Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

EDVALDO MELO SOUZA

NATANAEL FREITAS CABRAL

PRODUTO EDUCACIONAL: O ENSINO DE INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

BELÉM

2020

EDVALDO MELO SOUZA
NATANAEL FREITAS CABRAL

PRODUTO EDUCACIONAL: O ENSINO DE INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Belém
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

SOUZA, Edvaldo Melo e CABRAL, Natanael Freitas. Produto Educacional: O ensino de intervalos de números reais por meio de uma sequência didática. Produto educacional relacionado ao Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado) — Universidade do Estado do Pará, Centro de Ciências Sociais e Educação, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM/UEPA), Belém, 2020.

ISBN:

1. Matemática. 2. Sequência Didática. 3. Números Reais. I. Cabral, Natanael Freitas, *orient*. II. Título.

CDD - 23. ed. 510

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesse documento disponibilizo os resultados alcançados de minha dissertação de mestrado do Programa Profissional em Ensino de Matemática denominada “O ensino de intervalos de números reais por meio de uma sequência didática”, que teve como objetivo avaliar as potencialidades de uma sequência didática voltada para o alunado do 1º ano do ensino médio. Este produto educacional surgiu após os seguintes pontos: Prévias sondagens, resultados obtidos e conclusões alcançadas. A partir de trabalhos desenvolvidos sobre esse objeto matemático, assim como também através de uma consulta feita aos alunos observei que, ainda nas escolas da rede pública, Intervalos de Números Reais é pouco explorado, apresentando assim uma deficiência para a aplicação do mesmo, no que diz respeito à visão bem definida dos conceitos básicos e das operações de intervalos de números reais, nos quais destacamos em particular a identificação e as suas representações, levando com isso um comprometimento no processo de ensino e aprendizagem.

Levando em consideração o exposto acima, e imaginando que a comunidade escolar de matemática em especial os professores dessa disciplina queira pesquisar sobre intervalos de números reais, daí tomamos a iniciativa de consultar os documentos oficiais para obter informações sobre o tema de estudo. O PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) de 1988 recomenda sua inserção nos currículos escolares de Matemática no 1º ano do ensino médio, e também os PCN+Ensino Médio (Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio) (BRASIL, 2002), orientam, em linhas gerais, que o ensino do bloco de números e operações deve ser aprofundado em conexão com outros conceitos matemáticos.

Visando contribuir para a solução da problemática acima exposta, resolveu-se buscar uma metodologia dentro do contexto matemático, diferente do ensino tradicional, que viesse a melhorar o aprendizado dos alunos. Com isso lançou-se mão da teoria da Engenharia Didática de Guy Brousseau em 1982 e MichèleArtigue em 1989 relacionadas com o que concerne as Sequências Didáticas (SD), pois essa junção tem revelado grandes avanços no que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem.

Com o objetivo de construir a Sequência Didática (SD) baseou-se no modelo proposto por Cabral (2017), chamada de Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) por se tratar de uma das mais modernas produções dentro desse contexto, a qual vem viabilizar a melhoria do ensino e aprendizagem.

2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Disponibilizamos aqui uma sequência didática construída a partir da dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de mestre em Ensino de Matemática, cujo foco é o ensino de Intervalos de Números Reais, onde levou-se em consideração trabalhos científicos sobre o tema, consulta aos alunos do 1º ano do ensino médio e sondagem nos documentos oficiais da educação no Brasil.

Através das consultas acima citadas, foram gerados elementos para a construção da Sequência Didática, que assim foi aplicada em uma turma de 1º ano do ensino médio de uma escola pública estadual, nesta cidade.

Todos os resultados obtidos oriundos da aplicação da Sequência Didática após terem sido profundamente analisados, nos deram como resposta, a eficácia da Sequência Didática como magnífico instrumento para o ensino de Intervalos de Números Reais, levando-nos com isso, a disponibilizar aos docentes de Matemática, para que possam vir a tratar desse objeto de estudo em sala de aula.

Para fins de aplicação desse conteúdo, sugerimos a consulta do capítulo 2 da dissertação “O ensino de Intervalos de Números Reais por meio de uma Sequência Didática” que se encontra nas referências.

2.1 Orientações aos professores

Para obter sucesso na aplicação da metodologia aqui proposta, devem levar em consideração alguns pontos importantes, ou seja, o professor deve dividir a turma em grupos, uma vez que a resposta de cada aluno deve ocorrer através de intervenções do professor, porém este não deve intervir junto aos alunos com o intuito de repassar conhecimentos, pois nesse momento o docente é mero orientador no que diz respeito ao desenvolvimento das atividades, levando com isso aos alunos descobrirem por si mesmo as suas descobertas.

É importante que na primeira atividade, os alunos sejam orientados no que diz respeito ao desenvolvimento da mesma, pois essa precisa alcançar determinada autonomia através do alunado. Na busca dessa autonomia, os alunos devem ser orientados pelo professor.

Quando da aplicação da Sequência Didática, é mínima a intervenção do professor, porém se alguns alunos estiverem indo no sentido contrario do objetivo das atividades, o professor deve intervir para que se retome o sentido correto que se pretende alcançar.

O quadro abaixo mostra a descrição e os objetivos que queremos alcançar.

Quadro 1 – Descrição e objetivos das atividades

Atividade	Descrição	Objetivo
1	Fazer o aluno perceber a existência de uma quantidade infinita de números reais entre dois extremos, contendo ou não esses extremos.	Obter o conceito de intervalos de números reais.
2	Fazer o aluno perceber que existem outros intervalos com a quantidade de números reais infinita.	Estender o conceito de Intervalos de Números Reais.
3	Descobrir as diferentes formas de representação de um Intervalo de números Reais	Representar geometricamente e algebricamente os Intervalos de Números Reais e fazer sua descrição.
4	Fazer o aluno perceber que a união de dois Intervalos de Números Reais, começa no menor valor e termina no maior valor que compõem os mesmos.	Conceituar a união de intervalos de números reais.
5	Descobrir que a interseção entre dois Intervalos de Números Reais é formada pelos elementos que estão no primeiro e no segundo intervalo.	Conceituar a interseção de Intervalos de Números reais.
6	Descobrir que a diferença de dois Intervalos de Números Reais é formada pelos elementos que estão no primeiro e não	Conceituar a diferença de Intervalos de Números Reais

	estão no segundo intervalo	
7	Descobrir que se um intervalo está contido no outro, a diferença entre o maior e o menor intervalo é formada pelos elementos que estão no maior e não estão no menor intervalo.	Conceituar o complementar de intervalos de números reais.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

2.2 A sequência didática proposta

A Sequência Didática proposta é constituída de atividades com os moldes de intervenção estruturante. Essas atividades foram organizadas conforme a proposta de Cabral (2017), o que nos leva a solicitar ao leitor e leitura da obra do autor que é intitulado por “sequências Didáticas: Estrutura e Elaboração”.

