Série Guias Didáticos de Matemática

65

Probabilidade em Espaços Contínuos: Um Salto Para O Infinito

Emanuela Nascimento Alves
Oscar Luiz Teixeira de Rezende
Luciano Lessa Lorenzoni

EDIFES
2019

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Emanuela Nascimento Alves

Oscar Luiz Teixeira de Rezende

Luciano Lessa Lorenzoni

PROBABILIDADE EM ESPAÇOS CONTÍNUOS: UM SALTO PARA O INFINITO

Série Guias Didáticos de Matemática – Nº 65

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo

Vitória

2019

FICHA CATALOGRÁFICA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Alves, Emanuela Nascimento.

A474p Probabilidade em espaços contínuos: um salto para o infinito [recurso eletrônico] / Emanuela Nascimento Alves, Oscar Luiz Teixeira de Rezende, Luciano Lessa Lorenzoni. – Vitória: Editora Ifes, 2019.

5038Kb: il.; PDF (Série guias didáticos de matemática ; 65)
Publicação Eletrônica.
Modo de acesso: http://educimat.ifes.edu.br/index.php/produtos-educacionais

Produto Educacional (Pós-Graduação Stricto Sensu) Instituto Federal do Espírito Santo, Cefor, Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, 2019.

Inclui bibliografia
ISBN: 978-85-8263-485-1

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Estatística. 3. Probabilidade. 4. Formação de professores. I. Rezende, Oscar Luiz Teixeira de. II. Lorenzoni, Luciano Lessa . III. Instituto Federal do Espírito Santo. IV. Cefor. V. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Viviane Bessa Lopes Alvarenga CRB/06-745

Realização

EDUCIMAT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Edifes
ACADÊMICO

Edifes

Centro de Referência em Formação e
Educação a Distância
Instituto Federal do Espírito Santo
Rua Barão de Mauá, 30, Bairro Jucutuquara
Vitória, Espírito Santo. CEP: 29040-860
Tel. +55(27) 3198-0934
E-mail: editora@ifes.edu.br

Comissão Científica
Ana Nery Furlan Mendes
Vilma Reis Terra
Marize Lyra Silva Passos

Coordenação Editorial
Sidnei Quezada Meireles Leite
Carlos Roberto Pires Campos

Revisão do Texto
Emanuela Nascimento Alves
Flávio Santos Oliveira

Apoio Técnico
Alessandro Poleto Oliveira
Ana Christina Alcoforado

Capa e Editoração Eletrônica
Katy Kênio Ribeiro

Produção e Divulgação
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática
Centro de Referência em Formação e
Educação a Distância
Rua Barão de Mauá, 30, Bairro Jucutuquara
Vitória, Espírito Santo. CEP: 29040-860

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Reitoria do Ifes
Reitor
Jadir Jose Pela

Pró-Reitor de Administração e Planejamento
Lezi José Ferreira

Pró-Reitora de Desenvolvimento Institucional
Luciano de Oliveira Toledo

Pró-Reitora de Ensino
Adriana Pionttkovsky Barcellos

Pró-Reitor de Extensão
Renato Tannure Rota de Almeida

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-graduação
André Romero da Silva

Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância

Diretoria do Cefor
Mariella Berger Andrade

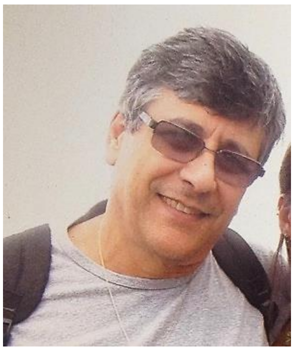
Coordenadoria Geral De Ensino
Larissy Alves Cotonhoto

Coordenadoria Geral de Pesquisa e Extensão
Márcia Gonçalves de Oliveira

João Paulo Santos
Coordenadoria Geral de Administração

MINICURRÍCULO DOS AUTORES

Emanuela Nascimento Alves. Possui Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (2013) e mestrado em Educação Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo (2019). Atualmente é membra do Grupo de Estudo e Pesquisa em Modelagem Matemática e Educação Estatística, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (IFES). Atua na Prefeitura Municipal de Cariacica e na Rede Estadual de Ensino como professora de Matemática.



Oscar Luiz Teixeira de Rezende. Professor Titular do Instituto Federal de Ciências e tecnologia do Espirito Santo (IFES), doutor em Engenharia Agrícola pela Universidade Federal de Viçosa, Mestre em Informática pela Universidade Federal do Espírito Santo, Bacharel e Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa. Atualmente é professor do Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Vitória. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática Discreta, Programação Linear, Lógica Fuzzy e Estatística, atuando principalmente nos seguintes temas: Modelagem Matemática na Educação, Otimização, Educação Estatística e Educação Matemática. Também atua no EDUCIMAT - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do IFES.

Luciano Lessa Lorenzoni. Possui graduação em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (1991), mestrado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Espírito Santo (1996) e doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Espírito Santo (2003). Atualmente é professor do Instituto Federal do Espírito Santo. Tem experiência na área de Matemática Aplicada com ênfase em Pesquisa Operacional e Modelagem Matemática na Educação Matemática. Também atua no EDUCIMAT - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do IFES.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

APRESENTAÇÃO

Prezado(a) Professor(a),

Esta obra, destinada a professores de Estatística, tem por objetivo propor atividades que favoreçam um entendimento do conceito de probabilidade em espaços amostrais contínuos, por meio de aulas elaboradas com base na Teoria das Situações Didáticas. O conteúdo desta obra foi extraído a partir de fotos, registros escritos e gravações de áudios de uma pesquisa desenvolvida com alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática, do Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Vitória, no Estado do Espírito Santo. E se originou numa experiência vivenciada ao longo de uma formação inicial de professores.

Segue-se a exposição de uma sequência de atividades como suporte didático para lecionar o conteúdo de probabilidade em espaços amostrais contínuos, bem como uma breve introdução do conceito de Teoria das Situações Didáticas, por meio da qual as atividades aqui propostas, fruto de discussões coletivas durante o curso formação de professores, se desenvolveram. Propõe-se um tratamento alternativo à maneira com que este conteúdo tem sido comumente abordado nos livros textos, partindo de interações com os alunos, para a construção do mesmo.

Para cada atividade proposta, foram elencadas sugestões concernentes ao comportamento do professor-executor da sequência de atividades e dos alunos que participarão da situação didática, assim como as possíveis dificuldades que estes poderão enfrentar ao realizá-la. Recomendam-se ainda materiais, estratégias e intervenções pedagógicas que poderão ser utilizadas e executadas pelo professor.

Este material está publicado no site do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat) por ser um meio de ampla divulgação e acesso livre. Busca-se com isso que ele constitua fonte de incentivo para você professor, que atua na Educação Estatística, e o inspire a desenvolver novas propostas para o ensino de Probabilidade, capazes de levar seus alunos à construção de conceitos matemáticos de forma autônoma.

1

PROBABILIDADE E O SALTO PARA O INFINITO

1 PROBABILIDADE E O SALTO PARA O INFINITO

O infinito, também conhecido como números transfinitos, intrigaram muitos matemáticos do século XIX. Georg Cantor (1845-1918), o primeiro matemático a buscar explicações sobre este tema, não acreditava nas descobertas que estava fazendo. Em seus artigos publicados entre 1874 e 1884, ele trata com rigor matemático alguns conceitos envolvendo o infinito e começa a defini-lo como aquele que pode ser posto em correspondência biunívoca com alguma parte de si mesmo (MORRIS, 1998, p. 19). O símbolo ∞, que representa infinidade, foi usado pela primeira vez em 1656 por John Wallis, em *Arithmetic Infinitorum*.

Em 1874, Cantor se propôs a provar que o número de pontos num plano, ou espaço, era maior do que o número de pontos em uma reta. No entanto, para sua surpresa, concluiu o contrário, sem dar credibilidade no que acabara de descobrir. Ele constatou ainda que existem "infinitos maiores que outros", ao identificar que o conjunto dos números inteiros positivos não pode ser posto em correspondência biunívoca com os pontos de uma reta, ou com o conjunto dos números reais.

A partir das descobertas de Cantor, muitas teorias foram desenvolvidas em várias áreas da ciência: Cavalieri (1598-1647) utilizou o infinitésimo (quantidades infinitamente pequenas) para calcular o volume de corpos sólidos, partindo da ideia de que estes eram compostos por lâminas infinitamente finas. No final do século XVII, Galileu (1564-1642) se inclinava para a ideia de que o universo fosse infinito, após observar o céu a partir do telescópio por ele criado. Concepção esta que vem oscilando entre os filósofos e matemáticos há mais de 2500 anos. Além destas, muitas outras questões envolvendo o infinito, relativas à astronomia e à física moderna, por exemplo, ainda hoje intrigam muitos cientistas.

Por fim, o cálculo integral, ferramenta principal abordada neste trabalho, utilizada para se trabalhar com probabilidade em espaços amostrais contínuos, foi criado por Leibniz (1646-1716) e Newton (1643-1727), a partir do conceito de infinito.

O título desta obra ao evidenciar “um salto para o infinito” faz menção, e uma crítica, ao uso das ferramentas do cálculo integral sem a promoção da devida reflexão nos livros-textos sobre o conceito do infinito: que fundamenta a Teoria das Probabilidades em espaços amostrais contínuos. Assim, esta obra surge também como uma proposta de preencher esta lacuna, trabalhando conceitos matemáticos básicos para o cálculo de probabilidade, além do conceito do infinito, que comumente é desprezado pelos livros que dissertam sobre o tema. Espera-se que após a leitura deste guia, este salto para o infinito permita-o compreender o caminho que leva o leitor até este novo espaço.

2

DIRETRIZES PARA O ENSINO DE ESTATÍSTICA E SEUS DESAFIOS

2 DIRETRIZES PARA O ENSINO DE ESTATÍSTICA E SEUS DESAFIOS

O ensino de Estatística tem enfrentado grandes desafios. Um dos grandes problemas envolvendo o processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade e Estatística no Ensino Superior está associado a um currículo formal defasado, com propostas de práticas docentes distantes da realidade. Para Batanero et al. (2009), os maiores obstáculos a serem suplantados, com relação ao ensino e aprendizagem de Estatística, estão relacionados a processos atinentes à estocástica e à formação de professores, bem como no pouco valor atribuído a estas disciplinas pelas instituições de ensino dos cursos universitários (BRANCO, 2000), reduzindo muitas vezes a disciplina a um semestre letivo. Um outro fator agravante localiza-se na falta de aprofundamento de seus conceitos básicos, fazendo com que os conceitos estatísticos não sejam assimilados pelos alunos, que, por sua vez, preferem evitar tal conteúdo, devido à pouca credibilidade que possuem. Este fenômeno pode ser observado no trabalho de De Oliveira Júnior (2016), que menciona que 43,4% dos professores da área de Exatas, que participaram de sua pesquisa, afirmaram ter cursado somente até duas disciplinas de Estatística durante a graduação, e somente 43,8% deles em sua pós-graduação. De acordo com Cazorla et al. (1999), a desmotivação, o não entendimento acerca da aplicabilidade dos conceitos estatísticos estudados no dia a dia e a falta de clareza nos objetivos das técnicas utilizadas, são os principais problemas apontados pelos alunos.

Questões diretamente vinculadas a esses problemas na Educação Superior dizem respeito ao currículo. Apesar do parecer CNE/CES nº 1.302/2001, que discorre sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, não incluírem explicitamente como comuns, aos cursos de Licenciatura em Matemática, os conteúdos de Probabilidade e Estatística, este o faz quando afirma que:

> Para a licenciatura serão incluídos, no conjunto dos conteúdos profissionais, os conteúdos da Educação Básica, consideradas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores em nível superior, bem como as Diretrizes Nacionais para a Educação Básica e para o Ensino Médio. (PARECER, 2001, p. 6)

Desta maneira, as diretrizes apresentadas para o ensino de Estatística e Probabilidade, nos cursos de Licenciatura em Matemática, encontram-se em documentos complementares, voltados à Educação Básica, o que pode ser um fator agravante para o problema, visto que não há orientações mais detalhadas das propostas de ensino, senão nas poucas pesquisas desenvolvidas nessa área. Viali (2008, p. 7), ao notar esse descompasso no que se refere à aprendizagem de Estatística e Probabilidade no Ensino Básico e Superior, afirma que “por um lado os PCN preveem que tanto Estatística quanto Probabilidade façam parte do ensino desde as primeiras séries, por outro lado as diretrizes curriculares dos cursos de graduação falharam em não refletir essas exigências”.

No que diz respeito aos cursos de Licenciatura em Matemática, as dificuldades enfrentadas pelos alunos, em relação ao conteúdo, tornaram-se um agravante (COSTA e NACARATO, 2011; GONÇALVES, 2004) devido à possibilidade de que os mesmos reproduzam modelos de ensino e más experiências em sua vida profissional, ou deixem de abordá-lo na Educação Básica, fazendo com que esses obstáculos perdurem. Para Batanero et al. (2001), uma das causas da má formação em estatística por parte dos professores de Matemática é ausência de documentos curriculares voltados para a formação dos mesmos. Costa (2007) afirma que os cursos de Licenciatura têm deixado lacunas na formação dos professores de matemática, quanto à estocástica. Nesse sentido, Lopes (2008, p. 70) enfatiza que:

> A formação dos professores, atualmente, não incorpora um trabalho sistemático sobre estocástica, dificultando a possibilidade desses profissionais desenvolverem um trabalho significativo com essa temática nas salas de aula da educação básica.

Outros possíveis motivos dessa defasagem, no Ensino de Estatística apontados, estão associados às práticas docentes. Quando se trata dessa área da matemática, poucos professores se engajam em ensinar sobre o tema, ou quando o ensinam, fazem-no de forma excessivamente formalizada (BATANERO, 2000b). A pesquisa de Santos (2005), realizada com 52 professores de Matemática, mostra por exemplo que 76% dos professores não trabalham o conteúdo no ensino fundamental e 66% não o abordam no Ensino Médio, alegando, entre outros motivos, a falta de domínio do conteúdo e a ausência deste em sua deficiente formação inicial. Esta reflete diretamente no ensino, fazendo perdurar diversas dificuldades (BRANCO, 2000). Problemas como a dificuldade de manipulação de conceitos estatísticos abstratos, a ausência de motivação e o não entendimento da linguagem estatística, junto a um pensamento predominantemente determinístico por parte dos alunos, são os principais relatados entre os professores, de acordo com Cazorla et al. (1999).

Para Lopes e Moura (2000), o processo de aquisição do conhecimento está diretamente associado à relação entre professor e aluno. Nas discussões e reflexões coletivas, todavia, há uma crença de que, além da relação professor e aluno, a aquisição do conhecimento esteja também relacionado à genética, ou à afinidade de cada aluno em relação a um conteúdo ou disciplina.

Não obstante esta ideia de afinidade, Ausubel (1993 apud PELIZZARI, 2002, p. 38) acreditava que, além da necessidade de associação do conteúdo, que se quer ensinar, com a realidade do aluno, para que a aprendizagem ocorra, é necessário a existência de uma pré-disposição do mesmo em aprender.

Desse modo, acredita-se que as práticas pedagógicas devam implementar situações didáticas em que o aluno seja motivado a pensar estatisticamente, com criticidade, não reduzindo seu trabalho em apenas reproduzir fórmulas. O professor, então, deve proporcionar oportunidades de ação aos alunos, estimulando a procura de padrões, a formulação de conjecturas e ao questionamento e análise das variáveis que envolvam os problemas estatísticos, criando ambientes em que professor e alunos possam refletir e juntos explorar ideias e questões. Para Skovsmose (2001), esse diálogo aberto entre professor e aluno é o que permite o desenvolvimento de uma atitude democrática, por meio da Educação Matemática.

Outro obstáculo apontado no ensino e aprendizagem de Probabilidade e Estatística diz respeito à formação de seus conceitos, que só passou a receber devida atenção recentemente (BATANERO, 2000a). As condições de uso de conceitos estatísticos e a não percepção do mau uso dos mesmos também são apontados por Ponte (2003, p. 107) como uma importante preocupação. Apesar da vasta quantidade de livros que discorrem sobre o conteúdo, a maioria destes o apresenta de maneira mecanizada acompanhado de uma grande quantidade de fórmulas, que tornam sua leitura exaustiva, ao mesmo tempo que direcionam o ensino no sentido contrário ao que defendem Batanero et al. (2001), em que se vislumbre a necessidade de uma formação de professores que promova uma reflexão epistemológica sobre o conteúdo. Os autores ainda ressaltam que a defasagem em relação à má formação de conceitos estatísticos está associada também ao pouco suporte e a má formulação dos livros-textos que tratam do assunto, amiúde, trazendo consigo conceitos e definições equivocados. O Plano Nacional do Livro Didático alude a importância desse instrumento no processo de aprendizagem e enfatiza que:

> O livro didático traz para o processo de ensino e aprendizagem um terceiro personagem, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser ensinado; os métodos adotados para que o aluno consiga aprendê-lo mais eficazmente; e a organização dos conteúdos ao longo dos anos de escolaridade. (Brasil, 2015, p. 9).

Atualmente, na Educação Básica, foram criados decretos e programas a fim de que sejam selecionados livros que atendam às exigências das Diretrizes Curriculares Nacionais. O Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) é um deles e destina-se a avaliar e disponibilizar livros-textos. Este programa adota procedimentos sistemáticos para a aprovação e inserção dessas obras no âmbito escolar. Circunstância que não ocorre com o Ensino Superior, que não possui uma política de análise e seleção de livros que sirvam de apoio à prática educativa e que atendam às demandas deste público.

Nesse sentido, é evidente a necessidade de se promover discussões sobre o tema, assessorada por intensa revisão acerca dos tópicos que devem ser trabalhados, para favorecer a compreensão dos conceitos estatísticos (PONTE e FONSECA, 2000). Justifica-se, assim, a produção deste guia como um dos objetivos específicos da nossa pesquisa, a partir da revisão e análise do conteúdo de probabilidade nos livros-textos de Estatística e Probabilidade.

3

ENTENDENDO, PLANEJANDO E EXECUTANDO A SITUAÇÃO DIDÁTICA

3 ENTENDENDO, PLANEJANDO E EXECUTANDO A SITUAÇÃO DIDÁTICA

A iniciativa para a produção deste guia didático surgiu da proposta de produto educacional da pesquisa científica de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática (Educimat), intitulada **A construção do conceito de probabilidade em espaços contínuos: uma contribuição à luz da Teoria das Situações Didáticas.** O produto foi elaborado por meio da construção e execução da sequência de atividades (ver apêndice I), nos moldes da Teoria das Situações Didáticas, envolvendo a aplicação do conceito de probabilidade em espaços contínuos a alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo - IFES, campus Vitória. Em nossa pesquisa consideramos que os licenciandos não possuíam prontas as estratégias para a resolução das atividades aqui propostas. Assim, foi valorizado a construção e o caminho para a assimilação de cada grupo, já que as atividades são iniciadas sem a formalização do conceito de probabilidade em espaços contínuos.

A sequência de atividades foi planejada por três professores de notória formação pedagógica e executada pela professora-pesquisadora. Foram elaboradas 12 atividades que permitem construir o conceito de probabilidade em espaços contínuos de maneira autônoma, a partir de noções e conceitos matemáticos como o de limite de uma função, probabilidade em espaços discretos, geometria analítica e cálculo de área de figuras planas. Essas atividades foram divididas em 4 seções. A primeira busca trabalhar com conceitos de probabilidade em espaços amostrais discretos, de modo a levar os alunos refletirem sobre a cardinalidade do espaço amostral nos fenômenos probabilísticos. A segunda seção objetiva fazer com que os alunos construam o conceito de função densidade de probabilidade a partir da descrição de fenômenos probabilísticos e de suas representações gráficas. Na terceira, o objetivo das atividades é possibilitar com que os alunos validem o conceito de probabilidade em espaços amostrais contínuos, a partir de reflexões feitas pelos mesmos em cada uma das etapas anteriores. Na quarta seção, por fim, o(a) professor(a) deve comentar as produções dos alunos, socializando as construções por parte deles, corrigindo erros e sanando eventuais dúvidas que possam surgir durante a realização da sequência de atividades. Nesta etapa deve-se estabelecer a definição do conceito de probabilidade em espaços amostrais contínuos.

A pesquisa teve como aporte teórico a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (2008). Para a formação do conteúdo de Probabilidade foram utilizados autores da Educação Estatística, como: Carmen Batanero (2005) e Pereira e Tanaka (1990).

A Teoria das Situações Didáticas é uma teoria de aprendizagem, criada por Guy Brousseau, em meados de 1970. Esta teoria afirma que a aprendizagem só é alcançada por um sujeito se este for capaz de trocar informações com um meio autônomo e antagônico a si mesmo, denominado de *milieu*. Por meio desta troca de informações, é possível que o sujeito construa de maneira autônoma um conhecimento, perpassando as seguintes fases:

- **Situação de ação:** o aluno busca tentativas para solucionar o problema proposto. Ao interagir com o *milieu*, toma as decisões capazes de se obter uma possível organização e solução do problema.

- **Situação de formulação:** o aluno troca informações com o *milieu* e, sem a obrigatoriedade de uma linguagem formal, utiliza-se da linguagem mais adequada, dentro de retroações; continuamente modificam a linguagem utilizada para se adequarem a mais pertinente, de acordo com as informações que serão comunicadas.

- **Situação de validação:** o aluno, mediante demonstrações e linguagem matemática apropriada, tenta justificar e validar suas afirmações ao interlocutor.

- **Situação de institucionalização:** o professor assume a responsabilidade, antes cedida ao aluno, formaliza e generaliza os resultados obtidos pelos alunos, podendo também descartá-los, na busca da solução do problema. Nesta etapa, o saber é então sistematizado.

Assim, o professor é o responsável por preparar uma situação, chamada de situação didática, que permita com que seus alunos perpassem por todas estas fases. A situação planejada pelo professor deve prever as possíveis dificuldades dos alunos e ser elaborada de maneira que não seja tão elementar a ponto de os alunos não encontrarem dificuldades em solucioná-la, nem tão complexa a ponto de não conseguirem obter soluções para os problemas por ela propostos. As fases de ação, formulação e validação pretendem fazer com que os alunos, sem a intervenção direta do professor, desenvolvam suas conjecturas e provas para alçarem a solução dos problemas a eles propostos. Após perpassarem por estas etapas, o professor sistematiza o conceito que se pretendeu construir ao longo da situação didática, na fase de institucionalização.

Este guia contém informações que orientam o desenvolvimento de uma situação didática, em que o *milieu* é uma sequência de atividades. E se mostra útil enquanto uma ferramenta teórica a ser utilizada por professores que queiram planejar suas aulas com a intenção de levar os alunos à formação do conceito de probabilidade em espaços contínuos de forma autônoma e interativa.

O material didático utilizado para a elaboração da situação didática é uma sequência de atividades composta por 12 atividades (veja o apêndice I). A proposta desta obra é que estas atividades sejam desenvolvidas de acordo com a tabela 1. Sugere-se, outrossim, que cada etapa da situação didática seja desenvolvida em uma aula de aproximadamente 2h de duração. Nas etapas de 1 a 3, os alunos devem perpassar pelas fases de ação, formulação e validação do conteúdo de probabilidade em espaços contínuos. Nas três últimas, o professor deve institucionalizar esse saber.

Tabela 1— Sugestão temporal de execução da Situação Didática

ESTRUTURAÇÃO DA SITUAÇÃO DIDÁTICA	
ETAPA DA SITUAÇÃO DIDÁTICA	**ATIVIDADES**
1ª Etapa	1 a 4
2ª Etapa	5 a 9
3ª Etapa	10 a 12
4ª Etapa	**Bloco I** - 1 a 4
	Bloco II - 5 a 9
	Bloco III - 10 a 12

Fonte — Elaborada pelos autores (2019).

Nos capítulos seguintes, descreve-se de modo detalhado a proposta de desenvolvimento da situação didática, considerando-se cada uma de suas etapas. Apresenta-se a maneira com que a sequência de atividades (ver apêndice I), norteada pela Teoria das Situações Didáticas e de autoria própria, pode ser desenvolvida em 4 etapas, como mencionado na Tabela 1. Além disso, discorrem-se sobre a solução de cada atividade, comentando os principais assuntos por ela abordados.

4

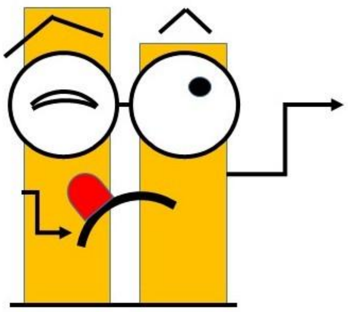
PRIMEIRA ETAPA DA SITUAÇÃO DIDÁTICA

4 PRIMEIRA ETAPA DA SITUAÇÃO DIDÁTICA

Para iniciar a situação didática em sala de aula, você professor deve estimular os alunos de forma que estes aceitem realizar os desafios propostos pela sequência de atividades, sem obter respostas do professor, que deve mediar a situação, de modo a conduzir o raciocínio dos alunos a uma possível solução. Assim, após os alunos aceitarem o desafio de realizar a sequência de atividades de maneira autônoma, recomenda-se separá-los em grupos. Sugere-se também que os grupos formados contenham no máximo 5 alunos, para que estes tenham a possibilidade de debater de forma organizada os assuntos de cada atividade, ainda que seja distribuída uma sequência de atividades para cada aluno, a fim de possibilitar a análise das formulações e linguagem matemática individualmente.

