Produto Educacional do PPGECIM/FURB

UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU - FURB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

Volume I

DESENVOLVENDO SISTEMAS LINEARES PARA O ENSINO MÉDIO, COM BASE NOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE DUVAL

Eduardo Brandl
Viviane Clotilde da Silva

Blumenau

Ficha Catalográfica elaborada pela
Biblioteca Universitária da FURB

B818d

Brandl, Eduardo, 1980-

Desenvolvendo sistemas lineares para o ensino médio, com base nos registros de representação semiótica de Duval / Eduardo Brandl, Viviane Clotilde da Silva. – Blumenau, 2018.

96 f. : il.

Produto Educacional (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau.

Inclui bibliografia.

1. Matemática. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Ensino médio. 4. Sistemas lineares. 5. Semiótica. I. Silva, Viviane Clotilde da, 1971-. II. Universidade Regional de Blumenau. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. III. Título.

CDD 510.7

SUMÁRIO

CARTA AO LEITOR

Este produto educacional é resultado da dissertação de **Eduardo Brandl**, intitulada **As Contribuições da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval na Aprendizagem de Sistemas Lineares no Ensino Médio**, orientada pela professora Doutora **Viviane Clotilde da Silva**, pertencente a linha de pesquisa Formação e Práticas Docentes em contextos de Ensino de Ciências Naturais e Matemática do Programa Pós Gradução em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Regional de Blumenau, disponível na Biblioteca de Teses e Dissertações da FURB http://bu.furb.br/consulta/novaConsulta/pesqPosGrad.php.

Ele foi desenvolvido para você, professor, que certamente já se deparou com as dificuldades dos estudantes na aprendizagem de sistemas lineares, uma vez que, grande parte dos estudantes resolve os sistemas lineares de modo mecânico, repetindo os passos de um determinado método e chegando ao final da resolução sem compreender o significado da solução encontrada, sem saber interpretar o que estão fazendo.

Trata-se do Caderno do Professor com uma Proposta de Ensino, dividida em duas partes: a primeira parte contém 10 atividades referentes aos sistemas lineares 2 x 2 e a segunda é composta por 10 atividades que abordam os sistemas lineares 3 x 3. Todas as atividades foram organizadas considerando os pressupostos da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, contemplando os diferentes registros de representação deste objeto matemático, bem como atividades de tratamento, conversão e articulação entre os diferentes registros.

Para o melhor aproveitamento e direcionamento das atividades propostas, sugerimos que você professor, faça também a leitura da dissertação como possibilidade de compreender a teoria que fundamentou cada uma das atividades propostas.

Por fim esperamos que esse material contribua com a sua prática de sala de aula e através da leitura, reflexão e adaptação, se necessário, das atividades aqui propostas, possibilite novos encaminhamentos metodológicos visando a aprendizagem dos estudantes.

Eduardo Brandl

Viviane Clotilde da Silva

CAPÍTULO I - TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE DUVAL

Semiótica "de origem grega (semeion = signos), denomina-se como a ciência dos signos e os signos aqui mencionados referem-se à linguagem. Assim, semiótica pode ser compreendida como sendo a ciência de todas as linguagens" (QUEIROZ, RAMOS e SIPLE, 2011, p. 18).

Foi desenvolvida por Pierce, Saussure e Frege, mas Duval[1] (2011) concluiu que estes três modelos são limitados no que se refere a análise da complexidade da aprendizagem matemática e elaborou sua Teoria de Registros de Representação Semiótica objetivando compreender como ocorre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e que gradativamente vem sendo usada como base teórica nas pesquisas em Educação Matemática em diferentes países e também no Brasil desde a década de 1990.

Ele aponta que não há como ter acesso direto aos objetos matemáticos, pois os mesmos são abstratos, não sendo diretamente acessíveis ou perceptíveis. Desta forma este

[1] Raymond Duval foi professor do Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, na França, de 1970 a 1995, onde desenvolveu importantes pesquisas em Psicologia Cognitiva. Atualmente é professor emérito da Universidade du Litoral Côte d'Opale, França.

acesso somente é possível através das suas representações, diferentemente de outras áreas do conhecimento.

Um numeral, por exemplo, pode ser representado usando-se a língua materna: quatro (quantidade representada na forma escrita da língua portuguesa), um símbolo: 4 (algarismo indo arábico), IV (algarismo romano) e decorrente das necessidades, a humanidade foi criando formas de representação desse mesmo objeto matemático: $x - 3 = 1$ e $\sqrt{16}$, dentre outros.

Nisso situa-se o paradoxo cognitivo descrito por Duval: como não confundir o objeto e a sua representação se em Matemática o acesso aos objetos somente é possível através de suas representações? A possível resposta a este questionamento reside no fato de que é necessário o acesso a pelo menos duas diferentes representações do mesmo objeto matemático para que isso não ocorra.

Duval aponta que na Matemática há uma diversidade de registros de representação e cada um destes registros é parcial em relação ao objeto considerado. Ele classificou estes diferentes registros usando dois critérios: a possibilidade de algoritmização e o discurso, originando quatro possibilidades de categorização, como pode ser verificado no Quadro 01.

Quadro 01 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis na atividade matemática.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural[2]. Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças ...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0,1,2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • Numéricas (binária, decimal, fracionária, ...); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais). Cálculo.	Gráficos cartesianos. • Mudanças de sistema de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Fonte: DUVAL, 2003, p. 14

Como pode ser observado no quadro anterior os registros monofuncionais possibilitam uma variedade de tratamentos e de acordo com Colombo (2008, p. 111) “foram desenvolvidos para um tipo de tratamento muito específico, para ter desempenhos mais poderosos e menos custosos do que os registros multifuncionais”. Em outras palavras apresentam

[2] Neste trabalho usou-se o termo língua materna ao referir-se a língua natural, entendendo ser mais comum o seu uso.

algoritmos próprios em sua estrutura e são os que aparecem com mais frequência nas atividades didáticas.

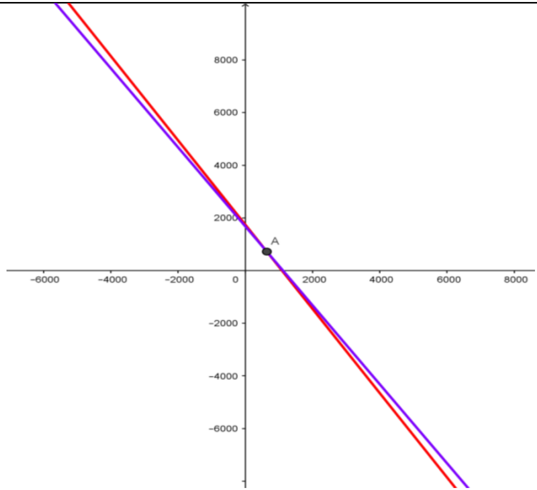
No entanto segundo esta teoria é a articulação dos diferentes registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática, embora algumas abordagens didáticas estabeleçam a condição inversa, talvez pela importância dada ao ponto de vista matemático e não ponto de vista cognitivo. Para Duval, a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica é necessária dada que cada uma revela de forma parcial o conteúdo envolvido.

Especificamente em relação ao objeto matemático “sistemas lineares”, o Quadro 02 apresenta os registros de representação semiótica mobilizados nas atividades da sequência didática proposta neste trabalho.

Quadro 02 – Tipos de registros de representação semiótica relacionados aos sistemas lineares.

<table>
<tr><th colspan="2">Tipo de registro</th><th>Sistemas lineares</th></tr>
<tr><td colspan="2">Língua materna</td><td>Uma alfaiataria fabrica e vende dois tipos de ternos. No mês de maio ela vendeu 15 ternos do modelo A e 10 ternos do modelo B, obtendo uma receita de 16 800 reais. No mês de junho as vendas caíram e só foram vendidos 8 ternos do modelo A e 5 do modelo B, gerando uma receita de 8 720 reais. Qual o preço de venda do terno A e do terno B?</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Algébrico</td><td></td><td>$$\begin{cases} 15a + 10b = 16800 \\ 8a + 5b = 8720 \end{cases}$$ sendo a o preço de venda de cada terno do modelo A e b o preço de venda de cada terno do modelo B.</td></tr>
<tr><td>Matricial</td><td>$$\begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16800 \\ 8720 \end{bmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>Tabular</td><td><table><tr><th>Mês</th><th>Terno A</th><th>Terno B</th><th>Receita</th></tr><tr><td>Maio</td><td>15</td><td>10</td><td>16 800</td></tr><tr><td>Junho</td><td>8</td><td>5</td><td>8 720</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">Numérico</td><td>15. 640 + 10. 720 = 16 800

8. 640 + 5. 720 = 8 720</td></tr>
</table>

Simbólico	Solução do sistema: S= {(640, 720)}
Gráfico	

Fonte: dados do autor baseado na classificação de Boemo (2015).

A hipótese fundamental da Teoria de Registros de Representação Semiótica é que a conceituação de um objeto matemático, denominada por Duval de *noésis*, somente ocorre quando se tem acesso aos diferentes registros de representação semiótica deste objeto considerada por esse mesmo autor como *semiósis*, ou seja, não há *noésis* sem *semiósis*. Assim para que haja uma real compreensão do objeto matemático é necessário compreendê-lo nas suas diferentes representações (gráfica, algébrica, etc) e ainda transitar entre elas, transformando quando necessário, de uma representação para outra.

Para isso são necessárias atividades cognitivas que Duval denomina de tratamento e conversão.

> Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação. A conversão é, ao contrário, uma transformação que faz passar de um registro a um outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua (DUVAL, 2009, p. 39).

Vamos analisar estes processos com base no objeto matemático sistemas lineares. Ao resolver um sistema linear representado no registro algébrico o estudante trabalhará com um mesmo registro de representação semiótica e escolherá um método, para resolvê-lo. Precisa ter apreendido as propriedades e os procedimentos específicos desse tipo de registro para a realização desta tarefa, ou seja, está diante de uma atividade que exige tratamento, pois durante a resolução continuará no mesmo registro de representação.

Já outra situação, em que o estudante precisa representar por meio do registro gráfico um sistema linear expresso no registro algébrico, requer que o estudante transite entre dois registros de representação desse mesmo objeto matemático. Nesse caso precisa fazer uma conversão do registro algébrico para o gráfico ou vice-versa.

Livros didáticos, sequências didáticas e práticas docentes geralmente não distinguem as atividades de tratamento e conversão e de acordo com Duval é justamente a análise dessas transformações separadamente que implicam em trazer à tona as dificuldades apresentadas pelos estudantes, principalmente em relação a conversão.

Em relação as conversões, a Teoria de Duval destaca ainda que o custo cognitivo dessa transformação pode ser maior ou menor dependendo do que ele denomina congruência semântica entre duas representações de um mesmo objeto matemático.

Para determinar se duas representações são congruentes ou não, é preciso começar por segmentá-las em suas unidades significantes respectivas, de tal maneira que elas possam ser colocadas em correspondência. Para compreender tomemos o exemplo do Quadro 03.

Quadro 03 – Exemplo de conversão do registro em língua materna para o algébrico

Registro em língua materna	**Registro algébrico**
A soma entre dois números inteiros é doze e a diferença entre eles é dois	$\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=2 \end{cases}$

Fonte: dados do autor

Observando, neste caso, as unidades significantes respectivas de cada um dos registros do quadro anterior tem-se a seguinte correspondência (Quadro 04).

Quadro 4 – Correspondência das unidades significantes entre os registros em língua materna e o algébrico

Unidade significante no registro em língua materna	**Unidade significante correspondente no registro algébrico**
dois números inteiros	x e y
soma	$+$
diferença	$-$

Fonte: dados do autor

Duval (2003) aponta que nas conversões congruentes a representação de chegada transparece na representação de partida e está próxima a uma situação de simples codificação, neste caso a passagem de uma representação a outra é mais imediata. Nas conversões não congruentes não há nenhuma transparência e a passagem de uma representação a outra não é imediata.