Na visão do autor, considerando um objeto matemático, com uma superfície S, a reconstrução conceitual desse objeto seria o procedimento adotado, ou seja, a medida da área de uma superfície pode ser encontrada a partir de uma unidade a qual denominamos Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC). O autor diz também que para reconstruir o conceito matemático, deve-se escolher primeiramente uma UARC inicial, denominada UARC de primeira geração (UARC-1), que não necessariamente deve ser um problema. Existe uma liberdade em começar a reconstrução do objeto matemático.

Para fins de organização dos conteúdos as UARCS são apresentadas em quatro intervenções: A intervenção Inicial (I_i), é o momento inicial do processo, no qual o professor leva os alunos a perceber as regularidades do conceito através de observações ou ainda de forma inconsciente; A Intervenção Reflexiva (I_r), se caracteriza através dos questionamentos, feitos em sala de aula, uma vez que o professor durante todo o tempo de aplicação do processo de aprendizagem, leva os alunos a pensar sobre suas práticas e suas consequências, relacionadas às atividades que estão realizando; A Intervenção Exploratória (I_e), tem a característica de aprofundamento, no que diz respeito às respostas obtidas pelos alunos, proveniente das Intervenções Reflexivas (I_r), levando os mesmos a avançar no aprendizado, fazendo experimentos, preencher tabelas, construir gráficos etc...; Na Intervenção Formalizante (I_f), ocorre um fortalecimento do conhecimento adquirido pelos alunos, através de uma linguagem que satisfaça o estudo formal, ou seja, uma linguagem matemática.

Segundo Cabral (2017), existe alguns modelos aos quais as intervenções ilustradas acima fixam a Sequência Didática relacionada aos conteúdos de Matemática ligados â educação básica.

Com relação a Intervenção Inicial foram geradas duas modalidades para concretizar a mesma, as quais são: A "Exploração Potencial (E_p)", (I_i– E_p) e a "Conexão Pontual(C_p)", (I_i– C_p). Aqui o professor é um orientador do processo de reconstrução, de um ou mais conceitos.

Toda Sequência Didática está munida de intencionalidade, que é de suma importância para um planejamento bem construído, e através de provocações oriundas das Intervenções Estruturantes e de Intervenções Ocultas, o aluno se vê envolvido em um "momento didático" discursivo.

Tais Intervenções Ocultas, Cabral (2017) as denominou de Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (I–OMO), que são importantíssimas, pois auxiliam o professor a articular se os alunos estão próximos ou distantes do objeto de estudo, bem como manter o objeto proposto e o centro da reconstrução que deseja alcançar através da Sequência Didática.

Para um melhor entendimento da construção de uma UARC, a mesma é descrita em categorias estruturantes que concretizam o texto de uma Sequência Didática, as quais chamamos de: Intervenção Inicial (I_i), Intervenção Reflexiva(I_r), Intervenção Exploratória(I_e), Intervenção Formalizante(I_f), Intervenção Avaliativa Restritiva(IA_r), Intervenção Avaliativa Aplicativa(IA_a) e Intervenção Oral de Manutenção Objetiva(i-OMO).

Quadro1 - Intervenções Estruturantes de uma Sequência Didática proposta por Cabral (2017).

INTERVENÇÕES ESTRUTURANTES	ESCRITAS	´Pré-Formal -Intervenção Inicial(I_i) -Intervenção Reflexiva(I_r) -Intervenção Exploratória(I_e)
		Formal -Intervenção Formalizante(I_f)
		Pós-Formal -Intervenção de avaliação Restritiva(IA_r) -Intervenção de Avaliação Aplicativa(IA_a)
	ORAIS	Intervenção Oral de Manutenção Objetiva(I-OMO)

Fonte: Adaptado de Cabral (2017)

As intervenções ilustradas no quadro acima foram utilizadas para a construção das atividades da Sequência Didática que desenvolvemos sobre intervalos de números reais. Desta forma apresentamos abaixo as atividades que fizeram parte de nossa Sequência Didática.

ATIVIDADE 1

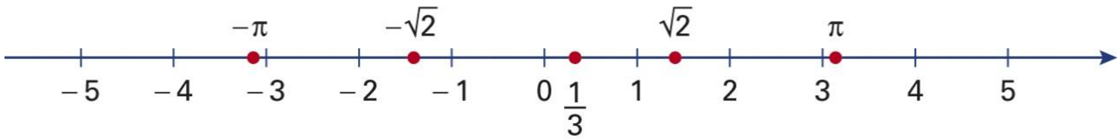
Título: Intervalos de números Reais

Objetivo: Obter o conceito de intervalos de números reais

Material: Roteiro de atividades, papel caneta ou lápis

Procedimento: Atividades.

1)(I_i) Dada a reta real abaixo:



A1) (Intervenção exploratória I_e) Considere os números reais 2 e 4.

A2)(I_r) Entre os números 2 e 4, existem números reais?

A3) (I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

A4) (I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item A3, podemos formar um conjunto de números reais?

A5) (I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item A3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 2?

A6) (I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item A3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 4?

A7) (I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item A3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 2 e o 4?

B1)(I_e)Considere os números reais -5 e -1.

B2)(I_r)Entre esses números que você considerou, existem números reais?

B3)(I_r)Quais? A quantidade é finita ou infinita?

B4)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item B3 podemos formar um conjunto de números reais?

B5)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item B3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -5?

B6)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item B3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -1?

B7)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item B3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -5 e o -1?

C1)(I_e) Considere os números reais -2 e 2.

C2)(I_r) Entre esses números que você considerou, existem números reais?

C3) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

C4)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item C3, podemos formar um conjunto de números reais?

C5)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item C3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -2?

C6)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item C3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 2?

C7)(I_r)Com todos esses números reais que você encontrou no item C3, podemos formar um conjunto de números reais incluindo o -2 e o 2?

D1)(I_e) Considere os números reais 2 e 5.

D2)(I_r) Entre esses números que você considerou, existem números reais?

D3)(I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

D4)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item D3, podemos formar um conjunto de números reais?

D5)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item D3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 2?

D6)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item D3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o segundo o 5?

D7)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item D3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 2 e o 5?

D8) (I_f) -Diante de tudo o que foi discutido, o professor formalizará tal conceito.

ATIVIDADE 2

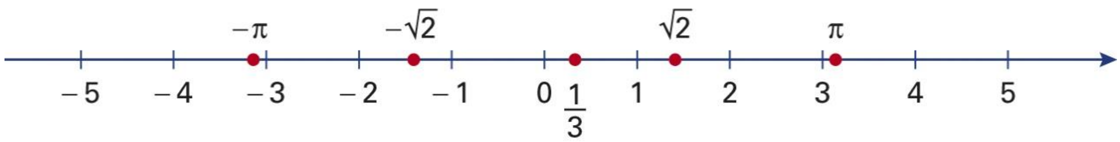
Título: Extensão da definição de Intervalos de Números Reais

Objetivo: Estender o conceito de Intervalos de Números Reais

Material: Roteiro de atividades, papel, caneta ou lápis

Procedimentos: Atividades

1 (I_i) Dada a reta real abaixo:



A1)(I_e) Considere o número real 0 na reta acima?

