Universidade do Estado do Pará

Centro de Ciências Sociais e Educação

Departamento de Matemática, Estatística e Informática

Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Edvaldo Melo Souza

O ENSINO DE INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

BELÉM
2019

Edvaldo Melo Souza

O ENSINO DE INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no nível médio.
Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral

Belém
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S719e Souza, Edvaldo Melo

O Ensino de intervalos de números reais por meio de uma sequência didática / Edvaldo Melo Souza. — 2019. 127 f. : il. color.

Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Departamento de Matemática, Estatístia e Informática, Centro de Ciências Sociais e Educação, Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

1. Ensino de Matemática. 2. Números Reais. 3. Intervalos de Números Reais - Sequência Didática . 4. Análise Microgenética. 5. Análise do Discurso. I. Título.

CDD: 510.712

Edvaldo Melo Souza

O ENSINO DE INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no nível médio.
Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral

Data da aprovação: 18/12/2019

Banca examinadora:

______________________________. Orientador
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas – Educação - Pontifícia Universidade Católica do rio de Janeiro - PUC/RJ
Universidade do Estado do Pará

______________________________. Examinador Interno
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN - RN
Universidade do Estado do Pará

______________________________. Examinador Externo
Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias
Doutor em Educação - Universidade Nacional de Rosário - Argentina
Escola Tenente Rêgo Barros

Belém - PA
2019

AGRADECIMENTOS

Gostaria em primeiro lugar de agradecer a Deus pela saúde, paciência e sabedoria na condução de todas as disciplinas deste importante curso

À minha família pelo grande apoio, que sempre estiveram presentes nos momentos difíceis no decorrer do curso.

Ao meu orientador Professor Doutor Natanael Freitas Cabral, pelos ensinamentos importantes e dedicação que tanto precisei para a construção deste trabalho.

Aos meus amigos de classe em geral, pelo companheirismo e pela troca de experiências, assim como de conhecimentos durante todo o período do curso.

E a todos os professores do PMPEM-UEPA, por todo o apoio, ensinamentos e dedicação, para fins debons resultados neste trabalho.

RESUMO

Esse trabalho apresenta o relatório final de uma pesquisa desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará que teve como objetivo identificar as potencialidades de uma sequência didática construídas nos moldes das unidades articuladas de reconstrução conceitual desenvolvida por Cabral (2017), direcionada ao processo de ensino e aprendizagem de Intervalos de Números Reais no ensino médio. A questão de pesquisa assumida pela investigação pode ser traduzida com o seguinte enunciado: Quais as potencialidades que uma sequência didática elaborada segundo a concepção de Cabral (2017), podem ser identificadas quando aplicada no aprendizado de Intervalos de Números Reais, no contexto do ensino médio? Para a estrutura teórica do trabalho investigativo, consideramos também os pressupostos da engenharia didática a partir de Brousseau (1982) e Artigue (1989), conceitos da Análise Microgenética e Análise do Discurso para sistematizar os dados coletados, a partir de Góes (2000), Vivian (2006) e Cabral (2004). Esta pesquisa foi elaborada seguindo uma metodologia que incorpora as seguintes etapas: Sondagem das dificuldades de aprendizagem em 100 alunos egressos do ensino médio de uma escola da rede pública estadual nesta cidade, onde implica as concepções iniciais dos saberes; aplicação de um teste em uma turma do 1º ano do ensino médio de uma escola estadual nesta cidade, a qual foi desenvolvida a pesquisa, onde originou as dificuldades no aprendizado; aplicação da sequência didática, análises e aplicação de um novo teste para verificar os resultados. Neste contexto os resultados apontam para uma importantíssima contribuição para o aluno, para o professor e para o saber. Neste contexto quando detectamos as dificuldades do aprendizado dos alunos através das concepções prévias, por meio do método utilizado na pesquisa usamos os conteúdos teóricos para desenvolver os saberes prévios dos alunos. Com o intuito de sanar os obstáculos no aprendizado dos alunos, elaboramos e aplicamos uma sequência didática. Assumimos o papel de orientador/mediador nas discussões sobre o objeto de estudo em sala de aula no decorrer da pesquisa, gerando assim momentos de colaboração entre aluno com aluno e aluno com professor. E na realização dos procedimentos para que os alunos atingissem as regularidades/generalizações dos conceitos do objeto de estudo provocamos diversas interações em sala de aula para alcançarmos as percepções do alunado e após isso sistematizar os resultados com a formalização dos conceitos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Números Reais. Intervalos de Números Reais Sequência Didática. Análise Microgenética. Análise do Discurso.

ABSTRACT

This paper presents the final report of a research developed in the Postgraduate Program in Mathematics Teaching of the University of the State of Pará, which aimed to identify the potentialities of a didactic sequence built along the articulated units of conceptual reconstruction developed by Cabral (2017).) directed to the teaching and learning process of Real Number Ranges in high school. The research question taken by the research can be translated with the following statement: What are the potentialities that a didactic sequence elaborated according to Cabral's (2017) conception, can be identified when applied to learning Real Number Ranges in the context of middle school? For the theoretical framework of the investigative work, we also consider the assumptions of didactic engineering from Brousseau (1982) and Artigue (1989), concepts of Mycrogenetic Analysis and Discourse Analysis to systematize the collected data, from Góes (2000), Vivian (2006) and Cabral (2004). This research was developed following a methodology that incorporates the following steps: Survey of learning difficulties in 100 high school graduates of a state public school in this city, which implies the initial conceptions of knowledge; application of a test in a class of the first year of high school of a state school in this city, which was developed the research, which originated the learning difficulties; application of the didactic sequence, analysis and application of a new test to verify the results. In this context the results point to a very important contribution to the student, the teacher and the knowledge. In this context when we detect the learning difficulties of students through previous conceptions, through the method used in the research we use the theoretical contents to develop students' previous knowledge. In order to remedy the obstacles in student learning, we designed and applied a didactic sequence. We assume the role of advisor / mediator in discussions about the object of study in the classroom throughout the research, thus generating moments of collaboration between student with student and student with teacher. And in the accomplishment of the procedures for the students to reach the regularities / generalizations of the concepts of the object of study we provoke several interactions in the classroom to reach the students' perceptions and after that systematize the results with the formalization of the concepts.

Keywords: Mathematics Teachfing. Real Numbers. Real Number Ranges. Following teaching. Microgenetic analysis.Speech analysis.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No decorrer de nossas vidas nos deparamos em situações que nos levam a interpretar o que está entre um objeto e outro, quantos quilômetros tem entre uma cidade e outra, o médico atenderá de tal hora a tal hora e assim por diante. A partir de uma experiência pessoal, observei que, ainda nas escolas da rede pública, intervalos de números reais é pouco explorado, apresentando assim uma deficiência para a aplicação do mesmo. Ainda neste contexto observamos em sala de aula, que os alunos não conseguem obter uma visão bem definida dos conceitos básicos e das operações de intervalos de números reais, nos quais destacamos em particular a identificação e as suas representações. A importância do ensino de intervalos de números reais pode ser notada em documentos oficiais como o Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN), que recomendam sua inserção nos currículos escolares de Matemática no 1º ano do ensino médio. Analisando os documentos curriculares que orientam o ensino de Matemática no ensino médio, reconhecemos que os PCNs (BRASIL, 1998), as orientações curriculares do ensino médio (BRASIL, 2006) e o Programa Nacional do Livro Didático do ensino médio (BRASIL, 2004) têm apontado caminhos para superar os obstáculos em relação ao ensino de números reais, assim como também, os Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio (BRASIL, 2002), orientam, em linhas gerais, que o ensino do bloco de números e operações deve ser aprofundado em conexão com outros conceitos matemáticos. Ao longo de aproximadamente 20 anos de labuta em sala de aula, observo no alunado, dificuldades na aplicação dos conceitos de intervalos de números reais e suas operações na resolução de problemas envolvendo Matemática no ensino médio. Tais dificuldades pode ser observada, quando analisamos os resultados, como por exemplo, Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) de Matemática, uma vez que em 2005 tivemos como índice 3,0; em 2007, 2,5; não tivemos informação dos índices de 2009 e 2011, e em 2013, 2,7 e no Sistema Paraense de Avaliação Educacional (SISPAE, 2014), os quais podem estar relacionados com a presença de questões que envolvem números reais, em particular intervalos, nesses exames. Mas, o que mencionam as pesquisas sobre as dificuldades do ensino de intervalos de números reais e quais as novas abordagens metodológicas propostas por este estudo? Qual é a concepção dos alunos do 1° ano do ensino médio no que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem deste tema? Quais os desdobramentos que o desenvolvimento de uma sequência didática proposta para o ensino de intervalos de números reais pode provocar em alunos do 1º ano do ensino médio, quando estruturada sob a ótica das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARCS) na resolução de questões concernente a este tema?

Com isso, apresentamos a seguir o objetivo desta pesquisa, o qual nos possibilitou a obter respostas dos questionamentos mencionados anteriormente que apresentaremos ao longo deste trabalho. Assim, desenvolvemos este estudo com o objetivo de identificar as potencialidades de uma sequência didática desenvolvida para o ensino de intervalos de números reais, de modo a viabilizar a construção do conhecimento de alunos do 1º ano do ensino médio e assim contribuir para o melhoramento do desempenho destes em relação a resolução de exercícios relacionados ao tema em estudo.

Para atingir esse objetivo, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

• Produzir informações através de revisão de estudos e concepção de alunos sobre o ensino de intervalos de números reais e suas dificuldades no aprendizado.

• Desenvolver atividades para compor uma sequência didática proposta para o ensino de intervalos de números reais.

• Detectar sinais de aprendizagem do alunado durante a aplicação das atividades que fazem parte da sequência didática proposta.

• Fazer avaliação para sondar o desempenho dos alunos na resolução de atividades que envolvem intervalos de números reais após a efetiva participação destes alunos na experimentação.

• Identificar os indícios das potencialidades da sequência didática em termos do ensino, da aprendizagem e do saber.

Para alcançarmos os objetivos desta pesquisa, construímos uma sequência didática voltada para as seguintes possibilidades: O ensino de intervalos de números reais que é desenvolvido através de uma sequência didática proposta nesta pesquisa, permite que o alunado, ao trabalhar as localizações na reta real descubra as regularidades relacionadas às representações, propriedades e operações, evidenciando assim o lado pedagógico, com o desenvolvimento de um trabalho com alunos do 1° ano do ensino médio por meio de atividades através de uma sequência didática proposta nesta pesquisa fornecendo um resultado acima da média esperada na resolução de questões que envolva intervalos de números reais. Diante disso e com o objetivo de comprovar ou não esses pressupostos, adotamos nesta pesquisa elementos que envolvem uma Engenharia Didática nos seguintes pontos: Análises prévias; Concepção e Análise a priori; Experimentação, Análise a posteriori e Validação. Diante disso, veremos a seguir de que maneira essas fases estão organizadas no decorrer deste trabalho.

2. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Este capítulo tem como objetivo a apresentação de algumas teorias que nos ajudaram na construção desse trabalho. No primeiro momento apresentamos os pressupostos das teorias que usamos na construção dessa pesquisa. Logo após, no que diz respeito à Sequência Didática, enfocamos a teoria desenvolvida por Cabral (2017), ou seja, a Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC), que foi de suma importância, servindo-nos de base para a construção das atividades que compõem esse trabalho de pesquisa.

E no final deste capítulo, apresentamos a proposição de Góes (2000) e Cabral (2004) no que concerne à Análise Microgenética e a proposição de Cabral (2004) e Vivian (2006), no que tange à Análise do Discurso. Utilizamos essas duas teorias, para fins de analisar as interações dos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, quando da aplicação das atividades, verificando assim os indícios de aprendizagem dos alunos, assim como também registrar os acontecimentos que ocorreram na sala de aula.

2.1 Metodologia da pesquisa

Nosso trabalho de pesquisa envolve diretamente o trabalho do docente com os seus alunos em sala de aula. Em Pimenta e Anastasiou (2002, p.75), diz que o trabalho do docente “é uma prática educativa, que intervém socialmente no processo educacional, ou seja, é uma prática social e que o desafio da pedagogia é a renovação dos métodos atuais para a melhoria do ensino”.

Como em particular, os preceitos da Engenharia Didática, está ligado a pesquisas no ambiente escolar, ou seja, na sala de aula, então se constitui em um viés importante na condução de novas iniciativas no que diz respeito ao ensino, propiciando assim, um harmonioso relacionamento entre professores e alunos

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa elaborada no início da década de 1980, para trabalhos de Educação Matemática. As concepções que envolveram essa metodologia, estão ligadas aos pesquisadores: Yves Chevallard e Guy Brousseau em 1982 e Michèle Artigue em 1989.

Almouloud e Silva (2012), diz que a Engenharia didática lembra a existência de uma descrição, um estudo e justificativas precisas e consistentes, que condicionam a utilização da mesma.

Ainda neste contexto, temos também a definição de Artigue (1996, p.193) que diz o seguinte:

> A Engenharia Didática, é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apóia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência.

Segundo Oliveira (2013), na atualidade, a técnica da Engenharia Didática já está sendo usada em diversas áreas do conhecimento e aborda as seguintes etapas: nomeação do tema da pesquisa, constituição dos questionamentos para problematizar o objeto de estudo, planejamento dos conteúdos, objetivos a serem alcançados no processo de ensino, delimitação do processo, levando em consideração a formação de grupos, material didático a ser utilizado, cronograma, interação das atividades e etapas e finalmente a avaliação dos resultados.

Na concepção de Carneiro (2005), a Engenharia Didática é uma expressão que possui duplo entendimento. Indica produções para o ensino oriundo de resultados pesquisados, assim como institui metodologia de pesquisa sustentada em experiências de sala de aula.

Com isso qualquer que seja o trabalho de pesquisa, cuja execução seja através da Engenharia Didática, segundo Artigue (1996), deve conter as seguintes etapas: Análises Prévias, Concepção e Análises a Priori, Experimentação, Análise a Posteriori e validação.

A etapa das Análises Prévias, é constituída de elementos que levam a sondar o desdobramento do processo de ensino tradicional, para que assim possa propor novas metodologias que venham a melhorar o processo de ensino e aprendizagem na sala de aula.

Para Machado (1999, p.21), essa sondagem acontece seguindo importantes direcionamentos:

> [...] sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão bem como a análise

> epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino, a análise do ensino atual e de seus efeitos, a análise da concepção dos alunos, das dificuldades, dos obstáculos que determinam sua evolução, a análise do campo dos entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática.

Neste contexto, foi feita uma revisão de estudos, dividida em: estudos diagnósticos, estudos teóricos e estudos experimentais, relacionados ao ensino de intervalos de números reais, onde verificamos algumas dificuldades no processo de ensino, no tocante a este objeto de estudo, Além disso foi feita uma consulta aos discentes, na qual foi questionado sobre o ensino e aprendizagem de intervalos de números reais, associado às suas as demandas de dificuldades.

Na Concepção e Análise a Priori, é levado em consideração os resultados obtidos nas Análises Prévias, ocorrendo então a intervenção do professor sobre as variáveis que achar importante no objeto de pesquisa.

Com isso Almouloud e Silva (2012), define Concepção e Análise a priori, afirmando que após o professor ser orientado pelas Análises Prévias, delimita algumas variáveis importantes da pesquisa através das quais o ensino possa atuar, denominando-as de variáveis de comando, que são as variáveis microdidáticas ou macrodidáticas", e diz ainda que dentro desse contexto deve ser levados em consideração os seguintes pontos: Ilustrar as escolhas locais e relacionando-as com as globais, pontuando também as características da situação adidática ora desenvolvida; analisar os pontos importantes para o aluno, no que diz respeito a ação, seleção, decisão, controle e validação que o mesmo terá durante o processo de experimentação; prever os comportamentos possíveis e com isso tentar mostrar como a análise controla seus significados e sustentar que esses comportamentos descritos aconteceram através do trabalho feito centrado na aprendizagem.

Em nosso trabalho, estas afirmações estão relacionadas aos diagnósticos da revisão de estudos, assim como também nas definições, extensão da definição e operações relacionados a intervalos de números reais. É nesta etapa que seguimos em frente no desenvolvimento das atividades que compõem a Sequência Didática, escolhendo o lócus, organizando as tarefas de aplicação, para a devida atuação do professor em sala de aula. Foram apresentadas aos alunos 12 exercícios relacionados ao tema de estudo.

Na Experimentação é que colocamos em prática a Sequência Didática desenvolvida para o objeto de estudo, levando em consideração os resultados obtidos quando da realização da Concepção e Análise a Priori, fazendo seus devidos ajustes. E com isso diz Almouloud e Silva (2012, p.27), que “a experimentação consiste na aplicação da sequência didática, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação”.

Quando da aplicação da nossa sequência didática, escolhemos uma turma do 1º ano do ensino médio de uma escola da educação básica da rede pública de Belém. As atividades que foram propostas, foram analisadas levando em consideração os resultados previamente obtidos nas análises a priori, e assim obtivemos os resultados necessários para serem usados na construção da Análise a Posteriori e Validação.

No que tange à Análise a Posteriori e Validação, nos baseamos na definição de Almouloud e Silva (2012, p.27), que nos diz que Análise a Posteriori e Validação:

> Consiste em fazer uma análise num conjunto de dados coletados no decorrer da experimentação, tendo como exemplo, produção dos alunos, registros de observações e registro em vídeo. Nessa fase, se faz necessário sua confrontação com a análise a priori para que assim seja feita sua devida avaliação ou não das hipóteses formuladas quando da investigação.

A validação ou não das condições hipotéticas de nosso trabalho de pesquisa, acontecerá levando em consideração pontos importantes, como a própria aplicação de nossa sequência didática, assim como também nos resultados da resolução dos exercícios proposto para os alunos. Esses pontos nos darão sustentáculo para verificar o grau do aprendizado do alunado.

Dando prosseguimento, falamos sobre sequência didática e destacamos um trabalho importante relacionado à ela, que incide diretamente no ensino da Matemática, construído por Cabral (2017), denominado por Unidade Articulada de reconstrução Conceitual (UARC).

2.2 Sequência Didática

O termo Sequência Didática, surgiu em Genebra, na França em 1980, resultado de experiências de estudo de alguns pesquisadores da Universidade de Genebra. Esse grupo de pesquisadores organizou um processo de ensino que envolveu oficinas ligadas a diversos gêneros linguísticos, por essa razão que a sequência didática está ligada com mais frequência no campo da linguística, porém ela pode ser utilizada em qualquer área do ensino, em particular na Matemática.

A sequência didática foi introduzida no Brasil, com o surgimento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNS) em 1992, e a mesma veio com a finalidade de ser implementada, em qualquer área do conhecimento.

A forma de caracterizar as sequências de atividades é o que determina as características diferenciais da prática de ensino. Vemos que as atividades aparecem tanto no modelo tradicional de aula, quanto nos projetos de pesquisas globais. Essas atividades adquirem personalidade, levando em consideração sua organização e articulação de forma ordenada (ZABALA, 1998).

Ainda de acordo com Zabala (1998, p.18), sequência didática: “É um conjunto de atividades ordenadas, estruturantes e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”.

Zabala (1998) diz que existem alguns questionamentos a se fazer no que diz respeito a diferentes sequências didáticas, para fins de reconhecer a sua validade, mas também para que se possa encontrar caminhos para reforçar algumas atividades ou ainda acrescentar outras. Tais questionamentos sobre sequência didática expressa, que existem atividades:

- Que nos levam a perceber os conhecimentos prévios dos alunos em relação a novos conteúdos no processo de aprendizagem?
- Que os conteúdos oferecidos sejam significativos funcionais aos alunos?
- Que estão ligados diretamente ao nível de desenvolvimento dos alunos?

- Que representem de forma similar um determinado desafio ao aluno, levando em conta suas competências atuais, permitindo assim, criar zona de desenvolvimento proximal, tendo condições para intervir?
- Que provoquem um conflito cognitivo e promovam a atividade mental dos alunos, para que venham relacionar os novos conteúdos com os antigos?
- Que sejam motivadores na aprendizagem de novos conteúdos?
- Que estimule a auto-estima e o auto- conceito, para que perceba que seu esforço valeu a pena?
- Que ajudem o alunado a adquirir habilidades relacionadas com o aprender a aprender e com isso ser cada vez mais autônomo em suas aprendizagens?

Para fins de analisar a sequência didática, diz Zabala (1998) que devemos examinar primeiramente os conteúdos a serem trabalhados, para que se possa saber se são apropriados para alcançar os objetivos da pesquisa. Tais conteúdos são: Conceituais, Procedimentais e Atitudinais.

Os Conteúdos Conceituais requerem a compreensão do significado, com isso nas atividades devem ser levados em consideração os conhecimentos prévios dos alunos, assegurando a significância e funcionalidade adequadas ao nível de desenvolvimento dos alunos, provocando assim atividades mentais.

Nos Conteúdos procedimentais, as atividades devem partir de situações significativas e funcionais, assim como também atividades de trabalho independentes, a fim de que seja alcançado o aprendizado e a aplicabilidade do mesmo. Nesses conteúdos devemos aplicar exercícios progressivos das diferentes ações que formam os procedimentos, as técnicas ou estratégias. E neste contexto deveremos ter um tempo maior disponível para executá-los.

Os Conteúdos Atitudinais estão diretamente ligados ao campo afetivo e condutuais, salientado que o campo afetivo atue de forma significante na aprendizagem dos alunos, isso faz com que estes conteúdos sejam mais complexos que os outros dois. Aqui as atividades devem englobar os campos cognitivos, afetivos e condutuais, estabelecendo assim uma melhor relação pessoal com o objeto, levando os alunos a intervir em suas ações.

Ainda neste contexto Zabala (1998, p.20), faz algumas afirmações, com relação a uma sequência didática, como a seguir:

> -Sequência Didática, tem a característica de articular as atividades executadas ao longo do processor de ensino e aprendizagem, e com isso podemos analisar as intervenções segundo as mesmas;
> -A relação de professores e alunos ou entre alunos e alunos dentro da sala de aula atinge os vínculos afetivos e a comunicação entre esses atores, criando assim uma boa convivência;
> -Através do trabalho em grupo, é explorado e desenvolvido o lado social do alunado no ambiente escolar;
> -Os espaços obviamente têm que serem um tanto rígidos, e o tempo não pode ser modificado, a não se que seja adaptado às necessidades do processo de ensino;
> -Organizar os conteúdos é de suma importância, uma vez que, segue uma lógica oriunda das estruturas das disciplinas;
> -O uso dos materiais curriculares e de recursos diferenciados, promovem papel importante nas interações, assim como na comunicação, na exposição, na entrega das atividades, na experimentação e para elaboração de exercícios e aplicações;
> -No que diz respeito a avaliação, diz que os métodos de avaliar, os desafios e ajudas propostas, as esperanças, as informalidades, a distribuição dos grupos, são pontos que estão fortemente ligados a ela, ou seja, a avalição.

Em conformidade com o exposto acima Cabral (2017), levando em consideração o processo de reconstrução de conceito, sugere um modelo cuja a estrutura serve para a construção de Sequências Didáticas, para serem usadas no ensino de Matemática na educação básica, modelo este, originado de diversas intervenções estruturantes criadas para este objetivo, a qual denominou de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC).

Para Cabral (2017, p.12), Sequência Didática é:

> Um conjunto articulado de dispositivos comunicáveis de natureza escrita ou oral que sistematiza as intervenções de ensino com a intencionalidade objetiva de estimular a aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de matemática a partir da percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas.

Cabral (2017, p.59) diz também o seguinte:

> (...) vamos admitir que o objeto matemático a ser estudado, digamos como uma superfície de área denominada S, a reconstrução conceitual desse objeto seria o procedimento adotado, no sentido de se determinar a medida da área de uma superfície a partir de uma unidade a qual denominamos Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC). Desse modo, cada UARC é definida como conjunto de argumentações empírico-intuitivas construído por todas as Intervenções Estruturantes pré-formais que antecedem e inclui alguma Intervenção Formalizante. Em outros termos, cada Intervenção Formalizante estabelece um recorte

> argumentativo unitário que, em tese, contribui/estimula a reconstrução de um conceito do saber matemático escolar e, além disso, armazena a história epistemológica dessa reconstrução.

Para um melhor entendimento da construção de uma UARC, a mesma é descrita em seis categorias estruturantes que concretizam o texto de uma Sequência Didática, as quais chamamos de: Intervenção Inicial (I_i), Intervenção Reflexiva (I_r), Intervenção Exploratória (I_e), Intervenção Formalizante (I_f), Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r) e Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a)

Quadro 1 - Intervenções Estruturantes de uma Sequência Didática proposta por Cabral (2017).

INTERVENÇÕES ESTRUTURANTES	ESCRITAS	Pré-Formal -Intervenção Inicial (I_i) -Intervenção Reflexiva (I_r) -Intervenção Exploratória (I_e)
		Formal -Intervenção Formalizante (I_f)
		Pós-Formal -Intervenção de avaliação Restritiva (IA_r) -Intervenção de Avaliação Aplicativa (IA_a)
	ORAIS	Intervenção Oral de Manutenção Objetiva(I-OMO)

Fonte: Adaptado de Cabral (2017, p.97)

A intervenção Inicial (I_i) é o momento inicial do processo, no qual o professor leva os alunos a perceber as regularidades do conceito através de observações ou ainda de forma inconsciente.

A Intervenção Reflexiva (I_r) se caracteriza através dos questionamentos, feitos em sala de aula, uma vez que o professor durante todo o tempo de aplicação do processo de aprendizagem, leva os alunos a pensar sobre suas práticas e suas consequências, relacionadas às atividades que estão realizando.

A Intervenção Exploratória (I_e) tem a característica de aprofundamento, no que diz respeito às respostas obtidas pelos alunos, proveniente das Intervenções Reflexivas (I_r)

levando os mesmos a avançar no aprendizado, fazendo experimentos, preencher tabelas, construir gráficos etc.

Na Intervenção Formalizante (I_f) ocorre um fortalecimento do conhecimento adquirido pelos alunos, através de uma linguagem que satisfaça o estudo formal, ou seja, uma linguagem matemática.

Na Intervenção Avaliativa Restritiva se inicia a sondagem do que foi aprendido do conceito do objeto de estudo em reconstrução. Aqui busca-se conferir a aprendizagem dos alunos, relacionada a dois pontos importantes, que são: O que é o objeto matemático de estudo? E, como se justificam e operam as propriedades e operações? Enquanto que a Intervenção Avaliativa Aplicativa tem como objetivo a resolução de problemas de aplicação, levando o aluno a pôr em prática os conceitos associados às propriedades operatórias.

Segundo Cabral (2017), existem alguns modelos aos quais as intervenções ilustradas acima fixam a Sequência Didática relacionados aos conteúdos de Matemática ligados â educação básica.

Com relação a Intervenção Inicial foram geradas duas modalidades para concretizar a mesma, as quais são: A "Exploração Potencial (E_p)", (I_i– E_p) e a "Conexão Pontual (C_p)", (I_i– C_p). Aqui o professor é um orientador do processo de reconstrução de um ou mais conceitos.

Toda Sequência Didática está munida de intencionalidade, que é de suma importância para um planejamento bem construído, e através de provocações oriundas das Intervenções Estruturantes e de Intervenções Ocultas, o aluno se vê envolvido em um "momento didático" discursivo.

Tais Intervenções Ocultas, Cabral (2017) as denominou de Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (I–OMO), que são importantíssimas, pois auxiliam o professor a articular se os alunos estão próximos ou distantes do objeto de estudo, bem como manter o objeto proposto e o centro da reconstrução que deseja alcançar através da Sequência Didática.

Levando em consideração todo desenvolvimento exposto acima, no que se refere às Intervenções Estruturantes conforme Cabral (2017), as escolhemos como sustentáculo para a Sequência Didática que será aplicada em nosso trabalho de pesquisa.

Seguindo adiante nosso trabalho, mostramos a Análise Microgenética definida por Cabral (2004) e Goes (2000).

2.3 Análise Microgenética

Em busca de investigar os indícios de aprendizagem, através dos registros das interações em sala de aula entre os atores, quando da aplicação da Sequência Didática, precisamos ter em mãos um instrumento metodológico voltado para a construção desses dados.

Então para esta investigação, diz Cabral (2004), que deve ser levado em conta, a intencionalidade, planejamento, tempo, atenção relacionada aos pequenos detalhes que ocorrem na relação dialética de construção de conhecimento entre os sujeitos. Aqui, executa-se um relato minucioso do que ocorre em sala de aula, desenvolvendo o uso de vídeo, filmagens e transcrição das falas interativas.

Neste contexto, precisamos estar atentos aos detalhes quando da aplicação da sequência didática, para que tal investigação seja alcançada.

Góes (2000), introduz uma grande contribuição no estudo das pesquisas, no que diz respeito à metodologia de ensino, chamada de “Análise Microgenética”, que vem sendo aplicada vastamente no campo da educação e da psicologia.

Um ponto importante é que a análise microgenética, está ligada à matriz histórico-cultural e se distingue de outras análises de microeventos, relacionadas a diferentes correntes teóricas. Tal distinção se deve pelo fato de que as análises de microeventos não assumem o centro do cruzamento das dimensões cultural, histórico e semiótico no estudo do funcionamento humano, como faz a análise microgenética (CABRAL, 2004).

Temos então, uma ferramenta importante no que diz respeito à metodologia a ser aplicada em sala de aula, e em particular na aplicação de uma sequência didática.

Conforme Góes (2000), a análise microgenética é uma forma de construção de dados que requer uma atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações subjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos.

Góes (2000), diz que existe também uma metodologia diferenciada, que aborda as minúcias (relatos), e que vem sendo usada de modo crescente na investigação de processos intersubjetivos, envolvendo o dia a dia no ambiente escolar, assim como atua na sondagem de informações que resultam na organização da interação social de um grupo, a essa metodologia chama de microetografia.

Percebe-se então, uma semelhança entre as análises microgenética e a microetnografica, pois a segunda, envolve interações e cenários sócios-culturais, porém distingue-se da primeira pois a qualificação genética estão sustentadas nas concepções de Vygotsky, relacionadas ao funcionamento humano, explorando assim as minúcias de um trabalho de pesquisa e contribuindo para a reconstrução dos conceitos envolvidos no mesmo.

Em nosso trabalho de pesquisa, será aplicada uma Sequência Didática, que envolverá as interações de professores e alunos no ambiente escolar. E através dos episódios ocorridos, serão observados os indícios de aprendizagem.

Neste contexto, diz Cabral (2004), que a Análise Microgenética é um poderoso instrumento de investigação sobre a construção do conhecimento quando se trata do encontro de indivíduos em situações de ensino-aprendizagem dentro do ambiente educacional.

Góes (2000), baseado nos pressupostos de Vygotsky, diz que a Análise Microgenética é aquela que envolve o acompanhamento minucioso da formação de um processo, detalhando as ações dos sujeitos e as relações interpessoais, dentro de um curto espaço de tempo. Essa duração corresponde a uma ou poucas sessões, em delineamentos planejados ou a curtos segmentos interativos, em situações naturais. È uma espécie de “estudo longitudinal de curto prazo” e uma forma de identificar transições genéticas, ou seja, a transformação nas ações dos sujeitos e a passagem do funcionamento intersubjetivo para o intra-subjetivo (GÓES, 2000).

Neste contexto associa essa interpretação a um jogo de quebra-cabeças, onde os atores são, mãe e criança, e que as análises são conduzidas para os movimentos e falas desses atores, assim como para os indicadores de internalização de ações pela criança.

Relacionado ao exposto acima, a Análise Microgenética, é um instrumento que indica sinais de aprendizagem inseridos no exame dos processos interativos ou enunciativo-discrursivos (GÓES, 2000 *apud* CABRAL, 2004).

Por conseguinte, existem então, segundo Góes (2000 *apud* CABRAL, 2004), três direções a se tomar para se estudar minuciosamente os processos interativos, que são: a cognitivista, a interacionista e a discursiva.

A cognitivista, tem como foco o plano interpessoal durante os processos interativos.

A interacionista, consulta as relações interpessoais, o jogo conversacional como exigência, para o funcionamento intrapessoal.

E a discursiva, que favorece a dimensão dialógica e faz a elação entre a interação, discurso e conhecimento. Na última direção, se encontra o benefício na medida em que pode ser identificada pela busca de compor o estudo da microgênese com um conjunto de contribuições da análise do discurso e da teoria da enunciação.

Diante de todo exposto acima, a característica mais importante da Análise Microgenética, está na forma de conhecer que está orientada para as minúcias, detalhes e ocorrências residuais, como indícios, pistas, signos de aspectos relevantes num processo em curso, que permitem interpretar o fenômeno de interesse, além disso, esta análise esta centrada na intersubjetividade e no funcionamento enunciativo-discursivo dos sujeitos e é guiada por uma visão individual e interpretativo-conjectural (GÓES, 2000 *apud* CABRAL, 2004).

Em nosso trabalho de pesquisa, a Análise Microgenética, proporciona uma sondagem em meu trabalho em sala de aula, no que diz respeito à aplicação da Sequência Didática ora proposta, assim como promove novas práticas para o ensino, levando em consideração os processos interativos, para uma melhor construção do processo de ensino e aprendizagem.

No sentido de elucidar melhor a intersubjetividade e o funcionamento enunciativo-discursivo, mostramos a seguir a Análise do Discurso.

2.4 Análise do Discurso

Para Driver (1983 *apud* VIVIAN, 2006) no processo de ensino e aprendizagem, devemos levar em consideração os conhecimentos prévios dos alunos, uma vez que os mesmos estão presentes nos acontecimentos que ocorrem no ambiente escolar. Esses conhecimentos prévios têm grande influência no comportamento dos alunos, ou seja, nas observações, nas inferências que constroem e inclusive num caminho que estrutura um experimento. Os conhecimentos adquiridos em situações formais, como conferências, palestras etc..., também são influenciadas pelos conhecimentos prévios dos alunos, podendo assim divergir dos que se ensinam, levando a implicar em suposições sobre a maneira de como ocorrem, e podendo ainda atrapalhar a compreensão de alguns assuntos.

Segundo Vivian (2006), diversos trabalhos de pesquisa têm destacado a importância das interações discursivas na sala de aula, como o objetivo de ampliar os conceitos que têm significância para o alunado. Neste contexto, o processo de ensino e aprendizagem é visto como uma reconstrução dos conhecimentos prévios de suas realidades, no espaço comunicativo/social dentro da sala de aula. Estes estudos evidenciam que tanto os alunos como os professores, através da socialização de idéias, têm alcançado um sólido suporte para estimular o processo de ensino e aprendizagem, e com isso ressaltam a importância de levar em consideração a aplicação em sala de aula o desenvolvimento da prática discursiva-argumentativa.

Vivian (2006), diz que, a interação dialógica dentro de sala de aula, é um processo de comunicação, e a linguagem usada é um fator importante, que determina a construção do conhecimento cientifico pelo aluno com a devida mediação do professor. E como a sala de aula é um ambiente estimulador e as atividades que nela acontecem são planejadas, oferecem então, condições para tornar os conceitos dos alunos mais significativos, isso é claro, levando em consideração, as ideias que poderão ser reestruturadas na interação social que acontecem entre professor e aluno e ainda entre alunos.

A sala de aula, comporta pelo menos duas linguagens sociais diferentes que são, a ciência e o ensino, que interagem para fins de criação de novos significados, ou seja, a dialogicidade e polifonia, que neste contexto, tem significante importância. Neste sentido, diálogos em sala de aula são de grande importância para o processo de interações entre professores e alunos (MORTIMER; SCOTT, 2002, apud CABRAL, 2004).

Para Cabral (2004), a função da linguagem, por um lado é homogênea, quando as falas do professor e aluno ou vice-versa são coincidentes e por outro lado essa função, se estabelece quando são alcançados novos significados ou conceitos.

Ainda neste contexto, Cabral (2004, p. 108), diz que na construção discursiva em contextos argumentativos, a análise do discurso em sala de aula é de tal forma um privilégio, pois estuda os processos educacionais, possibilitando assim, meios para a devida compreensão dos mecanismos e condições que oportunizam a construção dos significados relacionados às interações de professores e alunos em sala de aula.

Os conceitos oriundos das interações em sala de aula, possuem pontos independentes, porém com a mesma importância, assim como adquirem um novo sentido e, no final serão internalizados pelo professor e alunos. Neste contexto ocorre uma troca de conhecimentos entre os atores, na esperança de um mútuo crescimento, e com isso:

> O que nos impressiona são as diferentes formas pelos quais os professores interagem com seus alunos ao falar sobre os conceitos científicos, em algumas salas as palavras estão por toda parte. Os professores fazem perguntas que fazem os alunos pensar e os alunos são capazes de articular suas idéias m palavras, apresentado pontos de vistas diferentes. Em algumas ocasiões o professor lidera as discussões com toda a classe. Em outras, os alunos trabalham em pequenos grupos e o professor desloca-se continuamente entre os grupos, ajudando os alunos a progredirem nas tarefas. Em outras salas, o professor faz uma série de questões, e as respostas dos alunos, na maioria das vezes limitam-se às palavras aqui e acolá preenchendo o discurso do professor (MORTIMER; SCOTT, 2000, apud CABRAL, 2004, p.109).

Nesse sentido, as maneiras que o professor age, afim de dirigir as interações para a construção dos conceitos em sala de aula, é resultado do esforço de desenvolver uma linguagem que venha a descrever as gêneses de discurso das salas de aula.

Então, Mortimer e Scott (2000 *apud* Cabral, 2004) aponta uma estrutura analítica sustentada em cinco aspectos inter-relacionados que enfocam o papel do professor. Esses cinco aspectos, são agrupados da seguinte maneira: Em termos de foco de ensino, onde enfatiza as intenções do professor e o conteúdo; em termos de abordagem que enfoca a abordagem comunicativa; e em termos de ações, que enfatizam os padrões de interação, assim como as interações do professor em sala de aula.

Cabral (2004), destaca a centralidade da abordagem comunicativa na estrutura analítica. Esse destaque é resultado de que o conceito fornece uma perspectiva da maneira como o professor trabalha as intenções e os conteúdo a ser ensinado através das diferentes intervenções pedagógicas, que por conseguinte, resulta em diferentes padrões de interação.

Então, com isso, Cabral (2004), detecta quatro classes de abordagem, às quais são definidas através da caracterização do discurso entre professor e alunos, ou simplesmente entre alunos, em termos de duas dimensões, que são: discurso dialógico, quando o professor considera as falas o estudante, através do seu próprio ponto de vista; discurso de autoridade, quando o professor leva em conta as falas do aluno apenas no que concerne ao discurso cientifico escolar que está sendo construído.

Ainda neste contexto, diz Cabral (2004), que um discurso é interativo quando ocorre a participação de mais de uma pessoa enquanto que o discurso não-interativo, ocorre quando o discurso é construído por uma única pessoa.

As abordagens citadas acima aparecem da fusão das duas dimensões, que podem ser usadas pelo professor em sala de aula, assim como também, para caracterizar interações em pequenos grupos de alunos.

Assim, Cabral (2004), diz que o discurso interativo-dialógico ocorre quando são exploradas idéias pelo professor e pelo aluno, formulando assim perguntas, levando em consideração diferentes pontos de vistas. Quando é reconsiderado pelo professor diversos pontos de vista, evidenciando assim similaridades e diferenças, seu discurso será não-interativo/dialógico, enquanto que se os alunos forem conduzidos pelo professor por meio de uma sequência de perguntas e respostas, tendo como objetivo alcançar uma visão específica, seu discurso será interativo/de autoridade. E por fim, seu discurso será não-interativo/de autoridade, quando o professor apresenta apenas uma visão específica.

Cabral (2004), enfatiza que, levando em consideração as quatro abordagens comunicativas acima citadas, as interações são percebidas, quando de alternância das falas dos atores, ou seja, do professor e dos alunos, ocorrendo assim a tríade I/R/A. A I/R/A se inicia pelo professor, em seguida, o aluno responde e após disso o professor faz sua avaliação. Neste contexto, o professor pode concordar com a fala do aluno, através de certas intervenções não demoradas, nas quais repete uma parte das falas do aluno. Essas intervenções são na verdade uma ajuda aos alunos, como forma de um feedback, para fins de melhorar suas perguntas e colocações, gerando assim, as seguintes sequências de turnos (I/R/P/R/P... ou I/R/F/R/F...), onde P significa uma ação discursiva que permite a continuação da fala do aluno enquanto F significa o feedback oferecido pelo professor, para que assim os alunos venham a melhorar o objeto de suas respostas.

Existem também, outras formas de intervenções pedagógicas, que e acordo com Scott (1998, *apud* VIVIAN, 2006, p. 26), são em número de seis, caracterizando assim, ações do professor em sala de aula, são elas: Dando forma aos significados, selecionando significados, marcando significados chaves, compartilhando significados, checando o entendimento dos estudantes e revendo o progresso da estória científica:

> Em dando forma aos significados, o foco é a exploração das ideias do alunado, e tem como ação do professor a introdução de um novo tema, interpretando uma resposta do aluno, mostrando com isso a diferença entre dois significados.
> Em se tratando de, selecionando significados, o foco é trabalhar os significados no desenvolvimento da estória científica, tendo como ação do docente, a consideração das respostas dos alunos na sala de aula, assim como também, ignorar a resposta de um aluno.
> Em marcando significados chaves, não se tem o foco e sim a ação do professor que é a repetição de um enunciado, solicitação aos alunos que repitam um enunciado, estabelecer uma sequência I/R/A com um aluno, para fins de validação de uma ideia, uso de uma entonação de voz particular para dar vida a alguns trechos doenunciado.
> No que diz respeito a compartilhando significados, o foco é oferecer os significados para todos os alunos que estão em sala de aula, tendo como ação do professor, a repetição da ideia de um aluno para toda a clientela da turma, solicitar a um aluno que repita um enunciado para a classe, compartilhar os resultados dos diferentes grupos com toda a classe, solicitar aos alunos que organizem suas ideias ou mesmo, dados de experimentos para serem divulgados a todos os alunos da classe.
> No que tange a checando o entendimento dos estudantes, o foco é a verificação dos significados que os alunos estão atribuindo em situações especificas, tendo com atuação do professor, a solicitação a um aluno da classe que explique melhor sua ideia, que os alunos escrevam suas explicações e verifiquem se há um conceito formado da turma com relação a alguns significados.
> E por fim, quando se trata de revendo o progresso da estória cientifica**,** temos como foco, relembrar e antecipar os significados e tem como ação do professor a sintetização dos resultados experimentos particular, o relembrar das atividades usadas em uma aula anterior e rever o progresso no desenvolvimento da

> estória cientifica até a atualidade (SCOTT, 1998 *apud* VIVIAN, 2006, p. 26).

Então, com isso, a Análise do discurso é mais uma contribuição teórica que alicerça a Análise Microgenética, no sentido de analisar as interações realizadas em sala de aula, para a construção do conceito e operações de Intervalos de Números Reais.

3. SOBRE O ENSINO DE INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS

Neste capítulo, o objetivo é apresentarmos as análises preliminares de acordo com o que preconiza Artigue (1996), que estão divididas em duas etapas, ou seja, a revisão da literatura sobre intervalos de números reais a concepção de alunos, essa última feita através de pesquisa de campo com alunos do 1º ano do ensino médio da rede estadual de ensino. Neste momento através dessas análises, buscamos identificar problemas oriundos do ensino e aprendizagem de intervalos de números reais, no que diz respeito à dificuldades, e com isso elaborarmos uma sequência didática como meio de ajuda a sanar tais dificuldades encontradas.

3.1 Revisão de Estudo

Neste momento apresentamos os trabalhos sobre o ensino de intervalos de números, neste contexto fomos direcionados a analisar alguns desses estudos referentes ao nosso objeto de estudo no ensino médio. Analisamos os dez trabalhos extraídos dos bancos de algumas universidades e dos anais dos congressos vinculados a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

Após analisarmos os trabalhos acima mencionados, distribuímos os mesmos em três categorias, ou seja, estudos diagnósticos, estudos teóricos e estudo experimentais, que estão ilustradas no quadro seguir:

Quadro 2 – Trabalhos selecionados sobre revisão de estudos

CATEGORIA	AUTOR(ES)/ANO	NATUREZA/TEMA	INSTITUIÇÃO
Estudos diagnósticos	Gomes *et al*. (2014)	Artigo / A construção dos números reais no ensino médio. Algumas proposições e reflexões.	UNIPAMPA
Estudos Teóricos	Gouveia e Dias (2007)	Artigo / Panorama atual do ensino da noção de intervalos sobre R.	UNICSUL/UNIFIEG O
EstudosTeóricos	Freiria (1992)	Trabalho de pesquisa / A teoria do conjunto de Cantor	USP
Estudos Teóricos	Souza (2013)	Trabalho de pesquisa / Intervalos numéricos, operações com intervalos e introdução a função.	Universidade da madeira
Estudos Tóricos	Lopes (2006)	Dissertação / Construção dos números reais	Universidade da madeira
Estudos Teóricos	Cruz (2011)	Dissertação / Os números reais. Um convite aos professores de matemática do ensino fundamental e do ensino médio.	Universidade Federal de Juiz de Fora.
Estudos Teóricos	Tortelli *et al*. (2015)	Artigo / Ambientes intervalares sob diferentes critérios.	Universidade federal de Pelotas.
Estudos Teóricos	Oliveira (2017)	Conceitos de análise Matemática na reta para bem compreender os números reais no ensino médio.	Universidade Federal de Campina Grande
Estudos Teóricos	Malavazi (2004)	Artigo / Aritmética Intervalar: Histórico, Topologia e Algorít-Mos.	Universidade do Estado de Mato Grosso..
Estudos Experimentais	Aguilera *et al*. (2012)	Artigo / Uma proposta para o ensino de aprendizagem de intervalos reais por meio de jogos,	Universidade do Estado do Mato Grosso

Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

3.1.1 Estudos Diagnósticos

Estes tipos de estudos, tem como principal finalidade, analisar e identificar as dificuldades do alunado, no que se refere ao ensino e aprendizagem de intervalos de números reais.

Gomes *et al*. (2014) com o trabalho: “A construção dos números reais no ensino médio”. Algumas proposições e reflexões, tem como objetivo sondar as dificuldades existentes no ensino de conjuntos de números reais. Com isso foi aplicado um questionário em uma turma do 3º ano do curso técnico em informática integrado ao ensino médio, onde constavam questões diversas sobre conjuntos de números reais. Em questões envolvendo números naturais e inteiros as dificuldades foram poucas. Diz os autores que nesses dois conjuntos, as dúvidas são bem compreensíveis, os números inteiros são os primeiros que os alunos veem ainda lá no ensino fundamental e que segundo Boyer (2010, p.4) “O conceito de número inteiro é o mais antigo na matemática, a sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica”, então são variadas as explicações que ocasionam a maior compreensão dos alunos.

Seguindo adiante os autores mencionam que houve muitas dificuldades em questões em que se perguntava, sobre que números racionais, irracionais ou reais estão entre dois números reais. Também mencionaram os autores que houve dificuldades em algumas questões que tratavam de representações de um intervalo, onde a maioria se confundiu e não entenderam, por exemplo (1,5) como um intervalo. Segundo Menezes (1999, p. 3) “isso se deve porque a linguagem matemática não se aprende a falar em casa, desde tenra idade aprende-se, a utilizar na escola”.

Então concluíram os autores que, foi percebido na fala dos alunos que, nunca durante todas suas vidas de estudante, havia sido proposto a eles, que pensassem sobre os números que habitualmente usam, tão pouco sobre que tipos de números e quantos números existem entre dois outros números reais. Ficando aqui então uma profunda reflexão para docentes de Matemática a proporem novos métodos de ensino.

3.1.2 Estudos Teóricos

Nesta seção, abordaremos os trabalhos que enfatizam o aprofundamento do conceito do objeto de estudo, assim como também a relação com outros assuntos da Matemática.

Gouveia e Dias (2007) em “Panorama Atual do ensino da noção de intervalos sobre R”, objetivou analisar a relação de noção de intervalos sobre R com outros assuntos da Matemática. Iniciaram com uma rápida abordagem sobre a construção do conjunto dos números reais que serve de base para a noção de intervalos sobre R. A partir desta noção de base, autores mencionam um papel importante deste tema, no que diz respeito a noção de função, pois é um dos conhecimentos prévios para a construção de gráficos e estudos mais avançados, em particular em Cálculo Diferencial e integral, visto que, a todo o momento que se escolhem alguns pontos do domínio de uma função e associando-os as suas respectivas imagens, estabelece-se uma continuidade intuitiva entre dois pontos, caracterizando-se um intervalo.

Mencionam também que, através da representação gráfica das funções que foram modeladas para determinadas situações o estudante tem uma melhor visualização dos valores que pertencem ao domínio de uma função e mais, é possível também estabelecer a relação entre o intervalo de validade do domínio com o intervalo de validade da imagem o que poderá facilitar a compreensão das noções intuitivas de limite e continuidade.

Os autores também colocaram em evidência que quando o estudante aprende o conceito de intervalos sobre R a partir de situações contextualizadas, onde ele pode fazer uma relação entre o conceito visto e aquilo que ele já conhece, ele próprio poderá trabalhar as técnicas de determinação do domínio de uma função de maneira generalizada e ainda identificar o intervalo de validade restrito à situação para tal função. Ilustraram o seguinte exemplo: quando pedem aos estudantes que calculem a área de um retângulo que se pode contornar com um barbante de 40 cm, os estudantes podem verificar experimentalmente que o mais longo retângulo que eles podem imaginar não poderá ter dois lados paralelos de 20 cm, pois os outros dois lados paralelos não poderão serem nulos. Quaisquer outras medidas neste intervalo serão válidas. Já a área, que é dada pela imagem da função associada ao problema fica inserida em outro intervalo, que não é tão imediato de ser verificado através de experiência, necessitando utilizar valores do domínio e aplicá-los à função área para encontrar suas imagens e perceber os limites do intervalo que contém o conjunto imagem.

Os autores dizem também, que nesta perspectiva a “Teoria da Aprendizagem Significativa” de Ausubel dará subsídios para propor que este estudo dependerá claramente de conceitos que já fazem parte da estrutura cognitiva dos alunos, uma vez que estes só poderão compreender conjuntos, funções e intervalos se outros conceitos mais primitivos de álgebra e aritmética estiverem bem desenvolvidos. É importante observar que, não se aprende funções quando não se desenvolve a técnica de resolução de equações; não se constrói gráfico quando se desconhece a noção de relação e representação de conjuntos sobre a reta numérica; não se aprende intervalo quando não se desenvolve a noção intuitiva de conjuntos, e assim se segue com os novos conceitos que permitem sempre uma articulação com os conhecimentos prévios que já fazem parte das estruturas cognitivas dos estudantes.

Dizem também os autores, que nesse trabalho as técnicas são importantes no processo de manipulação dos objetos matemáticos, em particular dos conjuntos e suas representações como os conjuntos numéricos e suas relações de pertinência, igualdade e as relações de ordem e operações, o que sugere um trabalho sobre os níveis de conhecimentos que os estudantes utilizam e que se espera que disponham, para compreender e desenvolver os problemas que surgem. Sendo assim, a abordagem teórica proposta por Robert (1997) será utilizada para esboçar um panorama sobre os diferentes níveis de conhecimentos esperados dos estudantes quando trabalham com a noção de intervalo de conjuntos e suas propriedades.

Também se vê neste trabalho que os autores dizem que seria difícil pensar que haveria Matemática sem o uso das diferentes representações para seus objetos. O estudo da noção intuitiva de conjuntos, com todas as suas representações, símbolos, elementos, relações e operações, dificilmente poderia ser articulado sem uma representação simbólica adequada de seus conceitos. Sendo os intervalos casos particulares de representação de conjuntos, é preciso considerar suas diferentes representações para que seja possível desenvolver o estudo, por exemplo, das funções definidas em intervalos ou das inequações.

Concluíram então os autores que, os resultados obtidos, direcionam a analisar diversos conceitos matemáticos onde a noção de intervalos está relacionada. Assim é preciso iniciar introduzindo a noção de número real e prosseguir com outros conceitos que são trabalhados tanto no ensino médio como no ensino superior.

Freiria (1992), em seu trabalho de pesquisa, A teoria do conjunto de cantor, teve como objetivo relatar sobre a cardinalidade, enumerabilidade, assim como também sua correspondência biunívoca.

Neste trabalho, o autor fala sobre as frações racionais e sua densidade. Também descarta a hipótese de que todos os números entre 0 e 1 por exemplo formam um conjunto enumerável.

O autor relata que Cantor estabeleceu um fato importante, ou seja, que existem pelo menos, dois tipos diferentes de infinito: O dos conjuntos dos números inteiros e o do conjunto dos números reais. Diz também que Cantor construiu um subconjunto infinito e não enumerável contido no intervalo [0,1], que na realidade é o conjunto e Cantor “mais infinito” que o conjunto dos números inteiros e “tão perfeito” quanto o conjunto dos números reais.

O autor também deixa claro que a teoria dos conjuntos é uma disciplina cuja importância é difícil exagerar, não só para a Matemática, mas para o conhecimento humano de um modo geral. Contudo, ela não é tão importante para o ensino de 1º e 2º graus, onde foi introduzida de maneira forçada e artificial. Entendemos que, a razão fundamental para a introdução da Matemática no ensino na educação básica, repousa no fato de que ela fornece instrumentos efetivos para compreender, atuar e criar no mundo que nos cerca. A teoria dos conjuntos, herança brasileira solitária do “modelo estruturalista bourbakiano americano” (Matemática Moderna), sob o ponto de vista do ensino, apresenta a Matemática, na maior parte dos casos, como um exagerado formalismo, escondendo e dissimulando os mecanismos de criação.

Como resultados importantes o autor relata a criação dos conjuntos infinitos, ou seja, o dos números inteiros e o dos números reais. Assim como também a construção de um conjunto infinito e não enumerável entre os números 0 e 1, chamado de conjunto de cantor.

Souza (2013), em seu trabalho intervalos numéricos, operações com intervalos e introdução a função, teve como objetivo relacionar o tema com situações do cotidiano.

A autora fala sobre alguns intervalos do dia a dia, como por exemplo: Intervalo Legal, que em 2012 tinha como justificativa o grande interesse dos alunos em participar de eventos esportivos dentro do ambiente escolar, percebemos a necessidade de orientar um evento que envolva a participação crítica e consciente dos alunos, dentro de padrões reconhecidos como sendo de boa; Intervalos de recuperação, no qual consistia em três diferentes intervalos de recuperação entre séries com cargas para 10 repetições máximas ; Intervalo de Confiança para a média quando o desvio padrão é conhecido. O objetivo da estatística é o de conhecer populações por meio das informações amostrais. Como as populações são caracterizadas por medidas numéricas descritivas, denominadas parâmetros, a estatística diz respeito à realização de inferências sobre esses parâmetros populacionais desconhecidos.

Os resultados deste trabalho foi a atuação da Matemática e em particular o estudo de intervalos de números reais, refletindo no dia a dia das pessoas.

Lopes (2006), cujo trabalho foi Construção dos Números Reais, teve como objetivo mostrar um processo que enfatiza essa construção.

A autora mostra neste trabalho, a construção dos números reais, partindo do conjunto dos números racionais, e tendo por base a noção de Corte ou Secção, utilizada pela primeira vez por Richard Dedeking em 1872.

A autora diz que, apesar de Dedeking não ter enunciado os Teoremas, Definições e propriedades como tal, optaram pelo uso dessa terminologia, para uma melhor interpretação da sua obra.

A autora destaca as propriedades do conjunto que constitui a base da sua construção: O corpo dos números racionais, que denota por R, mas que no momento, segundo a autora denotou por Q. Assim, inicia a sua construção com três propriedades dos números racionais e com as correspondentes por construção dos números reais utilizando a noção de corte de Dedeking.

Diz a autora que este método fala sobre a incompletude do conjunto dos números racionais, ampliando este conjunto com a criação de novos números, com o objetivo de que este adquira a mesma completude que uma linha, tendo por base a definição de corte ou secção, e demonstrou que nem todos os cortes são produzidos por números racionais.

Diz também a autora, que Dedeking construiu um novo conjunto, o conjunto dos números reais, formado por todos os cortes, mas as operações entre cortes não foram explicitadas em sua obra.

A autora destaca um resultado importante, que é a seguinte propriedade:(I) se $a>b$ e $b>c$ então $a>c$. Sempre que a e c são números diferentes, e b é maior do que um e menor do que o outro, iremos, sem hesitação devido à sugestão das ideias geométricas, expressar brevemente este aspecto afirmando: a está entre dois números b e c. (II) Se a e c são dois números diferentes, existem infinitos números diferentes entre a e c. (III) Se a é um número qualquer, então todos os números do sistema Q caem em duas classes

A1 e A2, cada uma delas contendo infinitos elementos; primeira classe A1 compreende todos os números *a1* que são menores do que *a*, a segunda classe A2 compreende todos os números *a2* que são maiores do que *a*; o próprio número *a* poderá pertencer à primeira ou à segunda classe, sendo respectivamente o maior número da primeira classe ou o menor número da segunda.

Em qualquer um dos casos, a autora diz que a separação do sistema Q nas duas classes A1 e A2 é tal que todo o número da primeira classe A1 é menor do que todo o número da segunda classe A2. E ainda neste contexto diz que considerando p e q como dois pontos diferentes numa linha reta L, e distinguindo por direita e esquerda as duas posições opostas de quaisquer dois pontos numa linha reta, Dedeking estipulou as propriedades anteriormente citadas para os números racionais, no que diz respeito a pontos sobre uma linha reta.

Assim, este trabalho demonstra ser eficaz no que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem demonstrando assim a importância da pesquisa nos parâmetros da educação, levando os profissionais a observarem novas metodologias a serem aplicadas em sala de aula.

Cruz (2011), em seu trabalho, os números reais: um convite aos professores de Matemática do ensino fundamental e do ensino médio, teve como objetivo apresentar o conjunto dos números reais em suas estruturas, algébricas e topológicas, de maneira a convidar o professor dos ensinos fundamental e médio a entender e, se possível, identificar em sua prática tal tratamento.

O autor enfatiza a importância de construir um elo entre o formalismo conceitual dos números reais e a Matemática vivenciada na escola básica, permitindo, tanto ao professor da educação básica quanto ao licenciando em Matemática, uma identificação e uma comparação desses elementos dos números reais estudados no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio quanto ao licenciado em Matemática, uma identificação e uma comparação desses elementos.

O autor fala que neste trabalho resumiu-se na busca de textos que tratassem sob todos os aspectos do tema em suas estruturas algébricas e topológicas e em quatro livros didáticos, sendo dois usados no ensino fundamental e dois usados no ensino médio, que pudessem contribuir para a identificação de elementos dos números reais estudados no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio.

O autor também diz que o levantamento bibliográfico foi realizado por meio de consultas a livros-textos de Análise Real, a livros didáticos, aos Parâmetros Curriculares de Matemática do ensino fundamental e do ensino médio, as teses, as dissertações, livros-textos de Educação Matemática e artigos.

Diz o autor que, as conclusões foram percebidas durante todo o processo de obtenção de dados, da redução, da escrita e da representação dos mesmos, permitindo que se avançasse progressivamente do exploratório para o descritivo e do descritivo para o explicativo.

Nesse trabalho, o autor fala que teve como resultado importante, uma oficina onde apresentou as representações decimais dos números reais em um desenvolvimento formal; discutiram questões que envolvem esse assunto no âmbito da educação básica e estudaram os conceitos que envolvem a densidade do conjunto dos números reais.

No trabalho de Tortelli *et al*., (2015), que tem o título Escolhendo ambientes Intervalares sob diferentes critérios, teve como objetivo automatizar a análise do erro computacional.

Através da utilização de intervalos, os autores buscaram um controle automático de erros com limites confiáveis.

Diz os autores que a aritmética intervalar utiliza intervalos reais para representar valores infinitos, valores desconhecidos ou para representar valores contínuos que podem ser conhecidos ou não.

Aqui também eles dizem que os intervalos servem para representar dados inexatos, aproximações e erros de truncamento de procedimentos. Neste contexto, eles dizem que para a obtenção de resultados com maior exatidão, cálculos numéricos devem ser suportados através da Matemática Intervalar e pela aritmética de exatidão máxima, o que implica que em computadores sejam realizados por meio de linguagens ou bibliotecas que tenham definidos o tipo de intervalo e as operações sobre ele, usualmente denominadas de linguagens XSC (eXtendedScientificComputation).

Os autores dizem também que, se estiver garantida a qualidade do intervalo solução e conhecendo o ambiente intervalar que retorna o intervalo com melhor qualidade, tem-se uma ferramenta intervalar confiável para ser utilizada em diversas aplicações.

Um resultado importante desse trabalho, diz o autor, que é a utilização desse assunto nos cálculos de erro absoluto e erro relativo, ou seja, quando se trabalha com números de ponto flutuante.

No trabalho de Oliveira (2017), cujo título é Conceitos de Análise Matemática na reta para bem compreender os números reais no ensino médio, teve como objetivo, estabelecer conexões entre conceitos aprendidos pelo aluno de licenciatura na disciplina de Análise Matemática na reta e os conceitos usados pelo professor de matemática do ensino médio em sala de aula.

Neste trabalho a autora fala sobre vários pontos no que diz respeito aos números reais, tendo como destaque, a apresentação dos mesmos de como é abordado em livros didáticos do ensino médio; através das construções geométricas, procurou discutir a impressão que os livros didáticos passam, de que podemos marcar exatamente qualquer número na reta real; abordou as ideias veladas de completude ensinadas nos livros didáticos de matemática do ensino médio; Trouxe, ainda, uma ideia de como a completude é trabalhada em livros de Análise Real, usados nos cursos de licenciatura e também a relação entre essas duas abordagens; discutiu sobre os intervalos encaixantes em livros de ensino médio, apresentando o Teorema dos Intervalos Encaixantes e algumas aplicações do mesmo; sugeriu uma definição de completude que um aluno de licenciatura poderia receber e, dessa forma estabelecer um elo entre as ideias de completude que usam o Axioma de Dedekind e o Teorema dos Intervalos Encaixantes (TIE).

Diz a autora que com a apresentação dos números reais nos livros didáticos de ensino médio, vimos que alguns conceitos e afirmações, por mais que fiquem velados para os alunos, por ainda não terem conhecimentos suficientes para entendê-los, podem ser trabalhados de melhor forma quando o professor compreende bem o que está nas entrelinhas e é capaz de transpor de maneira satisfatória os conhecimentos sobre os números reais, construídos ao longo da sua vida acadêmica, em particular na disciplina de Análise Matemática na reta. Na licenciatura em Matemática, é a disciplina de Análise Matemática que aborda com profundidade os números reais. Ao longo desse trabalho, buscamos aproximar da matemática escolar conceitos vistos nessa disciplina, aliando-os a assuntos algébricos e geométricos. Sobre a impressão de que os livros didáticos analisados repassam, de que todos os números podem ser marcados facilmente na reta real, podemos afirmar que é falsa: vimos que alguns números não podem ser construídos geometricamente e, para explicar isso, usamos conhecimentos algébricos. Quanto ao estudo sobre a definição de completude dos números reais, chegamos à conclusão de que esse conceito poderia ser apresentado nos cursos de licenciatura em Matemática usando-se o TIE. Dessa forma, a definição torna-se bem mais inteligível e não foge a conceitos abordados no Ensino Médio: Definição: o conjunto dos números reais é completo por nele valer o TIE.

A autora fala que, ao receber a definição de completude dessa forma, um aluno da licenciatura ficaria mais próximo do ambiente que encontrará mais tarde, que é a sala de aula e de seu material de trabalho, do qual faz parte o livro didático. Há algumas controvérsias acerca do papel da disciplina Análise Matemática para licenciandos, se alunos da Licenciatura em Matemática deveriam ou não cursar essa disciplina, motivo suscitador de alguns trabalhos a esse respeito, como os vistos na nossa introdução. Aqui diz a autora que é objetivar e nem nos propor a discutir esse fato neste trabalho, mas acreditar e advogar que alguns conceitos de Análise Real são conhecimentos indispensáveis para os futuros professores de Matemática atuarem com sucesso em sua profissão, pois, dessa forma, podem entender com profundidade e conhecer a justificativa matemática de assuntos que ensinam e que são veladamente usados em livros didáticos. Como resultado temos que, tais conceitos só podem ser compreendidos com profundidade com o conhecimento adquirido na disciplina de Análise Matemática, por meio do estudo da Análise Real, e foi isso que a autora exemplificou nesse trabalho. Entre outros fatores, o que não pode faltar é justamente uma apresentação que ligue conceitos da Análise Real a assuntos abordados no Ensino Médio.

Segundo Malavazi (2004), em seu trabalho, Aritmética Intervalar: Histórico, Topologia e Algorítmos, que tem como objetivo apresentar e explorar as operações da aritmética intervalar e algorítmos clássicos sobre resolução de equações algébricas e sistemas lineares, desenvolvidas sobre o ponto de vista deste tópico da computação científica.

Diz também o autor que as técnicas da aritmética intervalar, consistem em uma alternativa para alcançar limites garantidos para os resultados de processos computacionais, através do controle rigoroso e automático do erro sobre o resultado.

Afirma o autor que a vantagem do uso da aritmética intervalar aparece principalmente em problemas onde a instabilidade numérica (decorrente do uso da aritmética de ponto flutuante e da natureza dos problemas) é crítica. A vantagem é resultante da forma como os números reais são representados (um intervalo de pontos flutuantes que contém o real) e do fato de que os cálculos produzem um intervalo que, com certeza, contém o resultado real. Ou seja, o uso da matemática intervalar permite um controle de erros com limites confiáveis, além de provas de existência da solução de diversas equações.

Menciona o autor que a desvantagem decorrente da complexidade de cálculo das operações intervalares é compensada pela segurança e qualidade do resultado e pela "aceleração" decorrente da exploração do paralelismo das operações intervalares.

Ainda neste contexto, diz o autor que a computação consiste numa seqüência finita de operações, no entanto a solução exata de um problema, em muitos casos, requer uma seqüência infinita de operações aritméticas exatas. Isso nos motiva integrar a Aritmética Intervalar na solução desses problemas, pois conforme a mesma possibilita o controle rigoroso sobre os erros, como também nos possibilita o tratamento e modelagem da incerteza em computação.

É dito também pelo autor que a necessidade de se ter uma teoria consistente é que surgiu a análise de intervalos, uma teoria matemática com origem na década de 60, e que já em 1974, Leslie Fox propõe uma análise combinando diferentes áreas como análise intervalar, topologia intervalar, álgebra intervalar e outras, mostrando o grandioso avanço dessa teoria.

Como um resultado importante é que, os algoritmos intervalares, em contraste com os algoritmos pontuais, computam um intervalo como solução, com a garantia de que a resposta pertence a este intervalo.

3.1.3 Estudos Experimentais

E finalmente nesta seção, apresentaremos o estudo experimental, o qual tem por objetivo aguçar o conhecimento dos alunos, através de atividades e/ou experimentos no ambiente escolar.

A pesquisa de Aguilera *et al*. (2012), cujo o nome é: Uma proposta para o ensino de aprendizagem de intervalos reais por meio de jogos", tem como objetivo, mostrar que existem diversas formas de ensinar que proporcione aos estudantes, tanto entender quanto sentir prazer no ato de aprender intervalos reais e que leve pesquisadores e professores experimentarem as mais diversas metodologias, dentre as quais, os autores usaram aqui, os jogos educativos.

Os autores dizem que, este trabalho visou responder a três questionamentos:1) Como construir uma aprendizagem com planejamento do ensino de intervalos de números reais? 2) Como as pesquisas na área educacional, no que diz respeito a Matemática, que nos dão resultados importantes sobre o processo de ensino e aprendizagem podem contribuir para a organização do ensino de intervalos de números reais de forma mais lucrativa para os alunos? 3) Como atua o professor no que se refere ao seu planejamento de ensino de intervalos de números reais de forma compatível com o processo de ensino a aprendizagem?

Dizem também, no que se refere ao ensino da Matemática, o jogo é considerado como um instrumento facilitador do processo de ensino-aprendizagem, capaz de motivar o estudante e despertar o interesse pela disciplina.

Os autores executaram como procedimento metodológico, os "Jogos dos Intervalos" com alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola estadual, que seguiu os parâmetros de uma sequência didática. Neste contexto foi apresentada aos alunos uma tabela na qual seriam marcadas as operações de intervalos, que os alunos iriam realizar.

As atividades tiveram o objetivo de ensinar as operações de intervalos de números reais, e utilizaram os conceitos das formas de representações dos intervalos que o jogo oferecia. Os diversos tipos de intervalos oferecidos às equipes participantes do jogo serviram como perguntas ou questionamentos que são utilizados nas sequências didáticas, a fim de chegar a resultados satisfatórios. A sequência apresentou poucas situações de redescoberta, uma vez que boa parte dos conteúdos foi apresentada aos alunos.

Afirmam os autores que a atividade se mostrou bastante produtiva. Que os alunos manifestaram um grande interesse pelo jogo e se envolveram de forma ativa, trocando ideias e discutindo sobre os cálculos efetuados. Ainda segundo os autores, foi possível também observar, as principais dificuldades dos estudantes, referente ao conteúdo abordado e através de questionamentos foram levados a saná-los.

O resultado importante desse trabalho, conclui os autores, é que a utilização de jogos no processo de ensino e aprendizagem da matemática pode ser um caminho para quebrar barreiras e promover a socialização, propiciando um ambiente criativo e interativo na sala de aula, e que a troca de informações que acontecemem um ambiente de ensino mediado por jogos, enriquece a todos os envolvidos e torna a aprendizagem um ato de investigação e de questionamentos.

3.2 Concepção dos Alunos

Nesta seção, apresentamos os resultados da pesquisa feita com alunos do 1º ano do ensino médio, cujo objetivo foi diagnosticar as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem dos conceitos e operações de intervalos de números reais, tal pesquisa foi realizada em uma escola pública estadual da cidade de Belém do Pará, nos dias 13 e 14 de junho de 2017, tendo 100 alunos como participantes.

Obtivemos os dados desta pesquisa, através da aplicação de um questionário sócio-educacional, contendo perguntas de múltipla escolha, versando sobre o perfil dos alunos, currículo, avaliação e metodologia segundo a concepção do alunado. Buscamos esse caminho nos baseando na visão de Gil (2008), que diz o seguinte: o questionário possibilita atingir grande número de pessoas, implica em menores gastos, garante o anonimato das respostas, deixa as pessoas a vontade para responderem no momento que acharem conveniente e não expõem os pesquisadores à influência dos entrevistado. A aplicação dessa tarefa, se deu primeiramente com prévia autorização da equipe pedagógica da escola e dos respectivos professores de matemática das cinco turmas aleatoriamente selecionadas as quais tiveram em média 45 minutos para responder ao questionário. Organizamos as informações obtidas através de quadros, tabelas egráficos, de modo a facilitar as análises dos resultados obtidos, bem como a sistematização dos mesmos.

A principio nossa pesquisa identificou, através do quadro 3 abaixo, que dentre os 100 alunos participantes, entre 15 e 23 anos, 55% eram do sexo masculino e 45% do sexo feminino.

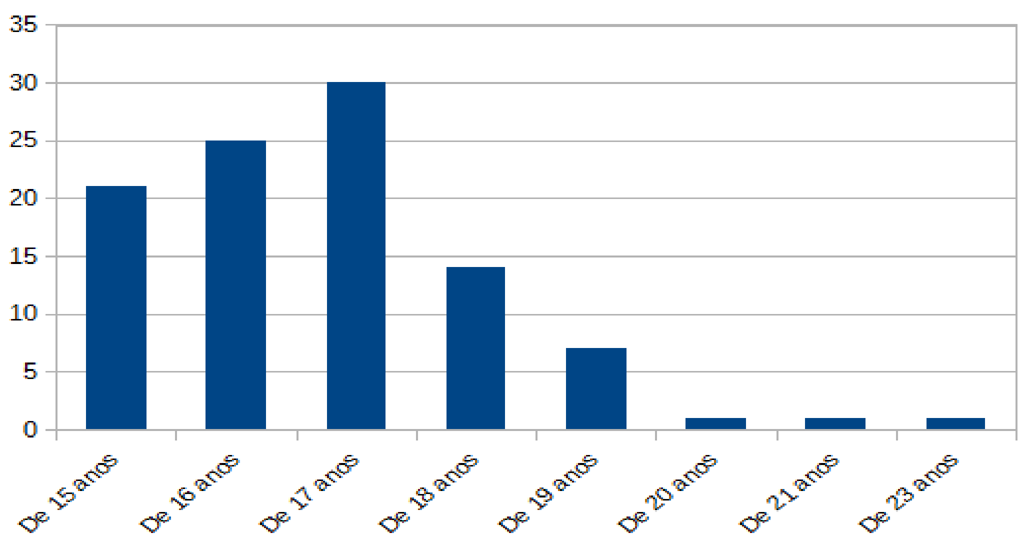
Quadro 3 - Alunos consultados-Gênero

Gênero	Quantidade
Masculino	55
Feminino	45

Fonte: Autor (2017)

De acordo com o gráfico 1, levando em consideração as idades dos alunos da amostra, notamos que a maioria dos alunos nesta série é de 17 anos, ocorrendo então uma pequena distorção, uma vez que a idade ideal seria 15 anos. Além disso também verificamos a presença de alunos com 20 e até de 23 anos nesta série, evidenciando neste caso uma distorção elevada.

Gráfico 1 – Alunos consultados – idades dos alunos



Fonte: Autor (2017)

Foi verificado em nossa pesquisa, ilustrado nos quadros 4 e 5 que com relação ao grau de instrução ou escolaridade dos pais ou responsáveis dos alunos, que 42% dos responsáveis femininos possuem o nível médio enquanto que os responsáveis masculinos, 26% possuem o ensino fundamental.

Quadro 4 - Escolaridade dos responsáveis femininos dos discentes consultados

Escolaridade	Quantidade
Superior	15
Médio	42
Fundamental	17
Fundamental Incompleto	24
Não estudou	2

Fonte: Autor (2017)

Quadro 5 - Escolaridade dos responsáveis masculinos dos discente consultados

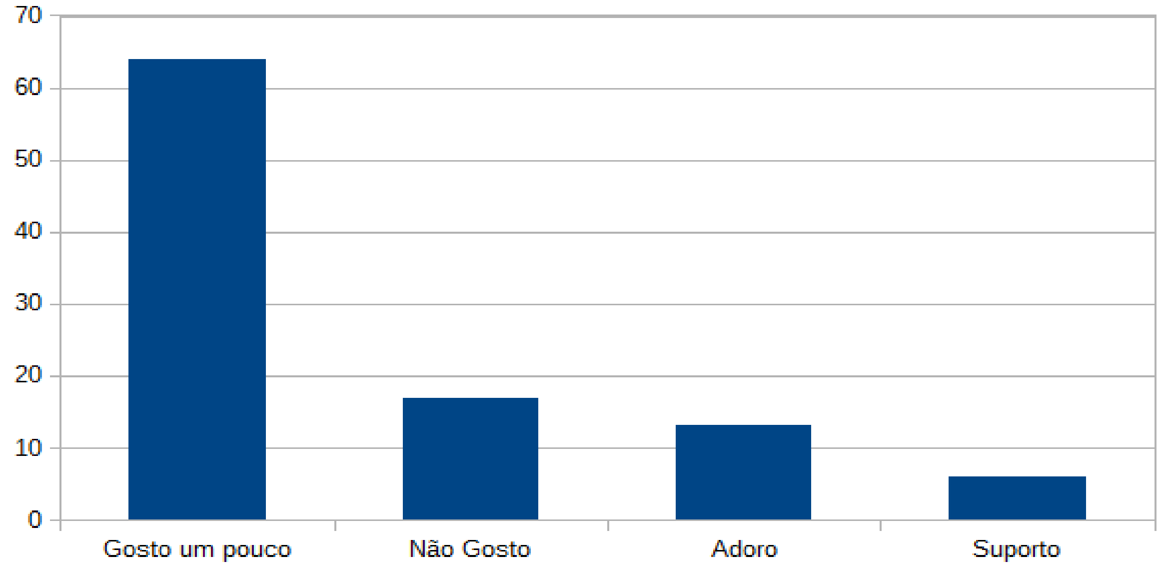
Escolaridade	Quantidade
Superior	11
Médio	42
Fundamental	26
Fundamental Incompleto	19
Não estudou	2

Fonte: Autor (2017)

Com os dados acima, percebemos que a escolaridade dos pais ou responsáveis não forneceram grande ajuda aos alunos, uma vez que apenas 11% possuem nível superior, o que pode ter influenciado em seus desempenhos no teste proposto.

No que diz respeito a simpatia pela Matemática, foi revelado no gráfico 2, que maioria, ou seja, 64% pouco gosta de matemática, enquanto apenas 12% disseram adorar a disciplina, o que deve ter refletido em seus desempenhos.

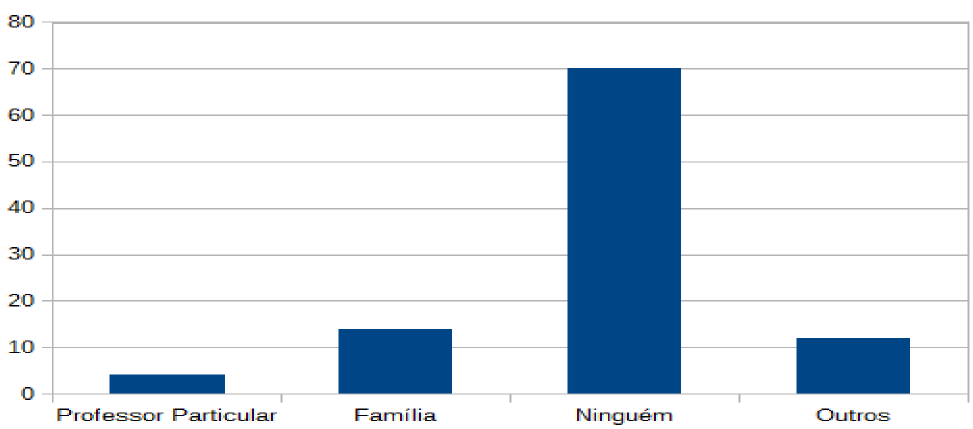
Gráfico 2 – Alunos Consultados – Gostar de Matemática



Fonte: Autor (2017)

Dos 100 alunos pesquisados 70% alunos, ou seja, a maioria através do gráfico 3, disse que não recebe ajuda de ninguém em suas tarefas de Matemática. O que é um episódio ruim para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, pois destes alunos muitos não obtiveram bons resultados no teste.

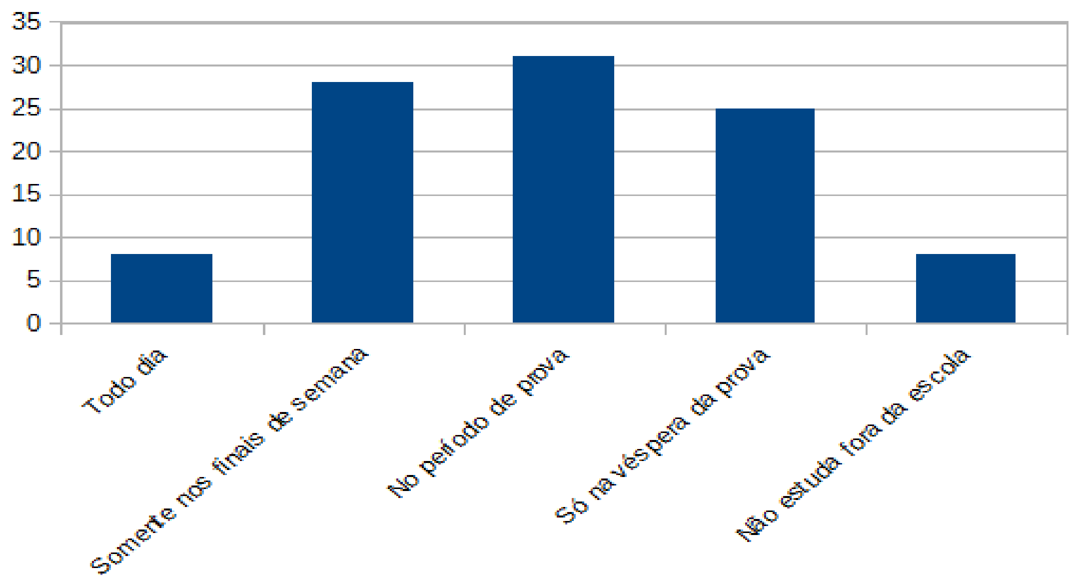
Gráfico 3 – Alunos Consultados – Ajuda nas tarefas de Matemática



Fonte: Autor (2017)

No que concerne à continuidade dos estudos fora do ambiente escolar, o gráfico 4,mostra que a maioria dos alunos, ou seja, 32% relatou que estudam apenas no período de prova, 28% nos finais de semana, 25% na véspera da prova, o que vai de contra para um bom resultado nos estudos e que também afetou o desempenho do alunado no teste aplicado.

Gráfico 4 – Alunos Consultados – Estudo fora do ambiente escolar



Fonte: Autor (2017)

Quando foram inquiridos sobre se entendem as explicações dadas pelo professor em sala de aula, o quadro 6 mostra que, a maioria dos alunos (47), revelou entender às vezes a explicação. Observamos que nenhum aluno falou, nunca entender a explicação do professor, 27 entendem quase sempre, 19 poucas vezes entendem e 7 alunos sempre entendem. Fazendo um somatório, verificamos que, dos 74 alunos que disseram entenderem às vezes ou quase sempre a explicação do professor, não se saíram bem no teste aplicado.

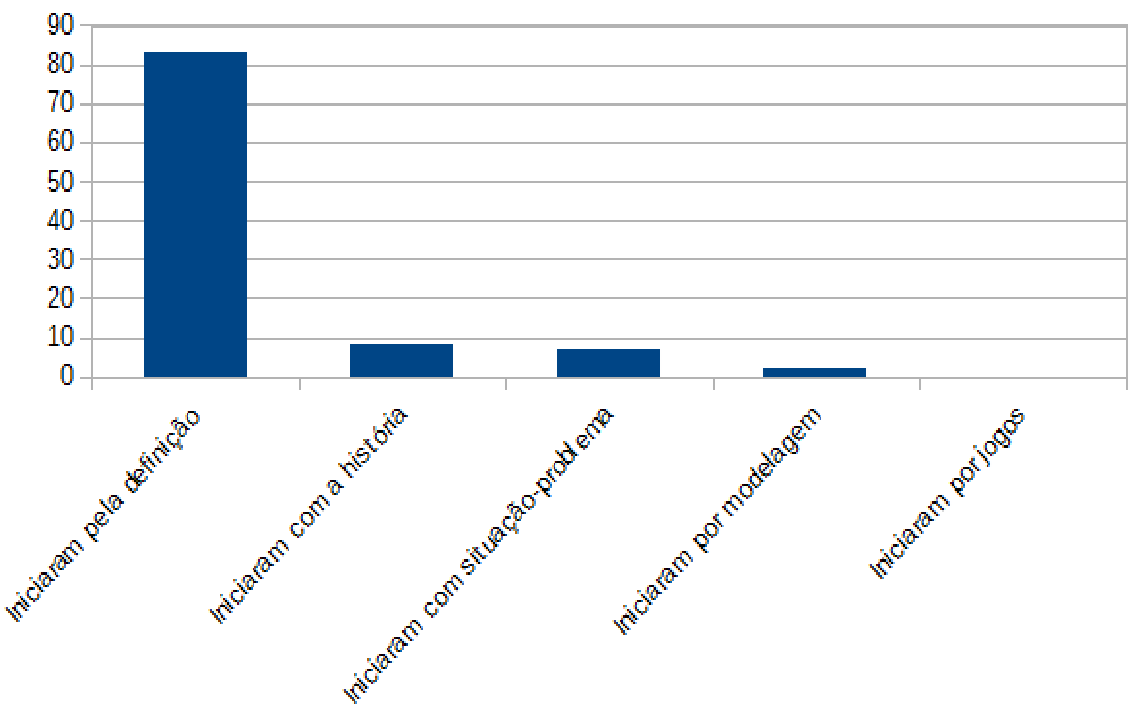
Quadro 6 – Alunos consultados – Entendimento das explicações do Professor

Opção	Quantidade
Sempre	7
Quase sempre	27
Às vezes	47
Poucas Vezes	19
Nunca	0

Fonte: Autor (2017)

Em se tratando da metodologia usada pelo professor em sala de aula, o gráfico 5 revela que para desenvolver o ensino de intervalos de números reais, 83 alunos disseram que as aulas são desenvolvidas de maneira tradicional, ou seja, iniciando por definições, 8 disseram iniciar pela história, 7 por situação-problema, 2 disseram que iniciaram por modelagem, enquanto que nenhum aluno falou que o professor inicia por jogos. Aqui verificamos que o ensino tradicional é uma constante no processo ensino e aprendizagem.

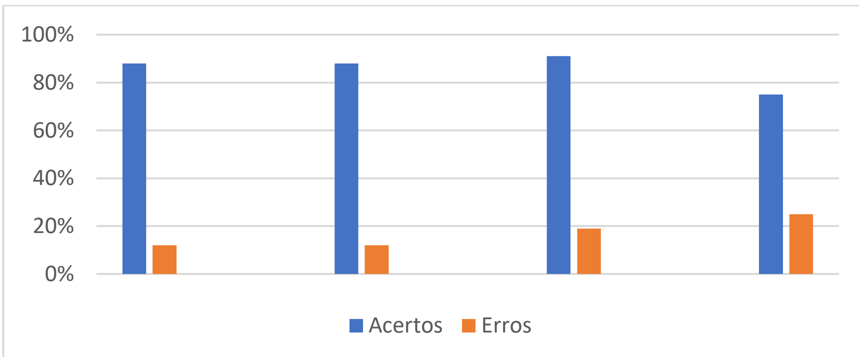
Gráfico 5 – Metodologia desenvolvida pelo professor



Fonte: Autor (2017)

Dando prosseguimento em nossa sondagem, aplicamos um teste contendo 10 questões para os alunos resolverem sobre intervalos de números reais. Neste contexto, analisamos os desempenhos dos alunos, verificando as suas dificuldades na resolução das questões, O gráfico 6 mostra que o melhor desempenho foi nas questões que tratavam do reconhecimento do tipo de intervalo (apêndice 1), a qual foi considerada fácil pelos alunos.

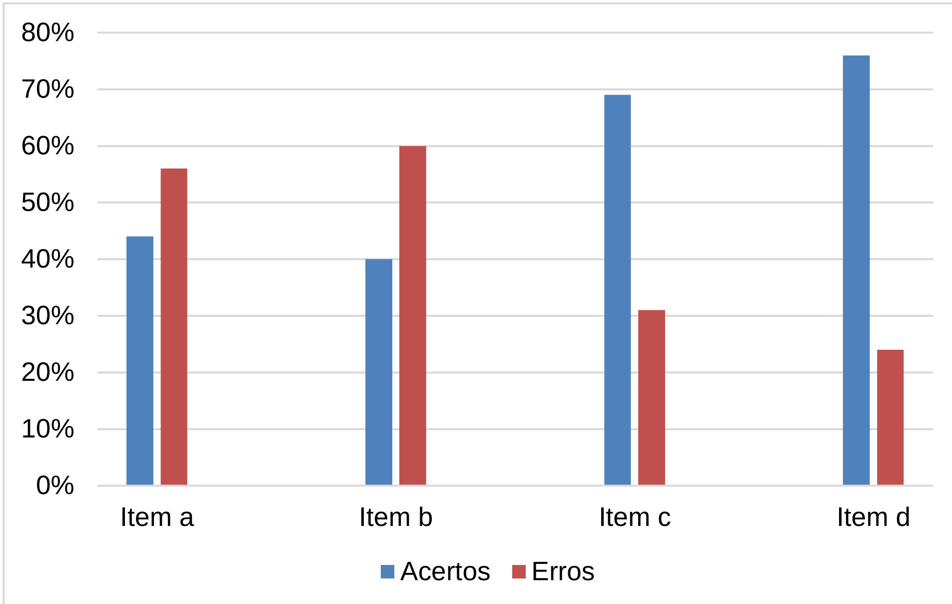
Gráfico 6 – 1ª a 4ª Questões- Reconhecer o tipo de Intervalo



Fonte: Autor (2017)

No que diz respeito à 5ª questão (apêndice 1), que envolve relação de pertinência, o gráfico 7 nos mostra que nos itens a e b os alunos sentiram dificuldades, o que não aconteceu nos itens c e d.

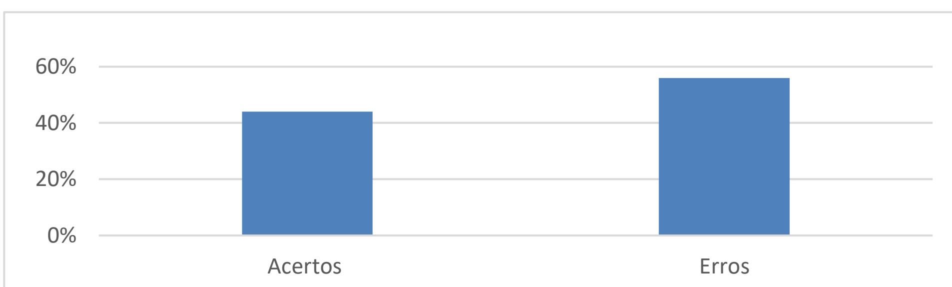
Gráfico 7 – 5ª Questão - Relação de Pertinência



Fonte: Autor (2017)

Na sexta questão (vide apêndice 1), o gráfico 8 mostra que a maioria dos alunos tiveram dificuldades de reconhecer se um intervalo está contido no outro, evidenciando assim a dificuldade de entender a relação de inclusão.

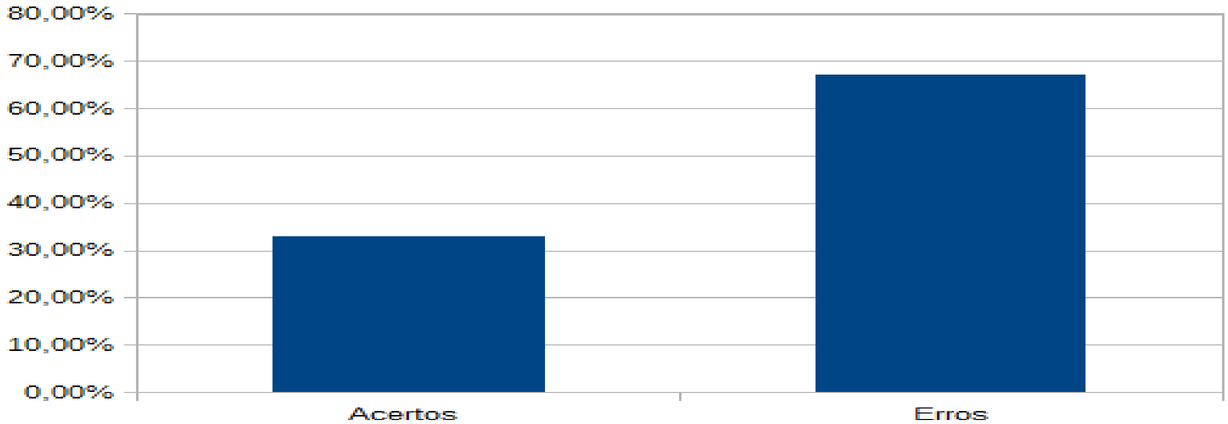
Gráfico 8 – 6ª questão – Relação de inclusão



Fonte: Autor (2017)

Na questão 7 (ver apêndice 1), o gráfico 9 ilustra que o alunado teve dificuldades de reconhecer a quantidades de números inteiros que contém um determinado intervalo. Isso nos mostra suas dificuldades na compreensão das definições e por conseguinte das representações de intervalos de números reais.

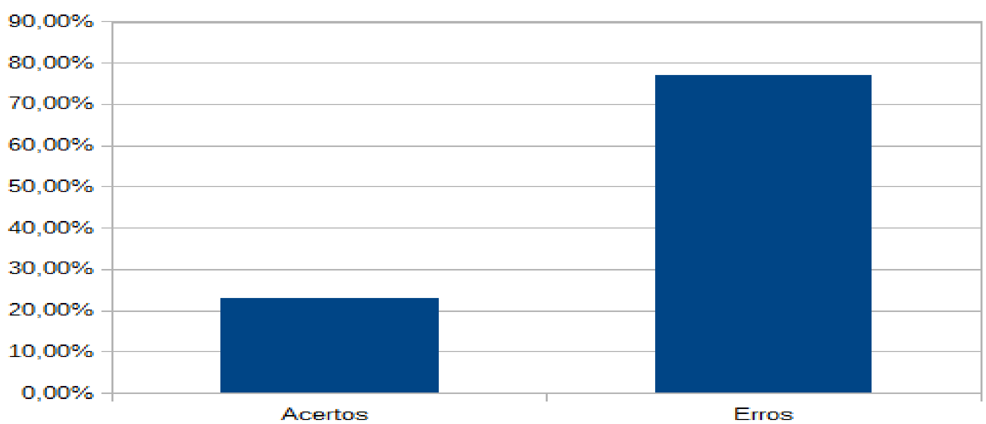
Gráfico 9 –7ª Questão -Reconhecer a quantidade de números inteiros de um intervalo.



Fonte: Autor (2017)

Já na questão 8 (ver apêndice 1), através do gráfico 10 identificamos dificuldades dos alunos, no que diz respeito ao total de números reais existentes em um determinado intervalo de números reais. Aqui percebi que os alunos não têm domínio dos conceitos dos conjuntos numéricos.

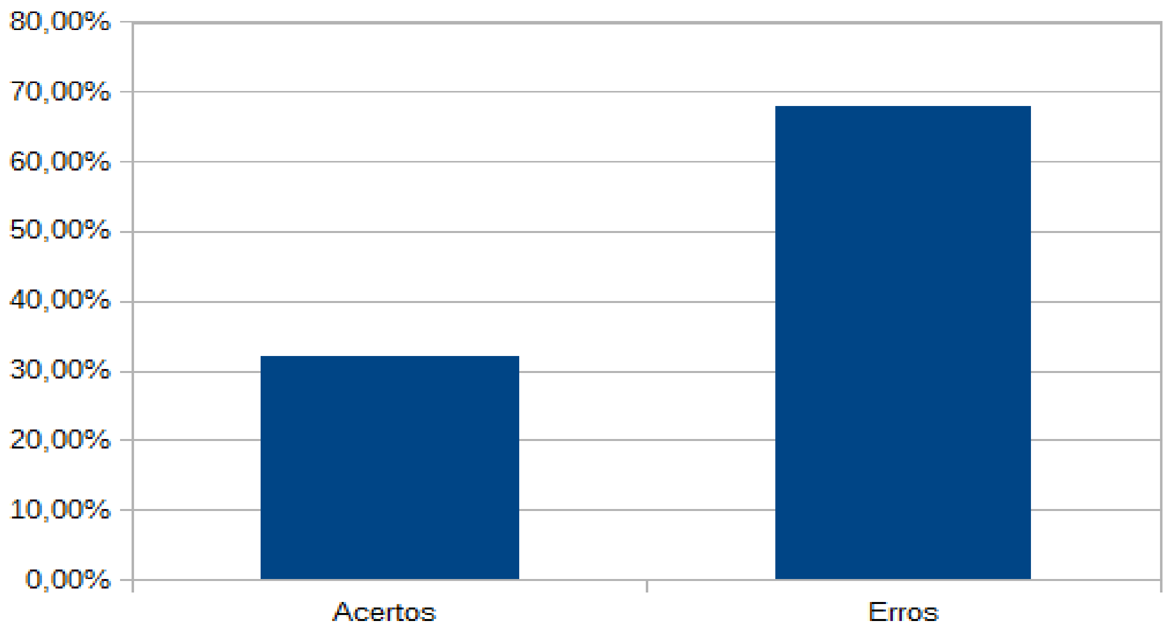
Gráfico 10 – 8ª Questão – Reconhecer a quantidade de números reais que contém um intervalo



Fonte: Autor (2017)

Na questão 9, o gráfico 11, nos relata que a maioria dos alunos não conseguiu reconhecer a operação de intersecção de intervalos de números reais, onde a porcentagem de erro foi de 68%. Essa margem nos leva a pensar em qual metodologia seria mais adequada para ser aplicada em sala de aula. Uma boa proposta está ilustrada no trabalho de Aguilera *et al*. (2012), o qual indica o uso de jogos para o ensino de intervalos de números reais, podendo assim diminuir tais dificuldades dos alunos.

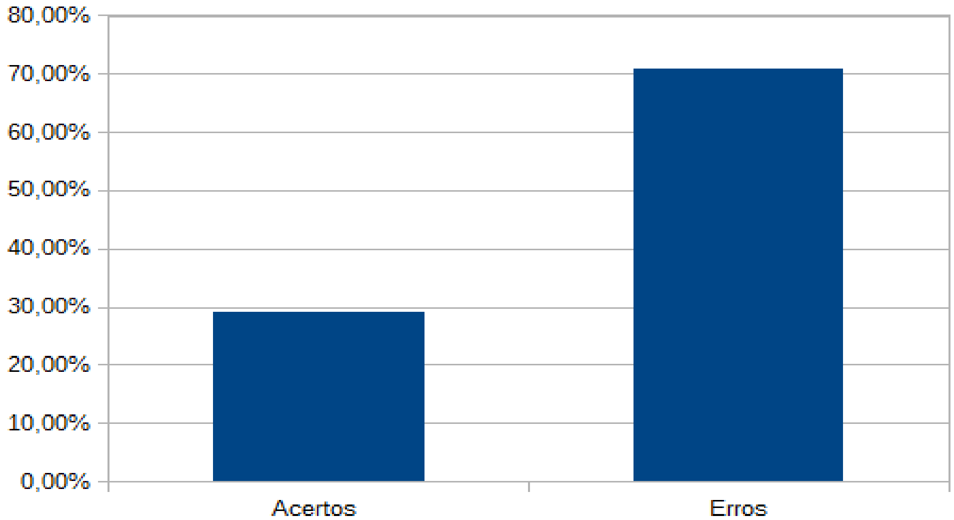
Gráfico 11 – 9ª Questão – Reconhecer a operação de intersecção



Fonte: Autor (2017)

E finalmente, na questão 10 (ver apêndice 1), o gráfico 12 traz como resultado, que a dificuldade se estendeu a todas as operações de intervalos de números reais, ou seja, na união, interseção, diferença e complementar. Aqui também observamos a necessidade de uma proposta mais eficaz para o ensino dessas operações.

Gráfico 12 – 10ª Questão -Reconhecer todas as operações de Intervalos



Fonte: Autor (2017)

4 SOBRE O OBJETO MATEMÁTICO

Intervalos serão sempre subconjuntos dos números reais, o que nos garante a validade de todas as propriedades e operações da teoria dos conjuntos, subconjuntos e soluções de equações pela notação de intervalo. Certos subconjuntos de *R*, determinados por desigualdades, têm grande importância na Matemática: são os Intervalos (DANTE, 2009).

Segundo Lima (1976), um corpo é um conjunto K munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem certas condições chamadas os axiomas de corpos abaixo especificadas.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in$ K sua soma $x + y \in$ K, enquanto a multiplicação associa a esses elementos seu produto $x.y \in$ K. Os axiomas de corpo são os seguintes: A: Axiomas da adição.

A1. Associatividade – quaisquer que sejam $x, y, z \in$ K, tem-se $(x+y)+z = x+(y+z)$.

A2. Comutatividade – quaisquer que sejam $x, y \in$ K tem-se $x+y = y+x$.

A3. Elemento neutro – existe $0 \in$ K tal que $x+0 = x$ seja qual for $x \in$ K. O elemento 0 chama-se “zero”.

A4. Simétrico – todo elemento $x \in$ K possui um simétrico $-x \in$ K tal que $x+(-x)=0$.

M: Os axiomas da multiplicação.

M1. Associatividade – dados quaisquer $x, y, z \in$ K, tem-se $(x.y).z = x.(y.z)$.

M2. Comutatividade – sejam quais forem $x, y \in$ K, vale $x.y = y.x$

M3. Elemento neutro – existe $1 \in$ K tal que $1 \neq 0$ e $x.1 = x$, qualquer que seja $x \in$ K. O elemento 1 chama-se “um”.

M4. Inverso multiplicativo – todo $x \neq 0$ em K possui um inverso x^{-1} tal que: $x.x^{-1} = 1$.

D1. Distributividade – dados x, y, z quaisquer em K, tem-se $x.(y+z) = xy+xz$. Por comutatividade tem-se também $(x+y).z = xz+yz$.

Com isso apresentamos abaixo, um capítulo de números reais, envolvendo intervalos de números reais, baseado em Lima (2017).

Definição 1. *R* é um corpo.

Isto significa que estão definidas em *R* duas operações, chamadas adição e multiplicação, que cumprem certas condições, abaixo especificadas.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in$ R, sua soma $x + y \in$ R, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x.y \in R$.

Os axiomas a que essas operações obedecem são:

Associatividade: para quaisquer $x, y, z \in R$ tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x.y).z = x.(y.z)$.

Comutatividade: para quaisquer $x, y \in$ R tem-se $x + y = y + x$ *e* $x.y = y.x$

Elementos neutros: existem em R dois elementos distintos 0 e 1 tais que $x + 0 = x$ e $x.1 = x$ para qualquer $x \in R$.

Inversos: todo $\in$ R possui um inverso aditivo $-x \in R$ tal que $x + (-x) = 0$ e, se $x \neq 0$, existe também um inverso multiplicativo $x^{-1} \in$ R tal que $x.x^{-1} = 1$

Distributividade: *para* $x, y, z \in R$ quaisquer, tem-se $x.(y + z) = x.y + x.z$

Dos axiomas acima resultam todas as regras familiares de multiplicação com os números reais. A título de exemplo, estabelecemos algumas delas.

Da comutatividade resulta que $0 + x = x$ *e* $-x + x = 0$ para todo $\in$ R. Da mesma forma $1.x = x$ *e* $x^{-1}.\, x = 1$ quando $x \neq 0$. A soma $x + (-y)$ será indicada por $x - y$ e chamada a diferença entre *x e y*. Se y $\neq$ 0, o produto $x.y^{-1}$ será representado também por $\frac{x}{y}$ e chamado o quociente *de x* por *y*. As operações $(x, y) \longrightarrow x - y$ *e* $(x, y) \longrightarrow \frac{x}{y}$ chamam-se respectivamente, subtração e divisão. Evidentemente, a divisão de *x* por *y* só faz sentido quando $y \neq 0$, pois o número 0 não possui inverso multiplicativo.

Da distributividade seque-se, para todo x $\in$ R, vale $x.0 + x = x.0 + x.1 = x(0 + 1) = x.1 = x$. Somando - x a ambos os membros da igualdade $x.0 + x = x$ obtemos $x.0 = 0$.

Por outro lado, de $x.y = 0$ podemos concluir que $x = 0$ ou $y = 0$. Com efeito, se for $y \neq 0$ então podemos multiplicar ambos os membros desta igualdade por y^{-1} e obtemos $x.y.y^{-1} = 0.y^{-1}$, donde $x = 0$.

Da distributividade resultam também as “regras dos sinais”: $x.(-y) = (-x).y = -(x.y)$ e $(-x).(-y) = xy$. Com efeito, $x.(-y) + x.y = x.(-y + y) = x.0 = 0$. Somando -(x.y) a ambos os membros da igualdade $x.(-y) + x.y = 0$ vem $x.(-y) = -(x.y)$. Da mesma forma, $(-x).y= -(x.y)$. Logo $(-x).(-y) = -[x.(-y)] = -[-(x.y)] = x.y$. Em particular, (-1).(-1)= 1. (Uma observação importante é que a igualdade $-(-z) = z$, acima empregada, resulta de somar-se z a ambos os membros da igualdade $-(-z) + (-z) = 0$).

Se dois números reais x, y têm quadrados iguais, *então* $x = \pm y$. Com efeito de: $x^2 = y^2$ decorre que $0=x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ e, como sabemos, o produto de dois números reais só é zero quando pelo menos um dos fatores é zero.Temos agora uma definição importante, vejamos abaixo.

Definição 2. *R* é um corpo ordenado.

Isto significa que existe um subconjunto $R_+ \subset R$, chamado dos números reais positivos, que cumpre as seguintes condições:

P1. A soma e o produto de números reais positivos são positivos. Ou seja, $x,y \in R+ \Rightarrow x + y \in R_+$ e $x.y \in R_+$. P2. Dado $x \in R$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x=0$, ou $x \in R_+$ ou $-x \in R_+$. Se indicarmos com R_- o conjunto dos números $-x$ onde $x \in R_+$, a condição P2, diz que $R = R_+ \cup R_- \cup \{0\}$ e os conjuntos R_+ , R_- e $\{0\}$ são dois a dois disjuntos. Os números $y \in R_-$ chamam-se negativos.

Todo número real $x \neq 0$ tem quadrado positivo. Com efeito, se $x \in R+$ então $x^2 = x.x \in R_+$ por P1. Se $x \notin R_+$ então (como $x \neq 0$) $-x \in R_+$ logo, ainda por causa de P1., temos $x^2 = (-x).(-x) \in R_+$. Em particular, 1 é um número positivo porque $1=1^2$.

Escreve-se $x < y$ e diz-se que x é menor do que y quando $y - x \in R_+$, isto é, $y= x + z$ onde z é positivo. Neste caso, escreve-se também $y > x$ e diz-se que y é maior do que x. Em particular, $x > 0$ significa que $x \in R_+$ isto é, que x é positivo, enquanto $x< 0$ quer dizer que x é negativo, ou seja, que $-x \in R_+$.

Na relação de ordem $x < y$ em R valem as seguintes propriedades:

O1. Transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$

O2. Tricotomia: dados $x,y \in R$, ocorre exatamente uma das alternativas $x = y$, $x < y$ ou $y < x$.

O3. Monotonicidade da adição: se $x < y$ então, para todo $z \in R$, tem-se: $x + z < y + z$

O4. Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ então, para todo $z > 0$ tem-se $xz < yz$. Se, porém, $z < 0$ então $x < y$ implica $yz < xz$.

Demonstração:

O1. $x < y$ e $y < z$ significa $y - x \in R_+$ e $z - y \in R_+$. Por P1 segue-se que: $(y - x) + (z - y) \in R_+$, isto é , $z - x \in R_+$, ou seja, $x < z$.

O2. Dados $x, y \in R$, ou $y - x \in R_+$, $y - x = 0$ ou $y - x \in R$ (isto é, $x - y \in R_+$). No primeiro caso tem-se $x < y$, no segundo $x = y$ e no terceiro $y < x$. Estas alternativas se excluem mutuamente, por P2.

O3. Se $x < y$ então $y - x \in R_+$, donde $(y + z) - (x + z) = y - x \in R_+$, isto é, $x + z < y + z$.

O4. Se $x < y$ e $z > 0$ então $y - x \in R_+$ e $z \in R_+$, logo $(y - x).z \in R_+$, ou seja, $yz - xz \in R_+$, o que significa $xz < yz$. Se $x < y$ e $z < 0$ então $y - x \in R+_+$ e $- z \in R_+$, donde $xy - yz = (y - x).(-z) \in R_+$, o que significa $yz < xz$. Mas geralmente, $x < y$ e $x' < y'$ implicam $x + x' < y + y'$. Com efeito $(x + y) - (x + x') = (y - x) + (y' - x') \in R_+$. Da mesma forma $0 < x < y$ e $0 < x' < y'$ implicam $xx' < yy'$ pois $yy' - xx' = yy' - yx' + yx' - xx' = y(y' - x') + (y - x)x > 0$. Se $0 < x < y$ então $y\text{-}1 < x\text{-}1$. Para provar, nota-se primeiro que $x > 0 \Longrightarrow x^{-1} = x.(x^{-1})^2 > 0$. Em seguida, multiplicando ambos os membros da desigualdade $x < y$ por $x^{-1}y^{-1}$ vem $y^{-1} < x^{-1}$.Como $1 \in R$ é positivo, segue-se que: $1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 <$ ...Podemos então considerar $N \subset R$. Segue-se que $Z \subset R$ pois $0 \in R$ e $n \in R \Longrightarrow -n \in R$. Além disso, se $m, n \in Z$ com $n \neq 0$ então $\frac{m}{n} = m.n^{-1} \in R$, o que nos permite concluir que $Q \subset R$. Assim, $N \subset Z \subset Q \subset R$.

A seguir, veremos que a inclusão $Q \subset R$ é própria.

Exemplo 1. (Desigualdade de bernoulli). Para todo número real $x \geq -1$ e todo $n \in R$, tem-se $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Isto se prova por indução em n, sendo óbvio para $n = 1$. Supondo a desigualdade válida para n, multiplicamos ambos os membros pelo número $1 + x \geq 0$ e obtemos:

$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$. Pelo mesmo argumento, vê-se que $(1 + x)^n > 1 + nx$ quando $n > 1$, $x > -1$ e $x \neq 0$.

A relação de ordem em R permite definir o valor absoluto (ou módulo) de um número real $x \in R$ assim: $|x| = x$, se $x > 0$, $|0| = 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$. Em outras palavras, $|x| = \max \{x, -x\}$ é o maior dos números reais x e $-x$.

Tem-se $-|x| \leq x \leq |x|$ para todo $x \in R$. Com efeito, a desigualdade $x \leq |x|$ é óbvia, enquanto $-|x| \leq x$ resulta de multiplicar por -1 ambos os membros da desigualdade $-x \leq |x|$. Podemos caracterizar $|x|$ como o único número ≥ 0 cujo o quadrado é x^2.

Teorema 1. Se $x, y \in R$ então $|x + y| \leq |x| + |y|$ e $|x.y| = |x|.|y|$

Demonstração: Somando membro a membro as desigualdades $|x| \geq x$ e $|x| \geq y$ vem $|x| + |y| \geq x + y$. Analogamente de $|x| \geq -x$ e $|y| \geq -y$ resulta $|x| + |y| \geq -(x + y)$. Logo $|x| + |y| \geq |x + y| = \max\{x + y, -(x + y)\}$. Para provar que $|x.y| = |x|.|y|$, basta mostrar que estes dois números têm o mesmo quadrado, já que ambos são ≥ 0. Ora o quadrado de $|x.y|$ é $(x.y)^2 = x^2.y^2$,enquanto $(|x|.|y|)^2 = |x|^2 . |y|^2 = x^2 .y^2$.

Teorema 2. Sejam a, x, $\delta \in R$. Tem-se $|x - a| < \delta$ se, e somente se, $a - \delta < x < a + \delta$.

Demonstração: Como $|x - a|$ é o maior dos números $x - a$ e $-(x - a)$, afirmar que $|x - a| < \delta$ equivale a dizer que se tem $x - a < \delta$ e $-(x - a) < \delta$, ou seja, $x - a < \delta$ e $x - a > -\delta$. Somando a, vem: $|x - a| < \delta \Leftrightarrow x < a + \delta$ e $x > a - \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$.

Obs. De modo análogo se vê que $|x - a| \leq \delta \Leftrightarrow a - \delta \leq x \leq a + \delta$.

Usaremos as seguintes notações para representar tipos especiais de conjuntos de números reais, chamados intervalos:

$[a, b] = \{x \in R;\ a \leq x \leq b\}$	$]-\infty, b] = \{x \in R;\ x \leq b\}$
$]a, b[= \{x \in R;\ a < x < b\}$	$]-\infty, b[= \{x \in R;\ x < b\}$
$[a, b[= \{x \in R;\ a \leq x < b\}$	$[a, +\infty[= \{x \in R;\ x \geq a\}$
$]a, b] = \{x \in R;\ a < x \leq b\}$	$]a, +\infty[= \{x \in R;\ x > a\}$
$]-\infty, +\infty[= R$	

Os quatro intervalos da esquerda são limitados, com extremos a ,b: $[a, b]$ é um intervalo fechado, $]a, b[$ é aberto, $[a, b[$ é fechado à esquerda e $]a, b]$ é fechado à direita. Os cinco intervalos à direita são ilimitados : $]-\infty, b]$ é a semi-reta esquerda fechada de origem b. Os demais têm denominações análogas. Quando $a = b$, o intervalo fechado $[a, b]$ reduz-se a um único elemento e chama-se um intervalo degenerado.

Em termos de intervalos, o Teorema 2 diz que $|x - a| < \varepsilon$ se, e somente se, x pertence ao intervalo aberto $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$. Analogamente $|x - a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

É muito conveniente imaginar o conjunto R como uma reta (a "reta real") e os números reais como pontos dessa reta. Então a relação $x < y$ significa que o ponto x está à esquerda de y(e y à direita de x), os intervalos são segmentos de reta e $|x - y|$ é a distância do ponto x ao ponto y. O significado do Teorema 2 é de que o intervalo $]a - \delta, a + \delta[$ é formado pelos pontos que distam menos de δ do ponto a. Tais interpretações geométricas constituem um valioso auxílio para a compreensão dos conceitos e teoremas de Análise.

Definição 3. R é um corpo ordenado completo.

Nada do que foi dito até agora permite distinguir R de Q pois os números racionais também constituem um corpo ordenado. Acabaremos agora nossa caracterização de R, descrevendo-o como um corpo ordenado completo, propriedade que Q não tem.

Um conjunto $X \subset R$ diz-se limitado superiormente quando existe algum $b \in R$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que b é uma cota superior de X. Da mesma forma, diz-se que o conjunto $X \subset R$ é limitado inferiormente quando existe a $\in R$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. O número a se chama então uma cota inferior de X. Se X é limitado superior e inferiormente, diz-se que X é um conjunto limitado. Isto significa que X está contido em algum intervalo limitado $[a, b]$ ou, equivalentemente, que existe $k > 0$ tal que $x \in X \Rightarrow |x| \leq k$.

Seja $X \subset R$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $b \in R$ chama-se o supremo do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X. Mais explicitamente, b é o supremo de X quando cumpre as duas condições:

S1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;

S2. Se $c \in R$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$.

A condição S2 admite a seguinte reformulação:

S2'. Se $c < b$ então existe $x \in X$ com $c < x$

Com efeito, S2' diz que nenhum número real menor do que b pode ser cota superior de X. Ás vezes se exprime S2' assim: para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que: $b - \varepsilon < x$.

Escrevemos b= sup$X$ para indicar que b é o supremo do conjunto X.

Analogamente, se $X \subset R$ é um conjunto não vazio, limitado inferiormente, um número real a chama-se ínfimo do conjunto X, e escreve-se a = inf$X$,quando é a maior das cotas inferiores de X. Isto equivale às duas afirmações:

I1. Para todo $x \in X$ tem-se $a \leq x;$

I2. Se $c \leq x$ para todo $x \in X$ então $c \leq a$

A condição I2 pode também ser formulada assim:

I2' . Se $a < c$ então existe $x \in X$ tal que $x < c.$

De I2' diz que nenhum número maior do que a é cota inferior de X. Equivalentemente para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$.

Diz-se que um número $b \in X$ é o maior elemento ou (elemento máximo)do conjunto X quando $b \geq x$ para todo $x \in X$. Isto quer dizer que b é uma cota superior de X, pertencente a X. Por exemplo, b é o elemento máximo do intervalo fechado [a, b], mas o intervalo [a, b[não possui maior elemento. Evidentemente, se um conjunto X possui elemento máximo este será o seu supremo. A noção de supremo serve precisamente para substituir a idéia de maior elemento de um conjunto quando esse maior elemento não existe. O supremo do conjunto [a,b[é b. Considerações análogas podem ser feitas em relação ao ínfimo.

A afirmação de que o corpo ordenado R é completo significa que todo conjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset R$ possui supremo b = sup$X \in R.$

Não é necessário estipular também que todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente, $X \subset R$ possui ínfimo. Com efeito, neste caso o conjunto $Y = \{- x \; ; \; x \in X\}$ é não-vazio, limitado superiormente, logo possui um supremo $b \in R$. Então, como se vê sem dificuldade, o número $a = - b$ é o ínfimo de Y.

Agora iremos ver algumas consequências da completeza de R.

Teorema 3:

i) O conjunto $N \subset R$ dos números naturais não é limitado superiormente;

ii) O ínfimo do conjunto X = { $\frac{1}{n}$; $n \in N$ } é igual a 0;

iii) Dados a, $b \in R_+$, existe $n \in N$ tal que $n.a > b.$

Demonstração: Se $N \subset R$ *fosse limitado superiormente, existiria* $c = sup\ N.$ Então c –1 não seria cota superior de N, isto é, existiria $n \in N$ com $c – 1 < n$. Daí resultaria $c < n$

+1, logo c não seria cota superior de N. Esta contradição prova i). Quanto a ii), 0 é evidentemente uma cota inferior de X. Basta então provar que nenhum $c > 0$ é cota inferior de X. Ora, dado $c > 0$, existe, por i) um número natural $n > \frac{1}{c}$, donde $\frac{1}{n} < c$, o que prova ii). Finalmente, dados $a, b \in R_+$ usamos i) para obter $n \in N$ tal que $n > \frac{b}{a}$. Então $na > b$, o que demonstra iii). As propriedades i), ii) e iii) do teorema acima são equivalentes e significam que R é um corpo arquimediano. Na realidade, iii) é devida ao matemático grego Eudoxo, que viveu alguns séculos antes de Arquimedes.

Veremos adiante alguns teoremas também muito importantes envolvendo intervalos.

Teorema 4. (Intervalos encaixados). Dada uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset ... I_n \supset ...$ de intervalos limitados e fechados $I_n = [an,bn]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$ para todo $n \in N$.

Demonstração: As inclusões $I_n \supset I_{n+1}$ significam que,

$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1$.

O conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ é, portanto, limitado superiormente. Seja $c = \sup A$. Evidentemente, $na \leq c$ para todo $n \in N$. Além disso, como cada b_n é cota superior de A, temos $c \leq b_n$ para todo $n \in N$. Portanto $c \in I_n$ qualquer que seja $n \in N$.

Teorema 5. O conjunto dos números reais não é enumerável.

Demonstração: Mostraremos que nenhuma função $f : N \longrightarrow R$ pode ser sobrejetiva. Para isto, supondo f dada, construiremos uma subseqüência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset ... I_n \supset ...$ de intervalos limitados e fechados tais que $f(n) \notin I_n$. Então se c é um número real pertencente a todos os I_n, nenhum dos valores $f(n)$ pode ser igual a c, logo f não é sobrejetiva. Para obter os intervalos, começamos tomando $I_1 = [a_1, b_1]$ tal que $f(1) < a_1$ e, supondo obtidos $I_1 \supset I_2 \supset ... I_n \supset ...$ tais que $f(j) \notin I_j$, olhamos para $I_n = [an, bn]$. Se $f(n+1) \notin I_n$, podemos simplesmente tomar $I_{n+1} = I_n$. Se, porém, $f(n+1) \in I_n$, pelo menos um dos extremos, digamos a_n, é diferente de $f(n+1)$, isto é, $a_n < f(n+1)$. Neste caso, tomamos $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$, com $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = \frac{1}{2}[(a_n + f(n+1)]$.

Um número real chama-se irracional quando não é racional. Como o conjunto Q dos números racionais é enumerável, resulta do teorema acima, que existem números irracionais e, mais ainda, sendo $R = Q \cup (R - Q)$, os irracionais constituem um conjunto não-enumerável(portanto formam a maioria dos reais) porque a reunião de dois conjuntos enumeráveis seria enumerável.

Corolário. Todo intervalo não-degenerado é não-enumerável. Com efeito, todo intervalo não degenerado contém um intervalo aberto $]a, b[$. Como a função $f :]-1, 1[\longrightarrow]a, b[$, por $f(x) = \frac{1}{2}[(b-a)x + a + b]$ é uma bijeção, basta mostrar que o intervalo aberto $]-1, 1[$ é não-enumerável. Ora a função $\varphi : R \longrightarrow]-1, 1[$, dada por $\varphi(x) = \frac{x}{(1+|x|)}$, é uma bijeção cuja inversa é $\Psi(\varphi(x)) = x$ para qualquer $y \in]-1, 1[$ e $x \in R$, como se pode verificar facilmente.

Teorema 6. Todo intervalo não-degenerado I contém números racionais e irracionais.

Demonstração: Certamente I contém números irracionais pois do contrário seria enumerável. Para provar que I contém números racionais, tomamos $[a,b] \subset I$, onde $a < b$ podem ser supostos irracionais. Fixemos $n \in N$ tal que $\frac{1}{n} < b - a$. Os intervalos $I_m = [\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$, $m \in Z$, cobrem a *reta*, isto é $R = \cup_{m \in Z} I_m$. Portanto existe $m \in Z$ tal que $a \in I_m$. Como a é irracional, temos $\frac{m}{n} < a < \frac{m+1}{n}$. Sendo o comprimento $\frac{1}{n}$ do intervalo I_n menor do que $b - a$, segue-se que $\frac{(m+1)}{n} < b$. Logo o número racional $\frac{(m+1)}{n}$ pertence ao intervalo $[a, b]$ e portanto ao intervalo I.

5 CONSTITUIÇÃO, APRESENTAÇÃO E APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.

Neste capítulo, apresentaremos uma sequência didática como proposta para o ensino de intervalos de números reais, cujas atividades são constituídas de: Título, Objetivo, Material e procedimentos.

5.1 Estruturação

Esta sequência didática está estruturada no molde de Cabral (2017), intitulado de Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC).

Tal sequência didática teve origem a partir de uma sondagem inicial, na qual foram detectadas as dificuldades do aluno com relação ao objeto de estudo, dando-nos subsídios necessários para a construção das atividades nela proposta, com o objetivo de eliminar tais dificuldades.

Ainda neste contexto, salientamos que a revisão de estudo também nos ajudou na construção desta sequência didática, pois foram detectadas pelos autores dificuldades no aprendizado de intervalos de números reais, como por exemplo, no que diz respeito às operações. Com isso atividades foram criadas para amenizar as dificuldades apresentadas pelos autores.

E por fim dizemos também que o objeto matemático foi de suma importância para a construção das atividades desta sequência didática, pois nele constam, os conceitos, as representações e os principais teoremas com suas devidas demonstrações.

5.2 Descrição das atividades

Nossa sequência didática é composta por 7 atividades envolvendo conceitos, tipos representações e operações de intervalos de números reais.

A atividade 1 é composta por diversos procedimento, para fins de que os alunos percebam uma quantidade de números reais entre dois extremos, contendo ou não esses extremos. Essa atividade contribuirá com as dificuldades encontradas no trabalho de Gomes *et al*. (2014), o qual enfatiza que os próprios alunos relataram que nunca tinham realizado tarefas para saber quantos números existem entre dois números. Tal trabalho contribuiu muito para diminuir tais dificuldades.

ATIVIDADE 1

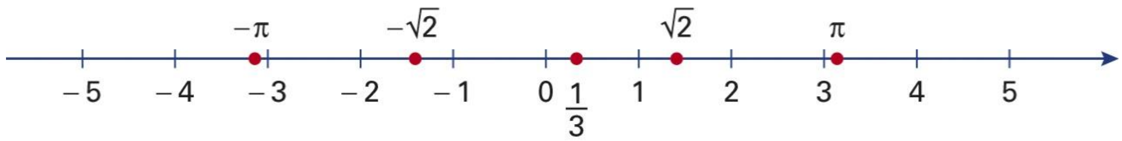
Título: Intervalos de números Reais

Objetivo: Obter o conceito de intervalos de números reais

Material: Roteiro de atividades, papel caneta ou lápis

Procedimento: Atividades.

1)(I_i) Dada a reta real abaixo:



A1) (Intervenção exploratória I_e) Considere os números reais 2 e 4.

A2)(I_r) Entre os números 2 e 4, existem números reais?

A3) (I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

A4) (I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item A3, podemos formar um conjunto de números reais?

A5) (I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item A3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 2?

A6) (I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item A3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 4?

A7) (I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item A3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 2 e o 4?

B1)(I_e)Considere os números reais -5 e -1.

B2)(I_r)Entre esses números que você considerou, existem números reais?

B3)(I_r)Quais? A quantidade é finita ou infinita?

B4)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item B3 podemos formar um conjunto de números reais?

B5)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item B3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -5?

B6)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item B3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -1?

B7)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item B3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -5 e o -1?

C1)(I_e) Considere os números reais -2 e 2.

C2)(I_r) Entre esses números que você considerou, existem números reais?

C3) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

C4)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item C3, podemos formar um conjunto de números reais?

C5)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item C3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -2?

C6)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item C3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 2?

C7)(I_r)Com todos esses números reais que você encontrou no item C3, podemos formar um conjunto de números reais incluindo o -2 e o 2?

D1)(I_e) Considere os números reais 2 e 5.

D2)(I_r) Entre esses números que você considerou, existem números reais?

D3)(I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

D4)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item D3, podemos formar um conjunto de números reais?

D5)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item D3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 2?

D6)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item D3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o segundo o 5?

D7)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item D3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 2 e o 5?

D8) (I_f) -Diante de tudo o que foi discutido, o professor formalizará tal conceito.

ATIVIDADE 2

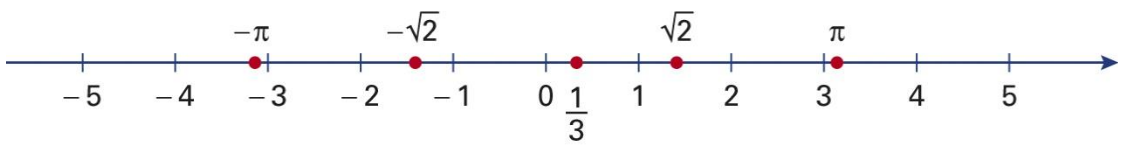
Título: Extensão da definição de Intervalos de Números Reais

Objetivo: Estender o conceito de Intervalos de Números Reais

Material: Roteiro de atividades, papel, caneta ou lápis

Procedimentos: Atividades

1 (I_i) Dada a reta real abaixo:



A1)(I_e) Considere o número real 0 na reta acima?

A2)(I_r) Após o número 0, existem números reais?

A3)(I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

A4)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou, no item A3, podemos formar um conjunto de números reais?

A5)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou, no item A3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o número 0?

A6)(I_r) Antes do número 0 existem números reais?

A7)(I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

A8)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou, no item A7, podemos formar um conjunto de números reais?

A9)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item A7, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 0?

A10)(I_r) Com todos os números que você encontrou nos itens A3 e A7 incluindo o 0, podemos formar um conjunto de números reais, que é a própria reta acima?

B1)(I_e) Considere o número real -3 na reta acima?

B2)(I_r) Após o número -3, existem números reais?

B3)(I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

B4)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou, no item B3 podemos formar um conjunto de números reais?

B5)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou, no item B3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -3?

B6)(I_r) Antes do número ,-3, existem números reais?

B7)(I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

B8)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item B7,podemos formar um conjunto de números reais?

B9)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item B7,podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -3?

B10)(I_r) Com todos os números reais que você encontrou nos itens B3 e B7 incluindo o -3, podemos formar um conjunto de números reais, igual a própria reta real acima?

C1)(I_e) Considere o número real 4 na reta acima?

C2)(I_r) Após o número 4, existem números reais?

C3)(I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

C4)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou, no item C3, podemos formar um conjunto de números reais?

C5)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou, no item C3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 4?

C6)(I_r) Antes do número 4, existem números reais?

C7)(I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

C8)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item C7, podemos formar um conjunto de números reais?

C9)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item C7, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 4?

C10)(I_r) Com todos os números reais que você encontrou nos itens C3 e C7, incluindo o 4, podemos formar um conjunto de números reais, igual reta real acima?

C11) (I_f) -Diante de tudo o que foi discutido, o professor formalizará tal conceito.

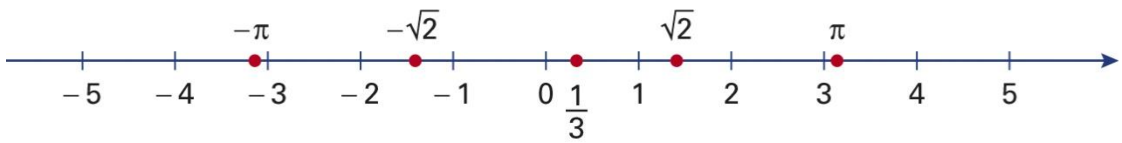
ATIVIDADE 3

Título: Representação geométrica, representação algébrica e a descrição de Intervalos de Números Reais.

Objetivo: Representar geometricamente e algebricamente os Intervalos de Números Reais e fazer sua descrição.

Procedimento: Atividades

1) (I_i) Dado a reta real abaixo:

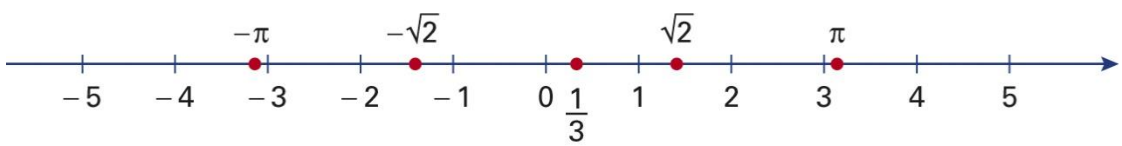


1.1)(I_e) Marque todos os números reais entre 0 e 2.

1.2)(I_r) Qualquer número que estiver entre 0 e 2, são maiores do que 0 e menores do que 2?

1.3)(I_r) Como poderíamos descrevê-los?

2) Dada a reta real abaixo:

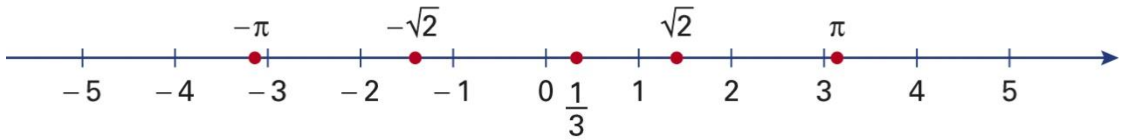


2.1(I_e) Marque todos os números reais entre 0 e 2 incluindo o extremo 0.

2.2)(I_r) Qualquer número que estiver entre 0 e 2, incluindo o 0, são maiores do que ou igual a 0 e menores do que 2?

2.3)(I_r) Como poderíamos descrevê-los?

3. Dada a reta real abaixo

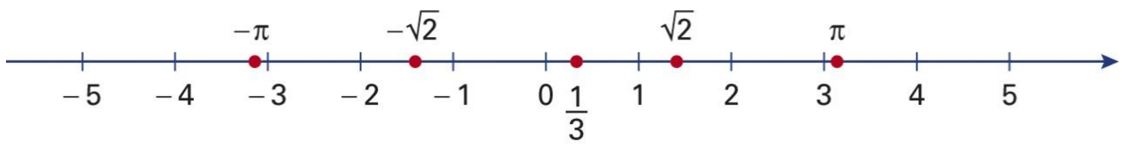


3.1)(I_e) Marque todos os números reais entre 0 e 2 incluindo o extremo 2.

3.2) Qualquer número que estiver entre 0 e 2, incluindo o 2, são maiores do que 0 e menores do que ou igual a 2?

3.3) Como poderíamos descrevê-los?

4. dada a reta real abaixo:

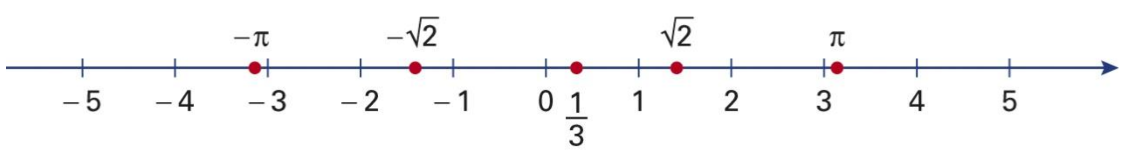


4.1)(I_e) Marque todos os números reais entre 0 e 2 incluindo os extremos 0 e 2..

4.2)(I_r) Qualquer número que estiver entre 0 e 2, incluindo o 0 e 0 2, são maiores do que ou igual a 0 e menores do que ou igual a 2?

4.3)(I_r) Como poderíamos descrevê-los?

5. Dada a reta real abaixo



5.1)(I_e) Marque todos os números reais após o número -1.

5.2)(I_r) Qualquer número após o número -1 são maiores do que -1?

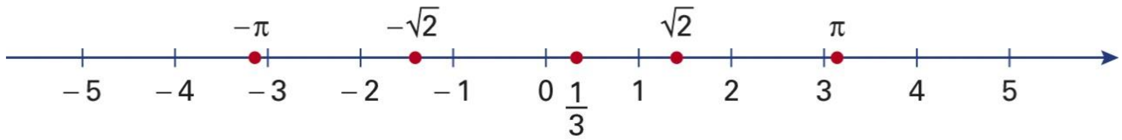
5.3)(I_r) Como podemos descrever o conjunto de números reais do item E.2?

5.4)(I_e) Marque todos os números reais após o -1, incluindo o -1.

5.5)(I_r) Qualquer número pós o -1 incluindo o -1, são maiores do que ou igual a -1.

5.6)(I_r) Como podemos descrever o conjunto de números reais do item E.5?

6. Dada a reta real abaixo



6.1)(I_e) Marque todos os números reais antes do -1.

6.2)(I_r) Qualquer número antes do -1 são menores do que -1?

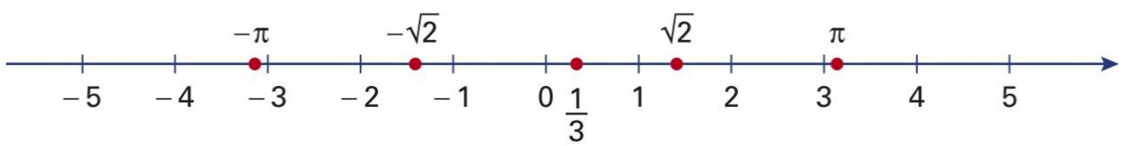
6.3)(I_r) Como podemos descrever o conjunto de números do item 8.2?

6.4)(I_e) Marque todos os números reais antes do – 1, incluindo o – 1.

6.5)(I_r) Qualquer número antes do -1, incluindo o -1 são menores do que ou igual a -1?

6.6)(I_r) Como podemos descrever o conjunto de números reais do item 8.5?

7)(I_i). Dada a reta real abaixo:



7.1)(I_e) Marque todos os números reais da reta acima.

7.2)(I_r) A quantidade dos números do item 7.1 é infinita (a direita e a esquerda)?

7.3)(I_r) Como podemos descrever o conjunto de números do item 9.2?

(I_f) -Diante de tudo o que foi discutido, o professor formalizará tal conceito.

ATIVIDADE 4

Título: União de Intervalos de números Reais

Objetivo: Conceituar a união de intervalos de números reais.

Material: Roteiro de atividades, papel, caneta ou lápis.

Procedimentos: Atividades

1)(I_i) Dados dois intervalos A e B. (IA_a). Determine o intervalo que contém todos os elementos dos pares de intervalos A e B.

a)A= [1,3] e B=[3,5]

b)A=]-2,0] e B=]0,3

c) A=]0,2] e B=]0,3]

d) A=]-1,0[e B=[0,6]

e) A=[3,5] e B=]-3,4[

(I_f).Diante de tudo o que foi discutido, o professor formalizará tal conceito.

No que concerne a atividade 5, dados dois intervalos os procedimentos foram direcionados para fins de o alunado perceber a quantidade de números existentes em comum a ambos os intervalos. Também aqui enfatizamos o trabalho de Aguilera *et al*. (2012).

ATIVIDADE 5

Título: Intersecção de Intervalos de números reais.

Objetivo: Conceituar a interseção de intervalos de números reais.

Material: Roteiro de atividades, papel, caneta ou lápis

Procedimentos: Atividades

1) (I_i) Dados dois intervalos A e B.(IA_a). Determine o intervalo que contém todos os elementos que estão ao mesmo tempo nos pares de intervalos A e B abaixo:

a) A= [-1, 2] e B=[0,5[

b) A=]-2,1] e B=[-1.1[.

c) A=]-2,2]e B=[-1.4[

d) A=[-3,0[e B=[-1,3[

e) A=]0,5] e B=]2,6[

(I_f).Diante de tudo o que foi discutido, o professor formalizará tal conceito.

Na atividade 6, dados dois intervalos, as interações foram direcionadas com o objetivo de os alunos perceberem a quantidade de números que estavam em um intervalo porém não estavam no outro. Também aqui ressaltamos o de Aguilera, Silva, Mascarin e Nascimento (2012).

ATIVIDADE 6

Título: Diferença de intervalos de números reais

Objetivo: Conceituar a diferença de intervalos de números reais

Metodologia: Roteiro de atividades, papel, caneta ou lápis.

Procedimentos: Atividades

1)(I_i).Dados dois pares de intervalos A e B abaixo.(IA_a). Determine o intervalo que contém somente elementos que pertencem a A e não pertencem a B ou ainda que pertencem a B e não pertencem a A

a) A=[0, 5] e B=[3,5]

b) A=[2,6[e B=]3,5[

c) A=[-14[e B=]2,5[

d) A=]-3,5[e B=[0,6[

e) A=[1,7] e B=[2,,5]

(I_f).Diante de tudo o que foi discutido, o professor formalizará tal conceito.

E por fim na atividade 7 (p.75) dados dois intervalos em que o primeiro está contido no segundo, as inquirições foram feitas para levar o alunado perceber a quantidade de elementos que estão no segundo intervalo e não estão no primeiro. Neste contexto também relacionamos o trabalho de Aguilera *et al*. (2012).

ATIVIDADE 7

Título: Complementar de intervalos de números reais.

Objetivo: Conceituar o complementar de intervalos de números reais.

Metodologia: Roteiro de atividades, papel, caneta ou lápis.

Procedimentos: Atividades

1) (I_i) Dados dois pares de intervalos A e B, com $A \subset B$. (IA_a) Determine o intervalo que contem somente elementos que pertencem a B e não pertencem a A.

a) A=[1,4[e B=[0,5]

b) A=]-1,2[e B=]-2,3]

c) A=[2,6]   e B=[1, 7[

d) A=]-2,4]e B=[-3,5]

e) A=[1/2,[3 e B=[0, 4[

(I_f).Diante de tudo o que foi discutido, o professor formalizará tal conceito.

5.3 Aplicação do Teste Diagnóstico

Escolhi uma de minhas turmas com 35 alunos para a aplicação da seqüencia didática ora proposta. No dia 22 de maio de 2019, apliquei um teste contendo assuntos relacionados com o nosso objeto de estudo, porém os alunos não se saíram muito bem, sentindo dificuldades no que diz respeito a relação de pertinência, reconhecimento dos números inteiros e reais na reta, assim como em algumas operações.

5.4 Aplicação da Sequência Didática

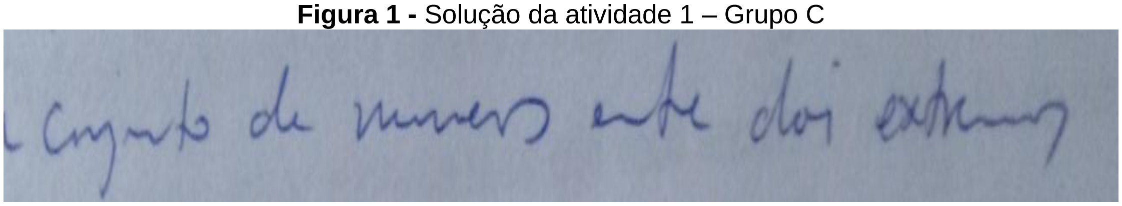
As atividades que compõem a seqüência didática aqui proposta, foram aplicadas no decorrer de 6 aulas de 45 minutos cada, além disso foi aplicado um teste (apêndice 3) com duração de 90 minutos, ou seja 1 aulas de 30 minutos.

Nossa experimentação ocorreu numa escola pública de ensino, localizada em Belém do Pará, nos dias 29 de maio de 2019, 5 e 12 de junho de 2019, em uma turma do 1º ano do ensino médio contendo 35 alunos do turno da tarde. Conversamos primeiramente com a diretora, e perguntamos da possibilidade de fazermos a nossa pesquisa em sua escola. Como somos professor da escola, ela falou que não teria problema. Como nessa escola possuo duas turmas de 1º ano do ensino médio, a primeira turma com 35 alunos, que iriam participar do experimento chamamos de turma de Experimento (TE) e a outra também com 35 alunos de turma de controle (TC). As aulas da turma de controle seriam ministradas por mim em outros dias e no mesmo horário das aulas da turma de aplicação, ambas com o mesmo conteúdo. Como a turma de aplicação não se saiu bem no teste de sondagem, resolvemos ministrar uma aula sobre conjuntos numéricos, envolvendo definições, relações e operações, pois em nossa concepção são assuntos relevantes para solucionar questões de intervalos de números reais. Ministramos essa aula no dia 29/05/2019. No decorrer dessa aula os alunos prestaram muita atenção e não tiveram tanta dificuldade em realizar as tarefas a eles aplicadas. Então iniciamos a aplicação. de nosso experimento, ou seja, o ensino de intervalos de números reais por meio de uma sequência didática aqui proposta.

Iniciamos nosso experimento no dia 29/05/2019 de 13h30min até 15h00, numa quarta feira, e neste momento foi esclarecido aos alunos todos os pontos do experimento, e que no final de cada atividade o professor faria a formalização final dos resultados. Então os alunos foram divididos em 7 grupos de 5 alunos cada. Batizamos os grupos de, Grupo A, grupo B, Grupo C, Grupo D, Grupo E, Grupo F e Grupo G e os respectivos alunos de 1, 2, 3, 4, 5 na ordem em que se encontravam nos seus respectivos grupos.

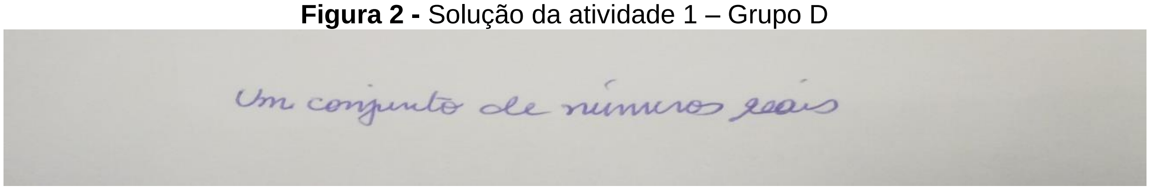
Começamos então nosso experimento, explicando aos alunos a atividade 1 (p.66). Então comecei a perguntar os itens da atividade, e após vasta discussão, os grupos chegaram aos seus resultados, os quais estão ilustrados nas figuras abaixo.

Figura 1 - Solução da atividade 1 – Grupo C



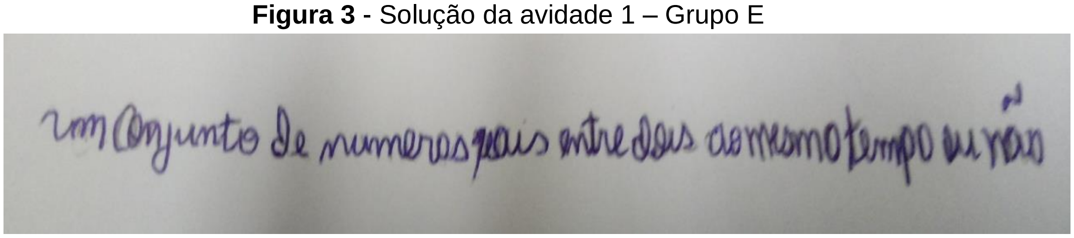
Fonte: Autor (2019)

Figura 2 - Solução da atividade 1 – Grupo D



Fonte: Autor (2019)

Figura 3 - Solução da avidade 1 – Grupo E



Fonte: (Autor 2019)

Com isso o professor formalizou o conceito de Intervalos de Números Reias e apresentou a seguinte definição.

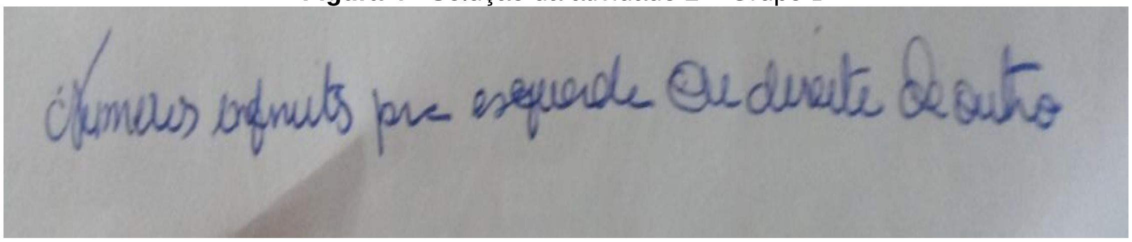
Quadro 7 - Conceito de Intervalos de Números Reais

Sejam *a* e *b* dois reais, com $a < b$. Um intervalo em *R* é um subconjunto de *R*

Fonte: Guidorizzi (2001, p. 18)

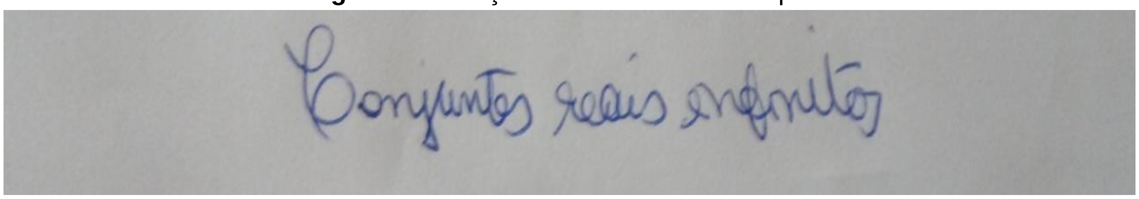
Na atividade 2 (p.68), expliquei o comando da questão, a princípio os alunos ficaram um tanto apreensivos, mas após algumas intervenções por minha parte, os grupos chegaram a algumas conclusões.

Figura 4 - Solução da atividade 2 – Grupo D


Numeros infinitos pra esquerda ou direita de outro

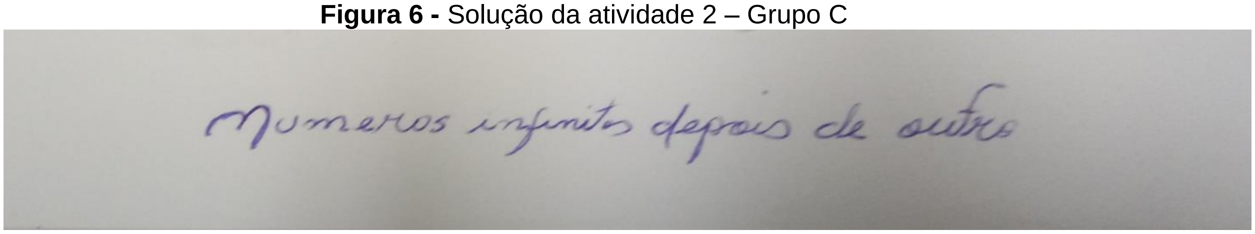
Fonte: Autor (2019)

Figura 5 - Solução da atividade 2 – Grupo E


Conjuntos reais infinitos

Fonte: Autor (2019)

Figura 6 - Solução da atividade 2 – Grupo C

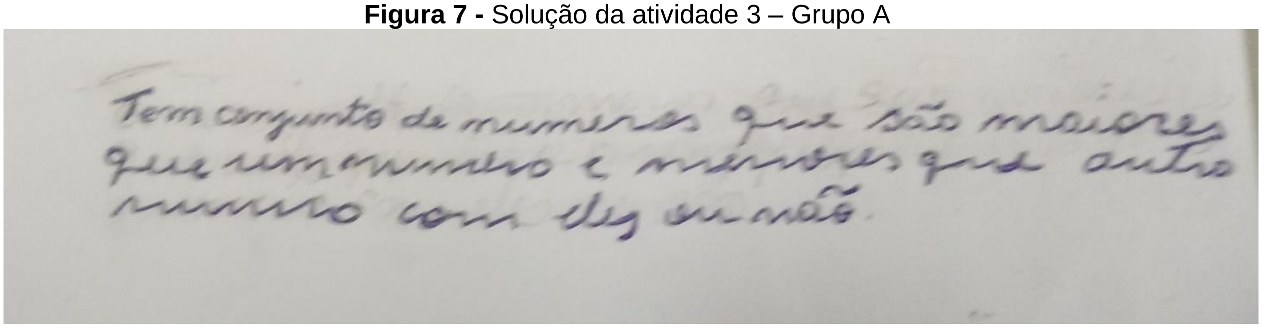

Numeros infinitos depois de outro

Fonte: Autor (2019)

No final o professor formalizou explicando que o que encontraram foi a extensão do conceito de Intervalos de Números Reais.

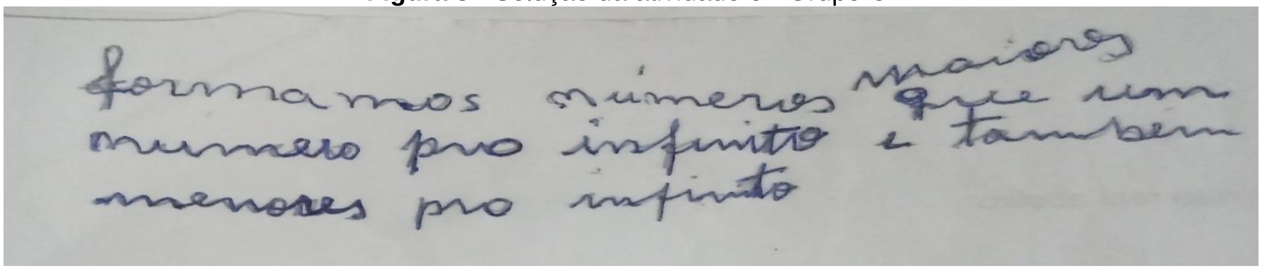
Na atividade 3 (p.70), explicamos aos alunos o comando da mesma, começaram então a executarem tarefa e após socializarem entre si, chegaram as seguintes conclusões.

Figura 7 - Solução da atividade 3 – Grupo A


Tem conjunto de numeros que são maiores
que um numero e menores que outro
numero com eles ou não.

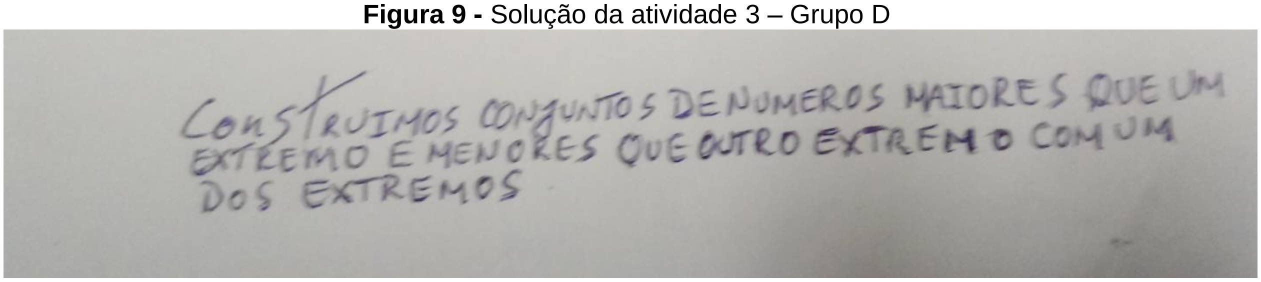
Fonte: Autor (2019)

Figura 8 - Solução da atividade 3 - Grupo C



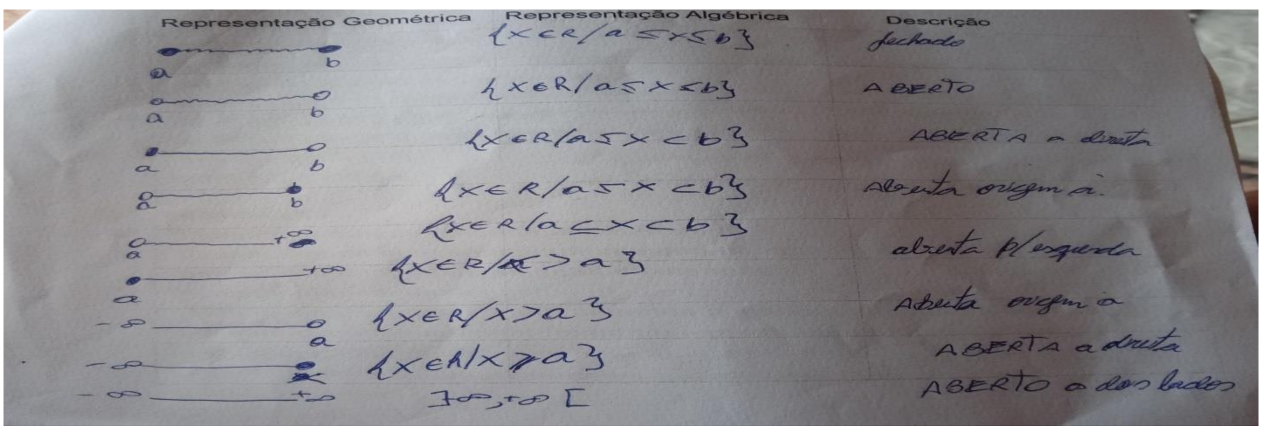
Fonte: Autor (2019)

Figura 9 - Solução da atividade 3 – Grupo D



Fonte: Autor (2019)

Figura 10 – Representações de um intervalo Real – Grupo C



Fonte: Autor (2019)

Com isso o professor formalizou o conceito representações de Intervalos de Números Reais e apresentamos aos alunos a definição.

Quadro 8 - Conceito de intervalos de números reais

Certos subconjuntos de *R*, determinados por desigualdades têm grande importância na Matemática: são os Intervalos. Assim, dados dois números reais *a* e *b*, com *a* < *b*, tem-se:

a) Intervalo aberto

]a, b[= { x ∈ R/ a < x < b }

(A bolinhas vazia (○) indica que os extremos **a** *e* **b** não pertencem ao intervalo)

b) Intervalo fechado

[a, b] = { x ∈ R/ a ≤ x ≤ b }

(A bolinha cheia (●) indica que os extremos pertencem ao intervalo)

c) Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita

[a, b[= { x ∈ R/ a ≤ x < b }

d) Intervalo fechado à direita e aberto à esqerda

]a, b] = { x ∈ R/ a < x ≤ b }

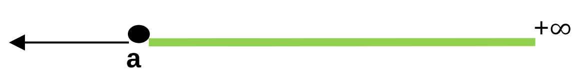
e) Semi-reta esquerda, fechada, de origem **b**

] -∞, b] = { x ∈ R/ x ≤ b }

f) Semi-reta esquerda, aberta, de origem **b**

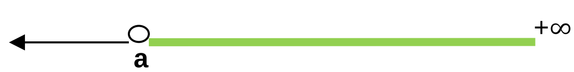
] -∞, b[= { x ∈ R/ x < b }

g) Semi-reta direita, fechada, de origem **a**



[a, +∞[= { x ∈ R/ x ≥ a }

h) Semi-reta direita, aberta , de origem **a**



]a, +∞[= { x ∈ R/ x > a }

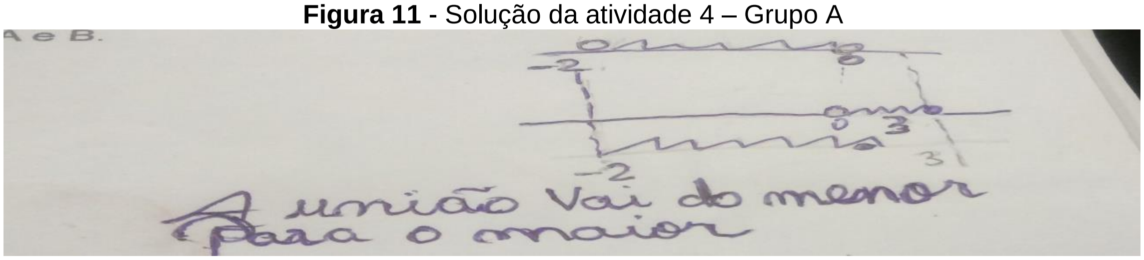
i) Reta real -∞ +∞

] -∞, +∞[= *R*

Fonte: Dante (2009, p. 21)

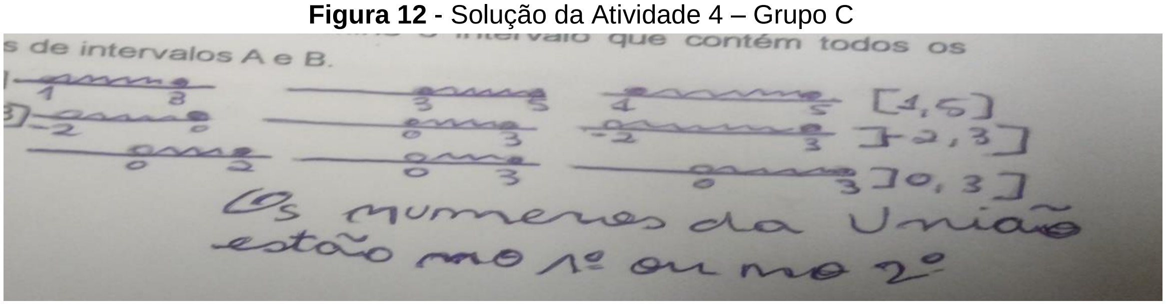
Com relação a atividade 4 (p. 72), primeiramente explicamos aos alunos todos os detalhes que a envolvia. E após inúmeras discussões os alunos chegaram às seguintes conclusões, as quais estão ilustradas nas figuras abaixo.

Figura 11 - Solução da atividade 4 – Grupo A



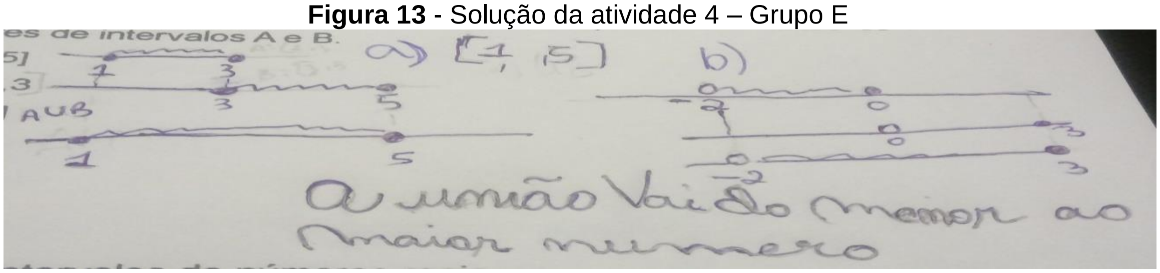
Fonte: Autor (2019)

Figura 12 - Solução da Atividade 4 – Grupo C



Fonte: Autor (2019)

Figura 13 - Solução da atividade 4 – Grupo E



Fonte: Autor (2019)

Após várias interações e discussões, formalizei para os alunos o conceito de união de intervalos de números reais e apresentei a definição abaixo.

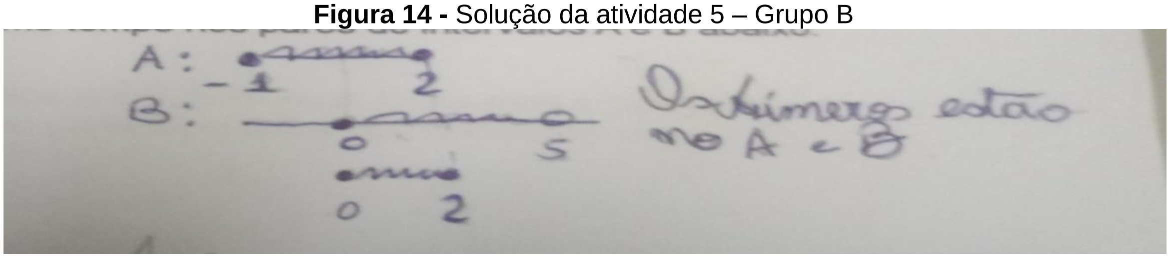
Quadro 9 - Conceito de união de intervalos de Números Reais

De modo geral, dados dois conjuntos A e B, a reunião A ∪ B é o conjunto formado pelos elementos de A mais os elementos de B: **A ∪ B = { x/x ∈ A ou x ∈ B }**

Fonte: Dante (2009, p. 14)

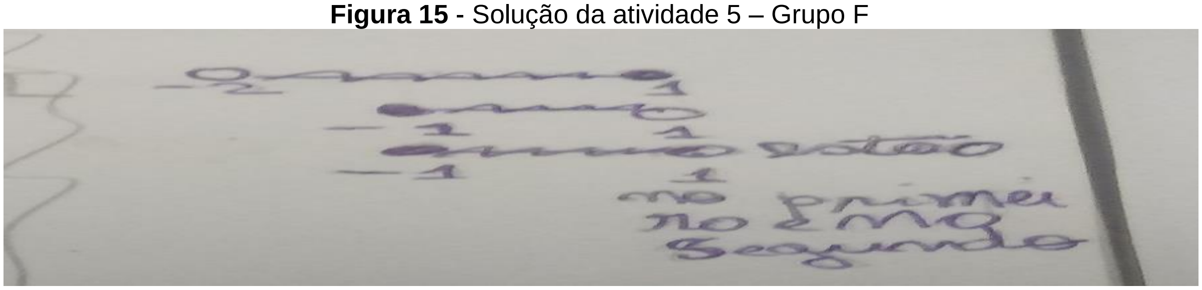
Na atividade 5 (p.73) novamente seguindo o roteiro, explicamos aos alunos os procedimentos que nela constava. E após diversas discussões, eles chegaram as suas conclusões, ilustradas a seguir.

Figura 14 - Solução da atividade 5 – Grupo B



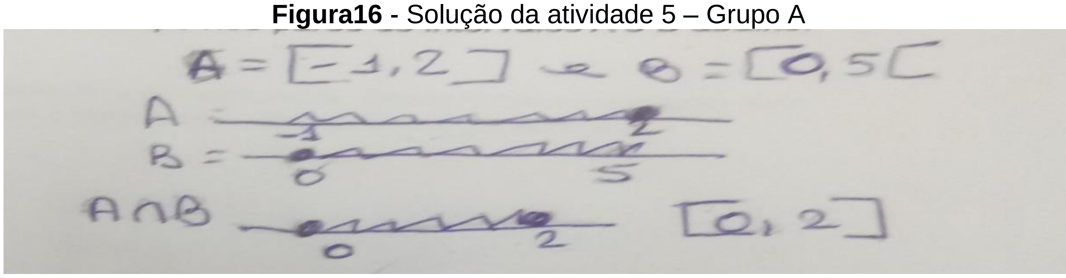
Fonte: Autor (2019)

Figura 15 - Solução da atividade 5 – Grupo F



Fonte: Autor (2019)

Figura16 - Solução da atividade 5 – Grupo A



Fonte: Autor (2019)

No final da atividade, formalizei o conceito de Intersecção de intervalos de números reais, apresentando-os a definição conforme abaixo.

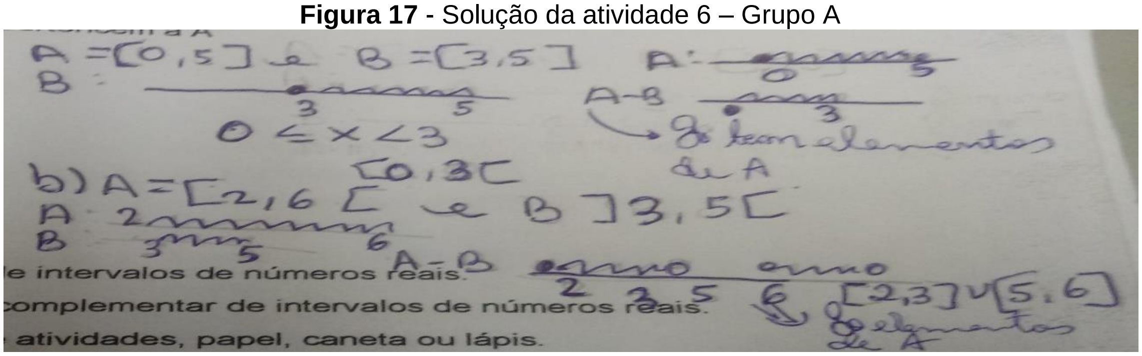
Quadro 10 - Conceito de Intersecção de Intervalos de Números Reais

De modo geral, dados dois conjuntos A e B, intersecção $A \cap B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem simultaneamente a A e a B: **$A \cap B = \{ x/x \in A \text{ e } x \in B \}$**

Fonte: Dante (2009, p. 14)

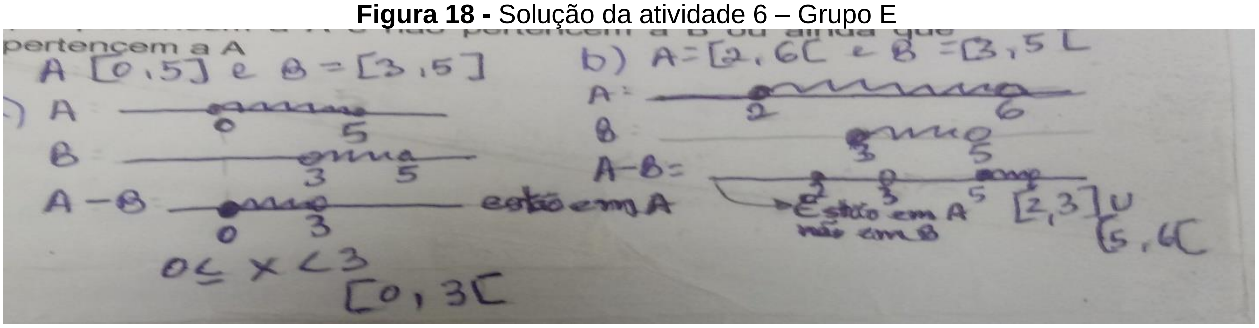
No que diz respeito atividade 6 (p.74), também expliquei aos alunos tudo o que o que faríamos naquele momento. Assim, após a socialização de suas idéias, chegaram as suas conclusões, que são evidenciadas nas figuras a seguir.

Figura 17 - Solução da atividade 6 – Grupo A



Fonte: Autor (2019)

Figura 18 - Solução da atividade 6 – Grupo E



Fonte: Autor (2019)

Após analisar diversas soluções, formalizei para os alunos o conceito de diferença de intervalos de números reais, e lhes disponibilizei a definição abaixo:

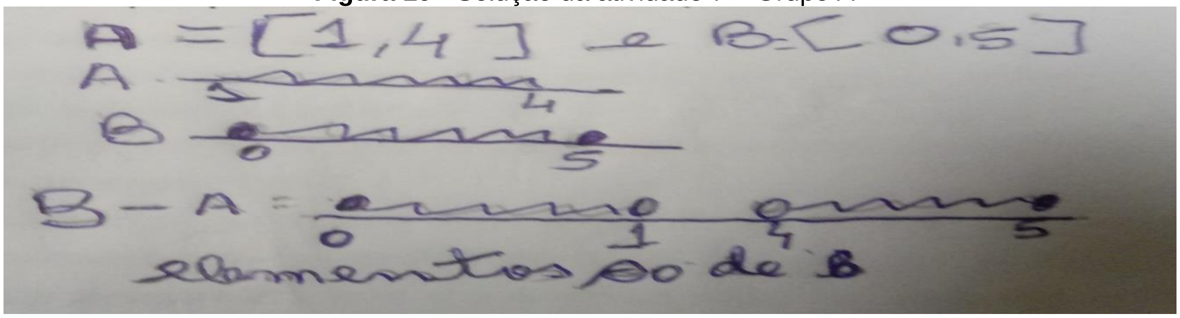
Quadro 11 - Conceito de Diferença de Intervalos de Números Reais(Naturais)

Dados os conjuntos A={0,1, 3, 6, 8, 9} e B={1, 4, 9, 90}, podemos escrever o conjunto C formado pelos elementos que pertencem a A mas que não pertencem a B. Assim, C= {0, 3, 6, 8 }.   **O conjunto C é chamado diferença entre A e B e é indicado por A – B (lê-se A menos B).**

Fonte: Dante (2009, p. 13)

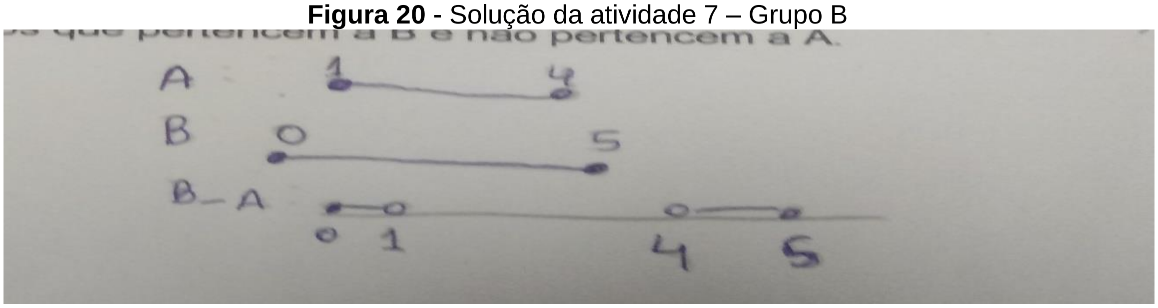
E finalmente na atividade 7 (p.75), também expliquei aos alunos tudo o que o que faríamos naquela atividade. Assim, após todas as discussões de suas idéias, chegaram as suas conclusões, que são evidenciadas nas figuras a seguir.

Figura 19 - Solução da atividade 7 – Grupo A



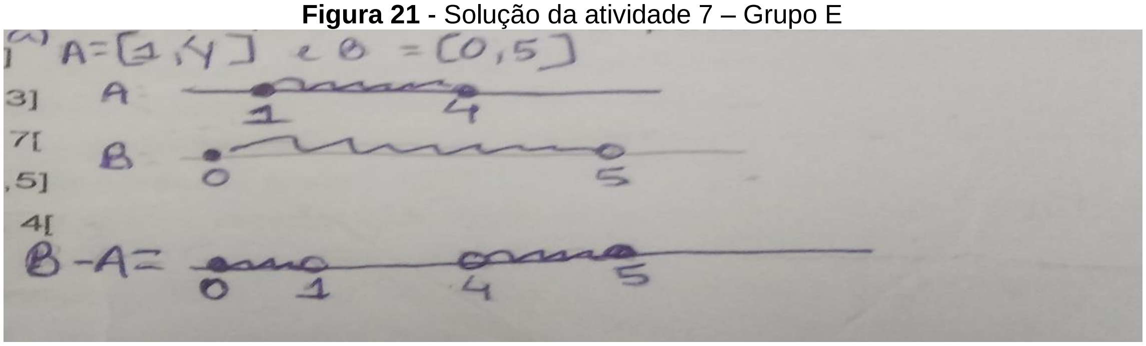
Fonte: Autor (2019)

Figura 20 - Solução da atividade 7 – Grupo B



Fonte: Autor (2019)

Figura 21 - Solução da atividade 7 – Grupo E



Fonte: Autor (2019)

Portanto, analisando as soluções dos grupos, formalizei para os alunos o conceito de Complementar de intervalos de números reais e os apresentei a definição a seguir.

Quadro 12: Conceito de Complementar de Intervalos de Números Reais

Dado o universo U={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} e o conjunto A={1,3,5,7}, dizemos que o complementar de A em relação a U é {0,2,4,6,8,9}, ou seja, é o conjunto formado pelos elementos de U que não pertencem a A.

Fonte: Dante (2009, p. 12)

6 INTERPRETAÇÃO DOS DADOS E IDENTIFICAÇÃO DOS INDÍCIOS NA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.

É neste momento de validação, que podemos identificar os possíveis indícios de aprendizagem pelo alunado, levando em consideração os objetivos a serem alcançados em cada atividade proposta. Neste contexto usamos a Análise Microgenética proposta por Góes (2000), encadeada com as contribuições da Análise do Discurso de Vivian (2006).

Consideramos como dados para análise, as respostas das atividades feitas pelos alunos com suas devidas conclusões e os áudios produzidos quando da aplicação das atividades. Os áudios foram transcritos e serviram para representar as interações verbais entre professor-aluno e aluno-aluno. Para fazermos a análise dos áudios, levamos em consideração o turno que significa a fala do professor ou do aluno, o segmento que significa o conjunto de turnos transcritos em ordem cronológica de cada tarefa que compõe uma atividade, tendo em vista os objetivos a serem alcançados e o episódio que retrata o conjunto de segmentos, correspondendo assim a cada atividade da sequência didática.

Na atividade 1 (p.66) o alunado não mostrou tanta dificuldade em identificar números reais entre dois números dados, criando assim subconjuntos de números reais com quantidade infinita, contendo ou não esses números, chegando próximo ao conceito de intervalos de números reais. Isso pode ser observado através dos recortes mostrados nas figuras 1, 2 e 3 (p.77), assim como também pelos trechos de diálogos a seguir.

Episódio 1

Segmento 1

Turnos 1 – 49

Este segmento relaciona-se às UARCS (I_i), (I_r) e (I_e). Os turnos transcritos a seguir apresentam as interações entre professor e alunos, nos quais o objetivo do pesquisador era fazer com que o alunado percebessem a existência de números reais entre dois números e se a quantidade era finita ou infinita, formando assim subconjuntos de números reais.

(1) Professor - Localizem na reta real os números 2 e 4.

(2) Professor – Entre os números 2 e 4 existem números reais

(3) Grupo A – Sim

(4) Professor -Quais? A quantidade é finita ou infinita?

(5) 2A (existem)

(6) 1A Tem sim o 3. Grupos (Infinita)

(7) Professor – Muito bem

(8) Professor – Vamos lá, pessoal, vou perguntar

(9) Professor – Entre os números -5 e -1 existem números reais?

(10) Grupos – Sim

(11) Professor - Quais? A quantidade é finita ou infinita?

(12) 2A (-5/2); 3C (-7/2); 4D (-9/2); 5G (-3) / Grupos (Infinita)

(13) Professor – Com todos esses números reais que você encontrou no item B3 podemos formar um conjunto de números reais incluindo -5?

(14) Grupos – Sim

(15) Com todos esses números reais que você encontrou no item B3 podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -1?

(16) Grupos - não

(17) Professor – Por quê não?

(18) Grupos – sim

(19) Com todos esses números reais que você encontrou no item B3 podemos formar um conjunto de números reais, incluindo -5 e -1?

(20) Grupos – Sim

(21) Professor – Muito bem, prosseguindo

(22) Professor – Entre os números -2 e 2 existem números reais?

(23) Grupos – Sim

(24) Professor -Quais? A quantidade é finita ou infinita?

(25) 1A (3/2); 4A (1/3); 5E (2/4); 2G (-2/3); 2F ($\sqrt{2}$); $4C\left(-\sqrt{2}\right)$.

(26) Professor – Com todos esses números reais que você encontrou no item C3 podemos formar um conjunto de números reais?

(27) Grupos – Sim

(28) Professor - Com todos esses números reais que você encontrou no item C3 podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -2?

(29) Grupos – Sim

(30) Professor - Com todos esses números reais que você encontrou no item C3 podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 2?

(31) Grupos – Sim

(32) Professor - Com todos esses números reais que você encontrou no item C3 podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -2 e o 2?

(33) Grupos– Sim

(34) Professor – Beleza, vamos seguir

(35) Professor – Entre os números 2 e 5 existem números reais?

(36) Grupos – Sim

(37) A quantidade é finita ou infinita?

(38) Grupos (Infinita)

(39) Professor – Com todos esses números reais que você encontrou no item D3 podemos formar um conjunto de números reais?

(40) Grupos – Sim

(41) Professor - Com todos esses números reais que você encontrou no item D3 podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 2?

(42) Grupos – Sim

(43) Professor - Com todos esses números reais que você encontrou no item D3 podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 5?

(44) Grupos – Sim

(45) Professor - Com todos esses números reais que você encontrou no item D3 podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 2 e o 5?

(46) Grupos – Sim

(47) Professor – Quem poderia me dizer o conceito – O que você na realidade concluiu disso aÍ?

(48) 2C (São todos números que estão na reta); 3E (conjuntos de intervalos)

(49) Professor (I_f) É um conjunto de números reais compreendidos entre dois números (extremos), contendo ou não os mesmos.

Neste segmento prevalece o padrão de interação do tipo I-R-A, prevalecendo aqui a abordagem interativa/de autoridade. Vemos que neste instante o professor procura explorar as idéias matemáticas no contexto dos números reais, assim como despertar os conhecimentos prévios dos alunos, com o objetivo de resolver a questão que lhes fora apresentada (turnos 13, 15, 19, 26, 28, 30,32, 39, 41, 43, 45).

Para chegar seus objetivos, o professor lança perguntas que envolvem os conhecimentos prévios dos alunos (turnos 2, 9,11, 22, 24,35, 37).

Os alunos responderam corretamente às perguntas feitas pelo professor que estavam ligadas aos seus conhecimentos prévios (turnos 6, 12, 23, 25, 38).

Então percebemos aqui o quanto é importante as interações sociais na busca dos conceitos que serão internalizados pelos alunos. Percebemos também a grande importância da atuação do professor no que diz respeito a zonas de desenvolvimento proximais.

Quadro 13 - Resumo da Análise –Episódio 1

<table>
<tr><td>Objetivo do Professor</td><td colspan="2">Relacionar os conhecimentos prévios dos alunos na resolução das atividades propostas;
Levar o alunado a perceber a existência de números reais entre dois extremos, contendo ou não esses extremos; verificar se a quantidade era finita ou infinita e se com todos esses números se pode construir um conjunto de números reais.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo usado</td><td colspan="2">O conjunto de números reais (reta real).</td></tr>
<tr><td>Abordagem</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade</td></tr>
<tr><td>Padrão de Interação</td><td colspan="2">I-R-A</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Relação do discurso</td><td>Professor
Faz perguntas envolvendo os conhecimentos prévios dos alunos</td><td>Alunos
Respondem ao professor através de seus conhecimentos já adquiridos.</td></tr>
<tr><td>Retoma o contexto visando à generalização</td><td>Respondem com exatidão</td></tr>
<tr><td>Apresenta o objeto matemático</td><td>Respondem confirmando</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Figura 22 - Aplicação da atividade 1

Fonte: Dados da pesquisa em sala de aula (2019).

Na atividade 2 (p.68) o alunado conseguiu identificar números à direita de um número, à esquerda de um número, contendo ou não esses números, criando assim subconjuntos de números reais com quantidade infinita, chegando próximo à extensão do conceito de intervalos de números reais. Isso pode ser observado através dos recortes mostrados nas figuras 4, 5 e 6 (p.78), assim como também pelos trechos de diálogos a seguir.

Episódio 2

Segmento 1

Turnos: 50 – 85

Este segmento relaciona-se às UARCS (I_e) e (IA_a). Os turnos transcritos a seguir apresentam as interações entre professor e alunos, nos quais o objetivo do pesquisador era fazer com que o alunado percebessem a existência de números reais antes e após um número dado e se a quantidade era finita ou infinita, formando assim subconjuntos de números reais contendo ou não esse número dado.

---

(50) Professor – Localizem na reta o número 0.

(5A) 35 (Certo)

(52) Professor – Após o número 0 existem números reais?

(53) Grupos – Sim

(54) Professor -Quais?

(55) 3E (3);1A (4); 4B (1/3); 5A (2/4);

(56) Alguém tem mais algum número ?

(57) Professor – Não sabe dizer!

(58) Professor – Esse $\sqrt{2}$ não está após zero?

(59) 5G – Tá.

(60) Professor - Ele é um irracional, também está aí.

(61) Essa quantidade que está após o zero você pode contá-las? Você tem condições de contá-las?

(62) Grupos - Não

(63) Professor – Então ela é finita ou infinita?

(64) Grupos (Infinita)

(65) Professor – Muito bem!

(66) Professor – Com todos esses números reais que você encontrou no item A3 podemos formar um conjunto de números reais?

(67) Grupos – Sim

(68) Professor - Com todos esses números reais que você encontrou no item A3 podemos formar um conjunto de números reais incluindo o 0?

(69) Pessoal, prestem atenção.

(70) Grupos – Sim.

(71) Vão escrevendo as respostas.

(72) Como ficou a representação dos dois itens que eu perguntei?

(73) 2D – A representação é da A4 ou da A5?

(74) Professor: É da A4 e a de baixo é da A5

(75) Agora vamos pegar antes do 0

(76) Professor – Antes do número 0 existem números reais?

(77) Grupos – Sim

(78) A quantidade é finita ou infinita?

(79) Grupos (Infinita)

(80) Com todos esses números reais que você encontrou no item A7, podemos formar um conjunto de números reais?

(81) Grupos – Sim

(82) Com todos esses números reais que você encontrou no item A7, podemos formar um conjunto de números reais incluindo o 0?

(83) Grupos – Sim

(84) Como ficou as formas dessas ai? Prestem atenção e escrevam.

(85) Professor – Façam agora a mesma coisa com os números -3 e 4

[Os alunos tentam fazer a tarefa proposta]

Aqui também as interações sociais entre professor e aluno, ou seja, um padrão de interação do tipo I-R-A, prevalecendo a abordagem interativa/de autoridade. Vemos que neste instante o professor procura explorar as idéias matemáticas no contexto dos números reais, para assim levar o aluno perceber a existência de subconjuntos reais infinitos a direita ou a esquerda de um número real dado (Turnos: 66, 68, 80, 82).

Para chegar seus objetivos, o professor lança perguntas que envolvem os conhecimentos prévios dos alunos (turnos 52, 54, 56, 61, 63, 66, 68, 72, 76, 78, 80, 82, 84).

Os alunos responderam corretamente às perguntas feitas pelo professor que estavam ligadas aos seus conhecimentos prévios (turnos: 53, 55, 59, 64, 67, 70, 77, 79, 81, 83).

Então percebemos aqui o quanto é importante as interações sociais na busca dos conceitos que serão internalizados pelos alunos. Percebemos também a grande importância da atuação do professor no que diz respeito a zonas de desenvolvimento proximais.

Quadro 14 - Resumo da Análise – Episódio 2

<table>
<tr><td>Objetivo do Professor</td><td colspan="2">Envolver os alunos no que diz respeito aos conhecimentos prévios para a solução da atividade;
Fazer com que os alunos percebam a existência de números reais à direita ou a esquerda de um extremo e assim formar conjuntos contendo ou não esse extremo.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo usado</td><td colspan="2">O conjunto de números reais (reta real).</td></tr>
<tr><td>Abordagem</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade</td></tr>
<tr><td>Padrão de Interação</td><td colspan="2">I-R-A</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Relação do discurso</td><td>Professor
Executa perguntas envolvendo os conhecimentos prévios dos alunos.</td><td>Alunos
Dão suas respostas através de seus conhecimentos já adquiridos.</td></tr>
<tr><td>Chama a atenção dos alunos pra existência do $\sqrt{2}$ após o zero e que é um Irracional.</td><td>Respondem de maneira correta.</td></tr>
<tr><td>Confirma as respostas certas dos alunos, partindo
para outras perguntas.</td><td>Respondem de maneira correta</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Figura 23 - Aplicação da atividade 2

Fonte: Dados da pesquisa em sala de aula (2019)

Na atividade 3 (p.70) os alunos conseguiram identificar as formas algébricas e geométricas de intervalos de números reais, isso pode ser verificado nos recortes 7, 8 e 9 (p. 78 e 79), assim como nos áudios a seguir:

Episódio 3

Segmento 1

Turnos: 86 – 109

Este segmento relaciona-se às UARCS (I_e) e (IA_a). Os turnos transcritos a seguir evidenciam as interações entre professor e alunos, nos quais o objetivo do pesquisador era fazer com que o alunado percebessem as representações geométricas e algébricas de um intervalo com as devidas descrições.

---

(86) Professor – Marque todos os números reais entre 0 e 2. Ok?

(87) Professor – Qualquer número que estiver entre 0 e 2 são maiores do que 0 e menores do que 2?

(88) 2E - Sim

(89) Professor – Marque todos os números entre 0 e 2, incluindo os extremos 0 e o 2

(90) Professor - Qualquer número que estiver entre 0 e 2 incluindo o 0 e o 2, são maiores do que ou iguais a 0 e menores do que ou iguais a 2?

(91) Grupos – Ficaram um tanto calados.

(92) Insiste o Professor – Esses números seriam maiores do que ou iguais ao primeiro número e menores do que ou iguais ao segundo número? Sim ou não?

(93) Grupos – Sim

(94) Professor – Ok

[Professor pediu aos alunos que fizessem os demais exercícios.

(95) Professor – Marque todos os números reais antes do -1. Ok!

(96) Professor – Marque o -1 e marque todos os números antes do -1.(com isso os alunos determinaram a forma geométrica)

(97) Professor – Então qual seria a forma algébrica neste caso?

(98) 1B (x é menor que -1)

(99) Professor ok!

(100) Professor – Comenta a posição dos colchetes nas representações estudadas, quando é aberto ou fechado.

(101) Professor – Marque todos os números da reta real.

(102) Professor – A quantidade desses números é finita ou infinita?

(103) grupos – Infinita

(104) Professor – Diz que é infinita a direita e a esquerda.

(105) professor – Todos esses números do menos infinito ao mais infinito, representa então o que?

(106) 1A – Conjunto dos números reais

(107) professor – Muito bem! Conjunto dos números reais.(são todos os números que estamos estudando, vimos conjuntos pequenos até fecharmos a reta toda do menos infinito ao mais infinito, ou seja do - ∞ ao + ∞).

(108) Professor – Elogiou o aluno 1A, dizendo que o aluno deduziu bacana a pergunta.

(109) Professor – Diz que as formas geométricas estão aí, então façam as formas algébrica e a descrição. Dizendo que eles conheceram agora as formas dos intervalos de números reais, dizendo aos alunos para copiar tudo no trabalho).

Neste segmento são evidentes as interações sociais entre professor e aluno, ou seja, um padrão de interação do tipo I-R-A, resultando numa abordagem interativa/de autoridade. Neste contexto o professor procurava explorar as formas matemáticas de representação de conjuntos, para assim levar o aluno perceber as formas de representações de intervalos de números reais (turnos: 90, 92, 98, 105).

Para chegar seus objetivos, o professor lança perguntas que envolvem os conhecimentos prévios dos alunos (turnos 86, 89, 95, 96, 101).

Os alunos responderam corretamente às perguntas feitas pelo professor que estavam ligadas aos seus conhecimentos prévios (turnos: 88, 93, 98, 103, 106).

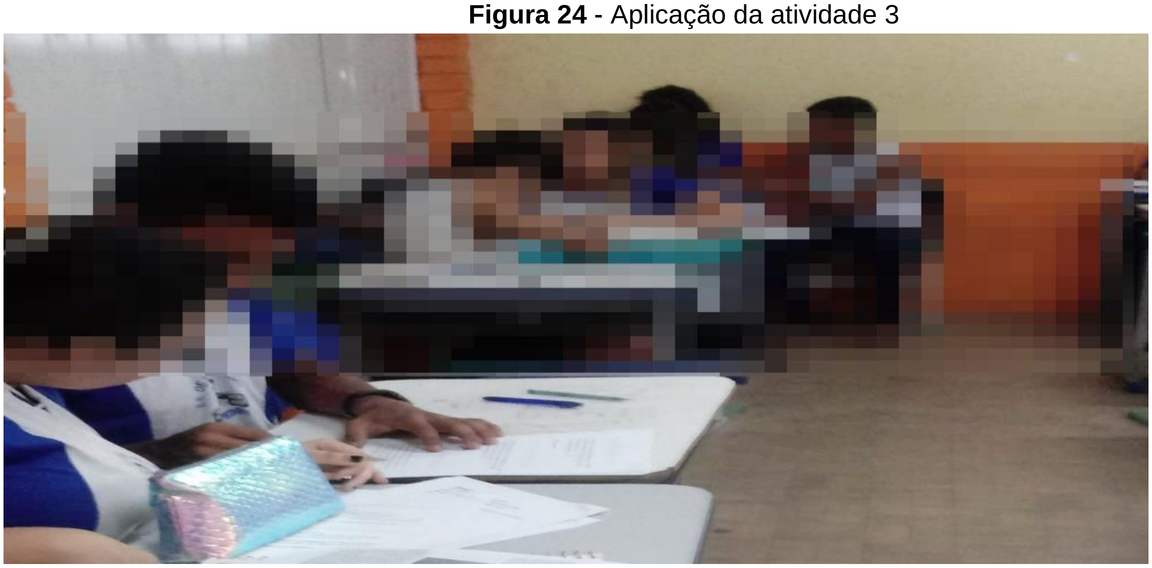
Continuamos aqui dando ênfase a importância das interações entre o professor e o aluno. Percebemos também a grande importância da atuação do professor no que diz respeito aos esclarecimentos quando das dúvidas dos alunos.

Quadro 15 - Resumo da Análise – Episódio 3

Objetivo do Professor	Desenvolver com os alunos as formas de representação de um intervalo de números reais e sua descrição.	
Conteúdo usado	O conjunto de números reais (reta real).	
Abordagem	Interativa/de autoridade	
Padrão de Interação	I-R-A	
Relação do discurso	**Professor**	**Alunos**
	Repete a pergunta aos alunos, quando ocorre dúvidas.	Apresentam dúvidas, mas depois respondem
	Confirma as respostas dos alunos e faz novas perguntas	Respondem de maneira correta.
	Elogia a resposta do aluno perante a turma	Respondem de maneira correta e se motivam a fazerem as tarefas

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Figura 24 - Aplicação da atividade 3



Fonte: Dados de pesquisa em sala de aula (2019)

Na atividade 4 (p.72), o alunado teve facilidade de perceber que juntando todos os elementos de dois intervalos dados, terá um intervalo que vai do menor ao maior elemento dos dois intervalos dados, chegando assim a se aproximar do conceito de união de intervalos de números reais. Isto pode ser percebido nos recortes mostrados nas figuras 11, 12 e 13 (p.81), assim como também nos diálogos mostrados abaixo.

Episódio 4

Segmento 1

Turnos: 110 - 122

Temos aqui a presença da UARC (I_e), onde através das intervenções do professor os alunos respondem acertadamente, mostrando um aprofundamento de seus conhecimentos.

---

(110) Professor – Dados os intervalos A e B. determine o intervalo que contém todos os elementos dos pares de intervalos A e B.

(111) Professor – Eu colocar no quadro dois intervalos e depois vocês fazem os outros.

(112) Professor – Vamos observar os intervalos A=[1,3] e B=[3,5] , esses intervalos são abertos ou fechados?

(113) 2B – Fechados

(114) Professor – Muito bem, intervalos fechados, então inclui os extremos.

(115) Professor – Eu quero reunir todos esses elementos, eu começo de onde?

(116) 4A – Do número 1

(117) Professor – Muito bem, do número 1.

(118) Professor – E onde vocês terminam?

(119) 1A – No número 5.

(120) Professor – Muito bem.

(121) Professor – Então nós vamos do menor ao maior elemento.

(122) Professor - Explica em outro exemplo que quando é aberto o extremo não pertence ao intervalo e quando está fechado pertence ao intervalo.

Nesta atividade, temos novamente as interações do professor com os alunos, prevalecendo então o padrão do tipo I-R-A, resultando com isso uma abordagem interativa/de autoridade. O professor procurava explorar os conceitos de união de conjuntos, para assim levar o aluno perceber a união de intervalos de número reais (turnos: 115,118).

Para chegar seus objetivos, o professor lança perguntas que envolvem os conhecimentos prévios obtidos pelos alunos (turnos 112).

Os alunos responderam às perguntas feitas pelo professor de forma correta (turnos: 113, 116, 119).

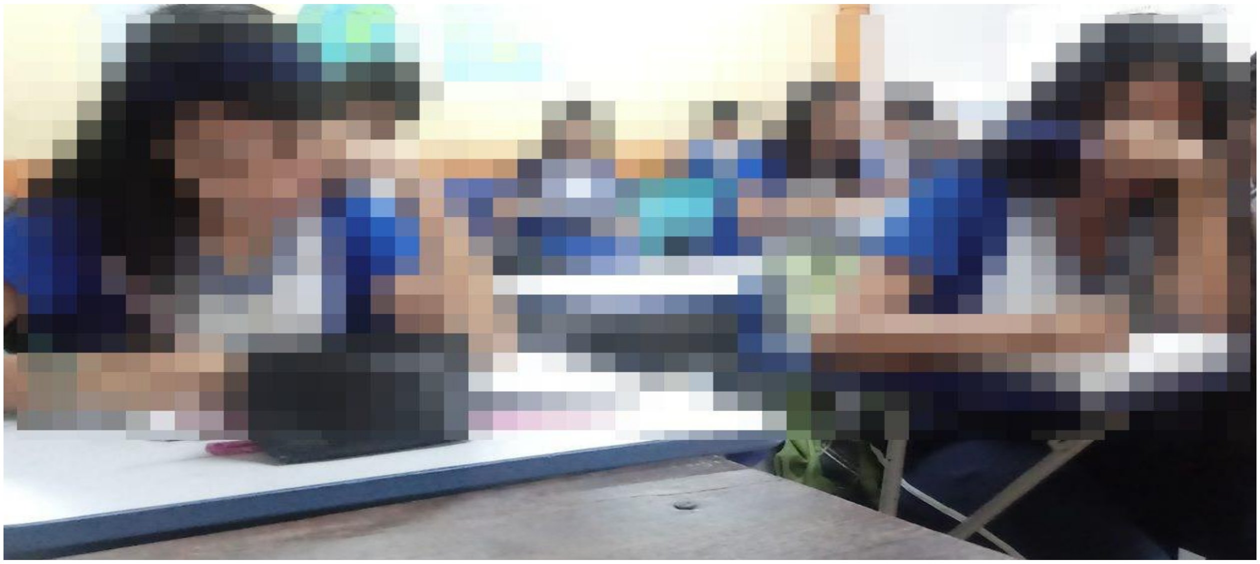
Ainda aqui vemos a grande importância das interações entre o professor e o aluno. Percebemos o esforço do professor em relacionar os resultados obtidos com outros exemplos.

Quadro 16 - Resumo da Análise – Episódio 4

<table>
<tr><td>Objetivo do Professor</td><td colspan="2">Mostrar a união de intervalos de números reais.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo usado</td><td colspan="2">Pares de intervalos de números reais</td></tr>
<tr><td>Abordagem</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade</td></tr>
<tr><td>Padrão de Interação</td><td colspan="2">I-R-A</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Relação do discurso</td><td>Professor
Explora os conhecimentos prévios dos alunos</td><td>Alunos
Respondem corretamente</td></tr>
<tr><td>Usa as formas de intervalos construídas anteriormente</td><td>Respondem corretamente</td></tr>
<tr><td>Enfatiza a formalização do conceito de união mostrando interesse em resolver mais exercícios</td><td>Respondem corretamente</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Figura 25 – Aplicação da Atividade 4



Fonte: Dados da pesquisa em sala de aula (2019)

Na atividade 5 (p.73), os alunos conseguiram perceber os números reais que pertencem ao mesmo tempo aos dois intervalos dados, chegando com isso a se aproximar do conceito de intersecção de intervalos de números reais. Este momento pode ser detectado através dos recortes mostrados nas figuras 14, 15 e 16 (p.82), assim como nos diálogos mostrados a seguir.

Episódio 5

Segmento 1

Turnos: 123 – 139

Temos neste episódio a presença das UARCS (I_i) e (I_e), onde o professor nas suas interações com os alunos, introduz alguns conceitos para ajudar os ajudar, e esses respondem acertadamente, mostrando melhoramento no conhecimento.

---

(123) Professor - Alguém sabe me dizer o que é interseção entre dois conjuntos?

(124) Professor - Sabemos que são os elementos que pertencem ao primeiro conjunto e também ao segundo conjunto. Isso vai acontecer aqui.

(125) Professor -Então são os elementos comuns aos dois conjuntos

(126) Vamos pegar um exemplo primeiro e depois vamos ver se vc consegue fazer.

(127) Professor – Então no item b) você tem o intervalo A=]-2,1] e o intervalo B=[-1,1[, tá certo então quem será a intersecção desses ai, vamos ver se você consegue.

(128) Professor - Esses intervalos possuem elementos em comum?

(129) Grupos – Sim

(130) Professor – Onde começa e onde termina esse intervalo?

(131) 5A disse (começa no -1 e termina no 1)

(132) O 4C perguntou, o 1 pertence aos dois intervalos?

(133) Professor – O que vocês acham?

(134) 2D – Ah! Não pertence, porque o colchete ta pra fora.

(135) Professor – Então como fica a interseção?

(136) 3A – pode começar no -1 e vai até antes do 1.

(137) Professor -Todos concordam?

(138) Grupos – Sim

(139) Professor – Agora ficou legal. Parabéns.

Nesta atividade 5 (p.73), as interações do professor com os alunos, são bastantes pertinentes, estabelecendo aqui o padrão do tipo I-R-A, resultando com isso uma abordagem interativa/de autoridade. O professor procurava explorar os conceitos de intersecção de conjuntos, para com isso levar o aluno perceber a intersecção de intervalos de número reais (turnos: 123, 124, 125).

Para alcançar seus objetivos, o professor lança perguntas que envolvem os conhecimentos prévios obtidos pelos alunos (turnos 127).

Os alunos responderam às perguntas feitas pelo professor de forma correta (turnos: 129, 131, 132, 134, 136).

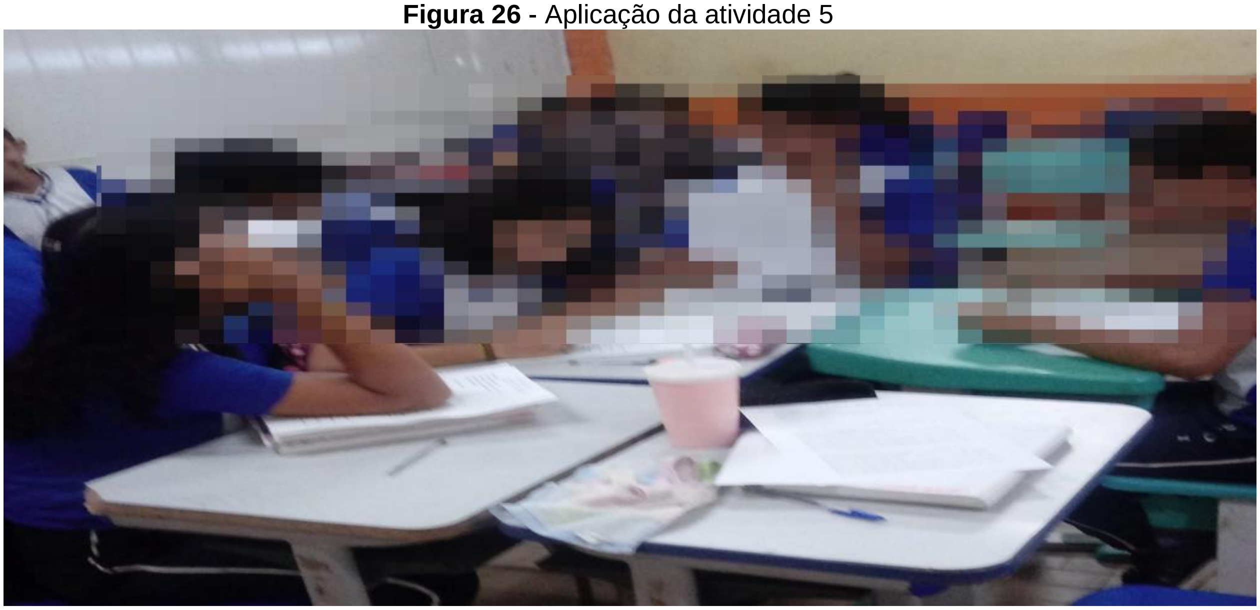
Percebemos a grande importância da presença do professor as interações com os alunos. Percebemos o esforço do professor em chegar junto com o alunado a uma conclusão, para depois os discentes resolverem os outros exercícios.

Quadro 17 - Resumo da Análise – Episódio 5

<table>
<tr><td>Objetivo do Professor</td><td colspan="2">Mostrar a interseção de intervalos de números reais.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo usado</td><td colspan="2">Pares de intervalos de números reais</td></tr>
<tr><td>Abordagem</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade</td></tr>
<tr><td>Padrão de Interação</td><td colspan="2">I-R-A</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Relação do discurso</td><td>Professor
Explora os conhecimentos prévios dos alunos.</td><td>Alunos
Respondem corretamente</td></tr>
<tr><td>Usa as formas de intervalos construídas anteriormente.
Pares de intervalos.</td><td>Respondem corretamente</td></tr>
<tr><td>Estimula os alunos a responderem as perguntas</td><td>Respondem corretamente e seguem fazendo os outros exemplos.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Figura 26 - Aplicação da atividade 5



Fonte: Dados da pesquisa em sala de aula (2019)

Na atividade 6 (p.74), os alunos observaram bem a quantidade de números que pertencem a um intervalo e não a outro dentre pares de intervalos dados, chegando bem próximo do conceito de diferença de intervalos de números reais. Isso é notado nos recortes 17 e 18 (p.83) e também nos diálogos que mostramos abaixo.

Episódio 6

Segmento 1

Turnos: 140 – 142

Neste episódio aparece a UARC (I_e), o professor em suas interações com os alunos, explora os conhecimentos obtidos fazendo com os alunos respondam as perguntas que lhes são lançadas.

(140) Professor – Bom nesses intervalos A=[0,5] e B= [3,5], então na diferença quais são elementos que estão em A e não estão em B.?

(141) 4D – De zero a três com o número 3 aberto.

(142) Professor – muito bem.

Na atividade 6 (p.74), tivemos poucas interações entre o professor com os alunos, mas foi o suficiente para os alunos perceberem onde o docente queria chegar, estabelecendo aqui também o padrão do tipo I-R-A, resultando com isso uma abordagem interativa/de autoridade. O professor procurava introduzir a diferença de intervalos de número reais (Turno:140).

Os alunos responderam às perguntas feitas pelo professor de forma correta (turnos:141).

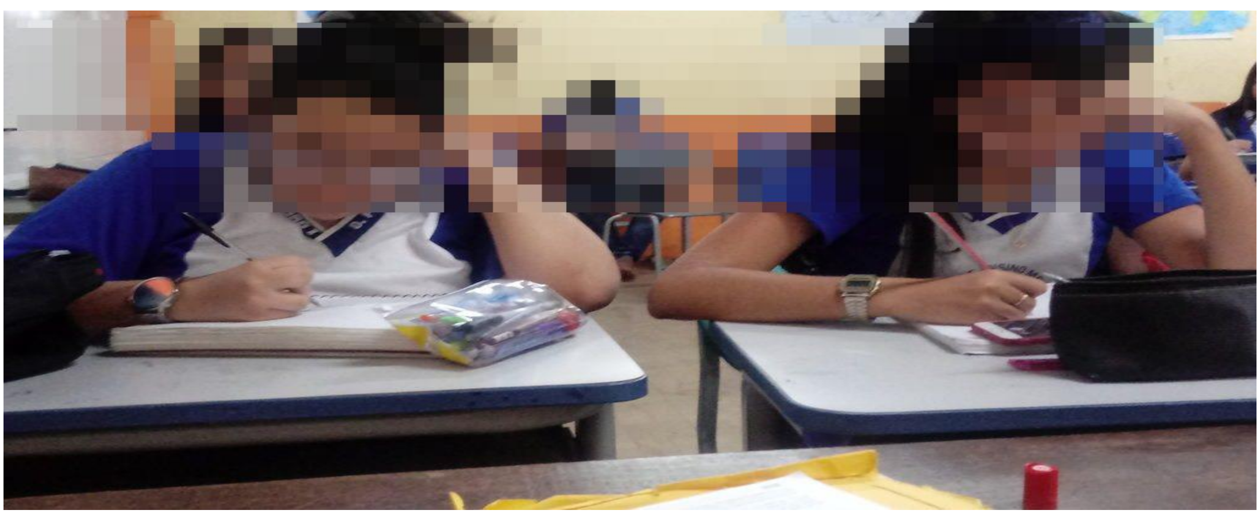
Vemos aqui a importância do professor mesmo com poucas interações com os alunos, levando-os a uma conclusão imediata, e seguindo para a resolução dos demais exemplos.

Quadro 18 - Resumo da Análise – Episódio 6

<table>
<tr><td>Objetivo do Professor</td><td colspan="2">Mostrar a diferença de intervalos de números reais.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo usado</td><td colspan="2">Pares de intervalos de números reais</td></tr>
<tr><td>Abordagem</td><td colspan="2">Interativa/de autoridade</td></tr>
<tr><td>Padrão de Interação</td><td colspan="2">I-R-A</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Relação do discurso</td><td>Professor
Explora os conhecimentos prévios dos alunos (conjuntos)</td><td>Alunos
Respondem corretamente</td></tr>
<tr><td>Usa as formas de intervalos construídas anteriormente. Pares de intervalos</td><td>Respondem corretamente</td></tr>
<tr><td>Com poucas interações consegue que um aluno responda</td><td>Aluno respondeu corretamente</td></tr>
</table>

Fonte: Autor (2019)

Figura 27 - Aplicação da atividade 6



Fonte: Dados da pesquisa em sala de aula (2019)

Nesta última atividade, os alunos perceberam com certa clareza que dados dois intervalos reais em que um está contido no outro, a diferença entre eles estará somente em um deles, e assim chegaram próximo do conceito de complementar de um intervalo em relação a outro. Esse fato é identificado nos recortes mostrados nas figuras 19, 20 e 21 (p.84), combinado com os diálogos abaixo apresentados.

Episódio 7

Segmento 1

Turnos: 143 – 149

Neste último episódio vemos também a UARC (I_e), o professor em suas interações com os alunos, usa os conhecimentos obtidos fazendo com os alunos respondam as suas perguntas.

---

(143) Professor – Na nossa atividade 7, nesse par de intervalos A=[1,4] e B= [0,5], o intervalo A está contido no intervalo B?

(144) Grupos – Sim

(145) Professor: Isto vai nos dá uma diferença, o que é a definição de complementar, vamos conceituar agora.

(146) Professor: Bom, então olha só, como é um complementar, como vão ficar os elementos da diferença, valos calcular essa diferença.

(147) Professor: Olha só pessoal, diante dessa diferença aí, né olha, o resultado, esses elementos que estão na diferença, o que vocês dizem deles.

(148) 2E Elementos de B que não estão contidos em A

(149) Professor – Isso! Muito bem!

Na atividade 7 (p.75), tivemos também poucas interações entre o professor com os alunos, mas foi o bastante para os alunos perceberem qual era o objetivo do professor, estabelecendo aqui também o padrão do tipo I-R-A, resultando com isso uma abordagem interativa/de autoridade. O professor procurava introduzir elementos para chegar ao conceito de complementar de intervalos de números reais (Turno:143).

Os alunos responderam às perguntas feitas pelo professor de forma correta (turnos:144, 148).

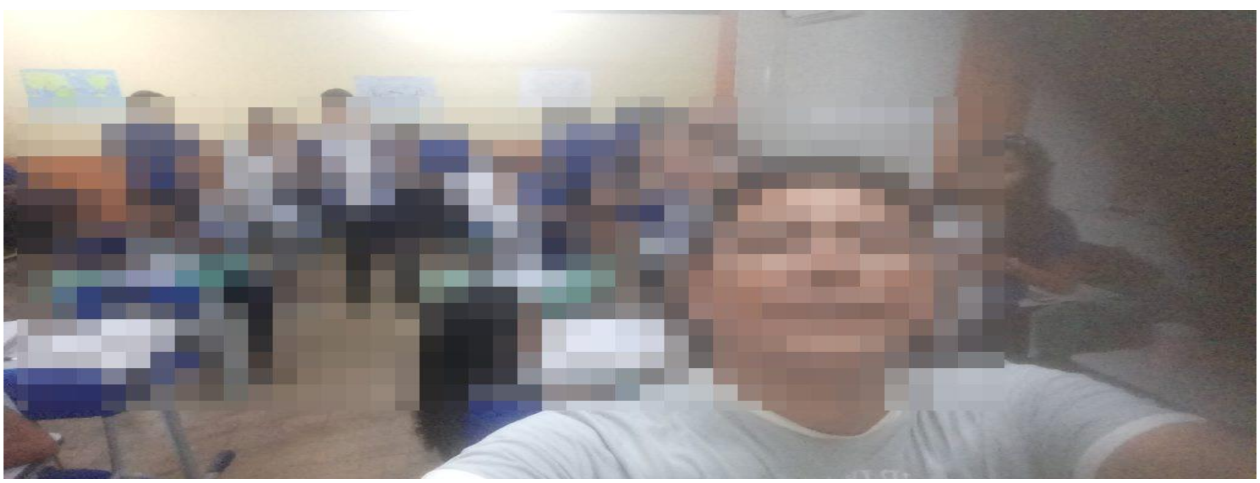
Nesta última atividade o professor se esforçou muito para que os alunos percebessem o que realmente queria, apesar de poucas interações com os mesmos, tendo então o resultado com a resposta do aluno 2E, e após isso começaram a fazer os demais itens.

Quadro 19 - Resumo da Análise – Episódio 7

Objetivo do Professor	Mostrar o complmentar de intervalos de números reais.	
Conteúdo usado	Pares de intervalos de números reais	
Abordagem	Interativa/de autoridade	
Padrão de Interação	I-R-A	
	Professor	**Alunos**
Relação do discurso	Explora os conhecimentos prévios dos alunos (diferença de conjuntos).	Respondem corretamente
	Usa as formas de intervalos construídas anteriormente. Pares de intervalos	Respondem corretamente
Relação do discurso	Com poucas interações consegue que um aluno responda.	Aluno respondeu corretamente, estimulando os demais a fazerem as demais tarefas

Fonte: Autor (2019)

Figura 28 – Aplicação da Atividade 7



Fonte: Dados da pesquisa em sala de aula (2019)

6.1 Atuação dos alunos na resolução das questões do teste

Quando da análise das resoluções das questões do teste aplicado aos alunos, observamos a importância dos conceitos de intervalo de números reais, os quais os alunos lançaram mão, para assim solucionarem as devidas questões.

Figura 29 - Solução da primeira questão feita pelo aluno 13(TE)

1) O intervalo $]-12,13]$ é do tipo:

A) aberto à direita e fechado à esquerda B) aberto à esquerda e fechado à direita C) Fechado D) fechado a direita E) aberto

Fonte: Autor (2019)

Aqui, percebemos que este aluno, assimilou com sucesso os tipos de intervalos de números reais.

Figura 30 - Solução da segunda questão feita pelo aluno 16(TE)

2) O intervalo $\{X \in R / -11 \leq X \leq 0\}$ é do tipo:

A) fechado B) aberto C) aberto à direita e fechado a esquerda C) aberto à esquerda e fechado à direita E) aberto

Fonte: Autor (2019)

Esse aluno também entendeu o conceito dos tipos de intervalos de números reais.

Figura 31 - Solução da terceira questão feita pelo aluna 5(TE)

3) O intervalo $]-\infty,21[$ é do tipo:

A) semi-reta direita, fechada de origem 21 B) aberto à esquerda e fechado à direita C) aberto à direita e fechado à esquerda D) semi-reta esquerda, aberta de origem 21 E) aberto

Fonte: Autor (2019)

Do mesmo modo, este aluno entendeu os conceitos dos tipos de intervalos de números reais.

Figura 32 - Solução da quarta questão feita pelo aluna 5 (TE)

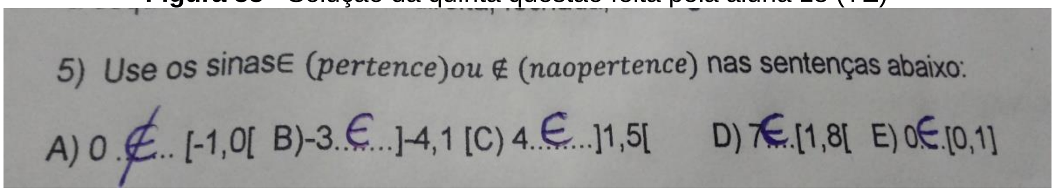
4) O intervalo $[-1,+\infty[$ é do tipo:

A) aberto B) fechado C) semi-reta esquerda, aberta, de origem -1 D) aberto a esquerda E) semi-reta direita, fechada, de origem -1

Fonte: Autor (2019)

Também neste exercício este aluno se prevaleceu dos conceitos de tipos de intervalos de números reais.

Figura 33 - Solução da quinta questão feita pela aluna 18 (TE)



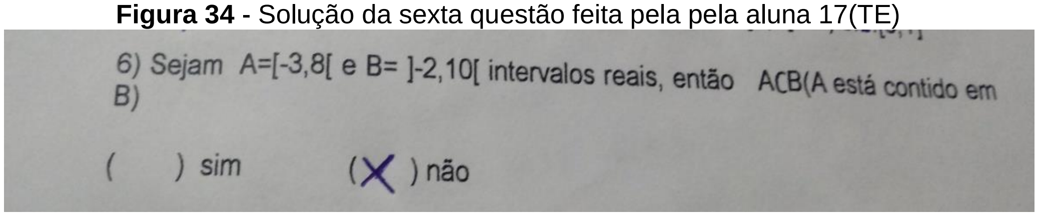
5) Use os sinas$\in$ (*pertence*)*ou* $\notin$ (*naopertence*) nas sentenças abaixo:

A) 0 .$\notin$.. [-1,0[B)-3.$\in$...]-4,1 [C) 4.$\in$...]1,5[D) 7$\in$.[1,8[E) 0$\in$.[0,1]

Fonte: Autor (2019)

Nesta questão o aluno entendeu e lançou mão do conceito da relação de pertinência.

Figura 34 - Solução da sexta questão feita pela pela aluna 17(TE)



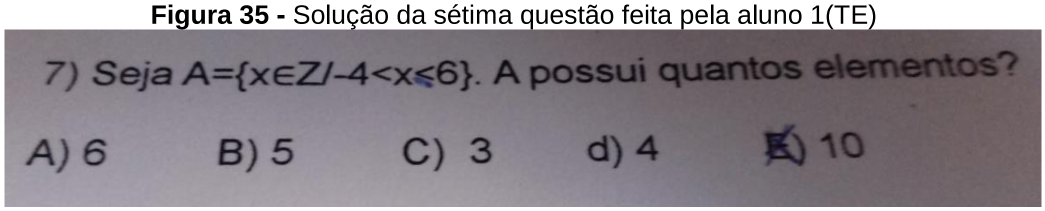
6) Sejam A=[-3,8[e B=]-2,10[intervalos reais, então A⊂B(A está contido em B)

( ) sim (X) não

Fonte: Autor (2019)

Notou-se que esta aluna, entendeu bem a relação de inclusão.

Figura 35 - Solução da sétima questão feita pela aluno 1(TE)



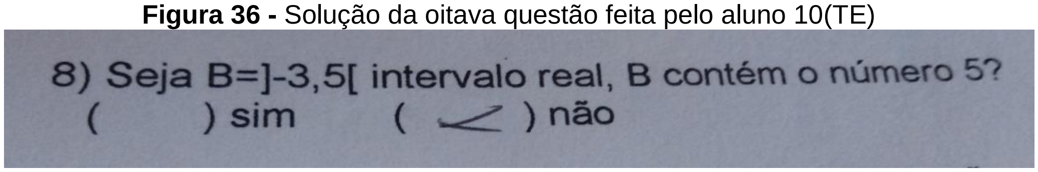
7) Seja $A=\{x\in Z/-4<x\leq 6\}$. A possui quantos elementos?

A) 6 B) 5 C) 3 d) 4 E) 10

Fonte: Autor (2019)

Este aluno conseguiu visualizar a quantidade de números inteiros que existe em um intervalo de números reais.

Figura 36 - Solução da oitava questão feita pelo aluno 10(TE)



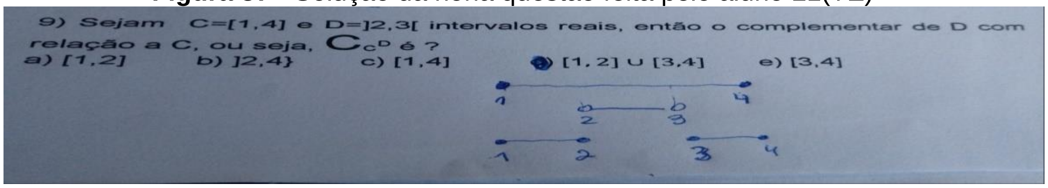
8) Seja B=]-3,5[intervalo real, B contém o número 5?

( ) sim (✓) não

Fonte: Autor (2019)

Tal aluno entendeu o conceito em que quando os extremos são abertos, estes não pertencem ao intervalo.

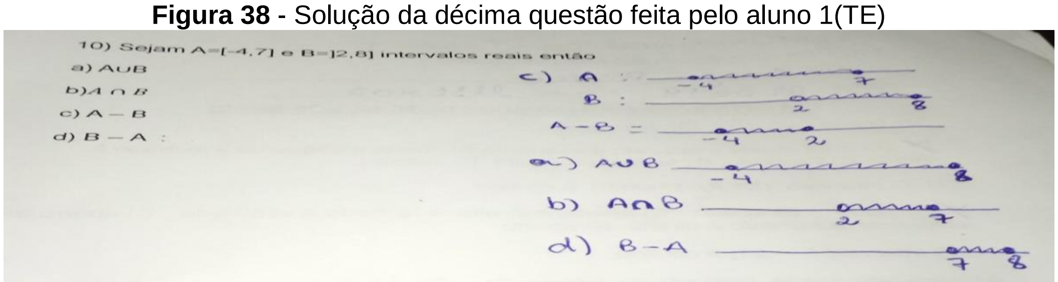
Figura 37 - Solução da nona questão feita pelo aluno 21(TE)



Fonte: Autor(2019)

Este aluno absorveu bem o conceito de diferença e por conseguinte de complementar de intervalos de números reais.

Figura 38 - Solução da décima questão feita pelo aluno 1(TE)



Fonte: Autor (2019)

Observamos aqui que este aluno resolveu a questão baseando-se no conceito das operações de união, interseção e diferença de intervalos de números reais, às quais acreditamos que as entenderam, com pequena dificuldade de organização.

A seguir mostramos um quadro com o desempenho dos alunos da turma que participou no teste. Os acertos são identificados pela letra (C) e os erros pela letra (E). O percentual de acertos da turma do experimento foi de 93,77%.

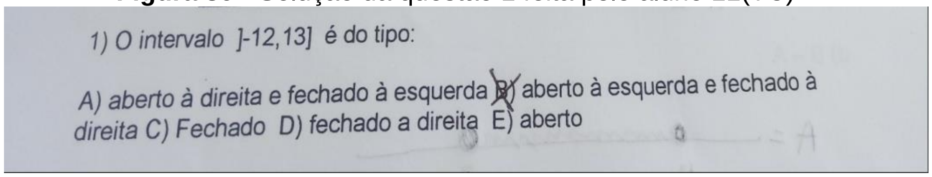
Quadro 20 – Desempenho dos alunos do experimento no teste aplicado

Alunos	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª a	5ª b	5ª c	5ª d	5ª e	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª a	10ª b	10ª c	10ª d	Acertos (%)
1	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100
4	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100
5	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100
6	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100
7	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100
8	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100
9	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100
10	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
11	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E	76,47
12	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100
13	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
14	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	94,11
15	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
16	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
17	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	94,11
18	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
19	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
20	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
21	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E	76,47
22	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
23	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E	76,47
24	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E	76,47
25	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
26	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
27	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
28	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100
29	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100
30	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100
31	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
32	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100
33	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100
34	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	94,11
35	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E	76,47

Fonte: O autor (2019)

No que diz respeito aos alunos da turma de controle da pesquisa, que fizeram o teste, estes tiveram bastantes dificuldades nas resoluções das questões do teste, isto é, dificuldades nos conceitos e operações de intervalos de números reais.

Figura 39 - Solução da questão 1 feita pelo aluno 11(TC)

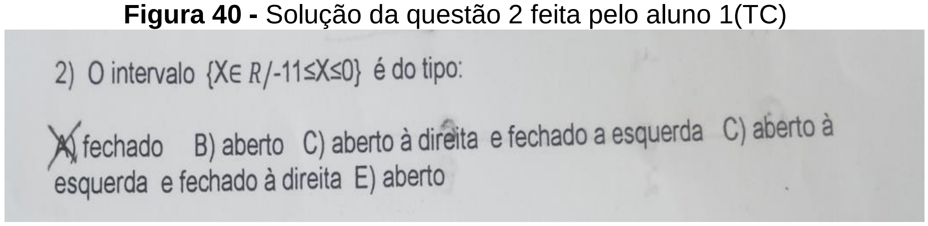

1) O intervalo]-12,13] é do tipo:

A) aberto à direita e fechado à esquerda B) aberto à esquerda e fechado à direita C) Fechado D) fechado a direita E) aberto

Fonte: Autor (2019)

Observamos que a maioria dos alunos acertaram esta questão pois relembraram bem o conceito dos tipos de intervalos de números reais.

Figura 40 - Solução da questão 2 feita pelo aluno 1(TC)

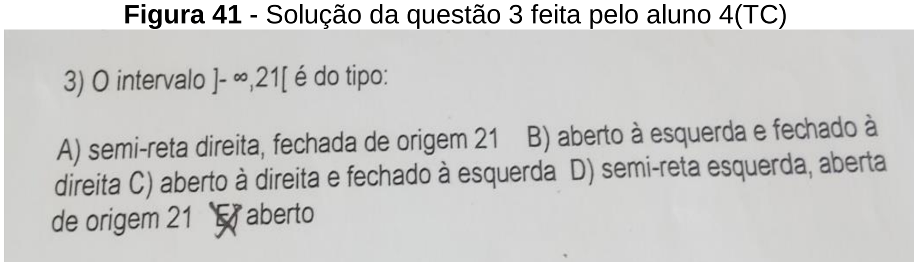

2) O intervalo {X∈ R/-11≤X≤0} é do tipo:

A) fechado B) aberto C) aberto à direita e fechado a esquerda C) aberto à esquerda e fechado à direita E) aberto

Fonte: Autor (2019)

Aqui é notório que a maioria dos alunos acertaram esta questão pois relembraram bem das representações de intervalos de números reais.

Figura 41 - Solução da questão 3 feita pelo aluno 4(TC)

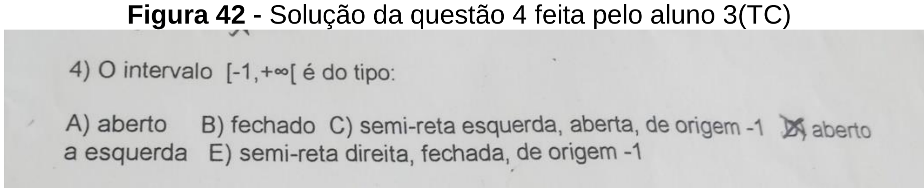

3) O intervalo]- ∞,21[é do tipo:

A) semi-reta direita, fechada de origem 21 B) aberto à esquerda e fechado à direita C) aberto à direita e fechado à esquerda D) semi-reta esquerda, aberta de origem 21 E) aberto

Fonte: Autor (2019)

Nesta questão, o aluno não atentou corretamente para a definição dos tipos de intervalos explicada por mim em sala de aula.

Figura 42 - Solução da questão 4 feita pelo aluno 3(TC)

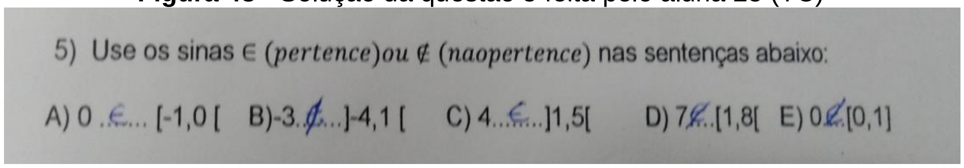

4) O intervalo [-1,+∞[é do tipo:

A) aberto B) fechado C) semi-reta esquerda, aberta, de origem -1 D) aberto a esquerda E) semi-reta direita, fechada, de origem -1

Fonte: Autor (2019)

Da mesma forma, aqui o aluno também não compreendeu o conceito dos tipos de intervalos de números reais.

Figura 43 - Solução da questão 5 feita pelo aluna 25 (TC)

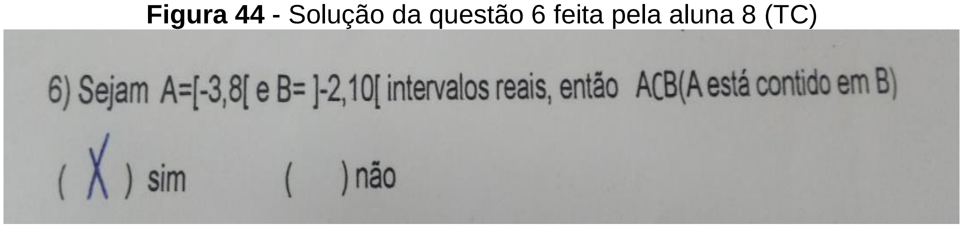

5) Use os sinas ∈ $(pertence) ou$ ∉ $(naopertence)$ nas sentenças abaixo:

A) 0 ..∈... [-1,0 [B)-3..∉...]-4,1 [C) 4...∈...]1,5[D) 7∉..[1,8[E) 0∉.[0,1]

Fonte: Autor (2019)

Percebemos que nesta questão o aluno não aprendeu a relação de pertinência em intervalos de números reais.

Figura 44 - Solução da questão 6 feita pela aluna 8 (TC)

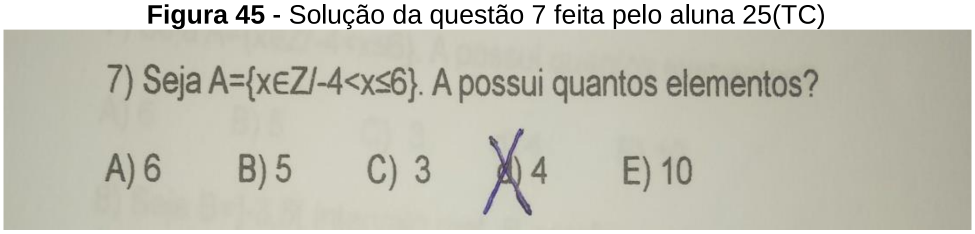

6) Sejam A=[-3,8[e B=]-2,10[intervalos reais, então A⊂B(A está contido em B)

(X) sim ( ) não

Fonte: Autor (2019)

Percebemos aqui que o aluno não entendeu bem a relação de inclusão em intervalos de números reais.

Figura 45 - Solução da questão 7 feita pelo aluna 25(TC)

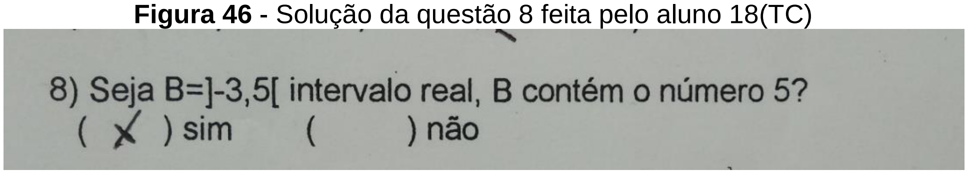

7) Seja A={x∈Z/-4<x≤6}. A possui quantos elementos?

A) 6 B) 5 C) 3 D) 4 E) 10

Fonte: Autor (2019)

Nesta questão vemos que o aluno não conseguiu perceber os números inteiros dentro de um intervalo de números reais.

Figura 46 - Solução da questão 8 feita pelo aluno 18(TC)

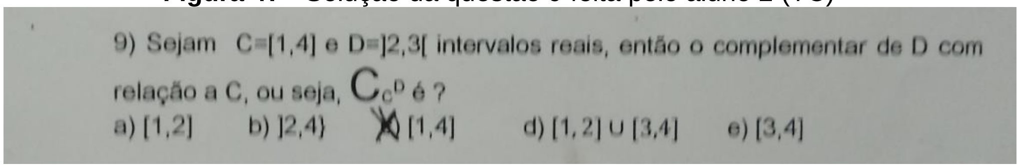

8) Seja B=]-3,5[intervalo real, B contém o número 5?

(X) sim ( ) não

Fonte: Autor (2019)

Observamos que o aluno não domina o tipo desse intervalo e a sua representação.

Figura 47 - Solução da questão 9 feita pelo aluno 2 (TC)

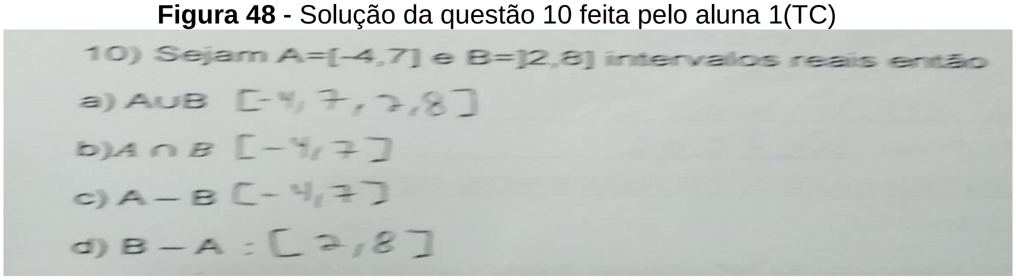

9) Sejam C=[1,4] e D=]2,3[intervalos reais, então o complementar de D com relação a C, ou seja, C_C^D é ?

a) [1,2] b)]2,4) X [1,4] d) [1, 2] ∪ [3,4] e) [3,4]

Fonte: Autor (2019)

Nesta questão percebemos que o aluno não entendeu a diferença nem tão pouco o complementar de um intervalo com relação a outro.

Figura 48 - Solução da questão 10 feita pelo aluna 1(TC)


10) Sejam A=[-4,7] e B=]2,8] intervalos reais então

a) A∪B [-4, 7, 2, 8]

b) $A \cap B$ [-4, 7]

c) A − B [-4, 7]

d) B − A : [2, 8]

Fonte: Autor (2019)

Finalmente na última questão, vemos que o aluno não foi bem, pois não entendeu os conceitos das operações de intervalos de números reais.

A seguir mostramos um quadrocom o desempenho dos alunos da turma de controle da pesquisa que fizeram o teste. Os acertos são identificados pela letra (C),erros pela letra (E) e em branco letra (B). O percentual de acertos da turma do experimento foi de 35,11%.

Quadro 21 – Desempenho dos alunos da turma de controle da pesquisa no teste aplicado

Alunos	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª a	5ª b	5ª c	5ª d	5ª e	6ª	7ª	8ª	9ª	10ªa	10ª b	10ª c	10ª d	Acertos%
1	C	C	E	B	B	B	B	B	B	E	B	E	E	E	E	E	E	11,76
2	C	E	C	E	E	E	C	E	C	C	E	E	E	B	B	B	B	29,41
3	E	E	E	E	C	E	E	C	E	E	E	E	E	B	B	B	B	11,76
4	C	C	E	E	E	E	E	C	C	C	E	E	E	B	B	B	B	29,41
5	C	C	C	C	E	C	C	C	C	E	B	E	E	B	B	B	B	47,05
6	C	C	C	C	B	B	B	B	B	C	B	B	E	B	B	B	B	29,41
7	C	C	C	E	B	B	B	B	B	E	E	E	E	B	B	B	B	17,64
8	C	C	C	C	E	E	C	E	C	E	C	C	C	B	B	B	B	52,94
9	C	C	C	C	E	E	C	C	C	C	E	E	E	E	E	C	B	52,94
10	C	C	C	C	E	E	C	C	C	E	B	E	B	E	E	C	B	47,05
11	C	C	C	C	B	B	B	B	B	B	B	E	B	B	B	B	B	23,52
12	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	C	E	E	B	B	B	B	58,82
13	C	C	C	C	E	C	C	C	E	E	C	C	E	B	B	B	B	52,94
14	C	C	C	C	E	C	C	E	C	E	E	C	E	E	E	E	E	47,05
15	C	C	E	C	B	B	B	B	B	E	E	C	C	B	B	B	B	23,52
16	E	C	E	E	B	B	B	B	B	C	E	C	E	B	B	B	B	17,64
17	E	E	E	E	B	B	B	B	B	C	E	E	E	B	B	B	B	5,88
18	C	C	C	C	E	E	E	C	B	C	E	E	E	B	B	B	B	35,29
19	C	C	C	C	B	B	B	B	B	C	E	E	E	B	B	B	B	29,41
20	C	C	C	E	C	C	C	E	C	C	E	E	E	E	E	E	E	47,05
21	C	C	E	E	C	E	C	C	C	C	C	E	E	B	B	B	B	47,05
22	C	E	C	E	E	E	C	E	C	E	E	C	B	B	B	B	B	29,41
23	E	E	C	E	B	B	B	B	B	E	E	E	C	B	B	B	B	11,76
24	C	C	C	C	E	E	C	E	C	E	E	E	C	B	B	B	B	41,17
25	C	E	E	E	E	E	C	E	E	E	E	E	E	B	B	B	B	11,76
26	C	C	E	E	B	B	B	B	B	C	B	E	E	E	E	E	E	17,64
27	C	C	C	C	C	B	B	B	B	E	C	E	E	E	E	E	E	35,29
28	C	E	C	C	C	E	C	C	C	C	E	C	B	B	B	B	B	52,94
29	C	E	C	C	C	E	C	C	C	C	E	E	E	B	B	C	B	52,94
30	E	C	C	E	E	E	C	C	C	C	E	E	B	B	B	C	B	41,17
31	C	C	C	C	E	E	C	C	C	C	E	E	B	B	B	C	B	52,94
32	C	E	C	C	C	C	C	E	C	C	E	E	B	B	B	C	B	52,94
33	C	C	C	E	C	C	E	E	C	E	E	C	B	B	B	B	B	41,17
34	E	C	C	C	C	C	E	C	E	E	C	E	B	B	B	B	B	41,17
35	E	C	C	C	C	E	E	C	E	E	E	E	B	B	B	B	B	29,41

Fonte: Autor (2019)

Os quadros de números 20 e 21 mostrados anteriormente apresentam a porcentagem de acertos dos alunos que participaram da turma da pesquisa (93,77%) e da turma de controla da pesquisa (35,11%).

Esses índices indicam que a turma que participou da pesquisa teve um ótimo nível de aprendizagem, no que diz respeito ao estudo de intervalos de números reais, mostrando assim indícios de aprendizagem no contexto atual desta pesquisa.

Então, podemos finalmente dizer que os resultados esperados pelos alunos que participaram da pesquisa foram alcançados partindo do principio das hipóteses mostradas previamente. A seguir mostramos a nossa conclusão.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho procuramos verificar a eficácia das potencialidades de uma sequência didática no ensino de Intervalos de Números Reais, ou seja, será que as dificuldades de aprendizagem em intervalos de números reais, podem ser sanadas através da aplicação de uma sequência didática?

Através disso procuramos descobrir os indícios de aprendizagem através da aplicação de uma sequência didática relacionada com intervalos de números reais a alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola pública estadual nesta cidade. Afirmamos então que nosso objetivo foi alcançado analisando os seguintes resultados: nas figuras de 1 a 21, mostramos os recortes das atividades desenvolvidas pelos alunos em sala de aula, as quais se iniciam com uma situação adidática, para que no final ocorra uma avaliação total dos alunos e a formalização do professor. Os alunos a princípio ficaram retraídos, pois acredito não terem participado de igual experiência, porém, no decorrer das atividades, se mostraram participativos e dedicados, muito embora, em cada atividade de ítesn a), b), c) e d), alguns só faziam um ou dois desses itens. Mas com tudo isso, as figuras acima mencionadas mostram que os objetivos foram alcançados, assim como também nos episódios de 1 a 7 do desenvolvimento da atividade, observamos que iniciaram comas intervenções orais de manutenção objetiva, resultando num padrão interativa/de autoridade e finalizaram de forma suave com o padrão interativa/dialógica, como mostram as figuras 22 a 28. Salientamos aqui que em todos esses momentos foram evidenciados indícios de aprendizagem.

Com relação a opinião do alunado referente ao tema em questão, disseram não ter estudado e/ou terem estudado de forma superficial, o que foi comprovado no teste de sondagem aplicado aos alunos.

Para nos assentarmos da realidade do ensino de intervalos de números reais na educação básica, executamos uma revisão de estudos que nos mostraram as dificuldades dos alunos, tanto em nível estadual quanto em nível nacional, assim como também buscar a verdadeira realidade no âmbito de pesquisas já realizadas anteriormente.

Nas sondagens preliminares, detectamos alguns pontos que podem ter contribuído para as dificuldades encontradas, como por exemplo: a não continuidade dos estudos em tempo considerável fora do ambiente escolar, pouco entendimento do conteúdo em sala de aula. E ainda neste contexto, alguns alunos não reconhecem a relação de pertinência e a de inclusão, também não reconhecem a quantidades de números dentro de um intervalo de números reais, e por fim também a maioria não reconhece as operações de intervalos de números reais.

Nossa Sequência Didática escolhida para nossa pesquisa, foi baseada nas Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC), trabalho de Cabral (2017). Esta aplicação foi executada numa turma do 1º ano do nível médio, levando-se em consideração a Análise Microgenética e a Análise do Discurso, que são evidenciadas nas comunicações professor/aluno assim como nos momentos das interações ocorridas quando da ocorrência da aplicação, nos quais foram detectados os indícios de aprendizagem.

È visível depararmos nos quadros 20 e 21, os quais dizem respeito ao teste final aplicado aos alunos da turma que participou da pesquisa e da turma de controle da pesquisa, a diferença do percentual de acertos. Os alunos da turma que participou da pesquisa tiveram um ótimo resultado no que diz respeito aos conceitos e nas operações de intervalos de números reais enquanto que os alunos da turma de controle da pesquisa não foram muito bem.

Vale aqui ressaltar resultados importantes no contexto do ensino e aprendizagem, que é direcionado ao aluno, ao professor e ao saber.

No que concerne ao aluno, inicialmente levou-se em consideração as concepções iniciais do objeto de estudo, as quais os levou a manifestação dos obstáculos de aprendizagem e através das potencialidades da Sequência didática aplicada, os alunos despertaram a capacidade do trabalho colaborativo, o qual figura as interações aluno/aluno e aluno/professor, assim como desenvolve a verbalização do pensamento matemático, ou seja, regularidades/generalizações.

Com relação ao professor, de inicio toma posse das concepções necessárias do objeto de estudo como conteúdo, método e teorias. O professor adquire a capacidade de elaboração de Sequências didáticas estruturadas, se torna capaz de gerenciar situações de ensino, como orientador-mediador, promove o cenário de interações, sistematiza percepções dos alunos, tem a capacidade de formalizar conceitos e sistematizar resultados. Com isso o professor se torna mais organizado para execução de suas tarefas de trabalho.

Através do método aplicado que se iniciou com a concepção dos saberes prévios, em seguida com a aplicação da Sequência Didática, análises e resultados, foi evidenciado indícios de aprendizagem no contexto de nossa pesquisa, enriquecendo assim, o saber matemático. O saber matemático construído elevou-se e está relacionado a três elementos importantes, que são: o conceito (formalizado em cada atividade), o algoritmo (operações) e a aplicação.

E por fim, vale aqui ressaltar que a partir da aplicação da sequência didática que conta com as quatro UARS e do teste aplicação aos alunos da turma de pesquisa, a maioria conseguiu com excelência o entendimento das padronizações/generalizações de intervalos de números reais, mostrando assim a validade deste processo utilizado na pesquisa e deixando o caminho aberto para novas experiências.

REFERÊNCIAS

AGUILERA, J. A.U. et al. **Uma proposta para o ensino de aprendizagem de intervalos reais por meio de jogos**. *In:* ESCOLA DE INVERNO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2012, Santa Maria. **Anais** [...]. Santa Maria: UFSM, 2012. Disponível em: http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/PO/PO_Aguilera_Jessica_Ayumi_Uehara .pdf. Acesso em: 09 mar. 2019.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. da. Engenharia didática: evolução e diversidade didacticengineering: evolutionanddiversity. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, [Florianópolis], v. 7, n. 2, p. 22–52, 2012.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Coleção Horizontes Pedagógicos.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3.ed. São Paulo: BLUCHER, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL Ministério da Educação e Desporto. **Parâmetros Curriculares + Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLEM). Brasília: MEC, 2004.

BRASIL. Ministério da educação. Secretaria de Educação Básica. **As Orientações Curriculares do Ensino Médio**. Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_01_internet.pdf. Acesso em: 09 mar. 2019.

CABRAL, N. F. **Sequências didáticas**: estrutura e elaboração. Pará: SBM, 2017.

CABRAL, N. F. **O Papel das interações professor-aluno na construção da solução lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras**. 2004. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2004.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetike**, Campinas, v. 13, n. 23, p. 85–118, 2005.

CRUZ, W. J. **Os números reais**: um convite aos professores de Matemática do ensino fundamental e do ensino médio. 2011. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2009.

FREIRIA, A. A. A Teoria dos conjuntos de Cantor. **Paidéia**, Ribeirão Preto, n. 2, p.70-78, 1992. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/paideia/n2/08.pdf. Acesso em: 09 mar. 2019.

GÓES, M. D. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. **Cadernos Cedes**, Campinas, ano 20, n.50, p.9 - 25, 2000.

GOMES, A. C. F. N. et al. A construção dos números reais no ensino médio: algumas propostas e reflexões. *In*: ENCONTRO REGIONAL DE ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL, 20., 2014, Bagé-RS. **Anais** [...]. Bagé: Fundação Universitária Federal do Pampa, 2014. Disponível em: https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/CC_Gomes_03596409071.pdf. Acesso em: 19 fev. 2019.

GOUVEIA, J.; DIAS, M. A. Panorama atual do ensino da noção de intervalo sobre R. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo horizonte. **Anais** [...]. Belo Horizonte: ENEM, 2007.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. v. 1. São Paulo: LTC, 2001.

LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. (Coleção Matemática Universitária, v.1).

LIMA, E. L. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

LOPES, P. C. R. **A Construção dos números Reais**. 2006. 150 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade da Madeira, Funchal – Madeira, 2006.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. *In*: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999, p. 197-208.

MENEZES, L. **Matemática, linguagem e comunicação**. 1999. Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/20_ect3.htm . Acesso 27 set. 2018. Texto da Conferência, com o mesmo nome, proferida no ProfMat 1999 – Encontro Nacional de Professores de Matemática que decorreu na cidade de Portimão.

OLIVEIRA, M. M. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópoles - RJ: Vozes, 2013.

OLIVEIRA. M. M. **Conceito de análise matemática na reta para bem compreender os números reais no ensino médio**. 2017. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2017.

PIMENTA, S. G.; ANASTASIOU, L. G. C. **Docência no ensino superior**. São Paulo: Cortez editora, 2002. v.5.

ROBERT, A. Quelques outils d'analyse épistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. **Actes de la IX école d'ete de didactique dês mathématiques**. Houlgate. França.1997.

SISPAE. **[Avaliação Educacional]**. 2014. Disponível em: http://www.vunesp.com.br/reports/RelatorioSISPAE.aspx?c=SEPA1401. Acesso em: 04 dez. 2015.

SOUZA, K. M. **Intervalos Numéricos, operações com Intervalos e introdução a função**. Ouro Preto do Oeste : [s.n.], 2013.

TORTELLI, L. M, et al. Escolhendo ambientes intervalares sob diferentes critérios. *In:* CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA, 35., 2014, Natal. **Proceedings** [...]. Natal: Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, 2015. Disponível em: https://pdfs.semanticscholar.org/a983/f7e2b9684403b1778efc4628231661d47fd1.pdf. Acesso em: 08 maio 2019.

VIVIAN, N. M. **Análise dos padrões discursivos de um professor de ciências do ensino fundamental**. 181 f. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE 1

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado (a) aluno (a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1- **Idade**: _______anos 2- **Gênero**: □ Masculino □Feminino 3- **Série**: ____Ano

4- **Tipo de escola que estuda**? □Municipal □Estadual □Conveniada

5- **Você já ficou em dependência**? □Não □Sim. Em quais disciplinas?__________

6- **Você gosta de Matemática**? □ Não gosto □Suporto □Gosto um pouco □Adoro

7- **Qual a escolaridade do seu responsável masculino**?

□Superior □Médio □Fundamental □Fundamental incompleto □Não estudou

8- **Qual a escolaridade da sua responsável feminina**?

□Superior □Médio □Fundamental □Fundamental incompleto □ Não estudou

9- **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática**?

□Professor particular □Família □Ninguém □Outros. Quem?__________________

10- **Com que frequência você estuda matemática fora da escola**?

□Todo dia □ Somente nos finais de semana □No período de prova □Só na véspera da prova □Não estudo fora da escola.

11- **Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática**?

□Sempre □Quase sempre □Às vezes □Poucas vezes □Nunca

12- **Quais formas de atividades e/ou trabalho o seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?**

□Provas/simulado □Testes semanais □Seminários □Pesquisas □Projetos □Outros. Quais? ________________________________

13- **Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática**?

□Contente □ Tranquilo □com Medo □Preocupado □com Raiva □ com Calafrios

14- As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?

□sim □não □às vezes

15- Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia? □Sim □Não □Às vezes

16- **Seu professor de matemática demonstra domínio do conteúdo**? □Sim □Não

17. Como v**ocê avalia as explicações do seu professor de matemática**?

□Ruim □Regular □Boa □Excelente

18- **Você já estudou intervalos**? □Sim □Não

19- **Se você na questão acima respondeu sim, diga em qual ano/ série**? ___________

20- **Quando você estudou Intervalos, a maioria das aulas**:

□Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios;

□Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;

□Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;

□Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;

□Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

21- **Para praticar o conteúdo de Intervalos seu professor costumava**:

□Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;

□Apresentarjogos envolvendo o assunto;

□Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;

□Não propunha questões de fixação;

□Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

22- Com base na sua experiência q**uando você estudouIntervalos preencha o quadro a seguir.**

(**MF**: Muito Fácil; **F**: Fácil; **R**: Regular; **D**: Difícil; **MD**: Muito difícil)

Conteúdo	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?				
	Sim	**Não**	**MF**	**F**	**R**	**D**	**MD**
Identificação dos conjuntosnuméricos							
Definição de intervalos							
Tipos de intervalos							
União de intervalos							
Intersecção de intervalos							
Diferença de intervalos							
Complementar de intervalos							
Domínio de uma função							
Imagem de uma função							

Resolva as questões a seguir:

1) O intervalo [5,10] é do tipo:

A) aberto a direitaB) aberto a esquerda C) Fechado D) fechado a direita E) aberto

2) O intervalo]-2,0] é do tipo:

A) fechado B) abertoC) aberto a direita D) aberto a esquerda E) aberto

3) O intervalo]0,5[é do tipo:

A) fechado B aberto a esquerdaC) aberto a direita D) fechado a direita E) aberto

4) O intervalo [-1,6[é do tipo:

A) aberto B) fechadoC) aberto a direita D) aberto a esquerda E) fechado

5) Use os sinas $\in (pertence) ou \notin (naopertence)$ nas sentenças abaixo:

a) 0 .... [-5,0[b)-3.......]-5,1] c) 1........]-2,2[d) 10......[1,99[

6) Sejam A=[1,3] e B=]2,3[intervalos reais, podemos dizer que A⊂B(A está contido em B)

( ) sim ( ) não

7) Seja $A=\{x\in Z/-2<X\leq 4\}$. Então A possui quantos elementos?

A) 6 B) 5 C) 3 d) 4 E) 7

8) Seja B=]-3,5] intervalo real, B contém o número 5?

( ) sim ( ) não

9) Sejam C=[2,6] e D=]6,7] intervalos reais, C e D possuem elementos em comum?

( ) sim ( ) não

10) Sejam A=[-4,5], B=]-2,6] intervalos reais, então A∪B ,$A \cap B$, A – B e B – A são respectivamente:

A) [-4,6] ;]-2,5]; [-4,-2]; $5,6$

B)]-4,6] ; [-2,5]; [-4,2];]-3,5[∪ $5,6$

C)]-4,6] ; [-2,5]; [-4,2]

D)]-4,6] ; [-2,5]; [-4,2];]-3,5[∪ $5,6$[

APÊNDICE 2

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada Diagnóstico do ensino de Intervalos, sob a responsabilidade dos (as) pesquisadores **Natanael Freitas Cabral e o orientando Edvaldo Melo Souza**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa pretendemos verificar a eficácia de uma sequência didática para o ensino de Intervalos de Números Reais.

Ressaltamos que em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Você não terá gasto ou ganho financeiro por sua participação. Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o ensino de Intervalos.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com:Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação(CCSE) da Universidade do Estado do Pará(UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n.Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: (91) 4009-9501.

_________________, _______de________________de 2017.

____

Assinatura do pesquisador

Eu,____

aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____

Participante da pesquisa

APÊNDICE 3

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TESTE SOBRE INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS

1) O intervalo]-12,13] é do tipo:

A) aberto à direita e fechado à esquerda B) aberto à esquerda e fechado à direita C) FechadoD) fechado a direita E) aberto

2) O intervalo {X∈ R/-11≤X≤0} é do tipo:

A) fechado B) abertoC) aberto àdireita e fechado a esquerda C) aberto à esquerda e fechado à direita E) aberto

3) O intervalo]-∞,21[é do tipo:

A) semi-reta direita, fechada de origem 21 B) aberto à esquerda e fechado àdireita C) aberto à direita e fechado àesquerda D) semi-reta esquerda, aberta de origem 21 E) aberto

4) O intervalo [-1,+∞[é do tipo:

A) aberto B) fechadoC) semi-reta esquerda, aberta, de origem -1 D) aberto a esquerda E) semi-reta direita, fechada, de origem -1

5) Use os sinas$\in$ $(pertence) ou \notin (naopertence)$ nas sentenças abaixo:

A) 0 .... [-1,0[B)-3.......]-4,1 [C) 4........]1,5[D) 7....[1,8[E) 0....[0,1]

6) Sejam A=[-3,8[e B=]-2,10[intervalos reais, então A⊂B(A está contido em B)

( ) sim ( ) não

7) Seja A={x∈Z/-4<x≤6}. A possui quantos elementos?

A) 6 B) 5 C) 3 d) 4 E) 10

8) Seja B=]-3,5[intervalo real, B contém o número 5?

(   ) sim   (   ) não

9) Sejam C=[1,4] e D=]2,3[intervalos reais, então o complementar de D com relação a C, ou seja, C_C^D é ?

a) [1,2]   b)]2,4}   c) [1,4]   d) $[1,2] \cup [3,4]$ e) [3,4]

10) Sejam A=[-4,7] e B=]2,8] intervalos reais então

a)$A \cup B$

b)$A \cap B$

c) A – B

d) B – A :

Universidade do Estado do Pará

Centro de Ciências Sociais e Educação

Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo

66113-200 Belém-PA

www.uepa.br/pmpem