Nesta etapa, a primeira sequência de atividades, composta pelas tarefas de 1 a 4, deve ser distribuída. Neste caso, propõe-se também que o professor tenha em mãos algum instrumento para registrar as falas e momentos que demonstrem indícios de aprendizagem, ou apresente importantes objetos de comentário na fase de institucionalização, como: um gravador de áudio, vídeo, ou um caderno de anotações.

ATIVIDADE 1

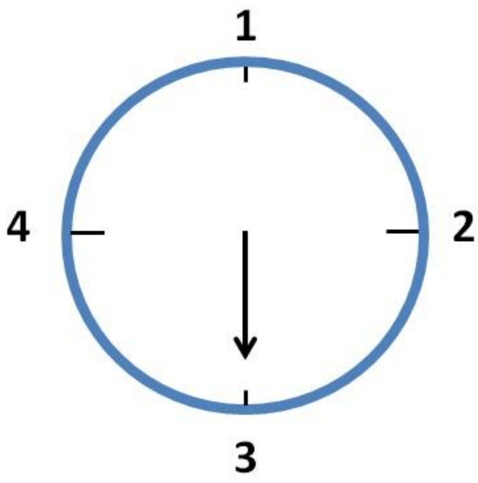


DE QUAIS CONHECIMENTOS SEUS ALUNOS PRECISAM?

Para a realização da atividade 1, os alunos devem possuir noções de conjuntos numéricos e suas representações. A atividade também envolve alguns conceitos probabilísticos como: eventos disjuntos, eventos equiprováveis e eventos complementares. Assim, para alcançar a solução do problema proposto por esta atividade, convém que os alunos saibam identificar o espaço amostral e sua cardinalidade. A partir do experimento descrito, calcular a probabilidade da união de dois eventos, a probabilidade de ocorrência de um evento, a partir de seu complementar, e ainda identificar eventos disjuntos.

1) Observe a figura abaixo. Considere uma circunferência com um ponteiro fixado no centro (Figura 1), que é girado no sentido horário. Suponha que o ponteiro possa parar unicamente nos pontos 1, 2, 3 e 4. A partir dessas informações, responda as **atividades 1, 2 e 3**:

Figura 1— Figura da Atividade 1



Fonte: Produzido pelos autores (2019).

1) Um experimento consiste em girar, uma única vez, o ponteiro da Figura 1 e observar o ponto de parada. Considerando que os pontos de parada sejam equiprováveis, determine:

a) O espaço amostral do experimento e sua cardinalidade.

Solução: o espaço amostral S é igual a S = {1, 2, 3, 4} e possui 4 elementos. Portanto, sua cardinalidade #S = 4.

b) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar em cada um dos pontos 1, 2, 3 e 4? **Justifique sua resposta.**

Solução: a probabilidade de o ponteiro parar em cada um dos pontos 1, 2, 3 e 4, segundo a definição clássica de probabilidade, equivale a ¼, pois a mesma é determinada por

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Em que n(A) é o número de casos favoráveis ao evento A e n(S) é o número de casos possíveis do espaço amostral S, desde que igualmente equiprováveis. Assim, P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = $\frac{1}{4}$.

c) Qual é a probabilidade de o ponteiro não parar no ponto 3?

Solução: utiliza-se o conceito de evento complementar. Assim, se a probabilidade do ponteiro parar no ponto 3 é igual a $\frac{1}{4}$, a probabilidade do ponteiro não parar no ponto 3 será determinada por:

$$P\,(3^c) = 1 - P(3) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

d) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar em 1 e 2? **Justifique sua resposta.**

Solução: por se tratar de um evento impossível**,** a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 1 e 2 é igual a 0, visto que o ponteiro da circunferência é girado uma única vez e, por isso, não pode parar em dois pontos distintos ao mesmo tempo. Assim:

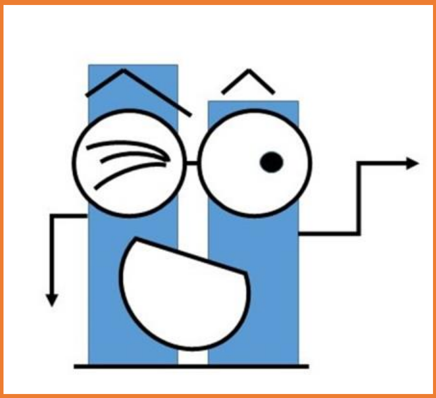
$$P(1 \cap 2) = 0$$

e) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar em 1 ou 2? **Justifique sua resposta.**

Solução: se A e B são eventos mutuamente excludentes, então, segundo o Teorema da Soma, P(A ∪ B) = P(A) + P(B). Assim, a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 1 e 2 é igual a

$$P(1) + P(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

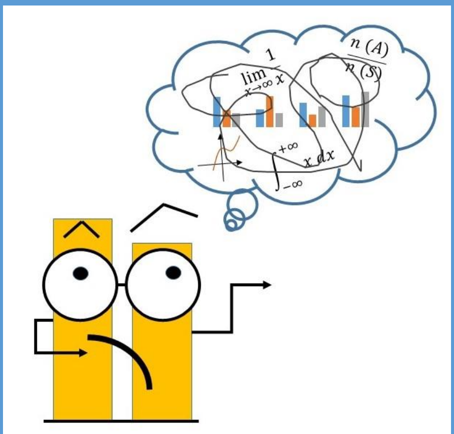
MEDIANDO A SITUAÇÃO



Os alunos que não estiverem habituados a trabalharem o conteúdo de probabilidade podem se esquecer das fórmulas e definições que o mesmo exige. Durante a execução da atividade você deve auxiliá-los a relembrar alguns conceitos probabilísticos. É importante estimulá-los a refletir sobre o espaço amostral discreto e também sobre eventos equiprováveis. Que tal começar mencionando o exemplo clássico do lançamento de um dado não viciado? Você pode fazer as seguintes perguntas:

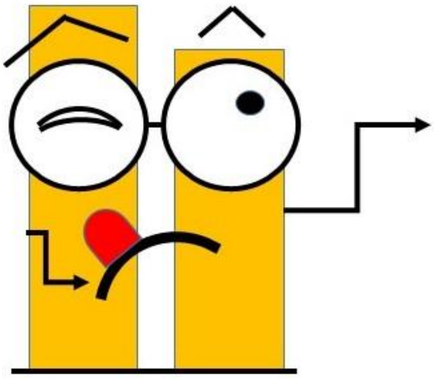
- Num lançamento de um dado não viciado, quais são os possíveis resultados (faces voltadas para cima) que podemos obter? O espaço amostral equivale a esses resultados?
- O espaço amostral deste experimento é discreto ou contínuo? Por quê?
- Qual é a probabilidade de se obter cada uma das faces neste tipo de experimento?

FIQUE ATENTO ÀS DIFICULDADES



Os alunos podem encontrar dificuldades de interpretação na atividade 1, caso o contexto e a utilização de ferramentas matemáticas necessárias para resolvê-la não sejam habituais aos mesmos. É importante que você professor, neste momento, os auxilie a interpretar e compreender o enunciado desta atividade, utilizando o conceito de probabilidade clássica.

ATIVIDADE 2



DE QUAIS CONHECIMENTOS SEUS ALUNOS PRECISAM?

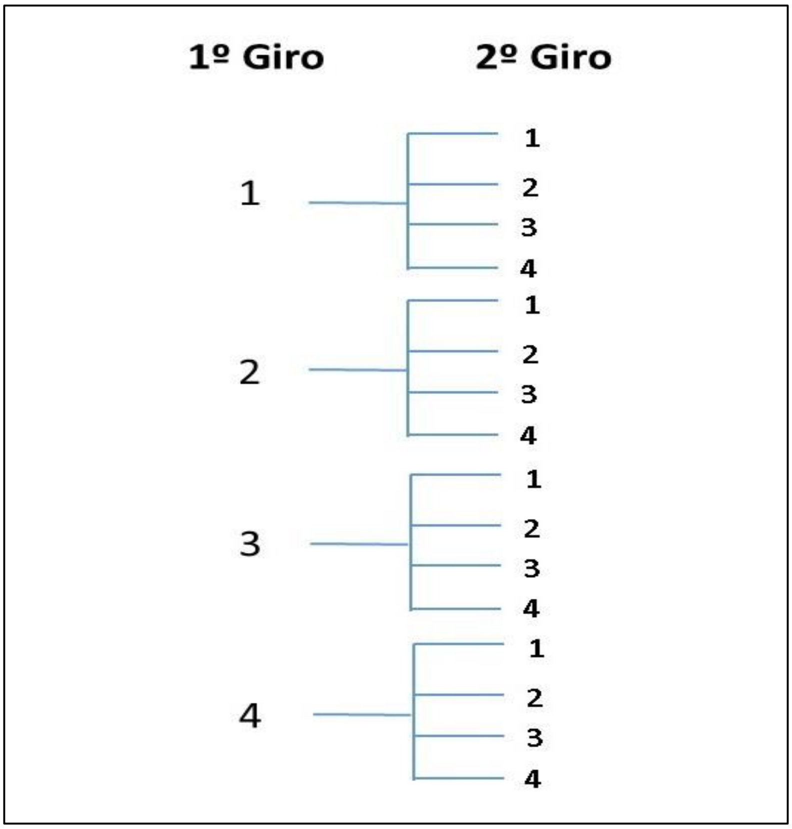
Além dos conhecimentos exigidos na atividade 1, a realização da atividade 2 exigirá dos alunos o uso da árvore de probabilidade como ferramenta e o Teorema da Probabilidade Total.

2) Um novo experimento consiste em girar o ponteiro da **Figura 1** duas vezes. Considerando que parar nos pontos nesse experimento sejam equiprováveis, responda as questões abaixo:

a) Esquematize o espaço amostral por meio de um diagrama de árvore e determine sua cardinalidade.

Solução: como ilustrado no diagrama de árvore, a cardinalidade do espaço amostral é determinada por #S = 16, já que este possui 16 elementos.

Figura 2 — Diagrama de Árvore



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

b) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 2 e 3?

Solução: segundo o Teorema da Probabilidade Total, deve-se considerar dois casos:

- No primeiro giro, o ponteiro para no ponto 2 e, no segundo giro, o ponteiro para no ponto 3. Como os eventos são independentes, pode-se calcular a probabilidade deste evento, utilizando o Teorema do Produto, da seguinte maneira:

$$P(2) \cdot P(3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

- No primeiro giro, o ponteiro para no ponto 3 e, no segundo giro, o ponteiro para no ponto 2.

$$P(3) \cdot P(2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Assim, a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 2 e 3 será determinada por:

$$P(2 \cap 3) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

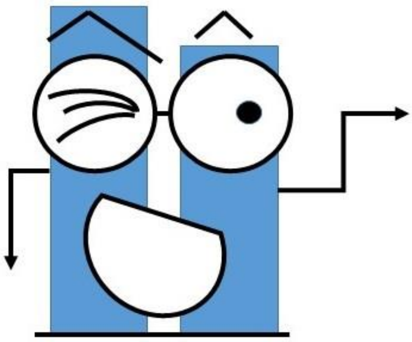
c) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 2 e 3 ou 1 e 4? **Justifique sua resposta.**

Solução: já vimos no item *b* desta atividade que a probabilidade do ponteiro parar nos pontos 2 e 3 equivale a $\frac{1}{8}$. Para se chegar a essa conclusão, cumpre que se considere dois casos, segundo o Teorema da Probabilidade Total. Analogamente a esses casos, calcula-se a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 1 e 4. Como nesse experimento os eventos são equiprováveis, a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 1 e 4 será determinada da seguinte maneira:

$$P(1 \cap 4) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

Logo, a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 2 e 3 ou 1 e 4 será determinada por:

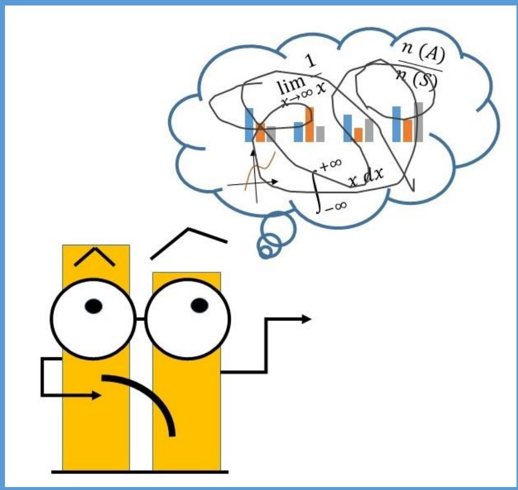
$$P(2 \cap 3) + P(1 \cap 4) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$



MEDIANDO A SITUAÇÃO

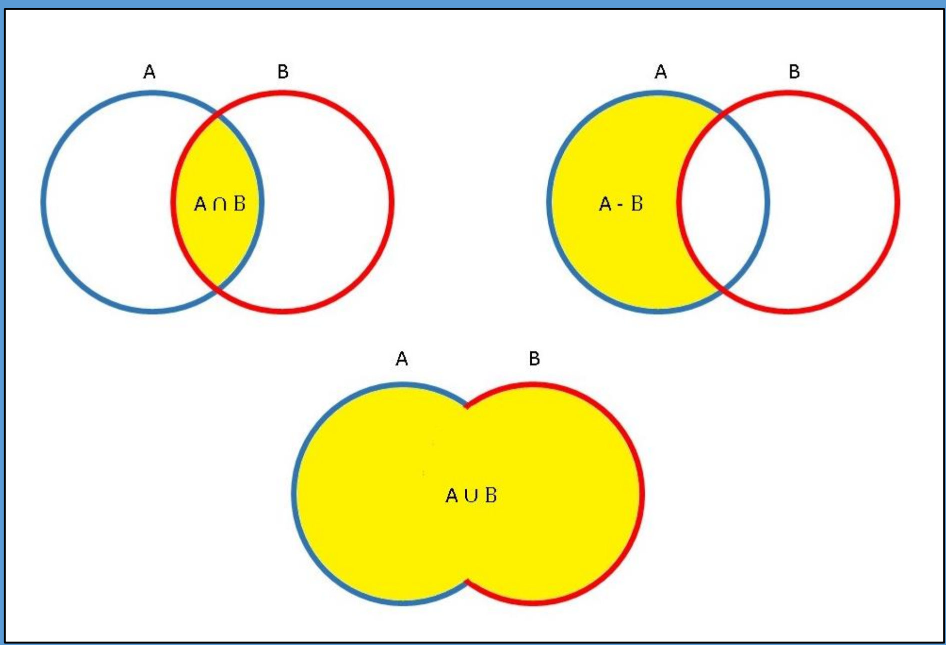
A proposta desta atividade é fazer os alunos refletirem sobre o aumento dos elementos do espaço amostral discreto, em relação à atividade 1. E ainda, sobre as possíveis ferramentas que podem ser utilizadas para a contagem do mesmo, ao girar o ponteiro duas vezes, em um novo experimento. Que tal iniciar esta atividade perguntando qual é a probabilidade de se obter faces idênticas no lançamento de dois dados? Nesse momento, vale instigá-los à construção de uma tabela com os possíveis resultados, relembrando-os o princípio fundamental da contagem.

FIQUE ATENTO ÀS DIFICULDADES



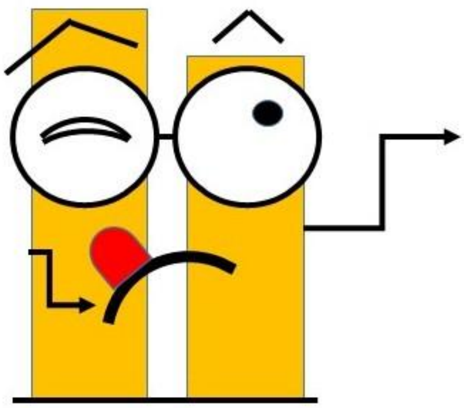
Os alunos podem se deparar com problemas de interpretação e com o uso equivocado de ferramentas matemáticas ao operar com conjuntos numéricos. Que tal reforçar as operações com conjuntos, utilizando desenhos no quadro, como nos diagramas abaixo (veja a figura 3)? Assim, eles poderão refletir melhor sobre a probabilidade de ocorrência de cada evento.

Figura 3 — Diagramas



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

ATIVIDADE 3



DE QUAIS CONHECIMENTOS SEUS ALUNOS PRECISAM?

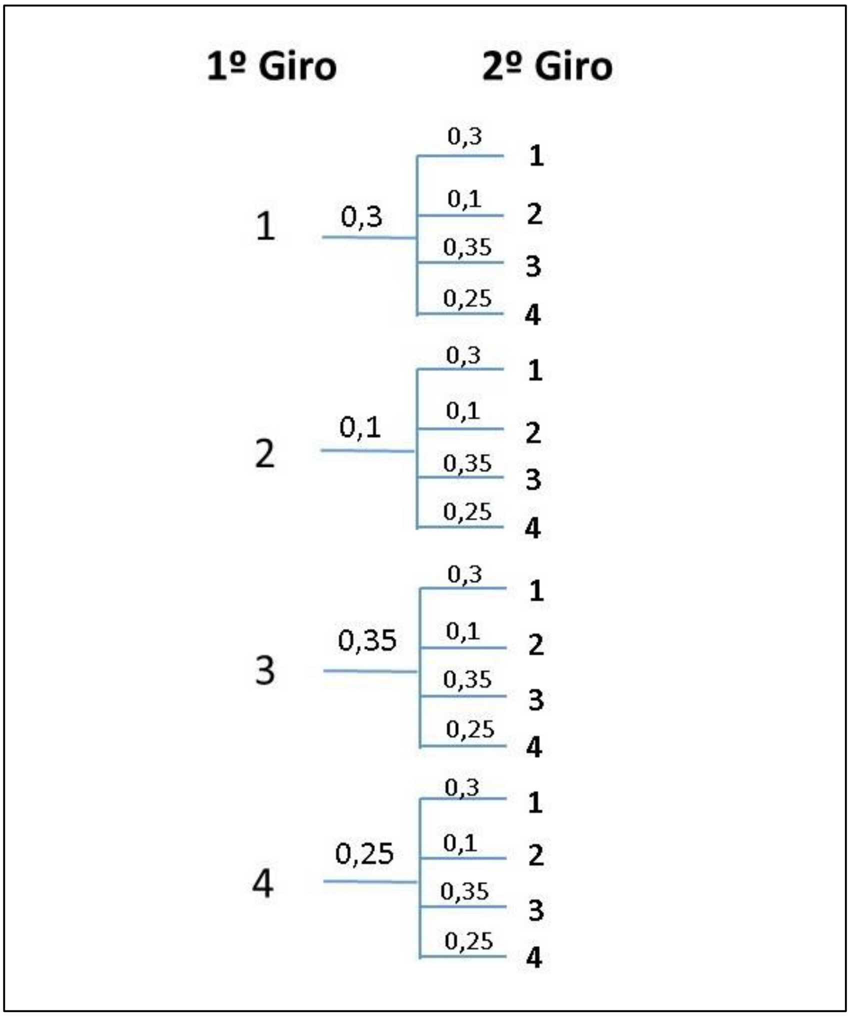
O desenvolvimento dessa atividade exigirá dos alunos a mobilização de conhecimentos relativos a conceitos mencionados nas atividades 1 e 2 e ainda sobre eventos não equiprováveis. Para resolver essa questão os alunos devem utilizar o Teorema da Probabilidade Total, a árvore de probabilidades e propriedades do conceito probabilidade clássica.

3) Suponha que em um outro experimento a probabilidade do ponteiro parar em cada ponto tenha sido alterada. De modo que a probabilidade de o ponteiro parar em 1,2 e 4 seja igual a **0,3**, **0,1** e **0,25**, respectivamente. Sendo assim, considerando que o ponteiro seja girado duas vezes, determine:

a) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 1 e 3? Esboce a árvore de probabilidade para solucionar este item.

Solução:

Figura 4 — Árvore de Probabilidade



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Devemos considerar dois casos, segundo o Teorema da Probabilidade Total:

- No primeiro giro, o ponteiro para no ponto 1 e, no segundo giro, o ponteiro para no ponto 3. Como os eventos são independentes, segundo o Teorema do Produto, pode-se calcular a probabilidade da ocorrência dos mesmos da seguinte maneira:

$$P(1) \, . \, P(3) = 0{,}3 \, . \, 0{,}35 = 0{,}105$$

- No primeiro giro, o ponteiro para no ponto 3 e, no segundo giro, o ponteiro para no ponto 1.

$$P(3) \cdot P(1) = 0,35 \cdot 0,3 = 0,105$$

Assim, a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 1 e 3 será determinada por:

$$P(1 \cap 3) = 0,105 + 0,105 \cong 0,011$$

b) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 2 e 3 ou 1 e 4?

Solução: já foi explicitado no item *a* desta atividade que a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 2 e 3 equivale a aproximadamente 0,011. Para se chegar a essa conclusão cumpre que se considere dois casos. Analogamente, esses casos devem ser considerados ao se calcular a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 2 e 3; e 1 e 4. Nesse experimento, os eventos não são equiprováveis. Segundo o Teorema da Probabilidade Total, a probabilidade de o ponteiro parar nesses pontos será determinada por:

$$P(2 \cap 3) + P(1 \cap 4)$$

Vamos determinar a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 2 e 3:

$$P(2 \cap 3) = P(2) \cdot P(3) + P(3) \cdot P(2) =$$
$$O,1 \cdot 0,35 + 0,35 \cdot 0,1 =$$
$$0,035 + 0,035 = 0,07$$

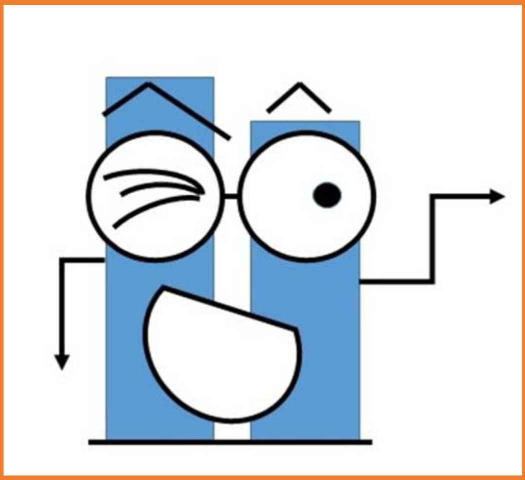
Agora, vamos determinar a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 1 e 4:

$$P(1 \cap 4) = P(1) \cdot P(4) + P(4) \cdot P(1) =$$
$$0,3 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,3 =$$
$$0,075 + 0,075 = 0,15$$

Portanto, a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 2 e 3 ou 1 e 4 será:

$$P(2 \cap 3) + P(1 \cap 4) = 0{,}07 + 0{,}15 = 0{,}22$$

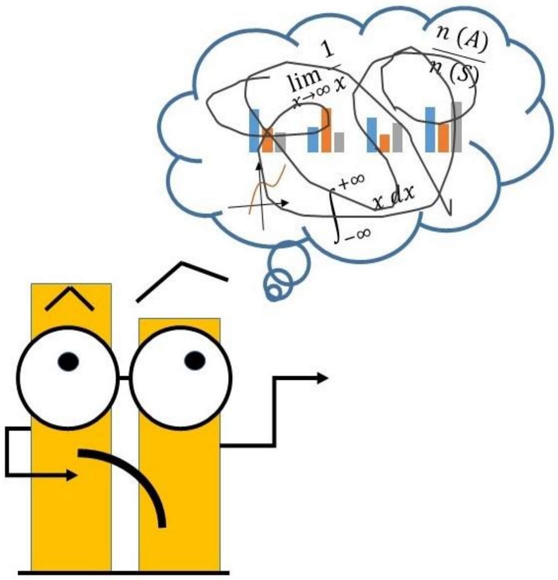
MEDIANDO A SITUAÇÃO



A atividade 3 foi elaborada a fim de evitar que os alunos construam o entendimento equivocado de que os eventos, nesse tipo de experimento, são sempre equiprováveis. O professor poderá iniciar esta atividade indagando-lhes sobre a probabilidade de se obter alguns eventos, no lançamento de um dado viciado, como:

- No lançamento de um dado viciado, qual é o espaço amostral?
- Qual é a probabilidade de se obter cada uma das faces neste tipo de experimento?
- Estas probabilidades são equivalentes para o lançamento de um dado não viciado?

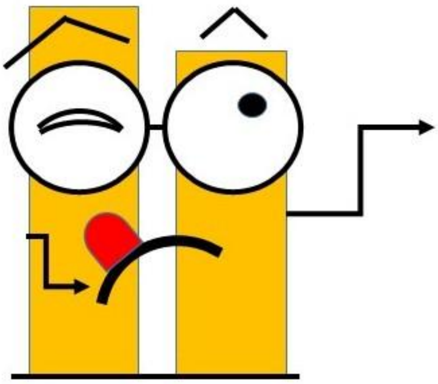
Esperamos que estes questionamentos os faça perceber que, apesar dos experimentos possuírem o mesmo espaço amostral, estes possuem probabilidades diferentes para a ocorrência de eventos semelhantes.



FIQUE ATENTO ÀS DIFICULDADES

Os alunos poderão encontrar dificuldades relativas a conceitos probabilísticos. Nesta atividade, além do uso do Teorema da Probabilidade Total e da árvore de probabilidades, utilizadas para solucionar a atividade 2, os alunos devem saber que o somatório das probabilidades de todos os eventos do espaço amostral é igual a 1. O não conhecimento dessa propriedade probabilística inviabilizará a efetivação desta atividade. Fique atento e, caso perceba estas dificuldades, retome os exemplos dos dados viciados e não viciados para reforçar estes conceitos.

ATIVIDADE 4



DE QUAIS CONHECIMENTOS SEUS ALUNOS PRECISAM?

A atividade 4 exigirá, além do domínio dos conceitos exigidos nas atividades de 1 a 3, conhecimentos sobre conjuntos finitos e infinitos. Exige dos alunos também noções de limite de uma função de uma variável.

4) Suponha um novo experimento em que o ponteiro seja girado, uma única vez, de forma que pare em qualquer ponto na circunferência. Considerando que os eventos sejam equiprováveis, responda cada item abaixo, **justificando sua resposta.**

a) Quantos pontos existem no intervalo [1, 2]?

Solução: No intervalo [1, 2] existem infinitos pontos.

b) Quantos pontos existem no intervalo [1, 5]?

Solução: No intervalo [1, 5] existem infinitos pontos.

c) Identifique o espaço amostral e sua cardinalidade.

Solução: O espaço amostral deste experimento é $S = \{x \in IR / 1 \leq x \leq 5\}$.

d) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar no ponto 2?

Solução: Utilizando o conceito de probabilidade em espaços amostrais discretos e noções de limite, a probabilidade de o ponteiro parar no ponto 2 será determinada por:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

ATENÇÃO PROFESSOR

Os alunos poderão, a partir da definição clássica de probabilidade, utilizar a operação indeterminada P(2) = $\frac{1}{\infty}$ = 0. Caso isso ocorra, sugerimos que a institucionalização seja feita neste momento, e que se reforce não ser possível que esta operação ocorra no campo dos números reais, visto que o infinito não é um número real, mas um conceito matemático.

e) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar no ponto 3?

Solução: assim como no item *d* desta atividade, poderá ser utilizado o conceito de probabilidade em espaços amostrais discretos e noções de limite, a probabilidade de o ponteiro parar no ponto 3 será determinada por:

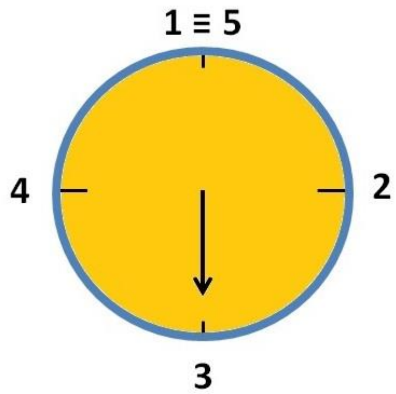
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

ATENÇÃO PROFESSOR

Os alunos poderão, a partir da definição clássica de probabilidade, utilizar a operação indeterminada $P(3) = \frac{1}{\infty} = 0$. Caso isso ocorra, recomenda-se que a institucionalização seja feita neste momento e que se reforce não ser possível que esta operação ocorra no campo dos números reais, visto que o infinito não é um número real, mas um conceito matemático.

f) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar em qualquer ponto x, pertencente ao intervalo $1 \leq x \leq 5$. **Justifique sua resposta.**

Figura 5 — Figura do item f da Atividade 4



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Solução: o evento mencionado neste item trata-se de um evento certo, já que o referido intervalo é o próprio espaço amostral S. Assim, a probabilidade do ponteiro parar em qualquer ponto da circunferência, ou seja, no intervalo [1, 5], segundo a definição de probabilidade clássica, equivale a 1.

ATENÇÃO PROFESSOR

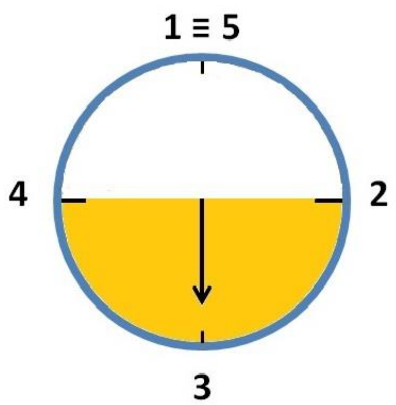
Os alunos poderão utilizar o conceito de probabilidade em espaços discretos e noções de limite, e se deparar com os seguintes casos:

$$P([1, 5]) = \frac{\infty}{\infty} \text{ e } \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Caso isso ocorra, sugerimos que a institucionalização seja feita neste momento, e que se reforce não ser possível que esta operação seja realizada no campo dos números reais, visto que o infinito não é um número real, mas um conceito matemático. Ambos os casos representam operações indeterminadas e, por isso, é feita a ilustração de figuras com as regiões internas preenchidas. Para que, por meio destas, os alunos possam associar a área desta região com o cálculo de probabilidade. Na figura 4, a região preenchida corresponde a área total da mesma.

g) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar no intervalo [2, 4]? **Justifique sua resposta.**

Figura 6 — Figura do item *g* da Atividade 4



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Solução: A probabilidade do ponteiro parar no intervalo [2, 4] equivale a $\frac{1}{2}$.

ATENÇÃO PROFESSOR

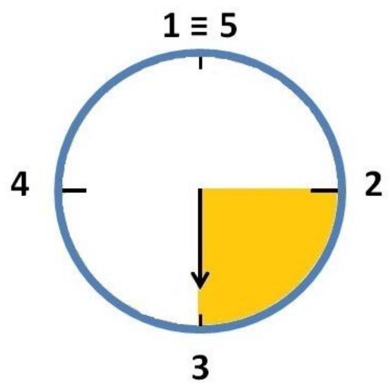
Os alunos poderão utilizar o conceito de probabilidade em espaços discretos e noções de limite, e se deparar com os seguintes casos:

$$P([2, 4]) = \frac{\infty}{\infty} \text{ e } \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Novamente nos deparamos com operações indeterminadas. Institucionalize alguns conceitos envolvendo noções de limite e os números reais. Deve-se mediar a situação de maneira que os permita associar a área da região interna da figura 5 com o cálculo de probabilidade. Nela, a região interna preenchida corresponde metade da área total da mesma.

h) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar no intervalo [2, 3]? **Justifique sua resposta.**

Figura 7 — Figura do item *h* da Atividade 4



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Solução: a probabilidade do ponteiro parar no intervalo [2, 3] equivale a $\frac{1}{4}$.

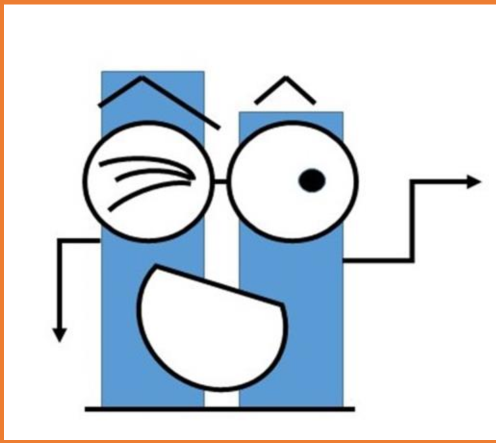
ATENÇÃO PROFESSOR

Os alunos poderão utilizar o conceito de probabilidade em espaços discretos e noções de limite, e se deparar com os seguintes casos:

$$P([2, 3]) = \frac{\infty}{\infty} \text{ e } \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

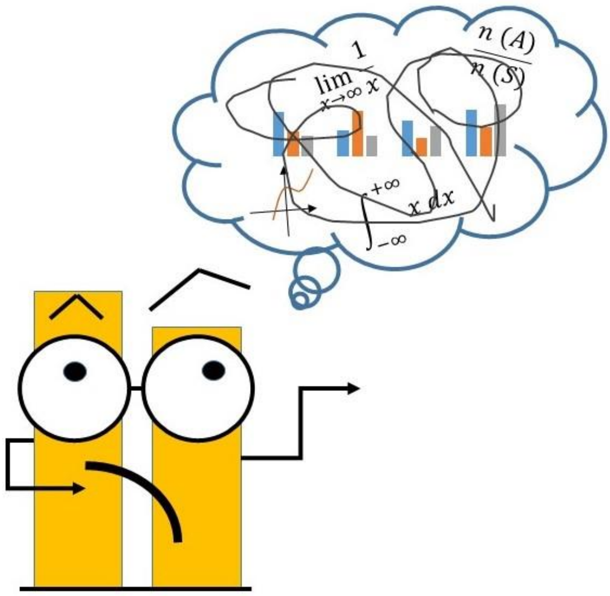
Novamente, defronta-se com operações indeterminadas. Institucionalize alguns conceitos envolvendo noções de limite e os números reais. Nesse caso, deve-se mediar a situação de maneira que os permita associar a área da região interna da figura 6 com o cálculo de probabilidade. Nela, a região interna preenchida corresponde um quarto da área total da mesma.

MEDIANDO A SITUAÇÃO



Esta atividade objetiva provocar nos alunos uma mudança de concepção de probabilidade, que envolve a percepção da necessidade de uso de ferramentas diferentes das utilizadas até então para se obter o cálculo de probabilidade em espaços discretos. Ao utilizarem as ferramentas matemáticas usuais nos cálculos de probabilidade em espaços discretos para resolverem essa atividade, que aborda variáveis aleatórias contínuas, espera-se que os alunos confrontem suas conjecturas com os resultados obtidos por eles, de forma a não os aceitarem. Assim, fazê-los discutir características de conjuntos numéricos a partir do conjunto dos números naturais é uma forma de provocar nos alunos uma reflexão sobre a ordem do surgimento dos mesmos, sua cardinalidade e também sobre o conceito de conjuntos enumeráveis. O pode estimular seus alunos a refletirem sobre os conceitos envolvendo o infinito podendo fazer as seguintes perguntas:

- Quantos números existem entre 1 e 2? E entre 1 e 3? Quantos números existem entre quaisquer dois pontos distintos?
- O infinito é um número?
- Cite um conjunto numérico. Ele possui quantos elementos? Ele é enumerável? Tente enumerá-lo (ou descrever todos os seus elementos em ordem crescente).
- O conjunto dos números reais possui infinitos elementos? E um subconjunto dos números reais possui quantos elementos? Um subconjunto de IR é enumerável?



FIQUE ATENTO ÀS DIFICULDADES

Os alunos poderão encontrar dificuldades para resolver esta atividade se não souberem utilizar ferramentas algébricas e de cálculo. Já que essa atividade aborda um novo espaço amostral, composto por infinitos elementos. Assim, os alunos que não possuírem noções de limite e de álgebra encontrarão dificuldades em concluí-la. Nesse caso, podem-se atenuar essas dificuldades mediando a situação a partir de perguntas já sugeridas para esta atividade. Além disso, atentá-los para a região interna preenchida nas figuras desta atividade poderá auxiliá-los na obtenção do cálculo de probabilidade, se a associação com o cálculo de área de figuras planas for feita.

5

SEGUNDA ETAPA DA SITUAÇÃO DIDÁTICA

5 SEGUNDA ETAPA DA SITUAÇÃO DIDÁTICA

Para iniciar a 2ª etapa da situação didática em sala de aula, o professor deve continuar a estimular os alunos a realizar os desafios propostos pela sequência de atividades, de modo independente, fazendo apenas as devidas mediações no desenvolvimento das atividades. Deve estar atento, todavia, para mediar esse processo e auxiliar os alunos a superar as possíveis dificuldades ao realizá-la.

Recomenda-se que os grupos formados na 1ª etapa da situação didática sejam mantidos com os mesmos membros, para possibilitar o acompanhamento do avanço da aprendizagem de cada aluno, assim como as construções intrínsecas a cada grupo.

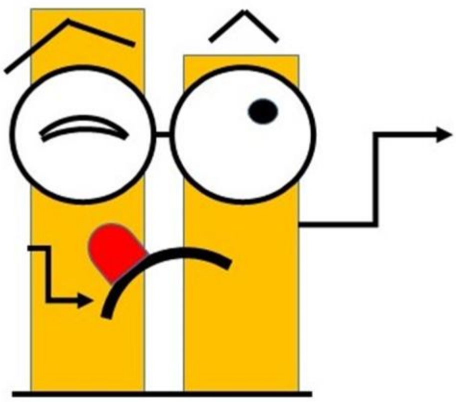
Nesta segunda etapa, o professor deve distribuir a 2ª sequência de atividades, composta pelas atividades de 5 a 9. Sugere-se, ainda, que o caderno de anotações seja mantido para que se possa fazer o registro das falas e momentos da situação didática que indiquem progresso na aprendizagem, ou casos considerados objetos de comentários na fase de institucionalização.

Explicitam-se, a seguir, cada uma das atividades, orientando a prática do professor e mencionando as possíveis dificuldades que os alunos podem encontrar nesta etapa, ao realizá-la. Apregoa-se que, novamente, seja distribuída uma sequência de atividades para cada aluno, a fim de possibilitar a análise das formulações e linguagem matemática de cada um, individualmente.

O objetivo desta sequência de atividades é propiciar aos alunos reflexões acerca do comportamento gráfico de uma distribuição de probabilidade representada em um plano cartesiano, por meio de uma função contínua. Por meio dela, pretendemos possibilitar com que os alunos, ao analisarem o comportamento de algumas funções contínuas, sejam capazes de representar fenômenos probabilísticos por meio de uma função contínua, além de identificar uma função densidade de probabilidade.

ATIVIDADES 5, 6 e 7

DE QUAIS CONHECIMENTOS SEUS ALUNOS PRECISAM?

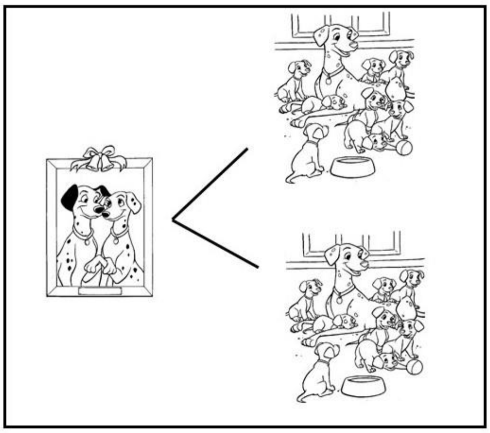


A realização das atividades 5, 6 e 7 exigirá dos alunos conhecimentos básicos do conteúdo de cálculo, como: noções sobre variáveis, domínio e contradomínio de uma função real. Além disso, é preciso possuir um entendimento sobre propriedades de funções exponencial, afim, quadrática e constante. Nessas atividades, são apresentadas situações presentes no dia a dia dos alunos e que podem ser representadas, de maneira aproximativa, por uma função real. Assim, em cada uma das situações, são apresentados gráficos de funções contínuas e os alunos devem assinalar o que melhor representa o fenômeno apresentado. Eles também precisam identificar nos eixos dos planos cartesianos quais são as variáveis representadas pelos mesmos, justificando suas escolhas. Buscam-se com isso que as situações apresentadas nessas atividades possibilitem os alunos a construírem representações gráficas a partir de uma situação problema, relacionando de forma pertinente as variáveis nela contidas.

5) Você sabia que a superpopulação de cães é um dos graves problemas da saúde pública?

O aumento excessivo da população de cães gera a poluição ambiental e a transmissão de zoonoses. Segundo a *American Humane Association*[1], estima-se que, com duas crias por ano, um casal de cães gere de 2 a 8 filhotes por cria. A tabela abaixo apresenta, em média, a quantidade de animais que um casal de cães pode originar em 10 anos, em sucessivas gerações.

Figura 8 — Crescimento populacional a partir de um casal de cães



ANO	NÚMERO DE CÃES
1º	12
2º	66
3º	382
4º	2.201
5º	12.680
6º	73.041
7º	420.715
8º	2.423.316
9º	13.968.290
10º	80.399.780

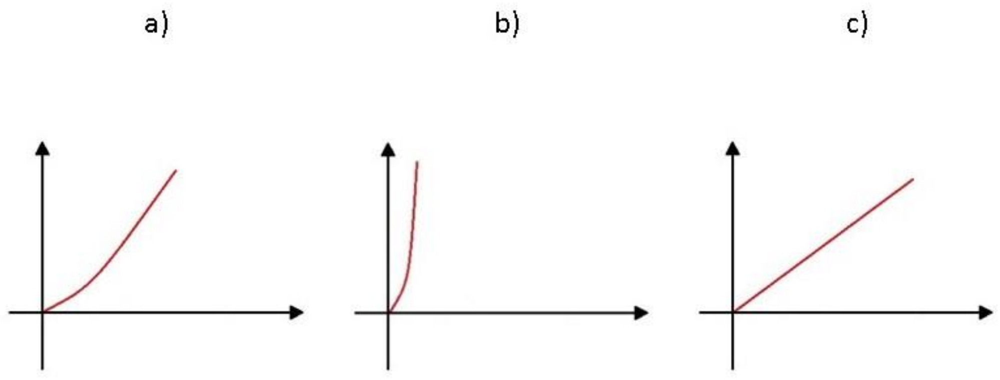
Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Nessas condições, assinale as variáveis em cada um dos eixos e aponte o gráfico que melhor representa a quantidade de animais gerados por um casal de cães com o passar dos anos. **Justifique sua resposta.**

---

[1]Disponível em: https://www.americanhumane.org/

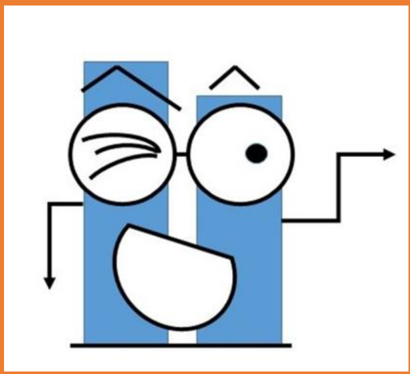
Figura 9 — Opções gráficas da Atividade 5



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Solução: o gráfico que melhor representa a quantidade de animais gerados por um casal de cães com o passar dos anos encontra-se no item *b*, pois o crescimento populacional de cães com o passar dos anos, segundo a tabela apresentada, assemelha-se a um crescimento exponencial. Assim, o gráfico que mais se aproxima de uma função exponencial é o gráfico do item *b*. O eixo X representa a variável “anos” e o eixo Y representa a variável “número de animais”.

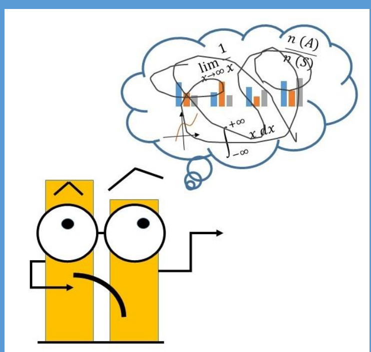
MEDIANDO A SITUAÇÃO



Você poderá iniciar esta atividade auxiliando os alunos a interpretar os dados obtidos na tabela, fazendo as seguintes perguntas:

- Com o passar dos anos a quantidade de cães aumenta ou diminui? Esse aumento (ou diminuição) é de maneira constante?
- Observando a tabela, o aumento do número de animais pode ser representado de maneira aproximada por alguma função? Qual tipo de função?
- Nesta tabela, quais são as variáveis envolvidas? No plano cartesiano, qual delas será representada pelos eixos X e Y?

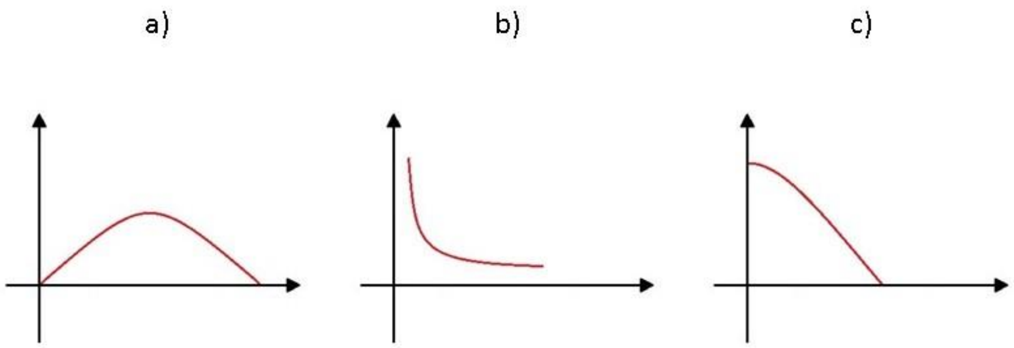
FIQUE ATENTO ÀS DIFICULDADES



Os alunos poderão encontrar dificuldades em relembrar e reconhecer propriedades e características das funções quadráticas, exponencial e afim, as quais a atividade aborda. Além disso, poderão encontrar dificuldades em estabelecer relações entre as variáveis contidas no enunciado, representando-as graficamente.

6) O corpo humano é constituído por músculos, ossos, tendões, ligamentos e outros componentes das articulações, capazes de proporcionar uma estrutura que permita executar movimentos fortes e bruscos. Essa estrutura, no entanto, tende a se desgastar naturalmente com o passar do tempo. O seu maior vigor é atingido por volta dos 32,5 anos. Sendo assim, assinale as variáveis nos eixos e aponte o gráfico que melhor representa a força do ser humano no decorrer de sua vida. **Justifique sua resposta.**

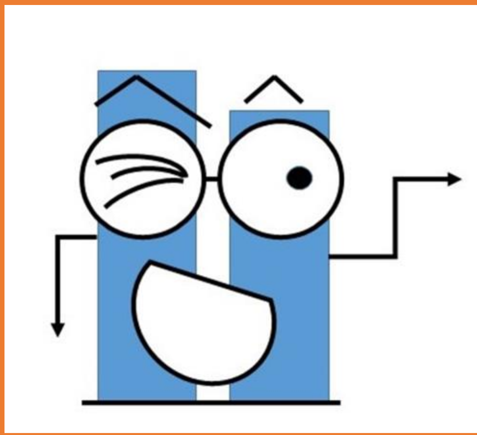
Figura 10 — Opções gráficas da Atividade 6



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Solução: o gráfico que melhor representa a força do ser humano no decorrer de sua vida encontra-se no item *a*, pois, segundo o enunciado, sua força atinge um vigor máximo por volta dos 32,5 anos e decresce a partir de então. Assim, o gráfico da função do item *a* possui esse comportamento: é crescente em um certo intervalo, atinge um ponto máximo e depois decresce até se tornar nula. O eixo X representa a variável “anos” e o eixo Y representa a variável “força do ser humano”.

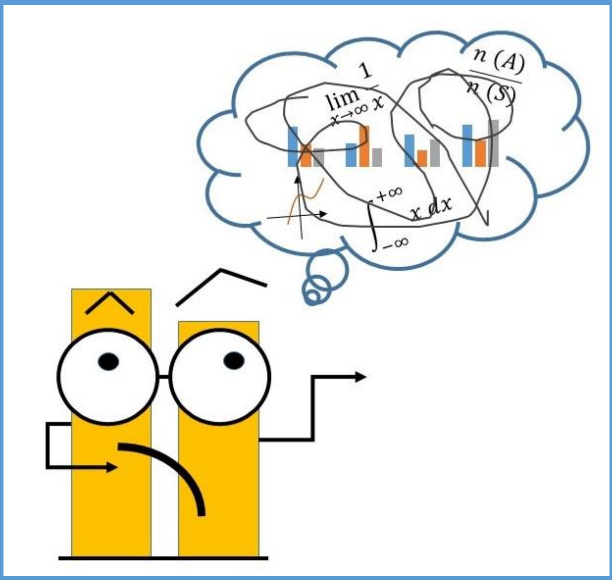
MEDIANDO A SITUAÇÃO



Você poderá iniciar esta atividade auxiliando os alunos a interpretar a atividade, fazendo as seguintes perguntas:

- O ser humano nasce com alguma força? Se essa força pudesse ser representada por algum valor, qual valor você atribuiria a ela, comparada com a força de um ser humano adulto?
- Quais são as variáveis analisadas no texto? É possível estabelecer alguma relação entre elas? Se representadas por uma função, qual delas estaria representada no eixo X e no eixo Y?
- A partir do nascimento, a força do ser humano aumenta ou diminui? Caso aumente, até em que idade isso ocorre?
- Quais são os intervalos do domínio da possível função que representa o período em que essa força aumenta e diminui? Em cada um destes intervalos a função é crescente ou decrescente?
- Existe algum período da vida do ser humano em que essa força é máxima? Você se lembra de alguma função que possui esta característica (é crescente em um intervalo, atinge um valor máximo e depois decresce)?
- Existe algum período da vida do ser humano em que essa força diminui? Se sim, o intervalo do domínio da possível função que representa o período em que a força diminui é crescente ou decrescente?
- Essa força pode ser tornar nula algum dia? Em que momento?

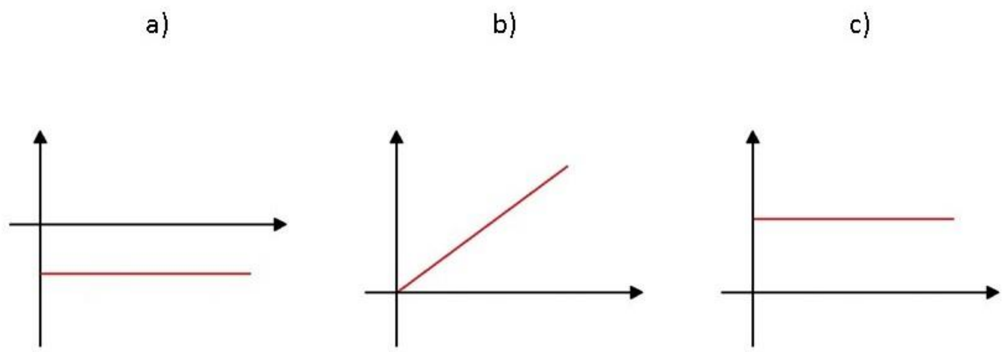
FIQUE ATENTO ÀS DIFICULDADES



Os alunos poderão encontrar dificuldades em relembrar e reconhecer propriedades e características das funções quadráticas, afim e decrescente, as quais a atividade aborda. Além disso, poderão encontrar dificuldades em estabelecer relações entre as variáveis abordadas, para representá-las graficamente.

7) Uma empresa de telefonia móvel oferece para os clientes que adquirem o plano ***Fale o Quanto Quiser***, minutos ilimitados para fazer ligações locais. Este plano custa R$40,00 por mês. Sabendo disso, identifique as variáveis nos eixos e aponte qual é o gráfico que melhor representa o valor a ser pago em função da quantidade de minutos utilizados em um mês ao cliente que faz adesão a este plano e só realiza ligações locais. **Justifique sua resposta.**

Figura 11 — Opções gráficas da Atividade 10



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Solução: o gráfico que melhor representa o valor a ser pago em função da quantidade de minutos utilizados em um mês ao cliente que faz adesão ao plano ***Fale o Quanto Quiser***, e só realiza ligações locais, encontra-se no item *c,* pois, segundo o enunciado, este cliente, ao fazer apenas ligações locais, paga um valor constante em sua fatura. Assim, o item *c* é o único que apresenta o gráfico de uma função constante e positiva. O eixo X representa a variável "quantidade de minutos utilizados em um mês" e o eixo Y representa a variável "valor a ser pago no plano ***Fale o Quanto Quiser***".

ATENÇÃO PROFESSOR

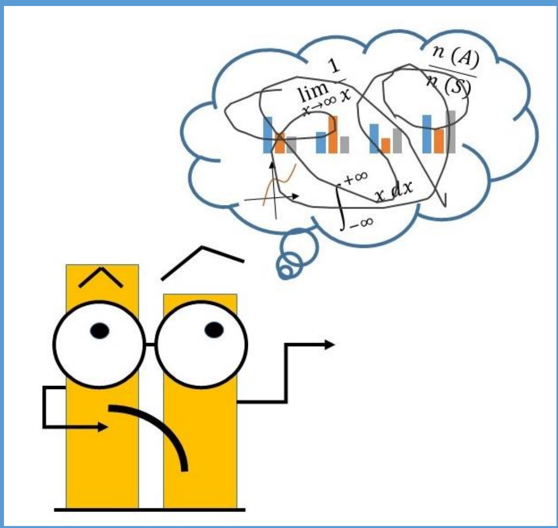
É importante ressaltar que, quando se trata de valores monetários, é possível que estes sejam representados por números negativos. Essa representação é comum, principalmente na matemática financeira, quando se quer referir a uma dívida ou um déficit financeiro. Isso pode possibilitar a validade também do item “a”, que apresenta o gráfico de uma função constante e negativa, já que o valor a ser pago por um cliente também é uma dívida. Cabe ao professor conduzir a atividade de maneira que faça os alunos discutirem essas questões e encontrarem uma solução para este problema.

MEDIANDO A SITUAÇÃO

Você poderá iniciar esta atividade auxiliando os alunos a interpretar a atividade, fazendo as seguintes perguntas:

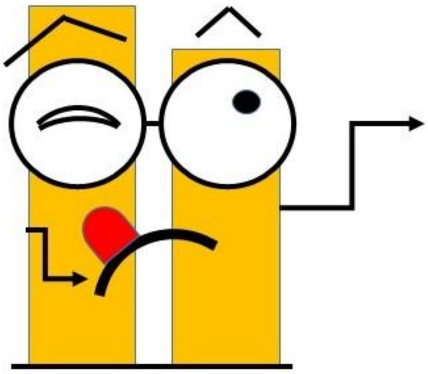
- Quanto custa o plano de telefonia móvel mencionado no texto? Esse valor varia para quem faz qualquer tipo de ligação? E para quem realiza apenas ligações locais, o valor a ser pago varia?
- Se o valor a ser pago pelo cliente que realiza apenas ligações locais não varia, quanto pagará um cliente que o faz, independente de quantos minutos utilize realizando ligações?
- Quais são as variáveis analisadas no texto? É possível estabelecer alguma relação entre elas? Se representadas por uma função, qual delas estaria representada pelo eixo X e pelo eixo Y?
- O valor da imagem da função que representa a quantia a ser paga pelo cliente que só realiza ligações locais pode variar?

FIQUE ATENTO ÀS DIFICULDADES



Os alunos poderão encontrar dificuldades em relembrar e reconhecer propriedades e características das funções constante e afim, as quais a atividade aborda. Além disso, poderão encontrar dificuldades em estabelecer relações entre as variáveis abordadas, para representá-las graficamente.

ATIVIDADES 8 e 9

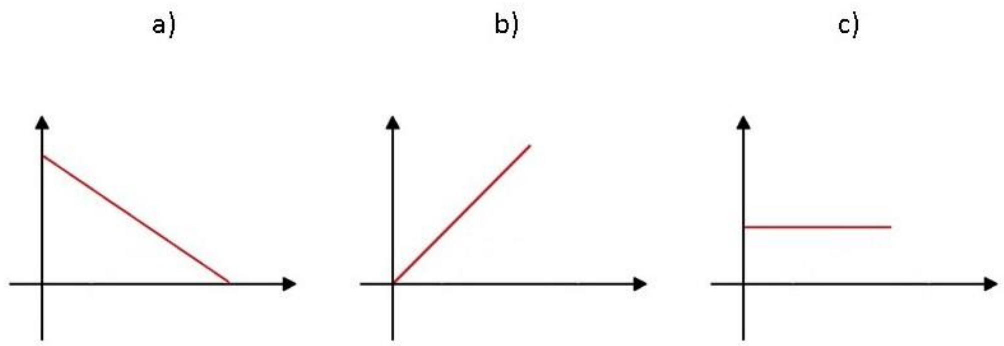


DE QUAIS CONHECIMENTOS SEUS ALUNOS PRECISAM?

A realização das atividades 8 e 9 exigirá dos alunos noções de cálculo, como: a ideia de variável, domínio e contradomínio de uma função. Exigirá também o conhecimento sobre propriedades de funções afim, quadrática e constante, além de noções de probabilidade. Nelas são apresentadas situações envolvendo a probabilidade da ocorrência de eventos do dia a dia. Os alunos precisam identificar, nos itens de cada atividade, qual gráfico melhor representa a situação apresentada, assinalando nos eixos as variáveis observadas, justificando suas respostas. Certamente, essas atividades trarão uma melhor percepção sobre o comportamento de uma distribuição de probabilidade, a partir de uma função real, e que a abordagem de situações cotidianas facilitará a compreensão dos alunos.

8) Sabe-se que a vida útil das lâmpadas de LED depende de diversos fatores. No entanto, elas são produzidas para durarem cerca de 50.000 horas. Estima-se que nas 25.000 horas de vida útil elas atinjam 70% de sua capacidade máxima. Sendo assim, identifique as variáveis nos eixos e aponte qual é o gráfico que melhor representa a probabilidade de uma lâmpada queimar durante sua vida útil, em condições de uso adequadas. **Justifique sua resposta.**

Figura 12 — Opções gráficas da Atividade 8



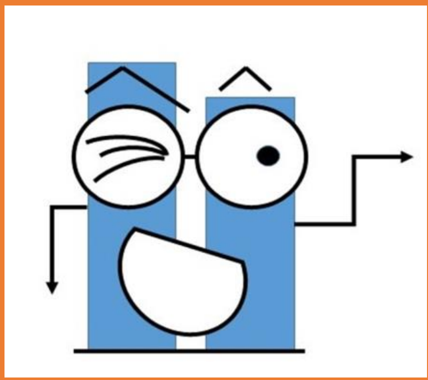
Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Solução: o gráfico que melhor representa a probabilidade de uma lâmpada queimar durante sua vida útil, em condições de uso adequadas, encontra-se no item *b*, pois, segundo o enunciado, a lâmpada de LED atinge uma capacidade máxima, o que significa que, a partir de então, sua capacidade de funcionamento decai até que sua vida útil se esgote. Sendo assim, a probabilidade de que uma lâmpada de LED queime tende a crescer no decorrer de sua vida útil, e o gráfico do item *b* é o único que representa uma função crescente. Por se tratar de um fenômeno probabilístico que ocorre nos espaços contínuos, a função que o representa trata-se de uma função densidade de probabilidade (fdp). O que impossibilita a nomeação da variável no eixo Y, como nas atividades de 5 a 7. O eixo X representa a variável "tempo de vida útil de uma lâmpada de LED".

ATENÇÃO PROFESSOR

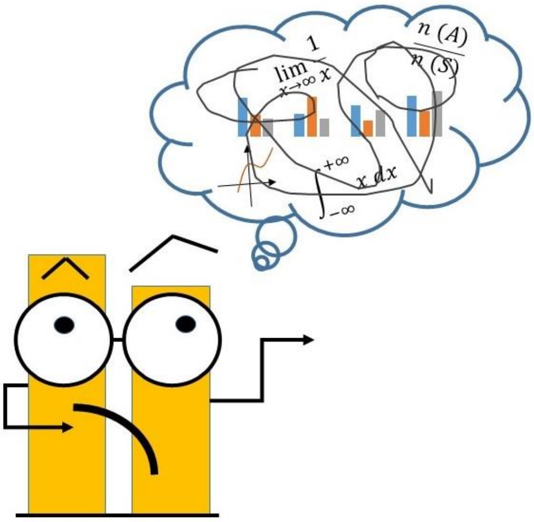
A impossibilidade de nomeação da variável Y nesta atividade se dá pelo fato de que a função que descreve o fenômeno probabilístico mencionado trata-se de uma função densidade de probabilidade. Neste caso, o valor da probabilidade de ocorrência do evento em cada um de seus intervalos é determinado por sua integral, não pelos valores que a função assume no eixo Y, como ocorre na função probabilidade.

MEDIANDO A SITUAÇÃO



Você poderá iniciar esta atividade auxiliando os alunos a interpretar a atividade, fazendo as seguintes perguntas:

- Quando compramos uma lâmpada de LED, qual deve ser a chance da mesma queimar? Essa chance aumenta ou diminui com o tempo?
- Caso essa chance aumente, até quando isso ocorre?
- Quais são os intervalos do domínio da possível função que representa o aumento da chance de uma lâmpada de LED queimar? Neste (s) intervalo (s) a função é crescente ou decrescente?
- Existe a possibilidade da chance de que uma lâmpada de LED queime seja nula? Graficamente, o que isso pode significar?
- A partir do início de seu uso, existe algum período em que a vida útil de uma lâmpada de LED é máxima?
- Existe algum período da vida útil de uma lâmpada de LED em que a chance da mesma queimar diminua?
- Quais são as variáveis analisadas no texto? É possível estabelecer alguma relação entre elas? Se representadas por uma função, qual delas estaria representada no eixo X e no eixo Y?
- Se as chances de que a lâmpada queime sempre aumentam, a função que representa este fenômeno é crescente ou decrescente? Ela poderá assumir valores negativos?

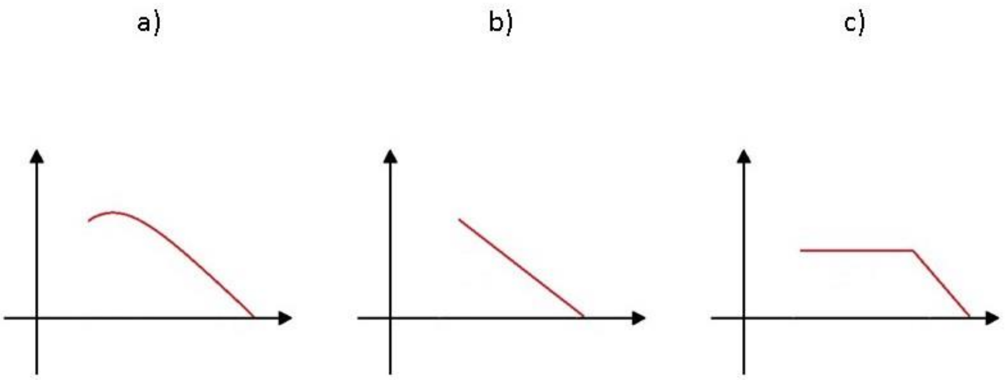


FIQUE ATENTO ÀS DIFICULDADES

Os alunos poderão encontrar dificuldades em reconhecer propriedades dos tipos de funções representadas pelos gráficos e estabelecer relações entre duas variáveis, para representá-las graficamente. Além disso, poderão encontrar dificuldades em reconhecer uma função densidade de probabilidade (fdp) e diferi-la de uma função probabilidade. Como, até o momento, durante a realização da situação didática não é previsto uma formalização do conceito de fdp, é provável que os alunos não identifiquem algumas de suas características. Você poderá mencionar o enunciado enfatizando as características de uma fdp, a fim de familiarizá-los com as mesmas.

9) A menarca, evento que corresponde à primeira menstruação da mulher, marca o início de sua vida reprodutiva em torno dos 13 anos de idade. De modo geral, as mulheres são mais férteis na casa dos 20 anos. Depois dos 35 anos, as chances de ter um filho declinam, em média, em 50%. O fim do período fértil se encerra por volta dos 45 a 55 anos de idade, com a chegada da menopausa, evento em que o ovário da mulher libera o último óvulo capaz de ser fecundado. Sendo assim, identifique as variáveis nos eixos e aponte qual é o gráfico que melhor representa a probabilidade de uma mulher, sem problemas de fertilidade, engravidar durante sua vida, a partir da menarca. **Justifique sua resposta.**

Figura 13 — Opções gráficas da Atividade 9



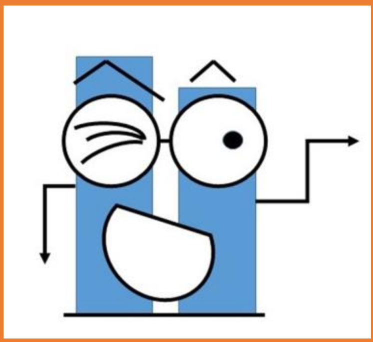
Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Solução: o gráfico que melhor representa a probabilidade de que uma mulher, sem problemas de fertilidade, engravidar durante sua vida, a partir da menarca, encontra-se no item *a*, pois, segundo o enunciado, a mulher inicia sua vida fértil a partir dos 13 anos de idade, atinge um período em que é mais fértil por volta dos 20 anos. A partir de então, sua chance de engravidar se reduz no decorrer dos anos até se anular, por volta dos 45 a 55 anos de idade. Assim, o único gráfico que possui um intervalo crescente, atinge um ponto máximo e decresce até se anular é o gráfico apresentado no item *a* e, por isso, é o que melhor representa o fenômeno mencionado. Por se tratar de um fenômeno probabilístico que ocorre nos espaços contínuos, a função que o representa trata-se de uma função densidade de probabilidade (fdp). O que impossibilita a nomeação da variável no eixo Y, como nas atividades de 5 a 7. O eixo X representa a variável “tempo de vida de uma mulher”.

ATENÇÃO PROFESSOR

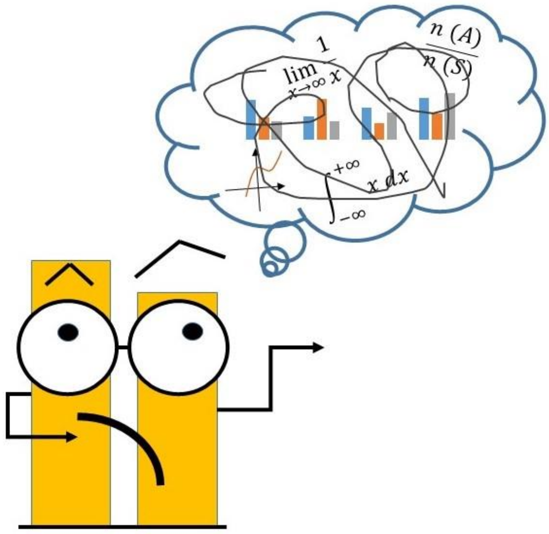
A impossibilidade de nomeação da variável no eixo Y nesta atividade se localiza no fato de que a função a descrever o fenômeno probabilístico mencionado, concerne a uma função densidade de probabilidade. Neste caso, o valor da probabilidade de ocorrência do evento em cada um de seus intervalos é determinado por sua integral, não pelos valores que a função assume no eixo Y, como ocorre na função probabilidade.

MEDIANDO A SITUAÇÃO



Você poderá iniciar esta atividade auxiliando os alunos a interpretar a atividade, fazendo as seguintes perguntas:

- A criança do sexo feminino, ao nascer, possui alguma chance de engravidar? Em que período da vida da mulher é possível que isso ocorra?
- Se a fertilidade da mulher na puberdade pudesse ser representada por algum valor, qual valor você atribuiria a ela, comparada com a fertilidade de uma mulher na vida adulta?
- Existe algum período em que a chance de uma mulher engravidar aumenta?
- A partir da primeira menstruação, a fertilidade da mulher aumenta ou diminui? Caso aumente, até em que idade isso ocorre?
- Quais são os intervalos do domínio em que a possível função representa o período em que a fertilidade aumenta? Em cada um deles a função é crescente ou decrescente?
- Existe algum período da vida da mulher em que essa fertilidade é máxima? Você se lembra de alguma função que possui esta característica (é crescente em um intervalo, atinge um valor máximo e depois decresce)?
- Existe algum período da vida da mulher em que essa fertilidade diminui? Em que idade isso ocorre?
- Quais são os intervalos do domínio em que a possível função representa o período em que a fertilidade diminui? Em cada um deles a função é crescente ou decrescente?
- Essa fertilidade pode ser tornar nula algum dia? Em que momento?
- Quais são as variáveis analisadas no texto? É possível estabelecer alguma relação entre elas? Se representadas por uma função, qual delas estaria representada no eixo X e no eixo Y?



FIQUE ATENTO ÀS DIFICULDADES

Os alunos poderão encontrar dificuldades em reconhecer propriedades dos tipos de funções representadas pelos gráficos e estabelecer relações entre duas variáveis, para representá-las graficamente. Além disso, poderão encontrar dificuldades em reconhecer uma função densidade de probabilidade e diferi-la de uma função probabilidade. Como, até o momento, durante a realização situação didática não é previsto uma formalização do conceito de fdp, é provável que os alunos não identifiquem algumas de suas características. Você poderá mencionar o enunciado, enfatizando as características de uma fdp, a fim de familiarizá-los com as mesmas.

6

TERCEIRA ETAPA DA SITUAÇÃO DIDÁTICA

6 TERCEIRA ETAPA DA SITUAÇÃO DIDÁTICA

Para iniciar a 3ª etapa da situação didática, o professor deve estimular os alunos a resolver, de modo independente e autônomo, os desafios propostos pela sequência de atividades, fazendo apenas as devidas mediações no desenvolvimento das atividades. Cumpre estar atento para mediar esse processo e auxiliar os alunos a superar as possíveis dificuldades.

Urge-se que os grupos formados nas 1ª e 2ª etapas da situação didática sejam mantidos com os mesmos membros, de sorte a possibilitar o acompanhamento do avanço da aprendizagem de cada aluno, assim como as construções intrínsecas a cada grupo.

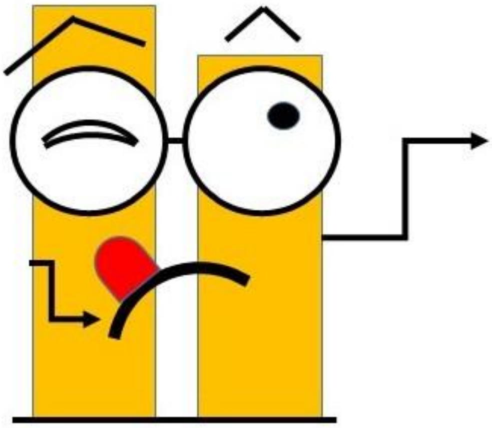
Nesta terceira etapa, o professor deve distribuir a 3ª sequência de atividades, composta pelas atividades de 10 a 12. É sugestivo, ainda, que o caderno de anotações seja mantido para que se possa fazer o registro das falas e momentos da situação didática que indiquem progresso na aprendizagem, ou casos considerados objetos de comentários na fase de institucionalização.

Explicita-se, a seguir, cada uma das atividades, orientando a prática do professor e mencionando as possíveis dificuldades que os alunos possam encontrar nesta etapa, ao realizá-la. Aconselha-se que, novamente, seja distribuída uma sequência de atividades para cada aluno, a fim de possibilitar a análise das formulações e linguagem matemática de cada um, individualmente.

O objetivo desta sequência é consolidar o conceito de probabilidade em espaços contínuos por meio da analogia e dos modelos implícitos dos alunos, trabalhados na 1ª e 2ª sequências de atividades. A terceira sequência de atividade possibilitará que o saber, em via de constituição, seja formulado e validado pelos alunos.

Evidenciam-se, a seguir, algumas das atividades desta etapa, orientando a prática do professor e mencionando as possíveis dificuldades que os alunos possam encontrar ao realizá-las.

ATIVIDADE 10

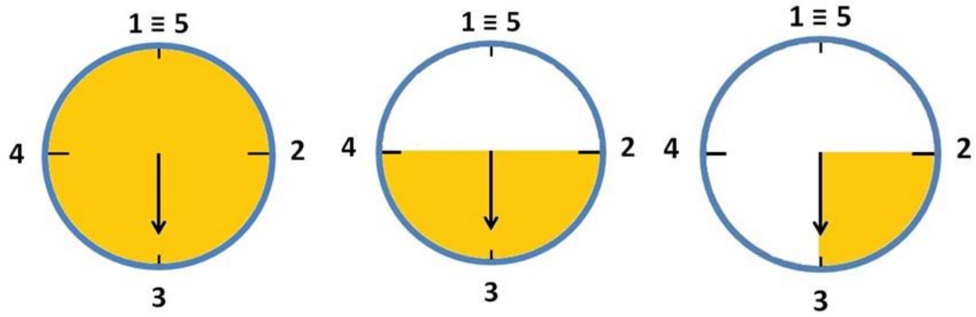


DE QUAIS CONHECIMENTOS SEUS ALUNOS PRECISAM?

A realização da atividade 10 exigirá dos alunos conhecimentos sobre geometria e cálculo. Além de probabilidade e de noções de distribuição de probabilidade em espaços contínuos. Esta atividade pretende possibilitar que os alunos percebam que a probabilidade da ocorrência de um evento, quando ocorrido em espaços amostrais contínuos, equivale a área delimitada por uma função e pelos eixos coordenados do plano cartesiano. Nela, a atividade 4 é retomada, a fim de se fazer emergir discussões acerca do cálculo de probabilidade, tanto em espaços amostrais discretos, quanto em espaços amostrais contínuos. Para isso, é feito o uso de analogias por meio de representações gráficas. Em seguida, apresenta-se a atividade 10, assim como sua respectiva solução:

10) Você se lembra que na atividade um experimento era feito de modo que ao girar o ponteiro, com origem no centro da circunferência, e que este parava em qualquer ponto da circunferência?

Figura 14 — Circunferências com partes de sua área preenchida

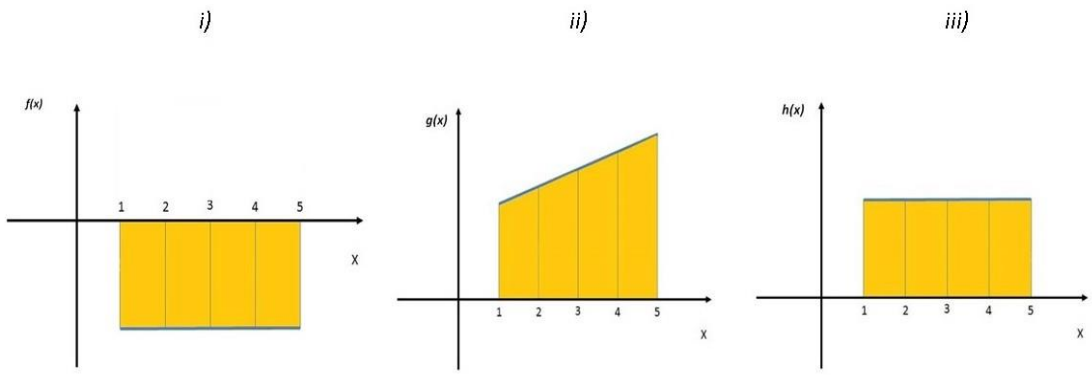


Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Sabendo que a probabilidade é distribuída uniformemente no intervalo [1, 5]:

a) Assinale o gráfico da função que melhor representa a distribuição de probabilidade desse experimento no intervalo [1, 5].

Figura 15 — Opções gráficas do item *a*



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

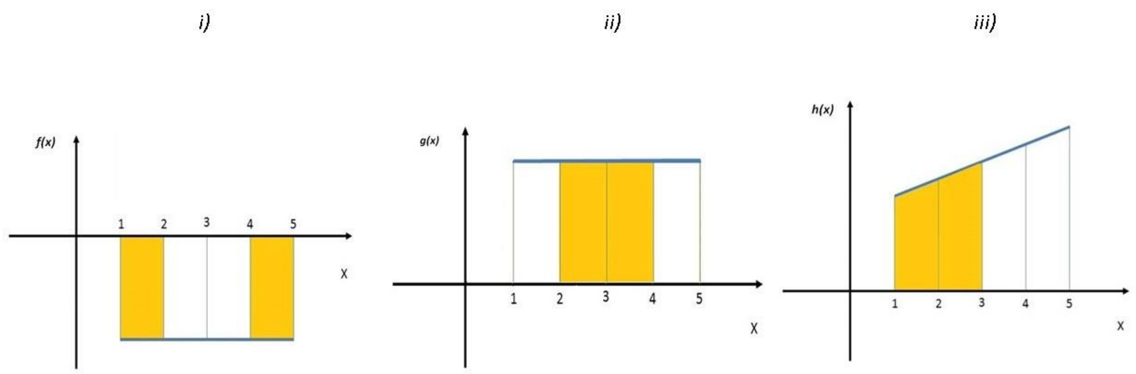
Solução: o gráfico que melhor representa a distribuição de probabilidade desse experimento no intervalo [1, 5] é o apresentado no subitem *iii*.

ATENÇÃO PROFESSOR

Todas as figuras gráficas possuem área total preenchida. No entanto, representam diferentes tipos de funções: constante positiva, constante negativa e crescente. Como o espaço amostral deste fenômeno probabilístico é composto por eventos equiprováveis, espera-se que os alunos associem o cálculo da probabilidade de ocorrência do evento mencionado no intervalo [1, 5] com a área da região delimitada pela função constante positiva do subitem *iii*.

b) Assinale o gráfico da função que melhor representa a distribuição de probabilidade desse experimento no intervalo [2, 4].

Figura 16 — Opções gráficas do item *b*



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

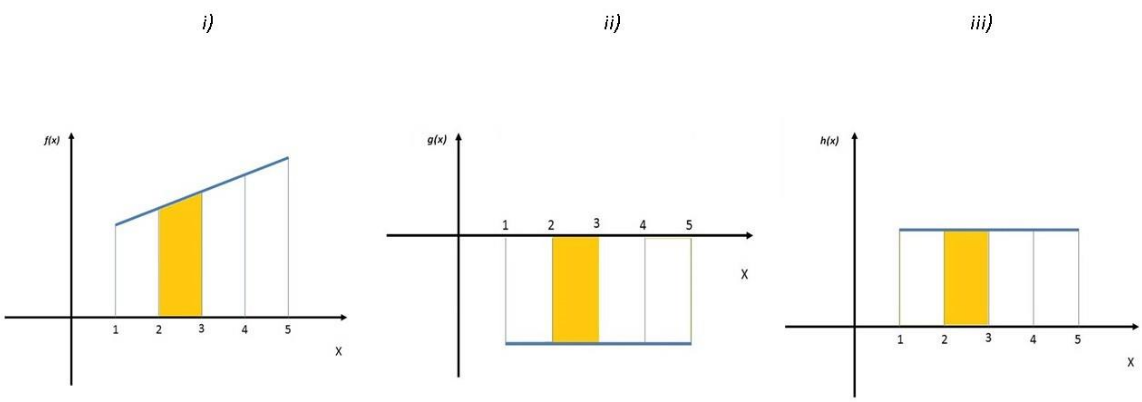
Solução: o gráfico que melhor representa a distribuição de probabilidade desse experimento no intervalo [2, 4] é o apresentado no subitem *ii*.

ATENÇÃO PROFESSOR

As figuras gráficas representam diferentes tipos de funções: constante positiva, constante negativa e crescente. Como o espaço amostral deste fenômeno probabilístico é composto por eventos equiprováveis, espera-se que os alunos associem o cálculo da probabilidade com a área da região delimitada pela função constante positiva do subitem *ii,* já que apenas este apresenta o gráfico de uma função constante, positiva, sob o intervalo [2, 4]. Note que as regiões internas preenchidas nos demais gráficos não estão sob o intervalo [2, 4].

c) Assinale o gráfico da função que melhor representa a distribuição de probabilidade desse experimento no intervalo [2, 3].

Figura 17 — Opções gráficas do item *c*



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

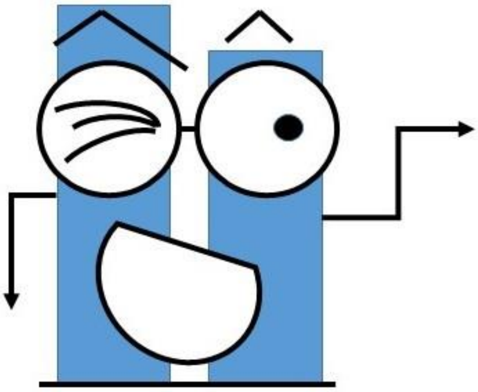
Solução: o gráfico que melhor representa a distribuição de probabilidade desse experimento no intervalo [2, 3] é o apresentado no subitem *iii*.

ATENÇÃO PROFESSOR

As figuras gráficas representam diferentes tipos de funções: constante positiva, constante negativa e crescente. Como o espaço amostral deste fenômeno probabilístico é composto por eventos equiprováveis, espera-se que os alunos associem o cálculo da probabilidade com a área da região delimitada pela função constante positiva do subitem *iii*. Já que apenas este apresenta o gráfico de uma função constante, positiva, sob o intervalo [2, 3].

d) Qual é a figura geométrica delimitada pelos eixos cartesianos assinalada nos itens *a*, *b* e *c*? É possível perceber alguma relação dessa figura com o cálculo de probabilidade? Justifique sua resposta.

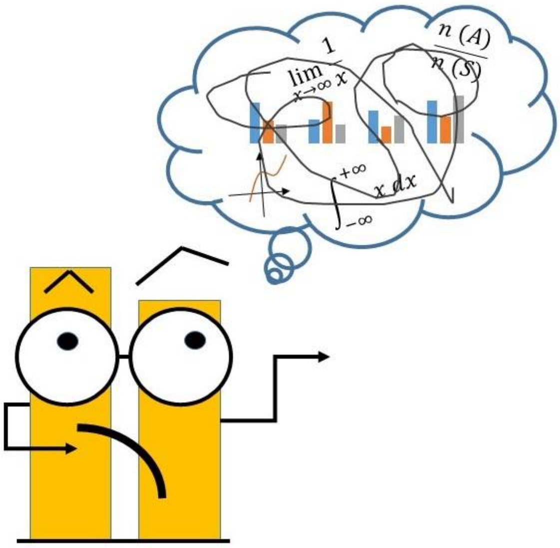
Solução: a figura geométrica delimitada pelos eixos coordenados nos itens *a*, *b* e *c* é um retângulo. A relação que estas figuras possui com o cálculo de probabilidade está no fato de que este pode ser determinado pela área da região delimitada pela função constante positiva apresentada e pelos intervalos determinados em cada um de seus respectivos itens. Ou ainda que a probabilidade solicitada equivale a área de cada um dos respectivos retângulos.



MEDIANDO A SITUAÇÃO

Nesta atividade é importante questionar os alunos sobre as propriedades da função densidade de probabilidade. Listamos alguns questionamentos como sugestão para serem discutidos:

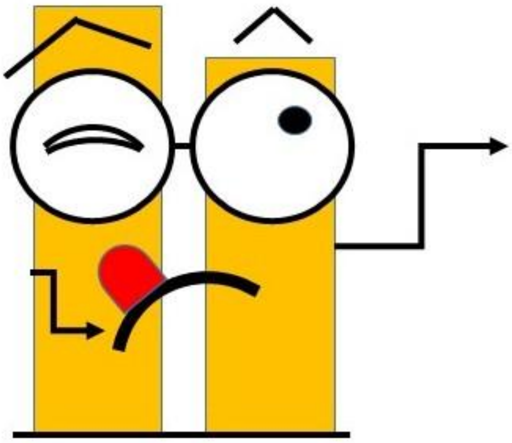
- Se os eventos descritos são equiprováveis, é possível demonstrar que a função densidade de probabilidade que representa o fenômeno mencionado nesta atividade seja uma função constante ou afim?
- Você consegue perceber alguma semelhança entre as regiões preenchidas no interior dos círculos da atividade 4 com as regiões delimitadas pelas funções desta atividade e os eixos cartesianos?
- Observando as partes em que as figuras desta atividade foram divididas e as partes preenchidas, qual é a associação que se pode fazer entre ambas? Os valores da probabilidade de ocorrência dos eventos mencionados estão associados às regiões preenchidas? Se sim, esse valor pode ser negativo? Por quê?



FIQUE ATENTO ÀS DIFICULDADES

Os alunos poderão enfrentar dificuldades em realizar esta atividade se não associarem o cálculo de probabilidade em espaços contínuos com o valor de uma medida de área. Espera-se que os alunos adquiram essa percepção na 1ª etapa da situação didática, ao realizar a 1ª sequência de atividades. No entanto, se essas percepções forem adquiridas de maneira equivocada, é possível que a associação citada não ocorra. As ferramentas matemáticas utilizadas para resolver essa atividade estão associadas a área de uma figura geométrica e/ou integrais de funções.

ATIVIDADE 11

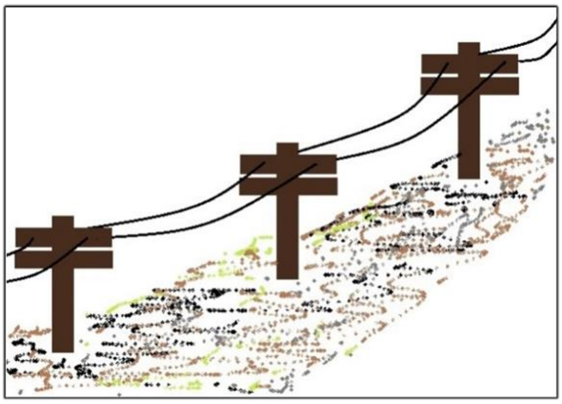


DE QUAIS CONHECIMENTOS SEUS ALUNOS PRECISAM?

A realização da atividade 11 exigirá dos alunos noções de cálculo integral e/ou áreas de figuras planas. Exigirá também noções e conceitos relativos à distribuição de probabilidade. Seu principal objetivo é fazer com que os alunos validem parte do saber em via de constituição. Para isso, uma situação do dia a dia é apresentada e os alunos devem determinar a probabilidade da ocorrência de um evento em que as variáveis do fenômeno apresentado assumam valores contínuos. A atividade exige a criação da representação gráfica da função que modela este fenômeno probabilístico. Certamente, os modelos desenvolvidos pelos alunos permitirão com que os mesmos solucionem esta atividade de duas maneiras: utilizando o cálculo de integral ou de área de figuras planas. A seguir, apresenta-se a atividade 11, assim como sua respectiva solução.

11) Em uma rede telefônica de 10 Km de comprimento foi constatado que a probabilidade de ocorrer panes no intervalo [0,10] da rede é distribuída igualmente. Sendo assim:

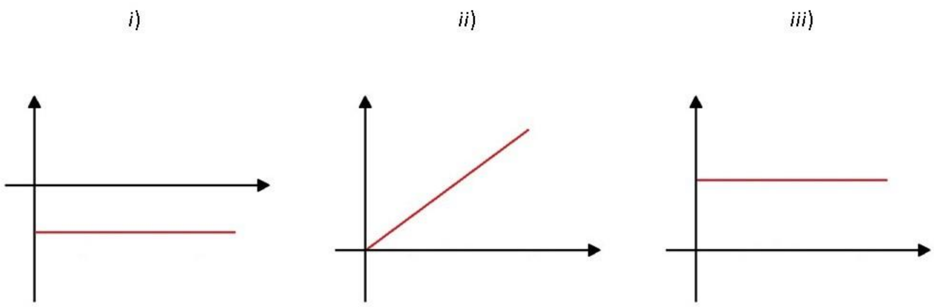
Figura 18 — Representação figural da Atividade 11



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

a) Identifique as variáveis nos eixos e aponte qual é a função que melhor explica esse fenômeno no respectivo intervalo. **Justifique sua resposta.**

Figura 19 — Opções gráficas da Atividade 11



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Solução: como a probabilidade de ocorrência de pane no intervalo [0, 10] da rede telefônica é distribuída igualmente, segundo o enunciado, então o gráfico que representa a distribuição de probabilidade deste fenômeno descreve uma função constante e positiva. Assim, o gráfico que melhor representa o fenômeno mencionado, encontra-se no subitem *iii*. Por se tratar de um fenômeno que ocorre nos espaços contínuos, a função que o representa concerne a uma função densidade de probabilidade (fdp). Tal fato impossibilita a nomeação da variável no eixo Y, da maneira como foi feito nas atividades de 5 a 7, ao passo que, nesse caso, o eixo X representa a variável “comprimento da rede telefônica”.

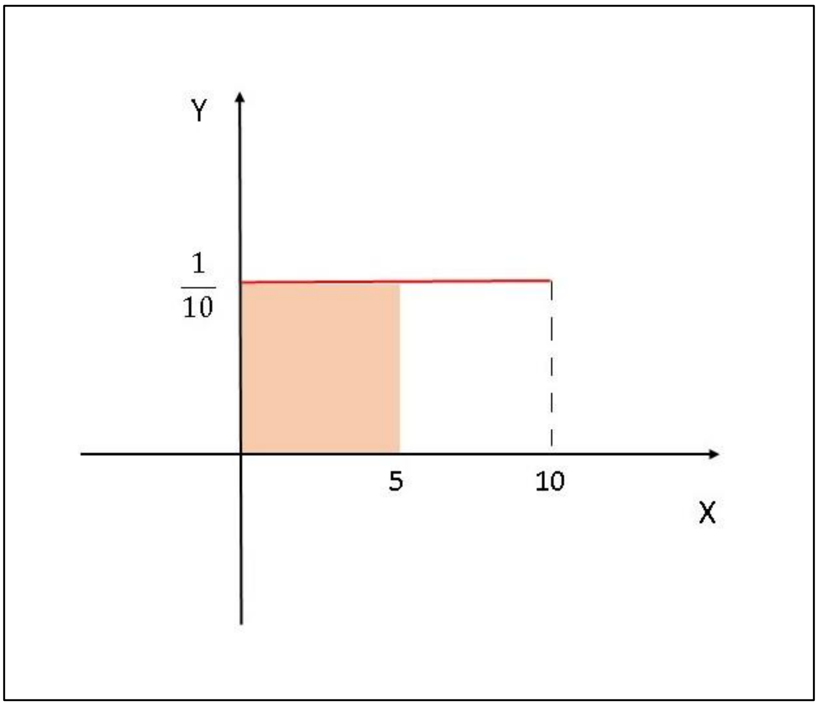
ATENÇÃO PROFESSOR

A impossibilidade de nomeação da variável Y nesta atividade exprime o fato de que a função, que descreve o fenômeno probabilístico mencionado, consiste de uma função densidade de probabilidade (fdp). Com efeito, o valor da probabilidade de ocorrência do evento em cada um de seus intervalos é determinado por sua integral, não pelos valores que a função assume no eixo Y, como ocorre na função probabilidade.

b) Com base no item anterior, represente graficamente a função que modela o fenômeno probabilístico de ocorrer uma pane no intervalo [0, 5] da rede telefônica.

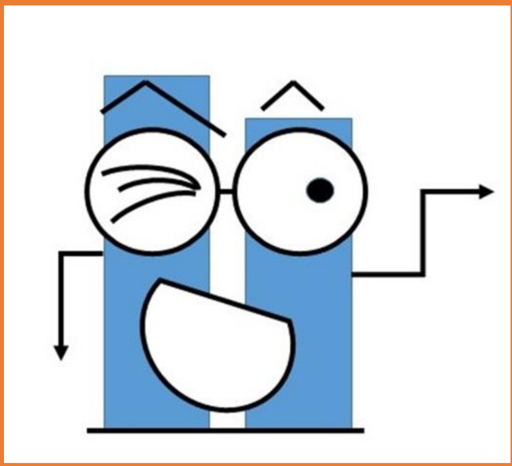
Solução:

Figura 20 — Representação gráfica da função que modela o fenômeno do item *b*



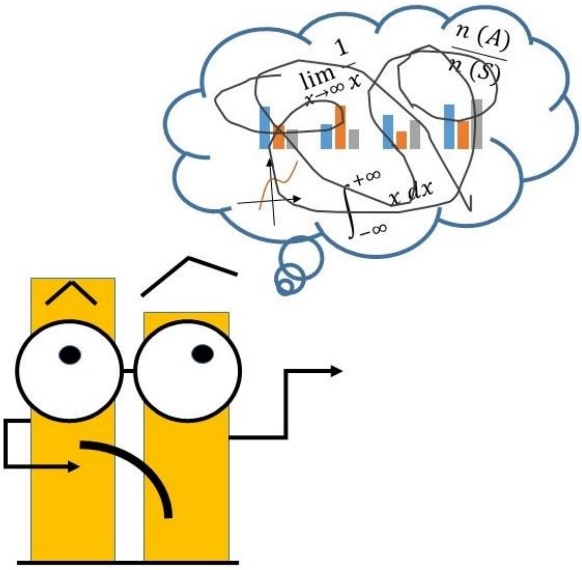
Fonte — Produzido pelos autores (2019).

MEDIANDO A SITUAÇÃO



Nesta atividade, o professor deve estimular a criação de uma função capaz de modelar o fenômeno mencionado. Você poderá questionar os alunos com as seguintes perguntas:

- Se a probabilidade de o evento descrito ocorrer no intervalo [0, 10] é distribuída igualmente na rede telefônica, é mais provável que a função densidade de probabilidade que representa o fenômeno mencionado nesta atividade seja uma função constante ou afim? Ela poderá assumir valores negativos no contradomínio? Por quê?
- Com base nas atividades realizadas até então, a área total delimitada pelo gráfico que representa este fenômeno e seus eixos coordenados deve resultar em que valor? E na metade da rede telefônica, qual é a probabilidade de que uma pane ocorra, se no dobro deste intervalo esta probabilidade equivale a 1?
- Se a área total delimitada pelo gráfico da função e pelos eixos coordenados deve ser igual a 1, qual deverá ser a altura máxima da figura formada no plano cartesiano. Então, qual deverá ser o valor máximo que esta função deve assumir?
- Quais seriam os intervalos em X e Y que a função que modela este fenômeno assumiria no item *a*? E no item *b*? Pense na área da figura formada para responder este item.

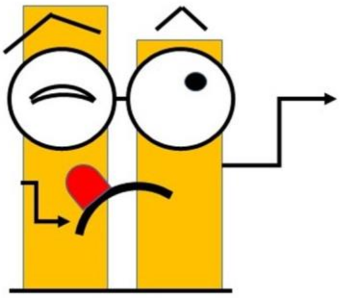


FIQUE ATENTO ÀS DIFICULDADES

Os alunos poderão ter dificuldades em não interpretar o fenômeno descrito por esta atividade como uma distribuição de probabilidade. Além disso, o termo “distribuída igualmente” utilizado na atividade pode não os remeter a uma representação gráfica a partir de uma função constante. O pouco conhecimento de cálculo e o mau desempenho na 2ª etapa da situação didática poderá ser um obstáculo para a realização desta atividade, pois a realização do item *b* requer conceitos construídos por meio da realização bem-sucedida da 2ª sequência de atividades.

ATIVIDADE 12

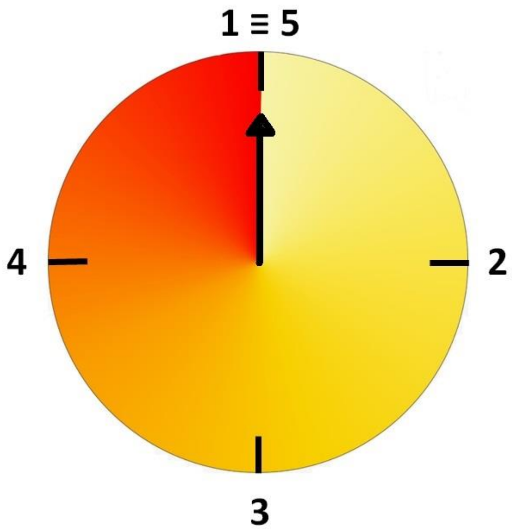
DE QUAIS CONHECIMENTOS SEUS ALUNOS PRECISAM?



A atividade 12 exigirá dos alunos conhecimentos relativos à geometria analítica, noções de cálculo e de probabilidade em espaços amostrais discretos. Poderão ser utilizados também, como ferramenta matemática, o cálculo integral, área de figuras planas e semelhança de figuras planas. Seu objetivo é consolidar o conceito de probabilidade em espaços amostrais contínuos e possibilitar que os alunos validem suas conjecturas acerca do objeto matemático que se pretende consolidar. A ideia principal é fazer com que eles construam uma função capaz de modelar o fenômeno descrito no enunciado da atividade e, a partir da percepção de que a probabilidade em espaços amostrais contínuos pode ser expressa como o valor de uma área, calculem o valor da área delimitada por essa função e pelos eixos coordenados. Esse cálculo também poderá ser realizado utilizando ferramentas matemáticas como: área de figuras planas e semelhança de figuras planas. Decerto, se os objetivos da primeira e segunda sequências de atividades forem alcançados, os alunos, mediados pelo professor, não terão muitas dificuldades em realizar esta atividade. É possível que surja, na construção deste gráfico, duas figuras geométricas: o triângulo ou o trapézio. O cálculo de probabilidade será realizado com mais dificuldades se a figura geométrica construída for um trapézio, devido às variáveis necessárias para se calcular sua área. Apresenta-se a seguir a atividade 12, assim como sua respectiva solução.

12) Considere um novo experimento em que o ponteiro seja girado, no sentido horário, de sorte que a probabilidade dele parar aumente a uma taxa constante no intervalo [1, 5], à medida que ele percorre a circunferência, a partir do ponto 1. Sendo assim, esboce graficamente no plano cartesiano a distribuição de probabilidade deste evento no intervalo [1, 5] e responda:

Figura 21 — Representação figural do experimento da Atividade 12

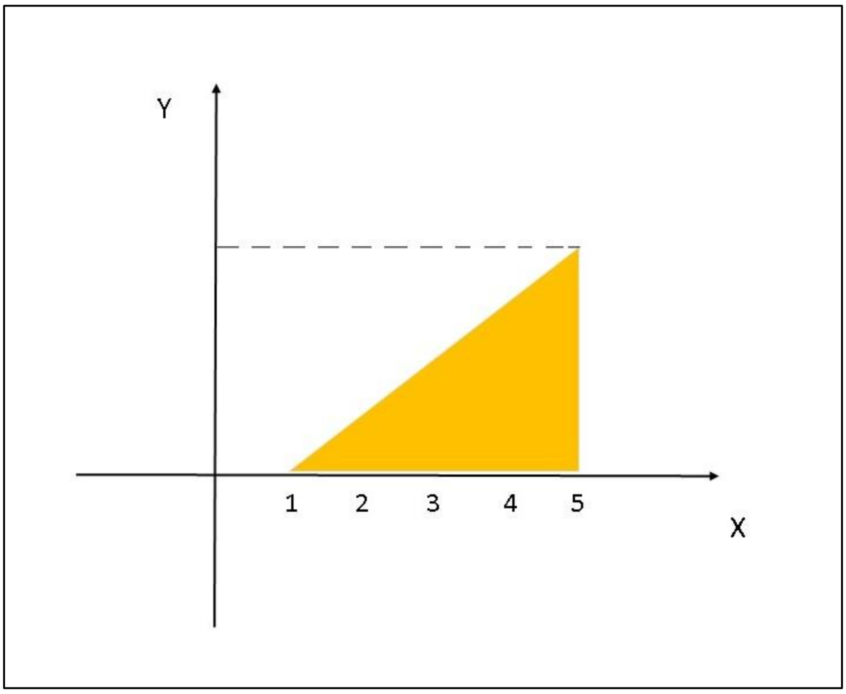


Fonte — Produzido pelos autores (2019).

a) Qual tipo de função melhor representa o gráfico obtido a partir do esboço desta distribuição de probabilidade? É possível que essa função assuma valores negativos? Justifique sua resposta.

Solução:

Figura 22 — Solução gráfica do item *a* da Atividade 12



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

A função que melhor representa o gráfico a partir do esboço desta distribuição de probabilidade é uma função afim, que possui uma taxa constante de crescimento (quando é uma função crescente). O cálculo de probabilidade é representado por meio de áreas. Por conseguinte, esta função será sempre positiva, assim como sua integral.

ATENÇÃO PROFESSOR

O esboço da distribuição de probabilidade como solução apresentado nesta atividade é indicado como uma resposta mais adequada para o uso das ferramentas formais no cálculo de probabilidade em espaços contínuos. No entanto, é possível que os alunos construam essa distribuição de outra maneira, de modo que satisfaça todas as condições de uma fdp e validem suas respostas. O professor deve estar atento para reconhecer e não invalidar as construções que não condizem com a solução aqui apresentada, mas que também são válidas.

b) Qual figura geométrica delimitada pelos eixos cartesianos foi encontrada no esboço do gráfico? Há alguma relação da mesma com o cálculo de probabilidade? **Justifique sua resposta.**

Solução: as figuras encontradas podem ser um triângulo ou um trapézio. O cálculo de probabilidade de ocorrência do evento mencionado em cada um de seus intervalos, deve corresponder à área (região interna preenchida das respectivas figuras) acima destes intervalos. O caso ilustrado na presente obra ilustra como solução uma figura triangular.

c) De acordo com seu esboço gráfico, qual é o maior e menor valor que a função pode assumir? É possível determinar sua lei a partir dessa representação gráfica da distribuição de probabilidade? **Justifique sua resposta.**

Solução: sabendo que a área total do triângulo esboçado deve ser igual a 1, cumpre construir uma função em que seu valor máximo corresponda à altura deste triângulo. Sua base corresponde ao intervalo [1, 5], medindo 4 unidades de comprimento. Assim, sabendo que a reta x = 5 é perpendicular ao eixo coordenado X, pode-se encontrar sua altura relativa a este eixo utilizando a fórmula da área do triângulo. Assim:

$$\text{área} = \frac{\text{base x altura}}{2}$$

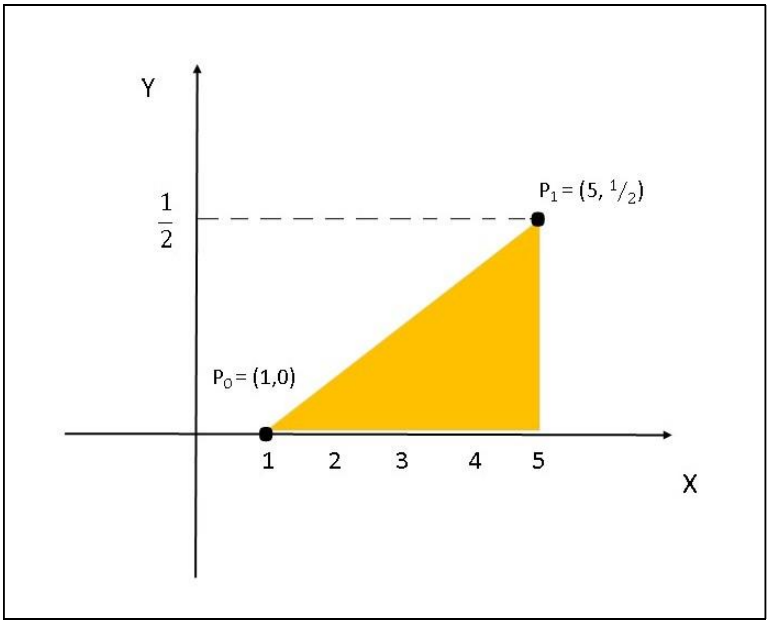
$$1 = \frac{4 \text{ x altura}}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \text{altura}$$

Assim, encontram-se os valores mínimo e máximo para a função. Estes valores correspondem a 0 e $\frac{1}{2}$, respectivamente. Para se determinar sua lei, basta que se utilize a equação da reta para construí-la, a partir dos pontos $P_0 = (1, 0)$ e $P_1 = (5, {}^{1}/_{2})$. Nesse sentido, calcula-se primeiramente seu coeficiente angular:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y1 - y0}{x1 - x0} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{5 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$$

Figura 23 — Representação gráfica da construção da função *f*(x)



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Agora, utilizando a equação da reta, obtêm-se a lei da função:

$$y - y_0 = a\ (x - x_0)$$

$$y - 0 = \frac{1}{8}\ (x - 1)$$

$$y = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}$$

d) É possível determinar a probabilidade do evento ocorrer no intervalo [1, 5]? E no intervalo [1, 3]? Caso seja possível, determine a probabilidade de o evento ocorrer nestes intervalos.

Solução: Como a probabilidade do evento ocorrer no intervalo [1, 5] corresponde a área delimitada pela função $f(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}$ e pelo intervalo [1,5], pode-se calcular a probabilidade do evento ocorrer neste intervalo por meio da integral $\int_1^5 f(x)dx$. Desta maneira:

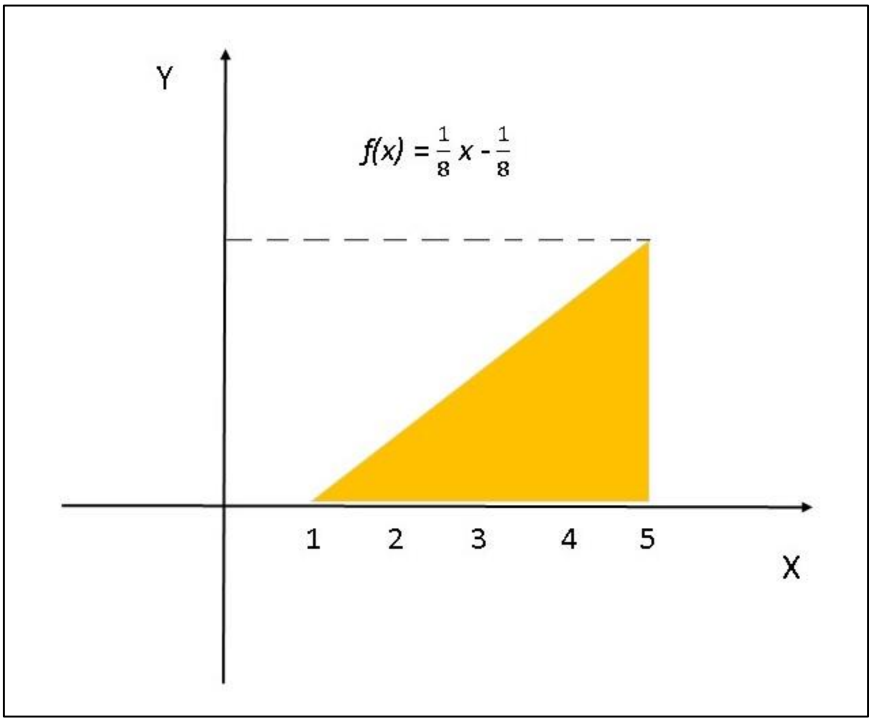
Figura 24 — Cálculo integral da função *f*(x) no intervalo [1, 5]

$$\int_1^5 \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\,dx = \int_1^5 \frac{1}{8}\,(x - 1)\,dx = \frac{1}{8}\int_1^5 (x - 1)\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2} - x\ \Big|_1^5\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{5^2}{2} - 5 - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right)\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{25}{2} - 5 - \frac{1}{2} + 1\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{24}{2} - 4\right] = \frac{1}{8}[8] = 1$$

Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Figura 25 — Representação gráfica da probabilidade do item *d* no intervalo [1, 5]



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Analogamente, a probabilidade de o evento ocorrer no intervalo [1, 3] pode ser calculada por meio da integral $\int_1^3 f(x)dx$. Desta maneira:

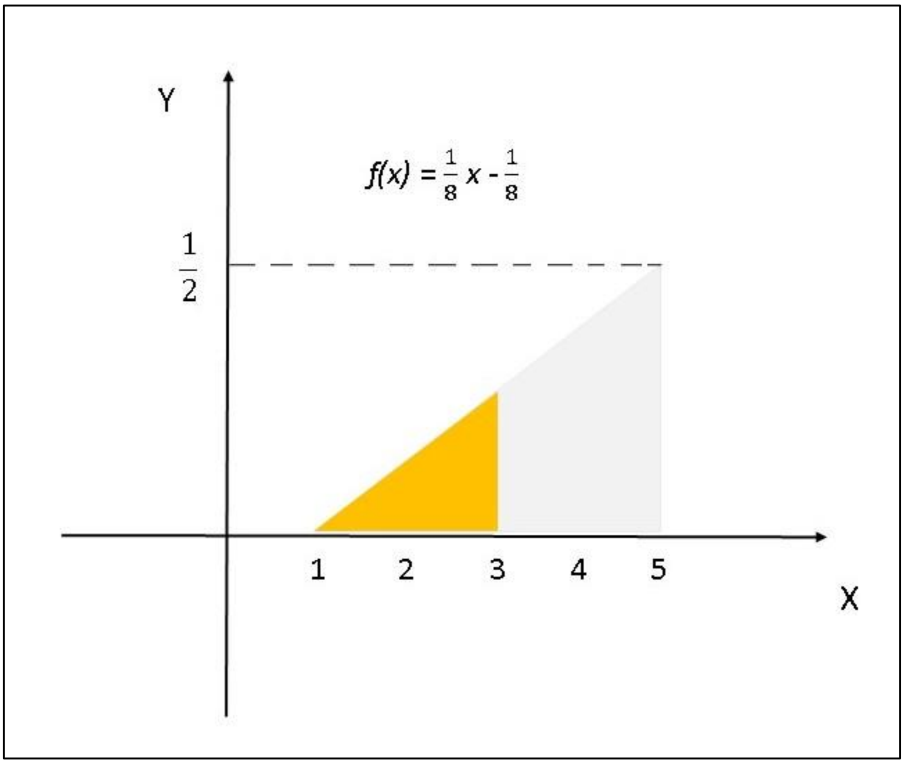
Figura 26 — Cálculo integral da função *f*(x) no intervalo [1, 3]

$$\int_1^3 \frac{1}{8}\,x - \frac{1}{8}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{8}(x - 1)\,dx = \frac{1}{8}\int_1^3 (x - 1)\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2} - x\ \Big|_1^3\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{3^2}{2} - 3 - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right)\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{8}{2} - 2\right] = \frac{1}{8}\,[2] = \frac{1}{4}$$

Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Figura 27 — Representação gráfica da probabilidade do item *d* no intervalo [1, 3]



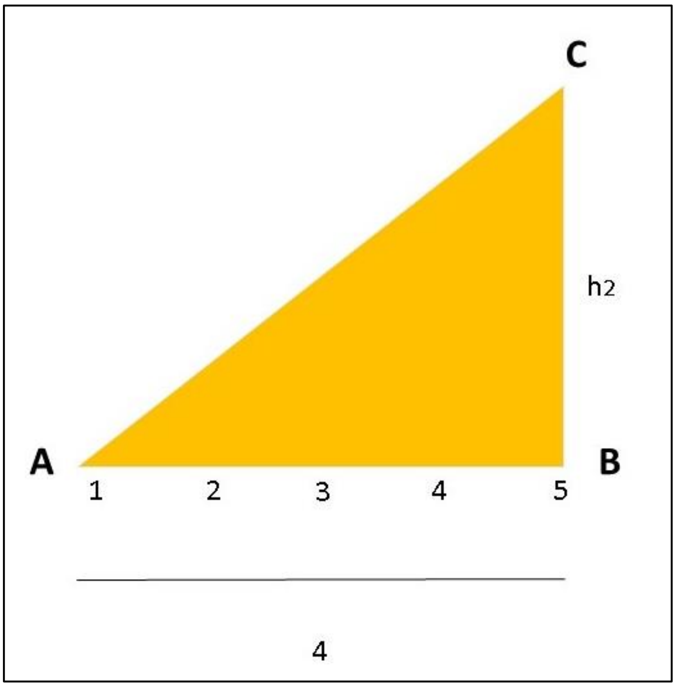
Fonte — Produzido pelos autores (2019).

Outra maneira de resolver essa atividade, sem utilizar o conteúdo de função é utilizando semelhança de triângulos. Pode-se observar que a probabilidade do evento mencionado ocorrer no intervalo [1,5] equivale a área do triângulo ABC e é igual a 1. Assim, sabendo que o ângulo b equivale a 90º, e utilizando a fórmula de área do triângulo, temos:

$$\frac{4\ x\ h2}{2} = 1 \rightarrow h_2 = \frac{1}{2}$$

Logo, a altura do triângulo ABC equivale a $\frac{1}{2}$.

Figura 28 — Triângulo ABC



Fonte: Produzido pelos autores (2019).

Verifica-se que os triângulos ABC e ADE são semelhantes pela condição de possuírem seus três ângulos internos congruentes (veja figura 28). Assim, obtém-se a seguinte equivalência:

$$\frac{2}{h1} = \frac{4}{h2}$$

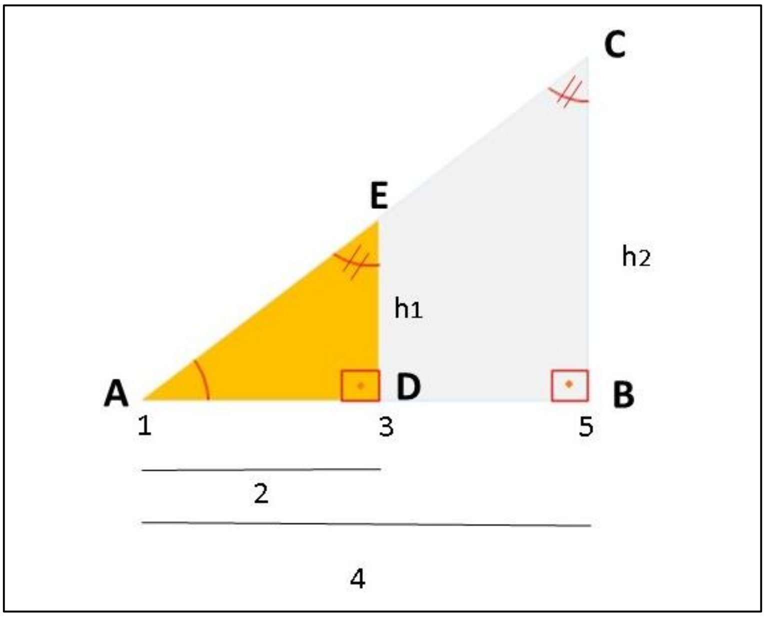
Substituindo o valor de h_2 na equação acima, obtemos o valor de h_1.

$$\frac{2}{h1} = \frac{4}{\frac{1}{2}} \rightarrow h_1 = \frac{1}{4}$$

Agora que se sabe também o valor da altura do triângulo ADE, pode-se calcular sua área, que equivale à probabilidade de o evento ocorrer no intervalo [1, 3]. Sabendo que o ângulo d equivale a 90º, e utilizando a fórmula de área do triângulo, tem-se:

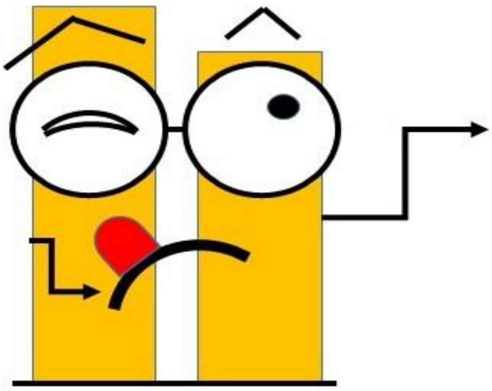
$$\frac{2\ x\ \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4}$$

Figura 29 — Triângulos ABC e ADE



Fonte — Produzido pelos autores (2019).

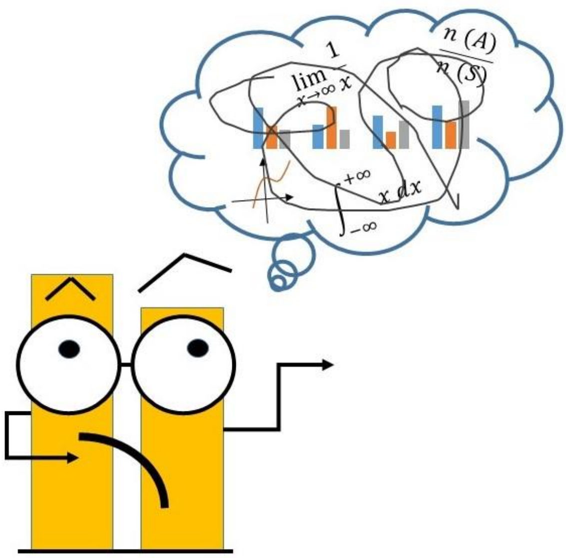
Desta maneira, conclui-se que a probabilidade de o evento ocorrer no intervalo [1, 5] equivale a 1, e a probabilidade do evento ocorrer no intervalo [1, 3] equivale a $\frac{1}{4}$.



MEDIANDO A SITUAÇÃO

Nesta última atividade, o professor deve auxiliar seus alunos a validar o conceito de probabilidade em espaços contínuos, a partir dos conhecimentos adquiridos por eles no decorrer da realização da situação didática. Assim, vale fazê-los refletir sobre as seguintes questões:

- Que tipo de função possui a mesma característica do experimento mencionado por esta atividade (aumenta a uma taxa constante). Se delimitada pelos eixos coordenados e pelo intervalo do domínio [1, 5] ela pode ser representada por figuras geométricas planas. Quais seriam? Quais delas poderá facilitar o cálculo de sua área (ou da probabilidade)? Por quê?
- O maior e menor valor que esta figura (ou gráfico) pode assumir está associado à sua altura. Pensando na área desta figura, como se pode determinar sua altura?
- Sabendo que o valor da probabilidade em espaços contínuos pode ser obtido por meio do cálculo de área, quais seriam as possíveis ferramentas que se poderia utilizar para isto? Utilize a que você achar mais apropriada.



FIQUE ATENTO ÀS DIFICULDADES

Os alunos poderão encontrar dificuldades em desenvolver esta atividade se não conhecerem o conceito de taxa de crescimento de uma função ou coeficiente angular. Além disso, o conhecimento de alguns conceitos geométricos e de cálculo podem impedir que eles construam a figura ou função solicitada, e consequentemente não realizem os cálculos probabilísticos solicitados. Já que estes dependem do uso de integrais ou de fórmulas geométricas para o cálculo de área.

7

QUARTA ETAPA DA SITUAÇÃO DIDÁTICA

7 QUARTA ETAPA DA SITUAÇÃO DIDÁTICA

Agora é a vez de retomar a ação e institucionalizar o saber probabilístico. É nesta etapa que você, caro colega, deve fazer as considerações necessárias, apresentação e formalização de alguns conceitos matemáticos, com o objetivo final de sistematizar e consolidar o conceito de probabilidade em espaços contínuos. Assim, esta fase da situação didática, chamada de institucionalização, pretende-se socializar as produções e construções feitas por cada grupo, a fim de promover discussões e identificar as possíveis dúvidas que seus alunos tenham com relação aos conteúdos trabalhados no decorrer da realização da situação didática.

Esta etapa deve ser desenvolvida a partir das ponderações feitas, no caderno de anotações, e por seus alunos nas 1ª, 2ª e 3ª etapas da situação didática. As suas anotações servirão para nortear os objetos de comentário e revisão nesta fase. Recomenda-se que esta etapa seja dividida em 3 blocos, para uma maior motivação e satisfação dos alunos, e que as atividades sejam comentadas em ordem crescente. No entanto, você tem a liberdade de conduzi-la como achar conveniente: realizando e respondendo perguntas, comentando produções e sistematizando o conhecimento.

Sugerem-se que os grupos formados na situação didática sejam mantidos com os mesmos membros, para possibilitar uma discussão mais próxima entre os membros de cada grupo, os quais devem construir de forma colaborativa o conhecimento.

Nos tópicos seguintes, a fase de institucionalização é dividida em três blocos:

- **Institucionalização – Parte I:** neste bloco, propõem-se alguns conceitos matemáticos que devem ser trabalhados com seus alunos e são de suma importância para a realização da 1ª sequência de atividades e para a consolidação do conceito de probabilidade em espaços discretos e infinito.
- **Institucionalização – Parte II:** neste bloco, elucidam-se alguns conceitos matemáticos que devem ser trabalhados e são de suma importância

para a realização da 2ª sequência de atividades e para a consolidação do conceito de distribuição de probabilidade contínua e função densidade de probabilidade (fdp).

- **Institucionalização – Parte III:** neste bloco, explicitam-se alguns conceitos matemáticos que devem ser trabalhados e são de suma importância para a realização da 3ª sequência de atividades e para a consolidação do conceito de probabilidade em espaços contínuos.

Apresentam-se, a seguir, os principais conteúdos que devem ser trabalhados nesta fase de institucionalização e as fontes que podem ser pesquisadas a fim de se obter uma fundamentação matemática para sua condução.

INSTITUCIONALIZAÇÃO – PARTE I

Nesta parte da fase de institucionalização, o professor poderá discutir assuntos explorados no desenvolvimento da 1ª etapa da situação didática. Assim, além das principais ideias registradas nas observações, os registros escritos dos alunos, ao realizarem a 1ª sequência de atividades, devem fundamentar seu desenvolvimento.

Recomendam-se os seguintes tópicos como indispensáveis para a institucionalização do conceito de probabilidade em espaços contínuos, nesta primeira etapa:

I) Ferramentas de contagem e conjuntos discretos:
II) Propriedades de probabilidade em espaços amostrais discretos
III) Conjuntos finitos e infinitos: método de exaustão

As atividades de 1 a 4 exigem dos alunos noções de contagem, conceito de conjuntos discretos e propriedades de probabilidade em espaços amostrais discretos. A noção de conjuntos finito e infinito será exigida na atividade 4. Por isso, é importante que o professor demonstre e discuta tais conceitos junto aos seus alunos. Abaixo, listam-se algumas sugestões de obras que podem auxiliá-lo a planejar esta parte da fase de institucionalização.

Livros:

- HAZZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar–vol. 5. São Paulo: Atual, 1996.
- STEWART, Ian. O fantástico mundo dos números: A matemática do zero ao infinito. Zahar, 2016.
- STEWART, James. Cálculo, volume I. Tradução: Antonio Carlos Moretti, 2006.

- TANAKA, Oswaldo K.; PEREIRA, Wilson. Estatística: conceitos básicos. São Paulo: Makron Books, 1990.

Vídeo:

- Enumerabilidade de Conjuntos: https://www.youtube.com/watch?v=cLwm8lV6kfY
- O que é cardinalidade? https://www.youtube.com/watch?v=H76yyBWOcdQ

INSTITUCIONALIZAÇÃO – PARTE II

Nesta parte da fase de institucionalização, o professor poderá discutir assuntos explorados no desenvolvimento da 2ª etapa da situação didática. Assim, além das principais ideias registradas nas observações, os registros escritos dos alunos, ao realizarem a 2ª sequência de atividades, devem fundamentar seu desenvolvimento.

Recomendam-se os seguintes tópicos como indispensáveis para a institucionalização do conceito de probabilidade em espaços contínuos, nesta segunda etapa:

I) Domínio e Contradomínio de uma função
II) Tipos de função
III) Função crescente e decrescente
IV) Distribuição de probabilidade contínua

As atividades de 5 a 7 exigem dos alunos noções de domínio e contradomínio de uma função, tipos de função, função crescente e decrescente. A atividade 5 pode ser trabalhada como software Geogebra, por meio do método de interpolação linear. Nas atividades de 8 a 9, além das citadas anteriormente, exigem também uma noção implícita, ou em via de construção, do conceito de distribuição de probabilidade contínua. Por isso, é importante que o professor demonstre e discuta tais conceitos junto aos seus alunos.

Abaixo, listam-se algumas sugestões de obras que podem auxiliá-lo a planejar esta parte da fase de institucionalização.

Livros:

- BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. Modelagem matemática no ensino. Editora Contexto, 2002.
- SARTIM, Ademir. Matemática Básica – vol. 1. Espírito Santo: Edufes, 2018.
- TANAKA, Oswaldo K.; PEREIRA, Wilson. Estatística: conceitos básicos. São Paulo: Makron Books, 1990.

Programa Computacional:

- Geogebra – método de interpolação linear

Vídeo:

- Método de interpolação no Geogebra: https://www.youtube.com/watch?v=IwBL7E1pg1c

INSTITUCIONALIZAÇÃO – PARTE III

Nesta parte da fase de institucionalização, o professor poderá discutir assuntos explorados no desenvolvimento da 3ª etapa da situação didática. Assim, além das principais ideias registradas nas observações, os registros escritos dos alunos, ao realizarem a 3ª sequência de atividades, devem fundamentar o desenvolvimento da mesma.

Recomendam-se os seguintes tópicos como indispensáveis para a institucionalização do conceito de probabilidade em espaços contínuos, nesta terceira etapa:

I) Função densidade de probabilidade
II) Propriedades da função densidade de probabilidade

As atividades de 10 a 12 exigem dos alunos conhecimentos relativos à função densidade de probabilidade e suas propriedades, ainda que em via de constituição. Logo, o professor deve se preparar para dirimir eventuais dúvidas que seus alunos possam vir a ter com relação ao conceito final atrelado a eles, e que se pretendeu ensinar no decorrer da situação didática: o conceito de probabilidade em espaços contínuos.

Em seguida, listam-se algumas sugestões de obras que podem auxiliá-lo a planejar esta parte da fase de institucionalização:

Livros:

- TANAKA, Oswaldo K.; PEREIRA, Wilson. Estatística: conceitos básicos. São Paulo: Makron Books, 1990.
- DEVORE, Jay L. Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências. Cengage Learning, 2010.

Vídeo:

- Função densidade de probabilidade: https://www.youtube.com/watch?v=tNMJLr1H_gA

8

CONCEITOS FORMAIS DE PROBABILIDADE

8 CONCEITOS FORMAIS DE PROBABILIDADE

Em nossa pesquisa, as apresentações e demonstrações formais ocorreram no quarto encontro, na fase de institucionalização. Nesta seção, foram trazidas as proposições que fundamentam os conteúdos trabalhados no decorrer da situação didática. Caso o leitor deseje mais detalhes sobre como ocorreram as discussões coletivas nesse encontro, é recomendado a leitura de ALVES (2019).

Neste capítulo, explicitam-se as formalizações de probabilidades retiradas da obra de Pereira e Tanaka (1990), além do Teorema da Probabilidade Total de James (2015).

NOÇÕES SOBRE CONJUNTOS

I) **Experimento Aleatório:** são aqueles cujos resultados não são sempre os mesmos, apesar de se repetirem várias vezes em condições semelhantes.

II) **Conjunto Universo ou Espaço Amostral (S):** é o conjunto formado por todos os eventos (E_i) possíveis de um experimento aleatório.

III) **Subconjunto:** dados dois conjuntos A e B, diz-se que B é subconjunto de A se, e somente se, todos os elementos que pertencem a B também pertencem a A.

IV) **Conjunto vazio:** é o conjunto que não contém elementos. Representa-se por {} ou $\emptyset$.

V) **Conjunto Finito:** é aquele que quantifica o número de elementos que o compõe.

VI) **Conjunto Infinito:** é aquele que não quantifica o número de elementos que o compõe.

VII) **Evento:** é qualquer subconjunto de um espaço amostral (S).

VIII) **Evento Simples:** é aquele formado por um único elemento do espaço amostral.

IX) **Evento Composto:** é aquele formado por mais de um elemento do espaço amostral.

X) **Evento Certo:** é aquele que ocorre em qualquer realização do experimento aleatório.

XI) **Evento Impossível:** é aquele que não ocorre em qualquer realização de um experimento aleatório.

XII) **Evento Complementar:** de um evento A qualquer, é o evento A^C (chamado complementar de A), tal que $A^C = S – A$, ou seja, é um outro conjunto formado pelos elementos que pertencem a S e não pertencem a A.

XIII) **Eventos Mutuamente Exclusivos ou Disjuntos ou Incompatíveis:** Supõe-se um experimento, cujo espaço amostral seja: S = {A, B}. Sabe-se que A e B são eventos aleatórios e não podem ocorrer simultaneamente. Neste caso a ocorrência de A exclui a ocorrência de B e vice-versa.

XIV) **Eventos Independentes:** diz-se que dois ou mais eventos são independentes quando eles não exercem ações recíprocas, comportando-se cada um de maneira que lhe é própria, sem influenciar os demais.

XV) **Eventos Condicionados:** quando se associam dois ou mais eventos a um experimento aleatório qualquer, diz-se que eles são condicionados ou vinculados, desde que o aparecimento de um evento A qualquer dependa do aparecimento de outro evento B do mesmo experimento

.

XVI) **Evento Soma:** Caso se associem dois eventos A e B a um experimento aleatório qualquer, e um destes ocorrer, diz-se que eles formam a união de conjuntos ou simplesmente Evento Soma.

XVII) **Evento Produto:** Caso se associem dois eventos A e B a um experimento aleatório qualquer, o evento produto ($A \cap B$ ou A X B) dos eventos aleatórios A e B é um outro conjunto formado pelos que pertencem a A e B, ou ambos.

OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS A PARTIR DE DEMONSTRAÇÕES GRÁFICAS

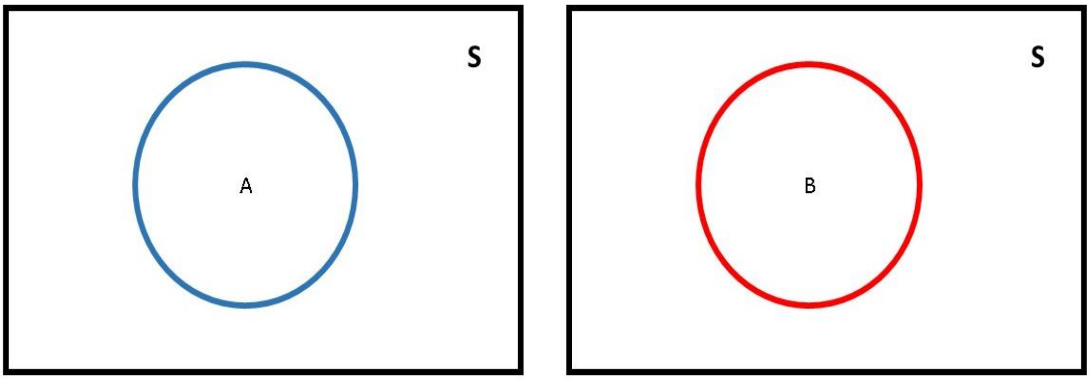
I) Conjunto Universo (S)

Figura 30 — Diagrama do Espaço Universo

Fonte — Pereira e Tanaka (1990).

II) Eventos

Figura 31 — Diagrama dos eventos A e B

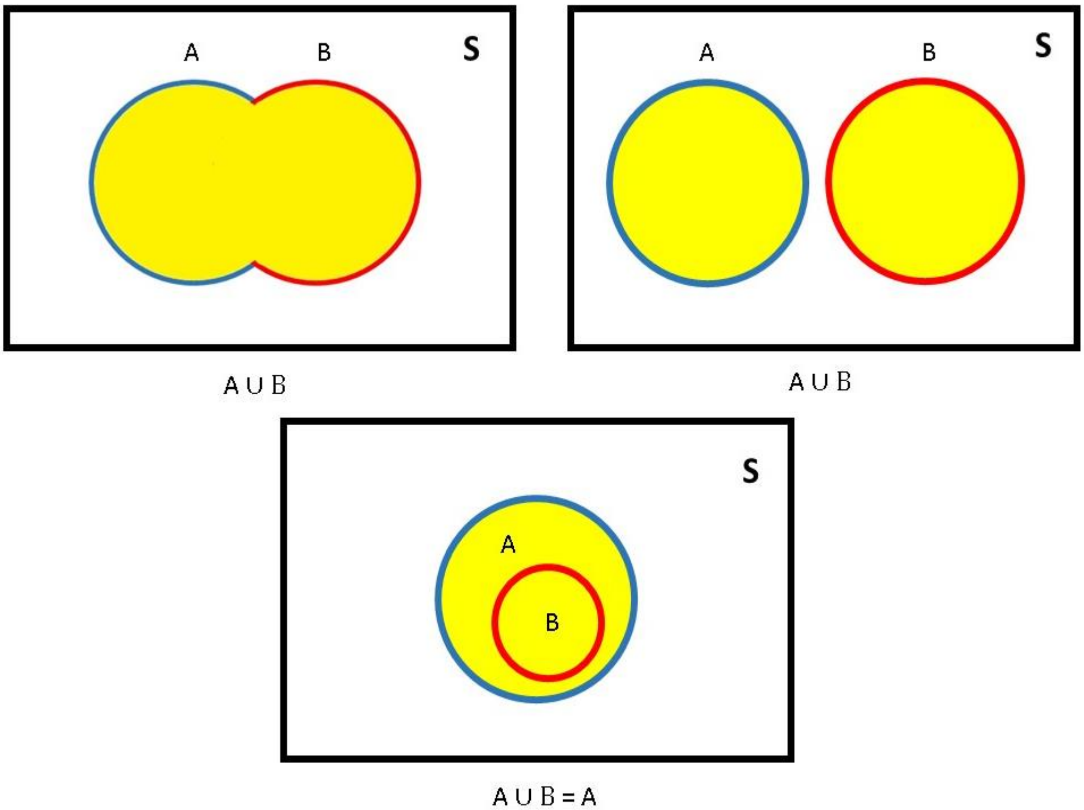


Fonte — Pereira e Tanaka (1990).

III) União (∪)

$A \cup B = \{x \in S / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Figura 32 — Diagramas da união de dois eventos

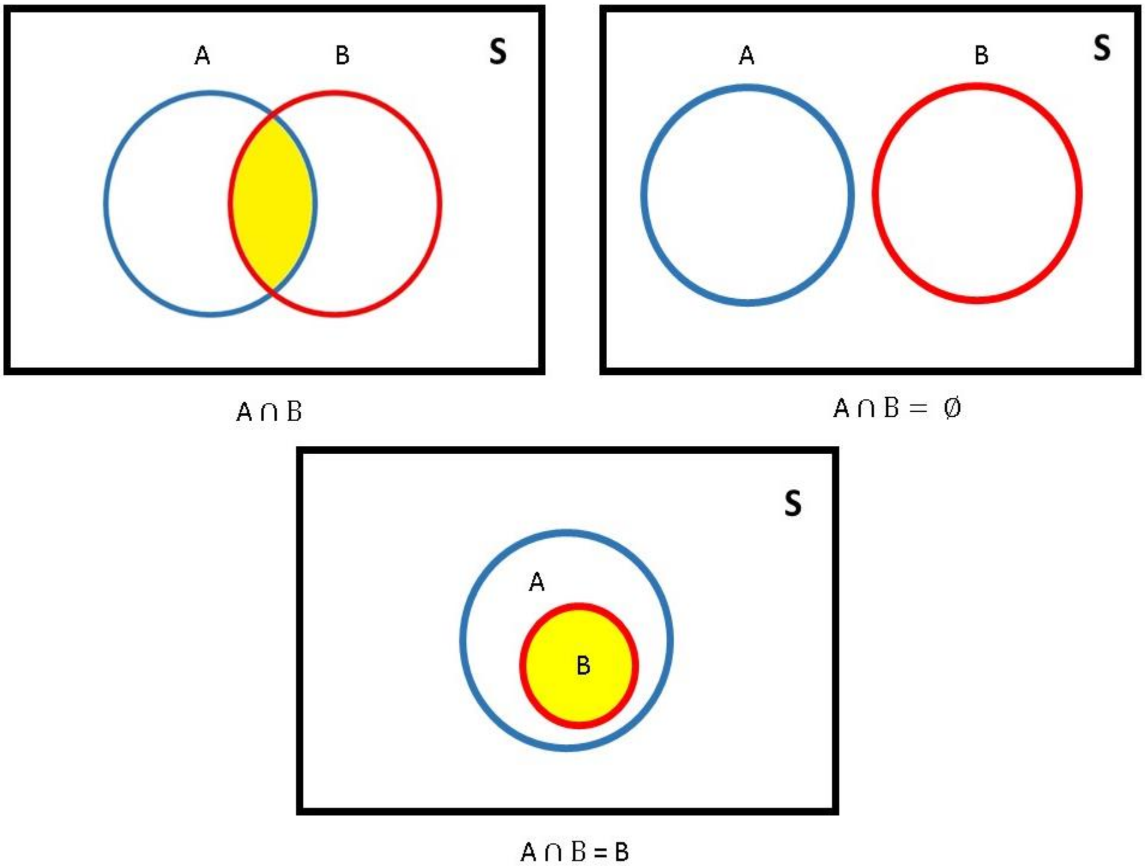


Fonte — Pereira e Tanaka (1990).

IV) Interseção (∩)

$A \cap B = \{x \in S / x \in A \text{ e } x \in B\}$

Figura 33 — Diagramas da interseção de dois eventos

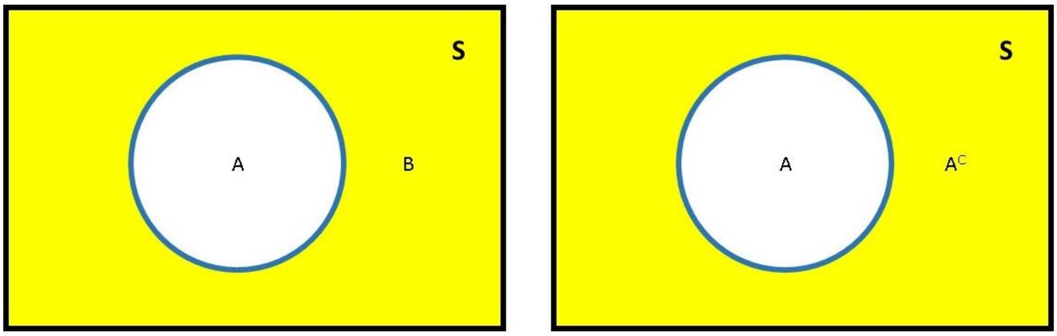


Fonte — Pereira e Tanaka (1990).

V) Complementação

$B = \{x \in S / x \notin A\}$ $A^C = \{ x \in S / x \notin A \}$

Figura 34 — Diagrama de um evento complementar

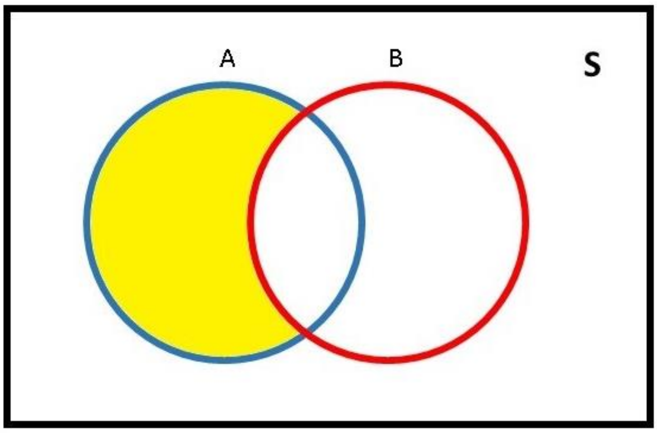


Fonte — Pereira e Tanaka (1990).

VI) Diferença

A - B = A/B = { $x \in S$/ $x \in A$ e $x \notin B$ }

Figura 35 — Diagrama da diferença entre dois eventos



A − B

Fonte — Pereira e Tanaka (1990).

DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

O processo clássico que *a priori* define o sucesso da ocorrência de um experimento qualquer A como sendo um quociente em que o numerador é o número de casos favoráveis ao evento A e o denominador é o número de casos possíveis (S), desde que igualmente equiprováveis. Logo,

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$. Onde,

n(A) = número de casos favoráveis ao evento A

n(S) = número de casos possíveis (S), desde que igualmente equiprováveis.

AXIOMAS

1) Dado um evento A do espaço amostral S ($A \subset S$), temos:
$P(A) \geq 0$

2) Dado $A \subset C$, $P(A) \leq 1$.

3) $P(S) = 1$

4) Para um número qualquer de eventos mutuamente exclusivos

$$(A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para } i \neq j)$$
$$P\,(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Em particular, quando temos dois eventos mutuamente exclusivos:

$$A, B\ (A \cap B = \emptyset \text{ e } A \subset S \text{ e } B \subset S)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

TEOREMAS DO CÁLCULO DE PROBABILIDADE

1º) Para todo evento A, a probabilidade de sua ocorrência será sempre um valor compreendido entre zero e 1 (um), ambos os limites incluídos, ou seja, $0 \leq P(A) \leq 1$. P(A) será igual a zero quando o evento for impossível.

2º) Se A^C é um evento complementar de A, então:

$$P(A^C) + P(A) = 1 \text{ ou } P(A^C) = 1 - P(A)$$

3º) Teorema da Soma: se A e B são eventos mutuamente exclusivos, a probabilidade da ocorrência de A ou B ($A \cup B$; A + B), ou ambos, é dada por:

$$P(A \cup B)= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se $A \cap B=\emptyset$, ou seja, se A e B são mutuamente exclusivos, temos $P(A \cup B)= P(A) + P(B)$. Para a união de três ou mais eventos, o raciocínio é o mesmo.

4º) Probabilidade Condicional: considere B um evento qualquer em um espaço amostral S, com P(B) > 0. A probabilidade de o evento A ocorrer, uma vez que B tenha ocorrido, é dada por:

$$P(A/B)$$

e definida como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ com } P(B) \neq 0.$$

Se $P(B) = 0 \nexists P(A/B)$.

Isto significa que a ocorrência do evento A está vinculada ou condicionada à ocorrência do evento B. Para três eventos A, B e C, tem-se:

$$P(C/A) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} \text{ com } P(A \cap B) \neq 0.$$

5º) Teorema do Produto para Probabilidade Condicional: a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos A e B é dada pelo produto da probabilidade de um dos eventos, pela probabilidade condicional do outro evento. Este teorema é resultado da multiplicação em cruz das equações da probabilidade condicional. Logo:

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A) \text{ com } P(A) \neq 0$$

Para n eventos, temos:

$P\,(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \,.\, P(A_2/A_1) \,.\, P(A_3/A_1 \,.\, A_2)...P(A_n/\, A_n - 1 \,.\, An - 2...A_2 \, X \, A_1)$

6º) Teorema do Produto para Eventos Independentes

Dois eventos A e B são ditos independentes quando a probabilidade da ocorrência de B não é afetada pela ocorrência de A, sendo a recíproca verdadeira. Este mesmo conceito pode ser estendido para mais de dois eventos. Isto será válido desde que não sejam mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) \neq \emptyset$. Assim, se A e B são independentes, temos:

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

Se A, B e C são independentes, tem-se

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \,.\, P(B) \,.\, P(C)$$

Resumindo, pode-se concluir que “n” eventos são independentes entre si quando forem independentes dois a dois, três a três, ..., n a n. Isto equivale a:

$$P(A \cap B \cap N) = P(A) + P(B)...P(N)$$

7º) Teorema da Probabilidade Total (ou Absoluta)

Se a sequência (finita ou enumerável) de eventos aleatórios A_1, A_2, ... formar uma partição de S, então

$$P(B) = \sum_I P(Ai) \,.\, P(B/Ai), \forall B \in A.$$

NOÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

I) **Variável Aleatória:** é aquela cujos valores são obtidos por um experimento aleatório e aos quais se podem associar probabilidades. Lembrando que a soma das probabilidades de todos os valores que a variável aleatória pode assumir é igual a 1 (um).

II) **Variável Aleatória Discreta:** é aquela que pode assumir apenas um número limitado de valores em qualquer escala de medida e é obtida mediante alguma forma de contagem, e também na interpretação de seus valores é dada exatamente por esse mesmo valor.

III) **Variável Aleatória Contínua:** é aquela que, teoricamente, pode assumir qualquer valor numa escala de medida e resulta frequentemente de uma medição, sendo dada, em geral, em alguma unidade de medida, que se trata geralmente de um valor aproximado.

IV) **Distribuição Discreta de Probabilidade:** se uma variável aleatória discreta X pode assumir os valores x_1, x_2, x_3, ..., x_n, com probabilidades respectivamente P_1, P_2, P_3, ..., P_n, sendo que: $P_1+ P_2+P_3+P_n = 1$, diz-se que está definida a distribuição de probabilidade de X, ou seja, $P(X = X_i) = f(X_i)$, onde $i = 1, 2, 3, ...,n$ e $f(X_i) \geq 0$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{Xi}) = 1$$

V) **Função de Distribuição para variáveis discretas:** define-se como sendo a probabilidade de a variável aleatória assumir valores menores ou iguais a X. Ou seja,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{n} P(xi) = 1$$

Onde

0 < F(x) < 1

Considerando X um número real, isto é, $-\infty < x < +\infty$.

VI) **Distribuição Contínua de Probabilidade:** considere X uma variável aleatória contínua. Uma *f*(x) que satisfaça as propriedades a seguir é chamada função densidade de probabilidade ou função densidade.

a) $f(x) \geq 0$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Assim define-se a probabilidade de X (variável aleatória) estar compreendida entre a e b, ou seja, $P(a < X < b)$ por:

$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$, para qualquer $a < b \in IR$

Nota: qualquer valor especificado para X terá sua probabilidade igual a zero, assim:

$P(X = x_0) = 0$, pois $\int_{x0}^{x0} f(x)dx = 0$.

Quaisquer das probabilidades a seguir são iguais, admitindo X uma variável aleatória contínua:

$P(a \leq X \leq b)$; $P(a \leq X < b)$; $P(a < X \leq b)$; $P(a < X < b)$

VII) **Função de Distribuição para Variáveis Aleatórias Contínuas:** define-se a função de distribuição F(x) para uma variável aleatória contínua por:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

9

CONSIDERAÇÕES FINAIS

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A condução deste trabalho buscou valorizar o trabalho coletivo ao desenvolver o conceito probabilístico aqui abordado, procurando articular o saber científico e o saber escolar, partindo de conceitos matemáticos mais elementares, até que os conceitos probabilísticos que se buscam ensinar tornassem compreensíveis e significativos para os licenciandos.

A dissertação de mestrado que detalha o desenvolvimento da pesquisa que originou este guia pode ser encontrada no endereço eletrônico: http://educimat.ifes.edu.br/index.php/dissertacoes?showall=&start=1. Por meio dela, foi possível observar a importância de se trabalhar com metodologias que dê sentido ao que se busca ensinar e aprender. No que diz respeito à prática pedagógica, à teoria brousseauriana propiciou experimentar a concretização de suas teorias, ao contemplar a aprendizagem dos licenciandos em matemática, ao perpassarem pelas fases da situação didática. Além disso, criar uma sequência de atividades nos moldes da Teoria das Situações Didáticas envolvendo um tema tão pouco discutido no meio acadêmico, de modo geral, levou aprender, repensar e recriar uma nova maneira de se fazer Estatística.

Almeja-se que este material didático enriqueça sua prática pedagógica em sala de aula, auxiliando no planejamento de aulas, e que proporcione agradáveis experiências, tanto para você, professor, quanto para seus alunos.

Deseja-se, outrossim, que você tenha um olhar para seus alunos como sujeitos dotados de saberes, capazes de se desenvolver de maneira autônoma, e de aprender a partir da mobilização de seus conhecimentos. Por isso, este trabalho visa valorizar as produções dos mesmos, objetivando uma matemática que favoreça uma aprendizagem significativa, que seja capaz de desmistificar a ideia de que o fazer matemático se resume a uma simples reprodução de modelos.

Urge frisar que conceito aqui abordado não se esgota na realização das atividades propostas por este guia. Por isso, a fim de ampliá-lo, é recomendável que este conceito seja reforçado por meio de exercícios de fixação e problemas probabilísticos envolvendo outros tipos de distribuições de probabilidade contínua e outras aplicações.

Sucesso no seu trabalho!

REFERÊNCIAS

REFERÊNCIAS

ALVES, Emanuela Nascimento. **A construção do conceito de probabilidade em espaços contínuos**: uma contribuição à luz da teoria das situações didáticas. Dissertação de mestrado. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, 2019.

ARALDI, Altamir A. R. **O que é cardinalidade?** 2016. (18 min). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=H76yyBWOcdQ. Acesso em: 07 out. 2019.

BATANERO, Carmen et al. Dificultades de los estudiantes en los conceptos estadísticos elementales: el caso de las medidas de posición central. **Ensino e Aprendizagem da Estatística**, p. 31-48, 2000a.

BATANERO, Carmen. ¿Hacia dónde va la educación estadística? **Blaix**, Universidad de Granada, v. 15, n. 2, p. 13, 2000. Disponível em: https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/BLAIX.pdf. Acesso: 01 jun. 2018.

BATANERO, Carmen. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa**. v.8, n. 3, México, p. 247-263, 2005.

BATANERO, Carmen. **Didáctica de la Estadística.** Grupo de Investigación en Educación Estadística: Departamento de Didáctica de la Matemática Granada. Universidad de Granada, Granda, 2001. Disponível em: https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/didacticaestadistica.pdf. Acesso em: 02 jun. 2018

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan. **Análisis de datos y su didáctica**. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2001.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. Editora Contexto, 2002.

BRANCO, João. Estatística no secundário: o ensino e seus problemas. **Ensino e aprendizagem da Estatística**, p. 11-30, 2000.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Deliberação nº. 1302/2001, de 06 de novembro de 2001. Dispõe sobre as diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura. **Diário Oficial da União**: Poder

Executivo, Distrito Federal, p. 15, 5 mar. 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 10 mai. 2019.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**. Tradução Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

CAZORLA, Irene M. et al. Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à estatística. In: **Conferência internacional experiências e perspectivas do ensino da estatística**: desafios para o século XXI, Florianópolis. 1999.

COSTA, Adriana. **A educação estatística na formação do professor de matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, SP, 2007.

COSTA, Adriana. **A educação estatística na formação do professor de matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, São Paulo, 2007.

DE OLIVEIRA JÚNIOR, Ailton Paulo. A Escala de Atitudes em relação ao Ensino de Estatística de professores do Ensino Superior no Brasil The Attitudes scale toward statistics teaching of higher education professors in Brazil. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 18, n. 3, 2016.

DEVORE, Jay L. **Probabilidade e estatística para engenharia e ciências**. Cengage Learning Edições Ltda., 2010.
GONÇALVES, Mauro César et al. **Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica.** 2004.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**. vol. 5. Editora Atual, São Paulo (SP), 1996.

ITTG, Ingejoel. **Ajuste polinomial con geogebra (aplicación)**. 2015. (13 min). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=IwBL7E1pg1c. Acesso em: 07 out. 2019.

JAMES, Barry R. **Probabilidade**: um curso em nível intermediário. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

KHAN, Sal. **Função Densidade de Probabilidade**. 2014. (9 min). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=tNMJLr1H_gA. Acesso em: 07 out. 2019.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin; MOURA, Anna Regina Lanner de. Probabilidade e estatística na educação infantil: um estudo sobre a formação e a prática do professor. **XI Seminário de Investigação em Educação Matemática**, p. 169-178, 2000.

LOPES, Celi Espasandin. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Cad. Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, 2008.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2015: matemática: Ensino Médio. Brasília, 2014. 108 p. Disponível em: https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-livro-didatico/item/5940-guia-pnld-2015. Acesso em: 14 mai. 2016.

PELIZZARI, Adriana et al. Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel. **Revista PEC**, v. 2, n. 1, p. 37-42, 2002.

PEREIRA, Wilson.; TANAKA, Oswaldo K. **Estatística:** conceitos básicos. São Paulo: Makron Books, 1990.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Autêntica Editora, 2003.

PONTE, João Pedro da; FONSECA, Helena. A estatística no currículo do ensino básico e secundário. **Ensino e aprendizagem da estatística**, p. 179-194, 2000.

PROCOPIO, Rafael. **Enumerabilidade de conjuntos**: alguns infinitos são maiores que outros/ matemática rio. 2013. (7 min). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=cLwm8lV6kfY. Acesso em: 07 out. 2019.

QDIVERTIDO. **Filhotes dos 101 dálmatas e a mamãe**. 2019. 1 ilustração Disponível em: http://www.qdivertido.com.br/verdesenho.php?codigo=257. Acesso em: 17 abr. 2018.

SANTOS, Clemente Ramos dos. **O tratamento da informação**: currículos prescritos, formação de professores e implementação em sala de aula. Dissertação de Mestrado profissional – Pontífica Universidade Católica (PUC) São Paulo, 2005.

SARTIM, Ademir. **Matemática Básica**. vol. 1. Espírito Santo: Edufes, 2018.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. Campinas. SP: Papirus, 2001.

STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números:** a matemática do zero ao infinito. Zahar, 2016.

STEWART, James. **Cálculo**. vol. I. Tradução: Antonio Carlos Moretti, 2006.

TUDO DESENHOS. **Desenho de casal dos 101 dálmatas para colorir**. 2019. 1 ilustração. Disponível em: http://www.tudodesenhos.com/d/casal-dos-101-dalmatas. Acesso em: 17 abr. 2018.

VIALI, Lorí. **O ensino de estatística e probabilidade nos cursos de licenciatura em matemática**. XVIII SINAPE (Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística), 2008.

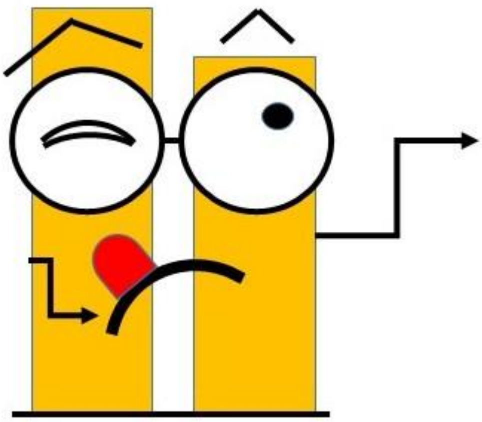
APÊNDICE - A

APÊNDICE - A

1ª SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES		
Nome(s):		**Data:**

Observe a figura abaixo. Considere uma circunferência com um ponteiro fixado em seu centro (veja a figura 1), que é girado no sentido horário. Suponha que o ponteiro possa parar unicamente nos pontos 1, 2, 3 e 4. A partir dessas informações, responda as **atividades 1, 2 e 3**:

Figura 1



1) Um experimento consiste em girar, uma única vez, o ponteiro da figura 1 e observar o ponto de parada. Considerando que os pontos de parada sejam equiprováveis, determine:

a) O espaço amostral do experimento e sua cardinalidade.

b) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar em cada um dos pontos 1, 2, 3 e 4? **Justifique sua resposta.**

c) Qual é a probabilidade de o ponteiro não parar no ponto 3?

d) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar em 1 e 2? **Justifique sua resposta.**

e) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar em 1 ou 2? **Justifique sua resposta.**

2) Um novo experimento consiste em girar o ponteiro da **Figura 1** duas vezes. Considerando que parar nos pontos nesse experimento sejam equiprováveis, responda as questões abaixo:

a) Esquematize o espaço amostral por meio de um diagrama de árvore e determine sua cardinalidade

b) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 2 e 3?

c) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 2 e 3 ou 1e 4? **Justifique sua resposta.**

3) Suponha que em um outro experimento a probabilidade do ponteiro parar em cada ponto tenha sido alterada. De modo que a probabilidade de o ponteiro parar em 1,2 e 4 seja igual a **0,3**, **0,1** e **0,25**, respectivamente. Sendo assim, considerando que o ponteiro seja girado duas vezes, determine:

a) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 1 e 3? Esboce a árvore de probabilidade para solucionar este item.

b) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar nos pontos 2 e 3 ou 1e 4?

4) Suponha um novo experimento em que o ponteiro seja girado, uma única vez, de forma que pare em qualquer ponto na circunferência (veja a figura 2). Considerando que os eventos sejam equiprováveis, responda cada item abaixo, **justificando sua resposta.**

a) Quantos pontos existem no intervalo [1, 2]?

b) Quantos pontos existem no intervalo [1, 5]?

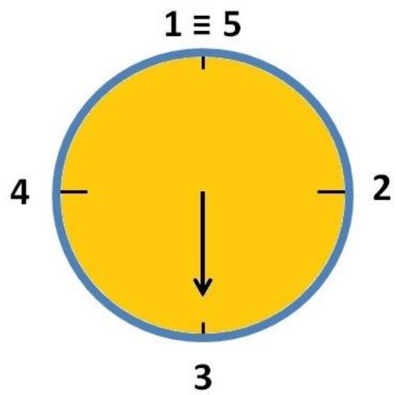
c) Identifique o espaço amostral e sua cardinalidade.

d) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar no ponto 2?

e) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar no ponto 3?

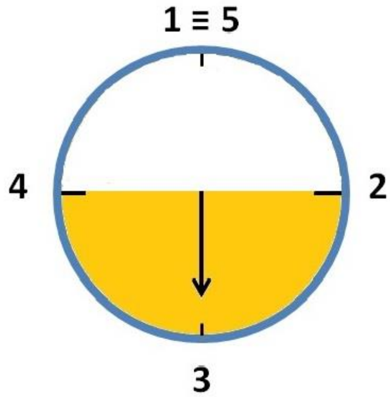
f) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar em qualquer ponto x, pertencente ao intervalo $1 \leq x \leq 5$. **Justifique sua resposta.**

Figura 2



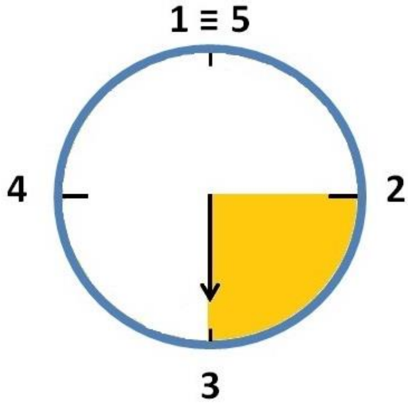
g) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar no intervalo [2, 4] (veja a figura 3)? **Justifique sua resposta.**

Figura 3



h) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar no intervalo [2, 3] (veja afigura 4)? **Justifique sua resposta.**

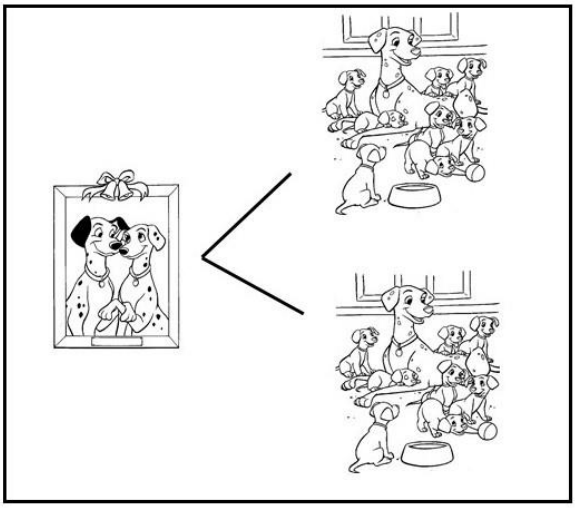
Figura 4



<table>
<tr><th colspan="3">2ª SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Nome(s):</td><td></td><td rowspan="4">Data:</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

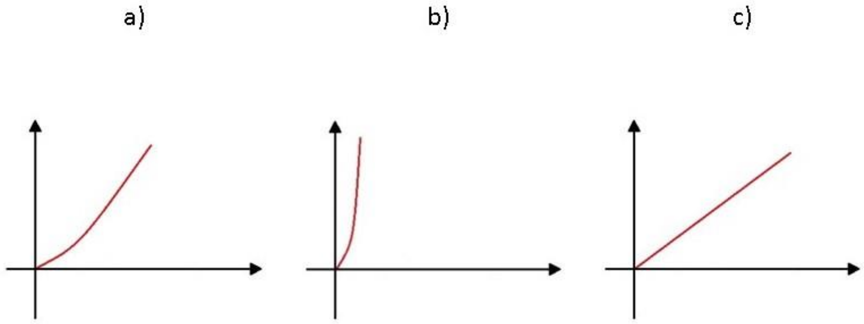
5) Você sabia que a superpopulação de cães é um dos graves problemas da saúde pública?

O aumento excessivo da população de cães gera graves problemas para a saúde pública. Dentre eles estão a poluição ambiental e a transmissão de zoonoses. Estima-se que, com duas crias por ano, um casal de cães gere de 2 a 8 filhotes por cria. A tabela abaixo apresenta, em média, a quantidade de animais que um casal de cães pode originar em 10 anos, em sucessivas gerações.

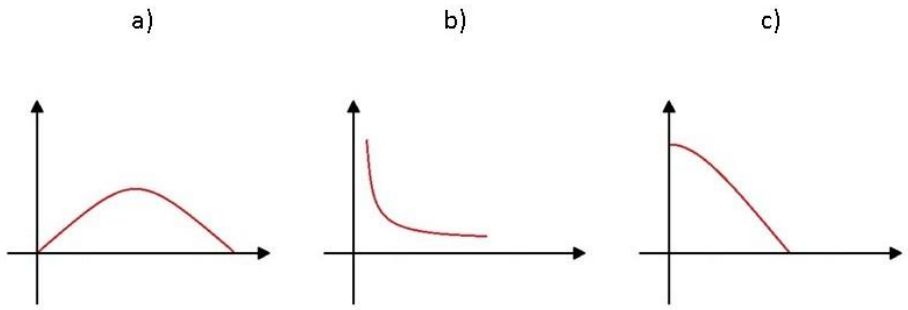


ANO	NÚMERO DE CÃES
1º	12
2º	66
3º	382
4º	2.201
5º	12.680
6º	73.041
7º	420.715
8º	2.423.316
9º	13.968.290
10º	80.399.780

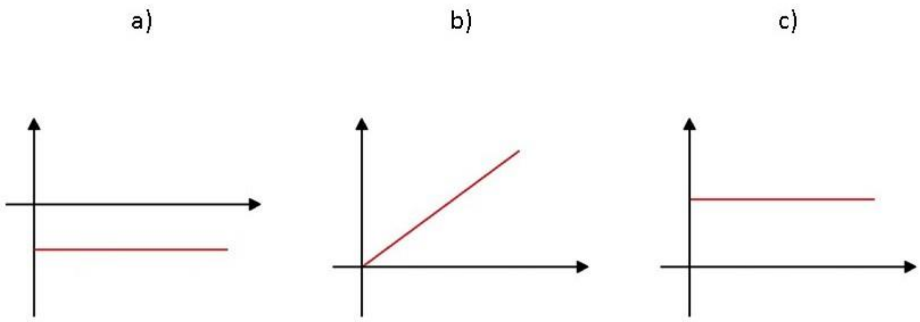
Nessas condições, assinale as variáveis em cada um dos eixos e aponte o gráfico que melhor representa a quantidade de animais gerados por um casal de cães com o passar dos anos. **Justifique sua resposta.**



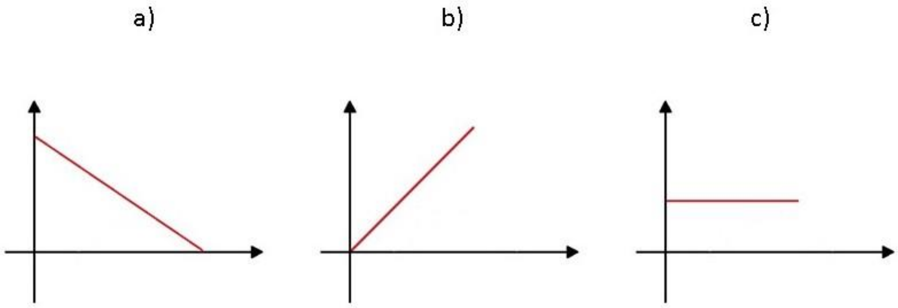
6) O corpo humano é constituído por músculos, ossos, tendões, ligamentos e outros componentes das articulações, capazes de proporcionar uma estrutura que permita executar movimentos fortes e bruscos. No entanto, essa estrutura tende a se desgastar naturalmente com o passar do tempo. O seu maior vigor é atingido por volta dos 32,5 anos. Sendo assim, assinale as variáveis nos eixos e aponte o gráfico que melhor representa a força do ser humano no decorrer de sua vida. **Justifique sua resposta.**



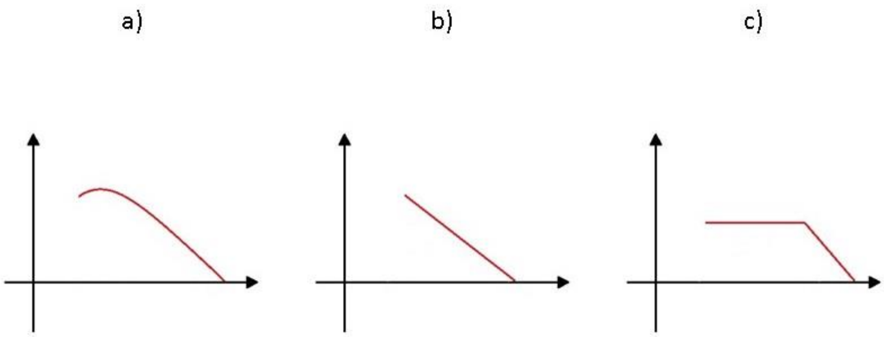
7) Uma empresa de telefonia móvel oferece para os clientes, que adquirem o plano ***Fale o quanto quiser***, minutos ilimitados para fazer ligações locais. Este plano custa R$40,00 por mês. Sabendo disso, identifique as variáveis nos eixos e aponte qual é o gráfico que melhor representa o valor a ser pago em função da quantidade de minutos utilizados em um mês ao cliente que faz adesão a este plano e só realiza ligações locais. **Justifique sua resposta.**



8) Sabe-se que a vida útil das lâmpadas de LED depende de diversos fatores. No entanto, elas são produzidas para durarem cerca de 50.000 horas. Estima-se que as 25.000 horas de vida útil elas atinjam 70% de sua capacidade máxima. Sendo assim, identifique as variáveis nos eixos e aponte qual é o gráfico que melhor representa a probabilidade de uma lâmpada queimar durante sua vida útil, em condições de uso adequadas. **Justifique sua resposta.**

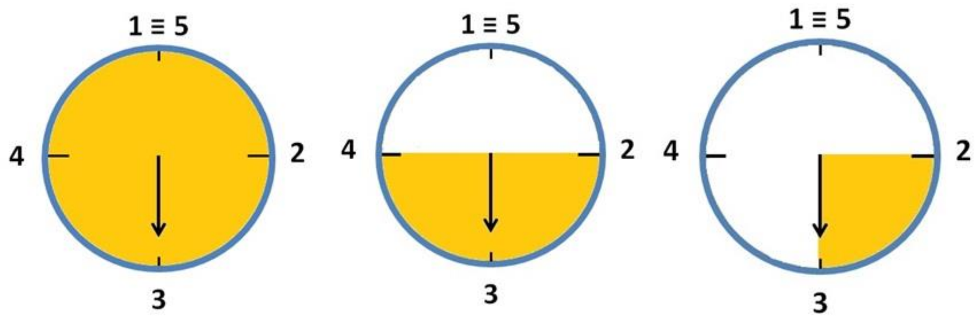


9) A menarca, evento que corresponde à primeira menstruação da mulher, marca o início de sua vida reprodutiva em torno dos 13 anos de idade. De modo geral, as mulheres são mais férteis na casa dos 20 anos. Depois dos 35 anos, as chances de se ter um filho declinam, em média, em 50%. O fim do período fértil se encerra por volta dos 45 a 55 anos de idade, com a chegada da menopausa, evento em que o ovário da mulher libera o último óvulo capaz de ser fecundado. Sendo assim, identifique as variáveis nos eixos e aponte qual é o gráfico que melhor representa a probabilidade de uma mulher, sem problemas de fertilidade, engravidar durante sua vida, a partir da menarca. **Justifique sua resposta.**



3ª SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES		
Nome(s):		**Data:**

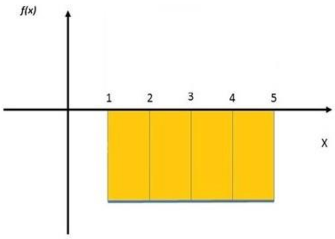
10) Você se lembra da atividade 4? Em que um experimento era feito de modo que ao girar o ponteiro, com origem no centro da circunferência, este parava em qualquer ponto da circunferência?



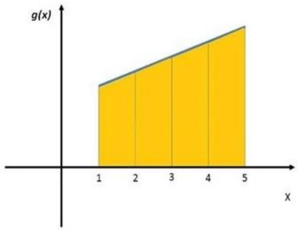
Sabendo que a probabilidade é distribuída uniformemente no intervalo [1, 5]:

a) Assinale o gráfico da função que melhor representa a distribuição de probabilidade desse experimento no intervalo [1, 5].

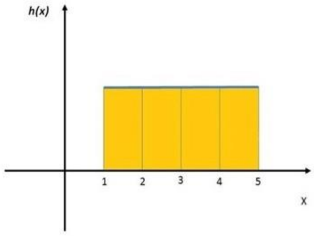
i)



ii)

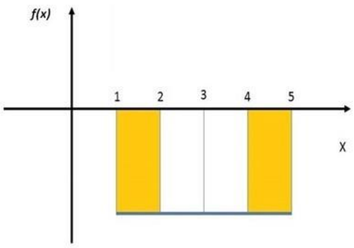


iii)

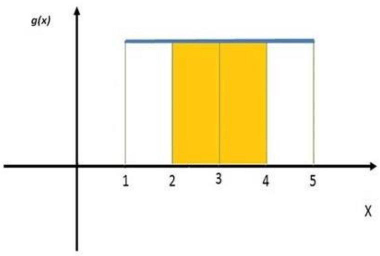


b) Assinale o gráfico da função que melhor representa a distribuição de probabilidade desse experimento no intervalo [2, 4].

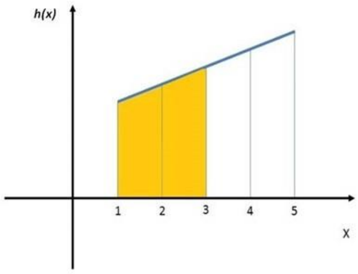
i)



ii)

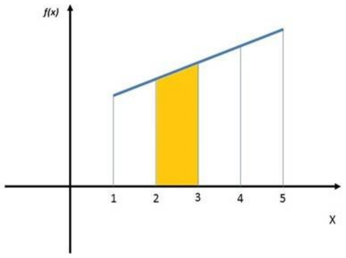


iii)

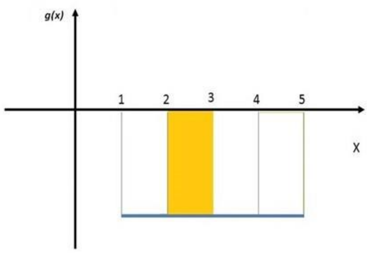


c) Assinale o gráfico da função que melhor representa a distribuição de probabilidade desse experimento no intervalo [2, 3].

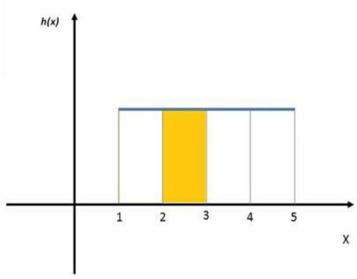
i)



ii)

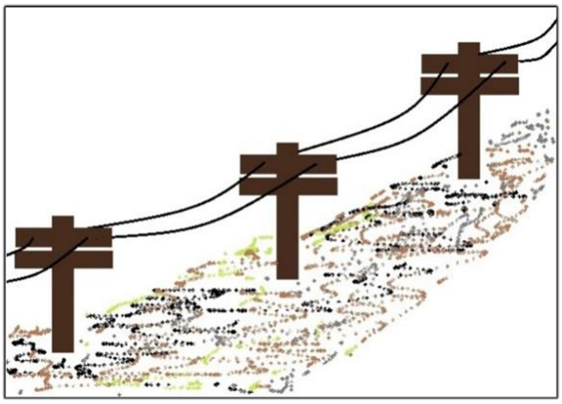


iii)

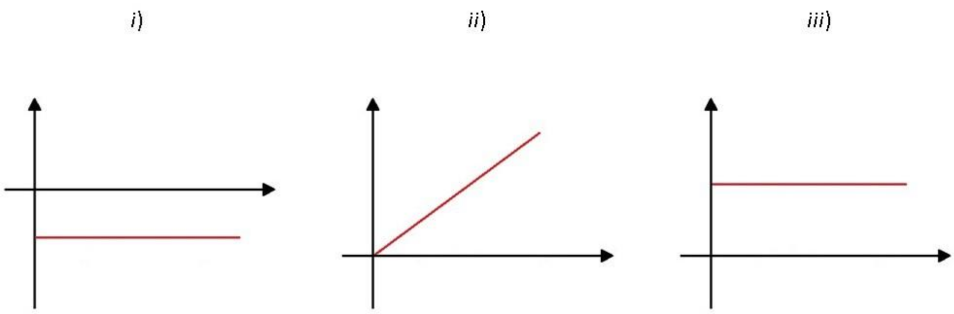


d) Qual é a figura geométrica delimitada pelos eixos cartesianos assinalada nos itens a, b e c? É possível perceber alguma relação dessa figura com o cálculo de probabilidade? Justifique sua resposta.

11) Em uma rede telefônica de 10 Km de comprimento foi constatado que a probabilidade de ocorrer panes no intervalo [0, 10] da rede é distribuída igualmente. Sendo assim:

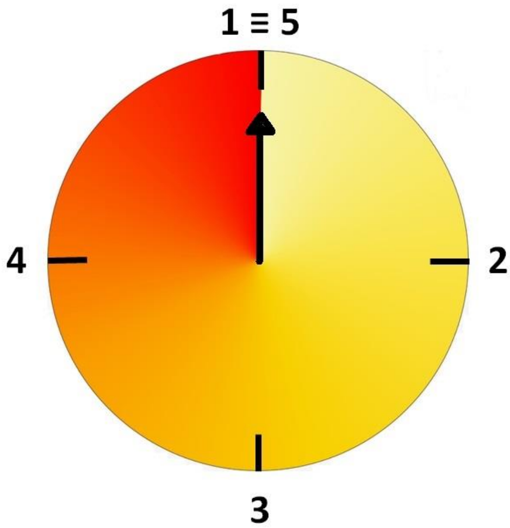


a) Identifique as variáveis nos eixos e aponte qual é a função que melhor explica esse fenômeno no respectivo intervalo. **Justifique sua resposta.**



b) Com base no item anterior, represente graficamente a função que modela o fenômeno probabilístico de ocorrer uma pane no intervalo [0, 5] da rede telefônica.

12) Considere um novo experimento em que o ponteiro seja girado, no sentido horário, de modo que a probabilidade de ele parar aumente a uma taxa constante no intervalo [1, 5], a medida em que ele percorre a circunferência, a partir do ponto 1. Sendo assim, esboce graficamente no plano cartesiano a distribuição de probabilidade deste evento no intervalo [1, 5] e responda:



a) Qual tipo de função melhor representa o gráfico obtido a partir do esboço desta distribuição de probabilidade? É possível que essa função assuma valores negativos? Justifique sua resposta.

b) Qual figura geométrica delimitada pelos eixos cartesianos foi encontrada no esboço do gráfico? Há alguma relação da mesma com o cálculo de probabilidade? **Justifique sua resposta.**

c) De acordo com seu esboço gráfico, qual é o maior e menor valor que a função pode assumir? É possível determinar sua lei a partir dessa representação gráfica da distribuição de probabilidade? **Justifique sua resposta.**

d) É possível determinar a probabilidade de o evento ocorrer no intervalo [1, 5]? E no intervalo [1, 3]? Caso seja possível, determine a probabilidade de o evento ocorrer nestes intervalos.

EDUCIMAT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Agência Brasileira do ISBN
9 788582 634851
ISBN: 978-85-8263-485-1