Para tornar mais explícita e compreensível a compreensão sobre a congruência e a não congruência das conversões apresenta-se dois exemplos em que há a conversão do registro em língua materna para o registro algébrico referente a equações lineares.

1) **Um número inteiro somado a dezessete é igual a quarenta e um** que corresponde a $\mathbf{x + 17 = 41}$, no registro algébrico. Nesse caso, tem-se uma conversão caracterizada como congruente, pois a cada unidade significante do registro de partida associa-se uma unidade significante no registro de chegada (1º critério); cada unidade significante do registro de partida corresponde a uma só unidade no registro de chegada (2º critério) e em ambos os registros se mantém a mesma ordem de representação (3º critério).

2) **O volume de um cubo corresponde a cento e vinte e cinco**, ou seja, $\mathbf{x^3 = 125}$, no registro algébrico. Este é um exemplo de conversão não congruente, pois nem todos os

símbolos utilizados na equação estão expressos na língua materna, não há correspondência termo a termo (1º critério). Além disso, se proceder a conversão no sentido inverso não se encontra o registro inicial e provavelmente será convertido por: um número elevado ao cubo é igual a cento e vinte e cinco, ou então, o cubo de um determinado número é igual a cento e vinte e cinco (2º e 3º critérios).

Salienta-se ainda que o fato de um estudante fazer a conversão em um sentido não implica que ele terá sucesso na conversão de sentido inverso. "Para que haja coordenação sinérgica de vários registros, é preciso ser capaz de converter as representações nos dois sentidos e não em um único" (DUVAL, 2011a, p. 118). Por isso é importante explorar a conversão nos dois sentidos, da algébrica para a gráfica e da gráfica para algébrica, por exemplo. Esta importante constatação nem sempre é considerada em sala de aula.

Duval questiona ainda a maneira como as atividades matemáticas são apresentadas aos estudantes. Para ele é preciso criar situações que explicitem o maior número possível de variações de congruência de um mesmo objeto matemático em dois registros diferentes.

> "No lugar de apresentar cada problema por ele mesmo, independentemente dos outros, é toda uma gama de representações possíveis, ordenadas segundo as variações de

> congruência e não congruência sobre as quais os alunos deveriam trabalhar para discutir e tomar consciência” (DUVAL, 2011a, p. 122).

Em relação aos sistemas lineares é necessário pontuar ainda um aspecto importante em relação à representação gráfica que, segundo Duval (2011b), pode ser abordada a partir de três tratamentos: a abordagem ponto a ponto, da extensão do traçado efetuado e da interpretação global de propriedades figurais.

A **abordagem ponto a ponto** constitui o modo como geralmente a representação gráfica é introduzida ao se trabalhar expressões algébricas. Parte-se de uma tabela em que são inseridos valores aleatórios para a variável *x* e aplicando-se cada um destes valores na expressão há a obtenção do valor referente a *y*. Estes pares ordenados são então representados por pontos no plano cartesiano. Ainda de acordo com Duval (2011b) esta abordagem não é somente inadequada, mas constitui um obstáculo a aprendizagem, pois desvia a atenção do estudante das variáveis visuais pertinentes. Assim auxilia o estudante a construir um gráfico, mas não lhe fornece meios de verificar a relação entre o registro gráfico e o algébrico.

A segunda abordagem denominada de **extensão do traçado efetuado** pouco difere da primeira, pois segundo Duval (2011b) a única diferença é que não se apoia mais em um conjunto finito de pontos, mas nos intervalos entre os pontos marcados. Assim como na primeira abordagem, nesta se mantém a determinação de valores particulares.

A terceira abordagem denominada de **interpretação global de propriedades figurais** parte da ideia de que o gráfico representa um objeto matemático que também possui uma representação algébrica. Nesse sentido, o estudante precisa compreender que toda modificação no registro gráfico acarretará mudança no registro algébrico e vice-versa. No entanto isso não pode ser considerado de forma aleatória, é necessário identificar exatamente a relação entre cada uma destas modificações para ao final identificar o conjunto de todas as modificações possíveis em relação a determinado objeto matemático. A cada modificação na expressão algébrica que determina uma mudança no registro gráfico Duval denominou de variável visual pertinente. Esta constitui, portanto, a unidade significativa da expressão algébrica.

A interpretação global pressupõe, portanto que não há como partir do registro gráfico para o algébrico tomando como referência valores particulares, mas por meio da identificação das variáveis visuais pertinentes, o que consiste em "**variar uma unidade significativa na expressão mantendo as outras constantes e ver o que se passa no outro registro** (ou mudar uma variável visual mantendo as outras duas constantes e ver as modificações que acontecem na expressão)"

(DUVAL, 2011b, p. 103, grifo do autor). Essa perspectiva, no entanto, nem sempre está nas propostas do ensino da Matemática e quando está presente não contempla a abordagem de interpretação global de propriedades figurais.

No caso do estudo dos sistemas lineares 2 x 2 é importante que o estudante perceba que cada equação do sistema linear pode ser reescrita como uma função polinomial do 1º grau[3], cujo gráfico é uma reta (conforme o Quadro 05). No entanto, as variáveis visuais necessárias para abordar os sistemas lineares serão sutilmente distintas das variáveis usadas para analisar o comportamento da função afim, pois o objetivo é fazer a comparação entre as equações de um mesmo sistema linear.

---

[3] Adotou-se essa relação entre função polinomial do 1º grau, pois os estudantes ainda não estudaram Geometria Analítica, que está prevista na ementa do 3º ano do Ensino Médio.

Quadro 05 – Classificação das variáveis visuais em relação ao registro gráfico de sistemas lineares 2 x 2

Relação da posição das retas e a solução	Representação algébrica na forma de sistema linear	Relação da primeira equação com a segunda	Representação algébrica como função afim: $y = ax + b$	Relação entre registro algébrico e gráfico
Retas coincidentes: Sistema possível e indeterminado: infinitos pares ordenados são soluções do sistema.	$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$	Proporcionalidade nos coeficientes das incógnitas e do termo independente.	$y=-x+5$ $y=\frac{-2x+10}{2}$ $\Rightarrow y=-x+5$	Coeficiente angular *a* e coeficiente linear *b* são os mesmos nas duas equações.
Retas paralelas: Sistema impossível: não existe par ordenado que seja solução do sistema	$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$	Proporcionalidade nos coeficientes das incógnitas, mas que não se aplica no termo independente.	$y=-x+5$ $y=\frac{-2x+8}{2}$ $\Rightarrow y=-x+4$	Coeficiente angular se mantém e o coeficiente linear sofre alteração.
Retas concorrentes: Sistema possível e determinado: um único par ordenado é a solução do sistema.	$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-2y=10 \end{cases}$	Não há proporcionalidade nos coeficientes das incógnitas e no termo independente pode ocorrer ou não proporcionalidade.	$y=-x+5$ $y=\frac{2x-10}{2}$ $\Rightarrow y=x-5$	Coeficiente angular sofre alteração e o coeficiente linear não interfere na posição relativa das duas retas.

Fonte: dados do autor

Desta forma a teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval possibilita fazer uma análise cognitiva das resoluções dos estudantes e isso é imprescindível para que o professor possa compreender, de fato, as razões das dificuldades apresentadas pelos estudantes e não considere as respostas apenas como certas ou erradas, mas que estas revelem o nível de apreensão conceitual que os estudantes possuem, naquele momento, de um determinado objeto matemático.

CAPÍTULO II - SEQUÊNCIA DIDÁTICA - PARTE 01

3.1 SISTEMAS LINEARES 2 x 2

PROFESSOR

O objeto matemático sistemas lineares está previsto na ementa da disciplina de Matemática geralmente para ser desenvolvido no 2º ano do Ensino Médio. Ao iniciar a abordagem deste conteúdo você dará continuidade a algo que provavelmente já foi trabalhado no Ensino Fundamental e que será retomado sob novos aspectos e utilizando, por exemplo, novas formas de registro de representação. Essa retomada é fundamental para verificar o nível de apreensão dos estudantes em relação ao objeto matemático que será estudado, sendo o ponto de partida para planejar as atividades.

ATIVIDADE 01

Resolva o problema a seguir:

Uma alfaiataria fabrica e vende dois tipos de ternos. No mês de maio ela vendeu 15 ternos do modelo A e 10 ternos do modelo B, obtendo uma receita de 16 800 reais. No mês de junho as vendas caíram e só foram vendidos 8 ternos do modelo A e 5 do modelo B, gerando uma receita de 8 720 reais. Qual o preço de venda do terno A e do terno B?

Objetivos:

- Converter um sistema linear representado no registro em língua materna para o algébrico;
- Fazer o tratamento no registro algébrico usando um dos métodos de resolução de sistemas de equações 2 x 2 possivelmente já estudados no Ensino Fundamental: adição, comparação e substituição.

Nessa atividade é importante que o professor deixe os estudantes resolverem individualmente e sem intervenção, com o propósito de verificar seus conhecimentos.

Para resolver a situação proposta o estudante deverá converter o registro em língua materna para o registro algébrico culminando em um sistema de equações lineares 2 x 2. Parte-se do pressuposto de que o estudante já teve contato com um dos métodos de resolução de sistemas lineares 2 x 2 no Ensino Fundamental e/ou no 1º ano do Ensino Médio.

IMPORTANTE

Em algumas situações o estudante pode fazer um tratamento numérico, através de tentativas e chegar ao resultado. Por isso a atividade proposta não trouxe nenhum coeficiente das incógnitas "x" e "y" que contivessem valores menores para, desse modo, "forçar" a usar o registro algébrico.

Caso os estudantes, após algum tempo não tenham encontrem nenhuma resposta coerente por tentativa e erro e nem feito a modelagem, o professor pode retomar a atividade e questionando, montar junto com eles a representação algébrica da situação apresentada. Na sequência deixar alguns minutos para a resolução e observar se, com esta representação os estudantes conseguem encontrar a solução. Desta forma é possível verificar as dificuldades nas duas etapas: conversão para a representação algébrica e tratamento algébrico.

Ao final, o professor deve fazer a discussão dos diferentes métodos usados pelos estudantes e solicitar que socializem no quadro os métodos usados. Caso um dos métodos não seja contemplado o professor fará a explanação no quadro. Possivelmente nenhum estudante fará a resolução usando o método de comparação, pois este não aparece com tanta frequência nos livros didáticos do Ensino Fundamental.

ATIVIDADE 02

Com base na resolução que você efetuou na atividade anterior responda.

a) *Você resolveu um sistema de equações lineares. Pesquise a definição de equações lineares e de sistemas de equações lineares no livro didático ou outro meio e reescreva-a de acordo com a interpretação que você fez da definição apresentada.*
b) *Observe os valores encontrados ao resolver o sistema de equações lineares e substitua-os nas duas equações que fazem parte do sistema. Os valores encontrados estão corretos? A incógnita a, por exemplo, assume valores iguais ou diferentes nas duas equações? Por quê?*
c) *Há a possibilidade de uso de três métodos de resolução de um sistema de equações lineares 2 x 2: adição, substituição e comparação. Tomando por base o exemplo anterior, escolha um dos métodos apresentados e faça uma explicação escrita que serviria a um estudante do 8º ano do Ensino Fundamental que precisa aprender esse método de resolução. Explique ainda porque o método recebe esta denominação.*

Objetivos:

- Converter um sistema linear representado no registro em língua materna para o registro algébrico;

- Reconhecer que sistemas lineares podem apresentar infinitas soluções ou não apresentar solução.

Solicitar aos estudantes que observem os três problemas resolvidos e os resultados obtidos. A partir destes dados é possível fazer a classificação de sistemas lineares. Interessante encaminhar esta atividade com base em algumas indagações aos estudantes: Já classificaram um sistema? De que forma? Como poderíamos fazer esta classificação? Os resultados obtidos na resolução de cada um dos sistemas foram iguais ou diferentes? O que eles sugerem?

IMPORTANTE

Os estudantes geralmente apresentam dificuldades em escrever a solução geral de um sistema possível e indeterminado, por isso o professor deve ficar atento e proporcionar diferentes situações para que os estudantes sistematizem a escrita da solução geral deste tipo de sistema. Percebe-se também certa inquietação dos estudantes quando um sistema não apresenta solução, pois para alguns o fato de obter um resultado como $0x = 4$ implica que a solução seria zero.

ATIVIDADE 03

Resolva os problemas a seguir:

1) Uma empresa decide fabricar dois novos produtos de madeira, uma vez que seus funcionários possuem algum tempo sobrando por dia. Cada produto do tipo A necessita de 5 minutos para o corte e 10 minutos para a montagem; cada produto do tipo B precisa de 4 minutos para o corte e 8 minutos para a montagem. Dispõe-se de 5 horas para o corte e 10 horas para a montagem. Quanto de cada produto é possível fabricar por dia utilizando todo tempo disponível?

a) Escreva um sistema de equações referente a situação apresentada e em seguida resolva pelo método que considerar conveniente.

b) Apresente possíveis soluções para esta situação.

c) O que o resultado obtido ao final da resolução sugere?

2) A diretoria de uma empresa decide produzir dois novos modelos de blusas: A e B. A blusa A requer 2 minutos para a confecção das mangas e 8 minutos para o corpo. A blusa B requer 3 minutos para a confecção das mangas e 12 minutos para o corpo. As máquinas utilizadas para a confecção das mangas estão disponíveis 2 horas por dia. As máquinas necessárias para a confecção dos corpos das blusas estão à disposição 3 horas por dia. Qual a quantidade de blusas de cada tipo é possível produzir utilizando todo tempo disponível das duas máquinas?

a) Escreva um sistema de equações referente a situação apresentada e em seguida resolva pelo método que considerar conveniente.

b) Apresente possíveis soluções para esta situação.

c) O que o resultado obtido ao final da resolução sugere?

Objetivos:

- Converter um sistema linear representado no registro em língua materna para o registro algébrico;
- Reconhecer que sistemas lineares podem apresentar infinitas soluções ou não apresentar solução.

Solicitar aos estudantes que observem os três problemas resolvidos e os resultados obtidos. A partir destes dados é possível fazer a classificação de sistemas lineares. Interessante encaminhar esta atividade com base em algumas indagações aos estudantes: Já classificaram um sistema? De que forma? Como poderíamos fazer esta classificação? Os resultados obtidos na resolução de cada um dos sistemas foram iguais ou diferentes? O que eles sugerem?

IMPORTANTE

Os estudantes geralmente apresentam dificuldades em escrever a solução geral de um sistema possível e indeterminado, por isso o professor deve ficar atento e proporcionar diferentes situações para que os estudantes sistematizem a escrita da solução geral deste tipo de sistema. Percebe-se também certa inquietação dos estudantes quando um sistema não apresenta solução, pois para alguns o fato de obter um resultado como $0x = 4$ implica que a solução seria zero.

ATIVIDADE 04

Responda:

a) *Compare os resultados obtidos na resolução dos três sistemas lineares. A partir destes resultados é possível classificar os sistemas lineares. De que forma você faria essa classificação?*

b) *De acordo com o resultado obtido nos três sistemas de equações resolvidos até o momento, classifique-os conforme apresentado pelo professor.*

Objetivo:

- Identificar as três possibilidades de classificação de um sistema linear 2 x 2 por meio da observação das soluções apresentadas ao final da resolução do sistema.

Parte-se da concepção de que o estudante precisa construir gradativamente seu conhecimento, cabendo ao professor problematizar e não somente dar respostas prontas. Em relação a classificação dos sistemas lineares o professor pode explicar no quadro como proceder, no entanto, considera-se mais oportuno que o estudante faça a própria classificação de acordo com um critério pré-estabelecido e somente depois confronte a sua tentativa com a apresentada pelo professor ou pelo livro didático.

Após as tentativas dos estudantes em classificar os sistemas lineares o professor deverá apresentar a nomenclatura convencional usada na Matemática para classificar um sistema linear 2 x 2: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI) e confrontar esta classificação com a apresentada pelos estudantes. Possivelmente eles verificarão que classificaram corretamente, apenas usaram termos diferentes.

ATIVIDADE 05

Atividade adaptada de Boemo[4] (2015)

A seguir temos os três sistemas de equações lineares trabalhados anteriormente.

1) Em relação ao sistema: $\begin{cases} 15x + 10y = 16800 \\ 8x + 5y = 8720 \end{cases}$

Preencha a tabela a seguir e responda as questões:

Equações do sistema	*Coeficiente x*	*Coeficiente y*	*Termo independente*

a) *Há proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas da primeira equação com os da segunda equação?*

b) *E em relação ao termo independente isso também ocorre?*

c) *Escreva a solução que você encontrou ao resolver o sistema. É possível estabelecer uma relação entre as respostas obtidas nos itens* ***a*** *e* ***b*** *e a solução deste sistema? Qual?*

d) *Para validar essa relação, escreva outro sistema de equações 2 x 2 com as características descritas nesta atividade. Resolva-o e confronte os resultados.*

[4] BOEMO, Marinela da Silveira. Registros de representação semiótica mobilizados no estudo de sistemas lineares no Ensino Médio. 2015. Dissertação. Curso de Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, 2015.

2) Em relação ao sistema: $\begin{cases} 5x + 4y = 300 \\ 10x + 8y = 600 \end{cases}$

Preencha a tabela a seguir e responda as questões:

Equações do sistema	*Coeficiente x*	*Coeficiente y*	*Termo independente*

a) *Há proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas da primeira equação com os da segunda equação?*
b) *E em relação ao termo independente isso também ocorre?*
c) *Escreva a solução que você encontrou ao resolver o sistema. É possível estabelecer uma relação entre as respostas obtidas nos itens* ***a*** *e* ***b*** *e a solução deste sistema? Qual?*
d) *Para validar essa relação, escreva outro sistema de equações 2 x 2 com as características descritas nesta atividade. Resolva-o e confronte os resultados.*

3) Em relação ao sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 120 \\ 8x + 12y = 180 \end{cases}$

Preencha a tabela a seguir e responda as questões:

Equações do sistema	*Coeficiente x*	*Coeficiente y*	*Termo independente*

a) *Há proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas da primeira equação com os da segunda equação?*
b) *E em relação ao termo independente isso também ocorre?*
c) *Escreva a solução que você encontrou ao resolver o sistema. É possível estabelecer uma relação entre as respostas obtidas nos itens **a** e **b** e a solução deste sistema? Qual?*
d) *Para validar essa relação, escreva outro sistema de equações 2 x 2 com as características descritas nesta atividade. Resolva-o e confronte os resultados.*

Objetivos:

- Identificar quando há relação de proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas e os termos independentes das equações de um sistema linear 2 x 2;
- Relacionar a proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas e os termos independentes à classificação de um sistema linear.

ATENÇÃO

Nessa etapa da escolaridade optou-se em trabalhar com o conceito de proporcionalidade para observar a posição relativa entre as retas e a consequente classificação dos sistemas lineares, no entanto esse conceito não será suficiente para classificar os sistemas lineares 3 x 3. Mesmo assim considera-se oportuno trabalhar com esse conceito ao abordar os sistemas lineares 2 x 2 por ser mais comum e adequado ao Ensino Médio. Apenas dois casos dos sistemas lineares 3 x 3 precisarão ser tratados com o uso da combinação linear.

No entanto todos os casos previstos poderiam ser abordados unicamente a partir do critério de combinação linear, ficando a critério do professor esta escolha.

Esta atividade foi cuidadosamente organizada para que os estudantes respondam várias perguntas que lhes permitam verificar como relacionar a proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e dos termos independentes à classificação dos sistemas lineares.

O professor deve relembrar aos estudantes as definições de coeficientes, incógnitas e termos independentes que serão usados nas perguntas e ainda, se necessário, os conceitos de razão e proporção.

Para isso o estudante deve observar inicialmente qual a razão entre a incógnita "x" nas duas equações. Obtida a razão deverá verificar se esta mesma razão se aplica a incógnita "y". Caso não se aplique tem-se um sistema possível e determinado.

Tomemos como exemplo o sistema: $\begin{cases} 15x + 10y = 16800 \\ 8x + 5y = 8720 \end{cases}$

Neste caso o estudante deve observar que a razão entre a incógnita "x" da primeira com a segunda equação corresponde a $\frac{15}{8}$ ou 1,875 e que a razão da incógnita “y” será representada por $\frac{10}{5}$ ou 2, portanto não há proporcionalidade. Assim não é necessário verificar a razão entre os termos independentes de ambas as equações, já se tem um sistema possível e determinado.

Agora observe como relacionar a proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas e dos termos independentes nos casos de sistema possível e indeterminado e sistema impossível, respectivamente representados abaixo.

$$\begin{cases} 5x + 4y = 300 \\ 10x + 8y = 600 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 120 \\ 8x + 12y = 180 \end{cases}$$

Nestes dois sistemas, o estudante precisa novamente verificar a razão das incógnitas. No primeiro sistema tem-se a razão $\frac{5}{10}$ ou 0,5 para a incógnita “x” e a razão $\frac{4}{8}$ ou 0,5 para a incógnita “y”. Nesse caso os coeficientes das incógnitas “x” e “y” são proporcionais, pois apresentam a mesma razão. Assim é necessário verificar agora a razão entre os termos independentes.

Neste sistema linear tem-se a razão $\frac{300}{600}$ ou 0,5. Verifica-se então que, tanto os coeficientes das incógnitas, quanto os termos independentes apresentaram a mesma razão, desta forma o sistema é classificado como possível e indeterminado. Caso a razão dos termos independentes fosse diferente da obtida com os coeficientes das incógnitas teríamos um sistema impossível.

É o que ocorre no segundo sistema, em que a razão de "x" é $\frac{2}{8}$, ou seja, 0,25 e "y" tem razão $\frac{3}{12}$ que também corresponde a 0,25. No entanto a razão entre os termos independentes é $\frac{120}{180}$ que corresponde a aproximadamente 0,67. Assim não há proporcionalidade em relação ao termo independente e o sistema é classificado como impossível.

ATIVIDADE 06

Responda:

a) *Tomando como parâmetro a equação $x + y = 100$, existe possibilidade de representá-la graficamente? De que forma você faria isso?*
b) *Qual o gráfico que uma equação linear representa?*
c) *Faça o esboço dessa representação gráfica.*

Objetivo:

- Representar graficamente uma equação linear representada no registro algébrico.

Esse é um momento em que se tem a possibilidade de verificar se os estudantes relacionam essa equação linear às equações polinomiais do 1º grau com que tiveram possivelmente contato no ano anterior. Além disso, através da resposta dos estudantes é possível verificar se construirão um gráfico ponto a ponto, geralmente com o apoio de uma tabela, ou se usarão apenas as variáveis visuais pertinentes conforme descrito por Duval para fazer o esboço do gráfico. Portanto essa atividade tem novamente um caráter diagnóstico que dará subsídios ao professor de como abordar o registro gráfico de sistemas lineares.

ATIVIDADE 07

Resolva:

a) *Represente graficamente os três sistemas trabalhados anteriormente.*

$$\begin{cases} 15x + 10y = 16800 \\ 8x + 5y = 8720 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 4y = 300 \\ 10x + 8y = 600 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 120 \\ 8x + 12y = 180 \end{cases}$$

b) *Analise os gráficos obtidos e estabeleça uma relação entre a solução obtida na resolução de cada um dos sistemas e o gráfico apresentado.*

c) *Que relação você estabelece entre o ponto de intersecção das retas e o conjunto solução do sistema?*

d) *Enuncie a partir da interpretação geométrica quando um sistema é:*

- *Possível e determinado*
- *Impossível*
- *Possível e indeterminado*

e) *Confronte os enunciados que você fez com os apresentados no livro didático. Reescreva-os, se necessário, lembrando que há a necessidade de uso de termos corretos e sem ambiguidade.*

Objetivos:

- Representar por meio do registro gráfico sistemas lineares representados no registro algébrico;
- Definir a classificação dos sistemas lineares 2 x 2 a partir da representação gráfica.

Acredita-se ser importante explorar inicialmente a construção manualmente, pois há situações em que o estudante terá que representar gráficos sem o uso de um *software*. Se o professor optar por realizar essa atividade com o uso do *software* GeoGebra, poderá reunir as atividades 07 e 08 em uma única atividade.

IMPORTANTE

Conforme apontado por Duval e também pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) não é adequado a elaboração de um gráfico por meio da construção de uma tabela com valores para "x" e "y" e a simples transcrição destes valores para o gráfico, procedimento denominado por Duval de abordagem ponto a ponto. Isso porque este procedimento não permite estabelecer a relação entre o registro algébrico e gráfico, é necessário que o estudante perceba qual a implicação da mudança de um parâmetro no registro algébrico no gráfico e vice-versa.

Considera-se pertinente que o professor retome as ideias de funções polinomiais do 1º grau trabalhadas no ano anterior, para que os estudantes entendam a integração dos objetos matemáticos. Dois pontos importantes para obter uma reta são: tomar $x = 0$ para identificar em que ponto a reta intercepta o eixo das ordenadas e tomar $y = 0$ para identificar em que ponto a reta intercepta o eixo das abscissas. Esse esboço do gráfico já dará uma primeira ideia do comportamento e da posição relativa entre as duas retas.

Portanto esse procedimento será adotado nesta atividade e a relação mais específica entre as variáveis do registro gráfico e do algébrico será abordada na próxima atividade com o uso do GeoGebra, devido a dinamicidade que ele permite.

Novamente propõe-se uma atividade em que o estudante precisa fazer uso da língua materna, mas de um modo especializado usando a nomenclatura própria da Matemática. Caso isso não ocorra ao confrontar com a definição dada pelo livro o estudante terá acesso a essa nomenclatura.

Ao final espera-se que os estudantes estabeleçam a seguinte relação: retas distintas e paralelas implicam sistema impossível, pois não há nenhum ponto em comum entre as retas, ou seja, o sistema não possui solução; retas coincidentes relacionam-se ao sistema possível e indeterminado pois há infinitos pontos em comum, ou seja, infinitas soluções e; retas concorrentes, descrevem um sistema possível e determinado pois as retas possuem um único ponto em comum, ou seja, uma única solução para o sistema linear.

ATIVIDADE 08

Atividade adaptada de Freitas (2013)

Considerando uma equação da forma ax + by = c, em que a é o coeficiente de x, b é o coeficiente de y e c o termo independente, observe o sistema de equações lineares a seguir, faça o que é solicitado e responda:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = c \end{cases}$$

a) *Digite este sistema de equações no GeoGebra.*
b) *Atribua o valor 12 para o termo* **c** *e escreva o que ocorre. Atribua mais dois valores aleatórios para c e escreva o que ocorre.*
c) *Há proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas* **x** *e* **y** *deste sistema?*
d) *Essa proporcionalidade também ocorre no termo independente quando c = 12?*
e) *Que relação você estabelece entre a proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e a não proporcionalidade do termo independente e a classificação deste sistema?*
f) *Represente o sistema (quando c = 12) no GeoGebra e insira o gráfico obtido no espaço abaixo.*
g) *Qual a posição relativa entre as retas obtidas?*
h) *Que relação você estabelece entre a posição relativa entre as retas obtidas e a classificação do sistema?*
i) *Que valor deve ser atribuído a c para que a proporcionalidade também ocorra no termo independente?*
j) *Que relação você estabelece entre a proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e do termo independente e a classificação deste sistema?*
k) *Represente este sistema no GeoGebra e insira o gráfico obtido no espaço abaixo.*
l) *Qual a posição relativa entre as retas obtidas?*
m) *Que relação você estabelece entre a posição relativa entre as retas obtidas e a classificação do sistema?*

n) *E para obter um sistema possível e determinado que alteração você deveria efetuar neste sistema de equações em questão?*

o) *Escreva o sistema no espaço abaixo.*

p) *Que relação você estabelece entre a não proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e do termo independente e a classificação deste sistema?*

q) *Represente o sistema no GeoGebra e insira o gráfico obtido no espaço abaixo.*

r) *Qual a posição relativa entre as retas obtidas?*

s) *Que relação você estabelece entre a posição relativa entre as retas obtidas e a classificação do sistema?*

t) *Através da representação gráfica é possível obter a solução deste sistema? Qual é a solução?*

u) *Digamos que você tenha um exercício que solicite classificar os sistemas lineares em: SPD, SPI e SI. Existe uma única forma de fazer a classificação?*

v) *De acordo com o que você aprendeu até agora explique resumidamente diferentes formas de fazer a classificação de sistemas lineares.*

w) *Classifique os sistemas lineares a seguir e justifique cada classificação.*

a) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=7 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-2y=3 \\ 3x-6y=9 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x-2y=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$

x) *Observe o sistema que você classificou como possível e determinado? Como você faria para encontrar a solução? Descreva.*

y) *Salve o arquivo com a seguinte denominação: Ativ8(nome do aluno) e encaminhe para o e-mail informado. XXXXXXXX*

Objetivos:

- Identificar que alterações no registro algébrico implicam mudanças no registro gráfico e vice versa;
- Mobilizar diferentes registros na classificação dos sistemas lineares.

ATENÇÃO

Professor planeje com antecedência o uso do laboratório de Informática, verificando se atende ao número de estudantes e se o software GeoGebra está instalado. Trata-se de um programa fácil de instalar. Para isso acesse https://www.geogebra.org, clique em downloads e escolha a opção GeoGebra Classic 5.

Para ter mais segurança ao usar o software recomenda-se que o professor explore-o e faça primeiramente todas as atividades propostas a fim de conhecê-lo melhor e potencializar o seu uso no estudo de sistemas lineares e prever possíveis dificuldades que poderão ser encontradas pelos estudantes.

Caso a escola não disponha de computadores o professor poderá solicitar que os estudantes tragam notebooks e organize a atividade em duplas ou trios, tomando o cuidado de que todos participem ativamente das construções e discussões.

Essa atividade foi elaborada com o propósito de que o estudante perceba a correspondência entre o registro algébrico e o gráfico. Duval (2009) destaca que é necessário perceber todas as alterações possíveis de representação gráfica e o efeito na representação algébrica, pois isso permite ao estudante ter uma visão global das possibilidades de representação gráfica e possibilita identificar quais são as variáveis visuais a serem consideradas no estudo dos sistemas lineares.

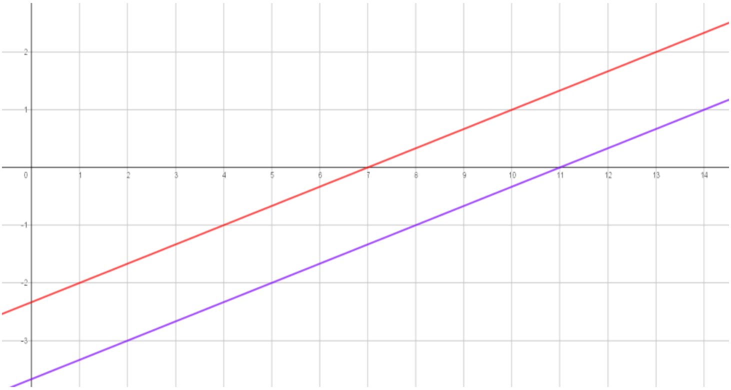
DICA

Pode ocorrer que duas retas paralelas apareçam como coincidentes no GeoGebra, isso reforça a necessidade do professor fazer alguns testes antes da aplicação para auxiliar os estudantes e evitar estas dúvidas na visualização. Neste caso, ajustando o "zoom" a representação gráfica adequada aparece.

ATIVIDADE 09

Observe a representação gráfica de sistemas de equações lineares 2 x 2.

GRÁFICO 01

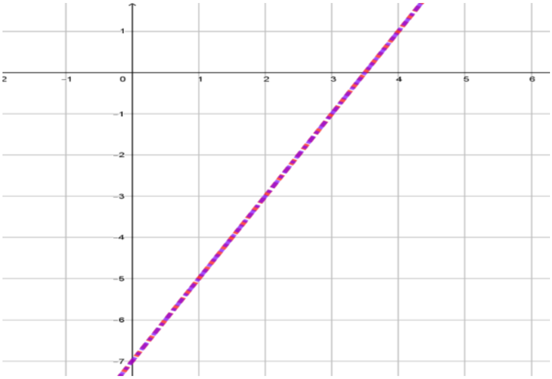


a) *Classifique o sistema representado graficamente e justifique.*
b) *Agora escreva um sistema de equações que represente algebricamente o gráfico.*
c) *Como você faria para certificar-se de que o sistema de equações apresentado está correto?*

GRÁFICO 02

a) *Classifique o sistema representado graficamente e justifique.*
b) *Agora escreva um sistema de equações que represente algebricamente o gráfico.*
c) *Como você faria para certificar-se de que o sistema de equações apresentado está correto?*

GRÁFICO 03



a) *Classifique o sistema representado graficamente e justifique.*
b) *Agora escreva um sistema de equações que represente algebricamente o gráfico.*
c) *Como você faria para certificar-se de que o sistema de equações apresentado está correto?*

Objetivos:

- Classificar um sistema linear 2 x 2 a partir de sua representação gráfica;
- Converter um sistema linear representado no registro gráfico para o algébrico.

DICA

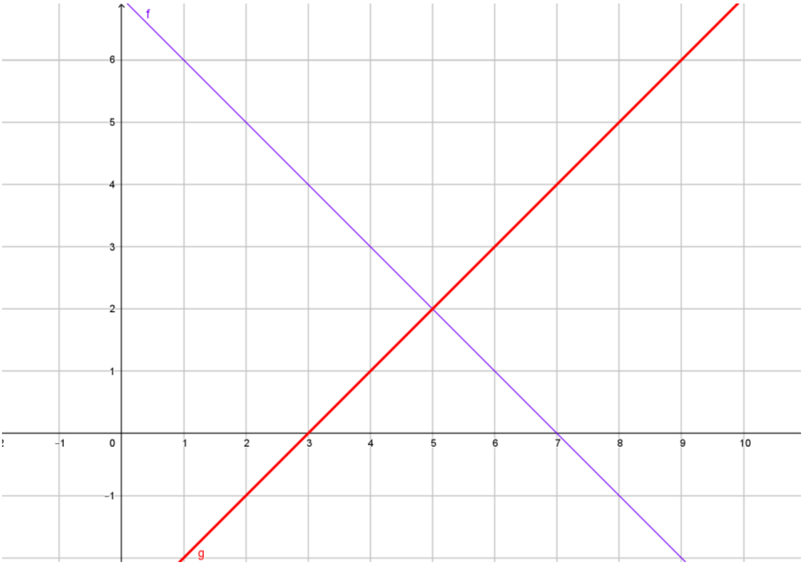
Duval pontua que a conversão deva ocorrer nos dois sentidos. Assim num primeiro momento foram propostas de conversão do registro algébrico para o gráfico e agora o sentido inverso é solicitado.

Antes de realizar esta atividade é interessante que o professor entregue um sistema linear representado no registro gráfico para que os estudantes façam a conversão pra o registro algébrico, servindo de diagnóstico. O professor pode ainda retomar os conceitos de coeficiente linear e coeficiente angular.

O professor provavelmente perceberá que poucos estudantes conseguirão realizar esse processo. Caso alguns estudantes o façam o professor deve partir destas tentativas para mostrar possíveis caminhos.

Para turmas do 2º ano do Ensino Médio o professor poderá ancorar a explicação dessa conversão na forma da função polinomial do 1º grau $y = ax + b$, mas se os sistemas lineares estiverem sendo abordados em turmas que já estudaram Geometria Analítica, que geralmente ocorre no 3º ano do Ensino Médio, a abordagem deverá considerar estes conhecimentos já construídos pelos estudantes.

Exemplo de possibilidade de conversão do registro gráfico para o registro algébrico.



Para a reta *f* podem ser considerados os pares ordenados (5,2) e (4,3) e para a reta *g* (5,2) e (4,1). O professor deve esclarecer que qualquer ponto pertencente a reta poderia ser usado.

Em relação a reta *f*, substituindo o ponto (5,2) na fórmula geral de uma equação polinomial do 1º grau $y = ax + b$, tem-se $2 = 5a + b$. Repetindo o processo com o ponto (4,3) tem-se $3 = 4a + b$. Como os dois pontos pertencem a mesma reta as duas equações formam um sistema linear.

$$\begin{cases} 5a + b = 2 \\ 4a + b = 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear encontra-se os valores *a* = -1 e *b* = 7

Em relação a reta *g* faz-se o mesmo procedimento *y = ax+ b* e tomando o ponto (5,2) e substituindo tem se *2 = 5a + b.* Na sequência tomando o ponto (4,1) tem se que *1 = 4a + b,* assim se obtém o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} 5a + b = 2 \\ 4a + b = 1 \end{cases}$$

Resolvendo-o tem-se *a* = 1 e *b* = - 3

Substituindo os valores de *a* e *b* encontrados na fórmula geral de uma equação polinomial do 1º grau tem-se a equação *y = -x + 7* para a reta *f* e y = x – 3 para a reta *g*. Reescrevendo na forma de sistema linear obtém-se: *x + y = 7* e *x – y = 3*.

Dessa forma a representação algébrica do sistema linear que estava representado no registro gráfico é: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$

ATIVIDADE 10

Classifique os sistemas lineares e encontre o conjunto solução.

a) $\begin{cases} x+y=8 \\ x+y=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x+3y=22 \\ 8x+5y=36 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x=1-3y \\ 2x+4y=y-3x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x-y=y-x-7 \\ 2y-5x-3=3x+4 \end{cases}$

Objetivos:

- Encontrar a solução e classificar os sistemas lineares dados no registro algébrico.
- Articular os diferentes registros de representação na classificação e obtenção da solução de sistemas lineares.

Esta atividade reforça a sistematização dos tratamentos algébricos uma vez que muitos estudantes apresentam dificuldades e de acordo com Duval esta é uma transformação importante requerida pela Matemática e por isso deve ser apropriada pelos estudantes.

Além disso, optou-se em trabalhar também com alguns sistemas que ainda não estão organizados no formato convencional para que o estudante perceba quais adequações necessita realizar para depois resolvê-los.

DICA

Como esta atividade é realizada no final desta etapa, é uma ótima oportunidade para o professor verificar se o estudante mobiliza diferentes registros na classificação e escrita da solução de um sistema linear.

Nesta atividade para classificar o sistema linear o estudante pode simplesmente observar a proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas e dos termos independentes, o que já seria suficiente também para escrever a solução de um sistema impossível.

Isso, porém não se aplica se o sistema for possível e determinado ou indeterminado. O esboço do gráfico também permite rapidamente classificar os sistemas e, além disso, já dá a solução para sistemas possíveis e determinados e impossíveis, não possibilitando, no entanto, a escrita da solução de sistemas possíveis e indeterminados. Estas precisam necessariamente passar pelo registro algébrico, já que a solução escrita será genérica.

PROPOSTA DE AVALIAÇÃO – SISTEMAS LINEARES 2 X 2

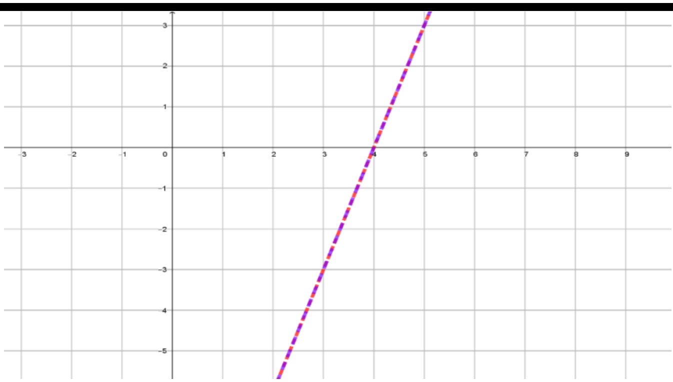
Resolva os dois problemas abaixo, encontrando o conjunto solução para cada situação apresentada.
Orientações – o primeiro problema deve ser resolvido algebricamente e o segundo graficamente.

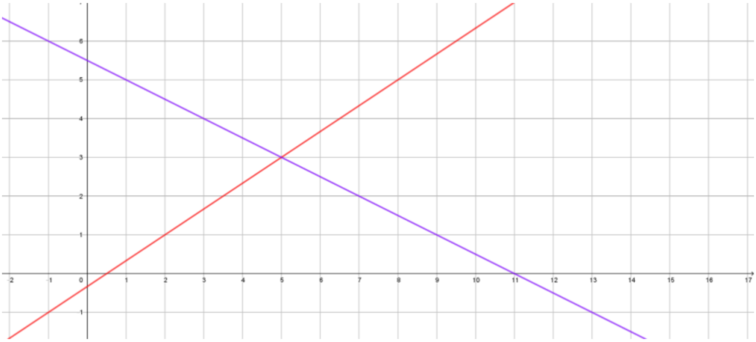
1. Um fabricante de móveis produz cadeiras e mesas de jantar. Cada cadeira leva 08 minutos para ser lixada, e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesa de jantar leva 12 minutos para ser lixada e 18 minutos para ser envernizada. A bancada para lixar fica disponível 14 horas por semana e a bancada para envernizar, 18 horas por semana. Quantos móveis de cada tipo podem ser fabricados por semana para que as bancadas sejam plenamente utilizadas? (1,0 ponto)

2. (Adaptado - Unicamp 2010). Uma confeiteira produz dois tipos de bolos de festa. Cada quilograma do bolo do tipo A consome 350 g de açúcar e 250 g de farinha. Por sua vez, o bolo do tipo B consome 300 g de açúcar e 200 g de farinha para cada quilograma produzido. Sabendo que a confeiteira dispõe de 10 kg de açúcar e 7 kg de farinha, quantos quilogramas de bolo do tipo A e do tipo B ela deve produzir se pretende gastar toda a farinha e o açúcar de que dispõe? (1,0 ponto)

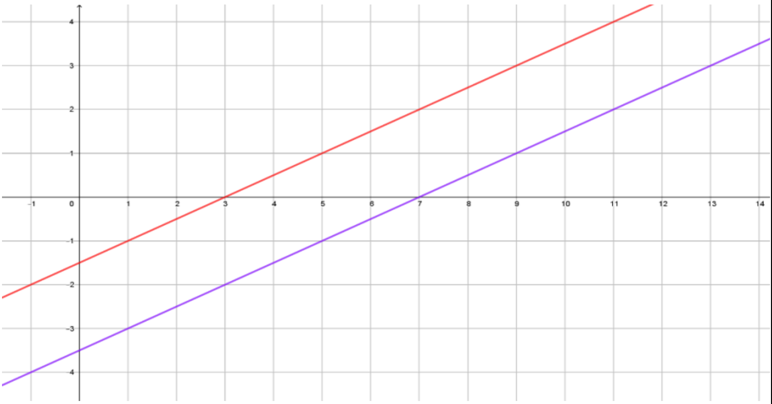
3. Classifique cada um dos sistemas de equações lineares abaixo em: sistema possível e determinado (SPD), sistemas possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI) e justifique a classificação proposta. Em seguida encontre o conjunto solução. (0,5 ponto cada).

$$\begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x = 8 - 2y \\ x - 2y = y - 3x - 7 \end{cases}$$





4. Escreva o sistema correspondente ao gráfico abaixo e classifique-o. (1,0 ponto)



Esta é uma possibilidade de avaliação que foi elaborada de modo a englobar resumidamente os principais objetivos a serem atingidos pelos estudantes ao estudarem os sistemas lineares 2 x 2 tendo como embasamento teórico a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval.

CAPÍTULO III - SEQUÊNCIA DIDÁTICA – PARTE 02

4.1 SISTEMAS LINEARES 3 X 3

ATIVIDADE 01

Resolva o problema a seguir:

Um fabricante de móveis produz cadeiras, mesinhas de centro e mesas de jantar. Cada cadeira leva 10 minutos para ser lixada, 6 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesinha de centro leva 12 minutos para ser lixada, 8 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesa de jantar leva 15 minutos para ser lixada, 12 minutos para ser tingida e 18 minutos para ser envernizada. A bancada para lixar fica disponível 16 horas por semana, a bancada para tingir,11 horas por semana e a bancada para envernizar, 18 horas por semana. Quantos móveis de cada tipo deem ser fabricados por semana para que as bancadas sejam plenamente utilizadas?

Objetivos:

- Converter um sistema linear 3 x 3, representado no registro em língua materna para o algébrico;
- Realizar o tratamento de sistemas lineares 3 x 3 no registro algébrico estendendo o uso dos métodos de resolução de sistemas de equações 2 x 2 já estudados no Ensino Fundamental para a resolução de sistemas 3 x 3.

O professor deve solicitar que os estudantes resolvam o sistema, de modo a verificar se conseguem generalizar para a resolução dos sistemas lineares 3 x 3 os conhecimentos referentes aos métodos de resolução usados para sistemas de equações lineares 2 x 2, portanto esta é uma atividade diagnóstica, não devendo ocorrer nenhuma intervenção do professor.

Após o tempo estipulado, solicitar a um estudante que escreva o sistema no quadro. São duas etapas que serão observadas: primeiro a escrita do sistema e depois a resolução do sistema, sendo que os estudantes que não conseguirem escrever o sistema, terão ele explicado no quadro para que possam dar continuidade a segunda etapa.

Parte-se da ideia de que dos três métodos de resolução de sistemas usados apenas o método da adição torna-se prático, os outros dois acabam apresentando necessidade de mais cálculos na resolução de sistemas lineares 3 x 3. Caso os estudantes tenham usado diferentes métodos questionar qual dos métodos foi mais fácil de ser usado.

O professor deve verificar ainda se os estudantes aplicarão aqui a relação entre proporcionalidade e a classificação dos sistemas lineares e orientar os estudantes que façam a análise da proporcionalidade sempre de duas em duas equações: a 1ª equação com a 2ª, a 1ª com a 3ª e a 2ª com a 3ª equação, pois agora são três equações que deverão ser analisadas.

Ao final, se necessário, o professor deve fazer a explicação referente a aplicação do método da adição em sistemas lineares 3 x 3.

ATIVIDADE 02

Resolva os problemas usando o método da adição.

1. (Adaptada- UFPE 2011). Uma fábrica de automóveis utiliza três tipos de aço A_1, A_2 e A_3 na construção de três tipos de carros, C_1, C_2 e C_3. A quantidade dos três tipos de aço, em toneladas, usados na confecção dos três tipos de carro, está na tabela a seguir:

	C_1	C_2	C_3
A_1	3	3	6
A_2	1	1	2
A_3	2	1	1

Se foram utilizados 33 toneladas de aço do tipo A_1, 11 toneladas do tipo A_2 e 12 toneladas do tipo A_3, qual o total de carros construídos de cada um dos tipos C_1,C_2 e C_3?

a) Existe uma única possibilidade de solução para esta situação?

b) Como você classificaria este sistema? Justifique

c) *E em relação a proporcionalidade das equações o que você observou? Observação: para analisar a proporcionalidade faça a comparação tomando as equações duas a duas, ou seja: compare 1 e 2, depois 1 e 3 e por fim as equações 2 e 3.*

2. (Unicamp 2010 – adaptado) Uma confeitaria produz três tipos de bolos de festa. Cada quilograma do bolo do tipo A consome 0,4 kg de açúcar, 0,2 kg de farinha e 0,2 kg de achocolatado em pó. Por sua vez *o bolo do tipo B consome 0,2 kg de açúcar, 0,3 kg de farinha e 0,1 kg de achocolatado em pó. Por fim o bolo do tipo C consome 0,2 kg de açúcar, 0,1 kg de farinha e 0,1 kg de achocolatado em pó para cada quilograma produzido. Sabendo que, no momento, a confeitaria dispõe de 10 kg de açúcar, 6 kg de farinha e 3 kg de achocolatado em pó. Quantos quilogramas de cada tipo de bolo é possível produzir se a confeitaria pretende gastar exatamente todo o açúcar, a farinha e o achocolatado de que dispõe?*

a) Como você classificaria este sistema? Justifique

b) E em relação a proporcionalidade das equações o que você observou? Observação: para analisar a proporcionalidade faça a comparação tomando as equações duas a duas: compare 1 e 2, depois 1 e 3 e por fim as equações 2 e 3.

Objetivos:

- Converter um sistema linear representado no registro tabular para o algébrico (primeira situação) e em língua materna para o registro algébrico (segunda situação);
- Usar corretamente o método da adição ao resolver sistemas lineares 3 x 3;
- Relacionar a proporcionalidade e a classificação de sistemas 2 x 2 ao classificar sistemas 3 x 3.

Na atividade 01 foi apresentado um sistema possível e determinado e nesta atividade são apresentados dois problemas: um envolvendo um sistema possível e indeterminado e outro um sistema impossível.

O propósito desta atividade é que os estudantes ampliem o repertório de situações envolvendo os sistemas lineares e percebam que diferente dos sistemas lineares 2 x 2 em que havia apenas três possibilidades de classificar um sistema linear a partir da proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas e dos termos independentes, agora serão oito possibilidades para os sistemas lineares que implicarão oito diferentes posições entre os planos. No entanto, continua ocorrendo apenas a classificação dos sistemas em: possíveis e determinados, possíveis e indeterminados e impossíveis.

DICA

Caro professor, foi elaborado um resumo referente a proporcionalidade, a posição relativa entre os planos e a classificação dos sistemas lineares que se encontra ao final deste trabalho como Apêndice A. É importante que se faça a leitura atenta deste resumo antes de continuar a sequência, caso nunca tenha trabalhado este conteúdo em sala de aula.

ATIVIDADE 03

PARTE 01

Resolva a situação usando a Regra de Cramer.

(PAIVA) Um ourives cobrou R$ 150,00 para cunhar medalhas de ouro com 3 g cada uma; de prata, com 5 g cada uma; e de bronze, com 7 g cada uma, ao preço unitário de R$ 30,00, R$ 10,00 e R$ 5,00, respectivamente. Sabendo que foram confeccionadas 15 medalhas, com massa total de 87 g, determine o número de medalhas de ouro confeccionadas?

PARTE 02

Agora, resolva os dois problemas anteriores usando a Regra de Cramer e verifique o que ocorre nos resultados. Qual o valor do determinante que você encontrou em ambos os casos? O que isso significa?

PARTE 03

Resolva o sistema abaixo usando a Regra de Cramer e responda as questões:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+y+z=-10 \\ x+y+z=20 \end{cases}$$

a) O que você observou em relação a proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas nas três equações?
b) Isso se aplica também aos termos independentes?
c) Classifique este sistema a partir da proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e dos termos independentes.

d) Que valores você obteve para x, y e z?

e) Como você classificaria este sistema a partir do uso da Regra de Cramer?

f) Essa regra pode ser usada nos casos em que o determinante dos coeficientes das incógnitas é igual a zero? Por quê?

Objetivos:

- Converter o sistema linear representado no registro em língua materna para o algébrico;
- Resolver sistemas lineares 3 x 3 usando a Regra de Cramer;
- Identificar as limitações da Regra de Cramer para classificar sistemas impossíveis e possíveis e indeterminados.

IMPORTANTE

Professor, alguns livros didáticos não têm abordado a Regra de Cramer no estudo dos sistemas lineares por compreenderem que ela apresenta limitações podendo ser usada apenas nos casos de sistemas lineares possíveis e determinados.

Neste trabalho optamos em usar a Regra de Cramer pois compreendemos que também faz parte da aprendizagem dos estudantes discernir dentre determinadas opções quais se ajustam melhor a cada situação.

Assim não se apresenta um único método, mas diferentes métodos, observando suas potencialidades e limitações. Cabe ao professor, de acordo com sua experiência em sala de aula, fazer as opções que julgar mais adequadas e que permitam ao estudante apropriar-se do que está sendo estudado.

Assim na parte 02 da atividade se solicita que o estudante resolva um sistema impossível em que o determinante principal será igual a zero e os determinantes de x, y e z serão diferentes de zero. Isso remete a uma divisão de um número natural diferente de zero por zero, o que é impossível. No outro sistema o estudante encontrará todos os determinantes iguais a zero o que implicará em uma divisão de zero por zero, ou seja, uma indeterminação.

Esses critérios serviriam para classificar os sistemas a partir do uso da Regra de Cramer, no entanto, possuem limitações e isso será discutida na parte 03 da atividade em que os estudantes perceberão que usando o critério da proporcionalidade o sistema será classificado como impossível e usando a Regra de Cramer como possível e indeterminado, indicando então que a Regra de Cramer deverá ser usada apenas nos casos de sistemas possíveis e determinados e necessita do uso de determinantes então aplica-se apenas a matrizes quadradas. [5]

---

[5] Matrizes quadradas são as matrizes que apresentam número de linhas igual ao número de colunas.

ATIVIDADE 04

Usando o GeoGebra faça a representação gráfica referente a cada sistema de equações e de acordo com os resultados apresentados organize-os em três grupos: sistemas possíveis e indeterminados (SPI) e sistemas impossíveis (SI) e sistemas possíveis e determinados (SPD):

a) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=3 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+2y-2z=3 \\ x+y-z=1 \\ 4x+4y-z=4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x+4y-z=4 \\ 2x+2y-2z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 4x+7y-z=13 \end{cases}$

SISTEMA POSSÍVEL E INDETERMINADO

Sistema	*Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente.*	*Posição relativa entre os planos*	*Representação gráfica*

SISTEMA IMPOSSÍVEL

Sistema	*Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente.*	*Posição relativa entre os planos*	*Representação gráfica*
		.	

SISTEMA POSSÍVEL E DETERMINADO

Sistema	*Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente.*	*Posição relativa entre os planos*	*Representação gráfica*
		.	

Após preencher o quadro responda:

a) Nos sistemas lineares 3 x 3 é possível estabelecer um único critério para todos os sistemas que fazem parte do grupo SPI? Justifique.

E em relação ao grupo SI? Justifique.

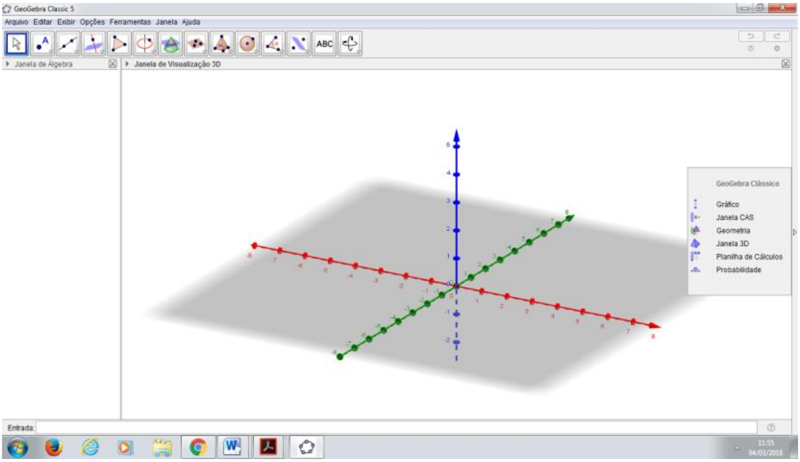
Objetivos:

- Relacionar a representação gráfica às diferentes posições relativas possíveis entre os planos e a classificação dos sistemas lineares.

- Identificar os casos de proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas e os termos independentes e relacioná-los a posição relativa entre os planos.

ATENÇÃO

Para representar planos no espaço é necessário ativar a janela 3D, disponível no canto direito do GeoGebra.



Nesta atividade optou-se em trabalhar apenas seis possibilidades de posição relativa entre os planos em que o critério de proporcionalidade consegue responder satisfatoriamente. Os dois casos em que obrigatoriamente deverá ser usado o critério de combinação linear serão explorados na atividade 05.

DICA

Geralmente aborda-se o registro algébrico primeiro e depois o registro gráfico como fizemos nos sistemas lineares 2 x 2, mas invertemos essa abordagem nos sistemas lineares 3 x 3 entendendo que a visualização das diferentes posições entre os planos auxiliará os estudantes no tratamento algébrico.

Assim, primeiramente será abordado o registro gráfico envolvendo oito sistemas lineares e suas respectivas posições entre os planos para depois discutir a aplicação do método de escalonamento nestes mesmos oito sistemas para comparar os resultados obtidos e tirar conclusões a serem generalizadas.

Apresentamos algumas considerações acerca de cada um dos sistemas desta atividade.

PRIMEIRO SISTEMA - Há proporcionalidade tanto nos coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes das três equações, formando três planos coincidentes, sendo classificado como sistema possível e indeterminado.

SEGUNDO SISTEMA - Há proporcionalidade nos coeficientes das incógnitas, mas não se estende aos termos independentes das três equações, formando três planos paralelos, sendo classificado como sistema impossível.

TERCEIRO SISTEMA - Há proporcionalidade tanto nos coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes das duas primeiras equações (planos coincidentes). Em relação as duas primeiras equações com a terceira, apresentam proporcionalidade apenas nos coeficientes das incógnitas (plano paralelo). Assim são dois planos coincidentes e um plano paralelo a estes, portanto sistema impossível, pois não há nenhum ponto em comum.

QUARTO SISTEMA - Há proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas, mas não há proporcionalidade entre os termos independentes das duas primeiras equações (planos paralelos). Em relação a estas duas primeiras equações com a terceira não há proporcionalidade. Isso significa que o plano representado pela terceira equação intersecta os dois planos paralelos, sendo classificado como sistema impossível, pois não há nenhum ponto em comum.

QUINTO SISTEMA - Há proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas e entre os termos independentes das duas primeiras equações (planos coincidentes). Em relação a estas duas primeiras equações, a terceira não apresenta proporcionalidade. Isso significa que ela intersecta os dois planos coincidentes. Assim, tem-se um sistema possível e indeterminado, pois há uma reta em comum, ou seja, infinitos pontos.

SEXTO SISTEMA - Não há proporcionalidade entre nenhuma das equações, portanto o sistema é possível e determinado e sua representação gráfica é formada por três planos que se intersectam em um único ponto.

ATIVIDADE 05

1. *Considere o sistema linear:* $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 4x+y+3z=7 \end{cases}$

a) *Digite-o no GeoGebra e obtenha a representação gráfica.*
b) *Descreva a posição relativa entre os três planos formados.*
c) *E em relação a proporcionalidade ou combinação linear o que você identifica.*
d) *Com base nestes parâmetros classifique este sistema linear.*

2. *Considere o sistema linear: h)* $\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 5x+2y+z=2 \\ 9x+3y+5z=5 \end{cases}$

a) *Digite-o no GeoGebra e obtenha a representação gráfica.*
b) *Descreva a posição relativa entre os três planos formados.*
c) *E em relação a proporcionalidade ou combinação linear o que você identifica.*
d) *Com base nestes parâmetros classifique este sistema linear.*

Agora retorne a questão 4 e insira no quadro que você preencheu mais estas duas possibilidades. Dessa forma você terá um resumo das oito possibilidades estudadas de classificação de sistemas lineares de acordo com a proporcionalidade/combinação linear e a posição relativa entre três planos no espaço.

Objetivos:

- Identificar os casos em que há combinação linear entre as equações integrantes do sistema linear;

- Classificar os sistemas lineares a partir da identificação da combinação linear.

DICA

O professor deve mostrar aos estudantes que nos sistemas lineares 2 x 2 sempre que um sistema não apresentava proporcionalidade ele era classificado como sistema possível e determinado, mas agora nos sistemas lineares 3 x 3, há de se investigar melhor pois mesmo não apresentado proporcionalidade o sistema pode apresentar combinação linear que pode ocorrer tanto nos coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes ou somente nos coeficientes das incógnitas, sendo classificado como sistema possível e indeterminado e impossível, respectivamente.

O professor deve mostrar aos estudantes que se os sistemas não apresentam proporcionalidade significa que os três planos se intersectam. Se isso ocorrer em um único ponto temos um sistema possível e determinado, se houver uma reta em comum será um sistema possível e indeterminado e se não houver nenhum ponto em comum temos um sistema impossível.

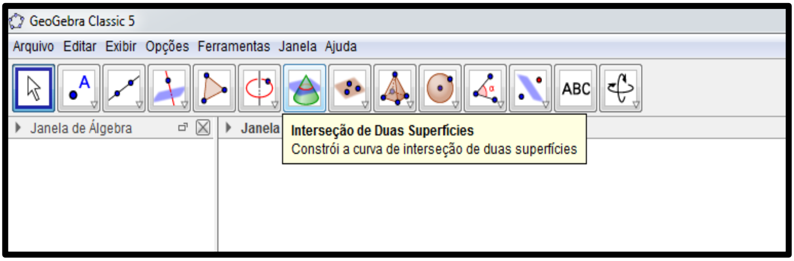
Tomando como base o primeiro sistema da atividade percebe-se que a terceira equação é o resultado da multiplicação de todos os coeficientes da primeira equação por dois somados aos coeficientes da segunda. Como isso se estende também aos termos independentes temos um sistema possível e indeterminado, cuja visualização no GeoGebra será de três planos concorrentes com uma reta em comum.

No segundo sistema linear da atividade temos que a terceira equação resulta da multiplicação de todos os elementos da segunda equação por dois e desse resultado subtrai-se os valores da primeira equação, mas essa combinação linear não se estende aos termos independentes, ou seja, três planos que se intersectam, mas não possuem nenhum ponto em comum, caracterizando um sistema impossível.

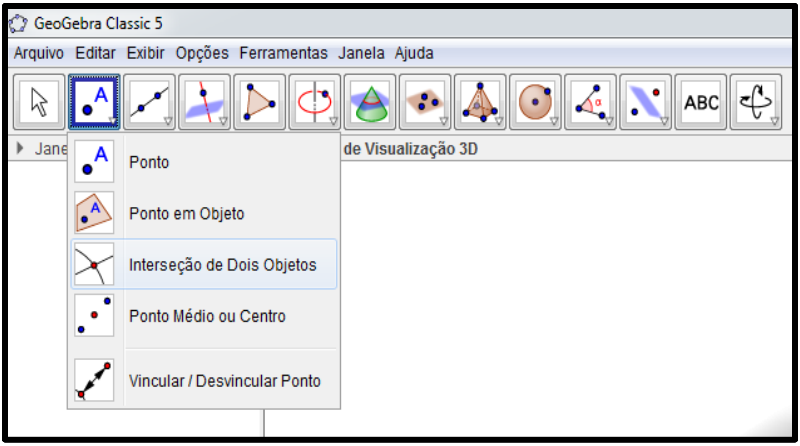
IMPORTANTE

Nessa etapa é importante que o professor apresente aos estudantes mais duas funcionalidades do GeoGebra: os ícones "intersecção de duas superfícies" e "intersecção entre dois objetos".

Deve-se proceder da seguinte maneira: clicar no ícone intersecção de duas superfícies e depois clicar nos planos dois a dois. Na janela de álgebra aparecerá a reta correspondente. Ao final serão obtidas três retas referentes a intersecção entre os planos 1 e 2, 1 e 3 e 2 e 3.



Feito isso o próximo passo será clicar no ícone "intersecção entre dois objetos". Novamente deve-se clicar nesse ícone e nas retas tomando-as duas a duas para verificar o resultado que será obtido. Se constar a mesma terna ordenada trata-se de um sistema possível e determinado e se apresentar apenas um ponto de interrogação tem-se um sistema impossível ou possível e indeterminado.



Para classificar o sistema corretamente o estudante pode retornar as equações da reta formadas ao clicar em intersecção entre duas superfícies e deverá observar que no sistema impossível as equações são distintas, já no sistema possível e indeterminado duas equações da reta serão iguais.

ATIVIDADE 06

Resolva os sistemas lineares usando o método do escalonamento e encontre
o conjunto solução.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=3 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 4x+y+3z=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y-2z=3 \\ x+y-z=1 \\ 4x+4y-z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+4y-z=4 \\ 2x+2y-2z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 4x+7y-z=13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-3z=1 \\ 5x+2y+z=2 \\ 9x+3y+5z=5 \end{cases}$$

Objetivos:

- Realizar tratamentos algébricos de sistemas linear 3 x 3 por meio do método de escalonamento;
- Relacionar as soluções encontradas por meio do método de escalonamento a classificação dos sistemas lineares 3 x 3.

O método de escalonamento também conhecido como o método de eliminação de Gauss, não possui nenhuma limitação podendo ser usado para a resolução de qualquer sistema linear, no entanto percebemos que os estudantes apresentam dificuldades em utilizar devido a errarem operações elementares.

Portanto o professor precisa usar diferentes exemplos para explicar cuidadosamente como usar este método, principalmente ao final da resolução para que os estudantes relacionem corretamente os valores obtidos à classificação dos sistemas lineares.

DICA

Foram usados os mesmos sistemas lineares da atividade anterior para que os estudantes possam refletir se a resolução está correta ao compararem com a representação gráfica, mobilizando diferentes registros que proporcionam um resultado mais confiável.

IMPORTANTE

Os estudantes devem resolver completamente cada um dos sistemas, uma vez que a resolução parcial pode levá-los a classificações equivocadas, pois ao trabalhar com sistemas lineares 3 x 3 serão oito possibilidades de resultados a serem obtidos.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) orienta que deva ser usado o método de escalonamento ao abordar sistemas lineares 3 x 3, no entanto percebemos que os estudantes preferem e possuem mais facilidade em usar o método da adição.

ATIVIDADE 07

1. *Observe o sistema linear:* $\begin{cases} 6x+2y+4z=32 \\ 9x+3y+6z=16 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

Para o sistema linear obtido na questão abaixo descreva a posição relativa entre os planos. Complete cada sistema com uma equação de modo que possa ser classificado como:

a) *Sistema impossível:*
b) *Sistema possível e indeterminado:*
c) *Sistema possível e determinado:*
d) *Você estudou que existem quatro possibilidades para as posições relativas dos três planos no espaço representarem um sistema impossível. Escreva mais uma possibilidade de equação que complete um dos sistemas, porém a posição relativa dos três planos deve ser diferente da letra a. Se necessário, use o GeoGebra para confirmar se a reposta está correta.*
e) *Porque este sistema se tornou um Sistema Impossível?*
f) *Você estudou que existem três possibilidades para as posições relativas dos três planos no espaço representarem um sistema possível e indeterminado. Escreva mais uma possibilidade de equação que complete um dos sistemas, porém a posição relativa dos três planos deve ser diferente da resposta da letra b. Se necessário, use o GeoGebra para confirmar se a reposta está correta.*
g) *Porque este sistema se tornou um Sistema Possível e Indeterminado?*

2. *Responda os itens a a g para o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x+y-2z=-1 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Objetivos:

- Escrever a terceira equação de um sistema linear 3 x 3, dadas as duas primeiras equações e atendendo aos critérios de classificação propostos.
- Mobilizar diferentes registros de representação referentes aos sistemas lineares 3 x 3.

Esta atividade mostra-se bastante significativa e é proposta justamente ao final da sequência didática, pois neste momento os estudantes já tiveram contato com os diferentes registros de representação dos sistemas lineares e podem mobilizá-los ao resolver as situações propostas.

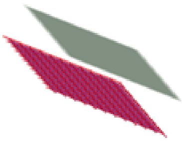
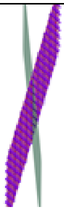
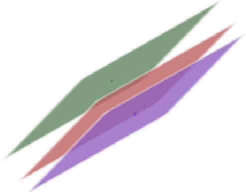
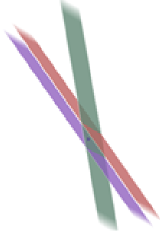
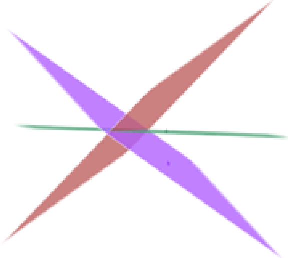
IMPORTANTE

Foram escolhidos dois sistemas lineares com características diferentes: o primeiro já apresenta proporcionalidade tanto nos coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes limitando consideravelmente a escrita da terceira equação de forma a atender os critérios de cada pergunta; o segundo sistema, no entanto, por não manter proporcionalidade entre as equações possibilita diferentes registros para a terceira equação de forma a atender os critérios solicitados nas perguntas.

Outra característica importante dessa atividade e que deve ser observada pelo professor é o fato do estudante ser solicitado a escrever diferentes equações, mas que mantenham a mesma classificação do sistema linear. Isso seria facilmente resolvido pelo estudante, mas a dificuldade está justamente no fato de que não é possível repetir a mesma posição entre os planos, requerendo a mobilização de diferentes registros e a articulação entre eles.

ATIVIDADE 08

1. *Classifique os sistemas lineares 3 x 3 em SPD (Sistema possível e determinado), SPI (Sistema possível e indeterminado) ou SI (Sistema impossível). Justifique cada classificação. Observação: considere planos pontilhados como planos coincidentes.*

Após realizar a classificação escreva algebricamente um sistema que possa representar cada situação apresentada nesta atividade.

Objetivos:

- Classificar os sistemas lineares representados no registro gráfico por meio da observação das possíveis posições entre os planos;
- Converter um sistema linear 3 x 3 representado no registro gráfico para o registro algébrico usando os conceitos de proporcionalidade e combinação linear.

A primeira preocupação ao realizar essa atividade deve ser com a visualização dos gráficos, pois a atividade não deve ser realizada no GeoGebra. Essa recomendação é feita por compreender que o GeoGebra já traz o registro algébrico das equações integrantes do sistema linear e nesse caso, os estudantes podem classificar a partir da proporcionalidade e não do registro gráfico, que é o objetivo da atividade.

Além disso, ao término da classificação os estudantes devem escrever os sistemas lineares representados no registro gráfico por meio do registro algébrico.

IMPORTANTE

Professor os estudantes não escreverão o registro algébrico que representa exatamente o registro gráfico apresentado, apenas semelhante, que indique um sistema com a mesma posição relativa entre os planos. Para isso o estudante deve mobilizar os conhecimentos construídos acerca da relação entre a proporcionalidade e combinação linear e a posição relativa entre os planos no espaço. Entendemos que essa abordagem seja suficiente nessa etapa da escolaridade.

ATIVIDADE 09

1. *Resolva as situações a seguir, encontrando o conjunto solução para cada situação apresentada. Escolha o método de resolução que julgar mais adequado para cada situação.*

a) (UFG 2012) Um fabricante combina cereais, frutas desidratadas e castanhas para produzir três tipos de granola. As quantidades, em gramas, de cada ingrediente utilizado na preparação de 100 g de cada tipo de granola são dadas no quadro a seguir:

Tipo de granola/ingredientes	*Cereais*	*Frutas*	*Castanhas*
Light	*80*	*10*	*10*
Simples	*60*	*40*	*0*
Especial	*60*	*20*	*20*

O fabricante dispõe de um estoque de 18 kg de cereais, 6 kg de frutas desidratadas e 2 kg de castanhas. Determine quanto de cada tipo de granola ele deve produzir para utilizar exatamente o estoque disponível.

b) (INSPER- 2009) Renato decidiu aplicar R$ 100 000,00 em um fundo de previdência privada. O consultor da empresa responsável pela administração do fundo sugeriu que essa quantia fosse dividida em três partes x, y e z, que seriam aplicadas em três investimentos A, B e C, respectivamente. Em seguida, mostrou a Renato duas simulações do desempenho da aplicação, considerando dois cenários distintos para um período de 5 anos.

Cenário	*Rendimento previsto para um período de 5 anos*		
	Investimento A	*Investimento B*	*Investimento*
Conservador	*100%*	*50%*	*25%*
Otimista	*100%*	*150%*	*200%*

Com essas informações, determine os valores de x, y e z sugeridos pelo consultor.

c) Um biólogo analisará três espécies de bactérias I, II e III num mesmo tubo de ensaio, onde elas serão nutridas por três fontes *distintas de alimentos A, B e C. A cada dia serão colocados no tubo 2 300 unidades de A, 800 unidades de B e 1 500 unidades de C. O quadro abaixo, mostra a quantidade, em unidades, de alimentos consumido por dia, por cada microrganismo.*

	I	***II***	***III***
A	*2*	*2*	*4*
B	*1*	*2*	*0*
C	*1*	*3*	*1*

Quantas bactérias de cada espécie podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento?

d) Três pacientes A, B e C usam, em conjunto, 1830 mg por mês de um determinado medicamento que é produzido em cápsulas. O paciente A usa cápsulas de 5 mg, o paciente B usa cápsulas de 10 mg e o paciente C ingere cápsulas de 12 mg. O paciente A toma a metade do número de cápsulas de B e os três tomam juntos 180 cápsulas por mês. Nessas condições, o número de cápsulas que o paciente C toma mensalmente é igual a?

Objetivos:

- Reconhecer situações em que se faz uso dos sistemas lineares representados em língua materna;
- Resolver as situações contextualizadas envolvendo os sistemas lineares

Entendemos ser importante explorar diversas situações contextualizadas envolvendo os sistemas lineares representadas no registro em língua materna, pois conforme apontado por Duval esse registro geralmente tem um caráter não congruente, sendo um desafio para os estudantes, mas que propiciam saltos qualitativos na aprendizagem. Sugere-se que esta atividade seja realizada em duplas.

ATENÇÃO

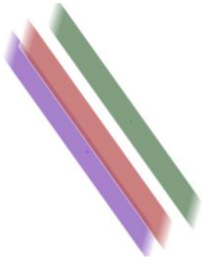
Professor, provavelmente os estudantes terão muitas dificuldades em representar algebricamente a segunda situação apresentada, pois o estudante deverá mobilizar conhecimentos de Matemática Financeira, compreendendo, por exemplo, que um rendimento de 50% deverá ser representado por 1,5.

ATIVIDADE 10

a) *Escreva uma situação problema que represente o sistema linear abaixo:*

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 13 \end{cases}$$

b) *Escreva uma situação problema que represente o sistema linear abaixo:*



Objetivos:

- Converter um sistema linear representado no registro algébrico para o registro em língua materna;
- Converter bum sistema linear representado no registro gráfico para o registro em língua materna.

Esta atividade provavelmente será uma das mais complexas de ser realizada, por isso recomenda-se que seja realizada em duplas. Isso ocorre porque além de fazer a conversão do registro algébrico (primeira situação) e registro gráfico (segunda situação) para o registro em língua materna, os estudantes têm ainda o desafio de escrever uma situação real.

Além disso, a situação representada no registro gráfico provavelmente será mais fácil de ser resolvida devido a diferentes possibilidades de inserção dos coeficientes, pelo próprio estudante, diferente da primeira situação em que os coeficientes das incógnitas e os termos independentes já estão determinados.

PROPOSTA DE AVALIAÇAO - SISTEMAS LINEARES 3 X 3

Resolva as duas situações abaixo, encontrando o conjunto solução para cada situação apresentada.

1. *INSPER- 2009 - adaptado) Renato decidiu aplicar R$ 100 000,00 em um fundo de previdência privada. O consultor da empresa responsável pela administração do fundo sugeriu que essa quantia fosse dividida em três partes x, y e z, que seriam aplicadas em três investimentos A, B e C, respectivamente. Em seguida, mostrou a Renato duas simulações do desempenho da aplicação, considerando dois cenários distintos para um período de 5 anos.*

Cenário	*Rendimento previsto para um período de 5 anos*			*Saldo previsto após 5 anos*
	Investimento A	*Investimento B*	*Investimento C*	
Conservador	*100%*	*50%*	*25%*	*R$ 170 000,00*
Otimista	*200%*	*100%*	*50%*	*R$ 240 000,00*

Com essas informações, determine os valores de x, y e z sugeridos pelo consultor.

UFPE 2011. Uma fábrica de automóveis utiliza três tipos de aço A_1, A_2 e A_3 na construção de três tipos de carros, C_1, C_2 e C_3. A quantidade dos três tipos de aço, em toneladas, usados na confecção dos três tipos de carro, está no quadro a seguir

	C_1	C_2	C_3
A_1	2	3	4
A_2	1	1	2
A_3	3	2	1

Se foram utilizadas 26 toneladas de aço do tipo A_1, 11 toneladas do tipo A_2 e 19 toneladas do tipo A_3, qual o total de carros construídos dos tipos C_1, C_2 e C_3?

2. Complete o quadro a seguir:

Sistema	Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente ou combinação linear	Posição relativa entre os planos	Solução	Classificação do sistema
$\begin{cases} 2x+2y-2z=-2 \\ 4x+4y-4z=-4 \\ 6x+6y-6z=-6 \end{cases}$				
$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y-z=1 \\ x+y-z=-10 \end{cases}$				
$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 4x+y+3z=7 \end{cases}$				
$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y+2z=10 \\ 3x+2y+2z=13 \end{cases}$				

$\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 5x+2y+z=2 \\ 9x+3y+5z=5 \end{cases}$					
$\begin{cases} x+y-z=1 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$					
$\begin{cases} 3x+2y+2z=10 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$					
$\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$					

Esta proposta de avaliação tem como objetivo verificar as aquisições conceituais dos estudantes ao final da aplicação da sequência didática, por isso recomenda-se que seja realizada individualmente e sem consulta.

Buscou-se organizar de maneira resumida atividades que englobassem os diferentes registros de representação referentes aos sistemas lineares 3 x 3 abordados durante a aplicação da sequência didática.

As atividades consistem em questões que envolvem tratamentos, conversões e a necessidade de mobilização dos diferentes registros de representação. Buscou-se ainda abordar na avaliação todas as oito possibilidades de posição relativa entre os planos e a respectiva classificação e a relação destas com o registro algébrico e a proporcionalidade e /ou combinação linear.

REFERÊNCIAS

BATTAGLIOLI, Carla dos Santos Moreno. **Sistemas Lineares na 2ª série do Ensino Médio:** um olhar sobre os livros didáticos. 2008. 113 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

BOEMO, Marinela da Silveira. **Registros de representação semiótica mobilizados no estudo de sistemas lineares no Ensino Médio**. 2015. 165 f. Dissertação (Mestrado) Curso de Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática ensino fundamental**. Brasília, 1998.

______. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática ensino médio**. Brasília, 2000.

______. Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002.

______. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. v. 02. Brasília, 2006.

______. Ministério da Educação (MEC). **Base Nacional Comum Curricular.** 2015. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/conhecaDisciplina?disciplina=AC_MAT&tipoEnsino=TE_EF>. Acesso em: 31 mai. 2017.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorin. **Representações Semióticas no ensino:** contribuições para reflexões acerca dos currículos de matemática escolar. 2008. 253 f. Tese (Doutorado) – Curso de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11- 33.

_____. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. **La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española**, Madrid, v. 09, n. 01, p.143-168, 2006. Disponível em: <http://gaceta.rsme.es/index.php>. Acesso em: 19 abr. 2016.

______, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 119 p.

______, Raymond. **Ver e ensinar Matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica. Organização Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011a. 160 p.

_______, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revemat**. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011b. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96>. Acesso em: 10 jul. 2017.

FREITAS, Nilza Aparecida de. **Sistemas de Equações Lineares:** Uma proposta de atividades com abordagem de diferentes Registros de Representação Semiótica. 2013. 180 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

JORDÃO, Ana Lucia Infantozzi. **Um Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3 x 3 no 2º ano do Ensino Médio.** 2011. 193 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

QUEIROZ, Carlos Antônio; RAMOS, Elenita Eliete de Lima; SIPLE, Ivanete Zuchi. **Tópicos Especiais em Ciências I:** representação semiótica, tecnologias educacionais e atividades experimentais. Florianópolis. Publicações do IF-SC, 2011. 105 p.

APÊNDICE A – Resumo sobre as possibilidades para a posição relativa de três planos no espaço

SISTEMA POSSÍVEL E INDETERMINADO

1ª possibilidade: os três planos coincidem

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x-2y+2z=-2 \\ -6x-6y+6z=-6 \\ -8x-8y+8z=-8 \end{cases}$$

Neste caso, temos a proporcionalidade entre as incógnitas e também entre os termos independentes entre as três equações.

2ª possibilidade: dois planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ 4x+6y-2z=4 \\ 6x+9y+z=8 \end{cases}$$

Neste caso duas equações são proporcionais, tanto nas incógnitas quanto no termo independente, por isso formam planos coincidentes e a terceira equação não mantem proporcionalidade com as outras duas.

3ª possibilidade: os três planos são distintos e têm uma reta em comum.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 4x+y+3z=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x+3y+2z=1 \\ 4x+y+4z=7 \end{cases}$$

Neste caso não existe proporcionalidade entre as incógnitas e entre os termos independentes, mas diferentemente de um sistema possível e determinado, nesta situação uma das equações advém da multiplicação e soma das outras duas (algo semelhante ao que ocorre no escalonamento), formando uma combinação linear. Nos sistemas que aparece como exemplo, os coeficientes da terceira equação são equivalentes ao resultado da multiplicação da primeira equação por dois e o resultado somado a segunda equação. E isso se estende também para o termo independente.

SISTEMA IMPOSSÍVEL

1ª possibilidade: os planos são paralelos dois a dois.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=3 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ 4x+6y-2z=20 \\ 6x+9y-3z=40 \end{cases}$$

Neste caso, temos a proporcionalidade entre as incógnitas entre as três equações, mas não há proporcionalidade entre os termos independentes.

2ª possibilidade – dois planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y-z=1 \\ x+y-z=-10 \end{cases}$$

As duas primeiras equações têm as incógnitas proporcionais e os termos independentes também, por isso são planos coincidentes. Já a terceira equação em relação às outras duas tem proporcionalidade nas incógnitas, mas não no termo independente caracterizando ser um plano paralelo em relação aos outros dois.

3ª possibilidade: dois planos paralelos e o outro os intersecta.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=3 \\ 4x+4y-z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x+2y+4z=32 \\ 9x+3y+6z=16 \\ 3x+2y+2z=10 \end{cases}$$

Neste caso, duas equações têm proporcionalidade entre as incógnitas, mas não no termo independente, caracterizando dois planos paralelos. Já a terceira equação não é proporcional às outras duas equações e intersecta os dois planos. Não há nenhum ponto em comum entre os três planos.

4ª possibilidade: os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras.

$$\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 5x+2y+z=2 \\ 9x+3y+5z=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+y-z=20 \\ x+3y+z=15 \\ -x+5y+3z=30 \end{cases}$$

Neste caso não existe proporcionalidade entre as incógnitas e entre os termos independentes, mas diferentemente de um sistema possível e determinado, nesta situação uma das equações advém da multiplicação e soma das outras duas (algo semelhante ao que ocorre no escalonamento), formando uma combinação linear. Nestes exemplos, a terceira equação é resultado da multiplicação da segunda equação por dois menos a primeira equação, e isso não se estende ao termo independente.

SISTEMA POSSÍVEL E DETERMINADO

Única possibilidade: os três planos têm um único ponto em comum

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 4x+7y-z=13 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x+y-2z=-1 \\ -3x+6y-2z=2 \end{cases}$$

Neste caso não temos proporcionalidade entre as incógnitas das três equações e também não ocorre combinação linear.