UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA (PPGECIM)

EXPLORANDO CONCEITOS BÁSICOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Caderno do Professor

ANELISE HODECKER
ORIENTADORA: PROF. DRA. VIVIANE CLOTILDE DA SILVA

BLUMENAU
2016

Apresentação

Caro professor, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1997) os conceitos fundamentais da Análise Combinatória devem ser explorados desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, sendo aprofundados na medida em que o aluno avance no nível escolar, até o Ensino Médio. Neste contexto, não podemos pensar em um trabalho, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, baseado na utilização de fórmulas prontas e apresentação de conceitos já definidos, é preciso que o professor se preocupe em levar o aluno a compreender o processo e o significado do valor encontrado, para que ele realmente aprenda e não simplesmente decore fórmulas e regras.

Este material faz parte da dissertação "Explorando Conceitos Básicos de Análise Combinatória nos Anos Finais do Ensino Fundamental", que tem como objetivo geral analisar, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, o processo de aprendizagem dos conceitos básicos da Análise Combinatória no 6º ano do Ensino Fundamental por meio da utilização de resolução de problemas e materiais didáticos manipuláveis.

Ele apresenta uma sequência didática de atividades matemáticas que abordam conceitos básicos de Análise Combinatória, desenvolvidos exclusivamente no contexto de cada problema.

Dessa forma, esperamos que este material contribua em suas práticas pedagógicas!

Anelise Hodecker

Viviane Clotilde da Silva

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória é um ramo da Matemática que agrupa uma série de conceitos que envolvem os números e os processos de contagem. Borba (2010, p.1) argumenta que ela "se constitui num ramo da Matemática que estuda técnicas de contagem – direta e implícita – de agrupamentos possíveis, a partir de elementos dados que satisfaçam a determinadas condições", ou seja, para que se aprendam os conceitos envolvidos neste ramo da Matemática é necessário que se tenha um bom conhecimento das formas de contagem e de como utilizar as operações básicas para facilitar este processo.

Objetivos específicos para o ensino dos conceitos básicos da Análise Combinatória, no componente curricular Matemática, aparecem tanto nos PCN como na BNCC[1] e estão diretamente relacionados ao processo de resolução de problemas. Nesse contexto, um dos objetivos, para o 8º ano do Ensino Fundamental, citados na BNCC (2016, p. 427) relacionado a este assunto é: "Resolver e elaborar problemas de contagem que envolvam o princípio multiplicativo, por meio de diagrama, de árvore, tabelas e esquemas". O que mostra a importância de se explorar as várias representações do princípio multiplicativo, para que os alunos tenham possibilidade de compreender o significado deste processo de resolução.

Cabe destacar a importância da abordagem dos conceitos básicos da Análise Combinatória, através do uso de procedimentos que permitam que os estudantes adquiram o real entendimento desses conceitos, sem que seja necessário o uso de fórmulas prontas. Pensando desta forma, não se pode deixar de atribuir valor para a importância da resolução de problemas de contagem. Os PCN (1998, p. 137), enfatizam que os "primeiros contatos dos alunos com os problemas de contagem devem ter como objetivo a familiarização com a contagem de agrupamentos de objetos, de maneira formal e direta – fazer uma lista de todos os agrupamentos possíveis e depois conta-los", ou seja, deve-se levar os alunos a descreverem os agrupamentos, contarem quantos se obteve, para que eles entendam, posteriormente, o significado do princípio multiplicativo.

---

[1] Proposta do documento que deverá reger a Educação Básica em todo Brasil, substituindo os atuais Parâmetros Curriculares Nacionais. Está para ser implantado no segundo semestre de 2016. Neste trabalho analisamos a última versão deste documento.

As atividades apresentadas nesse “Caderno do Professor” são abordadas através da metodologia da Resolução de Problemas, pois, acredita-se que quando se utiliza essa metodologia, tendo em mente sempre o desenvolvimento do pensamento lógico dos estudantes, os mesmos conseguirão estabelecer as relações necessárias entre a prática, a realidade e os conceitos estudados, a fim de entender que para chegar à solução correta de um problema, seja ele matemático ou não, não é necessária a utilização de conceitos específicos, ou de fórmulas pré-estabelecidas, mas sim “É preciso abrir a mente e criar estratégias” (KLIEMANN, 2015, p. 26), ou ainda conforme afirma Polya (1995, p. 25) “É preciso compreender o problema, familiarizar-se com ele, gravar na mente o seu objetivo. A atenção concedida ao problema pode também estimular a memória e propiciar a recordação de pontos relevantes”.

Como forma de auxiliar o aluno na interpretação dos problemas propostos, sugere-se a utilização dos materiais didáticos manipuláveis, uma vez que estes, segundo Bezerra (1962), possuem função de:

(i) auxiliar o ensino, tornando-o mais atraente principalmente aos alunos com dificuldade de compreensão e abstração;

(ii) mostrar que aprender Matemática pode ser mais fácil que muitas pessoas pensam e falam, amedrontando os alunos em relação a esse componente curricular;

(iii) aumentar o interesse dos alunos pelo estudo desta ciência.

Nesse contexto, recomenda-se que o professor esteja atento a forma como irá utilizar esses materiais didáticos manipuláveis em sala de aula, pois, de acordo com Nacarato (2005), o “uso inadequado ou pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem Matemática. O problema não está na utilização desses materiais, mas na maneira como utilizá-los” (p. 4). Nesse contexto, o professor não deve utilizar o material didático simplesmente pelo fato de ele tornar a aula mais atraente ou divertida na visão dos alunos, é preciso levar em conta que o material deve servir para que o aluno visualize o processo estudado, facilitando a abstração do mesmo.

É importante registrar que as atividades apresentadas neste caderno foram desenvolvidas com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, também conhecida como a “ciência dos signos”. Quando nos referimos aos registros de representação semiótica em Matemática, tratamos dos registros utilizados para representar os objetos matemáticos, por exemplo, os “[...] sistemas variados de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébrica e lógica que contenham o estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc." (DUVAL, 2009, pag. 13). Essas representações estão fortemente relacionadas à Matemática, uma vez que a mesma é uma ciência abstrata que necessita de signos para representar seus objetos de estudo, sendo que, segundo Duval (2013) um mesmo objeto pode ser apresentado através de diferentes formas de representação.

Ainda de acordo com Duval (2013), existem quatro tipos distintos de registros na aprendizagem Matemática, conforme podemos notar no quadro 1.

Quadro 1 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no conhecimento matemático

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DIRCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural. Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: * argumentação a partir de observações, de crenças...; * dedução válida a partir de definição ou de teoremas;	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). *apreensão operatória e não somente perceptiva; *construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: * numéricas (binária, decimal, fracionária...); * algébricas; *simbólicas (linguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. *mudanças de sistema de coordenadas; *interpolação, extrapolação.

Fonte: DUVAL (2013, p. 14)

Este autor afirma que "A originalidade da atividade Matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação" (DUVAL, 2013, p. 14). Isso porque segundo ele o entendimento da mudança de registro sugere que o estudante compreendeu o conceito e/ou procedimento matemático e segundo Soares (2007) é importante que esta articulação, em um mesmo objeto, ocorra entre pelo menos um registro multifuncional e outro monofuncional.

Sendo assim, é importante nas atividades sugeridas, observar se os alunos apresentam um registro multifuncional (esquema, árvore ou quadro) e um monofuncional (contagem ou princípio multiplicativo), buscando verificar se eles têm conhecimento de que estes registros representam o mesmo objeto e se conseguem transitar entre os mesmos.

2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE ATIVIDADES

Caro Professor, a sequência didática apresentada a seguir explora conceitos básicos de Análise Combinatória (princípio fundamental da contagem, ou seja, princípio multiplicativo, árvore, quadro e descrição das possibilidades) por meio de Resolução de Problemas e do uso de Materiais Didáticos Manipuláveis.

No apêndice A deste material, encontram-se sugestões de problemas a serem utilizados, apresentando suas resoluções nas quatro formas acima mencionadas e o material didático manipulável desenvolvido exclusivamente para cada problema. Se necessário, o professor pode aumentar ou diminuir o número de problemas a serem utilizados de acordo com o número de alunos da turma onde será desenvolvida a sequência didática.

Para a realização das atividades desta sequência, sugere-se que a turma seja dividida em grupos de, no máximo, quatro alunos. Cada grupo estará relacionado a um problema que deverá ser resolvido durante as 5 primeiras atividades (alunos do grupo 1 resolverão o problema 1, alunos do grupo 2 resolverão o problema 2, e assim por diante).

Apesar dos estudantes que fazem parte do mesmo grupo resolverem um único problema e, na atividade 2 estarem sentados em grupos, sugerimos que que cada um apresente a sua resolução individualmente em todas as atividades, pois desta forma ele será obrigado a fazer o seu próprio registro e você poderá analisar o desenvolvimento de cada aluno.

2.1 ATIVIDADE 1: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEM EXPLICAÇÃO PRÉVIA

Nesta atividade, o professor deve entregar um problema para cada aluno e solicitar que eles o resolvam, individualmente, apresentando quantas e quais são as possibilidades de combinações entre os elementos do problema.

É importante, neste momento, não dar nenhuma explicação quanto a forma de resolução deste tipo de problema. Os alunos devem ser deixados livres para os resolverem da forma que acharem mais conveniente, utilizando seus conhecimentos prévios.

Esta atividade possui os seguintes objetivos:

Objetivos:
- Verificar se os estudantes são capazes de resolver problemas que envolvem os conceitos básicos da Análise Combinatória, sem explicação prévia, uma vez que este assunto, conforme os PCN deve ser explorado a partir dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.
- Verificar entre os alunos que conseguem resolver (se algum conseguiu) a forma como eles representam as possibilidades (árvore, quadro, desenhos ou descrição) e se chegam ao resultado final esperado.

Material Utilizado: problema referente a cada grupo impresso em folha A4, contendo espaço para a resolução na própria folha. (Sugestão de problemas: Apêndice A)

Organização dos Estudantes: sentados individualmente.

Aplicação:

- Entregar para cada estudante uma folha A4 contendo o problema relacionado ao seu grupo;
- Solicitar que os estudantes resolvam os problemas da forma que julgarem mais conveniente, no espaço em branco da folha.

Duração da Atividade: de 30min a 45min.

Caro Professor

Através dessa atividade é possível verificar os conhecimentos prévios dos alunos, além de observar quais registros de representação os mesmos utilizam para chegar ao resultado esperado. Assim, através dessas verificações o professor poderá, ou não, modificar as próximas atividades.

2.2 ATIVIDADE 2: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM O AUXÍLIO DO MATERIAL DIDÁTICO

Nesta atividade, sugere-se que o professor solicite que os estudantes resolvam o mesmo problema da atividade anterior (atividade 1), apresentando quais as combinações possíveis e qual o total das mesmas, utilizando materiais que auxiliem na compreensão do mesmo. Para desenvolver desta atividade, o professor deve entregar aos estudantes o material didático manipulável referente a cada problema, juntamente com uma folha contendo o problema que cada grupo deverá resolver.

Caso o professor não tenha um material didático manipulável para cada aluno, os mesmos podem estar sentados em grupos, reforçando que é importante que cada aluno apresente a sua resolução.

Esta atividade possui os seguintes objetivos:

Objetivos: - Verificar se os alunos do grupo conseguem utilizar o material didático manipulável de forma a facilitar a compreensão do problema proposto.
- Verificar nos grupos a forma como eles representaram as possibilidades (árvore, quadro ou descrição) e se acertam o resultado final.

Material Utilizado: - Material didático manipulável, desenvolvido exclusivamente para cada problema; (sugestão: modelos apresentados no Apêndice A)
- Folha contendo o problema que o grupo (estudante) deverá resolver;
- Folha resposta, para cada aluno resolver o problema de forma individual.

Organização dos Estudantes: em grupo ou individual, dependendo da disponibilidade de materiais didáticos manipuláveis.

Aplicação:

- Organizar os estudantes em um ambiente da escola que possua mesas grandes e retas, um grupo por mesa;

OBS.: essa atividade pode ser desenvolvida fora da sala de aula, caso a escola disponibilize um ambiente com mesas retas que torne mais fácil o trabalho em grupo.

- Entregar para cada grupo a folha com o problema que ele deverá resolver juntamente com o material didático manipulável referente ao mesmo;
- Solicitar que os estudantes resolvam o problema utilizando o material didático e em seguida apresentem os resultados e o processo de resolução na folha resposta.

Duração da Atividade: de 35min a 45min.

Caro Professor

Importante comparar as respostas dos alunos nesta atividade com as dadas na atividade anterior para verificar se o material auxiliou, ou não, na compreensão do problema.

Cabe destacarmos aqui, a importância de, a partir deste momento, os materiais didáticos manipuláveis estarem à disposição dos estudantes durante a realização de todas as atividades da sequência didática. Pois, aqueles alunos que ainda tiverem dúvidas em relação à resolução dos problemas, nas próximas atividades, poderão recorrer aos mesmos.

2.3 ATIVIDADE 3: APRESENTAÇÃO DE TRÊS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO UTILIZADOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS QUE ENVOLVAM O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Essa atividade consiste em uma sistematização da resolução por parte do professor, quando este apresenta três registros de representação (multifuncionais) que podem ser utilizados na resolução de problemas que envolvem conceitos básicos de Análise Combinatória: árvore, quadro e descrição de possibilidades.

Para a apresentação desses registros de representação, sugere-se que o professor traga um novo problema, diferente daqueles que os estudantes vinham resolvendo nas atividades anteriores. Deve também deixar claro aos estudantes que o resultado final é a soma de todas as possibilidades apresentadas. Os objetivos desta atividade são:

Objetivos: - Apresentar e exemplificar a resolução através da árvore; do quadro e da descrição de possibilidades.

- Verificar se os alunos conseguem perceber relação entre essas três formas de resolução: independente de qual forma utilizada para resolver, todas elas chegam ao mesmo resultado final.

Para o alcance desses objetivos, sugere-se a apresentação do problema a seguir.

Antônio foi até uma loja de sapatos para comprar um tênis novo. Chegando na loja a vendedora lhe disse, que no seu tamanho haveriam três modelos disponíveis e cada modelo em três cores diferentes: Branco, Preto e Azul. Quantas e quais são as possibilidades que Antônio possui para comprar seu tênis novo?

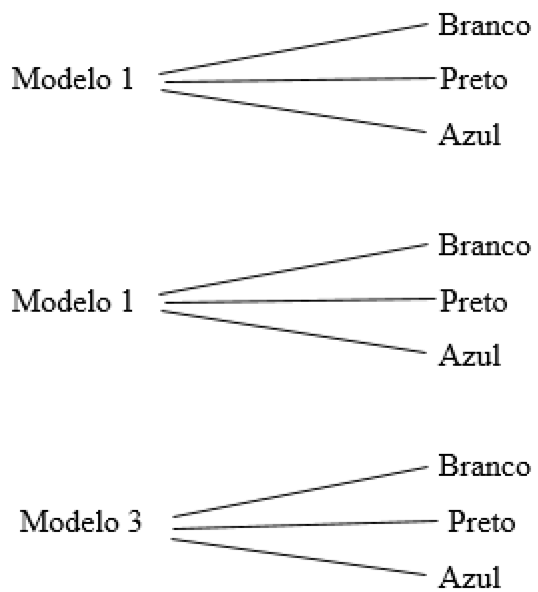
Em seguida o professor inicia a apresentação das três formas de resolução. Na sequência apresenta-se a resolução por meio: (1) da árvore; (2) da descrição das possibilidades e por fim, (3) do quadro. Apesar de sugerirmos essa ordem de apresentação, nada impede que o professor a mude.

(1) Resolvendo através da Árvore de Possibilidades.

Temos então, dois conjuntos com elementos diferentes:

C1 = Modelos de Tênis {Modelo 1, Modelo 2, Modelo 3}

C2 = Cores de Tênis {Branco, Preto, Azul}



Total: 9 possibilidades

(2) Resolvendo através da Descrição das Possibilidades

Para descrever as possibilidades, utilizamos as seguintes letras:

Modelo 1 = M1	Cor Branca = B
Modelo 2 = M2	Cor Preta = P
Modelo 3 = M3	Cor Azul = A

Descrevendo as possibilidades: {M1, B}; {M1, P}; {M1, A}; {M2, B}; {M2, P}; {M2, A}; {M3, B}; {M3, P}; {M3, A}.

Total: 9 possibilidades.

(3) Resolvendo através do quadro

Cores / Modelos	Branco (B)	Preto (P)	Azul (A)
Modelo 1 (M1)	**(M1, B)**	**(M1, P)**	**(M1, A)**
Modelo 2 (M2)	**(M2, B)**	**(M2, P)**	**(M2, A)**
Modelo 3 (M3)	**(M3, B)**	**(M3, P)**	**(M3, A)**

Ao realizarmos a contagem do total de possibilidades no quadro, obtivemos um total de **9 possibilidades.**

Duração da Atividade: 90min.

Caro Professor

Ao final da apresentação destes três registros de representação que podem ser utilizados na resolução dos problemas, o professor pode conduzir uma conversa com a turma a fim de verificar se os alunos compreenderam que independente de qual registro de representação for utilizado para resolver o problema, o resultado final será o mesmo.

Nesse contexto, esta atividade exemplifica aos alunos que um objeto pode ser representado através de várias representações semióticas diferentes (DUVAL, 2013), além de intensificar a ideia de que não existe um único método ou fórmula para resolver problemas.

2.4 ATIVIDADE 4: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ATRAVÉS DE TRÊS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Nesta atividade, o professor deve orientar os alunos a sentarem e resolverem o problema proposto de forma individual. Após a sala estar organizada, deve ser entregue a folha contendo o problema que cada aluno deverá resolver (sugere-se que cada aluno continue ainda trabalhando com o mesmo problema entregue na atividade 1) nas três formas de registros apresentadas anteriormente.

Esta atividade tem como objetivo:

Objetivos: - Verificar se os alunos compreenderam os processos de resolução através dos três registros de representação apresentados anteriormente;

Material Utilizado: - Folha contendo a situação problema que o aluno deverá resolver e local indicado para a resolução através das formas solicitadas;

Organização dos Estudantes: Individual

Aplicação:

- Entregar para cada aluno a folha resposta, contendo o problema que deverá ser resolvido;
- Solicitar que os estudantes resolvam o problema através das três formas de resolução apresentadas na atividade 4.

Duração da Atividade: 90min.

Caro Professor

Durante a realização desta atividade, os materiais didáticos manipuláveis devem ficar a disposição dos alunos, para que os mesmos possam buscar auxílio caso ocorra alguma dúvida na resolução.

Ao perceber que alguns alunos mesmo apresentando dificuldades não estão recorrendo ao material didático manipulável, se julgar necessário, o professor pode instruir estes a buscarem auxílio utilizando-os, uma vez que muitos alunos apresentam dificuldades em abstrair os dados dos problemas, mesmo após a apresentação de registros de representação utilizados na resolução.

2.5 ATIVIDADE 5: APRESENTAÇÃO DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

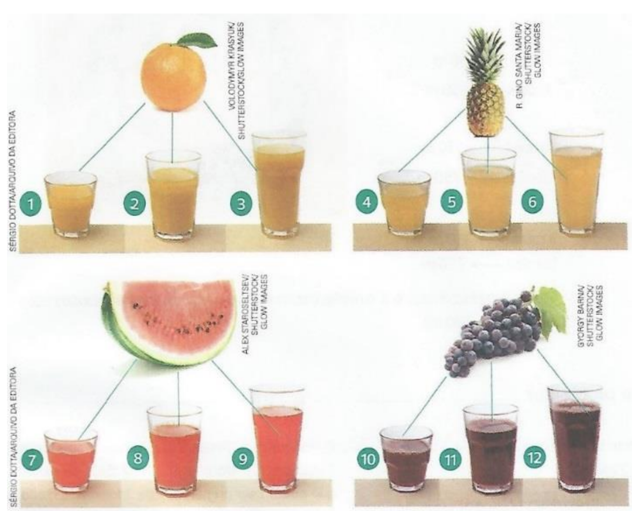
Essa atividade consiste em mais uma sistematização de resolução, quando será apresentado o Princípio Multiplicativo, outra forma de resolução (registro monofuncional) que pode ser utilizado para chegar ao resultado final de problemas que envolvem conceitos básicos de Análise Combinatória. Para realizar essa atividade, o professor deve apresentar um problema diferente dos vistos até o momento.

Como exemplo, apresentamos a seguir o problema retirado do livro de Matemática do autor Luiz Roberto Dante (2012, p. 47).

> ***Em um restaurante há 4 tipos de sucos: laranja, abacaxi, melancia e uva. Eles são servidos em copos de 3 tamanhos: pequeno, médio e grande. Quantas são as possibilidades de escolha ao pedir o suco?***

Em seguida, sugere-se que o professor entregue aos alunos a seguinte imagem que representa os elementos contidos no problema apresentado:

Figura 1 - Opções do problema



Fonte: Dante, 2012, p. 47

Após todos os alunos colarem a figura em sua folha, o professor deve fazer a leitura do problema e questioná-los em relação aos dados do problema, com o intuito de identificar os dois conjuntos de elementos presentes no mesmo e a forma como eles resolveriam este problema.

Após essa identificação, o professor pode reforçar as seguintes questões:

- Nesta imagem, ou nesta situação problema, há dois conjuntos com elementos diferentes:

  C_1 = Sabores de Suco = {Laranja, Abacaxi, Melancia e Uva}

  C_2 = Tamanho dos Copos = {Pequeno, Médio e Grande}
- Para encontrar a quantidade total de combinações é necessário representar todas e contar uma a uma ou então podemos utilizar o Princípio Multiplicativo, que consiste em multiplicar a quantidade de elementos do conjunto 1 (C_1) pela quantidade de elementos do conjunto 2 (C_2);
- Como há 4 sabores de suco e para cada sabor há 3 tamanhos de copo, o total de possibilidades é dado por:

$$Total\ de\ possibilidades: (quantidade\ de\ sabores) x (quantidade\ de\ tamanhos)$$
$$Total\ de\ possibilidades = 4\ x\ 3 = 12\ possibilidades$$

- Pode-se também pensar em 3 tamanhos de copos onde para cada uma há 4 sabores de suco disponíveis:

$$Total\ de\ possibilidades: (quantidade\ de\ tamanhos) x (quantidade\ de\ sabores)$$
$$Total\ de\ possibilidades = 3\ x\ 4 = 12\ possibilidades$$

Duração da Atividade: 45min.

Caro Professor

Ao final da apresentação e resolução do exemplo através do princípio multiplicativo, é interessante que o professor realize uma conversa com a turma para verificar se os alunos compreenderam que independente da ordem de multiplicação entre os conjuntos de elementos o resultado final será o mesmo.

Também é importante estabelecer relação com os outros registros de representação apresentados anteriormente, mostrando que o tanto os outros registros quanto o princípio multiplicativo podem ser utilizados na resolução e ambos chegarão no mesmo resultado.

2.6 ATIVIDADE 6: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ATRAVÉS DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO E DE OUTRA FORMA DE RESOLUÇÃO.

Nesta atividade, sugere-se que o professor solicite que cada aluno resolva alguns problemas (diferentes do que eles vinham resolvendo até o momento), utilizando o Princípio Multiplicativo (registro monofuncional) e um dos outros registros multifuncionais trabalhados.

É importante alternar, em cada problema, o registro multifuncional solicitado, para que se possa analisar se os alunos conseguem relacionar todas estas representações com o princípio multiplicativo.

A seguir apresentamos o objetivo desta atividade:

Objetivos: - Verificar se os alunos compreendem os processos de resolução através do Princípio Multiplicativo e de outra forma de resolução solicitada.

Material Utilizado: - Folha A4 contendo as questões impressas.

Organização dos Estudantes: Individual

Aplicação:

- Entregar para cada aluno a folha A4, contendo os problemas que devem ser resolvidos;
- Solicitar que os estudantes resolvam o problema através do Princípio Multiplicativo e de outra forma de representação solicitada.

Duração da Atividade: 90min.

Caro Professor

Por meio desta atividade, o professor poderá analisar se os alunos conseguem apresentar a resolução através de mais de um registro de representação, o que indica se o aluno compreendeu os conceitos e procedimentos abordados.

Cabe destacarmos aqui, a importância de pensar antecipadamente no número de problemas e no dia de aplicação, para que a resolução desta atividade não se torne cansativa e desestimulante para os alunos.

Observações Gerais

Ao realizar esta sequência didática o professor pode organizar as atividades de maneira que ao final da mesma, cada aluno tenha um portfólio (APÊNDICE B) contendo todas as atividades realizadas. Dessa forma o professor pode utilizá-lo como instrumento avaliativo e analisar o desenvolvimento dos alunos no decorrer das atividades.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, Manoel Jairo. **O material didático no ensino da Matemática.** Rio de Janeiro: MEC/CADES, 1962. 117 p.

BRASIL. Secretaria de Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** segunda versão preliminar**.** Brasília: MEC/SEF, 2016.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BORBA, Rute. O raciocínio combinatório na educação básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE, 10, 2010. Salvador. **Anais.** p. 1 – 16. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra15.pdf>. Acesso em: 30 abr. 2016.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.** Campinas, São Paulo: Papirus, 2013.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110 p.

KLIEMANN, Geovana Luiza. **Potencialidades e limitações de material didático para explorar resolução de problemas matemáticos.** 2015. 142 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Exatas, Centro Universitário Univates, Lajeado, 2015. Disponível em: < http://hdl.handle.net/10737/802>. Acesso em: 15 Maio. 2016.

NACARATO, Adair Mendes. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 9 – 10, p. 1 – 6, 2005. Disponível em: <https://pactuando.files.wordpress.com/2014/08/eu-trabalho-primeiro-no-concreto.pdf>. Acesso em: 15 Abril, 2016.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p.

SOARES, Maria Arlita da Silveira**. Os números racionais e os registros de representação semiótica:** análise de planejamentos das séries finais do ensino fundamental. 2007. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2007. Disponível em: < http://hdl.handle.net/123456789/370>. Acesso em: 10 Ago. 2015.

APÊNDICE A – PROBLEMAS PROPOSTOS

Problema 1: João está construindo o jardim de sua casa onde pretende plantar uma árvore e flores de uma mesma cor. Ele está em dúvida em relação a qual tipo de árvore plantar (pinheiro ou figueira) e da cor das flores (brancas, rosas ou vermelhas). Quantas e quais são as diferentes combinações de jardim que João possui?

Formas de resolução

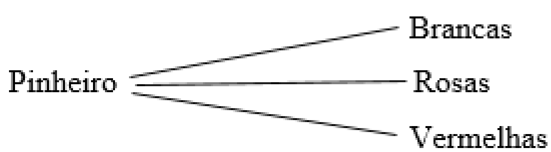
- **Árvore de possibilidades**

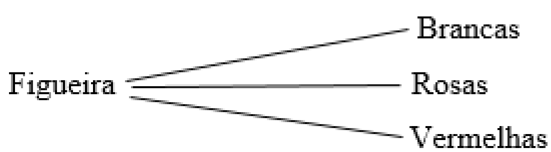
Nesta atividade os dois conjuntos combinados tem os seguintes elementos:

C_1 = Árvores = {Pinheiro, Figueira}

C_2 = Cores das Flores = {brancas, rosas ou vermelhas}

Assim, para cada tipo de árvore temos três tipos diferentes de flores a escolher:





Total: 6 possibilidades.

- **Descrevendo as possibilidades**

Para descrever as possibilidades, utilizamos as seguintes letras:

Pinheiro – P	Brancas – B
Figueira – F	Rosas – R
	Vermelhas – V

Combinando os elementos temos: {P, B}; {F, B}; {P, R}; {F, R}; {P, V}; {F, V}

Ao realizarmos a contagem de todas as possibilidades, chegamos ao total de **6 possibilidades**.

Podemos analisar as possibilidades por meio de um quadro onde as árvores são representadas nas linhas e as flores nas colunas. Combinando os elementos das linhas com os das colunas temos:

- **Quadro**

Cores / **Árvores**	**Brancas {B}**	**Rosas {R}**	**Vermelhas {V}**
Figueira {F}	**{F, B}**	**{F, R}**	**{F, V}**
Pinheiro {P}	**{P, B}**	**{P, R}**	**{P, V}**

Ao realizarmos a contagem do total de possibilidades no quadro, obtivemos um total de **6 possibilidades.**

- **Princípio Multiplicativo**

$Total\ de\ possibilidades: (número\ de\ árvores) x (número\ de\ cores\ de\ flores)$

$$Total\ de\ possibilidades = 2\ x\ 3 = 6\ possibilidades$$

- **Material didático[2] manipulável do problema 1**

Figura 2 - Material didático manipulável do problema 1

Fonte: arquivo da pesquisadora (2016)

Para a construção desse material, utilizamos os seguintes materiais:

- Uma placa de isopor;
- Papel crepom verde;
- EVA nas cores: branco, rosa, vermelho, amarelo, marrom, azul claro e azul escuro;
- Palitos de picolé (banco e base das árvores e flores)
- Papel camurça verde;
- Caixa de sapato encapada com papel pardo para guardar os materiais menores;

Problema 2: Uma manicure gosta de inovar o estilo de suas clientes, portanto, pinta quatro unhas de cada mão com uma mesma cor e decora a quinta unha. Certo dia, essa manicure colocou uma flor azul em uma cliente e em seu salão, havia apenas 4 cores de esmalte que combinavam com essa flor: azul, rosa, verde ou branco. De quantas maneiras diferentes essa cliente pode pintar suas unhas, utilizando a mesma cor nas 4 unhas restantes? Quais são essas maneiras?

[2] Dentre os materiais didáticos manipuláveis aqui apresentados, um foi emprestado do laboratório NEEM – FURB e outros foram recriados com base em materiais desenvolvidos durante as aulas de Matemática da Professora Noelly Goedert de Souza, professora efetiva, em uma escola pública de Blumenau.

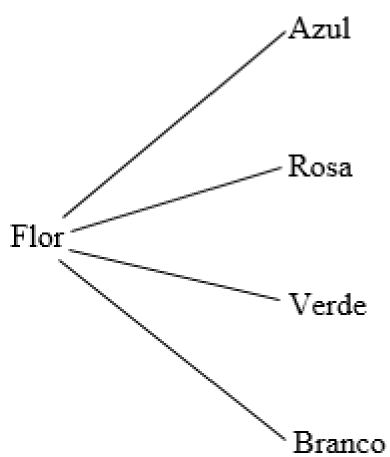
Formas de resolução

- **Árvore de possibilidades**

Nesta atividade os dois conjuntos combinados tem os seguintes elementos:

C_1 = Decoração = {Flor}

C_3 = Cores dos Esmaltes = {azul, rosa, verde ou branco}



Total: 4 possibilidades.

- **Descrevendo as possibilidades**

Para descrever as possibilidades, utilizamos as seguintes letras:

Flor – F	Azul – A
	Rosa – R
	Verde – V
	Branco – B

Combinando os elementos temos: {F, A}; {F, R}; {F, V}; {F, B}

Ao realizarmos a contagem de todas as possibilidades, chegamos ao total de **4 possibilidades**.

No quadro a linha representa a unha que contem a flor e as colunas as cores disponíveis de esmalte.

- **Quadro**

Cores / Decoração	**Azul {A}**	**Rosa {R}**	**Verde {V}**	**Branco {B}**
Flor {F}	**{F, A}**	**{F, R}**	**{F, V}**	**{F, B}**

Ao realizarmos a contagem do total de possibilidades no quadro, obtivemos um total de **4 possibilidades.**

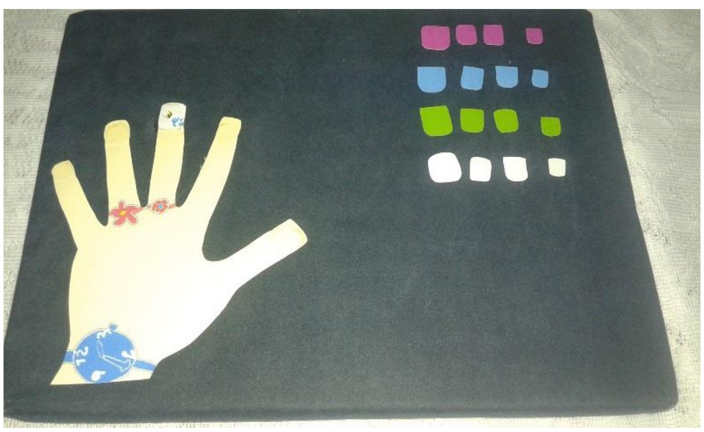
- **Princípio Multiplicativo**

$Total\ de\ possibilidades$: $(número\ de\ decoração) x (número\ de\ cores\ dos\ esmaltes)$

$$Total\ de\ possibilidades = 1\ x\ 4 = 4\ possibilidades$$

- **Material didático manipulável do problema 2**

Figura 3 - Material didático manipulável do problema 2



Fonte: arquivo da pesquisadora (2016)

Para a construção desse material, utilizamos os seguintes materiais:

- Uma placa de isopor;
- Papel camurça azul escuro (para o fundo);
- Imagem impressa de uma mão;
- Imagens coloridas, que representam as cores de esmaltes disponíveis no salão;

- Imagem representando a unha decorada;
- Papel colante transparente que garante maior durabilidade das peças;
- Envelopes para guardar o material;

Problema 3: Marcos foi até uma concessionária para comprar seu carro. Chegando à loja, ficou sabendo que havia a pronta entrega três tipos de carro (Saveiro, Fox e Gol), cada um deles em quatro cores diferentes (branco, preto, vermelho e cinza). Como ele pretende sair da concessionária com o carro, quantas e quais opções de escolha ele têm?

Formas de resolução

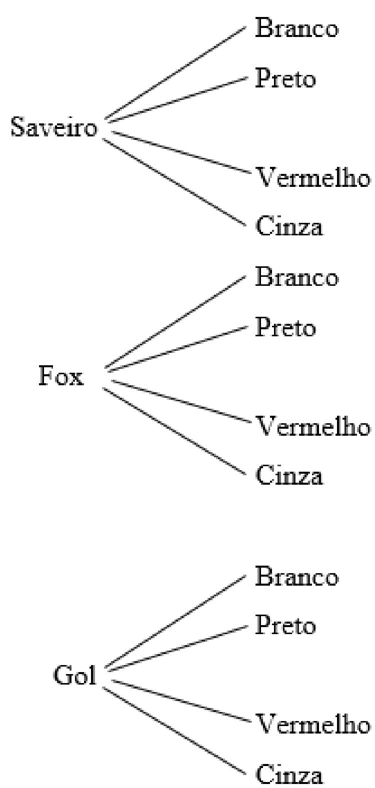
- **Árvore de possibilidades**

Nesta atividade os dois conjuntos combinados tem os seguintes elementos:

C_1 = Modelo de Carros = {Saveiro, Fox ou Gol}

C_3 = Cores dos Carros = {branco, preto, vermelho e cinza}

Para cada carro, quatro cores:



Total: 12 possibilidades

- **Descrevendo as possibilidades**

Para descrever as possibilidades, utilizamos as seguintes letras:

Saveiro – S	Branco – B
Fox – F	Preto – P
Gol – G	Vermelho – V
	Cinza - C

Combinando os elementos temos: {S, B}; {S, P}; {S, V}; {S, C}; {F, B}; {F, P}; {F, V}; {F, C}; {G, B}; {G, P}; {G, V}; {G, C}

Ao realizarmos a contagem de todas as possibilidades, chegamos ao total de **12 possibilidades**.

No quadro os modelos dos carros estão representados nas linhas e as cores disponíveis nas colunas.

- **Quadro**

Cores / Modelos	**Branco {B}**	**Preto {P}**	**Vermelho {V}**	**Cinza {C}**
Saveiro {S}	**{S, B}**	**{S, P}**	**{S, V}**	**{S, C}**
Fox {F}	**{F, B}**	**{F, P}**	**{F, V}**	**{F, C}**
Gol {G}	**{G, B}**	**{G, P}**	**{G, V}**	**{G, C}**

Ao realizarmos a contagem do total de possibilidades no quadro, obtivemos um total de **12 possibilidades.**

- **Princípio Multiplicativo**

$$Total\ de\ possibilidades: (quantidade\ de\ modelos\ de\ carros)x(número\ de\ cores\ disponíveis)$$

$$Total\ de\ possibilidades = 3\ x\ 4 = 12\ possibilidades$$

- **Material didático manipulável do problema 3**

Figura 4 - Material didático manipulável do problema 3

Fonte: arquivo da pesquisadora (2016)

Para a construção desse material, foram utilizados os seguintes materiais:

- Imagem impressa dos três modelos de carros citados no problema;
- Cartões coloridos que representam as cores disponíveis;
- Papel colante transparente que garante maior durabilidade das peças;
- Envelopes para guardar o material;

Problema 4: Cansada da decoração de seu quarto, Maria decidiu mudar a cortina e o tapete. Na loja ela gostou de três estampas que possuíam tanto nos tapetes quanto nas cortinas. Então, ela decidiu que o tapete e a cortina poderiam ter a mesma estampa ou não (apenas combinar). Quantas e quais são as possibilidades de escolha que Maria tem?

Formas de resolução

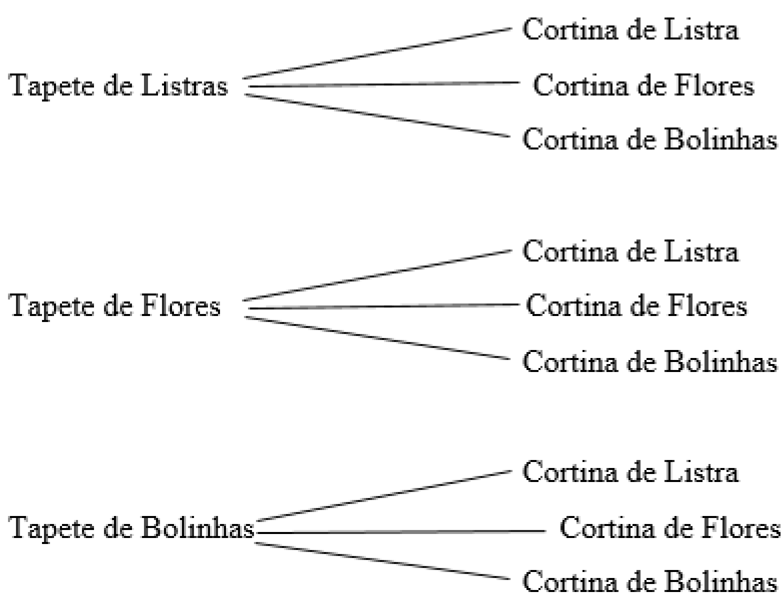
- **Árvore de possibilidades**

Nesta atividade os dois conjuntos combinados tem os seguintes elementos:

C_1 = Estampa dos Tapetes = {listra, flores ou bolinhas}

C_3 = Estampas das Cortinas = {listras, flores ou bolinhas}

Combinando as estampas do tapete com as da cortina.



Total: 9 possibilidades.

- **Descrevendo as possibilidades**

Para descrever as possibilidades, utilizamos as seguintes letras:

Tapete de Listras – TL	Cortina de Listras– CL
Tapete de Flores – TF	Cortina de Flores – CF
Tapete de Bolinhas – TB	Cortina de Bolinhas - CB

Combinando os elementos temos: {TL, CL}; {TL, CF}; {TL, CB}; {TF, CL}; {TF, CF}; {TF, CB}; {TB, CL}; {TB, CF}; {TB, CB}.

Ao realizarmos a contagem de todas as possibilidades, chegamos ao total de **9 possibilidades**.

No quadro temos as estampas do tapete nas linhas e as estampas da cortina nas colunas.

- **Quadro**

Estampa da Cortina / **Estampa do Tapete**	**Listras {CL}**	**Flores {CF}**	**Bolinhas {CB}**
Listras {TL}	**{TL, CL}**	**{TL, CF}**	**{TL, CB}**
Flores {TF}	**{TF, CL}**	**{TF, CF}**	**{TF, CB}**
Bolinhas {TB}	**{TB, CL}**	**{TB, CF}**	**{TB, CB}**

Ao realizarmos a contagem do total de possibilidades no quadro, obtivemos um total de **9 possibilidades.**

- **Princípio Multiplicativo**

$$Total\ de\ possibilidades: (nº.\ de\ estampas\ dos\ tapetes) x (nº.\ de\ estampas\ das\ cortinas)$$

$$Total\ de\ possibilidades = 3\ x\ 3 = 9\ possibilidades$$

- **Material didático manipulável do problema 4**

Figura 5 - Material didático manipulável do problema 4

Fonte: arquivo da pesquisadora (2016)

Para a construção desse material, foram utilizados os seguintes materiais:

- Caixa de papelão recortada a fim de formar as paredes do quarto;
- Papel camurça nas cores: preto, cor de rosa e branco; para forrar as paredes;
- Pedaços de isopor utilizados para construir os móveis;
- Tinta guache marrom, utilizada para pintar os móveis;
- EVA marrom, para forrar a frente do guarda roupa;
- Retalhos de tecidos de quatro cores diferentes, uma representando a decoração atual (nesse caso a estampa de oncinha) e as outras três para representar as opções que Maria tem;
- Envelopes para guardar o material;

Problema 5: As placas dos carros são compostas por 3 letras e 4 números. Para a formação de uma placa, já foram escolhidos os números e a primeira letra – P. Agora é necessário escolher as outras duas letras que estão faltando. Nesta cidade ainda existem duas letras disponíveis (M, N) para a formação da mesma. Quantas e quais são as possibilidades de formação de uma placa com as letras disponíveis, sendo que é possível repetir a letra? Abaixo, mostramos a placa como ela está:

P	**?**	**?**				

Formas de resolução

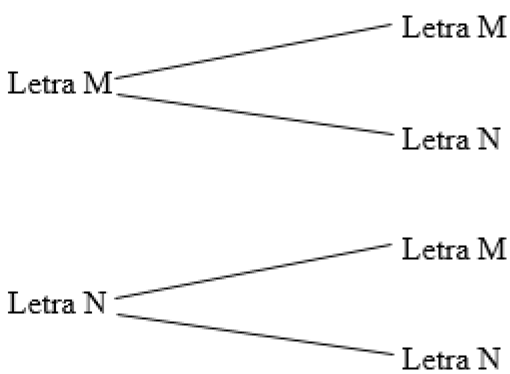
- **Árvore de possibilidades**

Nesta atividade os dois conjuntos combinados tem os seguintes elementos:

C_1 = Segunda Letra = {letra M, letra N}

C_3 = Terceira Letra = {letra M, letra N}

Escolhendo a segunda letra temos as seguintes opções para a terceira:



Total: 4 possibilidades.

- **Descrevendo as possibilidades**

Para descrever as possibilidades, utilizamos as seguintes letras:

Letra M – M

Letra N – N

Combinando as possibilidades temos: {M, M}; {M, N}; {N, M}; {N, N}

Ao realizarmos a contagem de todas as possibilidades, chegaremos ao total de **4 possibilidades**.

Inserindo as possibilidades de segunda letra nas linhas e de terceira letra nas colunas, o quadro fica:

- **Quadro**

3ª Letra / **2ª Letra**	**Letra M {M}**	**Letra N {N}**
Letra M {M}	**{M, M}**	**{M, N}**
Local N {N}	**{N, M}**	**{N, N}**

Ao realizarmos a contagem do total de possibilidades no quadro, obteremos um total de **4 possibilidades.**

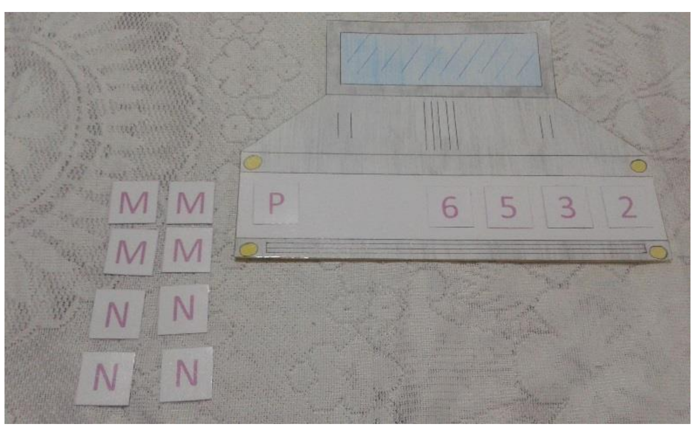
- **Princípio Multiplicativo**

$$Total\ de\ possibilidades: (letras\ disponiveis\ para\ a\ 1ª\ faltante\ )x(letras\ disponíveis\ para\ a\ 2ª\ faltante)$$

$$Total\ de\ possibilidades = 2\ x\ 2 = 4\ possibilidades$$

- **Material didático manipulável do problema 5**

Figura 6 - Material didático manipulável do problema 5



Fonte: arquivo da pesquisadora (2016)

Para a construção desse material, foram utilizados os seguintes materiais:

- Desenho da frente de um carro qualquer;
- Cartões impressos contendo os quatro números escolhidos da placa e a letra já escolhida;
- Papel colante transparente que garante maior durabilidade das peças;
- Envelopes para guardar o material;

Problema 6: Esta semana a cantina da escola decidiu fazer sucos naturais de três sabores (laranja, morango, uva) e dois tipos diferentes de lanches (pão de queijo e sanduiche de frango). Na hora do recreio cada aluno pode optar por um suco e um lanche. João quer saber quantas e quais são as possibilidades que ele tem. Vamos ajudá-lo?

Formas de resolução

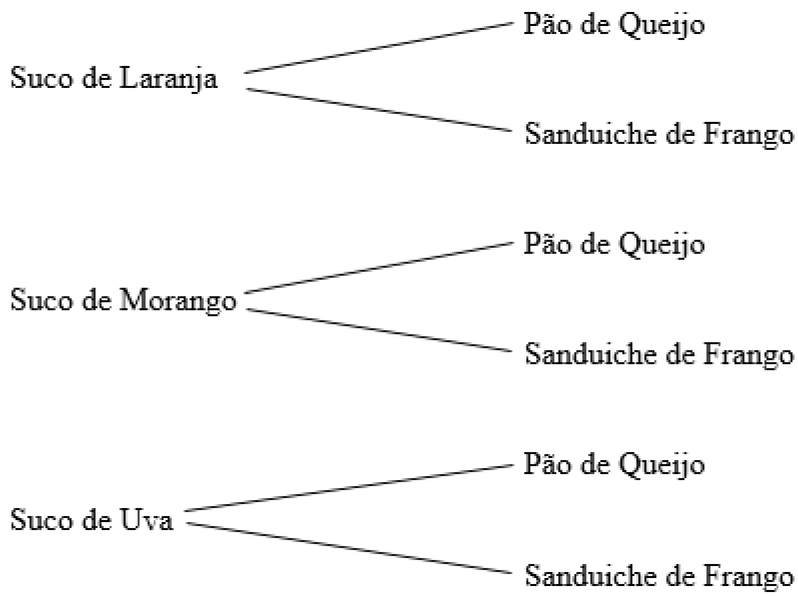
- **Árvore de possibilidades**

Nesta atividade os dois conjuntos combinados tem os seguintes elementos:

C_1 = Sucos = {Laranja, Morango, Uva}

C_3 = Lanches = {Pão de Queijo, Sanduiche de Frango}

Para cada suco tem-se duas opções de lanches.



Total: 6 possibilidades.

- **Descrevendo as possibilidades**

Para descrever as possibilidades, utilizamos as seguintes letras:

Laranja – L	Pão de Queijo - P
Morango – M	Sanduiche de Frango - S
Uva – U	

Combinando os elementos temos: {L, P}; {L, S}; {M, P}; {M, S}; {U, P}; {U, S}

Ao realizarmos a contagem de todas as possibilidades, chegamos ao total de **6 possibilidades**.

No quadro colocamos os sucos nas linhas e os lanches nas colunas:

- **Quadro**

Lanches / Sucos	**Pão de Queijo {P}**	**Sanduiche de Frango {S}**
Laranja {L}	**{L, P}**	**{L, S}**
Morango {M}	**{M, P}**	**{M, S}**
Uva {U}	**{U, P}**	**{U, S}**

Ao realizarmos a contagem do total de possibilidades no quadro, obtivemos um total de **6 possibilidades.**

- **Princípio Multiplicativo**

$Total\ de\ possibilidades: (quantidade\ de\ sucos) x (quantidade\ de\ lanches)$

$$Total\ de\ possibilidades = 3\ x\ 2 = 6\ possibilidades$$

- **Material didático manipulável do problema 6**

Figura 7 - Material didático manipulável do problema 6

Fonte: arquivo da pesquisadora (2016)

Para a construção desse material, foram utilizados os seguintes materiais:

- Imagens impressas contendo os elementos do problema: pão de queijo, sanduíche de frango, suco de laranja, suco de morango e suco de uva;
- Papel colante transparente que garante maior durabilidade das peças;
- Envelopes para guardar o material;

Problema 7: Uma escola possui uniformes para o time de basquete formado por regatas e calções de 3 cores diferentes (azul, vermelho, roxo). Quando vai para um campeonato o professor escolhe uma cor de regata e uma cor de calção. Eles podem ter a mesma cor ou não. Quantos e quais são os diferentes tipos de uniformes que o professor pode montar?

Formas de resolução

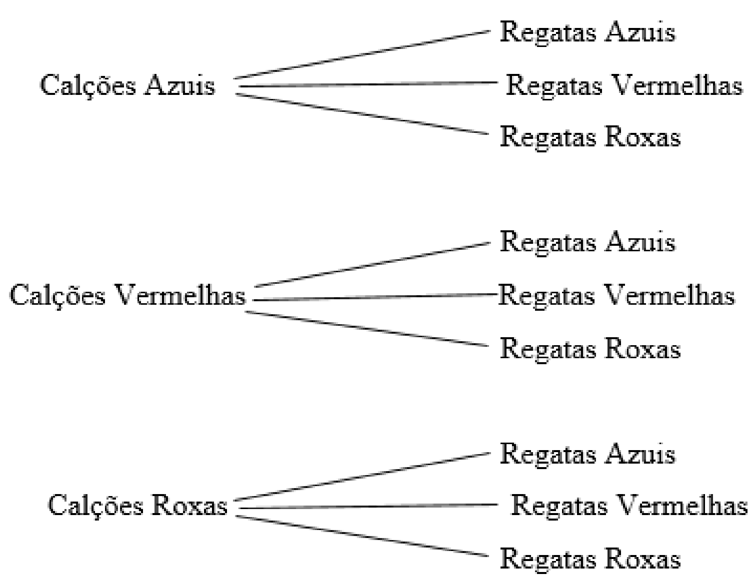
- **Árvore de possibilidades**

Nesta atividade os dois conjuntos combinados tem os seguintes elementos:

C_1 = Cores dos Calções = {Azul, Vermelho, Roxo}

C_3 = Cores das Regatas = {Azul, Vermelho, Roxo}

Para cada cor de calção há três possibilidades de regatas:



Total: 9 possibilidades.

- **Descrevendo as possibilidades**

Para descrever as possibilidades, utilizamos as seguintes letras:

Calção Azul – CA
Calção Vermelho – CV
Calção Roxo – CR

Regata Azul– RA
Regata Vermelha – RV
Regata Roxa - RR

Combinando os elementos temos: {CA, RA}; {CA, RV}; {CA, RR}; {CV, RA}; {CV, RV}; {CV, RR}; {CR, RA}; {CR, RV}; {CR, RR}

Ao realizarmos a contagem de todas as possibilidades, chegamos ao total de **9 possibilidades**.

As linhas representam as cores das regatas e as colunas, as cores dos calções.

- **Quadro**

Calções / **Regatas**	**Azul {CA}**	**Vermelho {CV}**	**Roxo {CR}**
Azul {RA}	**{RA, CA}**	**{RA, CV}**	**{RA, CR}**
Vermelha {RV}	**{RV, CA}**	**{RV, CV}**	**{RV, CR}**
Roxa {RR}	**{RR, CA}**	**{RR, CV}**	**{RR, CR}**

Ao realizarmos a contagem do total de possibilidades no quadro, obtivemos um total de **9 possibilidades.**

- **Princípio Multiplicativo**

$Total\ de\ possibilidades: (número\ de\ cores\ dos\ calções) x (número\ de\ cores\ das\ regatas)$

$$Total\ de\ possibilidades = 3\ x\ 3 = 9\ possibilidades$$

- **Material didático manipulável do problema 7**

Figura 8 - Material didático manipulável do problema 7

Fonte: arquivo da pesquisadora (2016)

Para a construção desse material, foram utilizados os seguintes materiais:

- Imagens impressas contendo os elementos do problema: calções vermelhos, calções roxos, calções azuis, regatas vermelhas, regatas roxas e regatas azuis;
- Papel adesivo transparente que garante maior durabilidade das peças;
- Envelopes para guardar os componentes do material;

Problema 8: Aninha vai passear com sua mãe. Ela tem em seu guarda roupa, três blusinhas, uma saia e uma bermuda. Ela está indecisa sobre qual roupa usar. Todas as blusinhas combinam com a saia e com a bermuda. De quantas formas diferentes Aninha pode se vestir? Descreva todas as possibilidades.[3]

[3] O material utilizado neste problema foi emprestado do laboratório NEEM da FURB.

Formas de resolução

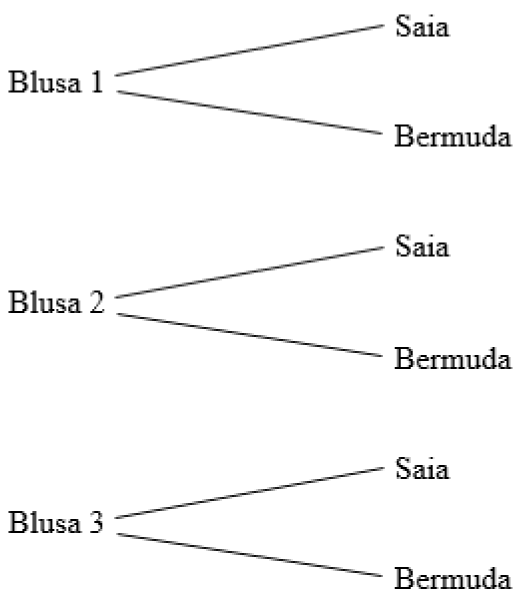
- **Árvore de possibilidades**

Nesta atividade os dois conjuntos combinados tem os seguintes elementos:

C_1 = Partes de Cima = {Blusa 1, Blusa 2, Blusa 3}

C_3 = Partes de Baixo = {Saia, Bermuda}

Combinando com cada blusa há a saia e a bermuda.



Total: 6 possibilidades.

- **Descrevendo as possibilidades**

Para descrever as possibilidades, utilizamos as seguintes letras:

Blusa 1– B1 Saia – S

Blusa 2– B2 Bermuda – B

Blusa 3 – B3

Combinando os elementos temos: {B1, S}; {B1, B}; {B2, S}; {B2, B}; {B2, S}; {B2, B}

Ao realizarmos a contagem de todas as possibilidades, chegamos ao total de **6 possibilidades**.

- **Quadro**

Partes de Baixo / **Partes de Cima**	**Saia {S}**	**Bermuda {B}**
Blusa 1 {B1}	**{B1, S}**	**{B1, B}**
Blusa 2 {B2}	**{B2, S}**	**{B2, B}**
Blusa 3 {B3}	**{B3, S}**	**{B3, B}**

Ao realizarmos a contagem do total de possibilidades no quadro, obtivemos um total de **6 possibilidades.**

- **Princípio Multiplicativo**

$$Total\ de\ possibilidades: (peças\ da\ parte\ de\ cima) x (\ peças\ da\ parte\ de\ baixo)$$

$$Total\ de\ possibilidades = 3\ x\ 2 = 6\ possibilidades$$

- **Material didático manipulável do problema 8**

Figura 9 - Material didático manipulável do problema 8

Fonte: acervo do laboratório NEEM (2016)

Esse material é composto dos seguintes materiais:

- Imagens impressas contendo os elementos do problema: uma boneca representando Aninha, uma saia, um shorts, três blusinhas;
- Placa metálica para realizar as “trocas de roupas” uma vez que as pessoas e as roupas eram constituídas de imãs;
- Envelopes para guardar o material;

APÊNDICE B – EXEMPLOS DE PORTFÓLIOS