A2)(I_r) Após o número 0, existem números reais?

A3)(I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

A4)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou, no item A3, podemos formar um conjunto de números reais?

A5)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou, no item A3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o número 0?

A6)(I_r) Antes do número 0 existem números reais?

A7)(I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

A8)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou, no item A7, podemos formar um conjunto de números reais?

A9)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item A7, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 0?

A10)(I_r) Com todos os números que você encontrou nos itens A3 e A7 incluindo o 0, podemos formar um conjunto de números reais, que é a própria reta acima?

B1)(I_e) Considere o número real -3 na reta acima?

B2)(I_r) Após o número -3, existem números reais?

B3)(I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

B4)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou, no item B3 podemos formar um conjunto de números reais?

B5)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou, no item B3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -3?

B6)(I_r) Antes do número ,-3, existem números reais?

B7)(I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

B8)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item B7,podemos formar um conjunto de números reais?

B9)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item B7,podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o -3?

B10)(I_r) Com todos os números reais que você encontrou nos itens B3 e B7 incluindo o -3, podemos formar um conjunto de números reais, igual a própria reta real acima?

C1)(I_e) Considere o número real 4 na reta acima?

C2)(I_r) Após o número 4, existem números reais?

C3)(I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

C4)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou, no item C3, podemos formar um conjunto de números reais?

C5)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou, no item C3, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 4?

C6)(I_r) Antes do número 4, existem números reais?

C7)(I_r) Quais? A quantidade é finita ou infinita?

C8)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item C7, podemos formar um conjunto de números reais?

C9)(I_r) Com todos esses números reais que você encontrou no item C7, podemos formar um conjunto de números reais, incluindo o 4?

C10)(I_r) Com todos os números reais que você encontrou nos itens C3 e C7, incluindo o 4, podemos formar um conjunto de números reais, igual reta real acima?

C11) (I_f) -Diante de tudo o que foi discutido, o professor formalizará tal conceito.

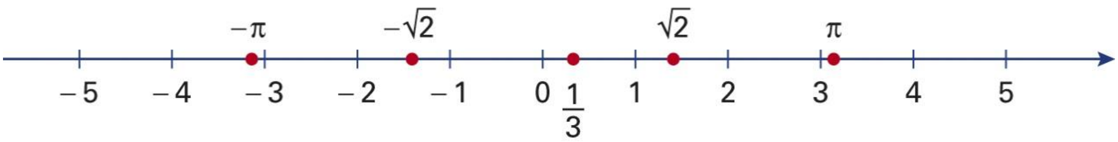
ATIVIDADE 3

Título: Representação geométrica, representação algébrica e a descrição de Intervalos de Números Reais.

Objetivo: Representar geometricamente e algebricamente os Intervalos de Números Reais e fazer sua descrição.

Procedimento: Atividades

1) (I_i) Dado a reta real abaixo:

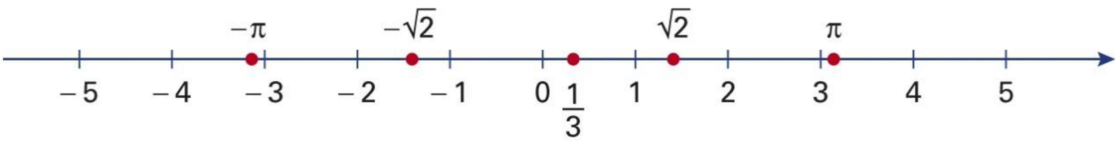


1.1)(I_e) Marque todos os números reais entre 0 e 2.

1.2)(I_r) Qualquer número que estiver entre 0 e 2, são maiores do que 0 e menores do que 2?

1.3)(I_r) Como poderíamos descrevê-los?

2) Dada a reta real abaixo:

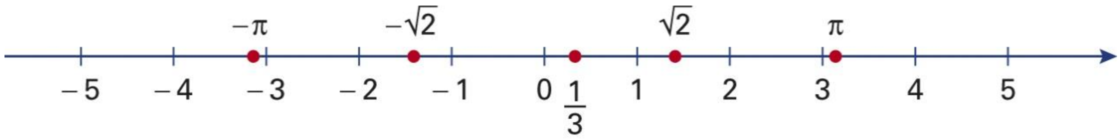


2.1(I_e) Marque todos os números reais entre 0 e 2 incluindo o extremo 0.

2.2)(I_r) Qualquer número que estiver entre 0 e 2, incluindo o 0, são maiores do que ou igual a 0 e menores do que 2?

2.3)(I_r) Como poderíamos descrevê-los?

3. Dada a reta real abaixo

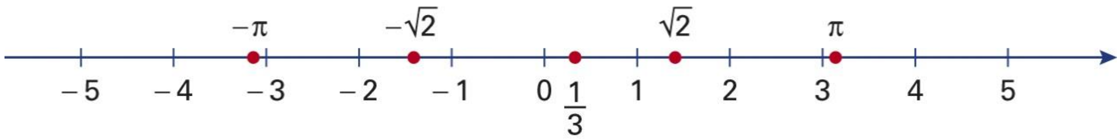


3.1)(I_e) Marque todos os números reais entre 0 e 2 incluindo o extremo 2.

3.2) Qualquer número que estiver entre 0 e 2, incluindo o 2, são maiores do que 0 e menores do que ou igual a 2?

3.3) Como poderíamos descrevê-los?

4. dada a reta real abaixo

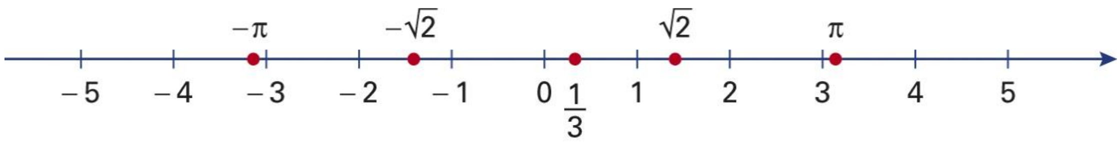


4.1)(I_e) Marque todos os números reais entre 0 e 2 incluindo os extremos 0 e 2..

4.2)(I_r) Qualquer número que estiver entre 0 e 2, incluindo o 0 e 0 2, são maiores do que ou igual a 0 e menores do que ou igual a 2?

4.3)(I_r) Como poderíamos descrevê-los?

5. Dada a reta real abaixo



5.1)(I_e) Marque todos os números reais após o número -1.

5.2)(I_r) Qualquer número após o número -1 são maiores do que -1?

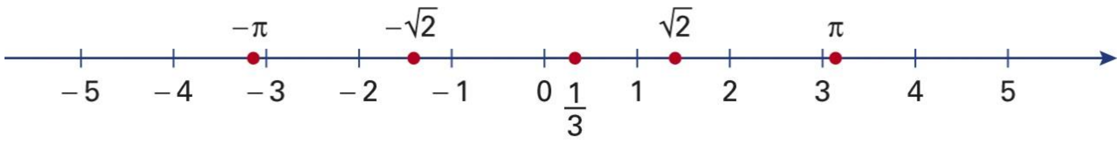
5.3)(I_r) Como podemos descrever o conjunto de números reais do item E.2?

5.4)(I_e) Marque todos os números reais após o -1, incluindo o -1.

5.5)(I_r) Qualquer número pós o -1 incluindo o -1, são maiores do que ou igual a -1.

5.6)(I_r) Como podemos descrever o conjunto de números reais do item E.5?

6. Dada a reta real abaixo



6.1)(I_e) Marque todos os números reais antes do -1.

6.2)(I_r) Qualquer número antes do -1 são menores do que -1?

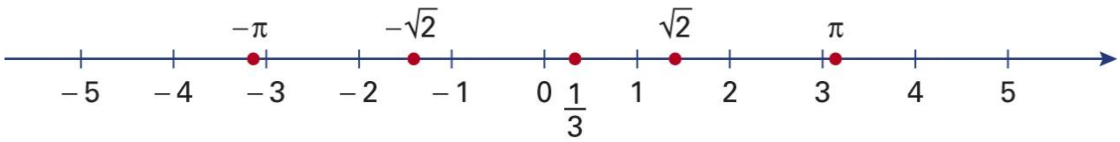
6.3)(I_r) Como podemos descrever o conjunto de números do item 8.2?

6.4)(I_e) Marque todos os números reais antes do – 1, incluindo o – 1.

6.5)(I_r) Qualquer número antes do -1, incluindo o -1 são menores do que ou igual a -1?

6.6)(I_r) Como podemos descrever o conjunto de números reais do item 8.5?

7)(I_i). Dada a reta real abaixo:



7.1)(I_e) Marque todos os números reais da reta acima.

7.2)(I_r) A quantidade dos números do item 7.1 é infinita (a direita e a esquerda)?

7.3)(I_r) Como podemos descrever o conjunto de números do item 9.2?

(I_f) -Diante de tudo o que foi discutido, o professor formalizará tal conceito.

<u>ATIVIDADE 4</u>

Título: União de Intervalos de números Reais

Objetivo: Conceituar a união de intervalos de números reais.

Material: Roteiro de atividades, papel, caneta ou lápis.

Procedimentos: Atividades

1)(I_i) Dados dois intervalos A e B. (IA_a). Determine o intervalo que contém todos os elementos dos pares de intervalos A e B.

a)A= [1,3] e B=[3,5]

b)A=]-2,0] e B=]0,3

c) A=]0,2] e B=]0,3]

d) A=]-1,0[e B=[0,6]

e) A=[3,5] e B=]-3,4[

(I_f).Diante de tudo o que foi discutido, o professor formalizará tal conceito.

ATIVIDADE 5

Título: Intersecção de Intervalos de números reais.

Objetivo: Conceituar a interseção de intervalos de números reais.

Material: Roteiro de atividades, papel, caneta ou lápis

Procedimentos: Atividades

1)(I_i) Dados dois intervalos A e B.(IA_a). Determine o intervalo que contém todos os elementos que estão ao mesmo tempo nos pares de intervalos A e B abaixo:

a) A= [-1, 2] e B=[0,5[

b)A=]-2,1] e B=[-1.1[.

c) A=]-2,2]e B=[-1.4[

d) A=[-3,0[e B=[-1,3[

e) A=]0,5] e B=]2,6[

(I_f).Diante de tudo o que foi discutido, o professor formalizará tal conceito.

ATIVIDADE 6

Título: Diferença de intervalos de números reais

Objetivo: Conceituar a diferença de intervalos de números reais

Metodologia: Roteiro de atividades, papel, caneta ou lápis.

Procedimentos: Atividades

1)(I_i).Dados dois pares de intervalos A e B abaixo.(IA_a). Determine o intervalo que contém somente elementos que pertencem a A e não pertencem a B ou ainda que pertencem a B e não pertencem a A

a) A=[0, 5] e B=[3,5]

b) A=[2,6[e B=]3,5[

c) A=[-14[e B=]2,5[

d) A=]-3,5[e B=[0,6[

e) A=[1,7] e B=[2,,5]

(I_f).Diante de tudo o que foi discutido, o professor formalizará tal conceito.

ATIVIDADE 7

Título: Complementar de intervalos de números reais.

Objetivo: Conceituar o complementar de intervalos de números reais.

Metodologia: Roteiro de atividades, papel, caneta ou lápis.

Procedimentos: Atividades

1)(I_i) Dados dois pares de intervalos A e B, com $A \subset B$.(IA_a) Determine o intervalo que contem somente elementos que pertencem a B e não pertencem a A.

a) A=[1,4[e B=[0,5]

b) A=]-1,2[e B=]-2,3]

c) A=[2,6]   e B=[1, 7[

d) A=]-2,4]e B=[-3,5]

e) A=[1/2,[3 e B=[0, 4[

(I_f).Diante de tudo o que foi discutido, o professor formalizará tal conceito.

3 SOBRE O OBJETO MATEMÁTICO

Neste capítulo disponibilizo alguns aspectos matemáticos relevantes sobre Intervalos de Números Reais. Certos subconjuntos de *R*, determinados por desigualdades, têm grande importância na Matemática: são os Intervalos (Dante, 2009, p.21).

Segundo (LIMA, 1976), um corpo é um conjunto K munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem certas condições chamadas os axiomas de corpos abaixo especificadas.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in$ K sua soma $x + y \in$ K, enquanto a multiplicação associa a esses elementos seu produto $x.y \in$ K. Os axiomas de corpo são os seguintes: A: Axiomas da adição.

A1. Associatividade – quaisquer que sejam $x, y, z \in$ K, tem-se $(x+y)+z = x+(y+z)$.

A2. Comutatividade – quaisquer que sejam $x, y \in$ K tem-se $x+y = y+x$.

A3. Elemento neutro – existe $0 \in$ K tal que $x+0 = x$ seja qual for $x \in$ K. O elemento 0 chama-se “zero”.

A4. Simétrico – todo elemento $x \in$ K possui um simétrico – $x \in$ K tal que $x+(-x) = 0$.

M: Os axiomas da multiplicação.

M1. Associatividade – dados quaisquer $x, y, z \in$ K, tem-se $(x.y).z = x.(y.z)$.

M2. Comutatividade – sejam quais forem $x, y \in$ K, vale $x.y = y.x$

M3. Elemento neutro – existe $1 \in$ K tal que $1 \neq 0$ e $x.1 = x$, qualquer que seja $x \in$ K. O elemento 1 chama-se “um”.

M4. Inverso multiplicativo – todo $x \neq 0$ em K possui um inverso x^{-1} tal que $x.x^{-1} = 1$.

D1. Distributividade – dados x, y, z quaisquer em K, tem-se $x.(y+z) = xy+xz$. Por comutatividade tem-se também $(x+y).z = xz+yz$.

Com isso apresentamos abaixo, um capítulo de números reais, envolvendo intervalos de números reais, baseado em Lima (2017).

Definição 1. *R* é um corpo.

Isto significa que estão definidas em *R* duas operações, chamadas adição e multiplicação, que cumprem certas condições, abaixo especificadas.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x,y \in$ R, sua soma $x + y \in$ R, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x.y \in R$.

Os axiomas a que essas operações obedecem são:

Associatividade: para quaisquer $x, y, z \in R$ tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x.y).z = x.(y.z)$.

Comutatividade: para quaisquer $x, y \in$ R tem-se $x + y = y + x$ *e* $x.y = y.x$

Elementos neutros: existem em R dois elementos distintos 0 e 1 tais que $x + 0 = x$ e $x.1 = x$ para qualquer $x \in R$.

Inversos: todo $\in$ R possui um inverso aditivo $-x \in R$ tal que $x + (- x) = 0$ e, se $x \neq 0$, existe também um inverso multiplicativo $x^{-1} \in$ R tal que $x.x^{-1} = 1$

Distributividade: *para* $x, y, z \in R$ quaisquer, tem-se $x.(y + z) = x.y + x.z$

Dos axiomas acima resultam todas as regras familiares de multiplicação com os números reais. A título de exemplo, estabelecemos algumas delas.

Da comutatividade resulta que $0 + x = x$ *e* $- x + x = 0$ para todo $\in$ R. Da mesma forma $1.x = x$ *e* $x^{-1}.\ x = 1$ quando $x \neq 0$. A soma $x + (- y)$ será indicada por $x - y$ e chamada a diferença entre *x e y*. Se $y \neq 0$, o produto $x.y^{-1}$ será representado também por $\frac{x}{y}$ e chamado o quociente *de* x por y. As operações $(x, y) \longrightarrow x - y$ *e* $(x, y) \longrightarrow \frac{x}{y}$ chamam-se respectivamente, subtração e divisão. Evidentemente, a divisão de x por y só faz sentido quando $y \neq 0$, pois o número 0 não possui inverso multiplicativo.

Da distributividade seque-se, para todo $x \in$ R, vale $x.0 + x = x.0 + x.1 = x(0 + 1) = x.1 = x$. Somando - x a ambos os membros da igualdade $x.0 + x = x$ obtemos $x.0 = 0$.

Por outro lado, de $x.y = 0$ podemos concluir que $x = 0$ ou $y = 0$. Com efeito, se for $y \neq 0$ então podemos multiplicar ambos os membros desta igualdade por y^{-1} e obtemos $x.y.y^{-1} = 0.y^{-1}$, donde $x=0$.

Da distributividade resultam também as “regras dos sinais”: $x.(- y) = (- x).y = -(x.y)$ *e* $(-x).(- y) = xy$. Com efeito, $x.(- y) + x.y = x.(-y + y) = x.0 = 0$.

Somando -(x.y) a ambos os membros da igualdade $x.(-y) + x.y = 0$ vem $x.(-y) = -(x.y)$. Da mesma forma, $(-x).y = -(x.y)$. Logo $(-x).(-y) = -[x.(-y)] = -[-(x.y)] = x.y$. Em particular, $(-1).(-1) = 1$. (Uma observação importante é que a igualdade $-(-z) = z$, acima empregada, resulta de somar-se z a ambos os membros da igualdade $-(-z) + (-z) = 0$).

Se dois números reais x, y têm quadrados iguais, então $x = \pm y$. Com efeito de $x^2 = y^2$ decorre que $0 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ e, como sabemos, o produto de dois números reais só é zero quando pelo menos um dos fatores é zero. Temos agora uma definição importante, vejamos abaixo.

Definição 2. R é um corpo ordenado.

Isto significa que existe um subconjunto $R_+ \subset R$, chamado dos números reais positivos, que cumpre as seguintes condições:

P1. A soma e o produto de números reais positivos são positivos. Ou seja, $x,y \in R+ \Rightarrow x + y \in R_+$ e $x.y \in R_+$. P2. Dado $x \in R$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x=0$, ou $x \in R_+$ ou $-x \in R_+$. Se indicarmos com R_- o conjunto dos números $-x$ onde $x \in R_+$, a condição P2, diz que $R = R_+ \cup R_- \cup \{0\}$ e os conjuntos R_+, R_- e $\{0\}$ são dois a dois disjuntos. Os números $y \in R_-$ chamam-se negativos.

Todo número real $x \neq 0$ tem quadrado positivo. Com efeito, se $x \in R+$ então $x^2 = x.x \in R_+$ por P1. Se $x \notin R_+$ então (como $x \neq 0$) $-x \in R_+$ logo, ainda por causa de P1., temos $x^2 = (-x).(-x) \in R_+$. Em particular, 1 é um número positivo porque $1=1^2$.

Escreve-se $x < y$ e diz-se que x é menor do que y quando $y - x \in R_+$, isto é, $y = x + z$ onde z é positivo. Neste caso, escreve-se também $y > x$ e diz-se que y é maior do que x. Em particular, $x > 0$ significa que $x \in R_+$ isto é, que x é positivo, enquanto $x < 0$ quer dizer que x é negativo, ou seja, que $-x \in R_+$.

Na relação de ordem $x < y$ em R valem as seguintes propriedades:

O1. Transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$

O2. Tricotomia: dados $x,y \in R$, ocorre exatamente uma das alternativas $x = y$, $x < y$ ou $y < x$.

O3. Monotonicidade da adição: se $x < y$ então, para todo $z \in R$, tem-se $x + z < y + z$

O4. Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ então, para todo $z > 0$ tem-se $xz < yz$. Se, porém, $z < 0$ então $x < y$ implica $yz < xz$.

Demonstração:

O1. $x < y$ e $y < z$ significa $y - x \in R_+$ e $z - y \in R_+$. Por P1 segue-se que $(y - x) + (z - y) \in R_+$, isto é , $z - x \in R_+$, ou seja, $x < z$.

O2. Dados $x, y \in R$, ou $y - x \in R_+$, $y - x = 0$ ou $y - x \in R$ (isto é, $x - y \in R_+$). No primeiro caso tem-se $x < y$, no segundo $x = y$ e no terceiro $y < x$. Estas alternativas se excluem mutuamente, por P2.

O3. Se $x < y$ então $y - x \in R_+$, donde $(y + z) - (x + z) = y - x \in R_+$, isto é, $x + z < y + z$.

O4. Se $x < y$ e $z > 0$ então $y - x \in R_+$ e $z \in R_+$, logo $(y - x).z \in R_+$, ou seja, $yz - xz \in R_+$, o que significa $xz < yz$. Se $x < y$ e $z < 0$ então $y - x \in R_{++}$ e $-z \in R_+$, donde $xy - yz = (y - x).(-z) \in R_+$, o que significa $yz < xz$. Mas geralmente, $x < y$ e $x' < y'$ implicam $x + x' < y + y'$ .Com efeito $(x + y) - (x + x') = (y - x) + (y' - x') \in R_+$. Da mesma forma $0 < x < y$ e $0 < x' < y'$ implicam $xx' < yy'$ pois $yy' - xx' = yy' - yx' + yx' - xx' = y(y' - x') + (y - x)x > 0$. Se $0 < x < y$ então $y\text{-}1 < x\text{-}1$. Para provar, nota-se primeiro que $x > 0 \Rightarrow x^{-1} = x.(x^{-1})^2 > 0$. Em seguida, multiplicando ambos os membros da desigualdade $x < y$ por $x^{-1}y^{-1}$ vem $y^{-1} < x^{-1}$.Como $1 \in R$ é positivo, segue-se que $1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < ...$Podemos então considerar $N \subset R$. Segue-se que $Z \subset R$ pois $0 \in R$ e $n \in R \Rightarrow -n \in R$. Além disso, se $m, n \in Z$ com $n \neq 0$ então $\frac{m}{n} = m.n^{-1} \in R$, o que nos permite concluir que $Q \subset R$. Assim, $N \subset Z \subset Q \subset R$.

A seguir, veremos que a inclusão $Q \subset R$ é própria.

Exemplo 1. (Desigualdade de bernoulli). Para todo número real $x \geq -1$ e todo $n \in R$, tem-se $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Isto se prova por indução em n, sendo óbvio para $n = 1$. Supondo a desigualdade válida para n, multiplicamos ambos os membros pelo número $1 + x \geq 0$ e obtemos:

$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$. Pelo mesmo argumento, vê-se que $(1 + x)^n > 1 + nx$ quando $n > 1$, $x > -1$ e $x \neq 0$.

A relação de ordem em R permite definir o valor absoluto (ou módulo) de um número real $x \in R$ assim: $|x| = x$, se $x > 0$, $|0| = 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$. Em outras palavras, $|x| = \max\{x, -x\}$ é o maior dos números reais x e $-x$.

Tem-se $-|x| \leq x \leq |x|$ para todo $x \in R$. Com efeito, a desigualdade $x \leq |x|$ é óbvia, enquanto $-|x| \leq x$ resulta de multiplicar por -1 ambos os membros da desigualdade $-x \leq |x|$. Podemos caracterizar $|x|$ como o único número ≥ 0 cujo o quadrado é x^2.

Teorema 1. Se $x, y \in R$ então $|x + y| \leq |x| + |y|$ e $|x.y| = |x|.|y|$

Demonstração: Somando membro a membro as desigualdades $|x| \geq x$ e $|x| \geq y$ vem $|x| + |y| \geq x + y$. Analogamente de $|x| \geq -x$ e $|y| \geq -y$ resulta $|x| + |y| \geq -(x + y)$. Logo $|x| + |y| \geq |x + y| = \max\{x + y, -(x + y)\}$. Para provar que $|x.y| = |x|.|y|$, basta mostrar que estes dois números têm o mesmo quadrado, já que ambos são ≥ 0. Ora o quadrado de $|x.y|$ é $(x.y)^2 = x^2.y^2$, enquanto $(|x|.|y|)^2 = |x|^2.|y|^2 = x^2.y^2$.

Teorema 2. Sejam $a, x, \delta \in R$. Tem-se $|x - a| < \delta$ se, e somente se, $a - \delta < x < a + \delta$.

Demonstração: Como $|x - a|$ é o maior dos números $x - a$ e $-(x - a)$, afirmar que $|x - a| < \delta$ equivale a dizer que se tem $x - a < \delta$ e $-(x - a) < \delta$, ou seja, $x - a < \delta$ e $x - a > -\delta$. Somando a, vem: $|x - a| < \delta \Leftrightarrow x < a + \delta$ e $x > a - \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$.

Obs. De modo análogo se vê que $|x - a| \leq \delta \Leftrightarrow a - \delta \leq x \leq a + \delta$.

Usaremos as seguintes notações para representar tipos especiais de conjuntos de números reais, chamados intervalos:

$[a, b] = \{x \in R;\ a \leq x \leq b\}$	$]-\infty, b] = \{x \in R;\ x \leq b\}$
$]a, b[= \{x \in R;\ a < x < b\}$	$]-\infty, b[= \{x \in R;\ x < b\}$
$[a, b[= \{x \in R;\ a \leq x < b\}$	$[a, +\infty[= \{x \in R;\ x \geq a\}$
$]a, b] = \{x \in R;\ a < x \leq b\}$	$]a, +\infty[= \{x \in R;\ x > a\}$
$]-\infty, +\infty[= R$	

Os quatro intervalos da esquerda são limitados, com extremos a, b: $[a, b]$ é um intervalo fechado, $]a, b[$ é aberto, $[a, b[$ é fechado à esquerda e $]a, b]$ é fechado à direita. Os cinco intervalos à direita são ilimitados: $]-\infty, b]$ é a semi-reta esquerda fechada de origem b. Os demais têm denominações análogas. Quando $a = b$, o intervalo fechado $[a, b]$ reduz-se a um único elemento e chama-se um intervalo degenerado.

Em termos de intervalos, o Teorema 2 diz que $| x – a | < \varepsilon$ se, e somente se, x pertence ao intervalo aberto]a - ε, a + ε[. Analogamente $| x – a | \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

É muito conveniente imaginar o conjunto R como uma reta (a “reta real”) e os números reais como pontos dessa reta. Então a relação $x < y$ significa que o ponto x está à esquerda de y(e y à direita de x), os intervalos são segmentos de reta e $| x – y |$ é a distância do ponto x ao ponto y. O significado do Teorema 2 é de que o intervalo $]a - \delta, a + \delta[$ é formado pelos pontos que distam menos de δ do ponto a. Tais interpretações geométricas constituem um valioso auxílio para a compreensão dos conceitos e teoremas de Análise.

Definição 3. *R* é um corpo ordenado completo.

Nada do que foi dito até agora permite distinguir *R* de *Q* pois os números racionais também constituem um corpo ordenado. Acabaremos agora nossa caracterização de *R*, descrevendo-o como um corpo ordenado completo, propriedade que *Q* não tem.

Um conjunto $X \subset R$ diz-se limitado superiormente quando existe algum $b \in R$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que b é uma cota superior de *X*. Da mesma forma, diz-se que o conjunto $X \subset R$ é limitado inferiormente quando existe a ∈ *R* tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. O número a chama-se então uma cota inferior de *X*. Se *X* é limitado superior e inferiormente, diz-se que *X* é um conjunto limitado. Isto significa que *X* está contido em algum intervalo limitado [*a, b*] ou, equivalentemente, que existe $k > 0$ tal que $x \in X \Rightarrow | x | \leq k$.

Seja $X \subset R$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $b \in R$ chama-se o supremo do conjunto *X* quando é a menor das cotas superiores de *X*. Mais explicitamente, b é o supremo de X quando cumpre as duas condições:

S1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;

S2. Se $c \in R$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$.

A condição S2 admite a seguinte reformulação:

S2’. Se $c < b$ então existe $x \in X$ com $c < x$

Com efeito, S2’ diz que nenhum número real menor do que b pode ser cota superior de *X*. Ás vezes se exprime S2’ assim: para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon < x$.

Escrevemos $b = \sup X$ para indicar que b é o supremo do conjunto *X*.

Analogamente, se $X \subset R$ é um conjunto não vazio, limitado inferiormente, um número real a chama-se ínfimo do conjunto X, e escreve-se $a = \inf X$,quando é a maior das cotas inferiores de X. Isto equivale às duas afirmações:

I1. Para todo $x \in X$ tem-se $a \leq x$;

I2. Se $c \leq x$ para todo $x \in X$ então $c \leq a$

A condição I2 pode também ser formulada assim:

I2' . Se $a < c$ então existe $x \in X$ tal que $x < c$.

De I2' diz que nenhum número maior do que a é cota inferior de X. Equivalentemente para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$.

Diz-se que um número $b \in X$ é o maior elemento ou (elemento máximo)do conjunto X quando $b \geq x$ para todo $x \in X$. Isto quer dizer que b é uma cota superior de X, pertencente a X. Por exemplo, b é o elemento máximo do intervalo fechado $[a, b]$, mas o intervalo $[a, b[$ não possui maior elemento. Evidentemente, se um conjunto X possui elemento máximo este será o seu supremo. A noção de supremo serve precisamente para substituir a idéia de maior elemento de um conjunto quando esse maior elemento não existe. O supremo do conjunto $[a,b[$ é b. Considerações análogas podem ser feitas em relação ao ínfimo.

A afirmação de que o corpo ordenado R é completo significa que todo conjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset R$ possui supremo $b = \sup X \in R$.

Não é necessário estipular também que todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente, $X \subset R$ possui ínfimo. Com efeito, neste caso o conjunto $Y = \{- x \,;\, x \in X\}$ é não-vazio, limitado superiormente, logo possui um supremo $b \in R$. Então, como se vê sem dificuldade, o número $a = - b$ é o ínfimo de Y.

Agora iremos ver algumas consequências da completeza de R.

Teorema 3:

i) O conjunto $N \subset R$ dos números naturais não é limitado superiormente;

ii) O ínfimo do conjunto X = $\{ \frac{1}{n}; n \in N \}$ é igual a 0;

iii) Dados $a, b \in R_+$, existe $n \in N$ tal que $n.a > b$.

Demonstração: Se $N \subset R$ *fosse limitado superiormente, existiria* $c = \sup N$. Então $c - 1$ não seria cota superior de N, isto é, existiria $n \in N$ com $c - 1 < n$. Daí resultaria $c < n + 1$, logo c não seria cota superior de N. Esta contradição prova i). Quanto a ii), 0 é evidentemente uma cota inferior de X. Basta então provar que nenhum $c > 0$ é cota inferior de X. Ora, dado $c > 0$, existe, por i) um número natural

$n > \frac{1}{c}$, donde $\frac{1}{n} < c$, o que prova ii). Finalmente, dados $a, b \in R_+$ usamos i) para obter $n \in N$ tal que $n > \frac{b}{a}$. Então na > b, o que demonstra iii). As propriedades i), ii) e iii) do teorema acima são equivalentes e significam que R é um corpo arquimediano. Na realidade, iii) é devida ao matemático grego Eudoxo, que viveu alguns séculos antes de Arquimedes.

Veremos adiante alguns teoremas também muito importantes envolvendo intervalos.

Teorem4. (Intervalos encaixados). Dada uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset ... I_n \supset ...$ de intervalos limitados e fechados $I_n = [an,bn]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$ para todo $n \in N$.

Demonstração: As inclusões $I_n \supset I_{n+1}$ significam que,

$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1$.

O conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ é, portanto, limitado superiormente. Seja $c = \sup A$. Evidentemente, na $\leq c$ para todo $n \in N$. Além disso, como cada b_n é cota superior de A, temos $c \leq b_n$ para todo $n \in N$. Portanto $c \in I_n$ qualquer que seja $n \in N$.

Teorema 5. O conjunto dos números reais não é enumerável.

Demonstração: Mostraremos que nenhuma função $f : N \longrightarrow R$ pode ser sobrejetiva. Para isto, supondo f dada, construiremos uma subseqüência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset ... I_n \supset ...$ de intervalos limitados e fechados tais que $f(n) \notin I_n$. Então se c é um número real pertencente a todos os I_n, nenhum dos valores $f(n)$ pode ser igual a c, logo f não é sobrejetiva. Para obter os intervalos, começamos tomando $I_1 = [a_1, b_1]$ tal que $f(1) < a_1$ e, supondo obtidos $I_1 \supset I_2 \supset ... I_n \supset ...$ tais que $f(j) \notin I_j$, olhamos para $I_n = [an, bn]$. Se $f(n+1) \notin I_n$, podemos simplesmente tomar $I_{n+1} = I_n$. Se, porém, $f(n+1) \in I_n$, pelo menos um dos extremos, digamos a_n, é diferente de $f(n+1)$, isto é, $a_n < f(n+1)$. Neste caso, tomamos $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$, com $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = \frac{1}{2}[(a_n + f(n+1)]$.

Um número real chama-se irracional quando não é racional. Como o conjunto Q dos números racionais é enumerável, resulta do teorema acima, que existem números irracionais e,mais ainda, sendo $R = Q \cup (R - Q)$, os irracionais constituem um conjunto não-enumerável(portanto formam a maioria dos reais) porque a reunião de dois conjuntos enumeráveis seria enumerável.

Corolário. Todo intervalo não-degenerado é não-enumerável. Com efeito, todo intervalo não degenerado contém um intervalo aberto]*a, b*[. Como a função *f* :]- 1, 1 [⟶]*a, b*[, por $f(x) = \frac{1}{2}[(b - a)x + a + b]$ é uma bijeção, basta mostrar que o intervalo aberto]-1, 1 [é não-enumerável. Ora a função φ:*R*⟶]- 1, 1 [, dada por $\varphi(x) = \frac{x}{(1+|x|)}$, é uma bijeção cuja inversa é $\Psi(\varphi(x)) = x$ para qualquer y ∈]-1, 1[e *x* ∈ *R*, como se pode verificar facilmente.

Teorema 6. Todo intervalo não-degenerado *I* contém números racionais e irracionais.

Demonstração: Certamente *I* contém números irracionais pois do contrário seria enumerável. Para provar que *I* contém números racionais, tomamos [a,b] ⊂ *I*, onde *a* < *b* podem ser supostos irracionais. Fixemos $n \in N$ tal que $\frac{1}{n} < b - a$ .Os intervalos $I_m = [\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$, $m \in Z$, cobrem a *reta*, isto é $R = \cup_{m\in Z} I_m$. Portanto existe $m \in Z$ tal que $a \in I_m$. Como *a* é irracional, temos $\frac{m}{n} < a < \frac{m+1}{n}$. Sendo o comprimento $\frac{1}{n}$ do intervalo I_n menor do que $b - a$, segue-se que $\frac{(m+1)}{n} < b$. Logo o número racional $\frac{(m+1)}{n}$ pertence ao intervalo [*a, b*] e portanto ao intervalo *I.*

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante de todo esforço e sondagens realizadas para fins de construção da dissertação cujo título é “O ensino de Intervalos de Números Reais por meio de uma Sequência Didática”. Neste contexto através de experiências de metodologias já experimentadas, levou-nos a elaborar uma Sequência Didática como nova ferramenta de ensino de intervalos de números reais, sustentada na proposta de Cabral (2017) que visa a construção de UARC`S.

Quando aplicamos a Sequência Didática, procuramos sempre enfatizar aos alunos, os pressupostos da teoria que nos deram base para que pudéssemos desenvolver e concluir sua elaboração. Os indícios de aprendizagem foram encontrados através das análises feitas dos resultados obtidos quando da execução da pesquisa, o que nos leva a crer a eficácia das teorias usadas como aporte na dissertação que originou esse produto educacional.

Vale aqui ressaltar resultados importantes no contexto do ensino e aprendizagem, que é direcionado ao aluno, ao professor e ao saber.

No que concerne ao aluno, inicialmente levou-se em consideração as concepções iniciais do objeto de estudo, as quais os levou a manifestação dos obstáculos de aprendizagem e através das potencialidades da Sequência didática aplicada, os alunos despertaram a capacidade do trabalho colaborativo, o qual figura as interações aluno/aluno e aluno/professor, assim como desenvolve a verbalização do pensamento matemático, ou seja, regularidades/generalizações.

Com relação ao professor, de início toma posse das concepções necessárias do objeto de estudo como conteúdo, método e teorias. O professor adquire a capacidade de elaboração de Sequências didáticas estruturadas, se torna capaz de gerenciar situações de ensino, como orientador-mediador, promove o cenário de interações, sistematiza percepções dos alunos, tem a capacidade de formalizar conceitos e sistematizar resultados. Com isso o professor se torna mais organizado para execução de suas tarefas de trabalho.

Deixamos a clientela interessada em conhecer os resultados obtidos, assim como os indícios de aprendizagem alcançados nessa nova proposta no processo de ensino e aprendizagem a lerem o capítulo 6 da dissertação que serviu de base para esse produto.

REFERÊNCIAS

AGUILERA, J.A.U et al. **Uma proposta para o ensino de aprendizagem de intervalos reais por meio de jogos.** In. ESCOLA DE INVERNO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,3.2012, Sant Maria. Anais [...]. Santa Maria UFSM,. Disponível em: http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/PO/PO_Aguilera_Jessica_Ayumi_Uedf. Acesso em: 09 mar. 2019.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. da. **Engenharia didática: evolução e diversidade Didactic engineering: evolution anddiversity. Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, [Florianópolis], v. 7, n. 2, p. 22–52, 2012.

ARTIGUE, M. **Engenharia didática**. In: BRUN, Jean. Didáctica das matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Coleção Horizontes Pedagógicos.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3.ed. São Paulo: BLUCHER, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL Ministério da Educação e Desporto. **Parâmetros Curriculares + Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da educação. Secretaria de Educação Básica. **As Orientações Curriculares do Ensino Médio. Brasília, 2006**. Disponível em:http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_01internet.pdf. Acesso em 09 mar. 2009.

BRASIL. **Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLEM**). Brasília: MEC,2004.

CABRAL, N. F. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Pará: SBM, 2017.

CABRAL, N. F. **O Papel das interações professor-aluno na construção da solução lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras**. 2004. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém,2004.

CARNEIRO, V. C. G. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática**. Zetetike, Campinas, v. 13, n. 23, p. 85–118, 2005.

CRUZ, W. J. **Os números reais: um convite aos professores de Matemática do ensino fundamental e do ensino médio**. 2011. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2009.

FREIRIA, A. A. **A Teoria dos conjuntos de Cantor**. Paidéia, Ribeirão Preto, n. 2, p.70-78, 1992. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/paideia/n2/08.pdf. Acesso em: 09 mar. 2019.

GÓES, M. D. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade**. Cadernos Cedes, Campinas, ano 20, n.50, p.9 - 25, 2000.

GOMES, A. C. F. N. et al. **A construção dos números reais no ensino médio: algumas propostas e reflexões**. In: ENCONTRO REGIONAL DE ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL, 20., 2014, Bagé-RS. Anais [...]. Bagé: Fundação Universitária Federal do Pampa, 2014. Disponível em:https://eventos.unipampa.edu.br/eremet/files/2014/12/CC_Gomes_03596409071.pdf. Acesso em 19 fev. 2019.

GOUVEIA, J.; DIAS, M. A. **Panorama atual do ensino da noção de intervalo sobre R**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo horizonte. Anais [...]. Belo Horizonte: ENEM, 2007.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. v. 1. São Paulo: LTC, 2001.

LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. (Coleção Matemática Universitária, v.1).

LIMA, E. L. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

LOPES, P. C. R. **A Construção dos números Reais**. 2006. 150 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade da Madeira, Funchal – Madeira, 2006.

MACHADO, S. D. A. **Engenharia Didática**. In: MACHADO, S. D. A. et al. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999, p. 197-208.

MENEZES, L. **Matemática, linguagem e comunicação**. 1999. Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/20_ect3.htm . Acesso 27 set. 2018. Texto da Conferência, com o mesmo nome, proferida no ProfMat 1999 – Encontro Nacional de Professores de Matemática que decorreu na cidade de Portimão.

OLIVEIRA, M. M. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores.** Petrópoles - RJ: Vozes, 2013.

OLIVEIRA. M. M. **Conceito de análise matemática na reta para bem compreender os números reais no ensino médio**. 2017. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2017.

PIMENTA, S. G.; ANASTASIOU, L. G. C. **Docência no ensino superior**. São Paulo: Cortez editora, 2002. v.5.119

ROBERT, A. **Quelques outils d'analyse épistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université**. Actes de la IX école d'ete de didactique dês mathématiques. Houlgate. França.1997.

SISPAE. [**Avaliação Educaciona**l]. 2014. Disponível em: http://www.vunesp.com.br/reports/RelatorioSISPAE.aspx?c=SEPA1401. Acesso em: 04 dez. 2015.

SOUZA, Edvaldo Melo. **O ensino de Intervalos de Números Reais por meio de uma Sequência Didática..** 2020. 125 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

SOUZA, K. M. **Intervalos Numéricos, operações com Intervalos e introdução a função.** Ouro Preto do Oeste : [s.n.], 2013.

TORTELLI, L. M, et al. **Escolhendo ambientes intervalares sob diferentes critérios**. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA, 35., 2014, Natal. Proceedings [...]. Natal: Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, 2015. Disponível em: https.semantscholar.org/a983/f7e2b9684403b1778efc4628231 661d47fd1.pdf. Acesso em : 08 maio 2019.

VIVIAN, N. M. Análise dos padrões discursivos de um professor de ciências do ensino fundamental. 181 f. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

ZABALA, Antoni. A prática educativa: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem