de cada uma destas questões.

Esta consulta foi realizada de forma online, através do Formulário Google Drive, o qual foi enviado por e-mail ou via aplicativo Whatsapp com a opção “registrar endereço de e-mail” desativada, a fim de manter o anonimato dos professores consultados. Para sistematização da análise estatística das informações obtidas, utilizamos a planilha eletrônica Excel.

A análise estatística revelou a presença predominantemente masculina na docência da disciplina Matemática, pois segundo os dados, 82,50% são do sexo masculino e somente 17,50% são do sexo feminino.

Em relação à faixa etária, é possível constatar que do total de docentes consultados, 30% tem idades de 36 a 40 anos, seguido da porcentagem de 27,50% com idades de 31 a 35 anos. No Gráfico 10 há uma descrição mais detalhada da faixa etária dos docentes.

Gráfico 10 - Professores por faixa etária



Fonte: Pesquisa de campo (2019)

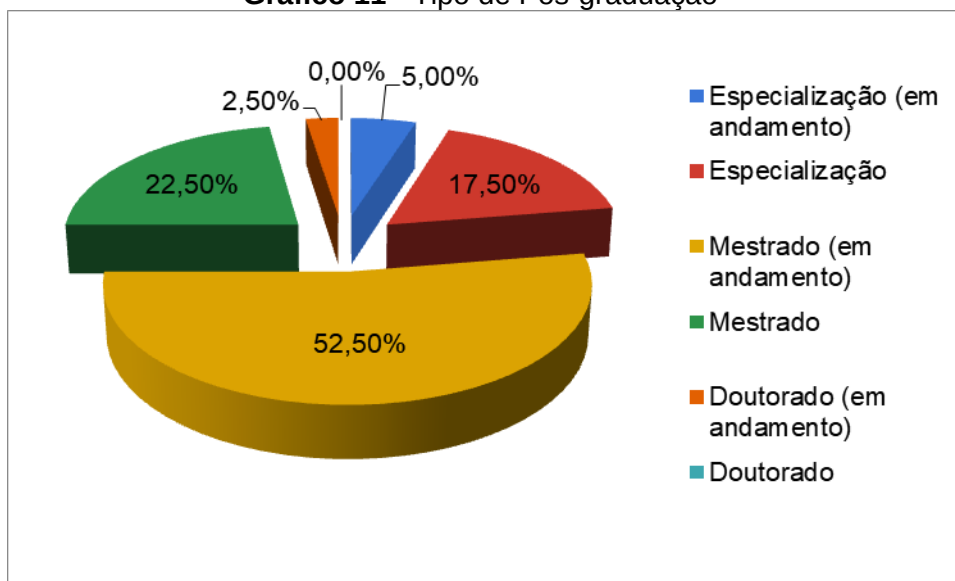
Quanto ao tipo de escola que os docentes trabalham (federal, estadual, municipal e privada), há uma predominância das instituições públicas estaduais (57,50%), em seguida ficam os que lecionam na rede privada de ensino. A Tabela 2 apresenta estes dados minuciosamente.

Tabela 2: Tipo de escola

Escola	Frequência
Pública Municipal	12,50%
Publica Estadual	57,50%
Pública Federal	7,50%
Privada	17,50%
Não Trabalho em escola no momento	5,00%
Total	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Quando perguntamos qual a formação superior dos docentes, foi possível constatar que 100% possuíam graduação em Matemática, mostrando que estes profissionais tem formação mínima para atuar na educação básica, corroborando com a exigência descrita no artigo 62 da LDB. Em relação à pós-graduação, a maior parte dos docentes entrevistados possui o título de mestre ou estão com o mestrado em andamento, o que comprova que estes professores estão preocupados com sua qualificação profissional, a fim de promover um processo de ensino e aprendizagem mais eficiente. O Gráfico 11 descreve detalhadamente estas informações.

Gráfico 11 - Tipo de Pós-graduação

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Os dados a respeito do tempo de magistério dos docentes revelam que a maior parte dos professores possuem experiência em sala de aula, pois 82,50% desses docentes estão no exercício do magistério a, no mínimo, 6 anos e somente 17,50% deles lecionam por menos de cinco anos, conforme ilustra a Tabela 3.

Tabela 3 - Tempo de magistério

Tempo de Docência	Frequência
até 5 anos	17,50%
de 6 a 10 anos	17,50%
de 11 a 15 anos	32,50%
de 16 a 20 anos	12,50%
Há mais de 20 anos	20,00%
Total	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Segundo Huberman (2000) podemos afirmar que a maior parte destes professores estão na fase denominada de experimentação (07 a 25 anos de docência), fase esta em que os docentes estão preocupados em investir em seu desenvolvimento profissional, visando a melhoria em suas práticas de ensino.

Em relação à pergunta referente à participação dos docentes em algum evento ou treinamento que envolvia o ensino dos números inteiros, foi possível constatar que apenas 20% dos professores afirmaram ter participado. Esse dado se revela preocupante, partido do princípio que há a necessidade de que estes docentes tenham uma formação continuada para melhorar suas práticas de ensino, pois, segundo, Rocha Neto (2010) os professores, quando saem dos cursos de graduação, não estão preparados para trabalhar com os alunos no sentido de levá-los a pensar, abstrair, classificar, ordenar e raciocinar, procurando dar enfoques diferentes dos tradicionalmente utilizados.

Quanto à metodologia utilizada para iniciar o assunto números inteiros, ver Tabela 4, 47% dos professores responderam que iniciam, somente, com uma situação-problema, corroborando com Cabral (2017), o qual afirma que, muitas vezes, um bom início para uma sequência didática consiste na utilização de uma situação-problema, ou seja, um jogo, um quebra-cabeça, um desafio de natureza aritmética, algébrica ou geométrica ou ainda de natureza híbrida, pois permite que o professor desencadeie diversos questionamentos aos alunos, favorecendo assim o processo de ensino. Foi possível também constatar que 22,50% dos professores iniciam o assunto pela definição seguida de exemplos e exercícios, nenhum docente utiliza a tecnologia da informação e o restante dos professores utilizam métodos mistos.

Tabela 4 - Metodologia de ensino

Método para iniciar assunto	Frequência
Pela definição seguida de exemplos e exercícios.	22,50%
Com uma situação-problema para depois introduzir o assunto.	47,50%
Com a criação de um modelo para a situação proposta e em seguida analisar o modelo.	2,50%
Utilizando a tecnologia da informação.	0,00%
Com uma situação-problema para depois introduzir o assunto; com a criação de um modelo para a situação proposta e em seguida analisar o modelo.	7,50%
Pela definição seguida de exemplos e exercícios; com uma situação problema para depois introduzir o assunto.	20,00%
Total	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Quando perguntamos se os professores entrevistados investigavam qual o conhecimento prévio dos alunos sobre o conteúdo que vai ser ensinado, constatamos que 65% dos docentes tinham esta preocupação, no entanto, 35% afirmaram não fazer este tipo de investigação. É importante ressaltarmos que, segundo Cabral (2017), o processo de reconstrução conceitual de um objeto matemático é precedido de um planejamento minucioso do professor, no qual é de extrema importância que o docente tenha conhecimento sobre o que os alunos já sabem, caso contrário eles não terão as habilidades necessárias para a execução das atividades que compõem uma sequência didática.

Nesta parte da investigação, os professores foram indagados sobre os tipos de avaliação utilizados em sua prática docente. A Tabela 5 descreve detalhadamente estas informações.

Tabela 5 - Instrumentos Avaliativos

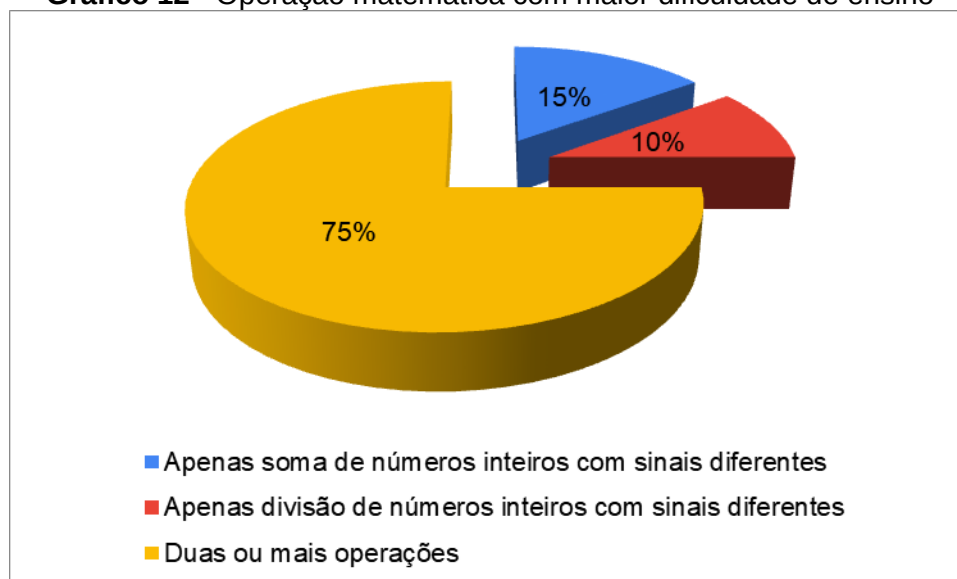
Formas de Avaliação	Frequência
Prova	7,50%
Prova, Trabalho individual/grupo	25,00%
Prova, Testes, Trabalho individual/grupo	30,00%
Prova, Testes, Trabalho individual/grupo, Projetos Interdisciplinares	7,50%
Prova, Testes, Trabalho individual/grupo, Projetos Interdisciplinares, Jogos sobre o assunto	2,50%
Prova, Testes, Trabalho individual/grupo, Atividades do caderno ao longo do bimestre	2,50%
Prova, Testes	10,00%
Testes	2,50%
Testes, Trabalho individual/grupo, Seminários, pesquisas	2,50%
Testes, Trabalho individual/grupo	5,00%
Trabalho individual/grupo	5,00%
Projetos Interdisciplinares	0%
Total	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Ao analisar os dados acima observamos que apenas 7,5% e 2,5% dos professores entrevistados utilizam somente prova e testes, respectivamente, como forma de avaliação, o restante, cerca de 90% dos entrevistados, utilizam métodos mistos. Estes dados nos revelam que os docentes estão mais flexíveis em suas formas de avaliação, fato importante, pois, segundo Libâneo (1990), o professor não deve tratar a avaliação unicamente como um ato de aplicar provas e testes, atribuir notas e classificar os alunos. Essa atitude ignora a complexidade de fatores que norteiam o ensino, tais como a situação social do aluno, as condições e meios de organização do ensino, o nível de desenvolvimento intelectual dos discentes, os requisitos prévios que têm os alunos para assimilar o novo conteúdo, entre outros.

Em relação ao recurso didático que os docentes utilizam para que os alunos possam fixar os conteúdos, observamos que todos os professores entrevistados utilizam os exercícios do livro didático e as listas de exercícios elaborada pelo professor. Esses dados ratificam as informações fornecidas pelos alunos em pesquisa de campo realizada anteriormente.

Quando perguntamos qual a operação matemática que os docentes tinham mais dificuldade para ensinar, as respostas foram variadas, pois os professores poderiam escolher mais de uma operação. Resumidamente, o Gráfico 12 demonstra que apenas 25% dos professores responderam ter dificuldade em ensinar apenas uma operação matemática - 15% somente soma de números inteiros com sinais diferentes e 10% somente divisão de números inteiros com sinais diferentes -, o restante dos professores respondeu ter dificuldade no ensino de duas ou mais operações. Destes dados, foi possível constatar que a operação matemática que apareceu com maior frequência nas respostas dos docentes foi a soma de números inteiros com sinais diferentes, cerca de 55% dos entrevistados.

Gráfico 12 - Operação matemática com maior dificuldade de ensino

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Por fim, exibimos a análise da terceira parte do questionário, em que os professores avaliaram o nível de dificuldade de cada uma das 15 questões presentes neste teste. Cada questão foi confeccionada de acordo com que preconiza a BNCC em relação às habilidades relacionadas ao objeto de conhecimento números inteiros (Quadro 6). É importante também ressaltar que este teste serviu como escopo para a confecção do teste que foi aplicado aos alunos em pesquisa de campo discutida anteriormente, pois, apesar de, em alguns casos, não serem as mesmas questões, estas exigiam as mesmas habilidades impostas pela BNCC.

Na primeira questão, em que os alunos deveriam utilizar corretamente o algoritmo para adição de números inteiros com sinais iguais positivos, 90% dos professores a consideraram com o nível de dificuldade de muito fácil a fácil, 7,5% consideraram regular, seguido de 2,50% que a consideraram difícil. Nenhum professor considerou esta questão como muito difícil.

Tabela 6 - Nível de dificuldade da primeira questão

Nível de dificuldade	Frequência
Muito Fácil	65,00%
Fácil	25,00%
Regular	7,50%
Difícil	2,50%
Muito Difícil	0,00%
Total	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Em relação a segunda questão, em que os alunos deveriam utilizar corretamente o algoritmo para somar números inteiros com sinais iguais negativos, 45% dos professores a consideraram com o nível de dificuldade de muito fácil a fácil, seguido de 55% que consideraram o nível de regular a difícil e nenhum professor considerou esta questão como muito difícil.

Tabela 7 - Nível de dificuldade da segunda questão

Nível de dificuldade	Frequência
Muito Fácil	7,50%
Fácil	37,50%
Regular	35,00%
Difícil	20,00%
Muito Difícil	0,00%
Total	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Dos dados extraídos da primeira e da segunda questão, é possível perceber que a maioria dos professores entrevistados respondeu que a soma de números inteiros com sinais iguais negativos causa maior dificuldade no processo de ensino e aprendizagem desta operação. Estes dados vão ao encontro dos obtidos em pesquisa de campo realizada com os alunos, visto que, no teste aplicado a estes aprendizes, a maioria deles, cerca de 96%, acertou a questão que exigia como habilidade somar números inteiros positivos, enquanto que, 56% errou a questão quando ambos os números eram negativos.

No que tange a terceira questão, onde os aprendizes deveriam utilizar o algoritmo para somar números inteiros com sinais diferentes, 72,50% dos docentes acharam a questão com grau de dificuldade de regular a muito difícil, 25% acharam fácil e, apenas 2,50% (1 professor) achou a questão muito fácil.

Tabela 8 - Nível de dificuldade da terceira questão

Nível de dificuldade	Frequência
Muito Fácil	2,50%
Fácil	25,00%
Regular	32,50%
Difícil	30,00%
Muito Difícil	10,00%
Total	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Ao analisarmos os dados revelados na Tabela 8 foi possível perceber divergência em relação aos dados extraídos da pesquisa de campo feita com os discentes, pois, a maior parte dos aprendizes, média de 63%, acertou a questão do teste que exigia esta habilidade.

A quarta, a quinta e a sexta questões exigiam as habilidades para multiplicar números inteiros com sinais iguais positivos, sinais iguais negativos e sinais diferentes, respectivamente, ou seja, o aprendiz deveria, também, ter internalizado, na série anterior, a habilidade para multiplicar números naturais, além da fixação da tabuada de multiplicação.

Na quarta questão metade dos docentes avaliaram com o grau de dificuldade de muito fácil a fácil e a outra metade com grau de dificuldade de regular a muito difícil. Este resultado pode ser explicado devido ao fato de os docentes já terem experiência em perceber que quando estes alunos saem das séries iniciais apresentam grande deficiência em multiplicar números naturais, principalmente no processo de memorização da tabuada de multiplicação, dificuldades estas, também, constatadas por Rocha Neto (2010).

Tabela 9 - Nível de dificuldade da quarta questão

Nível de dificuldade	Frequência
Muito Fácil	10,00%
Fácil	40,00%
Regular	32,50%
Difícil	10,00%
Muito Difícil	7,50%
Total	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Em relação aos dados da quinta questão (Tabela 10), apenas 25% dos docentes responderam que a dificuldade na resolução variava de muito fácil a fácil, enquanto que 75% dos professores respondeu de regular a difícil.

Tabela 10 - Nível de dificuldade da quinta questão

Nível de dificuldade	Frequência
Muito Fácil	5,00%
Fácil	20,00%
Regular	47,50%
Difícil	22,50%
Muito Difícil	5,00%
Total	100,00%

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

No que tange a sexta questão (Tabela 11) a porcentagem de professores que achou o nível de dificuldade de muito fácil a fácil diminuiu para 20%, seguido dos professores que avaliaram a dificuldade da questão de regular a muito difícil com 80%.

Tabela 11 - Nível de dificuldade da sexta questão

Nível de dificuldade	Frequência
Muito Fácil	5,00%
Fácil	15,00%
Regular	42,50%
Difícil	25,00%
Muito Difícil	12,50%
Total	100,00%

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

O aumento do grau de dificuldade da quinta e sexta questões já era esperado, pois quando os discentes entram em contato com a multiplicação de números inteiros negativos há uma grande dificuldade na aceitação desta operação, pois esta aprendizagem contradiz as representações mais profundas do sujeito, principalmente quando é revelado a estes alunos que a multiplicação de dois números inteiros negativos é positiva. Esta dificuldade de aprendizagem detectada pelos docentes é classificada por Almouloud (2007, p. 144) como obstáculo psicológico.

Analisando agora a sétima questão (Tabela 12), em que os discentes deveriam aplicar corretamente o algoritmo para multiplicar números inteiros por zero, a maior parte dos docentes respondeu que o nível de dificuldade seria de muito fácil a fácil, cerca de 52,50%, seguido da porcentagem de 40% com grau de dificuldade regular e, por fim, apenas 7,50% dos professores responderam ser de difícil a muito difícil o nível de dificuldade da questão.

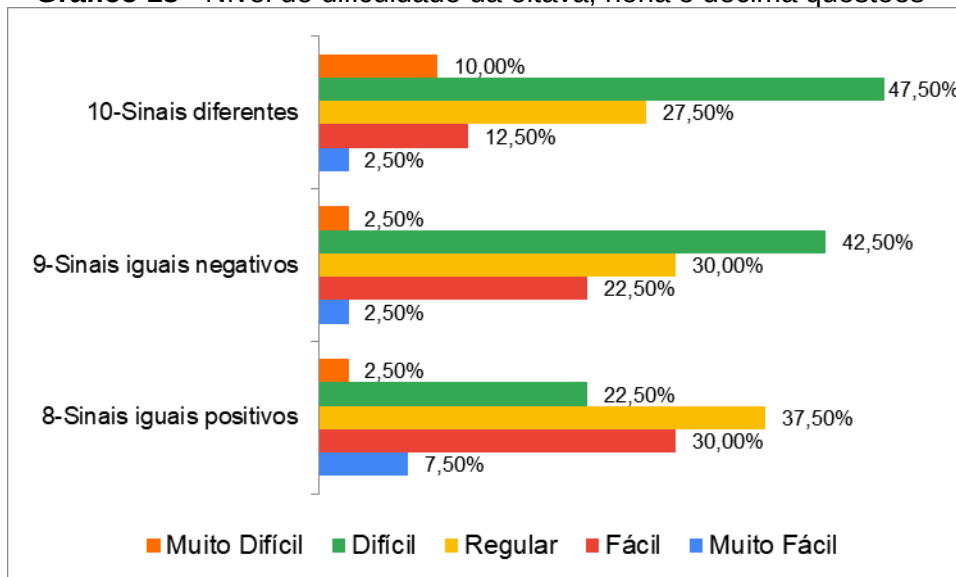
Tabela 12 - Nível de dificuldade da sétima questão

Nível de dificuldade	Frequência
Muito Fácil	12,50%
Fácil	40,00%
Regular	40,00%
Difícil	5,00%
Muito Difícil	2,50%
Total	100,00%

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Investigando agora as respostas dos professores referente ao nível de dificuldade da oitava, nona e décima questões, em que os alunos deveriam dividir corretamente números inteiros com sinais iguais positivos, sinais iguais negativos e sinais diferentes, respectivamente, foi possível perceber que a maior parte dos docentes respondeu que a décima questão seria a mais complexa dos alunos resolverem, pois cerca de 57,50% dos entrevistados respondeu que a questão teria um nível de dificuldade de difícil a muito difícil, fato este ratificado em pesquisa de campo realizada com os discentes, momento em que cerca de 60% dos aprendizes erraram a questão que exigia esta habilidade. O Gráfico 13 descreve minuciosamente os dados coletados.

Gráfico 13 - Nível de dificuldade da oitava, nona e décima questões



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

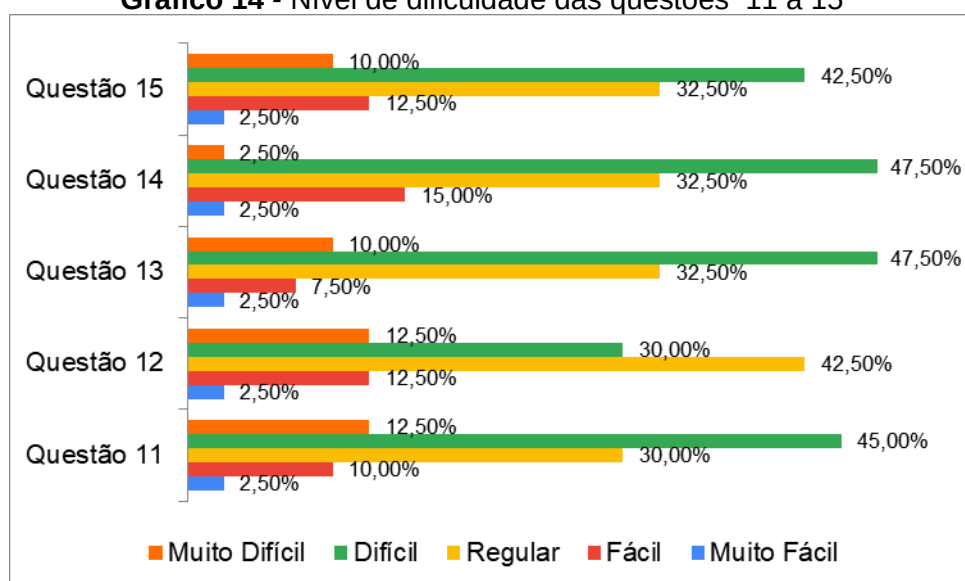
Para finalizar esta análise, as cinco últimas questões tinham como objetivo investigar, na resposta dos professores, o grau de dificuldade que os alunos teriam para fazer a conversão do enunciado dos problemas, que obviamente estavam na língua natural dos discentes, para a linguagem numérica característica da Matemática. O Quadro 8 descreve as habilidades que cada uma das questões exigia.

Quadro 8 - Habilidades exigidas nas questões 11 a 15

Questão	Habilidade
11	Resolver problemas que envolvam operações de adição e subtração de números inteiros incluindo a associação a pontos da reta numérica.
12	Associar os números inteiros em situações de movimentação bancária que envolvam adição e subtração.
13	Resolver problemas que envolvam operações de adição e subtração de números inteiros relacionadas a espaço e tempo.
14	Resolver problemas que envolvam operações de multiplicação e divisão de números inteiros.
15	Resolver problemas que envolvam operações de multiplicação e divisão de números inteiros.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Foi possível constatar que, em média, 86% dos professores classificaram estas questões com nível de dificuldade variando de regular a muito difícil. Esta porcentagem nos revela que os alunos teriam dificuldade em converter os enunciados dos problemas para a linguagem matemática. O Gráfico 13 demonstra detalhadamente os dados coletados.

Gráfico 14 - Nível de dificuldade das questões 11 a 15

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

É importante também destacar que, em pesquisa de campo realizada por Gonçalves (2007), a autora já havia constatado a deficiência que os aprendizes têm em fazer conversões⁷ de registros⁸, no entanto a pesquisadora afirma que estas dificuldades podem ser minimizadas a partir do momento que o professor comece a trabalhar com, pelo menos, dois registros de representação para o estudo da compreensão em matemática, a fim de que os aprendizes possam ter uma visão mais ampla da aplicação do objeto matemático a ser ensinado.

Diante do exposto, foi possível perceber que a maior parte dos professores consultados - média de 69,50% - responderam que os alunos achariam as questões com nível de dificuldade variando de regular a muito difícil. Este fato se confirmou em pesquisa de campo realizada com os discentes, pois a média de 57% dos estudantes erraram ou não responderam as referidas questões propostas.

Com base nas análises feitas na revisão de estudos e, em especial, nas dificuldades apontadas pelos professores e alunos no processo de ensino e aprendizagens dos números inteiros, foi possível elaborar uma sequência didática composta por atividades que pudessem estimular os aprendizes à percepção de certas regularidades envolvidas no processo de reconstrução conceitual, promovendo, ainda que intuitivamente, o estabelecimento de generalizações. É justamente a percepção dessas regularidades que permitem aos aprendizes serem convencidos de “certas verdades” do saber matemático. Na Seção a seguir, é feita uma abordagem mais detalhada sobre os números inteiros.

⁷ Segundo Duval (1999) uma conversão é a transformação de uma representação de um registro A em outra representação de um registro B conservando, pelo menos, a referência ao mesmo objeto ou à mesma situação representada, mas mudando de fato o conteúdo da representação. Por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica.

⁸ Um registro de representação é, segundo Duval (1999), é um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente.

3 SOBRE OS NÚMEROS INTEIROS

Nesta seção apresentamos o conteúdo dos números inteiros de forma mais técnica. Embora o objetivo deste trabalho seja produzir uma proposta de sequência didática para o ensino deste tema para turmas da 3ª etapa da educação de jovens e adultos do ensino fundamental, acreditamos ser essencial fazer uma abordagem mais minuciosa, com o intuito de contribuir na formação do professor de Matemática. Nesta abordagem incluiremos um tópico sobre a evolução histórica dos números inteiros, mais especificamente dos números inteiros negativos, e um tópico contendo a construção lógico-formal do conjunto dos números inteiros. Utilizamos como principais referências as obras de Domingues (1991), Eves (2004), Boyer (2010), Roque (2012) e Schubring (2018).

3.1 EVOLUÇÃO HISTÓRICA

A aceitação dos números inteiros negativos ocorreu em um processo muito lento, pois o entendimento desses números ia de encontro ao senso comum e contra a visão recebida da matemática na primeira metade do século XIX. Segundo Schubring (2018) devemos destacar que o conceito principal destes números, com base para a matemática tradicional, foi o de grandeza, como meio de medida, onde os valores deveriam ser todos positivos, não havendo espaço para grandezas negativas. Este fato se confirma em grandes civilizações da antiguidade, como na matemática dos babilônios e dos egípcios (HØYRUP, 2002).

Os chineses já trabalhavam com quantidades negativas desde o terceiro século antes de Cristo. Eles utilizavam bastonetes para classificar estas quantidades, considerando os vermelhos como quantidades positivas e os pretos como quantidades a serem subtraídas. Este fato nos revela que os chineses trabalhavam com quantidades negativas e não com os números negativos. Os valores negativos foram permitidos apenas como valores intermediários durante os cálculos, mas não como soluções de problemas. (SCHUBRING, 2018).

É importante ressaltarmos que este método dos bastonetes desenvolvido pelos chineses para representar quantidades positivas e negativas, até hoje é utilizado em livros didáticos para dar significado aos números negativos, logo percebemos a importância que este povo teve no processo de aceitação dos números negativos.

Uma análise mais precisa da antiga matemática chinesa pode ser encontrada na mais importante obra da matemática chinesa *Jiu zhang suan-shu* (*Chiu chang suan shu*), ou *Nove Capítulos da Arte Matemática*. Essa obra foi construída, muito provavelmente, durante a dinastia Han (206 a.C. - 220 d.C.) e constitui um livro totalmente voltado à matemática (HILLESHEIM, 2013). Sua matemática consiste num conjunto de problemas, e uma série desses problemas conduziria a sistemas de equações lineares. A solução dessas equações lineares era efetuada por transformações matriciais. Foi nestas matrizes que encontramos, pela primeira vez na história, o surgimento de números negativos (STRUICK, 1992, p. 67).

Em contraste à matemática chinesa, os gregos optaram por se especializar em geometria objetivando comparar grandezas e não medi-las. O forte apego que os gregos apresentavam com a geometria impossibilitou-os de ousarem em considerar os negativos como números, pois:

[...] para quem a geometria era um prazer e a álgebra um demônio necessário, rejeitaram os números negativos. Incapazes de ajustá-los em sua geometria, incapazes de representá-los por figuras, os gregos consideravam os negativos não exatamente como números. (KASNER; NEWMAN, 1968, apud MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 51).

A origem da regra de sinais da multiplicação de números negativos é, em geral, atribuída a Diofanto de Alexandria. Sobre ele, se sabe pouca coisa, até mesmo o período em que viveu. No entanto, estudiosos apontam evidências e tendem a situá-lo no século III de nossa era. Esse algebrista de nacionalidade desconhecida escreveu três trabalhos: *Aritmética*, do qual só restaram seis de treze livros, sobre *Números Poligonais* do qual restou uma pequena parte do original e *Prismas* que foi totalmente perdido (EVES, 2004, p. 207). Segundo Schubring (2018) Diofanto “entende e aplica a regra de sinais a binômios do tipo $(a - b)$, para multiplicar $(a - b) \cdot (c - d)$ resultando em $ac - bc - ad + bd$ ” (SCHUBRING, p. 49).

Na civilização árabe e na matemática indiana, houve a prática de se trabalhar com grandezas subtrativas, porém nas soluções das equações algébricas desta época, havia-se a prática de rejeitar tais resultados. Para exemplificar estes fatos, destacamos a obra de Bhaskara II (ca. 1150), pois enquanto ele rejeitava uma solução negativa de uma equação do segundo grau, visto que seriam -5 macacos, reinterpretava como sendo uma direção oposta a considerada positiva. (SCHUBRING, 2018).

Neste sentido, é importante frisar que esta explicação de Bhaskara para representar os números negativos é também muito utilizada pelos autores dos livros didáticos da atualidade, inclusive os PCN (BRASIL, 1998, p. 98-99) afirmam que esse método é um recurso que pode ajudar os alunos a superarem os obstáculos no processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros.

Além de Bhaskara, outro matemático hindu teve grande influência na evolução dos números negativos, neste contexto destacamos a figura de Brahmagupta (598-665), este matemático fez contribuições importantes à álgebra, pois passou a considerar duas raízes, mesmo as negativas, como solução das equações quadráticas (BOYER, 2010). Pela primeira vez, a aritmética encontra-se sistematizada com os números negativos e o zero. Brahmagupta destaca as seguintes regras operatórias envolvendo os números negativos:

Positivo dividido por positivo, ou negativo por negativo, é afirmativo. Cifra dividida por cifra é nada. Positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por afirmativo é negativo. Positivo ou negativo dividido por cifra é uma fração com esse denominador. (BOYER, 2010, p. 150).

A aceitação prática dos números inteiros negativos se consolida na expansão das relações financeiras no comércio, que favoreceu o aparecimento de uma estrutura de crédito. Esta estrutura de crédito veio a aparecer nas cidades do norte da Itália (particularmente Florença e Veneza) durante o século XIV. A aparentemente ilógica subtração de $a - b$, com $a < b$ tornou-se possível quando novos banqueiros começaram a permitir aos seus clientes sacar ducados de ouro enquanto seus depósitos eram inferiores aos saques (SINGH, 1972, apud MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

Neste sentido, Medeiros; Medeiros (1992), destacam que a ideia de número negativo associada a um débito não era satisfatória e não preenchia o requisito matemático da metáfora, principalmente quando se tratava da regra dos sinais.

Ainda nesta seara é valioso destacar que, apesar da ideia de débito e crédito não dar conta de explicar todos os casos de regras de sinais da adição e multiplicação, foi neste cenário que a humanidade se apoiou para consolidar a utilização dos números negativos em seu cotidiano, logo este contexto de representação não deve ser desprezado de forma alguma no processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros, além do que os PCN afirmam que as primeiras abordagens destes números “podem apoiar-se nas idéias intuitivas que os alunos já têm sobre esses números por vivenciarem situações de perdas e ganhos num jogo, débitos e créditos bancários ou outras situações.” (BRASIL, 1998, p. 66)

No século XV destaca-se o mais brilhante matemático francês chamado Nicolas Chuquet, que nasceu em Paris mas viveu e se dedicou à medicina em Lyon. Em 1484 ele escreveu uma aritmética intitulada *Triparty en la science des nombres* que só foi impressa no século XIX. Esta obra foi dividida em três partes, a primeira se ocupa do cálculo com números racionais, a segunda com números irracionais e a terceira aborda a teoria das equações. Na terceira parte desta obra, Chuquet exprime pela primeira vez um número negativo isolado na equação algébrica $4x = -2$. (BOYER, 2010). Este manuscrito proporcionou uma grande contribuição para a aceitação dos números negativos.

Já na primeira metade do século XVI, destaca-se o maior algebrista alemão deste século, chamado Michael Stifel, sua obra matemática mais conhecida é *Arithmetica integra*, publicada em 1544, a qual foi dividida em três partes dedicadas, respectivamente, aos números racionais, números irracionais e álgebra. (EVES, 2004). Este algebrista alemão foi um grande especialista das propriedades dos números negativos.

Boyer (2010) descreve que Stifel costumava usar coeficientes negativos para reduzir a multiplicidade de casos de equações quadráticas, para isso criou uma regra específica para explicar quando usar “+” ou quando usar “-”, no entanto Stifel também descartava as raízes negativas dessas equações.

Segundo Salgado (2011) este matemático foi um dos muitos autores alemães a difundirem os símbolos “+” e “-” em oposição à notação italiana que utilizava as letras “p” e “m”, abreviação das palavras plus e moins, respectivamente.

Em 1545 o matemático italiano, Girolamo Cardano (1501-1576), que parece ter obtido a fórmula de um outro matemático denominado Tartaglia, prometendo mantê-la em sigilo, acabou por publicá-la no livro *Ars magna* (Grande Arte), onde trata a solução de cada um dos treze tipos de equação cúbica em capítulos separados. O capítulo XI da *Ars magna* fornece um método para resolver a equação $x^3 + 6x = 20$, que era escrita como: cub p; 6 res æqlis 20 (cubo e seis coisas igual a 20). (ROQUE, 2012). Cardano começa apresentando uma demonstração geométrica e só depois enuncia uma regra para resolver tal equação.

Utilizando sua fórmula, Cardano encontra a solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, no entanto ele sabia que não existia raiz quadrada de número negativo, logo, não entendia como a sua regra faria sentido nessa situação. Cardano chamava essas raízes de “números fictícios” ou “números falsos”. (BOYER, 2010)

Segundo Eves (2004) a *Ars Magna*, se tornou o primeiro grande tratado em latim dedicado exclusivamente à álgebra. Nele se deu atenção às raízes negativas de uma equação e ao cálculo com números imaginários, aguçando ainda mais as inquietações dos matemáticos em relação aos números negativos.

Com a resolução das equações cúbicas, um novo tipo de número começa a surgir: os negativos. Dessa forma, os matemáticos não podiam mais negar a existência de um número negativo ou de uma raiz quadrada negativa alegando que equações do tipo $x + 1 = 0$ e $x^2 + 4 = 0$ não são resolúveis. (HILLESHEIM, 2013).

Após Cardano, a resolução de raízes quadradas negativas ainda causava grande espanto entre seus sucessores, somente na primeira metade do século XVII as técnicas empregadas para a solução de equações evoluíram para uma teoria que buscava fórmulas gerais para exprimir todas as raízes. Os primeiros a colocar a questão da existência das raízes de uma equação qualquer foram Girard e Descartes. (ROQUE, 2012).

Em 1629, Albert Girard introduziu o problema de saber qual o número de raízes de uma equação qualquer, problema que revela uma perspectiva mais geral de análise das equações. Seu livro *Invention nouvelle en algèbre* (Nova invenção em álgebra) revela, já no subtítulo, o objetivo de descobrir o número de soluções que as equações produzem, ou seja, para obter a desejada generalidade, ele afirma que todas as equações possuem tantas soluções quanto o maior grau da incógnita, admitindo assim as raízes negativas e imaginárias, logo esse procedimento resolutivo consistiu em uma primeira versão do que conhecemos, hoje, como “teorema fundamental da álgebra”. (ROQUE, 2012).

Ainda neste contexto, Girard acrescenta que as soluções podem ser “mais que nada” (“positivos, incluindo os irracionais”), “menos que nada” (“negativos”), ou do tipo $\sqrt{-}$. Segundo Roque (2012), anos mais tarde, René Descartes (1596-1650), natural de Touraine, também irá admitir que uma equação possui tantas raízes quantas são as dimensões da quantidade desconhecida. No entanto, ele destaca que algumas dessas raízes podem ser “falsas ou menos que nada” e investiga quantas são as verdadeiras e quantas são as falsas para uma equação qualquer.

A inquietação provocada pelos números negativos ainda perdurou por um certo tempo. Logo, percebe-se que tal assunto incomodou os matemáticos de tal forma que eles procuraram buscar explicações cada vez mais plausíveis para o assunto. Em Passoni (2002) foi possível identificar relatos de que foi o alemão Hermann Hankel (1839-1873), com a publicação de sua obra “Teoria do Sistema dos Números Complexos”, em 1867, quem de fato legitimou os números negativos. Antes de Hankel, muitos matemáticos se propuseram a construir uma demonstração para a regra de sinais pautada em exemplos práticos, no entanto, Hankel demonstra que a única das regras possíveis é aquela que preserva a distributividade à esquerda e à direita, isso porque ele aborda a ideia de número relativo numa outra dimensão, que não aquela procurada na natureza.

Dessa forma, a demonstração da regra de sinais apresentada por Hankel (apud GLAESER, 1981), mostrou que a única regra possível é aquela que preserva a propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação à

direita e a esquerda. Assim, as mesmas propriedades que regem os números positivos foram estendidas também para os negativos.

Conforme Gonzáles et al (1990) Hankel estava convicto de que as matemáticas são uma criação humana e, em consequência, seus conceitos não são deduzidos de fatos empíricos nem vem impostos de fora, ao contrário, são criações intelectuais. Nesta perspectiva, Hankel demonstra a regra de sinais $(-)\times(-)=(+)$ propondo prolongar a multiplicação de $\mathbb{R}^+$ para $\mathbb{R}$ e enuncia o seguinte Teorema: “A única multiplicação sobre $\mathbb{R}$, que prolonga a multiplicação usual sobre $\mathbb{R}^+$, respeitando as distribuições (à esquerda e à direita), é conforme a regra de sinais”.

Demonstração:

$$0 = a \times 0 = a \times (b + \text{opp } b) = ab + a \times (\text{opp } b) \Leftrightarrow 0 = 0 \times (\text{opp } b) = (\text{opp } a) \times (\text{opp } b) + a \times (\text{opp } b) \Leftrightarrow \text{De onde } (\text{opp } a) \times (\text{opp } b) = ab$$

(GLAESER, 1981, p. 338)

Até então, toda a resistência que os matemáticos tiveram em aceitar os números negativos foi minimizada pela demonstração de Hankel, no entanto, na comunidade de professores, esse debate ainda perdurou por muito tempo.

Como foi possível perceber, a aceitação dos números negativos sofreu várias interferências até ser formalizado por Hankel. Todo esse processo foi marcado por inúmeras discussões que perduraram por quase 1500 anos.

É importante também frisar que toda essa demora se deve aos obstáculos encontrados pelos matemáticos no decorrer da História, principalmente aqueles relacionados a dificuldade de abstração do significado do número negativo e a dificuldade de utilização prática destes números.

Dessa forma, as dificuldades de assimilação apresentadas por nossos aprendizes no ensino destes números, hoje, nos parecem compreensíveis. No entanto, é preciso que os docentes produzam ferramentas didáticas que possam minimizar tais dificuldades.

Neste sentido, a sequência didática proposta neste trabalho conta com atividades de ensino que permitem aos alunos redescobrirem, de forma “empírico-intuitivas”, verdades do saber matemático. Este processo de “convencimento”, que não é financiado pelos argumentos formais de uma “demonstração matemática”, mas que posteriormente deve ser reelaborado

pelo professor com o rigor necessário, tem um valor significativo na aprendizagem dos alunos que cursam a educação básica.

Sendo assim, o professor, além do conhecimento pedagógico necessário para transmissão do conteúdo, deve ter em mente que o conhecimento puramente matemático é de essencial importância para que o docente possa realizar uma transposição didática que torne o processo de ensino e aprendizagem menos penoso ao aprendiz. Partindo deste princípio, a seguir, abordaremos a construção lógico-formal do conjunto dos números inteiros.

3.2 CONSTRUÇÃO LÓGICO-FORMAL

Nosso objetivo aqui é dar um sentido matemático a todas as expressões do tipo $a-b$, para quaisquer $a, b \in N$, de maneira a poder tratar como entes do mesmo conjunto tanto aquelas do tipo $7-3$, como também $3-7$, por exemplo. Neste sentido Domingues (1991) orienta que convém observar primeiro que subjacente a cada diferença $a-b$ está o par ordenado $(a,b) \in N \times N$. Além disso é simples ver que, por exemplo, a igualdade em N , $5-2=9-6$, equivale a $5+6=9+2$. De uma maneira geral se $a, b, c, d \in N$, $a \geq b$ e $c \geq d$ vale a equivalência $a-b = c-d \Leftrightarrow a+d = b+c$.

Essas considerações, aliada ao fato que o conjunto dos inteiros a ser construído deve ser uma ampliação de N , ajudam a entender o caminho que seguiremos.

3.2.1 Os Números Inteiros

No conjunto $N \times N$ consideremos a relação $\sim$ definida da seguinte maneira: para quaisquer (a, b) e (c, d) em $N \times N$,

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Para a relação $\sim$ valem as propriedades:

- *Reflexiva*, pois como para todo $(a, b) \in N \times N$, se verifica $a + b = b + a$ então $(a, b) \sim (a, b)$.

- *Simétrica*, ou seja, $(a, b) \sim (c, d)$, então $(c, d) \sim (a, b)$. De fato, pois $a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a \Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$.
- *Transitiva*, pois se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$ então $(a, b) \sim (e, f)$. De fato, pois $a + d = b + c$ e $c + f = d + e$, logo $a + d + f = b + c + f$ e $c + f + b = e + d + b \Leftrightarrow a + d + f = e + d + b \Leftrightarrow a + f = e + b$, portanto $(a, b) \sim (e, f)$

Segundo Domingues (1991), a relação $\sim$ é de equivalência em $N \times N$ e, por conseguinte, determina uma partição neste conjunto em classes de equivalência. Assim, para cada $(a, b) \in N \times N$, indicaremos por $\overline{(a, b)}$ a classe de equivalência determinada por $(a, b) \in N \times N$. Logo:

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in N \times N \mid (x, y) \sim (a, b)\}$$

Ou

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in N \times N \mid x + b = y + a\}$$

O conjunto de todas as classes $\overline{(a, b)}$ para quaisquer $(a, b) \in N \times N$ será indicado por Z . Logo:

$$Z = N \times N / \sim = \{\overline{(a, b)} \mid (a, b) \in N \times N\}$$

É claro que: $\overline{(a, b)} = \overline{(c, d)} \Leftrightarrow (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.

Em particular vale o seguinte : se $a \geq b$, então $\overline{(a, b)} = \overline{(a - b, 0)}$, pois $a + 0 = (a - b) + b$; e se $b \geq a$, então $\overline{(a, b)} = \overline{(0, b - a)}$ uma vez que $0 + (b - a) = b + 0$. Logo, se $\overline{(a, b)} \in Z$, então $\overline{(a, b)} = \overline{(c, 0)}$ ou $\overline{(a, b)} = \overline{(0, c)}$ para algum $c \in N$. E essa maneira de representar o elemento $\overline{(a, b)}$ é única, pois, por exemplo, se $\overline{(c, 0)} = \overline{(d, 0)}$, então $c + 0 = d + 0$ e daí $c = d$

3.2.2 Adição em Z

Definição 1: Sejam $m = \overline{(a, b)}$ e $n = \overline{(c, d)}$ elementos quaisquer de Z . Chama-se de soma de m com n , e se indica por $m + n$, o elemento Z definido por:

$$m + n = \overline{(a + c, b + d)}$$

Suponhamos $m = \overline{(a, b)} = \overline{(a_1, b_1)}$ e $n = \overline{(c, d)} = \overline{(c_1, d_1)}$, então $m + n = \overline{(a + c, b + d)}$ e $m + n = \overline{(a_1 + c_1, b_1 + d_1)}$. Como $(a, b) \sim (a_1, b_1)$ e $(c, d) \sim (c_1, d_1)$, então $a + b_1 = b + a_1$ e $c + d_1 = d + c_1$, do que resulta

(somando membro a membro essas igualdades): $(a + b_1) + (c + d_1) = (b + a_1) + (d + c_1)$ ou $(a + c) + (b_1 + d_1) = (b + d) + (a_1 + c_1)$. Onde $\overline{(a + c, b + d)} = \overline{(a_1 + c_1, b_1 + d_1)}$. Logo a relação dada por $(m, n) \rightarrow m + n$ é uma aplicação de $Z \times Z$ em Z e portanto é uma operação sobre Z . A essa operação chama-se adição em Z .

Para adição em Z , valem as seguintes propriedades:

- *Associativa*: de fato, se $m = \overline{(a, b)}$, $n = \overline{(c, d)}$ e $r = \overline{(e, f)}$ são elementos genéricos de Z , então:

$$\begin{aligned}(m + n) + r &= \overline{(a + c, b + d)} + \overline{(e, f)} = \overline{((a + c) + e, (b + d) + f)} = \\ &= \overline{(a + (c + e), b + (d + f))} = \overline{(a, b)} + \overline{(c + e, d + f)} = \overline{(a, b)} + \\ &= \overline{((c, d) + (e, f))} = m + (n + r);\end{aligned}$$

- *Comutativa*: de fato $m + n = \overline{(a + c, b + d)} = \overline{(c + a, d + b)} = n + m$

- *Existe elemento neutro*: é a classe $\overline{(0, 0)}$. De fato, para qualquer $\overline{(a, b)} \in Z$, tem-se $\overline{(a, b)} + \overline{(0, 0)} = \overline{(a + 0, b + 0)} = \overline{(a, b)}$;

- *Todo $m = \overline{(a, b)} \in Z$ admite oposto (simétrico aditivo)*: ou seja para todo $m \in Z$ existe um $m' \in Z$ de modo que $m + m' = 0$. Usaremos a notação: $-m = m'$.

Como

$$\overline{(a, b)} + \overline{(b, a)} = \overline{(a + b, b + a)} = \overline{(a, b)} = 0, \quad \text{então} \quad m = \overline{(a, b)} \Rightarrow -m = \overline{(b, a)},$$

temos ainda a *lei do cancelamento* em Z :

$$m + r = n + r \Rightarrow m = n$$

$$\begin{aligned}\text{De fato, } m &= m + 0 = m + [r + (-r)] = (m + r) + (-r) = (n + r) + \\ &+ (-r) = (n + r) + (-r) = n + [r + (-r)] = n + 0 = n\end{aligned}$$

3.2.3 Subtração em Z

Para cada elemento $m, n \in Z$, chama-se diferença entre m e n , e indica-se por $m - n$, elemento $m + (-n) \in Z$, ou seja, $m - n = m + (-n)$.

Assim, posto que $m - n \in Z$, quaisquer que sejam $m, n \in Z$, a relação dada por $(m, n) \rightarrow m - n$ é uma aplicação de $Z \times Z$ em Z , ou seja é uma operação sobre Z . A essa operação denominados de *subtração* em Z .

3.2.4 Multiplicação em Z

Definição 2: Sejam $m = \overline{(a, b)}$ e $n = \overline{(c, d)}$ elementos genéricos de Z . Chama-se produto de m por n e indica-se por mn ou $m \cdot n$ o elemento de Z definido por:

$$mn = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$$

Se $m = \overline{(a, b)} = \overline{(a_1, b_1)}$ e $n = \overline{(c, d)} = \overline{(c_1, d_1)}$, então $mn = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$ e $\overline{(a_1c_1 + b_1d_1, a_1d_1 + b_1c_1)}$. Mas como $(a, b) \sim (a_1, b_1)$ e $(c, d) \sim (c_1, d_1)$, então $a + b_1 = b + a_1$ e $c + d_1 = d + c_1$. Daí obtemos $c(a + b_1) = c(b + a_1)$, $a_1(c + d_1) = a_1(d + c_1)$, $d(b + a_1) = d(a + b_1)$ e $b_1(d + c_1) = b_1(c + d_1)$. Desenvolvendo esses produtos e somando membro a membro as igualdades obtidas e fazendo os cancelamentos possíveis, restará:

$$(ac + bd) + (a_1d_1 + b_1c_1) = (bc + ad) + (a_1c_1 + b_1d_1), \text{ logo:}$$

$$\overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(a_1c_1 + b_1d_1, a_1d_1 + b_1c_1)}$$

Isso significa que a relação $(m, n) \rightarrow mn$ é uma aplicação de $Z \times Z$ em Z , e por isso, uma operação sobre Z . Trata-se, obviamente, da *multiplicação* em Z , da qual destacamos as propriedades a seguir, suponha que $m = \overline{(a, b)}$, $n = \overline{(c, d)}$ e $r = \overline{(e, f)}$

- *Associativa:* $m(nr) = (mn)r$, para quais $m, n, r \in Z$. De fato,

$$m(nr) = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(ce + df, cf + de)}$$

$$m(nr) = \overline{(ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bce + bdf)}$$

$$m(nr) = \overline{(ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce)}$$

$$m(nr) = \overline{(ac + bd, ad + bc)} \cdot \overline{(e, f)} = (mn)r$$

- *Comutativa:* De fato, $mn = \overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(ca + db, cb + da)} = nm$.

- *Existe elemento neutro:* é a classe $(1, 0)$, a qual indicaremos por apenas 1, pois:

$$\forall \overline{(a, b)} \in Z \Rightarrow \overline{(1, 0)} \cdot \overline{(a, b)} = \overline{(1 \cdot a + 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a)} = \overline{(a, b)}$$

- *Lei do anulamento do produto:* Se $m, n \in Z$ e $mn = 0$, então $m = 0$ ou $n = 0$. De fato, como todo elemento de Z pode ser representado univocamente sob uma das seguintes formas: $\overline{(a, 0)}$ ou $\overline{(0, a)}$ para algum $a \in N$, vamos supor, por exemplo, $m = \overline{(a, 0)}$ e $n = \overline{(0, b)}$, e ainda temos por hipótese que $mn =$

$\overline{(0,ab)} = \overline{(0,0)}$, daí $0 + 0 = ab + 0$ ou $ab = 0$ (em N), implica dizer que $a = 0$ ou $b = 0$, donde $m = 0$ ou $n = 0$.

- *Distributiva*: Para quaisquer $m, n, r \in Z$, $m \cdot (n + r) = (n + r) \cdot m$. De fato, pois:

$$\begin{aligned} m \cdot (n + r) &= \overline{(a,b)} \cdot \overline{[(c+e, d+f)]} \\ m \cdot (n + r) &= \overline{(a(c+e) + b(d+f), a(d+f) + b(c+e))} \\ m \cdot (n + r) &= \overline{((c+e)a + (d+f)b, (d+f)a + (c+e)b)} \\ m \cdot (n + r) &= \overline{[(c+e, d+f)]} \cdot \overline{(a,b)} \\ m \cdot (n + r) &= (n + r) \cdot m \end{aligned}$$

3.2.5 Relação de ordem em Z

Se $m \in Z$, então $m = \overline{(a,0)}$ ou $m = \overline{(0,a)}$, para algum $a \in N$. Assim, segundo Domingues (1991), pode ser feito:

$$\begin{array}{ll} \overline{(0,0)} = 0 & \overline{(0,1)} = -1 \\ \overline{(1,0)} = +1 & \overline{(0,2)} = -2 \\ \overline{(2,0)} = +2 & \overline{(0,3)} = -3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Logo torna-se válido escrever $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$, assim $Z_+ = \{0, +1, +2, +3, \dots\}$ e $Z_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$. Os elementos de Z_+ se dizem inteiros positivos e os de Z_- inteiros negativos. Todo elemento $m \in Z_+^* = \{+1, +2, +3, \dots\}$ é chamado inteiros estritamente positivo, e todo $m \in Z_-^* = \{\dots, -3, -2, -1\}$ é um inteiro estritamente negativo.

Definição 3: Sejam $m, n \in Z$ diz-se que m é menor que ou igual a n e anota-se $m \leq n$ se $n = m + r$ para algum $r \in Z_+$. Neste caso também se pode escrever $n \geq m$, o que se lê n é maior que ou igual a m .

Se $n = m + r$, onde $r \in Z_+^*$ então m se diz menor que n . Notação: $m < n$. É equivalente a dizer que n é maior que m e anotar $n > m$.

Em particular $0 \leq r$, para todo $r \in Z_+$, pois $r = 0 + r$; e $s \leq 0$, $\forall s \in Z_-$, já que $0 = s + (-s)$. Também $0 < r$, para todo $r \in Z_+^*$ e $r < 0$ para todo $r \in Z_-^*$.

Vejamos agora as propriedades mais importantes da relação $\leq$ sobre Z .

a) *Reflexiva*: $m \leq m$, $\forall m \in Z$, pois $m = m + 0$ e $0 \in Z_+$

b) *Anti-simétrica*: Vamos supor que $m \leq n$ e $n \leq m$. Então $m = n + r_1$, onde $r_1 = \overline{(a, 0)}$, para algum $a \in N$, e $n = m + r_2$, onde $r_2 = \overline{(b, 0)}$, sendo b um conveniente elemento de N . Então:

$m = n + r_1 = (m + r_2) + r_1 = m + (r_1 + r_2) = m + \overline{(a + b, 0)}$, o que implica pela lei do cancelamento da adição:

$$\overline{(a + b, 0)} = \overline{(0, 0)}$$

Daí, $a + b = 0$ (em N) e portanto $a = b = 0$. Donde $r_1 = r_2 = 0$ e $m = n$.

c) *Transitiva*: $m \leq n$ e $n \leq q \Rightarrow m \leq q$. De fato, pois da hipótese temos que $n = m + r_1$ e $q = n + r_2$. Assim:

$$n + q = (m + r_1) + (n + r_2)$$

$$n + q = m + n + (r_1 + r_2)$$

Considerando $r = r_1 + r_2$, teremos que:

$$n + q = m + n + r_3$$

Utilizando a lei do cancelamento teremos:

$$q = m + r, \text{ logo } m \leq q$$

d) $m \leq n$ ou $n \leq m$

Vamos supor $m = \overline{(a, 0)}$ e $n = \overline{(b, 0)}$. Se $a \leq b$, então $b = a + c$, para algum $c \in N$ e portanto

$$n = \overline{(b, 0)} = \overline{(a + c, 0)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(c, 0)} = m + \overline{(c, 0)}$$

O que garante a relação $m \leq n$. Se ao contrário ocorresse $b \leq a$, então valeria $n \leq m$.

O caso $m = \overline{(0, a)}$ e $n = \overline{(0, b)}$ pode ser encaminhado do mesmo modo.

Finalmente, seja $m = \overline{(a, 0)}$ e $n = \overline{(0, b)}$. Então

$m = \overline{(a, 0)} = \overline{(a + b, b)} = \overline{(0, b)} + \overline{(a + b, 0)} = n + \overline{(a + b, 0)}$, de onde $n \leq m$.

Uma consequência das considerações anteriores é que: $m \in Z_-$ e $n \in Z_+ \Rightarrow m \leq n$.

e) *Compatibilidade da adição*: Se $m \leq n$, então $m + p \leq n + p$, para todo $p \in Z$.

De fato, pois da hipótese segue que $m + r = n$, para algum $r \in Z_+$, assim para todo $p \in Z$ temos que $n + p = (m + r) + p = (m + p) + r$. Donde: $m + p \leq n + p$.

f) *Compatibilidade da Multiplicação*: $m \leq n$ e $0 \leq p \Rightarrow mp \leq np$.

De fato, por hipótese $n = m + r$, onde $r = \overline{(a, 0)}$, para algum $a \in N$. Supondo $p = \overline{(b, 0)}$ e como $pn = pm + pr$, onde $pr = \overline{(ab, 0)} \in Z_+$, então $pm \leq pn$.

Diante do exposto, Domingues (1991) destaca que o conjunto Z , munido das operações introduzidas nas definições 1 e 2, mais a relação de ordem vista anteriormente, é chamado de *conjunto dos números inteiros*, e os elementos de Z , nessas condições, são chamados de *números inteiros*.

3.2.6 Imersão de N em Z

Mostraremos agora, dentro da construção que fizemos, em que termos se pode considerar N como parte de Z . Então:

- $Im(f) = \{f(a) | a \in N\} = Z_+ = \{0, +1, +2, +3, \dots\}$;
- $f(a) = f(b) \Rightarrow \overline{(a, 0)} = \overline{(b, 0)} \Rightarrow a = b$, o que mostra que f é injetora;
- $f(a + b) = \overline{(a + b, 0)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(b, 0)} = f(a) + f(b), \forall a, b \in N$;
- $f(ab) = \overline{(ab, 0)} = \overline{(a, 0)} \cdot \overline{(b, 0)} = f(a)f(b), \forall a, b \in N$
- Se $a \leq b$, então $b = a + c$, para algum $c \in N$ e portanto:
 $f(b) = \overline{(b, 0)} = \overline{(a + c, 0)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(c, 0)} = f(a) + \overline{(c, 0)}$, o que significa que:

$$f(a) \leq f(b)$$

Assim, no que se refere aos aspectos algébricos e à ordenação, Z_+ é uma cópia de N , obtida através de f . Daí porque se pode identificar N com Z_+ e considerar que $N \subset Z$. Mais especificamente, nessa identificação o número natural 0 passa a se confundir com o inteiro $0 = \overline{(0, 0)}$, o natural 1 com o inteiro $+1 = \overline{(1, 0)}$ e assim por diante. A função f considerada costuma ser chamada *imersão de N em Z* , por razões óbvias em face das propriedades que destacamos a seu respeito.

Assim, se $x = \overline{(a, b)} \in Z$, então $x = \overline{(a, b)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(0, b)} = \overline{(a, 0)} + [-\overline{(b, 0)}]$ e, em consequência da identificação feita, $x = a - b$. Logo, todo inteiro é igual à diferença em Z , entre dois números naturais.

Por outro lado se $a, b \in N$, levando em conta a identificação de N com Z_+ :

$$a - b = \overline{(a, 0)} - \overline{(b, 0)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(0, b)} = \overline{(a, b)}$$

o que mostra que a subtração de dois números naturais é sempre possível em $\mathbb{Z}$.

4 A SEQUENCIA DIDÁTICA

Nesta seção apresentamos uma proposta de sequência didática para o ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros, elaborada a partir das informações adquiridas na revisão de estudos presente neste trabalho, além da concepção de alunos e professores sobre o ensino destas operações na educação básica. Esta proposta de sequência didática foi estruturada conforme o modelo proposto por Cabral (2017), denominado Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC). Para cada atividade definimos título, objetivo de aprendizagem do aluno, orientações ao professor e material necessário para realização da atividade.

4.1 DIAGNÓSTICO INICIAL

Para aplicação da sequência didática proposta para o ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros, alguns conhecimentos elementares sobre números e operações no campo dos números naturais são de fundamental importância, tais como: reconhecimento dos significados dos números naturais em diferentes contextos, localização na reta numérica e as propriedades das quatro operações aritméticas mais elementares. É importante também ressaltarmos que, como este trabalho tem o intuito de apresentar uma proposta de ensino para as quatro operações mais elementares com números inteiros, os aprendizes, também, têm que ter os seguintes conhecimentos prévios: módulo de um número inteiro, números opostos ou simétricos e o conhecimento para comparar números naturais e números inteiros.

Deste modo, como este pesquisador é professor desta turma desde o início do período letivo de 2019, tendo a função de ministrar os conteúdos matemáticos que antecedem o ensino destas quatro operações fundamentais, não houve a necessidade de aplicarmos um teste diagnóstico para verificar se estes aprendizes possuíam os conhecimentos prévios necessários para a aplicação da sequência didática proposta, pois, no primeiro semestre de 2019, ministramos aulas explosivas dialogadas, seguindo normalmente o planejamento curricular da disciplina, aulas que foram de essencial importância

para construir todo o conhecimento circunscrito necessário para o ensino do objeto matemático eleito neste trabalho.

Neste sentido, todo esse planejamento minucioso teve como único objetivo reduzir as possíveis dificuldades que, por ventura, possam ocorrer durante o processo de aplicação da sequência didática.

4.2 CONCEPÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática proposta neste trabalho foi elaborada com a preocupação de afastar os aprendizes da “ditadura” do modelo tradicional – definição, exemplos e exercícios – possibilitando que estes alunos pudessem ser inseridos em uma prática discursiva dialógica, facilitando a descoberta de “[...] regularidades e, mesmo intuitivamente, pudessem perceber a necessidade e a utilidade de se estabelecer generalizações.” (CABRAL, 2017, p. 39).

Neste sentido, esta sequência é composta de sete UARC's⁹, onde cada uma trata de um tópico relacionado ao tema em questão. Dessa forma, a UARC 1 e a UARC 2 tratam do ensino da adição de números inteiros com sinais iguais e diferentes, respectivamente, a UARC 3 trata do ensino da soma de números inteiros simétricos, a UARC 4 aborda a subtração de números inteiros, a UARC 5 e a UARC 6 abordam o ensino da multiplicação de números inteiros e, por fim, a UARC 7 enfatiza a divisão de números inteiros. Após cada UARC, é feita uma intervenção formalizante, de responsabilidade do professor, a fim de concretizar as ideias construídas pelas intervenções estruturantes. Finalmente, após as intervenções formalizantes, foram inseridas as intervenções avaliativas restritivas, as quais tem a finalidade de aferir se a aprendizagem do conceito objeto de reconstrução foi assimilado pelos aprendizes.

É importante destacar que nesta sequência didática não constam intervenções avaliativas aplicativas, pois, segundo Cabral (2017) estas intervenções são opcionais, e cabe ao professor decidir, devido a diversas situações práticas que possam ocorrer durante a aplicação da sequência didática. No caso desta pesquisa, esta decisão se fez necessária devido a

⁹ A sigla UARC foi substituída pela palavra Atividade no momento da aplicação da sequência didática.

grande dificuldade que os alunos da terceira etapa da educação de jovens e adultos têm no processo da leitura e interpretação de textos, fato perfeitamente explicado, pois muitos deles foram recentemente alfabetizados na etapa anterior, além de haver uma parcela destes alunos que, há alguns anos, estavam fora da sala de aula, os quais também têm grande deficiência na leitura e na interpretação de textos.

4.2.1 Uarc 1 – Soma de Números Inteiros (1ª parte)

TÍTULO: Soma de números inteiros com sinais iguais.

OBJETIVO: Descobrir a técnica para somar números inteiros com sinais iguais utilizando a ideia de débito/crédito.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR: Para o desenvolvimento desta atividade o professor pode ler junto com os alunos o texto que compõe a Intervenção Inicial, provocando uma discussão sobre as definições informais das palavras débito e crédito. O docente também deve enfatizar que o contexto apresentado se refere a uma situação que acontece diariamente no cotidiano dos aprendizes. Caso ache necessário, o professor também pode iniciar o preenchimento da primeira linha do quadro 9, a fim de “quebrar” o nervosismo que, por ventura, os alunos possam ter para iniciar o desenvolvimento da atividade.

MATERIAL UTILIZADO: Lápis ou caneta e ficha instrucional com a sequência didática.

PROCEDIMENTOS: Leia o **texto abaixo** com atenção e responda os itens a seguir.

[Intervenção Inicial – Modalidade Exploração Potencial]

João é morador do bairro do Tapanã e, assim como milhões de brasileiros, não tinha um emprego formal, entregava água mineral nas localidades de seu bairro. Um dia a sorte sorriu a João, pois uma semana após ter deixado seu currículo em uma grande rede de supermercados da capital paraense, ele foi chamado para assumir uma vaga de estoquista.

Ao chegar no departamento pessoal desta empresa, João foi questionado se possuía uma conta corrente para receber seu salário, porém

ele respondeu que não tinha, pois, no seu antigo emprego, ele recebia seu salário em mãos.

Assim, João teve que ir a uma agência bancária para abrir uma conta corrente. Ao ser atendido pelo gerente da agência, ele foi informado que esta conta corrente não serviria apenas para o depósito de seu salário, mais também para a realização de qualquer outra operação financeira, como transferências e pagamentos. O gerente também informou que sempre João poderia verificar as movimentações financeiras de sua conta pelo extrato bancário, e caso o saldo estivesse indicando um valor **negativo**, ele teria um **débito**, ou seja, isso significaria que João estaria **devendo** aquele valor ao banco, da mesma forma se o extrato informasse um valor **positivo**, significaria que João teria um **crédito** daquele valor, ou seja, esse valor estaria **disponível** a João.

[Intervenção Exploratória - 01] – O Quadro abaixo representa o extrato bancário de João em algumas datas do mês de janeiro de 2019. Preencha a quinta coluna do referido quadro, calculando o valor do saldo bancário de João que estará presente em sua conta corrente no final do dia.

Quadro 9 - Extrato Bancário de João referente a janeiro/2019

Data	Saldo Inicial (R\$)	Crédito (R\$)	Débito (R\$)	Saldo Final (R\$)
01/01/2019	+ 10,00	+ 20,00	####	
04/01/2019	+ 30,00	+ 40,00	####	
07/01/2019	+ 50,00	+ 60,00	####	
10/01/2019	+ 70,00	+ 80,00	####	
13/01/2019	+ 90,00	+ 100,00	####	
16/01/2019	- 10,00	####	- 20,00	
19/01/2019	- 30,00	####	- 40,00	
22/01/2019	- 50,00	####	- 60,00	
25/01/2019	- 70,00	####	- 80,00	
28/01/2019	- 90,00	####	- 100,00	

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

[Intervenção Reflexiva - 02] – Analisando cada uma das linhas do quadro acima, os sinais dos números nas colunas *Saldo Inicial*, *Crédito* e *Débito* são iguais ou diferentes?

[Intervenção Reflexiva - 03] – O Saldo final nas cinco primeiras linhas é positivo ou negativo?

[Intervenção Reflexiva - 04] – O Saldo final nas cinco últimas linhas é positivo ou negativo?

[Intervenção Reflexiva - 05] - Qual a operação matemática realizada para obter o saldo final?

() Soma

() Subtração

[Intervenção Exploratória - 06] – Discuta com seus colegas a criação de uma regra para se calcular o saldo final em cada uma das linhas do quadro acima e descreva os procedimentos.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 1

A UARC 1 nos revelou que para somarmos números inteiros com sinais iguais basta somar o valor absoluto dos números envolvidos e repetir o sinal.

[Intervenção Avaliativa Restritiva - 07] – Calcule:

a) $+2 + 3 =$

b) $+7 + 8 =$

c) $+9 + 10 =$

d) $-2 - 3 =$

e) $-7 - 8 =$

f) $-9 - 10 =$

4.2.2 Uarc 2 – soma de números inteiros (2ª parte)

TÍTULO: Soma de números inteiros com sinais diferentes.

OBJETIVO: Descobrir a técnica para somar números inteiros com sinais diferentes utilizando a ideia de débito/crédito.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR: O professor deve explorar novamente as definições informais das palavras débito e crédito, e enfatizar que o raciocínio para preenchimento do Quadro 10 é o mesmo utilizado no preenchimento do Quadro da atividade anterior.

MATERIAL UTILIZADO: Lápis ou caneta e ficha instrucional com a sequência didática.

[Intervenção Inicial – Modalidade Conexão Pontual]: O Quadro abaixo representa o extrato bancário de João em algumas datas do mês de fevereiro de 2019. Preencha a quinta coluna do referido quadro, calculando o

valor do saldo bancário de João que estará presente em sua conta corrente no final do dia.

Quadro 10 - Extrato Bancário de João referente a fevereiro/2019

Data	Saldo Inicial (R\$)	Crédito (R\$)	Débito (R\$)	Saldo Final (R\$)
01/02/2019	- 10,00	+ 20,00	####	
04/02/2019	- 30,00	+ 40,00	####	
07/02/2019	- 50,00	+ 60,00	####	
10/02/2019	- 70,00	+ 80,00	####	
13/02/2019	- 90,00	+ 100,00	####	
16/02/2019	+10,00	####	- 20,00	
19/02/2019	+ 30,00	####	- 40,00	
22/02/2019	+50,00	####	- 60,00	
25/02/2019	+ 70,00	####	- 80,00	
28/02/2019	+ 90,00	####	- 100,00	

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

[Intervenção Reflexiva - 01] – Analisando cada uma das linhas do quadro acima, os sinais dos números nas colunas Saldo Inicial, Crédito e Débito são iguais ou diferentes?

[Intervenção Reflexiva - 02] – O Saldo final nas cinco primeiras linhas é positivo ou negativo?

[Intervenção Reflexiva - 03] – O Saldo final nas cinco últimas linhas é positivo ou negativo?

[Intervenção Reflexiva - 04] - Qual a operação matemática realizada para obter o saldo final?

() Soma

() Subtração

[Intervenção Exploratória - 05] – Discuta com seus colegas a criação de uma regra para se calcular o saldo final em cada uma das linhas do quadro acima e descreva os procedimentos.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 2

A UARC 2 nos revelou que para somarmos números inteiros com sinais diferentes basta subtrairmos o valor absoluto dos números envolvidos e repetir o sinal do maior valor absoluto.

[Intervenção Avaliativa Restritiva - 06] – Calcule:

a) $+3 - 2 =$

b) $+8 - 7 =$

c) $+10 - 9 =$

d) $+2 - 3 =$

e) $+7 - 8 =$

f) $+9 - 10 =$

4.2.3 Uarc 3 – Soma de números inteiros (3ª parte)

TÍTULO: Soma de números inteiros simétricos.

OBJETIVO: Descobrir que a soma de números simétricos é nula.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR: É provável que nesta atividade os alunos não apresentem dificuldade para o preenchimento do Quadro, no entanto o professor deve ficar atento, a fim de identificar se algum discente esteja em “descompasso” com os demais alunos da classe. Caso isso ocorra, o professor deve promover discussões entre os grupos, tendo em vista o nivelamento do aprendizado.

MATERIAL UTILIZADO: Lápis ou caneta e ficha instrucional com a sequência didática.

[Intervenção Inicial – Modalidade Conexão Pontual]: O Quadro abaixo representa o extrato bancário de João em algumas datas do mês de março de 2019. Preencha a quinta coluna do referido quadro, calculando o valor do saldo bancário de João que estará presente em sua conta corrente no final do dia.

Quadro 11 - Extrato Bancário de João referente a março/2019

Data	Saldo Inicial (R\$)	Crédito (R\$)	Débito (R\$)	Saldo Final (R\$)
01/03/2019	- 10,00	+ 10,00	####	
04/03/2019	- 30,00	+ 30,00	####	
07/03/2019	- 50,00	+ 50,00	####	
10/03/2019	- 70,00	+70,00	####	
13/03/2019	- 90,00	+ 90,00	####	
16/03/2019	+20,00	####	- 20,00	
19/03/2019	+ 40,00	####	- 40,00	
22/03/2019	+60,00	####	- 60,00	
25/03/2019	+ 70,00	####	- 70,00	
28/03/2019	+ 90,00	####	- 90,00	

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

[Intervenção Reflexiva - 01] - Qual a operação matemática realizada para obter o saldo final?

() Soma

() Subtração

[Intervenção Reflexiva - 02] - De acordo com o quadro acima o que acontece quando somamos números simétricos?

[Intervenção Exploratória - 03] – Discuta com seus colegas a criação de uma regra para se calcular o saldo final em cada uma das linhas do quadro acima e descreva os procedimentos.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 3

A UARC 3 nos revelou que a soma de dois números inteiros simétricos é sempre nula.

[Intervenção Avaliativa Restritiva - 04] – Calcule:

a) $+3 - 3 =$

b) $+8 - 8 =$

c) $+11 - 11 =$

d) $+2 - 2 =$

e) $+7 - 7 =$

f) $+9 - 9 =$

4.2.4 Uarc 4 – Subtração de números inteiros

TÍTULO: Subtração de números inteiros.

OBJETIVO: Descobrir a técnica para subtrair números inteiros.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR: Para a realização desta atividade o docente deve reportar os alunos à ideia de números opostos ou simétricos aprendida no conjunto dos números naturais, além de seguir o modelo de resolução apresentado na primeira linha do Quadro 12. Após esta explicação é provável que os discentes preencham referido Quadro sem dificuldades.

MATERIAL UTILIZADO: Lápis ou caneta e ficha instrucional com a sequência

[Intervenção Inicial – Modalidade Conexão Pontual]: Usando a ideia de número oposto e também a ideia de débito/crédito, calcule as operações, preenchendo o quadro abaixo, conforme o modelo:

Quadro 12 - Subtração de números inteiros

Operação	Ideia de número simétrico	Resultado
$(+3) - (-4)$	$+3 + 4$	$+7$
$(+3) - (+4)$		
$(+5) - (-2)$		
$(+5) - (+2)$		
$(+7) - (-6)$		
$(+7) - (+6)$		
$(+5) - (-4)$		
$(+5) - (+4)$		
$(+8) - (-6)$		
$(+8) - (+6)$		

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

[Intervenção Reflexiva - 01] – Após o preenchimento do quadro acima, o que aconteceu com o sinal do segundo número na segunda coluna do quadro acima?

[Intervenção Exploratória - 02] – De acordo com o padrão que você percebeu nas atividade anterior, coloque (V) para verdadeiro e (F) para falso em cada uma das igualdades abaixo:

$$(\quad) (+8) - (-2) = +8 - 2$$

$$(\quad) (+8) - (-2) = +8 + 2$$

$$(\quad) (+4) - (-3) = +4 + 3$$

$$(\quad) (+4) - (-3) = +4 - 3$$

$$(\quad) (+9) - (-5) = +9 - 5$$

$$(\quad) (+9) - (-5) = +9 + 5$$

$$(\quad) (+10) - (-5) = +10 - 5$$

$$(\quad) (+10) - (-5) = +10 + 5$$

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 4

A UARC 4 nos revelou que para subtraímos dois números inteiros, basta invertermos o sinal do segundo número e calcularmos o valor da operação matemática remanescente.

[Intervenção Avaliativa Restritiva - 03] – Calcule:

a) $+4 - (+3) =$

b) $+8 - (+2) =$

c) $+10 - (-9) =$

d) $+2 - (-5) =$

e) $+7 - (-3) =$

f) $+9 - (+4) =$

4.2.5 Uarc 5 – Multiplicação de Números Inteiros (1ª parte)

TÍTULO: Multiplicação de números inteiros com sinais iguais positivos e sinais diferentes.

OBJETIVO: Descobrir a técnica para multiplicar números inteiros com sinais iguais positivos e sinais diferentes.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR: Para a realização desta atividade o docente deve relembrar aos aprendizes que a multiplicação de números naturais pode ser relacionada à soma de parcelas iguais, conforme modelo apresentado na primeira linha do Quadro 13. O professor também deve enfatizar que este raciocínio é aplicado, da mesma forma, para os números negativos.

MATERIAL UTILIZADO: Lápis ou caneta e ficha instrucional com a sequência didática.

[Intervenção Inicial – Modalidade Conexão Pontual]: Preencha o quadro abaixo de acordo com o modelo da primeira linha.

Quadro 13 - Multiplicação de Números Inteiros (1ª parte)

Soma	Resultado	Multiplicação	Propriedade Comutativa
$+ 5 + 5$	$+10$	$(+2) \times (+5)$	$(+5) \times (+2)$
$+ 5 + 5 + 5$			
$+ 5 + 5 + 5 + 5$			
$+ 5 + 5 + 5 + 5 + 5$			
$- 4 - 4$			
$- 4 - 4 - 4$			
$- 4 - 4 - 4 - 4$			
$- 4 - 4 - 4 - 4 - 4$			

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

[Intervenção Reflexiva - 1] – De acordo com o quadro acima, a multiplicação de dois números positivos tem como resultado um número positivo ou negativo?

[Intervenção Reflexiva - 2] – E a multiplicação de um número positivo com outro negativo tem como resultado um número positivo ou negativo?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 5

A UARC 5 nos revelou que a multiplicação de dois números inteiros com sinais iguais positivos e sempre positiva e a multiplicação de dois números inteiros com sinais diferentes e sempre negativa.

[Intervenção Avaliativa Restritiva - 03] – Calcule:

a) $(+4) \times (+3) =$

b) $(+3) \times (+2) =$

c) $(+5) \times (-4) =$

d) $(-2) \times (+5) =$

e) $(-7) \times (+3) =$

f) $(+9) \times (+4) =$

4.2.6 Uarc 6 – Multiplicação de Números Inteiros (2ª parte)

TÍTULO: Multiplicação de números inteiros com sinais iguais negativos

OBJETIVO: Descobrir a técnica para multiplicar números inteiros com sinais iguais negativos.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR: Nesta atividade o professor deve instigar os alunos, após a resolução das multiplicações do Quadro 14, a perceberem que os resultados obtidos proporcionam o surgimento de uma sequência de números, a qual segue um padrão constante de variação. A descoberta deste padrão de variação é de extrema importância para o preenchimento correto Quadro 15, a fim de que os discentes constatem que o produto de dois números inteiros negativos é positivo.

MATERIAL UTILIZADO: Lápis ou caneta e ficha instrucional com a sequência didática.

[Intervenção Inicial – Modalidade Conexão Pontual]: Preencha o quadro abaixo.

Quadro 14 - Multiplicação de Números Inteiros (2ª parte - A)

Operação	=	Resultado
$+6 \times (-4)$	=	
$+5 \times (-4)$	=	
$+4 \times (-4)$	=	
$+3 \times (-4)$	=	
$+2 \times (-4)$	=	
$+1 \times (-4)$	=	
$0 \times (-4)$	=	

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

[Intervenção Reflexiva - 1] – O que acontece com o 1º fator quando se lê as operações de cima para baixo?

[Intervenção Reflexiva - 2] – O que acontece com o 2º fator quando se lê as operações de cima para baixo?

[Intervenção Reflexiva - 3] – O que acontece com o resultado quando se lê as contas de cima para baixo?

[Intervenção Exploratória - 4] – Utilizando o mesmo padrão descoberto no quadro anterior, preencha o quadro abaixo.

Quadro 15 - Multiplicação de Números Inteiros (2ª parte - B)

Operação	=	Resultado
$+6 \times (-4)$	=	
$+5 \times (-4)$	=	
$+4 \times (-4)$	=	
$+3 \times (-4)$	=	
$+2 \times (-4)$	=	
$+1 \times (-4)$	=	
$0 \times (-4)$	=	
$(-1) \times (-4)$	=	
$(-2) \times (-4)$	=	
$(-3) \times (-4)$	=	
$(-4) \times (-4)$	=	
$(-5) \times (-4)$	=	
$(-6) \times (-4)$	=	

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

[Intervenção Reflexiva - 5] - Com base no que você observou: Um número negativo multiplicado por outro número negativo dá um resultado positivo ou negativo?

[Intervenção Exploratória – 6] - Preencha a segunda coluna do quadro abaixo informando se o sinal da multiplicação é positivo ou negativo.

Quadro 16 - Multiplicação de números inteiros (Regra de Sinais)

Multiplicação	Sinal
(Número positivo) x (Número positivo)	
(Número negativo) x (Número negativo)	
(Número positivo) x (Número negativo)	
(Número negativo) x (Número positivo)	

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 6

A UARC 6 nos revelou que a multiplicação de dois números inteiros com sinais iguais negativos é sempre positiva.

[Intervenção Avaliativa Restritiva - 7] – Calcule:

a) $(-8) \times (-3) =$

b) $(-3) \times (-2) =$

c) $(-5) \times (-7) =$

d) $(-2) \times (-5) =$

e) $(-7) \times (-3) =$

f) $(-9) \times (-4) =$

4.2.7 Uarc 7 – Divisão de Números Inteiros

TÍTULO: Divisão de números inteiros.

OBJETIVO: Descobrir a técnica para dividir números inteiros.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR: Nesta atividade o professor deve relembrar aos aprendizes que toda a operação matemática tem sua inversa, técnica muito utilizada pelos professores das séries iniciais para “tirar a prova real” dos cálculos realizados. No caso desta atividade o professor deve enfatizar que toda a multiplicação pode ser transformada em duas divisões, conforme modelo apresentado na primeira linha do Quadro 17.

MATERIAL UTILIZADO: Lápis ou caneta e ficha instrucional com a sequência didática

[Intervenção Inicial – Modalidade Conexão Pontual]: Preencha o quadro abaixo, transformando uma multiplicação de números inteiros em duas divisões de números inteiros, conforme modelo inicial.

Quadro 17 - Divisão de números inteiros

Multiplicação	Divisão (a)	Divisão (b)
$(+2) \times (+3) = +6$	$(+6) \div (+2) = +3$	$(+6) \div (+3) = +2$
$(-2) \times (-3) = +6$		
$(-2) \times (+3) = -6$		
$(+4) \times (+5) = +20$		
$(-4) \times (-5) = +20$		
$(-4) \times (+5) = -20$		
$(+6) \times (+7) = +42$		
$(-6) \times (-7) = +42$		
$(-6) \times (+7) = -42$		

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

[Intervenção Reflexiva - 1] – Analisando as divisões que apareceram na segunda e na terceira coluna do quadro acima, quando dividimos dois números inteiros com sinais iguais o resultado da divisão é positivo ou negativo?

[Intervenção Reflexiva - 2] – E quando dividimos dois números inteiros com sinais diferentes, o resultado é positivo ou negativo?

[Intervenção Exploratória – 3] - Preencha a segunda coluna do quadro abaixo informando se o sinal da divisão é positivo ou negativo.

Quadro 18 - Divisão de números inteiros (Regra de Sinais)

Multiplicação	Sinal
(Número positivo) $\div$ (Número positivo)	
(Número negativo) $\div$ (Número negativo)	
(Número positivo) $\div$ (Número negativo)	
(Número negativo) $\div$ (Número positivo)	

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 7

A UARC 7 nos revelou que a divisão de dois números inteiros com sinais iguais é sempre positiva e a divisão de números inteiros com sinais diferentes é sempre negativa.

[Intervenção Avaliativa Restritiva - 4] – Calcule:

a) $(+4) \div (+2) =$

b) $(+6) \div (+3) =$

c) $(-10) \div (-5) =$

d) $(-12) \div (-2) =$

e) $(-16) \div (+3) =$

f) $(+9) \div (-3) =$

4.2.8 Intervenção Avaliativa Restritiva Final

- Calcule:

• $-20 - 30 =$

• $+20 - 30 =$

• $+30 - 20 =$

• $-20 - (+10) =$

• $-20 - (-10) =$

• $-20 - (-20) =$

• $(-3) \times (+5) =$

• $(+3) \times (-5) =$

• $(-3) \times (-5) =$

• $(-30) \div (+5) =$

• $(+30) \div (-5) =$

• $(-30) \div (-5) =$

• $+25 + 15 =$

• $-25 - 15 =$

• $-25 + 15 =$

• $+25 - (+15) =$

• $+25 - (-15) =$

• $+25 - (+25) =$

• $(+10) \times (+8) =$

• $(-10) \times (-8) =$

• $(-10) \times (+8) =$

• $(+20) \div (+2) =$

• $(-20) \div (-2) =$

• $(+20) \div (-2) =$

5 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E VERIFICAÇÃO DOS INDÍCIOS DE APRENDIZAGEM

Nesta Seção descrevemos como se deram as etapas de aplicação e verificação dos indícios de aprendizagem proporcionados pela utilização da sequência didática para ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros.

5.1 APLICAÇÃO

A aplicação da sequência didática para ensino das quatro operações mais elementares envolvendo números inteiros ocorreu no turno noturno em uma turma da terceira etapa da educação de jovens e adultos do ensino fundamental de uma escola pública da rede Estadual de Ensino da região metropolitana de Belém do Pará. A escolha do local deu-se em função do professor/pesquisador ministrar aulas nesta escola o que facilitava a relação com a direção e corpo docente. Todas as sessões que envolveram o processo de aplicação foram registrados em vídeo, com autorização prévia dos responsáveis dos alunos, quando estes eram menores de 18 anos, conforme Anexo C.

Conforme citado anteriormente, não foi necessário realizar teste de verificação para constatar se os discentes possuíam conhecimento prévio necessário para a execução das atividades relacionadas à sequência didática, pois como este pesquisador é professor desta turma, tinha a incumbência de ministrar todo o conteúdo matemático necessário que antecede o ensino das quatro operações mais elementares com números inteiros, como por exemplo, o conjunto dos números naturais, suas operações e propriedades, além da apresentação do conjunto dos números inteiros.

Uma vez ministradas as aulas expositivas dialogadas dos conhecimentos circunscritos necessários para a execução das atividades de ensino, procedemos a aplicação da sequência didática nos dias 09, 13, 16 e 20 de setembro de 2019, esses eram os dias em que ocorriam as aulas de Matemática. No primeiro e no terceiro dia cada encontro contou com três aulas,

no segundo e no quarto dia, os encontros contaram com duas aulas cada, aulas estas que possuíam um tempo de 40 minutos.

A sequência didática foi aplicada pelo próprio professor/pesquisador em colaboração com um professor de Matemática, o qual, também, é discente do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

Para a aplicação das atividades, a classe foi dividida em cinco grupos (A, B, C, D e E), cuja composição se deu pelo critério de afinidade entre os participantes, tendo sido mantida nos quatro dias de atividades. No primeiro e segundo dias tivemos a participação de 22 alunos que foram classificados conforme a posição em que se encontravam sentados no grupo ao qual pertenciam:

- grupo A com cinco alunos (A1, A2, A3, A4 e A5);
- grupo B com quatro alunos (B1, B2, B3 e B4);
- grupo C com quatro alunos (C1, C2, C3 e C4);
- grupo D com quatro alunos (D1, D2, D3 e D4);
- grupo E com cinco alunos (E1, E2, E3, E4 e E5);

No terceiro dia de atividades, tivemos a participação de 19 alunos, ficando o grupo A com três e os grupos B, C, D e E com quatro alunos cada.

No último dia de atividades participaram 18 aprendizes, sendo que o grupo A ficou com quatro alunos, o grupo D com cinco e os grupos B, C e E com três aprendizes.

A sequência didática aplicada era composta por sete atividades de reconstrução do conhecimento e uma Intervenção Avaliativa Restritiva Final (Apêndice D), a qual tinha como objetivo consolidar os conhecimentos aprendidos. No primeiro encontro de aplicação foram realizadas as duas primeiras atividades, no segundo as atividades três e quatro, no terceiro as atividades cinco e seis, e, finalmente no último encontro a atividade sete. No tópico a seguir descrevemos a etapa que envolve a verificação dos indícios de aprendizagem provocados pela aplicação da sequência didática.

5.2 VERIFICAÇÃO DOS INDÍCIOS DE APRENDIZAGEM

Esta etapa tem como propósito identificar os possíveis indícios de aprendizagem demonstrados pelos discentes no decorrer da aplicação da sequência didática, considerando os objetivos que se esperavam que fossem alcançados em cada atividade proposta. Para esta análise utilizamos como aporte teórico a Análise Microgenética proposta por Góes (2000) em conjunto com as contribuições da Análise do Discurso de Mortimer e Scott (2002).

Os dados analisados envolvem os protocolos das atividades preenchidas pelos alunos e a gravação de vídeo, a qual teve três horas, cinquenta e sete minutos e trinta e oito segundos. Os áudios foram transcritos, a fim de retirar as interações verbais professor-aluno e aluno-aluno. Para fins desta análise minuciosa consideramos:

Turno: fala do professor/pesquisador ou do aluno.

Segmento: conjunto de turnos transcritos em ordem cronológica de cada tarefa que compõe uma atividade, tendo em vista os objetivos a serem alcançados.

Episódio: conjunto de segmentos, correspondendo a cada atividade da sequência didática.

No Quadro 19 a seguir, organizamos a estrutura dos recortes empregados para análise, a fim de disponibilizar uma melhor visualização de todo o processo de verificação dos possíveis indícios de aprendizagens proporcionados pela aplicação da sequência didática.

Quadro 19 - Sistematização dos recortes adotados.

Epis.	Ativ.	Descrição	Seg.	Objetivos	Turnos
I	Soma de Números Inteiros (1ª parte)	Situação didática, composta por seis tarefas tendo como propósito possibilitar ao aluno descobrir a regra para somar números inteiros com sinais iguais, utilizando a ideia de débito/crédito.	1	Identificar que em cada uma das linhas do extrato bancário os números inteiros envolvidos possuem sinais iguais.	1-87
			2	Perceber que para se calcular o saldo final basta somar os valores absolutos dos números inteiros envolvidos e repetir o sinal dos respectivos números.	88-146
II	Soma de Números Inteiros (2ª parte)	Situação didática, composta por seis tarefas tendo como propósito possibilitar ao aluno descobrir a regra para somar números inteiros com sinais diferentes, utilizando a ideia de débito/crédito.	3	Identificar que em cada uma das linhas do extrato bancário os números inteiros envolvidos possuem sinais diferentes.	147-183
			4	Perceber que para se calcular o saldo final basta subtrair os valores absolutos dos números inteiros envolvidos e repetir o sinal do maior valor absoluto.	184-222
III	Soma de Números Inteiros (3ª parte)	Situação didática, composta por cinco tarefas tendo como propósito possibilitar ao aluno descobrir a regra para somar números inteiros simétricos.	5	Identificar que a soma de números inteiros simétricos consiste em subtrair os valores absolutos dos referidos números e concluir que o resultado é sempre zero.	223-288

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Quadro 19 - Sistematização dos recortes adotados.

Epis.	Ativ.	Descrição	Seg.	Objetivos	Turnos
IV	Subtração de números inteiros	Situação didática, composta por quatro tarefas tendo como propósito possibilitar ao aluno descobrir a regra para subtrair números inteiros.	6	Perceber que a subtração de números inteiros consiste em somar o primeiro número com o simétrico do segundo.	289-387
V	Multiplicação de números inteiros com sinais iguais positivos e sinais diferentes.	Situação didática, composta por quatro tarefas tendo como propósito possibilitar ao aluno descobrir a regra para multiplicar números inteiros com sinais iguais positivos e sinais diferentes.	7	Identificar que a ideia de multiplicação de números naturais, partindo do princípio da soma de parcelas iguais, se desenvolve da mesma forma para os números inteiros negativos.	388-477
			8	Perceber que o resultado da multiplicação de dois números inteiros positivos é positivo e que o resultado da multiplicação de números inteiros com sinais diferentes é negativo.	478-533
VI	Multiplicação de números inteiros com sinais iguais negativos.	Situação didática, composta por sete tarefas tendo como propósito possibilitar ao aluno descobrir a técnica para multiplicar números inteiros com sinais iguais negativos.	9	Perceber que o resultado das multiplicações propostas na tarefa seguem um padrão, no qual há uma variação de quatro unidades.	534-576
			10	Identificar que multiplicação de dois números inteiros negativos tem como resultado um número inteiro positivo.	577-628

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Quadro 19 - Sistematização dos recortes adotados.

Epis.	Ativ.	Descrição	Seg.	Objetivos	Turnos
VII	Divisão de números inteiros.	Situação didática, composta por cinco tarefas tendo como propósito possibilitar ao aluno descobrir a regra para dividir números inteiros.	11	Identificar que, também no conjunto dos números inteiros, a operação inversa da multiplicação é a divisão.	629-691
			12	Identificar que a divisão de dois números inteiros com sinais iguais é positiva, assim como a divisão de dois números inteiros com sinais diferentes é negativa.	692-776
VIII	Intervenção Avaliativa Restritiva Final.	Atividade avaliativa composta de vinte e quatro exercícios.	13	Aplicar as técnicas aprendidas para somar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros.	777-857

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

5.2.1 Processo de Análise Microgenética

Episódio I

Turnos de 1 - 146

Segmento 1

Turnos 1 – 87

Para iniciar a atividade 1, o professor/pesquisador leu junto com os discentes a intervenção inicial, na modalidade exploração potencial, na qual relatava a estória de João, um entregador de água mineral que conseguiu empregar-se formalmente em uma grande rede de supermercados. Este texto inicial permitiu que os aprendizes resgassem o significado dos conceitos informais de débito e crédito, conceitos estes muito utilizados por eles em seus cotidianos, visto que há uma associação imediata das palavras débito e crédito com os números negativos e positivos, respectivamente.

Esta atividade possibilitou despertar o interesse dos discentes, pois, como no início de cada mês, eles começam a quitar suas dívidas com o recebimento de seus salários, muitas vezes, sobra ou falta dinheiro para honrá-las. Este fato possibilitou que os alunos preenchessem rapidamente a coluna “saldo final” do Quadro da primeira atividade.

(1) **Professor:** *Quando nós iniciamos os números inteiros nós vimos que o principal exemplo que está em nosso cotidiano de números inteiros negativos eram débitos e os números positivos eram créditos. [...] Vamos lá, só pra gente ter uma idéia da primeira tarefa. No primeiro dia do extrato dele, ele tem um saldo de quanto?*

(2) **C1:** *Mais dez.*

(3) **Professor:** *Agora ele recebeu um débito ou crédito?*

(4) **C1:** *Crédito de vinte reais.*

(5) **Professor:** *No final do dia ele vai ter quanto ?*

(6) **B2:** *Trinta reais.*

(7) **Professor:** *Positivo ou negativo?*

(8) **B2:** *positivo.*

(9) **C1:** *Tudo certo meu peixe!*

(10) **Professor:** *Então pessoal é isso aí, vocês vão fazer as outras linhas, tempo para vocês fazerem, vamos lá.*

(11) **C1:** *Bora passar para a outra logo.*

- (12) **Professor:** *Façam linha por linha do quadro.*
- (13) **B2:** *Professor, só de caneta?*
- (14) **Professor:** *Se não tiver caneta, pode fazer de lápis, mas faz bem forte, porque lápis, geralmente fica apagado, certo pessoal?*
- (15) **C1:** *Tudo certo!*
- (16) **Professor:** *Façam linha por linha, tem coluna que é débito e coluna que é crédito, quando todo mundo terminar, avisa.*
- (17) **A4:** *Faz a segunda né professor?*
- (18) **Professor:** *Isso! A Primeira linha já foi feita, agora faz a segunda. Ele tem um saldo inicial de trinta, depois um crédito de quarenta, e aí, ele ficou com quanto?*
- (19) **A5:** *Setenta.*
- (20) **Professor:** *Positivo ou negativo*
- (21) **A4:** *Positivo.*
- (22) **Professor:** *Isso! Pode fazer, assim faz sucessivamente, linha por linha.*
- (23) **B2:** *Professor, tem que botar o sinal de positivo?*
- (24) **Professor:** *Com certeza, o sinal vai indicar se a pessoa tá devendo ou não. Vai para a terceira linha agora. Vocês tem que prestar a atenção quando é débito ou crédito. Pensem que é realmente dinheiro que assim vocês não erram.*
- (25) **Professor:** *Quando terminar avisa.*
- (26) **C1:** *Já terminamos aqui professor.*
- (27) **Professor:** *Alguém quer tirar alguma dúvida?*
- (28) **E5:** *Olhe aqui. No caso assim: negativo e negativo é débito e soma né?*
- (29) **Professor:** *É, teve um saldo negativo e mais um saldo negativo. E aí tu queres saber quanto ele vai ter no final do dia. Ele vai ter um valor positivo ou negativo?*
- (30) **E5:** *Débito.*
- (31) **Professor:** *Isso, vocês concordam com ele?*
- (32) **E2:** *professor, precisa colocar vírgula?*
- (33) **Professor:** *Não precisa, mas não pode esquecer o sinal, se é positivo ou negativo.*
- (34) **C3:** *Acabamos professor.*
- (35) **Professor:** *O grupo C já acabou pessoal.*
- (36) **Professor:** *Vamos lá pessoal, pensa que isso é dinheiro, aí não tem como errar.*
- (37) **D4:** *Aqui tá errado?*
- (38) **Professor:** *Olha, por exemplo, aqui. Ele tava devendo trinta né? E depois veio mais uma dívida de quarenta né? Tu vais ficar com uma dívida de quanto?*
- (39) **D4:** *Não sei.*
- (40) **Professor:** *Ele tava com uma dívida de trinte né, depois uma divida de quarenta né? Então ele vai ficar com dívida ainda? Ele teve duas dívidas né, quanto é que vai dar no final do dia?*
- (41) **D4:** *Dez.*

- (42) **Professor:** Tu emprestas dinheiro de uma pessoa, tu vais ficar devendo a ela e no outro dia tu empresta mais outro dinheiro, tu vais ficar devendo ou não?
- (43) **D4:** Sim.
- (44) **Professor:** Tiras o teu extrato e tu estás devendo quanto aqui?
- (45) **D4:** Dez.
- (46) **Professor:** E aí logo depois ficas devendo mais quanto?
- (47) **D4:** Vinte.
- (48) **Professor:** E vai ficar devendo quanto no total?
- (49) **D4:** Trinta. Trinta negativo.
- (50) **Professor:** Isso! Ele falou aqui, trinta negativo.
- (51) **Professor:** Se ele tá devendo dez, depois fica devendo mais vinte, elevai ficar devendo?
- (52) **D4:** Trinta negativo.
- (53) **Professor:** Olha, aqui no dia dezesseis ele tava devendo dez né, e depois ele ficou devendo quanto?
- (54) **A5:** Vinte.
- (55) **Professor:** No final do dia ele vai estar devendo quanto?
- (56) **A3:** Trinta negativo!
- (57) **Professor:** Correto! Ele falou correto!
- (58) **Professor:** Vamos terminar para seguir com as outras tarefas.
- (59) **C1:** Venha ver aqui professor, é só pra calcular isso aqui?
- (60) **Professor:** Isso.
- (61) **C1:** É muito fácil.
- (62) **Professor:** Todos já terminaram de preencher o primeiro quadro? Tem gente que já. Podemos passar em frente? Vamos ficar em silêncio para ler a segunda tarefa, presta a atenção.
- (63) **Professor:** Analisando cada uma das linhas do quadro acima, os sinais dos números nas colunas saldo inicial, crédito e débito são iguais ou são diferentes? Olhem na primeira linha.
- (64) **Professor:** O primeiro número na primeira linha é positivo ou negativo?
- (65) **A3:** Positivo.
- (66) **Professor:** E o segundo número na primeira linha, é positivo ou negativo?
- (67) **A5:** Positivo.
- (68) **Professor:** Então os sinais são iguais ou diferentes?
- (69) **A5:** Iguais.
- (70) **Professor:** Agora vai para a sexta linha, o sinal do dez é positivo ou negativo?
- (71) **A5:** Negativo.
- (72) **Professor:** Agora vai lá para a quarta coluna, o vinte é negativo ou positivo?
- (73) **A5:** Negativo.
- (74) **Professor:** Os sinais são iguais ou diferentes?

- (75) **A5:** Iguais.
- (76) **Professor:** *Estão vamos lá, analisando as colunas saldo inicial, crédito e débito os sinais dos números são iguais ou diferentes?*
- (77) **A5:** Iguais.
- (78) **Professor:** *Analistem cada linha do quadro.*
- (79) **Professor:** *Esse dez é positivo ou negativo?*
- (80) **C1:** Positivo.
- (81) **Professor:** *E esse vinte?*
- (82) **C1:** Positivo.
- (83) **Professor:** *Os Sinais são iguais ou diferentes?*
- (84) **C4:** Iguais.
- (85) **Professor:** *Muito bem.*
- (86) **Professor:** *Então os sinais dos números em cada linha são iguais ou diferentes?*
- (87) **C1:** Iguais. *Entendi professor.*

Neste segmento, a abordagem inicial foi do tipo não-interativa/de autoridade, uma vez que a professor/pesquisador apenas apresentou as orientações das atividades e contextualizou a estória de João, como pode ser percebido no turno 1. No transcorrer da atividade, como mostram os turnos 2 a 87, essa abordagem comunicativa se revela mais próxima da interativa/autoridade, pois constantemente o professor faz perguntas que são imediatamente respondidas pelos alunos. Este tipo de situação é característica do padrão não triádico de interação I-R-F-R-A, pois o professor faz a pergunta, o aluno responde, o professor faz o feedback, o aluno responde, e finalmente o professor avalia a resposta, momento em que surgem os indícios de aprendizagem. Foi possível também constatar que o objetivo do segmento 1 foi cumprido, pois os aprendizes conseguiram perceber, nos turnos 69, 75, 77, 84 e 87, que os números inteiros envolvidos nesta tarefa possuíam sinais iguais. O quadro abaixo resume os aspectos analisados.

Quadro 20: Aspectos analisados no segmento 1

Abordagem	Interativa/de autoridade e Não-interativa/de autoridade
Padrões de interação	I-R-F-R-A
Turnos indicativos de indícios de aprendizagem	69, 75, 77, 84 e 87

Fonte: Autor (2020)

Segmento 2
Turnos 88 – 146

A partir da terceira tarefa da primeira atividade, o aluno deveria perceber que para somar números inteiros com sinais iguais, bastava somar o valor absoluto dos referidos números e repetir o sinal. Nos turnos descritos abaixo podemos perceber o empenho e a dedicação dos aprendizes para resolver as tarefas propostas.

- (88) **Professor:** *Vamos passar para a tarefa três, alguém lê a tarefa três, lê C1.*
- (89) **C1:** *Tô copiando aqui professor.*
- (90) **C5:** *O saldo final nas cinco primeiras linhas é positivo ou negativo?*
- (91) **C3:** *Positivo.*
- (92) **Professor:** *Isso!*
- (93) **Professor:** *Vamos lá para a tarefa 4, o saldo final nas cinco últimas linhas é positivo ou negativo?*
- (94) **A4:** *Negativo.*
- (95) **Professor:** *Vamos lá A5, leia a tarefa 5*
- (96) **A5:** *Qual a operação matemática usada para se obter o saldo final?*
- (97) **A4:** *Soma.*
- (98) **Professor:** *É isso aí, em cada linha vocês somaram.*
- (99) **Professor:** *Todos concordam?*
- (100) **A4:** *Sim.*
- (101) **Professor:** *Vamos lá, olha só, tarefa 6, discuta com seus colegas a criação de uma regra para se calcular o saldo final em cada uma das linhas do quadro acima e descreva os procedimentos.*
- (102) **Professor:** *Vocês vão dizer como vocês fizeram para fazer estes cálculos. Por exemplo, os sinais dos números eram iguais ou diferentes?*
- (103) **A4:** *Iguais.*
- (104) **Professor:** *E qual a operação matemática realizada?*
- (105) **A4:** *Soma.*
- (106) **Professor:** *E o sinal do resultado, quando é que foi positivo?*
- (107) **B2:** *Quando o sinal foi positivo no crédito e no saldo inicial.*
- (108) **Professor:** *Todo mundo entendeu?*
- (109) **Professor:** *Então por que deu positivo nas cinco primeiras linhas?*
- (110) **E5:** *Porque o saldo inicial foi positivo e o crédito também foi positivo.*
- (111) **Professor:** *Isso! Entenderam?*

- (112) **Professor:** E quando é que o saldo final é negativo?
- (113) **E5:** Quando o saldo inicial é negativo e o débito é negativo.
- (114) **Professor:** Agora escrevam aqui o que vocês fizeram para somar esses números.
- (115) **Professor:** Qual a operação realizada para fazer todos esses saldos finais?
- (116) **A5:** Soma.
- (117) **Professor:** Isso! E quando é negativo?
- (118) **E5:** Quando o saldo inicial é negativo e o débito é negativo.
- (119) **Professor:** E quando é que dá positivo?
- (120) **E5:** Quando o saldo inicial é positivo e o crédito é positivo.
- (121) **Professor:** Muito bem, então escrevam isso nesta área aqui da folha.
- (122) **D4:** Olhe aqui professor. A operação realizada é soma?
- (123) **Professor:** Isso! E quando é positivo o resultado?
- (124) **D4:** Quando o saldo inicial é positivo e o crédito é positivo.
- (125) **Professor:** Isso! E quando dá negativo?
- (126) **D4:** Quando saldo inicial e débito forem negativos.
- (127) **Professor:** Isso! Agora escreve.
- (128) **Professor:** Tá certo B2 o que o D4 escreveu?
- (129) **B2:** Tá certo. Tá igual ao meu.
- (130) **Professor:** Lê o teu B2.
- (131) **B2:** Chegamos a conclusão que quando o saldo inicial e o crédito são positivos nós somamos, e quando é negativo o sinal é de subtração.
- (132) **Professor:** Se puder ajeitar mais um pouco a resposta, a gente ajeita. Você acha que tem que ajeitar alguma coisa na resposta?
- (133) **Professor:** Quando dá positivo o resultado final?
- (134) **B2:** Quando o saldo inicial e o crédito são positivos.
- (135) **Professor:** Agora! E quando dá negativo?
- (136) **B2:** Quando o saldo inicial e o débito são negativos.
- (137) **Professor:** Certo! Agora, vamos ver aqui no grupo A, pode ler A5.
- (138) **A5:** A operação é de soma, e quando o saldo inicial é positivo e o crédito é positivo o resultado é positivo.
- (139) **Professor:** E quando é que dá negativo?
- (140) **A5:** Quando o saldo inicial é negativo e o débito é negativo, o resultado vai ser negativo.
- (141) **Professor:** Entenderam o que ela disse? Agora vamos formalizar o que vocês aprenderam, vocês vão copiar o que eu vou escrever no quadro no espaço da folha que está escrito formalização. Vamos formalizar com o rigor matemático o que vocês fizeram. Escrevam: a atividade um nos revelou que para somarmos números inteiros com sinais iguais basta somar o valor absoluto dos números envolvidos e repetir o sinal.
- (142) **Professor:** Agora vamos fazer a tarefa 7. Vamos olhar se o C3 acertou. Menos sete com menos oito, ele colocou menos quinze. Tá certo?

(143) **B2:** Certo.

(144) **Professor:** Vamos lá ver aqui o grupo A. Um débito de dez mais um débito de nove, vai ficar um débito de quanto?

(145) **A5:** Dezenove negativo.

(146) **Professor:** Isso! Agora vamos recolher a nossa primeira atividade.

O discurso nesse momento ainda é interativo e está mais próximo do dialógico, nos turnos 88 a 100, porém na maior parte dos turnos deste segmento identificamos intervenções de autoridade. É possível também perceber um discurso não-interativo/de autoridade no turno 141, momento em que o professor formaliza o conhecimento adquirido pelos alunos. Nesta atividade foi possível também constatar, nos turnos 101 a 140, que o objetivo do segmento foi atingindo, visto que os aprendizes conseguiram descobrir a técnica para somar números inteiros com sinais iguais. A Figura 5 ilustra a assimilação do aprendizado.

Figura 5: Produção correta da tarefa 7 (aluno E5)

<u>Tarefa 7</u> – Calcule:		
a) $+2 + 3 = +5$	b) $+7 + 8 = +15$	c) $+9 + 10 = +19$
d) $-2 - 3 = -5$	e) $-7 - 8 = -15$	f) $-9 - 10 = -19$

Fonte: Autor (2019)

Episódio II

Turnos de 147 - 222

Segmento 3

Turnos 147 - 183

Neste segmento o objetivo era possibilitar que os alunos pudessem perceber, no extrato bancário de João, a existência de números inteiros com sinais diferentes. Para isso o professor/pesquisador começa a atividade orientando os discentes a calcularem o saldo final em cada linha do Quadro, enfatizando que eles deveriam utilizar o mesmo raciocínio da atividade anterior. Os turnos seguintes apresentam como se deu a interação entre os participantes no decorrer da atividade.

- (147) **Professor:** Olha aí, Atividade dois, tarefa um, Olha aí, concentra! O quadro abaixo representa o extrato bancário de João em algumas datas do mês de fevereiro, preencha a quinta coluna do referido quadro calculando o valor do saldo bancário que estará presente em sua conta bancária no final do dia. Olha aí, quem é o primeiro número?
- (148) **B2:** Menos dez.
- (149) **Professor:** Então ele tá devendo ou não?
- (150) **B2:** Tá devendo.
- (151) **Professor:** Agora recebeu um crédito de vinte, quanto ele vai ficar de saldo?
- (152) **C3:** Dez
- (153) **Professor:** Positivo ou negativo?
- (154) **C3:** Positivo
- (155) **Professor:** Entenderam? Agora façam isso para cada uma das linhas do quadro.
- (156) **A4:** Professor, aqui é mais dez?
- (157) **Professor:** Isso! Aqui esse trinta é positivo ou negativo?
- (158) **A4:** Negativo.
- (159) **Professor:** E esse quarenta é positivo ou negativo?
- (160) **A4:** Positivo.
- (161) **Professor:** Então, ele vai ficar com quanto?
- (162) **A5:** Mais dez.
- (163) **Professor:** Isso.
- (164) **C1:** Já fiz professor.
- (165) **Professor:** O C1 já fez a primeira tarefa!
- (166) **C1:** Vamos para a próxima, vamos para a próxima!
- (167) **Professor:** Vamos lá, o grupo D tem uma dúvida.
- (168) **D4:** Aqui é cinquenta negativo né?
- (169) **Professor:** Isso!
- (170) **D4:** Esse sessenta positivo, vai cobrir o cinquenta negativo e vai sobrar dez positivo.
- (171) **Professor:** Perfeito! Eu gostei do que ele falou. Entenderam? Gostei de ver, vocês estão entendendo.
- (172) **A3:** Professor venha cá. Aqui ele tá devendo vinte e tem dez.
- (173) **Professor:** Então quanto ele vai ficar no saldo?
- (174) **A3:** Dez!
- (175) **Professor:** Positivo ou negativo?
- (176) **A3:** Dez negativo.
- (177) **Professor:** Correto! Vocês estão entendendo. Parabéns.
- (178) **B2:** Faça o favor aqui professor. Agora nós estamos subtraindo né?
- (179) **Professor:** Isso! Vocês entenderam o que ela disse?
- (180) **B1:** Tá subtraindo porque os sinais são diferentes.

(181) **Professor:** *Isso! Agora vamos ler a tarefa dois. Analisando cada uma das linhas do quadro acima, os sinais dos números na colunas saldo inicial, crédito e débito são iguais ou são diferentes?*

(182) **A5:** *Diferentes.*

(183) **Professor:** *Isso! Coloquem na folha.*

Neste bloco de interações identificamos a abordagem não-interativa de autoridade, no turno 147, momento em que o professor/pesquisador apenas orienta os alunos para iniciar as atividades. No restante dos turnos entendemos que as interações verbais se aproximam mais do padrão interativo/de autoridade, pois o professor conduz o processo por meio de comandos curtos. Foi possível também constatar que as interações verbais se aproximam mais do padrão não triádico I-R-F-R-A, pois o professor faz a pergunta, o aluno responde, o professor faz o feedback, o aluno responde, e finalmente o professor avalia a resposta.

É importante ressaltar que o objetivo deste segmento foi atingido, pois, nos turnos 178, 180 e 182, os aprendizes relatam que os valores absolutos dos números envolvidos devem ser subtraídos, porque os seus respectivos sinais são diferentes. O Quadro 21 resume os aspectos analisados neste segmento.

Quadro 21 - Aspectos analisados no segmento 3

Abordagem	Interativa/de autoridade e Não-interativa/de autoridade
Padrões de interação	I-R-F-R-A
Turnos indicativos de indícios de aprendizagem	178, 180 e 182.

Fonte: Autor (2019)

Segmento 4

Turnos 184 – 222

Neste bloco de tarefas o objetivo era que os alunos percebessem que para somar números inteiros com sinais diferentes, basta subtrair os valores absolutos dos referidos números e repetir o sinal do maior valor absoluto. O professor/pesquisador inicia sua fala indagando os alunos sobre os sinais dos números que aparecem na coluna saldo final e posteriormente perguntando

qual a operação matemática realizada para obter o resultado. Nos turnos a seguir podemos ver as interações que ocorreram durante a atividade.

(184) **Professor:** Vamos lá, tarefa três. O saldo final nas cinco primeiras linhas é positivo ou negativo?

(185) **B2:** positivo.

(186) **Professor:** Muito bem, pode colocar.

(187) **Professor:** Agora tarefa quatro. O saldo final nas últimas cinco linhas é positivo ou negativo?

(188) **A5:** Negativo.

(189) **Professor:** Isso! Pode colocar. Tarefa cinco: Qual a operação matemática usada para obter o saldo final?

(190) **C1:** Subtração.

(191) **Professor:** Isso! Pode colocar subtração. Olha aí, tarefa seis: discuta com seus colegas a criação de uma regra para se calcular o saldo final em cada uma das linhas do quadro acima.

(192) **Professor:** Pessoal, façam igual como vocês fizeram na outra atividade. Qual a operação matemática realizada agora?

(193) **C1:** Subtração.

(194) **Professor:** E quando é que o resultado dá negativo?

(195) **C3:** Quando o saldo inicial é positivo e o débito é negativo.

(196) **Professor:** Muito bem, no entanto eu quero que vocês melhorem essa resposta. Então olhem pra cá. Quem é maior em valor absoluto o dez ou o vinte?

(197) **C3:** O vinte negativo.

(198) **Professor:** E o resultado da operação deu positivo ou negativo?

(199) **C1:** Negativo.

(200) **Professor:** Então, por que deu negativo?

(201) **C1:** Porque ele tinha mais dívida que dinheiro no bolso.

(202) **Professor:** Perfeito! Entenderam o que ele disse aqui? E quando é que dá positivo o resultado?

(203) **C1:** Quando ele deve menos do que ele tem.

(204) **Professor:** Isso! Entenderam? Agora escrevam isso na folha.

(205) **B4:** Professor, temos uma dúvida. A gente não está sabendo escrever.

(206) **Professor:** Ok, Qual a operação realizada?

(207) **B2:** Subtração.

(208) **Professor:** Muito bem! Quando é que o saldo dá positivo?

(209) **C2:** Quando o crédito for maior que a dívida.

(210) **Professor:** E quando é que vai dar negativo?

(211) **C2:** Quando o crédito é menor que a dívida.

- (212) **Professor:** *Isso! Vamos aqui no grupo E. Vocês conseguiram responder aqui pessoal? Quando é que dá positivo o resultado?*
- (213) **E5:** *Quando meu dinheiro é maior que minhas dívidas*
- (214) **Professor:** *Quando é que falta dinheiro?*
- (215) **E5:** *Quando o meu dinheiro é menor que minhas dívidas.*
- (216) **Professor:** *Isso!*
- (217) **A4:** *Professor tire uma dúvida.*
- (218) **Professor:** *Diga.*
- (219) **A3:** *Vai ser negativo quando nossas dívidas são maiores que o saldo que a gente tem.*
- (220) **Professor:** *Perfeito! E quando vai dar positivo?*
- (221) **A3:** *Quando a gente tem saldo maior que a dívida.*
- (222) **Professor:** *Perfeito! Quando terminarem avisem para nós formalizarmos o conhecimento. A atividade dois nos revelou que para somarmos números inteiros com sinais diferentes basta subtrairmos o valor absoluto dos números envolvidos e repetir o sinal do maior valor absoluto.*

Neste segmento podemos perceber fortemente os indícios de aprendizagem (turnos 190, 193, 201, 203, 207, 209, 211, 213, 215, 219 e 221), portanto, os objetivos foram alcançados, uma vez que os alunos compreenderam que para somar números inteiros com sinais diferentes basta subtrair seus respectivos valores absolutos e repetir o sinal do número que tem o maior valor absoluto. Esses indícios permitiram a formalização do conteúdo pelo professor/pesquisador, conforme evidenciado no turno 222. A natureza interativa é claramente de autoridade. Porém, a formalização do conteúdo é apresentada de forma não-interativa/de autoridade, uma vez que os alunos permanecem em silêncio e em seguida copiam o que acabaram de ouvir. O padrão de interação recorrente neste segmento é o triádico I-R-A, em que o professor/pesquisador pergunta, os alunos respondem e ele então avalia. O Quadro 22 sintetiza os aspectos apresentados.

Quadro 22: Aspectos analisados no segmento 4

Abordagem	Interativa/de autoridade e Não-interativa/de autoridade
Padrões de interação	I-R-A
Turnos indicativos de indícios de aprendizagem	190, 193, 201, 203, 207, 209, 211, 213, 215, 2019 e 221.

Fonte: Autor (2019)

Episódio III**Turnos de 223 - 288****Segmento 5****Turnos 223 – 288**

Este segmento tinha como objetivo fazer com que os alunos identificassem que para somar números inteiros simétricos basta subtrair os valores absolutos dos referidos números e concluir que o resultado é sempre zero. É importante ressaltar que os aprendizes resolveram as tarefas rapidamente, devido ao fato de já terem afinidade no preenchimento do quadro, afinidade esta adquirida nas atividades anteriores. A seguir apresentamos os diálogos na íntegra.

(223) **Professor:** Vamos lá pessoal iniciar a atividade três. Preencha a quinta coluna deste quadro calculando o saldo bancário que estará presente na conta de João no final do dia.

(224) **Professor:** Na primeira linha ele tinha um saldo inicial de quanto?

(225) **A5:** Dez

(226) **Professor:** Positivo ou negativo?

(227) **A5:** Devendo, negativo.

(228) **Professor:** Isso! Logo depois ele recebeu um crédito de dez. Esse dez é positivo ou negativo?

(229) **B3:** Positivo.

(230) **Professor:** Perfeito! Qual vai ser o saldo final dele?

(231) **C1:** Zero.

(232) **Professor:** Vocês concordam com ele?

(233) **C3:** Sim.

(234) **Professor:** Por que o C3 tá certo?

(235) **B3:** Porque ele tava devendo dez e ganhou dez.

(236) **Professor:** Podem fazer o restante das linhas.

(237) **Professor:** Já fez tudo C3?

(238) **C3:** Já, já, professor!

(239) **Professor:** Deu tudo Zero?

(240) **C3:** Deu!

(241) **Professor:** O pessoal fez bem rápido aqui no grupo C, mas não precisa ser rápido, façam com calma.

(242) **A3:** Professor, dá menos zero?

(243) **Professor:** Na verdade o zero não tem sinal. Façam com calma.

(244) **C3:** Tá certo aqui professor?

- (245) **Professor:** Sim! Quando todos terminarem de preencher o quadro avisem.
- (246) **A3:** Venha cá professor, tá certo?
- (247) **Professor:** Vamos ver, ele tem quanto na conta?
- (248) **A3:** Vinte positivo.
- (249) **Professor:** E depois ele teve um débito de quanto?
- (250) **A3:** Vinte.
- (251) **Professor:** Então ele tinha um crédito de vinte e depois um débito de vinte. Ele ficou com quanto?
- (252) **A3:** Zero
- (253) **Professor:** Isso!
- (254) **C3:** Isso aqui é um número simétrico?
- (255) **Professor:** Perfeito C3 isso é um número simétrico.
- (256) **Professor:** Todos terminaram?
- (257) **A3:** Já
- (258) **Professor:** Vamos para a tarefa dois. Vamos ler. Qual a operação matemática realizada para obter o saldo final?
- (259) **B3:** Subtração!
- (260) **Professor:** Perfeito!
- (261) **Professor:** Tarefa três. De acordo com o quadro acima o que acontece quando somamos números simétricos?
- (262) **A3:** Dá nada.
- (263) **Professor:** Como é o nome desse nada?
- (264) **C3:** Zero.
- (265) **Professor:** Entenderam?
- (266) **E5:** Sim, dá zero.
- (267) **Professor:** Muito Bem!
- (268) **Professor:** Tarefa quatro. Discuta com seus colegas uma regra para se calcular o saldo final em cada uma das linhas do quadro acima e descreva os procedimentos.
- (269) **A3:** Professor, nós subtraímos e deu zero.
- (270) **Professor:** Isso! Todos concordam? Escrevam então essa regra.
- (271) **Professor:** Você tem que fazer que operação?
- (272) **C2:** Subtração.
- (273) **Professor:** E dá quanto?
- (274) **C2:** Zero.
- (275) **Professor:** Escrevam com suas próprias palavras.
- (276) **A3:** Professor, vê se tá correto.
- (277) **Professor:** Você subtraiu?
- (278) **A3:** Subtraí.
- (279) **Professor:** E aí?
- (280) **A3:** Deu zero.

- (281) **Professor:** Isso aí. Agora vamos formalizar o conhecimento aprendido.
- (282) **C2:** Professor, tá certo a tarefa cinco?
- (283) **Professor:** Tá certo.
- (284) **Professor:** Então qual foi o resultado que deu em cada uma das questões da tarefa cinco.
- (285) **C2:** Zero em todas.
- (286) **Professor:** Muito Bem! Todos façam a tarefa cinco.
- (287) **A3:** Dá tudo a mesma coisa professor. Zero né?
- (288) **Professor:** Isso!

O discurso do professor/pesquisador inicialmente é do tipo não-interativo/de autoridade, turno 223, porém há uma predominância do padrão interativo de autoridade na maior parte dos turnos, mas foi possível observar o padrão interativo/dialógico também, turnos 234 a 245, pois professor e alunos trocam ideias e formulam perguntas. As interações presentes, em sua maioria, são do tipo I-R-A. Sintetizamos esta análise no Quadro 23 a seguir.

Quadro 23: Aspectos analisados no segmento 5

Abordagem	Interativa/de autoridade, não-interativa/de autoridade e interativa/dialógica.
Padrões de interação	I-R-A
Turnos indicativos de indícios de aprendizagem	231, 235, 239, 242, 252, 259, 262, 264, 266, 269, 272, 274, 278, 280, 285 e 287.

Fonte: Autor (1019)

Como forma de complementar a análise do discurso que vem sendo empregada, a partir da correção das atividades, foi possível perceber que 100% dos alunos que participaram desta atividade realizaram corretamente a intervenção avaliativa restritiva (tarefa 5). Nas figuras 6 e 7 é possível verificar as produções dos alunos D4 e E5, respectivamente.

Figura 6: Produção correta da tarefa 5 (aluno D4)

Tarefa 5 – Calcule:		
a) $+3 - 3 =$ 0	b) $+8 - 8 =$ 0	c) $+11 - 11 =$ 0
d) $+2 - 2 =$ 0	e) $+7 - 7 =$ 0	f) $+9 - 9 =$ 0

Fonte: Autor (2019)

Figura 7: Produção correta da tarefa 5 (aluno E5)

Tarefa 5 – Calcule:		
a) $+3 - 3 =$ 0	b) $+8 - 8 =$ 0	c) $+11 - 11 =$ 0
d) $+2 - 2 =$ 0	e) $+7 - 7 =$ 0	f) $+9 - 9 =$ 0

Fonte: Autor (2019)

Episódio IV**Turnos de 289 - 387****Segmento 6****Turnos 289 - 387**

Esta atividade teve como propósito possibilitar ao aluno descobrir a regra para subtrair números inteiros. O professor/pesquisador esclarece que nesta atividade os discentes deveriam lembrar da ideia de números simétricos aprendida no campo dos números naturais. Os turnos a seguir demonstram as interações entre os participantes.

(289) **Professor:** Vamos lá, atividade 4. Usando a ideia de número simétrico e a ideia de débito e crédito, calcule as operações preenchendo o quadro abaixo conforme o modelo. Olha aí. O que está escrito na primeira coluna?

(290) **A3:** Operação.

(291) **Professor:** Na segunda coluna?

(292) **A3:** Números simétricos

(293) **Professor:** E na terceira coluna?

(294) **A3:** Resultado.

(295) **Professor:** No modelo tá assim, mais três menos o menos quatro. O que aconteceu com o menos quatro na segunda coluna?

(296) **C3:** Virou mais quatro.

- (297) **Professor:** E aí como ficou?
- (298) **C3:** Mais três com mais quatro, que vai dar mais sete.
- (299) **Professor:** Entenderam o exemplo?
- (300) **B3:** Sim, porque o simétrico do menos é o mais.
- (301) **Professor:** Perfeito! Todos concordam?
- (302) **C3:** Sim.
- (303) **Professor:** Então façam as outras linhas do quadro.
- (304) **A3:** Professor, é assim?
- (305) **Professor:** Isso, você segue o primeiro exemplo. O simétrico do mais quatro é o que?
- (306) **A3:** Menos quatro.
- (307) **A2:** Menos quatro
- (308) **Professor:** Isso! Vamos olhar o que o A2 fez. O simétrico do mais quatro é?
- (309) **A2:** Menos quatro.
- (310) **Professor:** Muito bem. Agora quanto dá mais três menos quatro? Tu tens três reais e deves quatro, vai sobrar ou faltar dinheiro?
- (311) **A2:** Dá menos um né?
- (312) **Professor:** Isso! Faça o restante.
- (313) **C3:** Venha cá professor. Quando é menos vira mais e quando é mais vira menos.
- (314) **Professor:** Isso!
- (315) **D3:** Professor chegue aqui. Tá certo.
- (316) **Professor:** Vamos ver. Tu tens três reais e tá devendo quatro, quanto dá.
- (317) **D3:** menos um.
- (318) **Professor:** Isso, tá tudo ok?
- (319) **D4:** Tudo ok professor.
- (320) **E4:** Tá certo professor?
- (321) **Professor:** vamos ver. Explica.
- (322) **E4:** Depois que troca o sinal do número, a gente subtrai e repete o sinal do maior número.
- (323) **Professor:** Repita.
- (324) **E4:** Fazer a subtração e repetir o sinal do maior número.
- (325) **Professor:** Quem é o sinal do maior número em módulo?
- (326) **E4:** Menos quatro.
- (327) **Professor:** Então quanto dá?
- (328) **E4:** Menos sete.
- (329) **Professor:** Não. Tu tens três e deves quatro. Vai faltar ou vai sobrar?
- (330) **E4:** Vai faltar. Vai dar menos um.
- (331) **Professor:** Perfeito!
- (332) **D4:** Veja aqui professor.
- (333) **Professor:** Vamos ver. Tu tens cinco e deve quatro. Quanto dá? Vai ficar faltando um?
- (334) **E4:** Vai sobrar um.

- (335) **Professor:** Perfeito. Então é positivo ou negativo?
- (336) **E4:** Negativo.
- (337) **Professor:** Quando sobra é negativo?
- (338) **E4:** Não. Dá positivo.
- (339) **Professor:** Isso mesmo!
- (340) **A4:** Professor, venha cá. Tá certo?
- (341) **Professor:** Vamos ver. O cinco com o simétrico do menos dois, vai ficar como?
- (342) **A4:** Zero.
- (343) **Professor:** Não, não. Quem é o simétrico do menos dois?
- (344) **A2:** Mais dois.
- (345) **Professor:** Perfeito! Isso mesmo.
- (346) **A3:** Sempre troca o sinal né?
- (347) **Professor:** Isso!
- (348) **C1:** Professor. Tá certo aqui?
- (349) **Professor:** Vamos ver. O simétrico do menos dois é?
- (350) **C1:** Mais dois.
- (351) **Professor:** Isso. Cinco mais dois?
- (352) **C1:** Sete.
- (353) **Professor:** Isso!
- (354) **Professor:** Vamos lá! Então na segunda tarefa, o que aconteceu com o sinal do segundo número na segunda coluna do quadro acima?
- (355) **B3:** Foi trocando o sinal.
- (356) **Professor:** É isso aí! Vamos lá. Na primeira coluna da primeira linha o quatro era positivo ou negativo?
- (357) **C1:** Negativo.
- (358) **Professor:** E depois o quatro ficou o que?
- (359) **C1:** Positivo.
- (360) **Professor:** Isso! E na segunda linha, o quatro era o quê?
- (361) **C1:** Positivo.
- (362) **Professor:** E Esse quatro ficou como?
- (363) **C1:** Negativo.
- (364) **Professor:** Certo! Então o que acontece com o sinal do segundo número?
- (365) **D4:** O positivo se transformou em negativo.
- (366) **Professor:** Só aconteceu isso? O que mais?
- (367) **C1:** Ficou negativo quando era positivo e os positivos ficaram negativos.
- (368) **Professor:** Perfeito! Todos entenderam?
- (369) **A4:** Professor, venha cá. É assim?
- (370) **Professor:** Vamos ver. O simétrico do menos seis, quem é?
- (371) **A2:** Mais seis.
- (372) **Professor:** Perfeito! Então todos já fizeram a segunda tarefa?

- (373) **A3:** Ainda não professor.
- (374) **Professor:** Então terminem.
- (375) **E4:** Professor já fiz a tarefa três. Venha ver.
- (376) **Professor:** Vamos ver.
- (377) **E4:** Aqui também é tudo simétrico?
- (378) **Professor:** Isso mesmo. Deixa eu ver. Você acertou toda a tarefa três. Parabéns!
- (379) **Professor:** Vamos lá terminar a tarefa três.
- (380) **D4:** Veja a minha tarefa três professor.
- (381) **Professor:** Deixa eu ver. Tá tudo certo. Você utilizou a ideia de número simétrico perfeitamente.
- (382) **Professor:** Vamos formalizar agora.
- (383) **C3:** Aqui tá certo ou tá errado na tarefa três?
- (384) **Professor:** Deixa eu ver. Você utilizou a ideia de simétrico também né?
- (385) **C3:** Sim.
- (386) **Professor:** Tá tudo certo.
- (387) **Professor:** Vamos formalizar.

As abordagens comunicativas neste segmento são, em sua maioria, interativa/de autoridade, visto que o professor/pesquisador faz a pergunta aos alunos, eles respondem e o professor avalia, ocasionando na tríade I-R-A. É possível também encontrar o padrão I-R-F-R-A (turnos 327, 328, 329, 330 e 331), pois o professor pergunta, o aluno responde, o professor faz o feedback, o aluno responde e finalmente o professor avalia e confirma a resposta. Os indícios de aprendizagem podem ser vistos nos turnos 300, 306, 307, 313, 355, 365 e 367, portanto, os objetivos foram alcançados, uma vez que os alunos identificaram que para subtrair números inteiros basta trocar o sinal do segundo número e calcular a operação matemática remanescente. O Quadro 24, a seguir, sintetiza a análise dos aspectos deste segmento.

Quadro 24: Aspectos analisados no segmento 6

Abordagem	Interativa/de autoridade.
Padrões de interação	I-R-A e I-R-F-R-A
Turnos indicativos de indícios de aprendizagem	300, 306, 307, 313, 355, 365 e 367.

Fonte: Autor (2019)

Episódio V

Turnos de 388 - 533

Segmento 7
Turnos 388 – 477

O primeiro segmento deste episódio, composto por 90 turnos, tinha por objetivo instigar os alunos a perceberem que a ideia de multiplicação de números naturais, partindo do princípio da soma de parcelas iguais, se desenvolve da mesma forma para os números inteiros negativos. O professor/pesquisador iniciou a atividade salientando que os discentes deveriam preencher o Quadro da tarefa 1 seguindo o modelo presente na primeira linha, enfatizando que eles deveriam lembrar das aulas de multiplicação de números naturais pelo princípio da soma de parcelas iguais. As interações que ocorreram entre os participantes, podem ser vistas na descrição dos turnos a seguir.

(388) **Professor:** *Vamos lá. Atividade 5. Preencha o quadro abaixo de acordo com o modelo da primeira linha. Vamos lá olha só. A primeira coluna é a coluna de soma de parcelas iguais. A segunda coluna é a coluna de resultado desta soma. Quanto é mais cinco mais cinco?*

(389) **C3:** *Mais dez.*

(390) **Professor:** *Isso! Agora transforma essa soma de parcelas iguais em multiplicação. Qual é o número que está se repetindo?*

(391) **B3:** *mais cinco.*

(392) **Professor:** *Isso! E Quantas vezes o mais cinco está se repetindo?*

(393) **B3:** *Duas vezes.*

(394) **Professor:** *Perfeito! Então como é que fica?*

(395) **B3:** *Mais dois vezes mais cinco*

(396) **Professor:** *Utilizando a propriedade comutativa que aprendemos com os números naturais, vai ficar também como?*

(397) **B3:** *Mais cinco vezes mais dois.*

(398) **Professor:** *Isso! Agora preencham o resto das linhas do quadro. Percebam que nas cinco ultimas linhas os números que se repetem são positivos ou negativos?*

(399) **C2:** *Negativos.*

(400) **Professor:** *Isso! Lembrem que já aprendemos somar números negativos. Façam o resto.*

(401) **B3:** *Aqui em baixo é mesma coisa professor?*

(402) **Professor:** *Isso mesmo!*

(403) **C4:** *Professor, eu acho que é assim?*

- (404) **Professor:** Deixa eu ver. Um crédito de cinco, mais um crédito de cinco, mais um crédito de cinco dá um crédito de quinze. Isso mesmo! Transformando em multiplicação fica como?
- (405) **C4:** Três vezes mais cinco.
- (406) **Professor:** Isso! Ou?
- (407) **C4:** Aí Inverte.
- (408) **Professor:** Isso!
- (409) **C4:** Matei já.
- (410) **Professor:** Faz as outras igualzinho. Entenderam o que o C4 fez na última coluna? Ele só fez utilizar a propriedade comutativa da multiplicação que vimos em números naturais.
- (411) **A3:** Veja o meu professor.
- (412) **Professor:** Vamos lá. Quem é o número que está se repetindo?
- (413) **A3:** Cinco.
- (414) **Professor:** Quantas vezes?
- (415) **A3:** Três.
- (416) **Professor:** Então como fica a multiplicação?
- (417) **A3:** Mais Cinco vezes três.
- (418) **Professor:** Isso!
- (419) **A3:** E nessa coluna aqui?
- (420) **Professor:** Vais colocar o resultado da soma. Tens um crédito de cinco, mais um crédito de cinco, mais um crédito de cinco. Vai dar quanto?
- (421) **A3:** Quinze.
- (422) **Professor:** Pronto! Faça o resto!
- (423) **A3:** Professor, tá certo?
- (424) **Professor:** Deixa eu ver. Mais cinco quatro vezes, dá vinte. Isso mesmo. Não esqueça os parênteses. Alguém com dúvida?
- (425) **D2:** Aqui professor. Vê o meu.
- (426) **Professor:** Vamos lá. Quem tá se repetindo aqui?
- (427) **D2:** O Quatro.
- (428) **Professor:** Certeza?
- (429) **D2:** Menos quatro.
- (430) **Professor:** Isso! Mas quantas vezes ele tá se repetindo?
- (431) **D2:** Duas vezes.
- (432) **Professor:** Isso! Então como fica a multiplicação?
- (433) **D2:** Menos quatro vezes mais dois.
- (434) **Professor:** Perfeito.
- (435) **D1:** Aqui professor.
- (436) **Professor:** Vamos ver. Uma dívida de quatro, mais uma dívida de quatro, mais uma dívida de quatro, dá quanto?
- (437) **D1:** Dívida de doze.

- (438) **Professor:** Certo. E quantas vezes o menos quatro está se repetindo?
- (439) **D1:** Três.
- (440) **Professor:** Certo! Sua multiplicação está correta. A comutação dos fatores também está ok.
- (441) **D3:** E o meu professor?
- (442) **Professor:** Vamos ver. Você colocou menos quatro, três vezes. Tá tudo ok. Perfeito! Estou vendo que vocês estão aprendendo.
- (443) **C3:** Professor olha o meu.
- (444) **Professor:** Vamos ver. Uma dívida de quatro com uma dívida de quatro vai dar uma dívida de oito. Isso mesmo! Agora quem é o numero que tá se repetindo?
- (445) **C3:** Menos quatro.
- (446) **Professor:** Certo! E quantas vezes?
- (447) **C3:** Menos Duas.
- (448) **Professor:** Menos duas? Olha aí.
- (449) **C3:** Mais duas!
- (450) **Professor:** Isso!
- (451) **B2:** Professor. Aqui.
- (452) **Professor:** Vamos ver. Uma dívida de quatro, mais uma dívida de quatro, mais uma dívida de quatro, mais uma dívida de quatro, dá uma dívida de dezesseis. Certíssimo! Agora quem é o número que está se repetindo?
- (453) **B2:** Quatro.
- (454) **Professor:** Certeza?
- (455) **B3:** Menos quatro.
- (456) **Professor:** Isso! Entendeu B2?
- (457) **B2:** Agora Sim!!
- (458) **Professor:** E quantas vezes tá se repetindo?
- (459) **B2:** Quatro!
- (460) **Professor:** Isso mesmo. Deu pra entender?
- (461) **B2:** Hum, Hum.
- (462) **A2:** Veja aqui professor.
- (463) **Professor:** Vamos ver aqui. Um crédito de cinco, com um crédito de cinco, com um crédito de cinco, com um crédito de cinco, com um crédito de cinco, dá um crédito de quanto?
- (464) **A2:** Crédito de vinte e cinco.
- (465) **Professor:** Quem é o número que está se repetindo?
- (466) **A2:** O cinco.
- (467) **Professor:** Quantas vezes?
- (468) **A2:** Cinco vezes.
- (469) **Professor:** Isso mesmo!
- (470) **A3:** Professor o meu.
- (471) **Professor:** Vamos lá. Uma dívida de quatro, com uma dívida de quatro dá quanto?

- (472) **A3:** Dívida de oito. Menos oito.
- (473) **Professor:** Isso! Agora qual o número que está se repetindo?
- (474) **A3:** Menos quatro.
- (475) **Professor:** Quantas vezes?
- (476) **A3:** Duas.
- (477) **Professor:** Perfeito. Ok a sua multiplicação.

Ao perguntar aos alunos sobre o procedimento que eles deveriam fazer em cada uma das colunas do quadro da primeira tarefa, foi possível constatar o padrão não-triádico I-R-F-R-A, mas há momentos em que é possível também perceber o padrão I-R-F-R-F-R-A (turnos 412, 413, 414, 415, 416, 417 e 418), fatos que nos levam a classificar esses debates com uma abordagem comunicativa interativa/de autoridade, visto que as perguntas são sempre diretivas. Podemos perceber que houve indícios de aprendizagem, principalmente, nos turnos 445, 449, 455, 459, 474 e 476. Sendo assim, os objetivos foram alcançados, pois os aprendizes conseguiram perceber, nas quatro últimas linhas do quadro, que a soma de parcelas iguais negativas também pode ser convertida em multiplicação. O Quadro 25 resume os aspectos analisados.

Quadro 25: Aspectos analisados no segmento 7

Abordagem	Interativa/de autoridade.
Padrões de interação	I-R-F-R-A e I-R-F-R-F-R-A
Turnos indicativos de indícios de aprendizagem	445, 449, 455, 459, 474 e 476

Fonte: Autor (2019)

Como forma de ratificar os indícios de aprendizagem presentes nos diálogos, a Figura 8 ilustra a produção correta do aluno B2. É importante também ressaltar que do total de 19 alunos que participaram desta atividade, apenas 2 não concluíram a tarefa 1.

Figura 8: Produção correta da tarefa 1 (aluno B2)

Soma	Resultado	Multiplicação	Propriedade Comutativa
+ 5 + 5	+10	(+2)x(+5)	(+5)x(+2)
+ 5 + 5 + 5	+15	(+3)x(+5)	(+5)x(+3)
+5 +5 +5 +5	+20	(+4)x(+5)	(+5)x(+4)
+ 5 + 5 + 5 + 5 + 5	+25	(+5)x(+5)	(+5)x(+5)
- 4 - 4	-8	(+2)x(-4)	(-4)x(+2)
- 4 - 4 - 4	-12	(+3)x(-4)	(-4)x(+3)
- 4 - 4 - 4 - 4	-16	(+4)x(-4)	(-4)x(+4)
- 4 - 4 - 4 - 4 - 4	-20	(+5)x(-4)	(-4)x(+5)

Fonte: Autor (2019)

Segmento 8

Turnos 478 – 533

Este segmento, cujos os debates estão descritos em 56 turnos, era constituído por duas tarefas, as quais tinham a finalidade de fazer com que os aprendizes percebecem que a multiplicação de dois números inteiros com sinais positivos era positiva e que a multiplicação de dois números inteiros com sinais diferentes era negativa. O professor/pesquisador instigou os alunos a analisarem o Quadro que tinham acabado de preencher, a fim de que respondessem as tarefas dois e três. Descrevemos abaixo os diálogos na íntegra.

(478) **C4:** Venha cá professor, já tou na tarefa 2.

(479) **Professor:** Olha aqui. De acordo com o quadro acima a multiplicação de dois números positivos é negativo ou positivo?

(480) **C4:** Acho que é positivo.

(481) **Professor:** Certeza? Olha o quadro. Aqui nesta multiplicação os números são positivos ou negativos?

(482) **C4:** Positivos.

(483) **Professor:** E o resultado?

(484) **C4:** Positivo.

(485) **Professor:** Aqui nesta, os dois números são positivos?

(486) **C4:** Sim.

(487) **Professor:** E o resultado?

(488) **C4:** Positivo.

(489) **Professor:** Então a multiplicação de dois números positivos dá negativo ou positivo?

- (490) **C4:** Positivo.
- (491) **Professor:** Isso mesmo.
- (492) **D1:** Professor, veja a tarefa dois.
- (493) **Professor:** Nesta multiplicação aqui os dois números são positivos?
- (494) **D1:** Sim.
- (495) **Professor:** E o resultado?
- (496) **D1:** positivo.
- (497) **Professor:** Então a multiplicação de dois números positivos é o quê?
- (498) **D1:** Positivo.
- (499) **Professor:** Certo.
- (500) **D1:** A tarefa três professor.
- (501) **Professor:** Vamos ver. Nesta multiplicação aqui qual o sinal dos dois números do produto?
- (502) **D1:** Positivo e negativo.
- (503) **Professor:** E o resultado dá o que?
- (504) **D1:** Negativo.
- (505) **Professor:** Isso! E aqui? O sinal destes dois números da multiplicação?
- (506) **D1:** Negativo e positivo.
- (507) **Professor:** E o resultado?
- (508) **D1:** Negativo.
- (509) **Professor:** Então, a multiplicação de um número positivo com outro negativo dá positiva ou negativa?
- (510) **D1:** Negativo.
- (511) **Professor:** Perfeito! Então todos já fizeram a tarefa dois e três né? Então me digam. A multiplicação de dois números positivos, dá o quê?
- (512) **C2:** Positivo
- (513) **Professor:** E a multiplicação de um positivo com outro negativo?
- (514) **C2:** Negativo.
- (515) **Professor:** Perfeito! Agora copiem a formalização da tarefa cinco e depois façam a tarefa quatro.
- (516) **D2:** Professor, veja a minha tarefa quatro.
- (517) **Professor:** Vamos lá. Três vezes quatro?
- (518) **D2:** Doze.
- (519) **Professor:** Certo! Sinais iguais positivos, vai dar?
- (520) **D2:** Positivo.
- (521) **Professor:** Perfeito! Vamos ver essa aqui. Duas vezes cinco?
- (522) **D2:** Dez.
- (523) **Professor:** Certo! Sinais diferentes dá?
- (524) **D2:** Negativo.
- (525) **Professor:** Perfeito! Tá certinho!

- (526) **E4:** *Veja o minha tarefa quatro professor.*
- (527) **Professor:** *Vamos lá. Sete vezes três?*
- (528) **E4:** *Vinte e um.*
- (529) **Professor:** *Certo! Sinais diferentes dá o quê?*
- (530) **E4:** *Negativo.*
- (531) **Professor:** *Perfeito! Pode fazer o resto. Todos já fizeram a tarefa quatro?*
- (532) **B2:** *Sim!*
- (533) **Professor:** *Então vamos recolher.*

Logo no início deste segmento, constatamos, além do afinco dos alunos em responder as tarefas, fortes vestígios de aprendizagem nos turnos 484, 488, 490, 496, 498, 504, 508, 510, 512, 514, 520, 524 e 530. As abordagens comunicativas durante todo o desenvolvimento da atividade foram predominantemente interativa/de autoridade entre professor-aluno, no entanto, também, encontramos a abordagem não-interativa/de autoridade no turno 515, momento em que o professor/pesquisador formaliza o conhecimento assimilado pelos aprendizes. O padrão de interação manteve-se, ora do tipo I-R-F, quando permitia que os alunos refletissem e reelaborassem suas respostas (turno 481), ora do tipo I-R-A, durante as sequências de perguntas que são respondidas corretamente pelos alunos. A seguir, no quadro 26, apresentamos os aspectos analisados.

Quadro 26: Aspectos analisados no segmento 8

Abordagem	Interativa/de autoridade e não-interativa/de autoridade
Padrões de interação	I-R-F e I-R-A
Turnos indicativos de indícios de aprendizagem	484, 488, 490, 496, 498, 504, 508, 510, 512, 514, 520, 524 e 530

Fonte: Autor (2019)

Episódio VI

Turnos de 534 - 628

Segmento 9

Turnos 534 – 576

Este segmento teve como propósito possibilitar ao aluno descobrir que o resultado das multiplicações propostas no Quadro da tarefa inicial seguem um

padrão, no qual há uma variação de quatro unidades. Esta tarefa começou de forma diferente, com a seguinte pergunta do aluno C2: *“Professor, e quando os dois números são negativos, como fica?”* (turno 534). Esta pergunta nos revelou que as atividades aplicadas, até aquele momento, provocaram a motivação e a curiosidade dos aprendizes, fato que nos alegrou bastante, pois, além de nos permitir iniciar o aprendizado partindo da curiosidade dos próprios alunos, também, nos mostrou que estávamos indo no caminho certo. Os turnos seguintes apresentam como se deu a interação entre os participantes no decorrer dos debates.

(534) **C2:** *Professor, e quando os dois números são negativos, como fica?*

(535) **Professor:** *Essa dúvida vai ser revelada na atividade seis. Vamos ler. Então vamos preencher o quadro da tarefa um. Vamos fazer a primeira linha juntos. Quanto é mais seis vezes menos quatro?*

(536) **C2:** *Vinte e quatro negativo.*

(537) **Professor:** *Isso! Preencham as outras linhas. Quando terminar avisa.*

(538) **D3:** *Veja aqui professor.*

(539) **Professor:** *Vamos ver. Quando os sinais são diferentes dá sempre?*

(540) **D3:** *Negativo.*

(541) **Professor:** *Perfeito!*

(542) **E4:** *Professor, venha cá.*

(543) **Professor:** *Vamos ver. Seis vezes menos quatro?*

(544) **E4:** *Menos vinte e quatro.*

(545) **Professor:** *Deu negativo, por que os sinais são?*

(546) **E4:** *Diferentes.*

(547) **Professor:** *Isso! Cinco vezes quatro?*

(548) **E4:** *Vinte.*

(549) **Professor:** *Negativo?*

(550) **E4:** *Sim, porque os sinais são diferentes.*

(551) **Professor:** *Isso! Mais quatro vezes menos quatro?*

(552) **E4:** *Menos dezesseis, porque os sinais são diferentes.*

(553) **Professor:** *Perfeito. Tá tudo ok com seu quadro.*

(554) **C2:** *Professor, a última linha dá zero né?*

(555) **Professor:** *Isso! Mais por quê?*

(556) **C2:** *Porque a multiplicação por zero é zero.*

(557) **Professor:** *Isso! Agora vamos responder a tarefa dois. O que acontece com o primeiro fator quando se lê as operações de cima para baixo?*

(558) **C2:** *Diminui de um em um.*

- (559) **Professor:** *Isso! Entenderam o que o C2 falou?*
- (560) **B3:** *Entendi.*
- (561) **Professor:** *Aqui no grupo A, o que acontece com o primeiro fator?*
- (562) **A2:** *Diminui de um em um.*
- (563) **Professor:** *Positivo! Agora vamos para a tarefa três. O que acontece com o segundo fator quando se lê as operações de cima para baixo? Quem responde primeiro?*
- (564) **C2:** *Fica normal professor.*
- (565) **Professor:** *A palavra exata é normal?*
- (566) **C2:** *Não abaixa nem sobe.*
- (567) **Professor:** *Isso! Mas vamos explicar melhor.*
- (568) **C3:** *Se repete.*
- (569) **Professor:** *Isso! Se repete. Entenderam?*
- (570) **E2:** *Entendi. Eles se repetem.*
- (571) **Professor:** *Isso mesmo! Agora a tarefa quatro. O que acontece com o resultado quando se lê as contas de cima para baixo?*
- (572) **B3:** *Multiplica de quatro em quatro.*
- (573) **Professor:** *Vamos melhorar a resposta.*
- (574) **B3:** *Diminuindo de quatro em quatro.*
- (575) **Professor:** *Isso! Aqui no grupo C, o que acontece com os resultados?*
- (576) **C2:** *Vão de quatro em quatro até chegar no zero.*

O padrão de interação preponderante durante quase todo processo foi do tipo triádico I-R-A, no entanto, em alguns momentos identificamos o padrão I-R-F-R-A, pois quando o professor/pesquisador faz alguma pergunta há a necessidade de fazer um feedback para que o aluno complete a resposta, a fim de que o professor avalie e confirme o acerto do aprendiz (turnos 543, 544, 545, 546 e 547). Este segmento é também caracterizado pela abordagem predominantemente interativa/de autoridade uma vez que os alunos são conduzidos pelo professor/pesquisador através de uma sequência de perguntas, com a finalidade de que eles percebessem que o resultado das multiplicações propostas seguia um padrão. Foi possível constatar os indícios de aprendizagem nos turnos 558, 562, 564, 566, 568, 570, 572, 574 e 576. O Quadro abaixo sintetiza a análise deste segmento.

Quadro 27: Aspectos analisados no segmento 9

Abordagem	Interativa/de autoridade
Padrões de interação	I-R-A e I-R-F-R-A
Turnos indicativos de indícios de aprendizagem	558, 562, 564, 566, 568, 570, 572, 574 e 576

Fonte: Autor (2019)

Segmento 10

Turnos 577-628

O segundo segmento deste episódio, com um total de 52 turnos, objetivava instigar os alunos a perceberem que a multiplicação de dois números inteiros negativos tinha como resultado um número inteiro positivo. O professor/pesquisador iniciou as interações propondo que os alunos preenchessem o Quadro da tarefa 5, ressaltando que o preenchimento deste quadro seguiria o mesmo padrão do quadro da tarefa anterior. As interações que ocorreram entre os participantes durante os debates podem ser vistas a seguir.

(577) **Professor:** *Isso. Agora vamos para a tarefa cinco. Utilizando o mesmo padrão do quadro anterior preencha o quadro abaixo. A primeira linha do quadro fica como?*

(578) **B3:** *Mais seis vezes menos quatro dá menos vinte e quatro.*

(579) **Professor:** *A segunda linha dá quanto?*

(580) **A2:** *Menos vinte.*

(581) **Professor:** *Isso. Façam o resto e percebam a sequência dos números dos resultados. Essa sequência vai de quanto em quanto?*

(582) **C4:** *De quatro em quatro.*

(583) **Professor:** *Então continuem e sigam a sequência dos resultados. Alguma dúvida?*

(584) **D3:** *Veja aqui professor. Essa aqui dos dois números negativos deu positivo.*

(585) **Professor:** *Isso! Esse rapaz já percebeu aqui.*

(586) **C3:** *Veja aqui professor. O meu também deu positivo a dos números negativos.*

(587) **Professor:** *Perfeito. Mais um grupo já percebeu.*

(588) **A2:** *Aqui professor, veja o meu.*

(589) **Professor:** *Deixa eu ver. Aqui está indo de quatro em quatro?*

(590) **A2:** *Sim.*

(591) **Professor:** *De quatro vai para vinte?*

(592) **A2:** *Não.*

(593) **Professor:** *Então vai para qual número?*

(594) **A2:** *Oito.*

(595) **Professor:** *Isso! Continue. Todos terminaram o preenchimento?*

(596) **B1:** *Aqui professor.*

(597) **Professor:** *Vamos ver. Se aqui é zero e você soma quatro, vai dar quanto?*

(598) **B1:** *Menos quatro.*

(599) **Professor:** *Não. Olha só. Se tu estas no zero, aí você soma quatro vai dar quanto?*

- (600) **B1:** Mais quatro.
- (601) **Professor:** Isso. Continua.
- (602) **B3:** O meu professor.
- (603) **Professor:** Deixa eu ver. Tá Certinho. Os seis primeiros resultados deram negativos e os seis últimos deram positivos.
- (604) **E4:** Professor. O meu.
- (605) **Professor:** Tá tudo certinho o preenchimento do seu quadro. Vamos lá pessoal, tem grupos que já estão em outras tarefas. Estão bem adiantados.
- (606) **Professor:** Vamos para a tarefa seis agora. Virem a folha. Com base em que você observou, um número negativo multiplicado por outro número negativo dá positivo ou negativo?
- (607) **E4:** Positivo.
- (608) **Professor:** Isso mesmo! Ei C2, um número negativo multiplicado por um número negativo, dá positivo ou negativo?
- (609) **C2:** Positivo.
- (610) **Professor:** Entenderam? Certo ou não?
- (611) **E3:** Certo.
- (612) **Professor:** Aqui no grupo C, respondam. Um número negativo multiplicado por um número negativo dá o quê?
- (613) **B3:** Positivo.
- (614) **Professor:** Isso mesmo! Agora vamos para a tarefa sete. Preencha a segunda coluna do quadro abaixo, informando se o produto é positivo ou negativo. Vamos lá. Positivo com positivo dá o quê?
- (615) **D1:** Positivo.
- (616) **Professor:** Certo. Segunda linha do quadro agora. Um número negativo com um número negativo dá um número?
- (617) **E4:** Positivo!
- (618) **Professor:** Isso! E agora número positivo com negativo?
- (619) **D3:** Negativo.
- (620) **Professor:** E negativo com positivo?
- (621) **E4:** Negativo!
- (622) **Professor:** Isso! Entenderam?
- (623) **E2:** Sim.
- (624) **Professor:** Então na multiplicação, quando os sinais forem iguais vai dar sempre?
- (625) **D3:** Positivo.
- (626) **Professor:** Certo. E quando os sinais forem diferentes, vai dar sempre?
- (627) **C3:** Negativo.
- (628) **Professor:** Vamos formalizar agora. A atividade seis nos revelou que a multiplicação de dois números inteiros negativo é sempre positiva. Agora resolvam a tarefa sete. Essa serve apenas para consolidar o conhecimento. Próximo encontro faremos a nossa última atividade para não ficar cansativo a vocês.

Constatamos neste segmento fortes indícios de aprendizagem (turnos 584, 586, 600, 607, 609, 613 e 625), logo os objetivos foram alcançados, uma vez que os alunos compreenderam que a multiplicação de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro positivo. Esses indícios permitiram a formalização do conteúdo pelo professor/pesquisador, conforme evidenciado no turno 628. A abordagem comunicativa durante o discurso é claramente interativa/de autoridade, mas é possível também perceber o padrão não-interativo/de autoridade no momento da formalização do conteúdo, visto que os aprendizes permanecem em silêncio, copiando a formalização do quadro. O padrão de interação recorrente neste segmento é o triádico I-R-A, em que o professor/pesquisador pergunta, os alunos respondem e ele então avalia, mas também é possível encontrar o desdobramento não-triádico I-R-F-R-A nos turnos 591, 592, 593, 594 e 595. O Quadro 28 sintetiza os aspectos apresentados.

Quadro 28: Aspectos analisados no segmento 10

Abordagem	Interativa/de autoridade e Não-interativa/de autoridade
Padrões de interação	I-R-A e I-R-F-R-A
Turnos indicativos de indícios de aprendizagem	584, 586, 600, 607, 609, 613 e 625

Fonte: Elaborado pelos autor (2019)

Episódio VII

Turnos de 629 - 776

Segmento 11

Turnos 629 – 691

O primeiro segmento deste episódio teve como objetivo estimular os alunos a converterem as multiplicações de números inteiros, dispostas na primeira coluna do Quadro 17, em divisões. Esta técnica já havia sido assimilada pelos discentes no momento em que foi estudado divisão de números naturais. Para isso o professor/pesquisador orientou os discentes a seguirem o modelo proposto na primeira linha do referido Quadro. Essa tarefa foi de extrema importância, pois possibilitou que os alunos pudessem visualizar

o surgimento de um conjunto divisões de números inteiros com seus respectivos resultados. As interações entre os participantes podem ser vistas na descrição dos turnos a seguir.

(629) **Professor:** *Vamos ler o comando da tarefa um da atividade sete. Preencha o quadro abaixo transformando uma multiplicação de números inteiros em duas divisões de números inteiros conforme o modelo inicial. Então vejam o quadro na primeira linha. Está assim: mais dois vezes mais três dá mais seis. Depois tem a transformação em multiplicação. Vai ficar assim: mais seis dividido por mais dois que dá mais três ou mais seis dividido por mais três que dá mais dois. Entenderam o exemplo da primeira linha?*

(630) **C3:** *Entendi.*

(631) **Professor:** *Agora vocês vão fazer para cada uma das linhas restantes. Fizemos do mesmo jeito quando estudamos os números naturais.*

(632) **A3:** *Tem que somar alguma coisa?*

(633) **Professor:** *Não. Faça como nós aprendemos quando estudamos os números naturais. Transforme as multiplicações em divisões.*

(634) **A2:** *Não soma nada aqui. Só é pra transformar em divisão A3.*

(635) **Professor:** *Isso mesmo A2.*

(636) **A2:** *Professor é assim: Pega o resultado que é menos seis com parênteses, dividido por menos dois que dá menos três?*

(637) **Professor:** *Isso mesmo! Pessoal, o A2 já fez a segunda linha corretamente. Façam também.*

(638) **C3:** *Venha cá professor ver o meu.*

(639) **Professor:** *Como ficou a segunda linha?*

(640) **C3:** *Mais seis dividido por menos dois é igual a menos três.*

(641) **Professor:** *Perfeito!*

(642) **E3:** *Aqui professor.*

(643) **Professor:** *Vamos ver. Como foi que você fez?*

(644) **E3:** *Mais seis dividido por menos dois igual a menos três.*

(645) **Professor:** *Perfeito! Pode continuar.*

(646) **D1:** *Aqui professor.*

(647) **Professor:** *Vamos ver. Como foi que você fez?*

(648) **D1:** *Menos quarenta e dois dividido por menos seis é igual a menos sete.*

(649) **Professor:** *Certeza? É menos ou é mais sete?*

(650) **D1:** *Mais sete.*

(651) **Professor:** *Perfeito! Essa outra como ficou?*

(652) **D1:** *Mais quarenta e dois dividido por menos seis é igual a menos sete.*

(653) **Professor:** *Isso!*

(654) **Professor:** *Todos estão entendendo como deve fazer a atividade?*

(655) **C2:** *Sim.*

- (656) **D2:** *Aqui professor.*
- (657) **Professor:** *Deixa eu ver. O que você fez na terceira linha?*
- (658) **D2:** *Menos seis dividido por três é igual a dois.*
- (659) **Professor:** *Mais ou menos dois?*
- (660) **D2:** *Menos dois.*
- (661) **Professor:** *Perfeito. E aqui, como fica?*
- (662) **D2:** *Menos seis dividido por menos dois que é igual a mais três.*
- (663) **Professor:** *Perfeito!*
- (664) **D1:** *Aqui professor. Veja o meu.*
- (665) **Professor:** *Vamos ver. O que você fez?*
- (666) **D1:** *Mais seis dividido por menos dois é igual menos três.*
- (667) **Professor:** *Perfeito, faça a outra.*
- (668) **C3:** *Aqui professor.*
- (669) **Professor:** *Vamos ver. O que você fez nesta linha?*
- (670) **C3:** *Mais vinte dividido por menos quatro é igual mais cinco.*
- (671) **Professor:** *Mais ou menos cinco.*
- (672) **C3:** *Menos cinco.*
- (673) **Professor:** *Agora sim. Pessoal tenham cuidado com os sinais dos números.*
- (674) **D3:** *Aqui professor.*
- (675) **Professor:** *Vamos ver. O que você fez na penúltima linha?*
- (676) **D3:** *Mais quarenta e dois dividido por menos seis é igual a menos sete.*
- (677) **Professor:** *Perfeito! E na outra hipótese?*
- (678) **D4:** *Mais quarenta e dois dividido por menos sete é igual a menos seis.*
- (679) **Professor:** *Perfeito!*
- (680) **E3:** *Aqui professor.*
- (681) **Professor:** *Deixa eu ver. O que você fez nesta linha?*
- (682) **E3:** *Menos vinte dividido por menos quatro é igual a mais cinco.*
- (683) **Professor:** *Perfeito! Qual a outra hipótese?*
- (684) **E3:** *Menos vinte dividido por mais cinco que é igual a menos quatro.*
- (685) **Professor:** *Isso! Perfeito!*
- (686) **C2:** *Veja o meu professor.*
- (687) **Professor:** *Vamos ver. O que você fez nesta linha?*
- (688) **C2:** *Menos vinte dividido por menos quatro é igual a mais cinco.*
- (689) **Professor:** *E essa aqui?*
- (690) **C2:** *Menos vinte dividido por mais cinco é igual a menos quatro.*
- (691) **Professor:** *Perfeito. Tá certo!*

É possível perceber fortes indícios de aprendizagem nos turnos 636, 640, 644, 648, 650, 652, 658, 660, 662, 666, 670, 672, 676, 678, 682, 684, 688

e 690. Dessa forma os objetivos foram alcançados, uma vez que os alunos compreenderam que toda multiplicação de números inteiros, assim como no conjunto de números naturais, pode ser convertida em duas hipóteses de divisão. Ressaltamos que apenas dois alunos não concluíram esta tarefa. A Figura 9 ilustra a produção correta do aluno E3.

Figura 9 - Produção correta da tarefa 1 (Aluno E3)

Multiplicação	Divisão (a)	Divisão (b)
$(+2) \times (+3) = +6$	$(+6) \div (+2) = +3$	$(+6) \div (+3) = +2$
$(-2) \times (-3) = +6$	$(+6) \div (-2) = -3$	$(+6) \div (-3) = -2$
$(-2) \times (+3) = -6$	$(-6) \div (-2) = +3$	$(-6) \div (+3) = -2$
$(+4) \times (+5) = +20$	$(+20) \div (+4) = +5$	$(+20) \div (+5) = +4$
$(-4) \times (-5) = +20$	$(+20) \div (-4) = -5$	$(+20) \div (-5) = -4$
$(-4) \times (+5) = -20$	$(-20) \div (-4) = +5$	$(-20) \div (+5) = -4$
$(+6) \times (+7) = +42$	$(+42) \div (+6) = +7$	$(+42) \div (+7) = +6$
$(-6) \times (-7) = +42$	$(+42) \div (-6) = -7$	$(+42) \div (-7) = -6$
$(-6) \times (+7) = -42$	$(-42) \div (-6) = +7$	$(-42) \div (+7) = -6$

Fonte: Autor (2019)

A abordagem comunicativa durante o discurso é claramente interativa/de autoridade. Porém, no momento inicial em que o professor orienta os alunos a realizarem a tarefa 1, há a ocorrência da abordagem não-interativa/de autoridade, uma vez que os alunos permanecem em silêncio para escutar as orientações. O padrão de interação constatado neste segmento é o triádico I-R-A, no entanto, em alguns momentos há o padrão I-R-F-R-A (turnos 647, 648, 649, 650, 651 e 669, 670, 671, 672, 673). O Quadro 29 sintetiza os aspectos apresentados.

Quadro 29: Aspectos analisados no segmento 11

Abordagem	Interativa/de autoridade e Não-interativa/de autoridade
Padrões de interação	I-R-A e I-R-F-R-A
Turnos indicativos de indícios de aprendizagem	636, 640, 644, 648, 650, 652, 658, 660, 662, 666, 670, 672, 676, 678, 682, 684, 688 e 690

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Segmento 12

Turnos 692 – 776

Este segmento tinha o objetivo de influenciar os alunos a perceberem que a divisão de dois números inteiros com sinais iguais é positiva, assim como a divisão de dois números inteiros com sinais diferentes é negativa. Para isso o professor/pesquisador explicou aos discentes que eles deveriam analisar minuciosamente as divisões que surgiram no preenchimento do Quadro da tarefa 1 desta atividade, explicação esta que possibilitou aos aprendizes responderem rapidamente as tarefas seguintes. Abaixo é possível ver as interações dos participantes.

(692) **Professor:** *Como todos terminaram, vamos ler a tarefa dois: Analisando as divisões que apareceram na segunda e terceira coluna, quando dividimos dois números com sinais iguais o resultado da divisão é positivo ou negativo?*

(693) **B2:** Positivo.

(694) **Professor:** *Isso! Todos concordam com B2?*

(695) **D3:** Sim.

(696) **Professor:** *Quem são esses sinais iguais?*

(697) **B2:** Dois positivos.

(698) **Professor:** *Ou?*

(699) **D3:** Dois negativos.

(700) **Professor:** *Perfeito! Entenderam?*

(701) **A2:** Sim

(702) **Professor:** *Então toda vez que o dividendo e o divisor forem ambos positivos ou negativos o resultado da divisão é?*

(703) **D3:** Positivo.

(704) **Professor:** *Certo. Agora tarefa três. E quando dividimos dois números inteiros com sinais diferentes, o resultado é positivo ou negativo?*

(705) **E3:** Negativo.

(706) **D2:** Negativo.

(707) **A2:** Negativo.

(708) **Professor:** *Muito bem. Agora tarefa quatro. Preencha a segunda coluna do quadro, informando se o sinal da divisão é positivo ou negativo.*

(709) **Professor:** *Vamos lá B2, número positivo com número positivo dá o quê?*

(710) **B2:** Positivo!

(711) **Professor:** *E quando ambos são negativos?*

(712) **B2:** Dá positivo.

(713) **E3:** Positivo.

(714) **Professor:** *E quando o primeiro é positivo e o segundo é negativo?*

(715) **E3:** Negativo.

(716) **Professor:** *E quando o primeiro é negativo e o segundo é positivo?*

- (717) **C3:** Negativo.
- (718) **B2:** Negativo.
- (719) **A2:** Negativo.
- (720) **Professor:** Muito bem! Agora vamos formalizar o que a gente acabou de aprender: A atividade sete nós revelou que a divisão de dois números inteiros com sinais iguais é sempre positiva, e divisão de dois números inteiros com sinais diferentes é sempre negativa. Ou seja, a regra da divisão em relação aos sinais dos números é igual a da multiplicação. Certo?
- (721) **C2:** Certo professor.
- (722) **Professor:** Então basta nós dividimos os números, sendo que quando os sinais forem iguais vai dar o quê?
- (723) **D2:** Positivo.
- (724) **A2:** Positivo.
- (725) **Professor:** Certo! E se os sinais dos números forem diferentes?
- (726) **A2:** Negativo.
- (727) **Professor:** Perfeito. Agora vamos fazer a tarefa cinco.
- (728) **C1:** Veja aqui professor.
- (729) **Professor:** Vamos lá. Seis dividido por três dá?
- (730) **C1:** Dois.
- (731) **Professor:** Certo. Os sinais são iguais ou diferentes?
- (732) **C1:** Iguais.
- (733) **Professor:** Vai dar positivo ou negativo?
- (734) **C1:** Positivo.
- (735) **Professor:** Perfeito! E agora, quanto é nove dividido por três?
- (736) **C1:** Três.
- (737) **Professor:** Certo. Os sinais são iguais ou diferentes?
- (738) **C1:** Diferentes.
- (739) **Professor:** Então vai dar mais ou menos?
- (740) **C1:** Menos.
- (741) **Professor:** Perfeito.
- (742) **A2:** Aqui professor.
- (743) **Professor:** Vamos ver. Quatro dividido por dois dá quanto?
- (744) **A2:** Dois.
- (745) **Professor:** Certo. Sinais iguais dá sempre?
- (746) **A2:** Positivo.
- (747) **Professor:** Muito bem.
- (748) **A3:** Professor, sinais diferentes dá negativo.
- (749) **Professor:** Isso mesmo.
- (750) **A4:** Professor, doze dividido por dois dá seis.
- (751) **Professor:** Sinais iguais dá o quê?
- (752) **A4:** Positivo.

- (753) **Professor:** *Perfeito.*
- (754) **A2:** *Professor aqui.*
- (755) **Professor:** *Vamos ver. O que você fez?*
- (756) **A2:** *Dez dividido por cinco, dá dois. Sinais iguais positivo.*
- (757) **Professor:** *Perfeito.*
- (758) **A3:** *Professor, aqui.*
- (759) **Professor:** *Vamos ver. O que você fez?*
- (760) **A3:** *Doze dividido por dois dá seis.*
- (761) **Professor:** *Isso mesmo. Sinais iguais dá o quê?*
- (762) **A3:** *Positivo.*
- (763) **C1:** *O meu aqui.*
- (764) **Professor:** *Menos dezesseis dividido por dois?*
- (765) **C1:** *Dá menos oito.*
- (766) **Professor:** *Certo.*
- (767) **B1:** *Aqui professor.*
- (768) **Professor:** *Vamos ver. Nove dividido por três?*
- (769) **B1:** *Três.*
- (770) **Professor:** *Sinais diferentes dá o quê?*
- (771) **B1:** *Negativo.*
- (772) **Professor:** *Perfeito. Agora quanto é doze dividido por dois?*
- (773) **B1:** *Seis.*
- (774) **Professor:** *Sinais iguais vai dar o quê?*
- (775) **B1:** *Positivo.*
- (776) **Professor:** *Isso.*

É muito fácil perceber riquíssimos indícios nos turnos 693, 697, 699, 703, 705, 706, 707, 710, 712, 713, 715, 717, 718, 719, 723, 724, 726, 734, 740, 746, 748, 752, 756, 762, 765, 771 e 775, logo, os objetivos deste segmento foram alcançados, visto que os aprendizes conseguiram perceber que a divisão de dois números inteiros com sinais iguais é positiva, assim como a divisão de dois números inteiros com sinais diferentes é negativa. Esses indícios permitiram a formalização do aprendizado no turno 720. A abordagem comunicativa foi nitidamente interativa/de autoridade, no entanto na formalização do conteúdo, é possível perceber a abordagem não-interativa/ de autoridade. O padrão de interação mais presente neste segmento é o triádico I-R-A, em que a professor/pesquisador pergunta, os alunos respondem e ele então avalia. O Quadro 30 a seguir sintetiza os aspectos apresentados.

Quadro 30: Aspectos analisados no segmento 12

Abordagem	Interativa/de autoridade e Não-interativa/de autoridade
Padrões de interação	I-R-A
Turnos indicativos de indícios de aprendizagem	693, 697, 699, 703, 705, 706, 707, 710, 712, 713, 715, 717, 718, 719, 723, 724, 726, 734, 740, 746, 748, 752, 756, 762, 765, 771 e 775

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Episódio VIII

Turnos de 777 - 857

Segmento 13

Turnos 777 – 857

Finalmente, neste último segmento, apresentamos os debates que ocorreram na atividade avaliativa final, cujo objetivo era analisar se os alunos conseguiriam identificar e resolver exercícios envolvendo as quatro operações mais fundamentais com números inteiros. Ao iniciar a atividade, o professor/pesquisador explicou aos discentes que esta última tarefa iria mobilizar todo o conhecimento aprendido até aquele momento, logo eles deveriam relembrar todas as técnicas aprendidas para somar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros. Os turnos a seguir mostram as interações entre os participantes.

(777) **Professor:** *Agora pessoal vamos fazer a última tarefa. Ela é uma reunião de todas as operações que nós aprendemos com números inteiros, ou seja, a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão com números inteiros. Vamos fazer então.*

(778) **A3:** *Professor, venha cá, tá certo? Eu somei e repeti o sinal de menos.*

(779) **Professor:** *Isso, perfeito!*

(780) **Professor:** *Agora respondam, na primeira linha da tarefa final tem multiplicação ou divisão?*

(781) **D3:** *Não tem.*

(782) **Professor:** *Isso. Então só pode ter soma ou subtração.*

(783) **D3:** *Certo Professor.*

(784) **Professor:** *Na segunda linha da tarefa final, tem multiplicação ou divisão?*

(785) **D1:** *Não tem.*

(786) **Professor:** *Então só pode ser soma ou subtração.*

(787) **C1:** *Aqui professor.*

- (788) **Professor:** O que você fez?
- (789) **C1:** Menos vinte com o simétrico do dez deu menos trinta.
- (790) **Professor:** Isso!
- (791) **C3:** Aqui professor.
- (792) **Professor:** Vamos ver. Menos vinte com o simétrico do menos vinte, dá o quê?
- (793) **C3:** Menos quarenta.
- (794) **Professor:** Certeza? Olha bem.
- (795) **C3:** Não, não. Não sei.
- (796) **C1:** Não sobra nada.
- (797) **Professor:** Isso! Entendeu o que o C1 falou?
- (798) **C3:** Sim.
- (799) **E3:** Aqui professor, veja o meu.
- (800) **Professor:** Menos vinte com o simétrico do menos vinte, dá o quê?
- (801) **E3:** Zero.
- (802) **Professor:** Isso.
- (803) **D1:** Veja o meu professor.
- (804) **Professor:** Vamos ver. Uma dívida de vinte com uma dívida de trinta dá o quê?
- (805) **D1:** Dívida de cinquenta.
- (806) **Professor:** Isso! Positivo ou negativo?
- (807) **D1:** Negativo.
- (808) **Professor:** Perfeito!
- (809) **D4:** Aqui professor.
- (810) **Professor:** Vamos ver. Menos vinte com menos dez, vai dar quanto?
- (811) **D4:** Menos trinta.
- (812) **Professor:** Isso!
- (813) **D1:** Aqui professor.
- (814) **Professor:** Vamos lá. Você tem vinte positivo, mas tem uma dívida de trinta, dá quanto?
- (815) **D1:** menos dez.
- (816) **Professor:** Perfeito.
- (817) **Professor:** Olha pessoal, tem que fazer a tarefa cinco primeiro.
- (818) **B1:** Veja o meu professor.
- (819) **Professor:** Vamos ver. O que você fez?
- (820) **B1:** Dez vezes oito dá oitenta, sinais iguais dá positivos.
- (821) **Professor:** Certo!
- (822) **D1:** Aqui professor.
- (823) **Professor:** Deixa eu ver. Um crédito de vinte e cinco mais um crédito de quinze, vai dar o que?
- (824) **D1:** Quarenta positivo.
- (825) **Professor:** Isso!

- (826) **A2:** *Veja o meu professor.*
- (827) **Professor:** *Vamos ver. Vinte e cinco com o simétrico do mais vinte e cinco, vai dar o quê?*
- (828) **A2:** *Zero.*
- (829) **Professor:** *Isso.*
- (830) **C2:** *Aqui professor.*
- (831) **Professor:** *Vamos ver. Tu deves vinte e cinco, mas só tem quinze. Vai sobrar ou vai faltar dinheiro?*
- (832) **C2:** *Vai faltar dez.*
- (833) **Professor:** *Positivo ou negativo?*
- (834) **C2:** *Negativo.*
- (835) **Professor:** *Isso.*
- (836) **B2:** *Venha aqui professor.*
- (837) **Professor:** *Doze dividido por dois dá quanto?*
- (838) **B2:** *Seis.*
- (839) **Professor:** *Sinais iguais dá o quê?*
- (840) **B2:** *Positivo.*
- (841) **Professor:** *E agora quem é o simétrico do menos quinze?*
- (842) **B2:** *Mais quinze.*
- (843) **Professor:** *Certo. E agora, vinte e cinco mais quinze?*
- (844) **B2:** *Quarenta né.*
- (845) **Professor:** *é!*
- (846) **B2:** *No caso é mais quarenta.*
- (847) **Professor:** *Isso.*
- (848) **D1:** *Professor, o meu.*
- (849) **Professor:** *Vamos ver. Mais nove divido por menos três, dá quanto?*
- (850) **D1:** *Menos três.*
- (851) **Professor:** *Ok.*
- (852) **Professor:** *O simétrico do mais quinze?*
- (853) **D1:** *Menos quinze.*
- (854) **Professor:** *Vinte e cinco menos quinze, dá quanto?*
- (855) **D1:** *Dez positivo.*
- (856) **Professor:** *Agora tu tens vinte e cinco e deves vinte e cinco, dá quanto?*
- (857) **D1:** *Zero.*

A abordagem comunicativa detectada neste segmento se aproximou mais da interativa/de autoridade, pois os alunos solicitavam constantemente ao professor a análise das resoluções dos exercícios. Nestes momentos o professor/pesquisador lia a questão e perguntava o resultado aos aprendizes

(turnos 791 a 816; 822 a 857). Devido as constantes perguntas feitas pelo docente, a fim de detectar os indícios de aprendizagem, foi possível constatar o padrão triádico I-R-A, pois os alunos respondiam e o professor/pesquisador avaliava se as respostas estavam corretas.

A atividade avaliativa final foi composta por 24 questões relacionadas às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros. Deste total, 6 eram de soma, 6 de subtração, 6 de multiplicação e 6 de divisão.

Os Quadros 31 e 32, dispõem a quantidade de acertos ocorridos na atividade final, respectivamente, por tipo de questão e por aluno. Desses podemos retirar importantes informações que confirmam os indícios de aprendizagem expostos na análise Microgenética. Foram 18 participantes, que produziram um total global de 432 respostas ou 108 respostas por tipo de questão.

Quadro 31: Número de acertos por tipo de questão

Total de Questões	Tipo	Acertos	
		Quantidade	(%)
6	Soma	88	81,48
6	Subtração	81	75
6	Multiplicação	92	85,18
6	Divisão	93	86,11
	TOTAL GLOBAL	354	81,94

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Iniciamos esta análise ressaltando que, das 432 respostas produzidas pelos alunos, 354 revelaram-se corretas, o que corresponde a 81,94% do total. Quando diminuimos o campo de visualização por tipo de questão, tivemos um resultado mais expressivo para as questões relacionadas à multiplicação e divisão - 85,18% e 86,11%, respectivamente -, enquanto que as questões relacionadas a soma e subtração tiveram um total de 81,48% e 75% de respostas corretas, respectivamente. Estes dados, em conjunto com a análise Microgenética, nos revelam importantes indícios de aprendizagem.

Quadro 32: Número de acertos por aluno

Aluno	Soma	Subtração	Multiplicação	Divisão	TOTAL
	Acertos (%)	Acertos (%)	Acertos (%)	Acertos (%)	Acertos (%)
1	33,33	50,0	50,0	83,33	54,17
2	50,0	50,0	33,33	83,33	54,17
3	66,67	83,33	100,0	83,33	83,33
4	50,0	66,67	100,0	83,33	75,00
5	100,0	50,0	100,0	100,00	87,50
6	100,0	50,0	100,0	100,00	87,50
7	100,0	66,67	83,33	100,00	87,50
8	100,0	83,33	100,0	83,33	91,67
9	100,0	100,0	50,0	100,00	87,50
10	100,0	66,67	100,0	100,00	91,67
11	83,33	83,33	66,67	66,67	75,00
12	100,0	100,0	100,0	100,00	100,00
13	100,0	100,0	100,0	100,00	100,00
14	66,67	100,0	100,0	100,00	91,67
15	100,0	100,0	66,67	100,00	91,67
16	66,67	50,0	83,33	16,67	54,17
17	66,67	66,67	100,0	50,00	70,83
18	83,33	83,33	100,0	100,00	91,67
				TOTAL	81,94

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Quando examinamos o desempenho individual, o Quadro 32 nos revela, na sexta coluna, que 100% dos alunos obtiveram mais de 50% de respostas corretas. Focando agora em uma análise individual por tipo de questão, apenas os alunos 1 e 2 não conseguiram a porcentagem mínima de 50% de acerto (ambos 33,33%), nas operações de soma e multiplicação, respectivamente.

Dessa forma, os dados apresentados nos Quadros 31 e 32 nos revelam um excelente nível de aprendizagem acerca das quatro operações mais fundamentais com números inteiros, ratificando os indícios de aprendizagem constatados na Análise Microgenética em conjunto com a Análise do Discurso.

Diante do exposto, ressaltamos que a sequência didática proposta neste trabalho tem potencialidade para o ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros, visto que, tanto a Análise Microgenética em conjunto com Análise do Discurso, como também os dados

estatístico da atividade final dispostos nos Quadros 31 e 32, nos revelam excelentes indícios de aprendizagem, logo a questão de nossa pesquisa foi respondida satisfatoriamente.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste momento traço minhas considerações finais, as quais comprovam que a pergunta central desta pesquisa foi respondida, a saber: Quais as potencialidades de uma sequência didática criada especificamente para o ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros, estruturada sob a ótica das unidades articuladas de reconstrução conceitual?

No desenrolar desta pergunta estabeleceu-se como objetivo geral analisar os indícios de aprendizagem resultantes da aplicação de uma sequência didática envolvendo as quatro operações aritméticas mais elementares dos números inteiros, elaborada de acordo com as unidades articuladas de reconstrução conceitual, em uma turma da 3ª etapa da educação de jovens e adultos (EJA) do ensino fundamental de uma escola pública estadual em Belém do Pará. Podemos afirmar que este objetivo foi alcançado, visto que, no decorrer da aplicação da sequência didática, as interações verbais dos discentes permitiram identificar excelentes indícios de aprendizagem.

Em relação ao panorama do ensino dos números inteiros no ensino fundamental, descritos na Seção 2, foi possível detectar na revisão de estudos que os docentes devem trabalhar, pelo menos, com dois registros de representação para o estudo da compreensão em matemática, a fim de que os aprendizes possam ter uma visão mais ampla da aplicação do objeto matemático a ser ensinado. Outro ponto crucial detectado trata-se da formação acadêmica destes docentes, visto que quando estes profissionais saem dos cursos de graduação, não estão preparados para trabalhar com os alunos no sentido de levá-los a pensar, abstrair, classificar, ordenar e raciocinar, procurando dar enfoques diferentes dos tradicionalmente utilizados. Neste sentido, estes professores devem ser preparados para trabalhar com ferramentas didáticas que possam envolver os alunos, motivá-los e instigá-los no processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros, estas ferramentas devem produzir um ambiente adequado às realidades vivenciadas pelos alunos em seu cotidiano, possibilitando um aprendizado descolado da memorização das regras de sinais pré-estabelecidas.

Em relação à visão dos professores e alunos de como está sendo realizado o ensino dos números inteiros em nossas escolas, foi possível detectar, na opinião dos alunos, que a maioria dos professores ministra suas aulas de forma expositiva, apresentando definições, exemplos e propondo exercícios para serem resolvidos. Ressaltando agora às dez questões aplicadas aos alunos referentes aos números inteiros, foi possível perceber que a maior porcentagens de erros estavam relacionadas às questões que exigiam a habilidade em manipular números negativos, independentemente da operação matemática envolvida na referida questão.

Sobre a opinião dos professores entrevistados, constatamos que, ao contrário do que foi respondido pelos alunos, a maior parte dos docentes iniciam os conteúdos através de uma situação-problema. Quando perguntamos sobre o grau de dificuldade das questões propostas, os professores responderam que os discentes teriam maior dificuldade em resolver as questões que envolviam a manipulação de números inteiros negativos, fato este confirmado em pesquisa de campo realizada com os aprendizes.

Após a análise das informações adquiridas na revisão de estudos e na opinião de professores e alunos sobre o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros, elaboramos uma sequência didática nos moldes das Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC'S), desenvolvida por Cabral (2017). A aplicação foi feita em uma turma da terceira etapa da educação de jovens e adultos do ensino fundamental, organizando-se a aferição dos resultados por meio da Análise Microgenética articulada com a Análise do Discurso, cujas análises podem ser verificadas ao final de cada segmento e, em alguns casos, sistematizadas em quadros que destacam as abordagens comunicativas, os padrões de interação e os turnos em que houveram os indícios de aprendizagem.

O Quadro 19 nos concede uma visão geral das atividades desenvolvidas, as quais iniciam-se com uma situação didática e finalizam-se com uma intervenção avaliativa restritiva final, em que foram abordados todas as técnicas estudadas para somar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros. A análise da atividade 1, demonstra que os alunos conseguiram assimilar o algoritmo para somar números inteiros com sinais iguais. A Figura 5 ratifica os indícios de aprendizagens detectados nesta atividade.

Na atividade 2, a qual estava relacionada ao aprendizado do algoritmo para somar números inteiros com sinais diferentes, foi possível observar que as intervenções orais de manutenção objetiva iniciadas de forma não-interativa/de autoridade mudaram, gradativamente, para uma forma interativa/de autoridade. Os Quadros 21 e 22 apresentam indicativos de indícios de aprendizagem, assim concluímos que os objetivos relativos a essa atividade foram atingidos.

Os Quadros 23 e 24, referentes às atividades 3 e 4, relacionadas à soma de números inteiros simétricos e subtração de números inteiros, respectivamente, revelam que a abordagem comunicativa inicialmente foi a não-interativa de autoridade, porém na maior parte dos turnos, foi possível detectar o padrão interativo de autoridade e, em alguns momentos, o padrão interativo/dialógico. Nos referidos quadros também é possível identificar os turnos que caracterizam os indícios de aprendizagem.

Durante a aplicação da atividade 5, a qual estava relacionada à multiplicação de números inteiros com sinais iguais positivos e sinais diferentes, e da atividade 6 relacionada ao aprendizado da multiplicação de números inteiros negativos, foi possível observar que as intervenções orais de manutenção objetiva foram preponderantemente interativa/de autoridade. É importante ressaltar que nestas referidas atividades observamos maior intensidade nas interações verbais entre professor-aluno e aluno-aluno no segmento 7, o qual proporcionou o padrão não-triádico I-R-F-R-F-R-A. Os Quadros 25, 26, 27 e 28, apresentam os indicativos de indícios de aprendizagens e, dessa forma, concluímos que os objetivos relativos a essas atividades foram atingidos.

A Atividade 7, a qual teve como objetivo instigar os alunos a descobrirem a técnica para dividir números inteiros, demonstrou claramente que as intervenções entre os envolvidos foram, novamente, do tipo interativa de autoridade. É importante ressaltar que o preenchimento do Quadro 17, foi um recurso eficiente para que os alunos percebessem que a regra de sinais da divisão era semelhante à da multiplicação. Este recurso proporcionou o surgimento de belíssimos indícios de aprendizagem que podem ser vistos nos Quadro 29 e 30, logo os objetivos desta atividade foram atingidos.

A última atividade desta sequência didática, a qual teve como objetivo aferir se os alunos conseguiriam identificar e resolver exercícios envolvendo às

quatro operações mais fundamentais com números inteiros, mostrou o excelente desempenho dos alunos quanto à aprendizagem dos algoritmos para somar, subtrair, multiplicar e dividir. De modo geral, os Quadros 31 e 32, que retratam os acertos desta atividade final, por tipo de questão e por aluno, respectivamente, demonstram um desempenho satisfatório dos aprendizes, visto que das 432 respostas produzidas pelos alunos, 354 revelaram-se corretas, o que corresponde a 81,94% do total. Foi possível também constatar que quando examinamos o desempenho individual dos alunos, 100% deles obtiveram mais de 50% de respostas corretas. Estes dados, em conjunto com a análise Microgenética, ratificam os indícios de aprendizagens encontrados nas análises feitas durante o desenvolvimento das atividades, além de demonstrar a eficiência da sequência didática desenvolvida.

É importante também ressaltar que os resultados satisfatórios obtidos com a aplicação desta sequência didática são válidos para esta amostra de alunos, a qual foi composta por discentes da educação de jovens e adultos, ou seja, estes aprendizes possuem particularidades que os alunos da modalidade regular de ensino não possuem. Entre estas particularidades podemos destacar a experiência de vida que eles já adquiriam, pois, são alunos que não tiveram acesso ou continuidade de estudos na idade apropriada. Logo, sugerimos que pesquisas futuras proponham a reaplicação desta proposta de ensino no sétimo ano do ensino fundamental, tendo em vista identificar indícios de aprendizagem que venham corroborar com nossa pesquisa.

Por fim, temos a convicção de que este trabalho proporcionou uma valiosa contribuição em nossa formação profissional, nos fazendo crer que é possível, através das atividades aqui propostas, instigar os alunos a terem uma atitude investigativa que possa favorecer a criação de um ambiente no qual os discentes partilhem as experiências adquiridas dentro e fora da escola, proporcionando a reconstrução mais significativa do objeto matemático a ser estudado.

REFERÊNCIAS

- ALVES, Evanilson Ladim. **Menos com menos é Menos ou é mais? Resolução de problemas de multiplicação e divisão de números inteiros por alunos do Ensino Regular e da Educação de Jovens e Adultos**. 207 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica.) - Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 2012.
- ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007
- BEZERRA, Aluzimara Nogueira. **As isometrias nos azulejos de Belém: uma proposta de ensino**. 166 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.
- BOYER, Carl. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2010.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, Matemática**. Brasília, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação Câmara de Educação Básica. **Resolução nº 3, de 03 de agosto de 2005**. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb003_05.pdf>. Acesso em: 03 jul. 2018.
- BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Brasil no Pisa 2015 (Sumário Executivo)**. Brasília, 2016.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase>> Acesso em: 08 jun. 2018.
- BROUSSEAU, G. **Etude de l' influence des conditions de validation sur l' apprentissage de un algorithme**. Bordeaux: IREM de Bordeaux, 1975.
- BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 7.2, p. 33-115, 1986.
- BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: BRUN, Jean. **Didática das matemáticas**. Coleção Horizontes Pedagógicos. Lisboa: Instituto Piaget. 1996.
- BROUSSEAU, Guy. **Introdução aos estudos das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008

CABRAL, N. F. **O papel das interações professor-aluno na construção da solução lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2004.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Belém-PA: SBEM/SBEM-PA, 2017.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaio Temático: história e matemática em sala de aula**. Belém-PA: SBEM/SBEM-PA, 2017.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Bertrand, 1963.

COSTA, Gisele Maria Tonin da; PERETTI, Lisiane. **Sequência Didática na Matemática**. Instituto de Desenvolvimento Educacional do Alto Uruguai – IDEAU. Revista de Educação do IDEAU. Vol. 8 – Nº 17 - Janeiro - Junho 2013 Semestral.

DAMM, R. F. **Representação, Compreensão e resolução de Problemas Aditivos**. In: MACHADO, S. D. (org). *Aprendizagem em Matemática*. Campinas: Papirus, 2003.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática**. São Paulo: Ed. Ática, 2005 A. 4v.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Ed. Atual, 1991.

DUVAL, R. **L'analyse cognitive du fonctionnement de la pensée et de l'activité mathématique: cours sur les apprentissages intellectuels donné à la PUC**. São Paulo: Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 1999.

_____. **Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Colombia: Peter Lang, 2004.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP : Ed. UNICAMP, 2004.

FLEMMING, Diva Marília. LUZ, Elisa Flemming. MELLO, Ana Cláudia Collaço. **Tendências em Educação Matemática**. 2. ed. Palhoça: UnisulVirtual, 2005. Disponível em: <<https://pibidmatematicaces.files.wordpress.com/2013/10/livro-tendencias-em-educacao-matematica.pdf>>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2018.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito. **A conquista da matemática, a + nova**. São Paulo: Ed. FTD S.A., 2005. 4v.

GLAESER, George. **Epistemologie des nombres relatifs**. RDM, v.2., n.3, 1981.

GONÇALVES, Renata Siano. **Um estudo com os números inteiros usando o Programa aplusix com alunos de 6ª série do ensino fundamental**. 143 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

GODOY, Elenilton Vieira; SANTOS, Vinício de Macedo. O Cenário do Ensino de Matemática e o Debate Sobre o Currículo de Matemática. **Revista Práxis Educacional**, v. 8, n. 13, jul/dez 2012. Disponível em: <<http://periodicos.uesb.br/index.php/praxis/article/viewFile/1590/1462>. Acesso em: 28 jun 2018.

GÓES, M. D. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade**. Cadernos Cedes, SciELO Brasil, v. 50, n. 9-25, 2000.

GONZÁLES, José L. et al. **Numeros enteros**. Madrid: Sintesis, 1990. (Matematicas: cultura y aprendizaje, v. 6)

HILLESHEIM, S. F. **Os números inteiros relativos em sala de aula: perspectivas de ensino para a regra de sinais**. 216 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

HILLESHEIM, S. F; MORETTI, M. T. Alguns aspectos da noção da congruência semântica presentes no ensino dos números inteiros relativos. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 10, n. 1, Passo Fundo, p. 119-135, jan./jun. 2013. Disponível em: <http://seer.upf.br/index.php/rep>. Acesso em: 20 dez 2018.

HØYRUP, Jeans. **Lengths Widths, surfaces: a portrait of old Babylonian algebra and its kin**. New York: Springer.

HUBERMAN, M. **O ciclo de vida profissional dos professores**. In: NÓVOA, A. (Org.). Vidas de professores. 2. ed. Porto: Porto, 2000. p.31-61.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1990

LOPES BIGODE, Antônio José. **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: Editora FTD S.A., 2005. 4v.

MEDEIROS, A. ; MEDEIROS, C. **Números negativos: uma história de incertezas**. Bolema, Rio Claro, v. 7, n. 8, p. 49-59, 1992.

MORTIMER, E. F.; SCOTT, P. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. Investigações em ensino de ciências**, v. 7, n. 3, p. 283–306, 2002.

MOYSÉS, Lucia. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática**. 11ª ed. Campinas, SP: Papirus, 2012. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico)

NASCIMENTO, Ross A. **Um estudo sobre obstáculos em adição e subtração de números inteiros relativos: explorando a reta numérica dinâmica**. 2001. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife- PE, 2001.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s**. Reston, VA: NCTM, 1980

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis - RJ: Vozes, 2013.

OLIVEIRA, Marconni Augusto Pock de. **Sequência Didática para o Ensino de Função Exponencial**. 2018. 279 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

ROCHA NETO, F. T. da. **Dificuldades na aprendizagem operatória de números inteiros no ensino fundamental**. 81 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.

PAIAS, Ana Maria. **Diagnóstico dos erros sobre a Operação Potenciação aplicado a alunos dos Ensinos Fundamental e Médio**. 2009. 218 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

PASSONI, José C. **(Pré-) Álgebra: introduzindo os números inteiros negativos**. 2002. 227 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

PEREIRA, Marcos. **Uma Sequência Didática para o ensino de semelhança de figuras planas**. 2017. 166 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2017.

SCHUBRING, Gert. **Os números negativos: exemplos de obstáculos epistemológicos?** São Paulo: Editora Livraria da Física – (Série história da matemática para professores), 2018.

RAMA, Aguinado J. **Números inteiros nos ensinos fundamental e médio**. 2005. 192 f. Dissertação (Mestrado Profissional no Ensino de Matemática) - PUC/SP, São Paulo, 2005.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática - Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas**. Rio de Janeiro: Ed. Zahar, 2012.

ROSA, C. E. G.; FIGUEIREDO, C. G. da M.; LISBOA, M. L. da C. **Produto de números negativos: Estratégias para tratar um obstáculo epistemológico**. Disponível em: <[https://docs.ufpr.br/~cegalvao/Dissertacao_Deposito\(3autores\).pdf](https://docs.ufpr.br/~cegalvao/Dissertacao_Deposito(3autores).pdf)>. Acesso em: 10 nov. 2018.

SALGADO, R. C. da S. **O ensino de números inteiros por meio de atividades com calculadora e jogos**. 272 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2011.

SANTOS, V. M. **Ensino de Matemática em outros países: análise comparativa**. (Texto elaborado para a prova escrita do Curso de Livre Docência em Metodologia do Ensino de Matemática, na Faculdade de Educação da USP), 2008.

SILVA, Alessandro R. **O livro didático e o discurso do professor no ensino das operações com números inteiros para alunos do ensino de jovens e adultos**. 2006. 158 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SILVA, Daniel Fernandes da. **O jogo como recurso pedagógico de ensino: uma proposta para os números relativos**. 2017. 141 f. . Dissertação (Mestrado em Ciências do Programa de Mestrado Profissional em Projetos Educacionais de Ciências.) – Escola de Engenharia de Lorena da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1992.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**; tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICES

A – QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS EGRESSOS DO 7º ANO



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE
MATEMÁTICA – PMPEM 2018

Prezado(a) aluno (a),
 Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1) **Idade:** ____ anos 2) **Gênero:** ☐ Masculino ☐ Feminino 3) **Ano/Série** _____

4) **Tipo de escola que estuda?**

☐ Municipal ☐ Estadual ☐ Conveniada ☐ Outro

5) **Você já ficou em dependência?**

☐ Não ☐ Sim, em quais disciplinas?

6) **Você gosta de Matemática?**

☐ Detesto. ☐ Suporto. ☐ Gosto um pouco. ☐ Adoro.

7) **Qual a escolaridade do seu responsável masculino?**

☐ Superior. ☐ Médio. ☐ Fundamental. ☐ Fundamental incompleto. ☐ Não estudou.

8) **Qual a escolaridade da sua responsável feminina?**

☐ Superior. ☐ Médio. ☐ Médio incompleto. ☐ Fundamental. ☐ Fundamental incompleto.
☐ Não estudou. ☐ Não sei informar.

9) **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?**

☐ Professor particular ☐ Colega ☐ Colega de Turma ☐ Ninguém ☐ Familiar,
 Quem? _____

10) Com que frequência você estuda matemática fora da escola?

☐ Todo dia ☐ Somente nos finais de semana ☐ No período de prova ☐ Só na véspera da prova ☐ Não estudo fora da escola.

11) Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?

☐ Sempre ☐ Quase sempre ☐ Às vezes ☐ Poucas vezes ☐ Nunca

12) Quais formas de atividades e/ou trabalhos o seu Professor (a) de matemática mais utiliza em suas aulas?

☐ Aulas Expositivas ☐ Trabalhos em grupo ☐ Seminários ☐ Pesquisas ☐ Projetos ☐ Lista de exercícios ☐ Jogos ☐ Outros, Quais? _____

13) Seu professor de matemática demonstra conhecimento e clareza ao trabalhar os conteúdos?

☐ Sim ☐ Não

14) Você considera as explicações do professor de matemática?

☐ Ruins ☐ Regulares ☐ Boas ☐ Excelentes

15) Quando você estudou NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS, a maioria das aulas:

☐ Iniciavam pela definição seguida de exemplos e exercícios;
☐ Iniciavam com a história do assunto para depois explorar os conceitos;
☐ Iniciavam com uma situação problema para depois introduzir o assunto;
☐ Iniciavam com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;
☐ Iniciavam com jogos para depois sistematizar os conceitos.

16) Para praticar o conteúdo de NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS seu professor costumava:

☐ Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;
☐ Apresentar jogos envolvendo o assunto;
☐ Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;
☐ Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.
☐ Não propunha questões de fixação;

17) Quais os instrumentos que seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?

☐ Provas ☐ Testes ☐ Simulados ☐ Auto avaliação ☐ Observação ☐ Trabalhos em Grupos
☐ Seminários ☐ Visto no caderno ☐ Pesquisa ☐ Participação em resolução de atividades
☐ Frequência/assiduidade ☐ Outros.

18) Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática?

☐Contente ☐Tranquilo ☐ Com Medo ☐Preocupado ☐ Com Raiva ☐Calafrios

19) Com base na sua experiência quando você estudou NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS preencha o quadro a seguir.

CONTEÚDOS	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?			
	Sim	Não	Muito Fácil	Fácil	Difícil	Muito Difícil
Idéia de números Inteiros positivos e negativos.						
Representação dos números Inteiros positivos e negativos na reta.						
Módulo de um número Inteiro.						
Idéia de números Inteiros simétrico						
Comparação de números Inteiros positivos e negativos						
Adição de números Inteiros com o mesmo sinal						
Adição de números Inteiros com sinais diferentes						
Adição de simétricos						
Subtração de números Inteiros com o mesmo sinal						
Subtração de números Inteiros com sinais diferentes						
Subtração de números Inteiros simétricos						
Multiplicação de dois números Inteiros com sinais diferentes						
Multiplicação de dois números Inteiros com sinais iguais.						
Divisão de dois números Inteiros com sinais diferentes.						
Divisão de dois números Inteiros com sinais iguais.						
Potenciação com base de número Inteiro e expoente com número Natural						

B- TESTE DOS ALUNOS EGRESSOS DO 7º ANO

Efetue as operações abaixo:

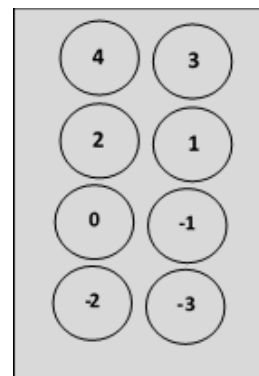
- 1) a) $2 + 7 =$ b) $-2 - 5 =$ c) $-5 + 4 =$ d) $5 - 2 =$
- 2) a) $(+2) \cdot (+5) =$ b) $(-2) \cdot (-5) =$ c) $(+5) \cdot (-3) =$ d) $(-5) \cdot (+2) =$
- e) $(-5) \cdot 0 =$ f) $0 \cdot (+2) =$
- 3) a) $(+10) \div (+5) =$ b) $(-10) \div (-2) =$ c) $(+10) \div (-5) =$ d) $(-10) \div (+10) =$
- 4) a) $4^3 =$ b) $(-2)^3 =$ c) $5^2 =$ d) $(-3)^2 =$
- e) $3^0 =$ f) $(-2)^0 =$

5) Carlos tinha no banco um saldo positivo de R\$ 30,00. Nos dias posteriores fez as seguintes movimentações: depósito de R\$ 40,00, retirada de R\$ 35,00, retirada de R\$ 60,00, depósito de R\$ 30,00 e retirada de R\$ 50,00. No fim de todas essas movimentações, marque a alternativa que contém o saldo na conta de Carlos?

- a) R\$ - 40,00
b) R\$ - 45,00
c) R\$ 80,00
d) R\$ 30,00

6) Em alguns prédios existem andares superiores e inferiores (subsolo) ao térreo. Veja a foto do painel do elevador. Nela aparecem o zero (térreo) os números negativos (subsolo) e os números positivos (acima do térreo) para indicar os andares do prédio. Qual a operação matemática que deve ser feita para calcular a quantidade de andares que você deve percorrer para sair do 4º andar (+4) e chegar ao 1º subsolo (-1)?

- a) $-4 + 1$
b) $+1 + (-4)$
c) $-1 - (+4)$
d) $+4 - 1$



7) Que movimentação bancária deve ser feita em uma conta bancária para passar de um saldo negativo de R\$ 85,00 para um saldo positivo de R\$ 48,00?

- a) Retirada de R\$ 37,00
b) Depósito de R\$ 85,00
c) Retirada de R\$ 48,00
d) Depósito de R\$ 133,00

8) Uma equipe de fórmula 1 avisa seu piloto, que está em segundo lugar na prova, que ele está 8 segundos à frente do terceiro colocado e 12 segundos atrás do

primeiro colocado. Quantos segundos à frente do terceiro colocado está o líder da prova?

- a) 4 segundos
- b) 12 segundos
- c) 8 segundos
- d) 20 segundos

9) Alexandre Magno, um dos principais conquistadores da História, nasceu em 356 a.C (antes de Cristo) e morreu em 323 a.C. Quantos anos ele tinha quando morreu?

- a) 35
- b) 56
- c) 33
- d) 20

10) Qual operação matemática que descreve a situação em que uma pessoa perde 4 dívidas de R\$ 2,00?

- a) $(-4) \cdot (-2)$
- b) $(+4) \cdot (-2)$
- c) $(-4) \cdot (+2)$
- d) $(-12) \cdot (+1)$

C- QUESTIONÁRIO DOS PROFESSORES



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA –
PMPEM 2018

Caro(a) Professor (a),

Este instrumento tem como objetivo obter informações para um estudo que pretende contribuir para superação dos obstáculos de ensino e aprendizagem de Matemática, encontrados por professores e alunos durante as atividades em sala de aula. Nesse sentido, é de grande importância sua colaboração, respondendo este questionário, para o bom êxito do estudo em questão. As informações obtidas terão um caráter confidencial e sua identidade será preservada. Agradecemos a sua colaboração com o nosso trabalho. Muito Obrigado!

1. Identidade de Gênero: _____

2. Faixa Etária:

- ☐ até 25 anos
- ☐ de 26 a 30 anos
- ☐ de 31 a 35 anos
- ☐ de 36 a 40 anos
- ☐ de 41 a 45 anos
- ☐ de 46 a 50 anos
- ☐ 50 anos ou mais

3. Tipo de escola que trabalha?

- ☐ Pública Municipal
- ☐ Pública Estadual
- ☐ Pública Federal
- ☐ Privada
- ☐ Não Trabalho em escola no momento

4. Você possui graduação em:

- ☐ Matemática
- ☐ Outros. Qual (is)? _____

5. Qual a sua formação acadêmica?

- ☐ Especialização (em andamento)
- ☐ Especialização

- ☐ Mestrado (em andamento)
- ☐ Mestrado
- ☐ Doutorado (em andamento)
- ☐ Doutorado

6. Tempo de magistério:

- ☐ até 5 anos
- ☐ de 6 a 10 anos
- ☐ de 11 a 15 anos
- ☐ de 16 a 20 anos
- ☐ Há mais de 20 anos

7. Quantas horas-aula você ministra por mês?

- ☐ de 100 a 150
- ☐ de 160 a 200
- ☐ de 210 a 250
- ☐ de 260 a 300
- ☐ mais de 300

8. Qual o número médio de alunos por turma?

- ☐ até 20
- ☐ de 21 a 30
- ☐ de 31 a 40
- ☐ de 41 a 50
- ☐ mais de 50

9. Você participou de eventos ou treinamentos que envolveram o ensino dos números inteiros?

- ☐ Sim
- ☐ Não

10. Quais os métodos você utiliza para ensinar os números inteiros e suas operações? (Marque mais de uma opção se necessário)

- ☐ Pela definição seguida de exemplos e exercícios
- ☐ Com uma situação problema para depois introduzir o assunto
- ☐ Com a criação de um modelo para a situação proposta e em seguida analisar o modelo
- ☐ Utilizando a tecnologia da informação
- ☐ Outra metodologia: _____

11. Você costuma investigar qual o conhecimento prévio dos alunos sobre o conteúdo que ainda vai ser ensinado?

- ☐ Sim, através de um teste.
- ☐ Sim, no início de aula através de diálogos com a turma.
- ☐ Não costumo fazer esse tipo de investigação.

12. Com quais atividades você costuma avaliar seus alunos? (Marque mais de uma opção se necessário)

- ☐ Prova
- ☐ Testes
- ☐ Trabalho individual/grupo
- ☐ Projetos Interdisciplinares
- ☐ Outras. Quais?

13. Para a fixação dos conteúdos, você costuma: (Marque mais de uma opção se necessário)

- ☐ Propor que os alunos resolvam os exercícios do livro didático.
- ☐ Elaborar uma lista de exercícios (apostila) para serem resolvidos pelos alunos.
- ☐ Solicitar que os alunos pesquisem sobre o assunto na biblioteca.
- ☐ Solicitar que os alunos pesquisem sobre o assunto na internet.

14. Em relação às operações mais elementares com números inteiros, quais delas você tem mais dificuldade para ensinar? (Marque mais de uma opção se necessário)

- ☐ Soma de números inteiros com sinais iguais positivos
- ☐ Soma de números inteiros com sinais iguais negativos
- ☐ Soma de números inteiros com sinais diferentes
- ☐ Multiplicação de números inteiros com sinais iguais positivos
- ☐ Multiplicação de números inteiros com sinais iguais negativos
- ☐ Multiplicação de números inteiros com sinais diferentes
- ☐ Divisão de números inteiros com sinais iguais positivos
- ☐ Divisão de números inteiros com sinais iguais negativos
- ☐ Divisão de números inteiros com sinais diferentes

- Nas questões abaixo marque o grau de dificuldade de aprendizagem que normalmente seus alunos apresentam ao estudar os números inteiros.

1) Efetue:

a) $2 + 7 =$

b) $2 + 5 =$

c) $5 + 4 =$

d) $8 + 2 =$

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil
--

2) Efetue:

a) $-2 - 7 =$

b) $-2 - 5 =$

c) $-5 - 4 =$

d) $-8 - 2 =$

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil

3) Efetue:

a) $-2 + 7 =$

b) $-2 + 5 =$

c) $-5 + 4 =$

d) $-8 + 2 =$

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil

4) Efetue:

a) $(+2)x(+5) =$

b) $(+7)x(+6) =$

c) $(+4)x(+3) =$

d) $(+8)x(+6) =$

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil

5) Efetue:

a) $(-2)x(-5) =$

b) $(-7)x(-6) =$

c) $(-4)x(-3) =$

d) $(-8)x(-6) =$

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil

6) Efetue:

a) $(+2)x(-5) =$

b) $(-7)x(+6) =$

c) $(+4)x(-3) =$

d) $(-8)x(+6) =$

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil

7) Efetue:

a) $0 \times (-5) =$

b) $(-7) \times 0 =$

c) $(+4) \times 0 =$

d) $0 \times (-6) =$

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil

8) Efetue:

a) $(+10) \div (+5) =$

b) $(+10) \div (+2) =$

c) $(+4) \div (+2) =$

d) $(+8) \div (+4) =$

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil

9) Efetue:

a) $(-10) \div (-5) =$ b) $(-10) \div (-2) =$ c) $(-4) \div (-2) =$ d) $(-8) \div (-4) =$

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil

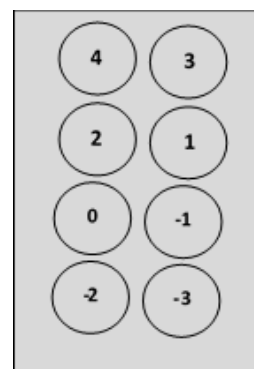
10) Efetue:

a) $(-10) \div (+5) =$ b) $(+10) \div (-2) =$ c) $(-4) \div (+2) =$ d) $(+8) \div (-4) =$

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil

11) Em alguns prédios existem andares superiores e inferiores (subsolo) ao térreo.

Veja a foto do painel do elevador. Nela aparecem o zero (térreo) os números negativos (subsolo) e os números positivos (acima do térreo) para indicar os andares do prédio. Qual a operação matemática que deve ser feita para calcular a quantidade de andares que você deve percorrer para sair do 4º andar (+4) e chegar ao 1º subsolo (-1)?



- a) $-4+1$
- b) $+1+(-4)$
- c) $-1-(+4)$
- d) $+4-1$

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil

12) Que movimentação bancária deve ser feita em uma conta bancária para passar de um saldo negativo de R\$ 85,00 para um saldo positivo de R\$ 48,00?

- a) Retirada de R\$ 37,00
- b) Depósito de R\$ 85,00
- c) Retirada de R\$ 48,00
- d) Depósito de R\$ 133,00

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil

13) Uma equipe de fórmula 1 avisa seu piloto, que está em segundo lugar na prova, que ele está 8 segundos à frente do terceiro colocado e 12 segundos atrás do primeiro colocado. Quantos segundos à frente do terceiro colocado está o líder da prova?

- a) 4 segundos
- b) 12 segundos
- c) 8 segundos
- d) 20 segundos

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil

14) Qual operação matemática que descreve a situação em que uma pessoa perde 4 dívidas de R\$ 2,00?

- a) $(-4) \cdot (-2)$
- b) $(+4) \cdot (-2)$
- c) $(-4) \cdot (+2)$
- d) $(-12) \cdot (+1)$

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil

15) Ao algumas canetas para 8 alunos, o quociente é 12 e o resto é 7. Qual a quantidade de canetas divididas?

- a) 101
- b) 103
- c) 104
- d) 106

☐ Muito Fácil ☐ Fácil ☐ Regular ☐ Difícil ☐ Muito Difícil

D – SEQUENCIA DIDÁTICA APLICADA AOS ALUNOS

Atividade 1

João é morador do bairro do Tapanã e, assim como milhões de brasileiros, não tinha um emprego formal, entregava água mineral nas localidades de seu bairro. Um dia a sorte sorriu a João, pois uma semana após ter deixado seu currículo em uma grande rede de supermercados da capital paraense, ele foi chamado para assumir uma vaga de estoquista.

Ao chegar no departamento pessoal desta empresa, João foi questionado se possuía uma conta corrente para receber seu salário, porém ele respondeu que não tinha, pois, no seu antigo emprego, ele recebia seu salário em mãos.

Assim, João teve que ir a uma agência bancária para abrir uma conta corrente. Ao ser atendido pelo gerente da agência, ele foi informado que esta conta corrente não serviria apenas para o depósito de seu salário, mais também para a realização de qualquer outra operação financeira, como transferências e pagamentos. O gerente também informou que sempre João poderia verificar as movimentações financeiras de sua conta pelo extrato bancário, e caso o saldo estivesse indicando um valor **negativo**, ele teria um **débito**, ou seja, isso significaria que João estaria **devendo** aquele valor ao banco, da mesma forma se o extrato informasse um valor **positivo**, significaria que João teria um **crédito** daquele valor, ou seja, esse valor estaria **disponível** a João.

Tarefa 1 – O Quadro abaixo representa o extrato bancário de João em algumas datas do mês de janeiro de 2019. Preencha a quinta coluna do referido quadro, calculando o valor do saldo bancário de João que estará presente em sua conta corrente no final do dia.

Data	Saldo Inicial (R\$)	Crédito (R\$)	Débito (R\$)	Saldo Final (R\$)
01/01/2019	+ 10,00	+ 20,00	#####	
04/01/2019	+ 30,00	+ 40,00	#####	
07/01/2019	+ 50,00	+ 60,00	#####	
10/01/2019	+ 70,00	+ 80,00	#####	

13/01/2019	+ 90,00	+ 100,00	####	
16/01/2019	- 10,00	####	- 20,00	
19/01/2019	- 30,00	####	- 40,00	
22/01/2019	- 50,00	####	- 60,00	
25/01/2019	- 70,00	####	- 80,00	
28/01/2019	- 90,00	####	- 100,00	

Tarefa 2 – Analisando cada uma das linhas do quadro acima, os sinais dos números nas colunas *Saldo Inicial*, *Crédito* e *Débito* são iguais ou diferentes?

Resposta: _____

Tarefa 3 – O Saldo final nas cinco primeiras linhas é positivo ou negativo?

Resposta: _____

Tarefa 4 – O Saldo final nas cinco últimas linhas é positivo ou negativo?

Resposta: _____

Questão 5 - Qual a operação matemática realizada para obter o saldo final?

() Soma

() Subtração

Tarefa 6 – Discuta com seus colegas a criação de uma regra para se calcular o saldo final em cada uma das linhas do quadro acima e descreva os procedimentos.

Resposta: _____

Formalização

Tarefa 7 – Calcule:

a) $+2 + 3 =$

b) $+7 + 8 =$

c) $+9 + 10 =$

d) $-2 - 3 =$

e) $-7 - 8 =$

f) $-9 - 10 =$

Atividade 2

Tarefa 1 - O Quadro abaixo representa o extrato bancário de João em algumas datas do mês de fevereiro de 2019. Preencha a quinta coluna do referido quadro, calculando o valor do saldo bancário de João que estará presente em sua conta corrente no final do dia.

Data	Saldo Inicial (R\$)	Crédito (R\$)	Débito (R\$)	Saldo Final (R\$)
01/02/2019	- 10,00	+ 20,00	#####	
04/02/2019	- 30,00	+ 40,00	#####	
07/02/2019	- 50,00	+ 60,00	#####	
10/02/2019	- 70,00	+ 80,00	#####	
13/02/2019	- 90,00	+ 100,00	#####	
16/02/2019	+10,00	#####	- 20,00	
19/02/2019	+ 30,00	#####	- 40,00	
22/02/2019	+50,00	#####	- 60,00	
25/02/2019	+ 70,00	#####	- 80,00	
28/02/2019	+ 90,00	#####	- 100,00	

Tarefa 2 – Analisando cada uma das linhas do quadro acima, os sinais dos números nas colunas *Saldo Inicial*, *Crédito* e *Débito* são iguais ou diferentes?

Resposta: _____

Tarefa 3 – O Saldo final nas cinco primeiras linhas é positivo ou negativo?

Resposta: _____

Tarefa 4 – O Saldo final nas cinco últimas linhas é positivo ou negativo?

Resposta: _____

Questão 5 - Qual a operação matemática realizada para obter o saldo final?

() Soma

() Subtração

Tarefa 6 – Discuta com seus colegas a criação de uma regra para se calcular o saldo final em cada uma das linhas do quadro acima e descreva os procedimentos.

Resposta: _____

Formalização

Tarefa 7 – Calcule:

- | | | |
|---------------|---------------|----------------|
| a) $+3 - 2 =$ | b) $+8 - 7 =$ | c) $+10 - 9 =$ |
| d) $+2 - 3 =$ | e) $+7 - 8 =$ | f) $+9 - 10 =$ |

Atividade 3

Tarefa 1 - O Quadro abaixo representa o extrato bancário de João em algumas datas do mês de março de 2019. Preencha a quinta coluna do referido quadro, calculando o valor do saldo bancário de João que estará presente em sua conta corrente no final do dia.

Data	Saldo Inicial (R\$)	Crédito (R\$)	Débito (R\$)	Saldo Final (R\$)
01/03/2019	- 10,00	+ 10,00	####	
04/03/2019	- 30,00	+ 30,00	####	
07/03/2019	- 50,00	+ 50,00	####	
10/03/2019	- 70,00	+70,00	####	
13/03/2019	- 90,00	+ 90,00	####	
16/03/2019	+20,00	####	- 20,00	
19/03/2019	+ 40,00	####	- 40,00	
22/03/2019	+60,00	####	- 60,00	
25/03/2019	+ 70,00	####	- 70,00	
28/03/2019	+ 90,00	####	- 90,00	

Fonte: Elaborado pelo autor

Tarefa 2 - Qual a operação matemática realizada para obter o saldo final?

() Soma

() Subtração

Tarefa 3 - De acordo com o quadro acima o que acontece quando somamos números simétricos?

Resposta: _____

Tarefa 4 – Discuta com seus colegas a criação de uma regra para se calcular o saldo final em cada uma das linhas do quadro acima e descreva os procedimentos.

Resposta: _____

Formalização

Tarefa 5 – Calcule:

a) $+3 - 3 =$

b) $+8 - 8 =$

c) $+11 - 11 =$

d) $+2 - 2 =$

e) $+7 - 7 =$

f) $+9 - 9 =$

Atividade 4

Tarefa 1 - Usando a ideia de número simétrico e também a ideia de débito/crédito, calcule as operações, preenchendo o quadro abaixo, conforme o modelo:

Operação	Ideia de número simétrico	Resultado
$(+3) - (-4)$	$+3 + 4$	$+7$
$(+3) - (+4)$		
$(+5) - (-2)$		
$(+5) - (+2)$		
$(+7) - (-6)$		
$(+7) - (+6)$		
$(+5) - (-4)$		
$(+5) - (+4)$		
$(+8) - (-6)$		
$(+8) - (+6)$		

Tarefa 2 – Após o preenchimento do quadro acima, o que aconteceu com o sinal do segundo número na segunda coluna do quadro acima?

Resposta: _____

Questão 3 – De acordo com o padrão que você percebeu nas atividades anterior, coloque (V) para verdadeiro e (F) para falso em cada uma das igualdades abaixo:

$$(\quad) (+8) - (-2) = +8 - 2$$

$$(\quad) (+8) - (-2) = +8 + 2$$

$$(\quad) (+4) - (-3) = +4 + 3$$

$$(\quad) (+4) - (-3) = +4 - 3$$

$$(\quad) (+9) - (-5) = +9 - 5$$

$$(\quad) (+9) - (-5) = +9 + 5$$

$$(\quad) (+10) - (-5) = +10 - 5$$

$$(\quad) (+10) - (-5) = +10 + 5$$

Formalização

Tarefa 4 – Calcule:

a) $+4 - (+3) =$

b) $+8 - (+2) =$

c) $+10 - (-9) =$

d) $+2 - (-5) =$

e) $+7 - (-3) =$

f) $+9 - (+4) =$

Atividade 5

Tarefa 1 - Preencha o quadro abaixo de acordo com o modelo da primeira linha.

Soma	Resultado	Multiplicação	Propriedade Comutativa
$+ 5 + 5$	$+10$	$(+2) \times (+5)$	$(+5) \times (+2)$
$+ 5 + 5 + 5$			
$+5 +5 +5 +5$			
$+ 5 + 5 + 5 + 5 + 5$			
$- 4 - 4$			
$- 4 - 4 - 4$			
$- 4 - 4 - 4 - 4$			
$- 4 - 4 - 4 - 4 - 4$			

Tarefa 2 – De acordo com o quadro acima, a multiplicação de dois números positivos tem como resultado um número positivo ou negativo?

Resposta: _____

Tarefa 3 – E a multiplicação de um número positivo com outro negativo tem como resultado um número positivo ou negativo?

Resposta: _____

Formalização

Tarefa 4 – Calcule:

a) $(+4) \times (+3) =$

b) $(+3) \times (+2) =$

c) $(+5) \times (-4) =$

d) $(-2) \times (+5) =$

e) $(-7) \times (+3) =$

f) $(+9) \times (+4) =$

Atividade 6

Tarefa 1 - Preencha o quadro abaixo.

Operação	=	Resultado
$+6 \times (-4)$	=	
$+5 \times (-4)$	=	
$+4 \times (-4)$	=	
$+3 \times (-4)$	=	
$+2 \times (-4)$	=	
$+1 \times (-4)$	=	
$0 \times (-4)$	=	

Tarefa 2 – O que acontece com o 1º fator quando se lê as operações de cima para baixo?

Resposta: _____

Tarefa 3 – O que acontece com o 2º fator quando se lê as operações de cima para baixo?

Resposta: _____

Tarefa 4 – O que acontece com o resultado quando se lê as contas de cima para baixo?

Resposta: _____

Tarefa 5 – Utilizando o mesmo padrão descoberto no quadro anterior, preencha o quadro abaixo.

Operação	=	Resultado
$+6 \times (-4)$	=	
$+5 \times (-4)$	=	
$+4 \times (-4)$	=	
$+3 \times (-4)$	=	
$+2 \times (-4)$	=	
$+1 \times (-4)$	=	
$0 \times (-4)$	=	
$(-1) \times (-4)$	=	
$(-2) \times (-4)$	=	
$(-3) \times (-4)$	=	
$(-4) \times (-4)$	=	
$(-5) \times (-4)$	=	
$(-6) \times (-4)$	=	

Tarefa 6 - Com base no que você observou: Um número negativo multiplicado por outro número negativo dá um resultado positivo ou negativo?

Resposta: _____

Tarefa 7 - Preencha a segunda coluna do quadro abaixo informando se o sinal da multiplicação é positivo ou negativo.

Multiplicação	Sinal
(Número positivo) x (Número positivo)	
(Número negativo) x (Número negativo)	
(Número positivo) x (Número negativo)	
(Número negativo) x (Número positivo)	

Formalização

Tarefa 8 – Calcule:

a) $(-8) \times (-3) =$

b) $(-3) \times (-2) =$

c) $(-5) \times (-7) =$

d) $(-2) \times (-5) =$

e) $(-7) \times (-3) =$

f) $(-9) \times (-4) =$

Atividade 7

Tarefa 1 - Preencha o quadro abaixo, transformando uma multiplicação de números inteiros em duas divisões de números inteiros, conforme modelo inicial.

Multiplicação	Divisão (a)	Divisão (b)
$(+2) \times (+3) = +6$	$(+6) \div (+2) = +3$	$(+6) \div (+3) = +2$
$(-2) \times (-3) = +6$		
$(-2) \times (+3) = -6$		
$(+4) \times (+5) = +20$		
$(-4) \times (-5) = +20$		
$(-4) \times (+5) = -20$		
$(+6) \times (+7) = +42$		
$(-6) \times (-7) = +42$		
$(-6) \times (+7) = -42$		

Tarefa 2 – Analisando as divisões que apareceram na segunda e na terceira coluna do quadro acima, quando dividimos dois números inteiros com sinais iguais o resultado da divisão é positivo ou negativo?

Resposta: _____

Tarefa 3 – E quando dividimos dois números inteiros com sinais diferentes, o resultado é positivo ou negativo?

Resposta: _____

Tarefa 4 - Preencha a segunda coluna do quadro abaixo informando se o sinal da divisão é positivo ou negativo.

Multiplicação	Sinal
(Número positivo) $\div$ (Número positivo)	
(Número negativo) $\div$ (Número negativo)	
(Número positivo) $\div$ (Número negativo)	
(Número negativo) $\div$ (Número positivo)	

Formalização

Tarefa 5 – Calcule:

a) $(+4) \div (+2) =$

b) $(+6) \div (+3) =$

c) $(-10) \div (-5) =$

d) $(-12) \div (-2) =$

e) $(-16) \div (+3) =$

f) $(+9) \div (-3) =$

Tarefa Final

- Calcule:

• $-20 - 30 =$

• $+20 - 30 =$

• $+30 - 20 =$

• $-20 - (+10) =$

• $-20 - (-10) =$

• $-20 - (-20) =$

• $(-3) \times (+5) =$

• $(+3) \times (-5) =$

• $(-3) \times (-5) =$

• $(-30) \div (+5) =$

• $(+30) \div (-5) =$

• $(-30) \div (-5) =$

• $+25 + 15 =$

• $-25 - 15 =$

• $-25 + 15 =$

• $+25 - (+15) =$

• $+25 - (-15) =$

• $+25 - (+25) =$

• $(+10) \times (+8) =$

• $(-10) \times (-8) =$

• $(-10) \times (+8) =$

• $(+20) \div (+2) =$

• $(-20) \div (-2) =$

• $(+20) \div (-2) =$

ANEXOS

A- TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DO ALUNOS EGRESSOS DO 7º ANO



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROG. DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA**

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada O uso de atividades para o Ensino Números Inteiros Relativos, sob a responsabilidade do(as) pesquisadores **MARIA DE LOURDES SILVA SANTOS, ANA KELLY MARTINS DA SILVA**, orientador e orientando **AKILSON MEDEIROS VASCONCELOS**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa nós estamos buscando realizar um diagnóstico do **Ensino de Números Inteiros Relativos** a partir da opinião dos estudantes. A sua colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa.

Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Você não terá gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o **Ensino de Números Inteiros**.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **MARIA DE LOURDES SILVA SANTOS, ANA KELLY MARTINS DA SILVA**, orientador e orientando **AKILSON MEDEIROS VASCONCELOS** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática - PMPEM do Centro de Ciências Sociais e Educação - CCSE da Universidade do Estado do Pará –UEPA, Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: (91) 4009-9542

Belém(PA), ____ de maio de 2018.

Assinatura dos pesquisadores

Eu, _____ aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Participante da pesquisa

B- TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DOS
RESPOSÁVEIS DOS ALUNOS EGRESSOS DO 7º ANO



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROG. DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor (a) responsável você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu filho (a), para participar da pesquisa intitulada: um diagnóstico do Ensino de Números Inteiros Relativos, sob a responsabilidade das pesquisadoras **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva, orientador e orientando AKILSON MEDEIROS VASCONCELOS**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Com esse trabalho estamos buscando diagnosticar o Ensino de Números Inteiros Relativos a partir da opinião dos estudantes. A colaboração do aluno(a) será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa e essa atividade ocorrerá nas dependências da escola sob a supervisão de um professor.

Em nenhum momento o aluno (a) será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade do discente será preservada.

Você e o aluno não terão gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica gerando um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o Ensino de Números Inteiros.

Você é livre para decidir se seu filho(a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva e orientando AKILSON MEDEIROS VASCONCELOS** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática - PMPEM do Centro de Ciências Sociais e Educação - CCSE da Universidade do Estado do Pará – UEPA, Tv. Djalma Dutra s/n.Telegrafo. Belém-Pará-CEP: 66113-010; fone: (91) 4009-9542

BELÉM(PA), ____ de maio de 2018.

Assinatura dos pesquisadores

Eu, _____ autorizo
que meu/minha filho(a)_____ a
participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente
esclarecido.

Assinatura do responsável

C- TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DOS RESPONSÁVEIS DOS ALUNOS QUE PARTICIPARAM DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROG. DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor(a) responsável, você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu filho(a), que estuda na Escola Estadual Américo Souza de Oliveira, a participar de uma pesquisa sobre o ensino dos “números inteiros”, sob a responsabilidade dos pesquisadores **Prof. Esp. Akilson Medeiros Vasconcelos** e **Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa nós estamos elaborando uma sequência didática para o ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros e a colaboração de seu filho (a) na pesquisa será de participar de todas as atividades que serão realizadas em sala de aula. Todo o processo de ensino e aprendizagem será filmado, tendo como objetivo verificar os possíveis indícios de aprendizagem revelados no decorrer das atividades propostas.

Os resultados da pesquisa serão publicados, porém em momento algum os participantes da pesquisa serão identificados (as). Não há riscos, e os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo da eficácia da sequência didática proposta.

Você e ele não terão nenhum gasto ou ganho financeiro por participar da pesquisa e você é livre para decidir se seu filho(a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com a Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática - PMPEM do Centro de Ciências Sociais e Educação - CCSE da Universidade do Estado do Pará –UEPA, Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: (91) 4009-9542

Belém-PA, _____ de _____ de 2019.

Assinatura dos pesquisadores

Assinatura dos pesquisadores

Eu, _____

autorizo meu/minha filho(a) _____ a

participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Assinatura do responsável

D- TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DOS ALUNOS
QUE PARTICIPARAM DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROG. DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) a participar de uma pesquisa sobre o ensino dos “números inteiros”, sob a responsabilidade dos pesquisadores **Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral**, orientador e orientando **Prof. Esp. Akilson Medeiros Vasconcelos**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa nós estamos elaborando uma sequência didática para o ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros. Todo o processo de ensino e aprendizagem será filmado, tendo como objetivo verificar os possíveis indícios de aprendizagem revelados no decorrer das atividades propostas. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Você não terá gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa. Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o **ensino de números inteiros**. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com a Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática - PMPEM do Centro de Ciências Sociais e Educação - CCSE da Universidade do Estado do Pará –UEPA, Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: (91) 4009-9542

Belém(PA), ____ de _____ de 2019.

Assinatura dos pesquisadores

Assinatura dos pesquisadores

Participante da pesquisa



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem